Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Магнитогорский государственный технический университет
им. Г.И. Носова»

Т.А. Иванова

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

*Утверждено Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия*

Магнитогорск
2009

УДК 519.6

Рецензенты:

Заведующий кафедрой прикладной математики и вычислительной техники
ГОУ ВПО «МаГУ»,
профессор, доктор физ.-мат. наук
С.И.Кадченко

Доцент кафедры прикладной математики и вычислительной техники
ГОУ ВПО «МаГУ», кандидат физ.-мат. наук
Е.М.Малеко

Иванова Т.А.
Численные методы: Учеб. пособие. – Магнитогорск: ГОУ ВПО «МГТУ», 2009. – 70 с.

В учебном пособии в систематизированном виде излагается материал, предусмотренный основной образовательной программой дисциплины «Численные методы» для студентов специальностей 080116– «Математические методы в экономике» и 080601 – «Статистика». В каждой главе даются необходимый теоретический материал и задания для самостоятельной работы. Материалы пособия апробированы на занятиях в ГОУ ВПО «МГТУ».

Пособие полезно для студентов, молодых инженеров и изобретателей, ученых и людей, решающих задачи с применением численных методов.

УДК 519.6

© ГОУ ВПО «МГТУ», 2009
© Иванова Т.А., 2009

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Всякое явление природы бесконечно в своей сложности. Чтобы описать явление, необходимо выявить самые существенные свойства, закономерности, внутренние связи, роль отдельных характеристик явления. Выделив наиболее важные факторы, влияющие на происходящие процессы, можно пренебречь менее существенными. Выделяя наиболее существенные свойства реального объекта, исследователь описывает их с помощью математических соотношений (уравнений, систем уравнений или иных математических структур). Основное требование, предъявляемое к математической модели, – адекватность рассматриваемому явлению, т.е. она должна достаточно точно (в рамках допустимых погрешностей) отражать характерные черты явления. Вместе с тем она должна обладать сравнительной простотой и доступностью исследования.

С помощью математического моделирования решение научной задачи сводится к решению математической задачи, являющейся её моделью. Для решения математических задач используются две основные группы методов: аналитические и численные.

Аналитические методы позволяют получить решение задачи в виде формул. В частности, если математическая задача состоит в решении простейших алгебраических или трансцендентных уравнений, дифференциальных уравнений и т.п., то использование известных из курса математического анализа приемов сразу приводит к цели. К сожалению, на практике это бывает достаточно редко.

Основным инструментом для решения сложных математических задач в настоящее время являются численные методы, позволяющие свести решение задачи к выполнению конечного числа арифметических действий над числами; при этом результаты получаются в виде числовых значений.

Отметим важные отличия численных методов от аналитических. Во-первых, численные методы позволяют получить лишь приближенное решение задачи. Во-вторых, они позволяют получить только частное решение с конкретными значениями параметров и исходных данных. Аналитические методы, напротив, позволяют получить точное аналитическое решение (в виде формулы), которое можно исследовать на предмет зависимости от изменения параметров и начальных условий. Несмотря на эти недостатки, численные методы незаменимы в сложных задачах, которые не допускают аналитического решения.

Многие численные методы были разработаны очень давно, еще на заре развития математики, и связаны с именами выдающихся ученых, таких, как Ньютон, Эйлер, Гаусс, Чебышев, Эрмит и др. Однако при вычислениях вручную они могли использоваться лишь для решения не слишком трудоемких задач. С появлением компьютерной техники начался период бурного развития численных методов и их внедрения в практику.

Современные успехи в решении таких важных для общества задач, как управление космическими полетами, использование атомной энергии, управление крупными предприятиями, прогнозирование, вряд ли были бы возможны без применения вычислительных машин и численных методов.

Этапы решения задачи на компьютере. В современных научных исследованиях (в частности исследовании физических явлений и процессов в природе) можно выделить три направления: экспериментальное, теоретическое и вычислительное. Каждое из этих направлений характеризуется определенным набором средств и методов, которые, дополняя друг друга, позволяют получать достоверную информацию об изучаемом явлении. В настоящее время основным инструментом, используемым при решении вычислительных задач, являются компьютеры, способные за секунду выполнять такой объем вычислений, на который человеку не хватило бы всей жизни. Однако применение вычислительной техники вовсе не освобождает человека от участия в процессе решения задачи, поскольку машина лишь выполняет его задания по заранее разработанной программе. Для того, чтобы уяснить роль человека и компьютера, которую они играют в процессе решения задачи, рассмотрим основные стадии или этапы ее решения с применением вычислительной техники. Каждый из этих этапов имеет свои трудности и оказывает свое влияние на точность и достоверность окончательного результата.

Постановка задачи. Решение практической задачи начинается с описания исходных данных и определения конечных целей решения. Точная формулировка условия и целей решения – это содержательная (физическая) постановка задачи.

