



Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова»

**Е.А. Васильева**

## **ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА**

*Утверждено Редакционно-издательским советом университета  
в качестве практикума*

Магнитогорск  
2023

УДК 519.2  
В19

**Рецензенты:**

преподаватель высшей категории  
ГАПОУ ЧО Политехнический колледж  
**Е.В. Ларкина**

Кандидат педагогических наук,  
преподаватель первой категории  
ФГБОУ ВО «Магнитогорский государственный  
технический университет им. Г. И. Носова»,  
Многопрофильный колледж  
**Т.Б. Осолодкова**

**Васильева Е.А.**

**Теория вероятностей и математическая статистика** [Электронный ресурс] : практикум / Елена Александровна Васильева; ФГБОУ ВО «Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова». – Электрон. текстовые дан. (1,80 Мб). – Магнитогорск: ФГБОУ ВО «МГТУ», 2023. – 1 DVD -ROM. – Систем. требования: IBM PC, любой, более 1 GHz ; 512 Мб RAM; 10 Мб HDD; MS Windows XP и выше; Adobe Reader 8.0 и выше ; CD/DVD-ROM дисковод; мышь. – Загл. с титул. экрана.

Практикум составлен в соответствии с рабочей программой учебной дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика» по специальности 09.02.07 Информационные системы и программирование; может быть использован обучающимися по специальности 09.02.01 Компьютерные системы и комплексы при изучении дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика». Предназначен для обучающихся по очной форме обучения.

УДК 519.2  
В19

© Васильева Е.А., 2023  
© ФГБОУ ВО «Магнитогорский государственный  
технический университет им. Г.И.Носова», 2023

## Содержание

|                                                                        |    |
|------------------------------------------------------------------------|----|
| ВВЕДЕНИЕ .....                                                         | 5  |
| 1. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ .....                                           | 6  |
| 1.1. Классификация событий.....                                        | 6  |
| 1.2. Классическое определение вероятности.....                         | 6  |
| 1.3. Алгебра событий .....                                             | 10 |
| 1.4. Теоремы сложения и умножения вероятностей.....                    | 11 |
| 1.5. Формула полной вероятности и формула Байеса .....                 | 14 |
| Задачи для самостоятельного решения по теме «Теория вероятностей»..... | 16 |
| Вариант контрольной работы по теме «Теория вероятностей» .....         | 18 |
| Вариант тестового задания по теме «Теория вероятностей» .....          | 18 |
| 2. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ .....                                            | 20 |
| 2.1. Дискретная случайная величина (ДСВ).....                          | 21 |
| 2.1.1. Числовые характеристики ДСВ.....                                | 26 |
| 2.1.2. Биномиальное распределение .....                                | 27 |
| 2.1.3. Распределение Пуассона. Простейший поток событий .....          | 28 |
| 2.2. Непрерывная случайная величина (НСВ).....                         | 30 |
| 2.2.1. Числовые характеристики НСВ .....                               | 32 |
| 2.2.2. Равномерное распределение .....                                 | 33 |
| 2.2.3. Нормальное распределение.....                                   | 34 |
| Задачи для самостоятельного решения по теме «Случайные величины».....  | 36 |
| Вариант контрольной работы по теме «Случайные величины» .....          | 38 |
| Вариант тестового задания по теме «Случайные величины» .....           | 39 |
| ПРИЛОЖЕНИЕ 1 .....                                                     | 41 |
| БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....                                          | 43 |

## ВВЕДЕНИЕ

Содержание дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика» ориентировано на подготовку обучающихся к освоению профессиональных модулей программы подготовки специалистов среднего звена по специальности и овладению профессиональными компетенциями.

В результате освоения дисциплины обучающийся должен уметь:

- применять стандартные методы и модели к решению вероятностных и статистических задач;
- использовать расчетные формулы, таблицы, графики при решении статистических задач.

В результате освоения дисциплины обучающийся должен знать:

- элементы комбинаторики;
- понятие случайного события, классическое определение вероятности, вычисление вероятностей событий с использованием элементов комбинаторики, геометрическую вероятность;
- алгебру событий, теоремы умножения и сложения вероятностей, формулу полной вероятности;
- схему и формулу Бернулли, приближенные формулы в схеме Бернулли. Формулу (теорему) Байеса;
- понятия случайной величины, дискретной случайной величины, ее распределение и характеристики, непрерывной случайной величины, ее распределение и характеристики;
- законы распределения непрерывных случайных величин.

Практикум содержит теоретические сведения, примеры решения задач, способствующие усвоению, закреплению пройденного материала по двум разделам: «Теория вероятностей», «Случайные величины». Для проверки знаний предложены:

- задачи для самостоятельного решения;
- вариант контрольной работы;
- вариант тестового задания.

Практикум может использоваться на лекционных, практических занятиях и в процессе самостоятельной работы обучающихся.

# 1. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

## 1.1. Классификация событий

*Теория вероятностей* – математическая наука, изучающая закономерности случайных явлений.

*Событие* – явление, которое происходит в результате осуществления какого-либо определенного комплекса условий.

Осуществление комплекса условий называется *опытом или испытанием*.

Событие – результат испытания.

*Случайным событием* называется событие, которое может произойти, а может не произойти в результате некоторого испытания (например, при бросании монеты может выпасть орел, а может и не выпасть).

*Достоверным событием* называется событие, которое обязательно произойдет в результате испытания (например, извлечение белого шара из ящика с белыми шарами).

*Невозможным* считается событие, которое не может произойти в результате данного испытания (например, извлечение черного шара из ящика с белыми шарами).

Событие  $A$  называется *благоприятствующим* событию  $B$ , если появление события  $A$  влечет за собой появление события  $B$ .

События  $A$  и  $B$  называются *несовместными*, если в результате данного испытания появление одного из них исключает появление другого (например, стрельба по мишени: событие  $A$  – выбивание четного числа очков; событие  $B$  – выбивание нечетного числа очков).

События  $A$  и  $B$  называются *совместным*, если в результате данного испытания появление одного из них не исключает появления другого (например, событие  $A$  – в аудиторию вошел учитель; событие  $B$  – вошел студент).

Два события  $A$  и  $\bar{A}$  называются *противоположными*, если не появление одного из них в результате испытания влечет появление другого ( $\bar{A}$  отрицание  $A$ ).

Если группа событий такова, что в результате испытания обязательно должно произойти хотя бы одно из них и любые два из них несовместны, то эта группа событий называется *полной группой событий*.

События называются *равновозможными*, если по условию испытания нет оснований считать какое-либо из них более возможным, чем любое другое (например, при подбрасывании монеты: событие  $A$  – выпадение орла; событие  $B$  – выпадение решки).

## 1.2. Классическое определение вероятности

*Вероятность события* – это численная мера объективной возможности его появления.

Если имеется полная группа попарно несовместных и равновозможных

событий, то вероятность  $P(A)$  наступления события  $A$  вычисляется как отношение числа исходов, благоприятствующих наступлению события ( $m$ ), к числу всех исходов испытания ( $n$ ):

$$P(A) = \frac{m}{n} \quad (1.1)$$

*Свойства вероятности:*

- 1) Вероятность достоверного события равна 1.
- 2) Вероятность невозможного события равна 0.
- 3) Вероятность случайного события удовлетворяет двойному неравенству  $0 < P(A) < 1$ .
- 4) Вероятность любого события удовлетворяет двойному неравенству  $0 \leq P(A) \leq 1$ .

**Задача 1.** Найти вероятность того, что при бросании игральной кости выпадет число, кратное трём (событие  $A$ ).

**Решение.** Число всех элементарных событий  $n=6$ , число элементарных событий, благоприятствующих данному событию  $A$ ,  $m=2$  (это выпадение 3 или 6 очков), значит по формуле (1.1) вероятность события  $A$  будет равна:

$$P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Очень часто при нахождении вероятности события для подсчета числа всех исходов и исходов, благоприятствующих данному событию, используют формулы комбинаторики.

*Комбинаторика* – один из разделов дискретной математики, изучающий способы подсчета числа элементов в конечных множествах, который приобрел большое значение в связи с использованием его в теории вероятностей, математической логике, теории чисел, вычислительной технике, кибернетике.

*Комбинаторика* – раздел математики, изучающий способы подсчета числа элементов в конечных множествах.

При подсчете числа элементов в конечных множествах используют правила сложения и произведения.

*Правило сложения.* Если одно действие можно выполнить  $m$  способами, а другое  $n$  способами, и они взаимно исключают друг друга, то выполнить одно любое из этих действий можно  $(n + m)$  способами.

*Правило произведения.* Если объект  $A$  можно выбрать из совокупности объектов  $m$  способами и после каждого такого выбора объект  $B$  можно выбрать  $n$  способами, то пара объектов  $(A, B)$  в указанном порядке может быть выбрана  $m \cdot n$  способами.

Множества элементов, состоящие из одних и тех же различных элементов и отличающиеся друг от друга только их порядком, называются *перестановками* этих элементов.

*Размещениями* называют множества, составленные из  $n$  различных элементов по  $m$  элементов, которые отличаются либо составом элементов, либо их порядком.

*Сочетаниями* из  $n$  различных элементов по  $m$  называют множества, содержащие  $m$  элементов из числа  $n$  заданных, и которые отличаются хотя бы одним элементом.

Множества в свою очередь делятся на множества с повторениями и без повторений. На рисунках 1.1 и 1.2 приведены формулы для подсчета числа комбинаций в множествах без повторений и с повторениями.

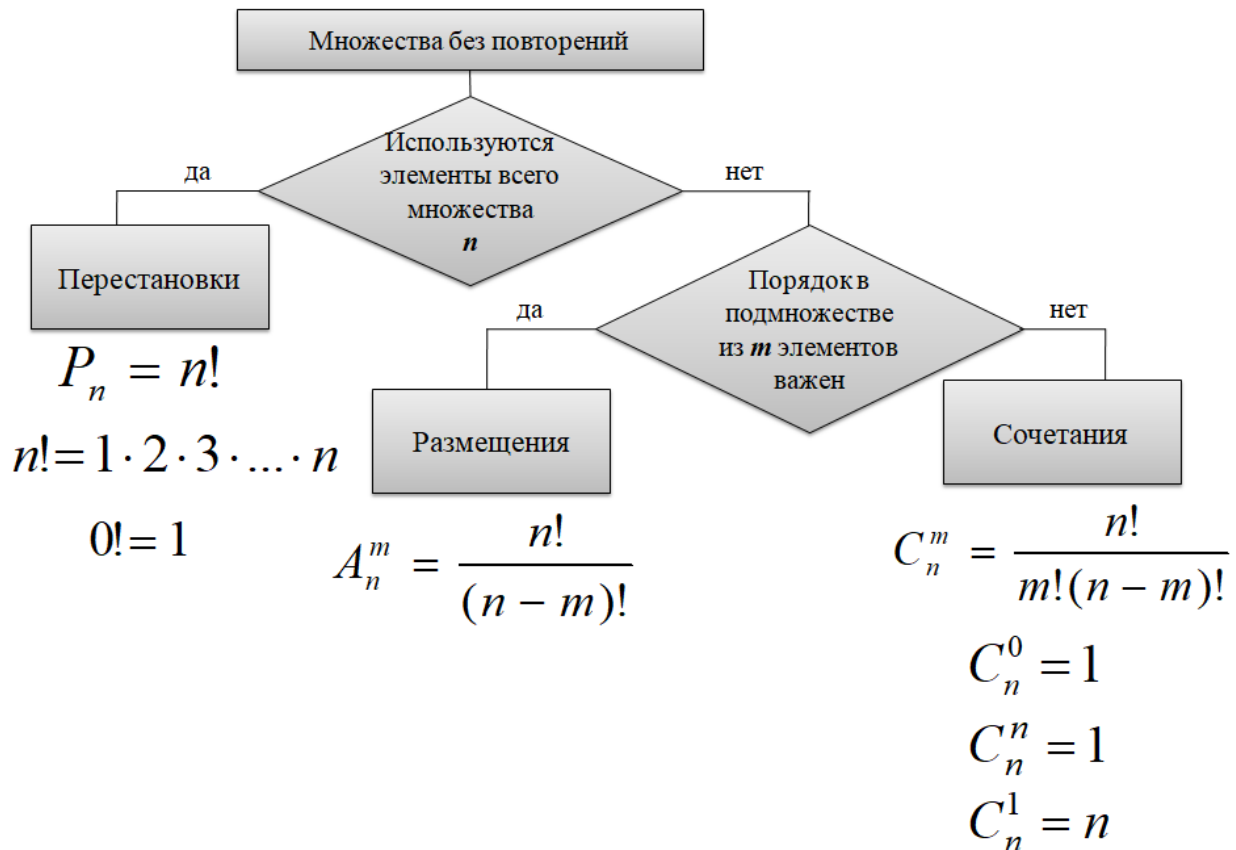


Рис. 1.1. Алгоритм выбора формулы для подсчета числа комбинаций в множествах без повторений

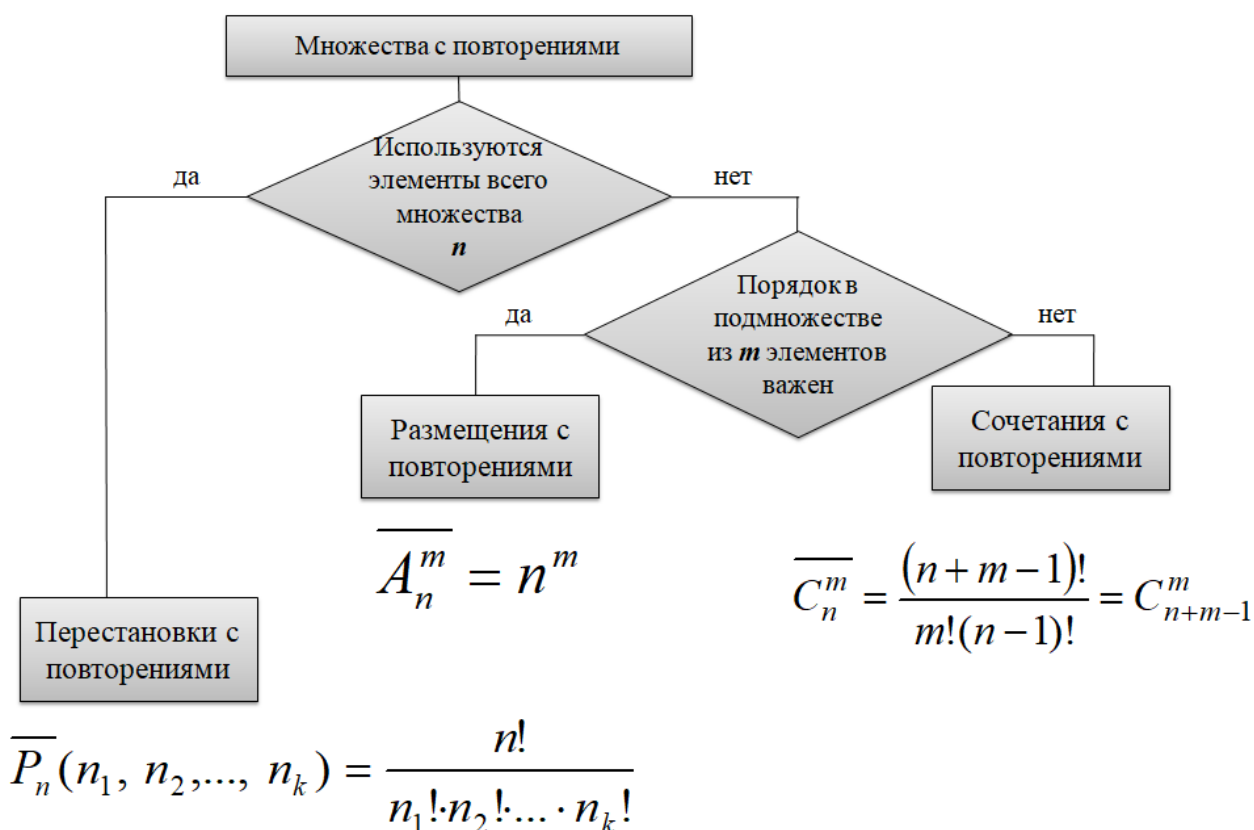


Рис. 1.2. Алгоритм выбора формулы для подсчета числа комбинаций в множествах с повторениями

**Задача 2.** В урне находится 7 шаров, из которых 4 белых и 3 черных. Из урны наугад вынимается три шара. Найти вероятность того, что два шара будут белыми, а один – чёрным (событие  $A$ ).

**Решение.** Множество без повторов. Число всех элементарных событий подсчитаем по формуле сочетаний (рис. 1.1)  $n = C_7^3 = 35$ , число элементарных событий, благоприятствующих данному событию  $A$ , подсчитаем по формуле сочетаний (рис. 1.1), применив правило произведения,  $m = C_4^2 C_3^1 = 18$ , значит,  $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_4^2 C_3^1}{C_7^3} = \frac{18}{35}$

**Задача 3.** На книжной полке случайно размещаются 8 книг, из которых 5 – по математике и 3 – по физике. Найти вероятность того, что слева будут все книги по математике, а справа – все книги по физике (событие  $A$ ).

**Решение.** Число всех элементарных событий  $n = P_8 = 8!$ , число элементарных событий, благоприятствующих данному событию  $A$ ,  $m = P_5 P_3 = 5!3!$ , значит,  $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{5!3!}{8!} = \frac{1}{56}$ .



### 1.3. Алгебра событий

*Суммой* нескольких событий называется событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из них в результате испытания.

**Задача 4.** В ящике находятся красный, черный и белый шары. Из ящика извлекается один шар. Запишите в виде формулы следующие события: а) «извлечен черный или красный шар»; б) «извлечен красный или белый шар»; в) «извлечен черный или белый шар»; г) «извлечен не черный шар».

**Решение.** Обозначим события. Пусть событие  $A$  – «извлечен черный шар», событие  $B$  – «извлечен красный шар», событие  $C$  – «извлечен белый шар». Тогда можно составить формулы для следующих событий:

$A+B$  – «извлечен черный или красный шар»;

$B+C$  – «извлечен красный или белый шар»;

$A+C$  – «извлечен черный или белый шар»;

$\bar{A}$  – «извлечен не черный шар» или «извлечен красный или белый шар».

*Произведением* нескольких событий называется событие, состоящее в совместном наступлении всех этих событий в результате испытания.

**Задача 5.** Имеется колода карт, из которой вынимается одна карта. Запишите в виде формулы следующие события: а) «из колоды карт вынута карта «Дама» пиковой масти»; б) «из колоды карт вынута карта не «Дама»»; в) «из колоды карт вынута карта «Дама» не пиковой масти».

**Решение.** Обозначим события. Пусть событие  $A$  – «из колоды карт вынута карта «Дама»», событие  $B$  – «из колоды карт вынута карта пиковой масти». Тогда можно составить следующие события:

$A \cdot B$  – «из колоды карт вынута карта «Дама» пиковой масти»;

$\bar{A}$  – «из колоды карт вынута карта не «Дама»»;

$A \cdot \bar{B}$  – «из колоды карт вынута карта «Дама» не пиковой масти».

**Задача 5.** Три студента сдают экзамен. Запишите в виде формулы следующие события: а) «экзамен успешно сдал первый или третий студент и не сдал второй студент»; б) «экзамен успешно сдал первый или третий студент или не сдал второй студент»; в) «экзамен успешно сдал первый и третий студент»; г) «экзамен успешно сдал первый и третий студент и не сдал второй студент».

**Решение.** Обозначим события. Пусть событие  $A$  – «экзамен успешно сдал первый студент»,  $B$  – «экзамен успешно сдал второй студент»,  $C$  – «экзамен успешно сдал третий студент». Тогда можно составить следующие события:

$(A + C) \cdot \bar{B}$  – «экзамен успешно сдал первый или третий студент и не сдал второй студент»;

$A + C + \bar{B}$  – «экзамен успешно сдал первый или третий студент или не сдал второй студент»;

$A \cdot C$  – «экзамен успешно сдал первый и третий студент»;

$A \cdot \bar{B} \cdot C$  – «экзамен успешно сдал первый и третий студент и не сдал второй студент».

#### 1.4. Теоремы сложения и умножения вероятностей

*Теорема сложения вероятностей несовместных событий.* Вероятность появления одного из двух несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) \quad (1.2)$$

*Следствие.* Вероятность появления одного из нескольких попарно несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) \quad (1.3)$$

Сумма вероятностей попарно несовместных событий  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , образующих полную группу, равна единице:

$$P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = 1 \quad (1.4)$$

Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1 \quad (1.5)$$

*Теорема сложения вероятностей совместных событий.* Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного наступления:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B) \quad (1.6)$$

*Условной вероятностью  $P(B/A)$*  называется вероятность события  $B$ , вычисленная в предположении, что событие  $A$  уже наступило.

*Теорема умножения вероятностей.* Вероятность совместного появления двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B/A) \quad (1.7)$$

Два события называются *независимыми*, если появление любого из них не изменяет вероятность появления другого:  $P(B) = P(B/A)$  или  $P(A) = P(A/B)$ .

*Теорема умножения вероятностей.* Вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению их вероятностей:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B) \quad (1.8)$$

Вероятность совместного наступления конечного числа событий равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности всех остальных, причем условная вероятность каждого последующего события вычисляется в предположении, что все предыдущие уже наступили:

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1 A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n/A_1 \dots A_{n-1}) \quad (1.9)$$

Вероятность совместного появления нескольких событий, независимых в совокупности, равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot \dots \cdot P(A_n) \quad (1.10)$$

Вероятность появления хотя бы одного из событий  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  независимых в совокупности, равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий:

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = 1 - P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot \dots \cdot P(\overline{A_n}) \quad (1.11)$$

Сведем все теоремы сложения и умножения вероятностей в таблицу 1.1, позволяющую, в зависимости от вида событий, выбрать формулу для нахождения их вероятностей.

Таблица 1.1

Формулы теорем сложения и умножения вероятностей

| События     | Совместные                                                                  | Несовместные                                     |
|-------------|-----------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------|
| Зависимые   | $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$<br>$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B/A)$ | $P(A+B) = P(A) + P(B/A)$<br>$P(A \cdot B)$ - нет |
| Независимые | $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$<br>$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$   | $P(A+B) = P(A) + P(B)$<br>$P(A \cdot B)$ - нет   |

**Задача 6.** В урне находится 8 красных и 6 синих шаров. Из урны последовательно без возвращения извлекается 3 шара. Найти вероятность того, что все три шара синие.

**Решение.** Пусть событие  $A_1$  – первый шар вынули синий, событие  $A_2$  – второй шар вынули синий, событие  $A_3$  – третий шар вынули синий. Пусть событие  $A$  – все три шара синие. Тогда событие  $A$  можно записать как  $A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$ . События  $A_1, A_2, A_3$  совместные и зависимые. Следовательно, нам понадобится формула (1.9):

$$P(A) = P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1 A_2),$$

где  $P(A_1)$  – вероятность того, что первый шар вынули синий,

$P(A_2/A_1)$  – вероятность того, что второй шар вынули синий, при условии, что первый шар вынули синий,

$P(A_3/A_1A_2)$  – вероятность того, что третий шар вынули синий, при условии, что первый шар вынули синий и второй шар вынули синий.