Построение математической модели. На этом этапе выделяются наиболее существенные свойства реального объекта, которые описываются с помощью математических соотношений. Построение математической модели является наиболее сложным и ответственным этапом.

Разработка метода вычислений. Поскольку компьютер может выполнять лишь элементарные арифметические и логические операции, он «не понимает» постановки задачи даже в математической форме. Поэтому для ее решения необходимо разработать вычислительный метод, позволяющий свести решение задачи к последовательности элементарных действий, доступных компьютеру.

Разработка алгоритма. На этом этапе процесс решения задачи записывается в виде конечной последовательности элементарных арифметических и логических операций, приводящих к конечному результату – т.е. в виде алгоритма.

Программирование. На данном этапе алгоритм решения задачи записывается на понятном для компьютера языке – в виде программы. Составление программы обычно производится с использованием некоторого промежуточного (алгоритмического) языка.

Отладка и тестирование программы. Составленная программа может содержать разного рода ошибки. Простейшие синтаксические ошибки обнаруживаются на стадии трансляции программы (преобразовании программы на машинный язык). Гораздо сложнее обстоит дело с поиском и устранением так называемых семантических (смысловых, алгоритмических) ошибок. Для их обнаружения необходимо тщательное тестирование программы путем решения контрольных задач (задач, решение которыхзаранее известно) с разными исходными данными.

Проведение расчетов. На этом этапе проводятся расчеты с использованием отлаженной программы для заданных исходных данных.

Анализ результатов. Завершающий этап решения задачи, в ходе которого происходит осмысление полученных результатов, сопоставление их с результатами контрольных (тестовых) расчетов, а также с данными, полученными экспериментальным путем (если таковые имеются). Главным критерием надежности и пригодности полученных результатов в конечном счете является практика.

Тема 1. ПРИБЛИЖЕННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

1.1. Приближенные числа. Погрешности вычислений

Источники и виды погрешностей. Как было отмечено во введении, процесс решения задачи проходит целый ряд этапов – от постановки задачи до анализа результатов. Некоторые из этих этапов могут являться источником погрешностей и оказывать тем самым свое влияние на достоверность (точность) окончательного результата. Рассмотрим основные источники погрешностей.

Исходные данные задачи, полученные экспериментально или в ходе расчетов, часто являются основным источником погрешностей.

Используемая при решении задачи математическая модель также вносит погрешность в получаемый результат в виду того, что она является лишь приближенным описанием реального процесса или явления.

Погрешности исходных данных и погрешность математической модели относятся к виду *неустранимых погрешностей* в том смысле, что в ходе последующих вычислений их нельзя устранить.

Если для решения математической задачи используется приближенный (например численный) метод, то еще не приступив к вычислениям, мы допускаем новую погрешность, называемую *погрешностью метода*. Погрешность численного метода регулируема, т.е. теоретически она может быть уменьшена до любого значения. Однако на практике ограничиваются тем, чтобы довести погрешность метода до величины, в несколько раз меньшей неустранимой погрешности. Дальнейшее повышение точности метода не приведет к повышению точности окончательного результата, а лишь увеличит стоимость расчетов из-за увеличения объема вычислений.

При вычислениях с помощью компьютера неизбежны *погрешности округлений*, связанные с ограниченностью разрядной сетки вычислительной машины. Несмотря на то, что при решении сложных задач выполняются миллиарды и триллионы операций, это вовсе не означает механического умножения погрешности при одном округлении на число операций, так как при отдельных действиях погрешности могут компенсировать друг друга. Вместе с тем иногда погрешности округлений в сочетании с плохо организованным алгоритмом могут сильно исказить результаты или даже привести к абсурдным результатам.

1.2. Абсолютная и относительная погрешности

Погрешность является мерой точности результата. Для количественной характеристики этой меры используют понятия абсолютной и относительной погрешностей.

Пусть А – точное число, a – его приближенное значение.

Абсолютной погрешностью Δ(a) приближенного числа a называется величина

$$\Delta(a) = |A\text{-}a| . \tag{1.1}$$

Оценкой абсолютной погрешности Δ_a называют число, о котором известно, что

$$|A\text{-}a| \le \Delta_a , \tag{1.2}$$

т.е. число А заключено в границах

$$a - \Delta_a \le A \le a + \Delta_a . \tag{1.3}$$

Относительной погрешностью δ(a) называют число

$$\delta(a) = \Delta(a)/|A| . \tag{1.4}$$

Оценкой относительной погрешности δ_a называют число такое, что $\Delta(a)/|A| \le \delta_a$.