Тогда

$$P(A) = P(A_1A_2A_3) = \frac{6}{14} \cdot \frac{5}{13} \cdot \frac{4}{12} = \frac{5}{91}$$

**Задача 7.** Вероятности попадания в цель при стрельбе из трех орудий равны соответственно 0,8; 0,7; 0,9. Найти вероятность того, что при одном залпе из всех орудий в цель попадет только первое орудие.

**Решение.** Пусть событие  $A_1$  – попадание в цель первого орудия, событие  $A_2$  – попадание в цель второго орудия, событие  $A_3$  – попадание в цель третьего орудия. По условию задачи  $P(A_1)=0,8$ ,  $P(A_2)=0,7$ ,  $P(A_3)=0,9$ .

Пусть событие  $A$  – в цель попадет только первое орудие. Тогда событие  $A$  можно записать как  $A=A_1\overline{A_2}\overline{A_3}$ . События  $A_1$ ,  $\overline{A_2}$ ,  $\overline{A_3}$  совместные и независимые. Следовательно, нам понадобится формула (1.10):

$$P(A) = P(A_1\overline{A_2}\overline{A_3}) = P(A_1) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(\overline{A_3}),$$

где  $P(A_1)$  – вероятность того, что в цель попало первое орудие,

$P(\overline{A_2})$  – вероятность того, что в цель не попало второе орудие,

$P(\overline{A_3})$  – вероятность того, что в цель не попало третье орудие.

Вероятность противоположных событий найдем по формуле (1.5):

$$P(\overline{A_2})=1-P(A_2)=1-0,7=0,3; \quad P(\overline{A_3})=1-P(A_3)=1-0,9=0,1$$

Тогда

$$P(A) = P(A_1\overline{A_2}\overline{A_3}) = 0,8 \cdot 0,3 \cdot 0,1 = 0,024$$

**Задача 8.** Вероятности попадания в цель при стрельбе из трех орудий равны соответственно 0,8; 0,7; 0,9. Найти вероятность хотя бы одного попадания при одном залпе из всех орудий.

**Решение.** Пусть событие  $A_1$  – попадание в цель первого орудия, событие  $A_2$  – попадание в цель второго орудия, событие  $A_3$  – попадание в цель третьего орудия. По условию задачи  $P(A_1)=0,8$ ,  $P(A_2)=0,7$ ,  $P(A_3)=0,9$ .

Пусть событие  $A$  – хотя бы одно попадание в цель. Хотя бы одно попадание в цель означает, что в цель может попасть только одно орудие или только два или все три. Тогда событие  $A$  запишется следующим образом:

$$A = A_1\overline{A_2}\overline{A_3} + \overline{A_1}A_2\overline{A_3} + \overline{A_1}\overline{A_2}A_3 + A_1A_2\overline{A_3} + A_1\overline{A_2}A_3 + \overline{A_1}A_2A_3 + A_1A_2A_3$$

Вычисление вероятности этого события будет довольно длинным.

Вероятность появления хотя бы одного события удобно вычислять по формуле (1.11):

$$P(A) = 1 - P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(\overline{A_3})$$

$$P(A) = 1 - 0,2 \cdot 0,3 \cdot 0,1 = 0,994$$

### 1.5. Формула полной вероятности и формула Байеса

Следствием двух основных теорем теории вероятностей (теоремы сложения и умножения) являются *формула полной вероятности* и *формула Байеса*.

Изучение какого-либо объекта исследователь начинает с предположений (версии, *гипотезы*). Например: экзаменатор, предлагающий студенту билет, выдвигает гипотезы, что студент учил материал или не учил и т.д.

События, в условиях которых только и может появиться событие  $A$ , называются *гипотезами* и обозначают  $H_1, H_2, \dots, H_n$ .

*Формула полной вероятности.* Вероятность события  $A$ , которое может наступить только при условии появления одного из событий  $H_1, H_2, H_3, \dots, H_n$ , образующих полную группу попарно несовместных событий, равна сумме произведений вероятностей каждого из событий  $H_1, H_2, H_3, \dots, H_n$  на соответствующую условную вероятность события  $A$ :

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) + \dots + P(H_n) \cdot P(A/H_n) \quad (1.12)$$

или

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A/H_i)$$

**Задача 9.** Имеются три одинаковые урны с шарами. В первой из них 3 белых и 4 черных шара, во второй – 2 белых и 5 черных, в третьей – 5 белых и 9 черных шаров. Из случайно выбранной урны наудачу вынут шар. Найти вероятность того, что он белый.

**Решение.** Пусть  $A$  – наудачу выбранный шар белого цвета.

Выдвигаем гипотезы:  $H_1$  – шар вынули из первой урны,  
 $H_2$  – шар вынули из второй урны,  
 $H_3$  – шар вынули из третьей урны.

По условию задачи все три гипотезы равновозможные, следовательно,

$$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}.$$

Вероятность вынуть шар белого цвета из первой урны равна  $P(A/H_1) = \frac{3}{7}$ .

Вероятность вынуть шар белого цвета из второй урны равна  $P(A/H_2) = \frac{2}{7}$ .

Вероятность вынуть шар белого цвета из третьей урны равна  $P(A/H_3) = \frac{5}{14}$ .

Тогда по формуле (1.12) вероятность события  $A$  будет равна:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) + P(H_3) \cdot P(A/H_3)$$

$$P(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{7} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{7} + \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{14} = \frac{5}{14}$$

Рассмотрим событие  $A$ , которое может наступить при условии появления одного из несовместных событий  $H_1, H_2, H_3, \dots, H_n$ , образующих полную группу событий. Если событие  $A$  уже произошло, то вероятность событий может быть переоценена по *формуле Байеса* (формуле вероятности гипотез):

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A/H_i)}{P(A)} \quad (1.13)$$

**Задача 10.** Телеграфное сообщение состоит из сигналов «точка» и «тире». Статистические свойства помех таковы, что искажаются в среднем 2/5 сигналов «точка» и 1/3 сигналов «тире». Известно, что среди передаваемых сигналов «точка» и «тире» встречаются в соотношении 5:3. Определить вероятность того, что переданный сигнал искажён. Чему равна вероятность того, что была передана «точка»?

**Решение.** Рассмотрим следующие события:  $A$  – сигнал искажён (вероятность которого является искомой),

$H_1$  – передан сигнал «точка»,

$H_2$  – передан сигнал «тире» (две гипотезы, образующие полную группу, т. к. они несовместны и одна из них обязательно имеет место).

По условию  $P(H_1):P(H_2)=5:3$  и  $P(H_1)+P(H_2)=1$  (формула 1.4), поэтому

$P(H_1)=\frac{5}{8}$  и  $P(H_2)=\frac{3}{8}$ . Известные вероятности того, что сигналы «точка» и «тире» искажаются, выступают как условные вероятности интересующего нас события при справедливости гипотез:  $P(A/H_1)=\frac{2}{5}$ ,  $P(A/H_2)=\frac{1}{3}$

Вероятность события  $A$  находим по формуле полной вероятности (1.12):

$$P(A) = \frac{5}{8} \cdot \frac{2}{5} + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{8}.$$

Вероятность того, что была передана «точка» вычисляется по формуле Байеса (1.13):

$$P(A/H_1) = \frac{\frac{5}{8} \cdot \frac{2}{5}}{\frac{3}{8}} = \frac{2}{3}$$

### **Контрольные вопросы**

1. Дайте определения: перестановок, сочетаний, размещений.
2. Сформулируйте классическое определение вероятностей. Укажите недостатки этого определения.

3. Какое событие называется достоверным, невозможным, случайным?
4. Дайте определение полной группы событий.
5. Какие события называются несовместными, совместными, противоположными, независимыми?
6. Сформулируйте теоремы о вероятности суммы двух совместных, несовместных событий.
7. Сформулируйте теорему умножения вероятностей.
8. Сформулируйте теорему о формуле полной вероятности.
9. Приведите формулу Байеса.

### **Задачи для самостоятельного решения по теме «Теория вероятностей»**

1. Какова вероятность того, что наудачу выбранное двузначное число не содержит ни одной двойки?
2. Отряд учащихся из 25 человек участвует в военизированной игре. В отряде 5 следопытов и 4 связиста. В разведку надо направить четырех человек. Какова вероятность того, что в разведгруппу будут включены 2 связиста и 2 следопыта, если включение в разведгруппу равновероятно для любого ученика?
3. На карточках написаны целые числа от 1 до 15 включительно. Наудачу извлекаются две карточки. Какова вероятность того, что сумма чисел, написанных на этих карточках, равна десяти?
4. Для дежурства на вечере путем жеребьевки выделяются 5 человек. Вечер проводит комиссия, в составе которой 10 юношей и 2 девушки. Найдите вероятность того, что в число дежурных войдут обе девушки.
5. Имеется 6 билетов в театр, из которых 4 билета на места первого ряда. Какова вероятность того, что из трех наудачу выбранных билетов два окажутся на места первого ряда?
6. Билет в партер стоит 50 коп., на бельэтаж – 40 коп. и на ярус – 30 коп. Найдите вероятность того, что взятые наудачу два билета стоят вместе не дороже 80 коп.
7. На один ряд из семи мест случайным образом рассаживаются 7 учеников. Найдите вероятность того, что 3 определенных ученика окажутся рядом.
8. Из букв слова событие, составленного с помощью разрезной азбуки, извлекаются наудачу и складываются друг за другом в порядке их извлечения 3 карточки (буквы). Какова вероятность получить при этом слово быт?
9. Из пяти видов открыток, имеющихся в автомате, наудачу выбираются 3 открытки. Какова вероятность того, что все отобранные открытки будут разные?
10. Во время спортивной игры по команде ведущего «становись!» 10 учеников в случайном порядке образовали строй в одну шеренгу. Какова вероятность того, что ученики А и В окажутся отделенными друг от друга тремя учениками?

11. Вероятность того, что стрелок при одном выстреле выбивает 10 очков, равна 0,4; 9 очков – 0,3 и 8 или меньше очков – 0,3. Найти вероятность того, что при одном выстреле стрелок выбьет не менее 9 очков.

12. В клуб принесли в корзине 9 рыжих и 11 серых котят. Сначала вынимают одного котенка, затем другого, не возвращая первого обратно. Какова вероятность того, что котята разного цвета?

13. В одном ящике 6 синих и 11 зеленых шаров, а в другом – 7 синих и 9 зеленых шаров. Из каждого ящика взяли по одному шару. Какова вероятность того, что оба шара синие?

14. В коробке 4 белых и 5 черных футболок. Наугад вытаскивают две футболки. Найти вероятность того, что одна футболка белая, другая – черная?

15. В урне находятся 10 шаров: 3 белых и 7 черных. Извлекают один шар, а затем другой. Найти вероятность того, что первый шар черный, а второй – синий.

16. В специализированную больницу поступает в среднем 50% больных с заболеванием А, 30% – с заболеванием В, 20% – с заболеванием С. Вероятность полного излечения болезни А равна 0,7, для болезней В и С эти вероятности равны соответственно 0,8 и 0,9. Какой процент пациентов, полностью излечившихся по окончании курса лечения?

17. На трех дочерей Нину, Еву и Айгуль в семье возложена обязанность мыть посуду. Нина выполняет 40% всей работы, а остальные 60% работы Ева и Айгуль делят поровну. С вероятностью 0,02 Нина может разбить по крайней мере одну тарелку; для Евы и Айгуль эта вероятность равна соответственно 0,03 и 0,04. Родители не знают, кто мыл посуду вечером, но они слышали звон разбитой посуды. Чья очередь мыть посуду в этот вечер наиболее вероятна?

18. Один властелин, которому его звездочет наскучил своими ложными предсказаниями, решил казнить его. Однако, будучи очень добрым повелителем, он решил дать звездочету шанс и предложить ему распределить по двум урнам четыре шара: два белых и два черных. Палач выбирает одну из урн и извлекает из нее один шар. Если шар будет черным, то звездочета казнят, в противном случае его жизнь будет спасена. Каким образом звездочет должен разместить шары в урнах, чтобы обеспечить себе максимальную вероятность спасения?