Так как $\Delta(a) \le \Delta_a$, $A \approx a$, то $\delta_a = \Delta_a / |a|$ или

$$\Delta_a = |a| \cdot \delta_a . \tag{1.5}$$

Зная δ_a можно указать границы точного числа А

$$a\,(1-\delta_a) \le A \le a\,(1+\delta_a) . \tag{1.6}$$

Пример. Что точнее вычислено $\dfrac{9}{11} \approx 0{,}818$ *или* $\sqrt{18} \approx 4{,}24$?

$$\frac{9}{11} \approx 0{,}81818 \quad \sqrt{18} \approx 4{,}2426.$$

$$\left|0{,}818 - 0{,}81818\right| \le 0{,}00019 = \Delta_{a_1}.$$

$$\left|4{,}24 - 4{,}2426\right| \le 0{,}0027 = \Delta_{a_2}.$$

$$\delta_{a_1} = \frac{\Delta_{a_1}}{|a_1|} = \frac{0{,}00019}{0{,}818} = 0{,}00024 \ (0{,}024\%).$$

$$\delta_{a_2} = \frac{\Delta_{a_2}}{|a_2|} = \frac{0{,}0027}{4{,}24} = 0{,}00064 = (0{,}064\%).$$

Следовательно, первое выражение более точное.

Правила округления

1. Если отбрасываемые цифры составляют число, большее половины единицы последнего оставляемого разряда, то последняя оставляемая цифра усиливается (увеличивается на единицу).
2. Если отбрасываемые цифры составляют число, меньшее половины единицы последнего оставляемого разряда, то оставляемые цифры остаются без изменения.
3. Если отбрасываемые цифры составляют число, равное половине единицы последнего оставляемого разряда, то последняя оставляемая цифра усиливается, если она нечетная, и остается без изменения, если она четная.

Пример. Числа округлить до десятых долей.

A_1=273,25001 $\Rightarrow$ a_1=273,3 .

A_2=2,71828 $\Rightarrow$ a_2=2,7 .

A_3=273,15 $\Rightarrow$ a_3=273,2 .

A_4=273,25 $\Rightarrow$ a_4=273,2 .

1.3. Верные и значащие цифры

Точность вычислений определяет число верных значащих цифр результата.

Значащими цифрами числа называются все цифры, кроме нулей, стоящих левее первой, отличной от нуля, цифры. Нули, записанные в конце числа, всегда значащие (в противном случае они не пишутся).

Пример. Указать число значащих цифр.

0,001406 $\Rightarrow$ четыре (1,4,0,6).

5,0300 $\Rightarrow$ пять (5,0,3,0,0).

Если мы хотим показать, что у числа 400000 только два значащих нуля, то это число следует записать в виде: $400\cdot10^3$ или $0,400\cdot10^6$. Последняя форма записи является нормальной и является предпочтительной.

Значащая цифра числа называется ***верной в широком смысле***, если абсолютная погрешность числа Δ_a не превосходит одной единицы соответствующего десятичного разряда. В ***узком смысле***, если Δ_a не превосходит половины от единицы соответствующего десятичного разряда. Остальные цифры называют ***сомнительными***.

Пример. Определить верные в широком и узком смысле цифры числа a=3,7512 , если Δ_a =0,0057.

1) Δ_a =0,0057<0,01 , тогда верными в широком смысле считаем 3,7,5, а цифры 1, 2 сомнительные.

2) Δ_a =0,0057<0,05=$0,5\cdot10^{-2}$, тогда верными в узком смысле считаем 3,7. Цифры 5, 1, 2 сомнительные.

Пример. Определить верные в узком смысле цифры числа a=44,00, если A=43,96.

$\Delta(a)$ =|A-a|=0,04<0,05=$0,5\cdot10^{-1}$, тогда 4,4,0 верные значащие цифры.

Пример. Округлить сомнительные цифры и оставить верные в широком смысле значащие цифры числа a=2,3544 , если δ_a=0,002.

1) $\Delta_a=|a|\cdot\delta_a$=2,3544·0,002=0,00471<0,01 $\Rightarrow$ 2,3,5 верные в широком смысле цифры.

2) Округлим $a \Rightarrow a_1$=2,35.

3) Найдем погрешность

$\Delta_{a1}=\Delta_a+\Delta_{\text{округл}}$=0,00471+0,0044=0,00911<0,01 – в a_1 все цифры верные в широком смысле.

Пример. Найти относительную и абсолютную погрешности, если число a=0,4357 имеет только верные цифры в узком смысле.

1) $\Delta(a)\le\Delta_a=0,00005=0,5\cdot10^{-4}$,

2) $\delta(a)\le\delta_a=\Delta_a/|a|=0,5\cdot10^{-4}/0,4357=0,125\cdot10^{-6}$.

1.4. Действия с приближенными числами

При вычислениях с приближенными числами важной задачей является оценка степени влияния погрешностей исходный данных на точность окончательного результата. Это необходимо не только для правильного учета вычислительных погрешностей, но также для определения возможный путей их уменьшения.

В частности, при вычислении значений функций, аргументами которых являются приближенные числа, возникает вопрос о погрешности вычисляемых значений. Определение величины погрешности результата по известным погрешностям исходных данных составляет *прямую задачу теории погрешностей*.