19. Устройство состоит из трех элементов, работающих независимо. Вероятности безотказной работы для них равны соответственно 0,6; 0,7; 0,8. Найти вероятность того, что отказал один элемент, а два другие – исправны.

20. В электрическую цепь последовательно включены три элемента, работающие независимо. Вероятности отказа каждого из элементов равны соответственно 0,1; 0,15; 0,2. Найти вероятность того, что тока в цепи не будет.

21. Три станка штампуют детали. Первый станок производит 25%, второй – 30%, третий – 45% всех изделий. Брак в их продукции составляет соответственно 2%, 2,5%, 4%. Найти вероятность того, что случайно взятая деталь окажется бракованной.



22. В одной группе 10 студентов, из которых 2 отличника, во второй – 12 студентов, из которых 3 отличника. Из наудачу выбранной группы выбран студент. Найти вероятность того, что он отличник.

23. В цехе работают 4 мастера и 8 учеников. При изготовлении изделия мастер допускает брак с вероятностью 0,04; ученик – с вероятностью 0,15. Поступившее из цеха изделие оказалось бракованным. Какова вероятность, что его изготовил мастер?

24. В команде 10 киберспортсменов, которые играют в Dota 2. Для пяти из них вероятность выиграть равна 0,6, для трех других – 0,5 и для остальных – 0,3. На очередных соревнованиях игрок из этой команды победил. Какова вероятность того, что этот игрок был из первой группы?

### **Вариант контрольной работы по теме «Теория вероятностей»**

1. Вычислить: а)  $P_7$ ; б)  $A_{10}^6$ ; в)  $C_{10}^6$ .

2. Какова вероятность того, что наудачу выбранное двузначное число не содержит ни одной двойки?

3. В партии из 10 деталей 6 стандартных. Найти вероятность того, что среди пяти извлеченных наудачу деталей 3 детали стандартные.

4. В группе из 20 человек 5 студентов не подготовили задание. Какова вероятность того, что два первых студентов, вызванных наугад, будут не готовы к ответу?

5. На предприятии, изготавливающем болты, первая машина производит 30%, вторая – 25%, третья – 45% всех изделий. Брак в их продукции составляет соответственно 2%, 1%, 3%. Найти вероятность того, что случайно выбранный болт, произведенный первой машиной, окажется бракованным.

### **Вариант тестового задания по теме «Теория вероятностей»**

1. Сколькими способами можно составить расписание одного учебного дня из 5 различных уроков?

а) 30;                      б) 100;                      в) 120;                      г) 5.

2. Бросают игральную кость. Вероятность события А – «выпало число очков, кратное 3» – равна ...

а) 1/3;                      б) 1/2;                      в) 1/6;                      г) 2.

3. Брошена монета и игральная кость. Если ввести события: А – «выпал герб» и В – «появилось 5 очков», то событие, заключающееся в том, что выпал герб и появилось не 5 очков, будет представлять собой выражение ...

а)  $A + \bar{B}$ ;                      б)  $\bar{A} * B$ ;                      в)  $A * B$ ;                      г)  $A * \bar{B}$ .

4. Катя и Аня пишут диктант. Вероятность того, что Катя допустит ошибку, составляет 60%, а вероятность ошибки у Ани составляет 40%. Найти вероятность того, что обе девочки напишут диктант без ошибок.

а) 0,24;                      б) 0,4;                      в) 0,48;                      г) 0,2.

5. В трех партиях 1000 ламп. В первой- 430, во второй – 180. В первой партии- 6% бракованных, во второй партии – 5% бракованных ламп, в третьей – 4%. Наудачу выбирается одна лампа. Вероятность того, что выбрана бракованная лампа равна ...

а) 0,00755;

б) 0,0535;

в) 0,0504;

г) 0,056.

## 2. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

*Случайная величина* – одно из важнейших понятий теории вероятностей.

*Случайная величина (СВ)* – величина, которая в результате опыта может принимать то или иное значение, причём до завершения опыта неизвестно какое.

*Случайной величиной* называют переменную величину, которая в зависимости от исходов испытания принимает значения, зависящие от случая. Случайные величины делятся на дискретные и непрерывные.

Случайная величина, принимающая различные значения, которые можно записать в виде конечной или бесконечной последовательности, называется *дискретной случайной величиной (ДСВ)* (рис. 2.1).

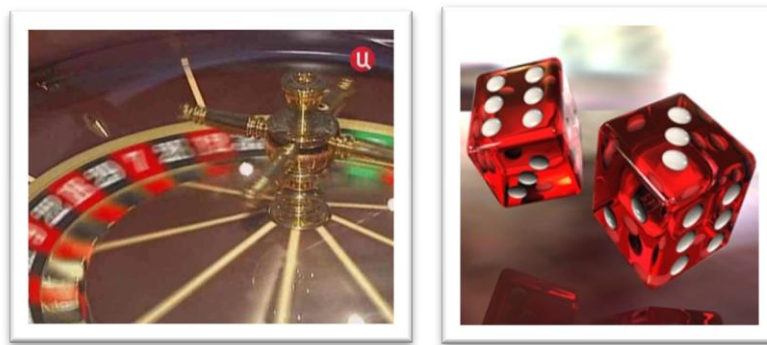


Рис. 2.1. Примеры дискретной случайной величины

Случайная величина, которая может принимать все значения из некоторого промежутка, называется *непрерывной случайной величиной (НСВ)* (рис. 2.2).

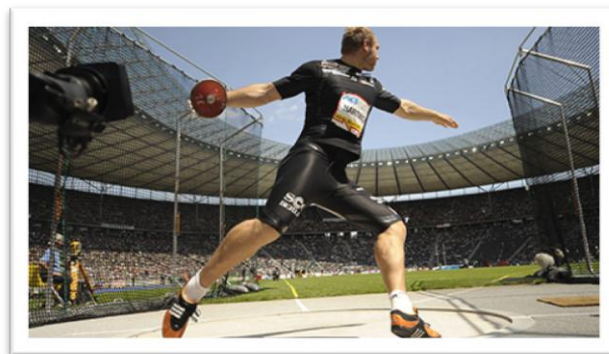


Рис. 2.2. Пример непрерывной случайной величины

Правило, устанавливающее соответствие между значениями случайной величины и их вероятностями, называется *законом распределения* случайной величины (рис. 2.3).



Рис. 2.3. Законы распределения для случайной величины

## 2.1. Дискретная случайная величина (ДСВ)

*Рядом распределения ДСВ* называют совокупность всех возможных значений  $x_i$  и соответствующих им вероятностей  $p_i$ . Удобно ряд распределения представлять в виде таблицы.

|     |       |       |       |     |       |
|-----|-------|-------|-------|-----|-------|
| $X$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | ... | $x_n$ |
| $P$ | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ | ... | $p_n$ |

Ряд распределения обладает следующим свойством: сумма всех вероятностей случайной величины равна 1, т.к. события  $x_i$  образуют полную группу.

$$\sum_{i=1}^n p_i = p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1 \quad (2.1)$$

*Многоугольником (полигоном) распределения* называют графическое представление ряда распределения ДСВ (рис. 2.4).

|     |     |     |      |      |     |
|-----|-----|-----|------|------|-----|
| $X$ | 2   | 4   | 5    | 7    | 10  |
| $P$ | 0,1 | 0,3 | 0,25 | 0,05 | 0,3 |

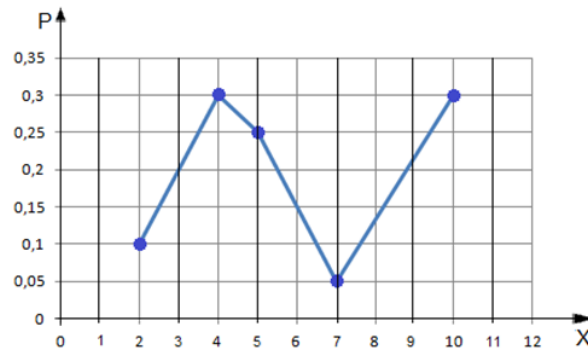


Рис. 2.4. Многоугольник распределения для данного ряда распределения ДСВ

**Задача 1.** Задают ли закон распределения ДСВ каждая из следующих таблиц?

а)

|     |      |      |      |      |      |
|-----|------|------|------|------|------|
| $X$ | 0    | 1    | 2    | 3    | 4    |
| $P$ | 0,05 | 0,15 | 0,20 | 0,25 | 0,35 |

б)

|     |     |     |     |     |      |
|-----|-----|-----|-----|-----|------|
| $X$ | 5   | 6   | 7   | 8   | 9    |
| $P$ | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,15 |

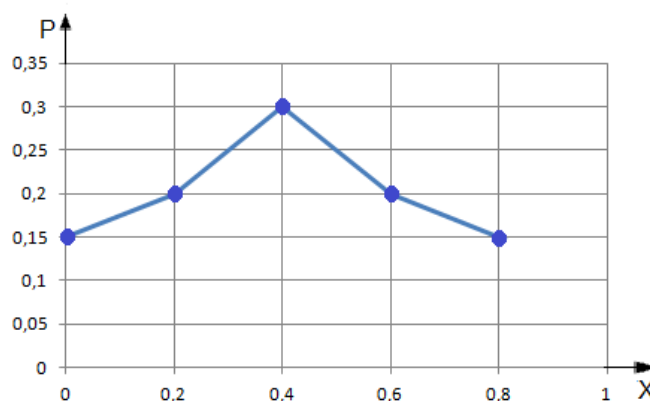
**Решение.** а) Данная таблица задает закон распределения ДСВ, поскольку выполняется равенство (2.1):  $0,05 + 0,15 + 0,20 + 0,25 + 0,35 = 1$ .

б) Данная таблица не задает закон распределения ДСВ, поскольку не выполняется равенство (2.1):  $0,1 + 0,2 + 0,3 + 0,4 + 0,15 = 1,15 \neq 1$ .

**Задача 2.** ДСВ  $X$  имеет закон распределения, заданный таблицей. Чему равна вероятность  $p_4$ ? Постройте многоугольник распределения.

|     |      |     |     |       |      |
|-----|------|-----|-----|-------|------|
| $X$ | 0    | 0,2 | 0,4 | 0,6   | 0,8  |
| $P$ | 0,15 | 0,2 | 0,3 | $p_4$ | 0,15 |

**Решение.** Поскольку должно выполняться равенство (2.1), то  $p_4 = 1 - (0,15 + 0,20 + 0,3 + 0,15) = 0,2$



**Задача 3.** В партии из 10 деталей имеется 8 стандартных. Из этой партии наудачу взято 2 детали. Найдите закон распределения ДСВ, равной числу стандартных деталей в выборке.

**Решение.** Пусть случайная величина  $X$  – число стандартных деталей в выборке. Случайная величина  $X$  может принимать значения  $k=\{0,1,2\}$ . Найдём вероятности этих значений.

|     |       |       |       |
|-----|-------|-------|-------|
| $X$ | 0     | 1     | 2     |
| $P$ | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ |

$$p_1 = P(X = 0) = \frac{m}{n}$$

Вычислим число всех исходов ( $n$ ):  $C_{10}^2 = \frac{10!}{2!8!} = \frac{9 \cdot 10}{2} = 45$   
(из 10 деталей берем 2)

Вычислим число благоприятствующих исходов ( $m$ ):  $C_8^0 \cdot C_2^2 = 1 \cdot 1 = 1$   
(из 2 выбранных деталей 0 стандартных)

$$p_1 = P(X = 0) = \frac{1}{45}$$

$$p_2 = P(X = 1) = \frac{m}{n}$$

Вычислим число всех исходов ( $n$ ):  $C_{10}^2 = 45$   
(из 10 деталей берем 2)

Вычислим число благоприятствующих исходов ( $m$ ):  $C_8^1 \cdot C_2^1 = 8 \cdot 2 = 16$   
(из 2 выбранных деталей 1 стандартная)

$$p_2 = P(X = 1) = \frac{16}{45}$$

$$p_3 = P(X = 2) = \frac{m}{n}$$

Вычислим число всех исходов ( $n$ ):  $C_{10}^2 = 45$   
(из 10 деталей берем 2)

Вычислим число благоприятствующих исходов ( $m$ ):  $C_8^2 \cdot C_2^0 = \frac{8!}{2!6!} \cdot 1 = \frac{7 \cdot 8}{2} = 28$   
(из 2 выбранных деталей 2 стандартные)

$$p_3 = P(X = 2) = \frac{28}{45}$$

|     |        |         |         |
|-----|--------|---------|---------|
| $X$ | 0      | 1       | 2       |
| $P$ | $1/45$ | $16/45$ | $28/45$ |

Данная таблица задает закон распределения ДСВ, поскольку выполняется равенство (2.1):

$$\sum_{i=1}^3 p_i = p_1 + p_2 + p_3 = \frac{1}{45} + \frac{16}{45} + \frac{28}{45} = 1$$

**Задача 4.** В коробке 7 карандашей, из которых 4 красные. Из этой коробки наудачу извлекаются 3 карандаша. Найдите закон распределения

ДСВ, равной числу красных карандашей в выборке.

**Решение.** Пусть случайная величина  $X$  – число красных карандашей в выборке. Случайная величина  $X$  может принимать значения  $k=\{0,1,2,3\}$ . Найдем вероятности этих значений.

$$p_1 = P(X=0) = \frac{m}{n} = \frac{C_4^0 \cdot C_3^3}{C_7^3} = \frac{1}{35} \quad p_3 = P(X=2) = \frac{m}{n} = \frac{C_4^2 \cdot C_3^1}{C_7^3} = \frac{18}{35}$$

$$p_2 = P(X=1) = \frac{m}{n} = \frac{C_4^1 \cdot C_3^2}{C_7^3} = \frac{12}{35} \quad p_4 = P(X=3) = \frac{m}{n} = \frac{C_4^3 \cdot C_3^0}{C_7^3} = \frac{4}{35}$$

|     |        |         |         |        |
|-----|--------|---------|---------|--------|
| $X$ | 0      | 1       | 2       | 3      |
| $P$ | $1/35$ | $12/35$ | $18/35$ | $4/35$ |

Данная таблица задает закон распределения ДСВ, поскольку выполняется равенство (2.1):

$$\sum_{i=1}^4 p_i = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = \frac{1}{35} + \frac{12}{35} + \frac{18}{35} + \frac{4}{35} = 1$$

Функцией распределения случайной величины называют вероятность того, что случайная величина  $X$  в результате испытания примет значение, меньшее  $x$ , т.е.  $F(x) = P(X < x)$ .

|     |       |       |       |     |       |
|-----|-------|-------|-------|-----|-------|
| $X$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | ... | $x_n$ |
| $P$ | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ | ... | $p_n$ |

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < x_1 \\ p_1 & \text{при } x_1 < x < x_2 \\ p_1 + p_2 & \text{при } x_2 < x < x_3 \\ p_1 + p_2 + p_3 & \text{при } x_3 < x < x_4 \\ \dots & \dots \\ 1 & \text{при } x > x_n \end{cases} \quad (2.2)$$

Функция распределения случайной величины является неубывающей функцией, значения которой лежат в интервале  $[0; 1]$ . График функции распределения произвольной ДСВ представляет собой «возрастающую ступеньку».

**Задача 4.** ДСВ  $X$  имеет закон распределения, заданный таблицей. Найти функцию распределения этой ДСВ и построить ее график.

|     |     |     |      |      |     |
|-----|-----|-----|------|------|-----|
| $X$ | 2   | 4   | 5    | 7    | 10  |
| $P$ | 0,1 | 0,3 | 0,25 | 0,05 | 0,3 |

**Решение.** Для построения функции распределения  $F(x)$  дискретной случайной величины  $X$  воспользуемся формулой (2.2):  
при  $x < 2$   $F(x) = 0$ ;

при  $2 < x < 4$   $F(x) = p_1 = 0,1$ ;

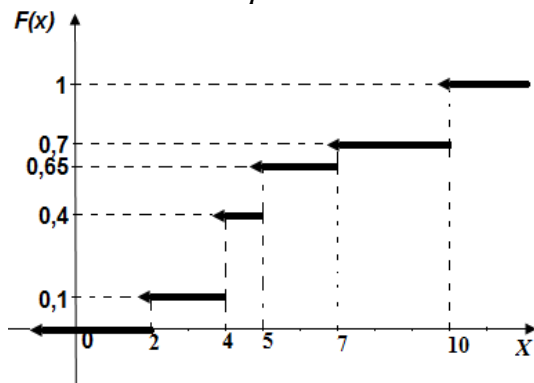
при  $4 < x < 5$   $F(x) = p_1 + p_2 = 0,1 + 0,3 = 0,4$ ;

при  $5 < x < 7$   $F(x) = p_1 + p_2 + p_3 = 0,1 + 0,3 + 0,25 = 0,65$ ;

при  $7 < x < 10$   $F(x) = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0,1 + 0,3 + 0,25 + 0,05 = 0,7$ ;

при  $x > 10$   $F(x) = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 0,1 + 0,3 + 0,25 + 0,05 + 0,3 = 1$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 2 \\ 0,1 & \text{при } 2 < x < 4 \\ 0,4 & \text{при } 4 < x < 5 \\ 0,65 & \text{при } 5 < x < 7 \\ 0,7 & \text{при } 7 < x < 10 \\ 1 & \text{при } x > 10 \end{cases}$$



**Задача 5.** Два стрелка делают по одному выстрелу в мишень. Вероятность попадания для первого стрелка при одном выстреле – 0,5, для второго – 0,4. ДСВ  $X$  – число попаданий в мишень. Найти функцию распределения этой случайной величины. Найти вероятность события  $X \geq 1$ .

**Решение.** Найдем сначала закон распределения данной ДСВ  $X$  – число попаданий в мишень. Случайная величина  $X$  может принимать значения  $k = \{0, 1, 2\}$ . Найдем вероятности этих значений.

Введем обозначения: событие  $A_1$  – попадание первого стрелка, событие  $A_2$  – попадание второго стрелка. По условию задачи  $P(A_1) = 0,5$ ,  $P(A_2) = 0,4$ . Тогда вероятности противоположных событий соответственно равны  $P(\overline{A_1}) = 0,5$ ,  $P(\overline{A_2}) = 0,4$ .

$$p_1 = P(X = 0) = P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2}) = P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) = 0,5 \cdot 0,6 = 0,3$$

$$\begin{aligned} p_2 = P(X = 1) &= P(A_1 \cdot \overline{A_2} + \overline{A_1} \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P(\overline{A_2}) + P(\overline{A_1}) \cdot P(A_2) = \\ &= 0,5 \cdot 0,6 + 0,5 \cdot 0,4 = 0,3 + 0,2 = 0,5 \end{aligned}$$

$$p_3 = P(X = 2) = P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) = 0,5 \cdot 0,4 = 0,2$$

|     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|
| $X$ | 0   | 1   | 2   |
| $P$ | 0,3 | 0,5 | 0,2 |



$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0 \\ 0,3 & \text{при } 0 < x < 1 \\ 0,8 & \text{при } 1 < x < 2 \\ 1 & \text{при } x > 2 \end{cases}$$

$$P(X \geq 1) = P(X = 1) + P(X = 2) = 0,5 + 0,2 = 0,7$$

### 2.1.1. Числовые характеристики ДСВ

*Модой*  $M_o(X)$  ДСВ  $X$  называется такое значение случайной величины, вероятность которого наибольшая.

*Медианой*  $M_e(X)$  ДСВ  $X$  называется среднее по положению в пространстве событий значение случайной величины.

*Математическое ожидание*  $M(X)$  ДСВ  $X$  приближенно равно среднему значению случайной величины.

*Дисперсия*  $D(X)$  ДСВ  $X$  характеризует разброс случайной величины относительно среднего значения (математического ожидания).

*Среднее квадратическое отклонение*  $\sigma(X)$  ДСВ  $X$  характеризует ширину диапазона значений случайной величины.

*Математическое ожидание*  $M(X)$  ДСВ  $X$  равно сумме произведений всех возможных значений величины  $X$  на соответствующие вероятности

$$M(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \dots + x_n \cdot p_n \quad (2.3)$$

или

$$M(X) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i$$

*Свойства математического ожидания:*

- 1) Математическое ожидание постоянной равно самой постоянной величине  $M(C)=C$ , где  $C - \text{const}$ .
- 2) Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания  $M(C \cdot X)=C \cdot M(X)$ , где  $C - \text{const}$ .
- 3) Математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме математических ожиданий этих величин  $M(X+Y)=M(X)+M(Y)$ .
- 4) Математическое ожидание разности случайных величин равно разности математических ожиданий этих величин  $M(X-Y)=M(X)-M(Y)$ .
- 5) Математическое ожидание произведения взаимно независимых случайных величин равно произведению математических ожиданий этих величин  $M(X \cdot Y)=M(X) \cdot M(Y)$ .

*Дисперсия*  $D(X)$  ДСВ  $X$  равна разности между математическим ожиданием квадрата величины  $X$  и квадратом ее математического ожидания

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 \quad (2.4)$$

*Свойства дисперсии:*

- 1) Дисперсия есть величина неотрицательная  $D(X) \geq 0$ .
- 2) Дисперсия постоянной равна нулю  $D(C) = 0$ , где  $C - const$ .
- 3) Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат  $D(C \cdot X) = C^2 \cdot D(X)$ , где  $C - const$ .
- 4) Дисперсия суммы случайных величин равна сумме дисперсий этих величин  $D(X+Y) = D(X) + D(Y)$ .
- 5) Дисперсия разности случайных величин равна сумме дисперсий этих величин  $D(X-Y) = D(X) + D(Y)$ .

Среднее квадратическое отклонение  $\sigma(X)$  ДСВ  $X$  равно корню квадратному из ее дисперсии

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} \quad (2.5)$$

**Задача 6.** ДСВ  $X$  задана законом распределения. Вычислить значения моды, медианы, математического ожидания, дисперсии и среднего квадратического отклонения.

|     |     |     |      |      |     |
|-----|-----|-----|------|------|-----|
| $X$ | 2   | 4   | 5    | 7    | 10  |
| $P$ | 0,1 | 0,3 | 0,25 | 0,05 | 0,3 |

**Решение.** Моды будет две, т.к. наибольшее значение вероятности соответствует двум значениям случайной величины  $M_o(X)=4$  и  $M_o(X)=10$ .

Медиана, то значение случайной величины, которое находится посередине  $M_e(X)=5$ .

Математическое ожидание вычислим по формуле (2.3)

$$M(X) = 2 \cdot 0,1 + 4 \cdot 0,3 + 5 \cdot 0,25 + 7 \cdot 0,05 + 10 \cdot 0,3 = 6$$

Дисперсию вычислим по формуле (2.4)

$$M(X^2) = 2^2 \cdot 0,1 + 4^2 \cdot 0,3 + 5^2 \cdot 0,25 + 7^2 \cdot 0,05 + 10^2 \cdot 0,3 = 43,90$$

$$D(X) = 43,90 - (6)^2 = 7,90$$

Среднее квадратическое вычислим по формуле (2.5)

$$\sigma(X) = \sqrt{7,90} \approx 2,81$$

### 2.1.2. Биномиальное распределение

Биномиальным называется закон распределения ДСВ  $X$  – числа появления события  $A$  в  $n$  независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события  $p$  – величина постоянная (вероятность не появления события

$q=1-p$ ).