Пусть $y = f(x)$ – функция одного неизвестного. Аргумент функции задан приближенным числом $\tilde{x}$ с абсолютной погрешностью $\Delta\tilde{x}$. Абсолютная погрешность значения функции определяется как $\Delta\tilde{y} \geq | y - \tilde{y} |$. Рассматривая разность точного (неизвестного) и приближенного значений функции как приращение функции, вызванное приращением аргумента $\Delta\tilde{x}$, и применяя теорему Лагранжа о замене приращения функции ее дифференциалом, можно получить следующее выражение для $\Delta\tilde{y}$:

$$\Delta\tilde{y} = \Delta\tilde{x} \, | \, f'(\tilde{x}) \, | .$$

Разумеется, что функция *y=f(x)* должна быть дифференцируема.

Эта формула непосредственно обобщается на случай функции многих переменных $y=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

$$\Delta\tilde{y} = \sum_{i=1}^{n} \Delta\tilde{x}_i \left| \frac{\partial}{\partial x_i} f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n) \right|$$

Используя полученные формулы. можно легко получить формулы для определения абсолютных и относительных погрешностей результатов арифметических операций.

Формулы расчета погрешностей арифметических операций

1. Сложение (вычитание)

$$\Delta_{a\pm b} = \Delta_a + \Delta_b .$$

$$\delta_{a\pm b} = \frac{b \cdot \delta_b + a \cdot \delta_a}{a \pm b} .$$

2. Умножение

$$\delta_{a\cdot b} = \delta_a + \delta_b .$$

$$\Delta_{a\cdot b} = a \cdot b(\delta_a + \delta_b) = b \cdot \Delta_a + a \cdot \Delta_b .$$

3. Деление

$$\delta_{\frac{a}{b}} = \delta_a + \delta_b .$$

$$\Delta_{\frac{a}{b}} = \frac{a}{b}(\delta_a + \delta_b) = \frac{b \cdot \Delta_a + a \cdot \Delta_b}{b^2} .$$

4. Степень

$$\Delta_{a^n} = n \cdot |a|^{n-1} \cdot \Delta_a .$$

$$\delta_{a^n} = n \cdot \delta_a .$$

Обратная задача теории погрешностей. На практике часто бывает необходимо получить результат вычислений так, чтобы его погрешность не превосходила некоторого допустимого значения. При этом возникает задача определения допустимых (предельных) погрешностей исходных данных задачи, при которых погрешность результата не превысит заданного значения. Эта задача носит название обратной задачи теории погрешностей.

Для функции одной переменной допустимая погрешность аргумента определяется выражением

$$\Delta\tilde{x} = \frac{\Delta\tilde{y}}{|\, f'(\tilde{x}) \,|}$$

Для функции нескольких переменных эта задача решается при введении дополнительного предположения – так называемого принципа равных влияний. При этом полагают, что все слагаемые $|\,\partial f/\partial x_i\,|\,\Delta\tilde{x}_i$ равны между собой, тогда

$$\Delta\tilde{x}_i = \frac{\Delta\tilde{y}}{n\,|\,\partial f/\partial x_i\,|}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Правила работы с приближенными числами

1. При сложении (вычитании) сохраняем столько десятичных знаков, сколько их в приближенном слагаемом с наименьшим числом десятичных знаков.
2. При умножении (делении) в ответе сохраняем столько значащих цифр, сколько их имеет приближенное данное с наименьшим числом значащих цифр.
3. При возведении в степень или извлечении корня в результате сохраняем столько значащих цифр, сколько их имеет данное.

4. Во всех промежуточных результатах следует сохранять на 1 цифру больше, чем рекомендуют правила 1, 2, 3. В окончательном результате её отбрасываем.
5. Если некоторые данные имеют больше десятичных знаков (при сложении или вычитании) или больше значащих цифр (при умножении, делении, возведении в степень, извлечении корня) чем другие, то их следует округлить.
6. Абсолютную и относительную погрешности обычно записывают в виде числа, содержащего одну или две значащие цифры.
7. При округлении погрешностей округление всегда производится в большую сторону.

Задания по теме 1

1. Округляя следующие числа до трех значащих цифр, определить абсолютную и относительную погрешности полученных приближенных чисел.

1.1. 2,1514n.
1.2. 0,16152n.
1.3. 0,01204n.
1.4. 1,225n.
1.5. -0,0015281n.
1.6. -392,85n.
1.7. 0,1545n.
1.8. 0,003922n.
1.9. 625,55n.
1.10. 94,925n.

2. Определить абсолютную погрешность следующих приближенных чисел по их относительным погрешностям.

2.1. a=13267n, δ=0,1%.
2.2. a=2,32n, δ=0,1%.
2.3. a=35,72n, δ=1%.
2.4. a=0,896n, δ=10%.
2.5. a=232,44n, δ=1%.
2.6. a=0,0012n, δ=1%.
2.7. a=24356n, δ=0,2%.
2.8. a=47,11n, δ=5%.
2.9. a=11,531n, δ=1%.
2.10. a=0,0371n, δ=5%.