Следовательно, при  $p=\text{const}$  ( $0 < p < 1$ ) в  $n$  независимых испытаниях вероятность возможного значения  $X=k$  вычисляется по формуле Бернулли:

$$P_n(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \text{ где } C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (2.6)$$

Числовые характеристики биномиального распределения:  $M(X)=np$ ,  $D(X)=npq$ ,  $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$ .

**Задача 7.** Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для данного стрелка 0,7 и не зависит от номера выстрела. Найти вероятность того, что при 5 выстрелах произойдет: а) ровно два попадания в мишень; б) не менее четырех попаданий в мишень.

**Решение.** Пусть случайная величина  $X$  – число попаданий в мишень.

а) По условию задачи  $n=5$ ,  $k=2$ ,  $p=0,7$ , следовательно,  $q=1-p=1-0,7=0,3$ . Тогда по формуле Бернулли (2.6)

$$P_5(X = 2) = C_5^2 p^2 q^{5-2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} 0,7^2 0,3^3 = 0.1323$$

б) По условию задачи  $n=5$ ,  $p=0,7$ ,  $q=0,3$ , не менее четырех попаданий означает либо четыре, либо пять попаданий, т.е.  $k \geq 4$ . Тогда по формуле Бернулли

$$P_5(X \geq 4) = P_5(X = 4) + P_5(X = 5) = C_5^4 p^4 q^{5-4} + C_5^5 p^5 q^{5-5} = \\ 5 \cdot (0,7)^4 \cdot (0,3)^1 + 1 \cdot (0,7)^5 \cdot (0,3)^0 = 0,36015 + 0,16807 = 0,52822 \approx 0,528$$

### 2.1.3. Распределение Пуассона. Простейший поток событий

При  $p=\text{const}$  ( $p \leq 0,1$ ) в  $n$  независимых испытаниях вероятность возможного значения  $X=k$  вычисляется по формуле

$$P_n(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \text{ где } \lambda = np \quad (2.7)$$

При условии  $p \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$ ,  $np \rightarrow \lambda = \text{const}$  закон распределения Пуассона является предельным случаем биномиального закона. Так как при этом вероятность  $p$  события  $A$  в каждом испытании мала, то закон распределения Пуассона называют часто *законом редких явлений*.

Закон распределения Пуассона применяют в теории массового обслуживания, в которой одним из главных является понятие *потока событий*.

*Потоком событий* называют последовательность событий, которые

наступают в случайные моменты времени. Например: поступление вызовов на АТС, на пункт неотложной медицинской помощи, прибытие самолетов в аэропорт, последовательность отказов элементов и др.

*Простейшим (пуассоновским)* называют поток событий, который обладает свойствами стационарности, отсутствия последействия и ординарности.

*Свойство стационарности* характеризуется тем, что вероятность появления  $k$  событий на любом промежутке времени зависит только от числа  $k$  и от длительности  $t$  промежутка и не зависит от начала его отсчета; при этом различные промежутки времени предполагаются непересекающимися.

*Свойство отсутствия последействия* характеризуется тем, что вероятность появления  $k$  событий на любом промежутке времени не зависит от того, появлялись или не появлялись события в моменты времени, предшествующие началу рассматриваемого промежутка.

*Свойство ординарности* характеризуется тем, что появление двух и более событий за малый промежуток времени практически невозможно.

*Интенсивностью потока  $\lambda$*  называют среднее число событий, которые появляются в единицу времени.

Если постоянная интенсивность потока известна, то вероятность появления  $k$  событий простейшего потока за время длительностью  $t$  определяется формулой

$$P_t(X = k) = \frac{(\lambda \cdot t)^k}{k!} e^{-\lambda \cdot t} \quad (2.8)$$

Числовые характеристики распределения Пуассона:  $M(X) = \lambda$ ,  $D(X) = \lambda$ ,  $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$ .

**Задача 8.** Вероятность изготовления нестандартной детали 0,004. Найти вероятность того, что среди 1000 деталей окажется 5 нестандартных.

**Решение.** Пусть случайная величина  $X$  – число нестандартных деталей.

По условию задачи  $n=1000$ ,  $k=5$ ,  $p=0,004$ . Тогда  $\lambda=np=1000 \cdot 0,004=4$  и по формуле пуассоновского распределения (2.7)

$$P_{1000}(X = 5) = \frac{4^5}{5!} e^{-4} = \frac{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot \frac{1}{e^4} = \frac{128}{15} \cdot \frac{1}{e^4} \approx 0,1562$$

**Задача 9.** Среднее число вызовов поступающих на АТС в одну минуту, равно двум. Найти вероятность того, что за 5 минут поступит: а) два вызова; б) менее двух вызовов.

**Решение.** Пусть случайная величина  $X$  – число вызовов за 5 минут.

а) По условию задачи  $\lambda=2$ ,  $t=5$ ,  $k=2$ . Тогда по формуле пуассоновского распределения (2.8)

$$P_5(X=2) = \frac{(2 \cdot 5)^2}{2!} e^{-2 \cdot 5} = \frac{10^2}{2} \cdot \frac{1}{e^{10}} = \frac{50}{e^{10}}$$

б) По условию задачи  $\lambda=2$ ,  $t=5$ ,  $k < 2$ . Тогда по формуле пуассоновского распределения (2.8)

$$\begin{aligned} P_5(X < 2) &= P_5(X=0) + P_5(X=1) = \frac{(2 \cdot 5)^0}{0!} e^{-2 \cdot 5} + \frac{(2 \cdot 5)^1}{1!} e^{-2 \cdot 5} = \\ &= \frac{10^0}{1} \cdot \frac{1}{e^{10}} + \frac{10^1}{1} \cdot \frac{1}{e^{10}} = \frac{1}{e^{10}} + \frac{10}{e^{10}} = \frac{11}{e^{10}} \end{aligned}$$

## 2.2. Непрерывная случайная величина (НСВ)

Функцией распределения случайной величины называют вероятность того, что случайная величина  $X$  в результате испытания примет значение, меньшее  $x$ , т.е.  $F(x) = P(X < x)$ .

Пример функции распределения непрерывной случайной величины:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ \frac{x}{2} & \text{при } 0 < x \leq 2, \\ 1 & \text{при } x > 2 \end{cases}$$

Функция распределения случайной величины является неубывающей функцией, значения которой лежат в интервале  $[0; 1]$ .

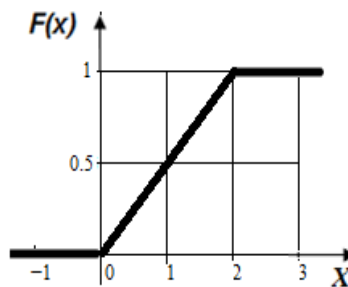


Рис. 2.5 – Пример графика функции распределения НСВ

Вероятность того, что случайная величина  $X$  примет значение из интервала  $(a,b)$ , равна разности значений ее функции распределения  $F(x)$  на концах этого интервала:

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a) \quad (2.9)$$

**Задача 10.** Случайная величина  $X$  задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ \frac{x}{2} & \text{при } 0 < x \leq 2, \\ 1 & \text{при } x > 2 \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания случайная величина  $X$  примет значение, заключенное в интервале  $(1,2)$ .

**Решение.** Воспользуемся формулой (2.9)

$$P(0 < X < 2) = F(2) - F(0) = \frac{2}{2} - \frac{0}{2} = \frac{1}{2}$$

*Плотностью распределения* (иногда просто плотностью) непрерывной случайной величины  $X$  в точке  $x$  называется производная ее функции распределения в этой точке:

$$p(x) = F'(x) \quad (2.10)$$

График плотности распределения называется *кривой распределения*.

**Задача 11.** Случайная величина  $X$  задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ \frac{x}{2} & \text{при } 0 < x \leq 2, \\ 1 & \text{при } x > 2 \end{cases}$$

Найти плотность ее распределения и построить график.

**Решение.** Воспользуемся формулой (2.10) для нахождения плотности распределения

$$p(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{при } 0 < x \leq 2 \\ 0 & \text{при } x > 2 \end{cases}$$

График плотности распределения представлен на рисунке 2.6.

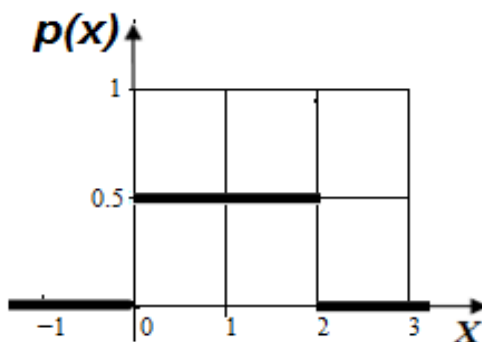


Рис. 2.6. График плотности распределения

### 2.2.1. Числовые характеристики НСВ

Математическое ожидание  $M(X)$  НСВ  $X$ , все значения которой принадлежат интервалу  $(a,b)$ , а  $p(x)$  – ее плотность вероятностей, определяется формулой

$$M(X) = \int_a^b x \cdot p(x) dx \quad (2.11)$$

Свойства математического ожидания:

- 1)  $M(C) = C$ , где  $C - \text{const.}$
- 2)  $M(C \cdot X) = C \cdot M(X)$ , где  $C - \text{const.}$
- 3)  $M(X + Y) = M(X) + M(Y)$ .
- 4)  $M(X - Y) = M(X) - M(Y)$ .
- 5)  $M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y)$ .

Дисперсия  $D(X)$  ДСВ  $X$  равна разности между математическим ожиданием квадрата величины  $X$  и квадратом ее математического ожидания

$$D(X) = \int_a^b x^2 \cdot p(x) dx - (M(X))^2 \quad (2.12)$$

Свойства дисперсии:

- 6)  $D(X) \geq 0$ .
- 7)  $D(C) = 0$ , где  $C - \text{const.}$
- 8)  $D(C \cdot X) = C^2 \cdot D(X)$ , где  $C - \text{const.}$
- 9)  $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$ .
- 10)  $D(X - Y) = D(X) + D(Y)$ .

Среднее квадратическое отклонение  $\sigma(X)$  ДСВ  $X$  равно корню квадратному из ее дисперсии

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} \quad (2.13)$$

**Задача 12.** Случайная величина  $X$  задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0 \\ x^3 & \text{при } 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{при } x > 1 \end{cases}$$

Найти числовые характеристики случайной величины: математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

**Решение.** Воспользуемся формулой (2.10) для нахождения плотности распределения

$$p(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0 \\ 3x^2 & \text{при } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{при } x > 1 \end{cases}$$

Математическое ожидание вычислим по формуле (2.11)

$$M(X) = \int_0^1 x \cdot 3x^2 dx = 3 \int_0^1 x^3 dx = 3 \cdot \frac{x^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{3}{4}$$

Дисперсию вычислим по формуле (2.12)

$$\begin{aligned} D(X) &= \int_a^b x^2 \cdot 3x^2 dx - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 3 \int_0^1 x^4 dx - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 3 \cdot \frac{x^5}{5} \Big|_0^1 - \frac{9}{16} = \\ &= \frac{3}{5} - \frac{9}{16} = \frac{3}{80} \end{aligned}$$

Среднее квадратическое вычислим по формуле (2.13)

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{3}{80}} \approx 0,19$$

### 2.2.2. Равномерное распределение

*Равномерным* называется распределение таких случайных величин, все значения которых лежат на некотором отрезке  $[a;b]$  и имеют постоянную плотность вероятности на этом отрезке.

Функция распределения НСВ, равномерно распределенной на отрезке  $(a;b)$ , имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{при } a < x < b \\ 1 & \text{при } x > b \end{cases} \quad (2.14)$$

График функции распределения представлен на рисунке 2.7.