3. Определить количество верных знаков в числе x, если известна его абсолютная погрешность.

3.1. $x=0,3941n$, $\Delta(x)=0,25\cdot10^{-2}$.

3.2. $x=0,1132n$, $\Delta(x)=0,1\cdot10^{-3}$.

3.3. $x=38,2543n$, $\Delta(x)=0,27\cdot10^{-2}$

3.4. $x=393,481n$, $\Delta(x)=0,1$.

3.5. $x=2,325n$, $\Delta(x)=0,1\cdot10^{-1}$.

3.6. $x=14,00231n$, $\Delta(x)=0,1\cdot10^{-3}$.

3.7. $x=0,0842n$, $\Delta(x)=0,15\cdot10^{-2}$.

3.8. $x=0,00381n$, $\Delta(x)=0,1\cdot10^{-4}$.

3.9. $x=-32,285n$, $\Delta(x)=0,2\cdot10^{-2}$.

3.10. $x=-0,2113n$, $\Delta(x)=0,5\cdot10^{-2}$.

4. Определить количество верных знаков в числе x, если известна его относительная погрешность.

4.1. $x=1,8921n$, $\delta_x=0,1\cdot10^{-2}$.

4.2. $x=0,2218n$, $\delta_x=0,2\cdot10^{-1}$.

4.3. $x=22,351n$, $\delta_x=0,1$.

4.4. $x=0,02425n$, $\delta_x=0,5\cdot10^{-2}$.

4.5. $x=0,000135n$, $\delta_x=0,15$.

4.6. $x=9,3598n$, $\delta_x=0,1\%$.

4.7. $x=0,11452n$, $\delta_x=10\%$.

4.8. $x=48361n$, $\delta_x=1\%$.

4.9. $x=592n$, $\delta_x=2\%$.

4.10. $x=14,9360n$, $\delta_x=1\%$.

5. Найти суммы приближенных чисел и указать их погрешности, считая, что в исходных данных все знаки верные.

5.1. $0,145n+321n+78,2n$.

5.2. $0,301n+193,1n+11,58n$.

5.3. $398,5n+78,28n+0,34567$.

5.4. $197,6n+23,44n+201,55n$.

5.5. $0,115n+53,4n+61,5n$.

5.6. $561,005n+7345+0,115n$.

5.7. $28615+61,5n+31,8n$.

5.8. $65,31n+22,1056n+8,78n$.

5.9. $451,6n+75,11n-0,008756n$.

5.10. $0,348n+0,1834n+9,27n$.

6. Найти произведения приближенных чисел и указать их погрешности, считая, что в исходных данных все знаки верные.

6.1. 3,49n·8,6n.
6.2. 25,1n·1,743n.
6.3. 0,02n·16,5n.
6.4. 1,78n·9,1n.
6.5. 482,56n·7256·0,0052n.
6.6. 2,31n·751,273n·3567.
6.7. 56,11n·341,5n·611,255.
6.8. 2,35n·0,000125n.
6.9. 3,2n·347·0,05671n.
6.10. 10,5n·31,1n.

Тема 2. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ФУНКЦИЙ

В прикладных задачах часто возникает необходимость по заданным значениям некоторой функции $y_0, y_1, \ldots, y_n$ в ряде точек $x_0, x_1, \ldots, x_n$ предсказать ее значения в промежуточных точках. Именно эту задачу позволяет решать интерполяция функции.

Пусть функция $y = f(x)$ определена таблицей.

x_i	x_0	x_1	. . . . . .	x_n
y_i	y_0	y_1	. . . . . .	y_n

Значения аргументов x_i $(i=0, 1, \ldots,n)$ будем называть ***узлами интерполяции***.

Задачей интерполяции является нахождение значения функции f в точке $x^* \in [x_0, x_n]$, $x^* \neq x_i$.

Один из возможных путей решения поставленной задачи заключается в следующем:

1) Строится многочлен степени не выше n, где n - количество заданных точек.

$$L_n(x) = a_0 \cdot x^n + a_1 \cdot x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \cdot x + a_n, \qquad (2.1)$$

принимающий в точках x_i значения y_i, т.е. значения коэффициентов многочлена a_i находят из условия, что

$$L_n(x_i) = y_i, \quad (i=0, 1, \ldots,n).$$

Этот многочлен называют интерполяционным. Он всегда существует и единственен.

Функция $f(x)$ представляется в виде

$$f(x) = L_n(x)+R_n(x), \qquad (2.2)$$

где $R_n(x)$ – остаточный член интерполяционной формулы. Если $f(x)$ имеет непрерывную производную порядка (n+1) на $[x_0, x_n]$, то

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n),\ \xi \in (x_0, x_n). \qquad (2.3)$$

2) Вычисляется значение $L_n(x^*)$. Если значения y_i заданы приближенно или же по каким-либо причинам вычисления не могут быть выполнены абсолютно точно, то фактически вычисляется лишь приближенное значение $\bar{L}_n(x^*)$ для точного значения $L_n(x^*)$.