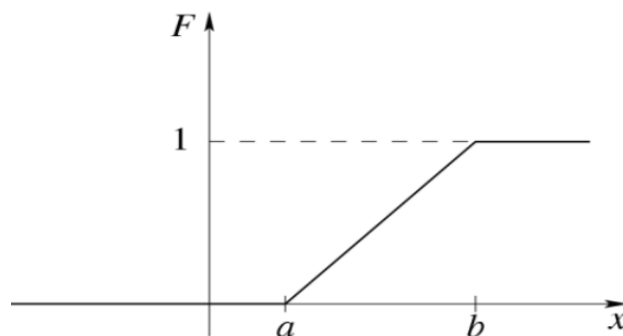


Рис. 2.7 – График функции распределения равномерной случайной величины



Плотность вероятности задается формулой

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{при } x \in (a; b) \\ 0 & \text{при } x \notin (a; b) \end{cases} \quad (2.15)$$

График плотности вероятности представлен на рисунке 2.8.

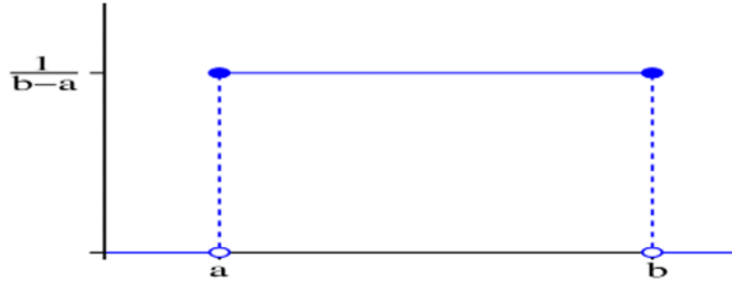


Рис. 2.8 – График плотности распределения равномерной случайной величины

При данной плотности математическое ожидание и дисперсия принимают следующие значения:  $M(X) = \frac{a+b}{2}$ ,  $D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$ .

### 2.2.3. Нормальное распределение

Случайная величина с нормальным распределением существует в интервале  $(-\infty; +\infty)$  и описывается законами:

- плотности вероятности  $f(x)$ , называемой «кривой Гаусса»:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad (2.16)$$

- функции распределения  $F(x)$ :

$$F(x) = 0,5 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{x-m}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad (2.17)$$

Для удобства вводится нечетная функция, называемая функцией Лапласа:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad (2.19)$$

Свойства функции Лапласа:  $\Phi(0) = 0$ ,  $\Phi(+\infty) = \frac{1}{2}$ ,  $\Phi(-x) = -\Phi(x)$ .

Вероятность попадания в интервал  $(a;b)$  НСВ, распределенной по нормальному закону, можно найти с помощью функции Лапласа  $\Phi(x)$  по формуле:

$$P(a < X < b) = \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right), \quad (2.20)$$

где математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение берется из плотности распределения вероятности (формула 2.16).

**Задача 13.** Срок службы прибора представляет собой случайную величину, подчиненную нормальному закону распределения с гарантией на 15 лет и средним квадратическим отклонением равным 3 годам. Определить вероятность того, что прибор прослужит от 10 до 20 лет.

**Решение.** Воспользуемся формулой (2.20) для нахождения вероятности. По условию задачи  $m=15$ ,  $\sigma=3$ ,  $a=10$ ,  $b=20$ :

$$\begin{aligned} P(10 < X < 20) &= \Phi\left(\frac{20-15}{3}\right) - \Phi\left(\frac{10-15}{3}\right) = \Phi\left(\frac{5}{3}\right) - \Phi\left(-\frac{5}{3}\right) = \\ &= \Phi\left(\frac{5}{3}\right) - \left(-\Phi\left(\frac{5}{3}\right)\right) = \Phi\left(\frac{5}{3}\right) + \Phi\left(\frac{5}{3}\right) = 2 \cdot \Phi\left(\frac{5}{3}\right) = 2 \cdot \Phi(1,67) \end{aligned}$$

Из таблицы Лапласа (Приложение 1) найдем значение функции при 1,67:  $\Phi(1,67) = 0,4525$ . Следовательно,  $P(10 < X < 20) = 0,9050$ .

### **Контрольные вопросы**

1. Что называют случайной величиной?
2. Какую величину называют дискретной случайной величиной?
3. Какую величину называют непрерывной случайной величиной?
4. Что называют законом распределения случайной величины?
5. Перечислите числовые характеристики СВ.
6. Каким свойством обладает ряд распределения ДСВ?
7. Что называют многоугольником распределения ДСВ?
8. Какими свойствами обладает функция распределения СВ?
9. Перечислите основные свойства математического ожидания.
10. Перечислите основные свойства дисперсии.
11. Как найти плотность распределения НСВ, если известна функция распределения?

### Задачи для самостоятельного решения по теме «Случайные величины»

1. Найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, моду и медиану дискретной случайной величины, представленной законом распределения:

|     |     |     |     |      |      |
|-----|-----|-----|-----|------|------|
| $X$ | 10  | 13  | 17  | 20   | 25   |
| $P$ | 0,4 | 0,3 | 0,1 | 0,15 | 0,05 |

Составить функцию распределения  $F(x)$ .

2. Найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, моду и медиану дискретной случайной величины, представленной законом распределения:

|     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| $X$ | 8   | 14  | 17  | 20  | 23  |
| $P$ | 0,2 | 0,1 | 0,2 | 0,4 | 0,1 |

Составить функцию распределения  $F(x)$ .

3. Найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, моду и медиану дискретной случайной величины, представленной законом распределения:

|     |     |      |     |     |      |
|-----|-----|------|-----|-----|------|
| $X$ | 14  | 15   | 17  | 25  | 26   |
| $P$ | 0,1 | 0,35 | 0,3 | 0,2 | 0,05 |

Составить функцию распределения  $F(x)$ .

4. Найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, моду и медиану дискретной случайной величины, представленной законом распределения:

|     |     |      |      |     |     |
|-----|-----|------|------|-----|-----|
| $X$ | 16  | 20   | 25   | 30  | 35  |
| $P$ | 0,2 | 0,15 | 0,15 | 0,3 | 0,2 |

Составить функцию распределения  $F(x)$ .

5. На цель сбрасывается 6 бомб, вероятность попадания каждой в цель составляет 0,3. Найти вероятность поражения цели 4 бомбами.

6. Фирма снабжает своей продукцией пять магазинов. От каждого магазина может поступить заявка на очередной день с вероятностью 0,4 независимо от заявок других магазинов. Какова вероятность того, что поступит не менее четырех заявок?

7. Вероятность попадания стрелком в мишень при каждом выстреле не зависит от результатов предыдущих выстрелов и равна 0,8. Стрелок сделал 5 выстрелов. Найти вероятность следующего события: мишень поражена одной пулей.

8. Вероятность попадания бомбы в цель составляет 0,25. Сбрасывается 8 бомб. Найти вероятность того, что будет не менее 7 попаданий.

9. Магазин получил 1000 стеклянных бутылок минеральной воды. Вероятность того, что при перевозке бутылка будет разбита, равна 0,003. Найти вероятность того, что при перевозке будут разбиты не более двух бутылок.

10. На АТС поступают в среднем 12 заказов в минуту. Найти вероятность того, что за 20 мин поступят ровно 10 заказов.

11. Обувной магазин продал 200 пар обуви. Вероятность того, что в магазин будет возвращена бракованная пара равна 0,01. Найти вероятность того, что из проданных пар обуви будет возвращено не более двух пар.

12. В страховую компанию в среднем поступает 2 иска в час. Определите вероятность того, что в течение 1,5 часов не поступит ни одного иска.

13. Функция распределения непрерывной случайной величины  $X$  имеет вид

$$F(X) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \frac{1}{9}x^2, & 0 \leq x \leq 3; \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

Найти ее плотность распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение.

14. Функция распределения непрерывной случайной величины  $X$  имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0; & x \leq 0 \\ 0,25x^3; & 0 < x \leq 1 \\ 1; & x > 1 \end{cases}$$

Найти ее плотность распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение.

15. Функция распределения непрерывной случайной величины  $X$  имеет вид

$$F(X) = \begin{cases} 0, & x < -1; \\ (x+1)^2, & -1 \leq x \leq 0; \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Найти ее плотность распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение.

16. Непрерывная случайная величина  $X$  задана плотностью распределения вероятностей  $f(x) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-8)^2}{32}}$ . Чему равна вероятность того, что в результате испытания  $X$  примет значение, заключенное в интервале (4; 10)?

17. Непрерывная случайная величина  $X$  задана плотностью распределения вероятностей  $f(x) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x+8)^2}{18}}$ . Чему равны математическое

ожидание  $m$  и среднеквадратическое отклонение  $\sigma$  этой случайной величины?

18. Непрерывная случайная величина  $X$  задана плотностью распределения вероятностей  $f(x) = \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x+7)^2}{50}}$ . Чему равна вероятность того,

что в результате испытания  $X$  примет значение, заключенное в интервале  $(1; 7)$ ?

19. Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины, равномерно распределенной на отрезке, имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} C & \text{при } x \in (0; 7), \\ 0 & \text{при } x \notin (0; 7) \end{cases}. \text{ Чему равно значение } C?$$

20. Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины, равномерно распределенной на отрезке, имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 0,5 & \text{при } x \in (5; 7), \\ 0 & \text{при } x \notin (5; 7) \end{cases}. \text{ Чему равна ее дисперсия?}$$

### Вариант контрольной работы по теме «Случайные величины»

1. Найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, моду и медиану дискретной случайной величины, представленной законом распределения:

|     |     |     |      |      |     |
|-----|-----|-----|------|------|-----|
| $X$ | 20  | 24  | 29   | 34   | 37  |
| $P$ | 0,2 | 0,3 | 0,25 | 0,15 | 0,1 |

Составить функцию распределения  $F(x)$ .

2. (Задача на биномиальное распределение). Вероятность выигрыша лотерейного билета составляет 0,1. Некто покупает 5 лотерейных билетов. Найти вероятность следующего события: ровно два билета выигрывают.

3. (Задача на применение закона распределения Пуассона). Вероятность набора абонентом телефонного номера с ошибкой равна 0,001. Определить вероятность того, что среди 500 произведенных заказов не более 2 телефонных номеров были набраны с ошибкой.

4. Функция распределения непрерывной случайной величины  $X$  имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0; & x \leq -2 \\ 0,25x + 0,5; & -2 < x \leq 2 \\ 1; & x > 2 \end{cases}.$$

Найти ее плотность распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение.

5. Непрерывная случайная величина  $X$  задана плотностью распределения вероятностей  $f(x) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-18)^2}{32}}$ . Чему равны математическое ожидание  $m$  и среднее квадратическое отклонение  $\sigma$  этой случайной величины?

### Вариант тестового задания по теме «Случайные величины»

1. Дискретная случайная величина  $X$  задана законом распределения вероятностей:

|   |     |     |     |
|---|-----|-----|-----|
| X | 2   | 3   | 10  |
| P | 0,1 | 0,4 | 0,5 |

Тогда вероятность  $P(3 \leq X \leq 10)$  равна ...

- а) 0,5;                                      б) 0,9;                                      в) 0,4;                                      г) 0,1.

2. Дискретная случайная величина  $X$  задана законом распределения вероятностей:

|   |      |      |      |
|---|------|------|------|
| X | 6    | 9    | 12   |
| P | 0,20 | 0,55 | 0,25 |

Тогда ее функция распределения имеет вид ...