Приближенно принимается, что $f(x) \approx \bar{L}_n(x^*)$.

3) Оценивается погрешность метода по остаточному члену интерполяционной формулы

$$R_n(x^*) \le \Delta_1 = \frac{M_n}{n!}\left|(x^* - x_0)(x^* - x_1)\ldots(x^* - x_n)\right|, \qquad (2.4)$$

$$\text{где } M_n = \max_{[x_0,\, x_n]}\left|f^{(n)}(x)\right|. \qquad (2.5)$$

4) Оценивается погрешность вычислений по погрешностям приближенных данных

$$\Delta_2 \ge \left|L_n(x^*) - \bar{L}_n(x^*)\right|. \qquad (2.6)$$

5) Вычисляется полная погрешность приближенного значения

$$\Delta \ge \Delta_1 + \Delta_2 \ge \left|f(x^*) - \bar{L}_n(x^*)\right|. \qquad (2.7)$$

При решении практических задач интерполяционный многочлен (2.1) может быть представлен в различной форме.

2.1. Интерполяционный многочлен в форме Лагранжа для произвольных узлов

Функцию L(x) ищем в виде суммы n частных решений.

Первое частное решение l_0 ставит в соответствие значениям абсцисс $x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n$ набор значений ординат $y_0,\ 0,\ \ldots,\ 0$. Из свойств многочленов следует, что многочлен, обращающийся в нуль в n разных точках, т.е. имеющий n различных корней, должен делиться на каждую из n разностей

$$x - x_1;\ x - x_2;\ \ldots x - x_n,$$

а следовательно, и на произведение этих разностей, т.е. должен иметь вид

$$l_0 = const \cdot (x - x_1)(x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n) .$$

Значение константы определяем из условия

$$l_0(x_0) = y_0 = const \cdot (x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \cdot \ldots \cdot (x_0 - x_n);$$

$$const = y_0 \cdot \frac{1}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \cdot \ldots \cdot (x_0 - x_n)},$$

тогда l_0 примет вид

$$l_0 = y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2) \cdot \ldots (x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \cdot \ldots \cdot (x_0 - x_n)} .$$

Остальные частные решения ищутся аналогично из условия, что i-е частное решение l_i (i=1,…,n) должно ставить в соответствие значениям абсцисс $x_0, \ x_1, \ \ldots \ , x_n$ набор значений ординат $0, \ \ldots \ , y_i, \ \ldots, 0$, т.е.

$$l_i = y_i \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_{i-1}) \cdot (x - x_{i+1}) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \cdot \ldots \cdot (x_i - x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i+1}) \cdot \ldots \cdot (x_i - x_n)}$$

или

$$l_i = y_i \cdot \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} .$$

Общее решение найдем как сумму частных решений

$$L(x) = \sum_{i=0}^{n} l_i = \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} . \qquad (2.8)$$

Это и есть интерполяционный многочлен в форме Лагранжа для произвольных узлов. Заметим, что степень многочлена Лагранжа не превышает числа n.

Остаточная погрешность значения $L_n(x^*)$, вычисленного по формуле (1.8), оценивается формулой (4), а вычислительная погрешность

$$\Delta_2 = \sum_{i=0}^{n} \left| \frac{(x^* - x_0)(x^* - x_1)\ldots(x^* - x_{i-1})(x^* - x_{i+1})\ldots(x^* - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)} \right| \Delta y_i , \qquad (2.9)$$

где Δy_i - погрешность исходных данных (значений функций в узлах).

2.2. Интерполяционный многочлен в форме Ньютона для равноотстоящих узлов

Рассмотрим метод построения интерполирующей функции, основанный на вычислении конечных разностей.

Конечными разностями порядка k называют величины $\Delta^k y_j$. Их рассчитывают по формулам:

$$\Delta y_j = y_{j+1} - y_j, \quad \Delta^2 y_j = \Delta y_{j+1} - \Delta y_j \quad ,..., \quad \Delta^k y_j = \Delta^{k-1} y_{j+1} - \Delta^{k-1} y_j .$$

В результате вычислений должна быть получена следующая таблица конечных разностей.

$$y_0 \quad y_1 \quad y_2 \quad y_3 \quad \dots \quad y_{n-1} \quad y_n$$

$$\Delta y_0 \quad \Delta y_1 \quad \Delta y_2 \quad \Delta y_3 \quad \dots \quad \Delta y_{n-1}$$

$$\Delta^2 y_0 \quad \Delta^2 y_1 \quad \Delta^2 y_2 \quad \dots \quad \Delta^2 y_{n-2}$$

$$\Delta^3 y_0 \quad \Delta^3 y_1 \quad \dots \quad \Delta^3 y_{n-3}$$

$$\Delta^4 y_0 \quad \dots \quad \Delta^4 y_{n-4}$$

$$\dots\dots.$$

Многочлен P(x) для равноотстоящих узлов (т.е $x_{i+1} - x_i = h = \text{const}$, где $i = 0, ..., n-1$, число h – называют шагом) будем искать в виде

$$P(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + ... + a_n(x - x_0)(x - x_1) \cdot ... \cdot (x - x_{n-1}),$$

где $x_0, x_1, ..., x_n$ - корни полинома P(x).