- а)  $\begin{cases} 1 & \text{при } x \leq 6, \\ 0,20 & \text{при } 6 < x \leq 9, \\ 0,75 & \text{при } 9 < x \leq 12, \\ 0 & \text{при } x > 12. \end{cases}$
- б)  $\begin{cases} 1 & \text{при } x \leq 6, \\ 0,75 & \text{при } 6 < x \leq 9, \\ 0,20 & \text{при } 9 < x \leq 12, \\ 0 & \text{при } x > 12. \end{cases}$
- в)  $\begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 6, \\ 0,20 & \text{при } 6 < x \leq 9, \\ 0,55 & \text{при } 9 < x \leq 12, \\ 0,25 & \text{при } x > 12. \end{cases}$
- г)  $\begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 6, \\ 0,20 & \text{при } 6 < x \leq 9, \\ 0,75 & \text{при } 9 < x \leq 12, \\ 1 & \text{при } x > 12. \end{cases}$

3. Дискретная случайная величина  $X$  задана законом распределения вероятностей:

|   |     |     |     |
|---|-----|-----|-----|
| X | 2   | 3   | 10  |
| P | 0,1 | 0,4 | 0,5 |

Тогда ее математическое ожидание равно ...

- а) 0,5;                                      б) 1,9;                                      в) 5,4;                                      г) 6,4.

4. Выберите из перечисленного формулу Бернулли:

- а)  $P_n(k) = C_n^k p^{n-k} q^k$ ;                                      в)  $P_n(k) = C_k^n p^k q^{n-k}$ ;
- б)  $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ ;                                      г)  $P_n(k) = C_k^n p^k q^{n-k}$ .

5. Среднее число вызовов, поступающих на станцию «Скорой помощи» в течение одной минуты, равно 4. Тогда вероятность того, что в течение двух минут поступит ровно 10 вызовов, можно вычислить как ...

- а)  $\frac{8^{10}}{10!}e^{-8}$ ;                      б)  $\frac{10^8}{8!}e^{-10}$ ;                      в)  $\frac{e^{-8}}{10!}$ ;                      г)  $\frac{4^{10}}{10!}e^{-4}$ .

6. Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины имеет вид  $f(x) = \begin{cases} C & \text{при } x \in (-3; 7), \\ 0 & \text{при } x \notin (-3; 7) \end{cases}$ . Тогда значение C равно ...

- а)  $\frac{1}{4}$ ;                      б) 4;                      в)  $\frac{1}{10}$ ;                      г) 10.

7. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения вероятностей  $f(x) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-18)^2}{32}}$ . Тогда вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале (14; 20), можно вычислить как ...

- а)  $P(14 < X < 20) = \frac{1}{2} \Phi(0,5) - \Phi(1)$ , где  $\Phi(x)$  – функция Лапласа;  
 б)  $P(14 < X < 20) = \Phi(0,5) + \Phi(1)$ , где  $\Phi(x)$  – функция Лапласа;  
 в)  $P(14 < X < 20) = \Phi(0,5) - \Phi(1)$ , где  $\Phi(x)$  – функция Лапласа;  
 г)  $P(14 < X < 20) = \frac{1}{2} \Phi(0,5) + \Phi(1)$ , где  $\Phi(x)$  – функция Лапласа.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Значения интегральной функции Лапласа  $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ .

| <b>x</b>   | <b>0</b> | <b>1</b> | <b>2</b> | <b>3</b> | <b>4</b> | <b>5</b> | <b>6</b> | <b>7</b> | <b>8</b> | <b>9</b> |
|------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| <b>0,0</b> | 0,00000  | 00399    | 00789    | 01197    | 01595    | 01994    | 02392    | 02790    | 03188    | 03586    |
| <b>0,1</b> | 03983    | 04380    | 04776    | 05172    | 05567    | 05962    | 06356    | 06749    | 07142    | 07535    |
| <b>0,2</b> | 07926    | 08317    | 08706    | 090905   | 09483    | 09871    | 10257    | 10642    | 11026    | 11409    |
| <b>0,3</b> | 11791    | 12172    | 12552    | 12930    | 13307    | 13683    | 14058    | 14431    | 14803    | 15173    |
| <b>0,4</b> | 15542    | 15910    | 16276    | 16640    | 17003    | 17364    | 17724    | 18082    | 18439    | 18793    |
| <b>0,5</b> | 19146    | 19497    | 19847    | 20194    | 20540    | 20884    | 21226    | 21566    | 21940    | 22240    |
|            |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |
| <b>0,6</b> | 22575    | 22907    | 23237    | 23565    | 23891    | 24215    | 24537    | 24857    | 25175    | 25490    |
| <b>0,7</b> | 25804    | 26115    | 26424    | 26730    | 27035    | 27337    | 27637    | 27935    | 28230    | 28524    |
| <b>0,8</b> | 28814    | 29103    | 29389    | 29673    | 29955    | 30234    | 30511    | 30785    | 31057    | 31327    |
| <b>0,9</b> | 31594    | 31859    | 32121    | 32381    | 32639    | 32894    | 33147    | 33398    | 33646    | 33891    |
| <b>1,0</b> | 34134    | 34375    | 34614    | 34850    | 35083    | 35314    | 35543    | 35769    | 35993    | 36214    |
|            |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |
| <b>1,1</b> | 36433    | 36650    | 36864    | 37076    | 37286    | 37493    | 37698    | 38000    | 38100    | 38298    |
| <b>1,2</b> | 38493    | 38686    | 38877    | 39065    | 39251    | 39435    | 39617    | 39973    | 39973    | 40147    |
| <b>1,3</b> | 40320    | 40490    | 40658    | 40824    | 40988    | 41149    | 41308    | 41466    | 41621    | 41774    |
| <b>1,4</b> | 41924    | 42073    | 42220    | 42364    | 42507    | 42647    | 42786    | 42922    | 43056    | 43189    |
| <b>1,5</b> | 43319    | 43448    | 43574    | 43699    | 43822    | 43943    | 44062    | 44179    | 44295    | 44408    |
|            |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |
| <b>1,6</b> | 44520    | 44630    | 44738    | 44845    | 44950    | 45053    | 45154    | 45252    | 45352    | 45449    |
| <b>1,7</b> | 45543    | 45728    | 45728    | 45818    | 45907    | 45994    | 46080    | 46246    | 46246    | 46327    |
| <b>1,8</b> | 0,46407  | 46485    | 46562    | 46638    | 46712    | 46784    | 46856    | 46926    | 46995    | 47062    |
| <b>1,9</b> | 47128    | 47193    | 47257    | 47320    | 47381    | 47441    | 47500    | 47558    | 47615    | 47670    |
| <b>2,0</b> | 47725    | 47778    | 47831    | 47882    | 47932    | 47982    | 48030    | 48077    | 48124    | 48169    |
|            |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |
| <b>2,1</b> | 48214    | 48257    | 48300    | 48341    | 48382    | 48422    | 48461    | 48500    | 48537    | 48574    |
| <b>2,2</b> | 48610    | 48645    | 48679    | 48713    | 48745    | 48778    | 48809    | 48840    | 48870    | 48899    |



|            |         |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|------------|---------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| <b>2,3</b> | 48928   | 48956 | 48983 | 49010 | 49036 | 49061 | 49086 | 49111 | 49134 | 49158 |
| <b>2,4</b> | 49180   | 49202 | 49224 | 49245 | 49266 | 49286 | 49305 | 49324 | 49343 | 49361 |
| <b>2,5</b> | 49379   | 49396 | 49413 | 49430 | 49446 | 49461 | 49477 | 49492 | 49506 | 49520 |
|            |         |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
| <b>2,6</b> | 49534   | 49547 | 49560 | 49573 | 49585 | 49598 | 49609 | 49621 | 49632 | 49643 |
| <b>2,7</b> | 49653   | 49664 | 49674 | 49683 | 49693 | 49702 | 49711 | 49720 | 49728 | 49736 |
| <b>2,8</b> | 49744   | 49752 | 49760 | 49767 | 49774 | 49781 | 49788 | 49795 | 49801 | 49807 |
| <b>2,9</b> | 49813   | 49819 | 49825 | 49831 | 49836 | 49841 | 49846 | 49851 | 49856 | 49861 |
| <b>3,0</b> | 49865   | 49869 | 49874 | 49878 | 49882 | 49886 | 49889 | 49893 | 49896 | 49900 |
|            |         |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
| <b>3,1</b> | 49903   | 49906 | 49910 | 49913 | 49916 | 49918 | 49921 | 49924 | 49926 | 49929 |
| <b>3,2</b> | 49931   | 49934 | 49936 | 49938 | 49940 | 49942 | 49944 | 49946 | 49948 | 49950 |
| <b>3,3</b> | 49952   | 49953 | 49955 | 49957 | 49958 | 49960 | 49961 | 49962 | 49964 | 49965 |
| <b>3,4</b> | 49966   | 49968 | 49969 | 49970 | 49971 | 49972 | 49973 | 49974 | 49975 | 49976 |
| <b>3,5</b> | 49977   | 49978 | 49978 | 49979 | 49980 | 49981 | 49981 | 49982 | 49983 | 49983 |
|            |         |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
| <b>3,6</b> | 49984   | 49985 | 49985 | 49986 | 49986 | 49987 | 49987 | 49988 | 49988 | 49989 |
| <b>3,7</b> | 49989   | 49990 | 49990 | 49990 | 49991 | 49991 | 49992 | 49992 | 49992 | 49992 |
| <b>3,8</b> | 0,49993 | 49993 | 49993 | 49994 | 49994 | 49994 | 49994 | 49995 | 49995 | 49995 |
| <b>3,9</b> | 49995   | 49995 | 49996 | 49996 | 49996 | 49996 | 49996 | 49996 | 49997 | 49997 |
| <b>4,0</b> | 49997   |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
| <b>5,0</b> | 49999   |       |       |       |       |       |       |       |       |       |

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бирюкова, Л. Г. Теория вероятностей и математическая статистика [Электронный ресурс]: учебное пособие / Л.Г. Бирюкова, Г.И. Бобрик, Р.В. Сагитов [и др.]; под ред. В.И. Матвеева. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва: ИНФРА-М, 2020. — 289 с. — (Среднее профессиональное образование). - ISBN 978-5-16-015712-2. - Режим доступа: <https://znanium.com/read?id=363087>. - Загл. с экрана.

2. Спирина, М. С. Теория вероятностей и математическая статистика [Электронный ресурс]: учебник для студентов учреждений среднего профессионального образования / М. С. Спирина, П. А. Спирин. - 4-е изд., стер. - Москва: Издательский центр "Академия", 2019. - 368 с. - Режим доступа: <https://www.academia-moscow.ru/reader/?id=427805>. - ISBN 978-5-4468-8659-3

### Дополнительная литература

1. Коган, Е. А. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник / Е.А. Коган, А.А. Юрченко. — Москва: ИНФРА-М, 2020. — 250 с. — (Среднее профессиональное образование). - ISBN 978-5-16-015649-1. - Режим доступа: <https://znanium.com/read?id=363072>

2. Павлов, С. В. Теория вероятностей и математическая статистика [Электронный ресурс]: учебное пособие / С.В. Павлов. — Москва: РИОР: ИНФРА-М, 2022. — 186 с. — (ВО: Бакалавриат). - ISBN 978-5-369-00679-5. — Режим доступа: <https://znanium.com/read?id=399257>

Сапожников, П. Н. Теория вероятностей, математическая статистика в примерах, задачах и тестах [Электронный ресурс]: учебное пособие / П. Н. Сапожников, А. А. Макаров, М. В. Радионова. - Москва: КУРС, НИЦ ИНФРА-М, 2022. - 496 с. - ISBN 978-5-906818-47-8. - Режим доступа: <https://znanium.com/read?id=393002> Загл. с экрана.

Учебное текстовое электронное издание

**Васильева Елена Александровна**

## **ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА**

Практикум

Ответственность за содержание возлагается на авторов  
Издается полностью в авторской редакции

1,80 Мб  
1 электрон. опт. Диск  
Тираж 20 экз.

г. Магнитогорск, 2023 год  
ФГБОУ ВО «МГТУ им. Г.И. Носова»  
Адрес: 455000, Россия, Челябинская область, г. Магнитогорск,  
пр. Ленина 38

ФГБОУ ВО «Магнитогорский государственный  
технический университет им. Г.И. Носова»  
Библиотечно-информационный комплекс