Значения коэффициентов a_i определяем из условия $P(x_i) = y_i$.

Полагая $x=x_0$, найдем $P(x_0) = y_0 = a_0, \Rightarrow a_0 = y_0$.

Полагая $x=x_1$, найдем $P(x_1) = y_1 = a_0 + a_1(x_1 - x_0), \Rightarrow a_1 = \dfrac{\Delta y_0}{h}$.

В общем случае при $x=x_i$ $\quad a_i = \dfrac{\Delta^i y_0}{i! \cdot h^i}$.

Подставив полученные значения a_i в выражение для многочлена P(x), получим

$$P(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + $$
$$+ \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_0)(x - x_1)\cdot \ldots \cdot (x - x_{n-1}). \qquad (2.10)$$

Полученное выражение называется ***интерполяционной формулой Ньютона***.

Пусть x* - точка, в которой необходимо найти значение интерполяционного многочлена.

Для случая равноотстоящих узлов, если x_0 – ближайший к x^* узел слева, формула (2.2) примет вид

$$P^I(t) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!}t + \frac{\Delta^2 y_0}{2!}t(t-1) + \frac{\Delta^3 y_0}{3!}t(t-1)(t-2) + \ldots$$
$$+ \frac{\Delta^n y_0}{n!}t(t-1)(t-2)\ldots(t-n+1), \qquad (2.11)$$

где t определяется формулой $t = \dfrac{x^* - x_0}{h}$.

Оценки погрешностей приближенно значения $P^I(t^*)$ могут быть представлены в виде

$$\Delta_1 = \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}h^{n+1}\cdot\left|t^*(t^*-1)\ldots(t^*-n)\right| \approx \frac{\max\limits_{[a,b]}\left|\Delta^{n+1}y_i\right|}{(n+1)!}\left|t^*(t^*-1)\ldots(t^*-n)\right|;$$

$$\Delta_2 = \Delta^*\cdot\left|1 + 2\cdot\left|t^*\right| + 2\left|t^*(t^*-1)\right| + \ldots + 2^n\frac{\left|t^*(t^*-1)\ldots(t^*-n)\right|}{n!}\right|,$$

где Δ^* - погрешность исходных данных.

Если x_n – ближайший к x^* узел справа, то используется второй интерполяционный полином Ньютона

$$P^{II}(t) = y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{1!}t + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!}t(t+1) + \frac{\Delta^3 y_{n-3}}{3!}t(t+1)(t+2) + \ldots$$
$$+ \frac{\Delta^n y_0}{n!}t(t+1)\ldots(t+n-1), \qquad (2.12)$$

где $t = \dfrac{x^* - x_n}{h}$.

Оценки погрешностей приближенно значения $P^{II}(t^*)$ можно записать в виде

$$\Delta_1 \quad \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} h^{n+1} \cdot \left| t^*(t^*+1)...(t^*+n) \right| \approx \frac{\max\limits_{[a,b]} \left| \Delta^{n+1} y_i \right|}{(n+1)!} \left| t^*(t^*+1)...(t^*+n) \right|;$$

$$\Delta_2 = \Delta^* \cdot \left| 1 + 2 \cdot \left| t^* \right| + 2 \left| t^*(t^*+1) \right| + ... + 2^n \frac{\left| t^*(t^*+1)...(t^*+n) \right|}{n!} \right|.$$

Задания по теме 2

Функция определена на отрезке [1,00; 1,20] (табл. 2.1). Найти значения многочлена Лагранжа, интерполирующего функцию *f(x)* на этом отрезке по системе трех равномерно расположенных узлов (с шагом 0,1) в точках 1,05; 1,09 ; 1,13; 1,15; 1,17. Полученные результаты сравнить с табличными значениями и дать оценку точности интерполяции.

Таблица 2.1

x	e^x	e^{-x}	sh x	ch x	sin x	cos x	ln x
1.00	2.7183	0.3679	1.1752	1.5431	0.8415	0.5403	0.0000
1,01	2,7456	0,3642	1,1907	1,5549	0,8468	0,5319	0,0100
1,02	2,7732	0,3606	1,2063	1,5669	0,8521	0,5234	0,0198
1,03	2,8011	0,3570	1,2220	1,5790	0,8573	0,5148	0,0296
1,04	2,8292	0,3535	1,2379	1,5913	0,8624	0,5062	0,0392
1,05	2,8577	0,3499	1,2539	1,6038	0,8674	0,4976	0,0488
1,06	2,8864	0,3465	1,2700	1,6164	0,8724	0,4889	0,0583
1,07	2,9154	0,3430	1,2862	1,6292	0,8772	0,4801	0,0677
1,08	2,9447	0,3396	1,3025	1,6421	0,8820	0,4713	0,0770
1,09	2,9743	0,3362	1,3190	1,6552	0,8866	0,4625	0,0862
1,10	3,0042	0,3329	1,3356	1,6685	0,8912	0,4536	0,0953
1,11	3,0344	0,3296	1,3524	1,6820	0,8957	0,4447	0,1044
1,12	3,0649	0,3263	1,3693	1,6956	0,9001	0,4357	0,1133
1,13	3,0957	0,3230	1,3863	1,7093	0,9044	0,4267	0,1222
1,14	3,1268	0,3198	1,4035	1,7233	0,9086	0,4176	0,1310
1,15	3,1582	0,3166	1,4208	1,7374	0,9128	0,4085	0,1398
1,16	3,1899	0,3135	1,4382	1,7517	0,9168	0,3993	0,1484
1,17	3,2220	0,3104	1,4558	1,7662	0,9208	0,3902	0,1570
1,18	3,2544	0,3073	1,4735	1,7808	0,9246	0,3809	0,1655
0,19	3,2871	0,3042	1,4914	1,7957	0,9284	0,3717	0,1740
1,20	3,3201	0,3012	1,5095	1,8107	0,9320	0,3624	0,1823

Тема 3. АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИИ

3.1. Постановка задачи

Пусть в результате некоторого эксперимента получено n точек. Представим их в виде таблицы и точечной диаграммы.

X	x_1	x_2	…	x_i	…	x_n
Y	y_1	y_2	…	y_i	…	y_n

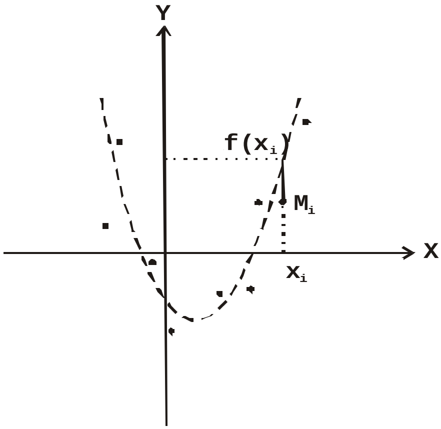


Рис. 3.1. Точечная диаграмма

Значения x_i и y_i, i=1,2,…,n содержат ошибки. Обозначим ошибку эксперимента через ε. Допустим, что аналитическое выражение зависимости $y=F(x)$ неизвестно или очень сложно. Возникает задача нахождения такой достаточно простой функции $y=f(x)$, значения которой на отрезке $[x_1;\ x_n]$ возможно мало отличаются от значений искомой функции $y=F(x)$. Такая задача называется задачей аппроксимации.

Класс функций Ω, зависящих от параметров a_0, a_1, …, a_m (например, многочлены определенной степени, показательные функции и т.д.), которому принадлежит искомая функция $f(x)$, выбирается либо из соображений профессионально-теоретического характера, либо по диаграмме. Вообще никакой метод не способен определить тип функциональной зависимости, который лучше всего подошел бы к данному набору экспериментальных точек.

В дальнейшем будем считать, что класс функций известен, и подбирать параметры a_0, a_1, …, a_m функции $f(x, a_0, a_1, \ldots, a_m)$ следует таким образом, чтобы разности $\varepsilon_k=f(x_k)-y_k$, называемые отклонениями и представляющие собой расстояние по вертикали от точек M_i до графика $y=f(x)$ (см. рис. 3.1), были минимальными. Геометрически это означает, что из заданного класса Ω функций $f(x, a_0, a_1, \ldots, a_m)$ надо выбрать ту функцию, график которой проходит около системы точек $M_i(x_i;\ y_i)$ в некотором смысле ближе, чем графики других функций этого класса.

3.2. Метод наименьших квадратов

Одним из критериев, на основании которого выбираются коэффициенты a_0, a_1,…, a_m функций $f(x, a_0, a_1, …, a_m)$, является минимизация суммы квадратов отклонений этой функции от ординат точек y_i .

$$V = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i, a_0, a_1, ..., a_m) - y_i)^2 \to \min \cdot \tag{3.1}$$

Необходимое условие экстремума функции нескольких переменных приводит к системе $(m+1)$ уравнений.

$$\sum_{i=1}^{n} \left[(f(x_i, a_0, a_1, ..., a_m) - y_i) \cdot \frac{\partial f(x_i, a_0, a_1, ..., a_m)}{\partial a_j} \right] = 0, \qquad j = \overline{0, m} \cdot \tag{3.2}$$

Рассмотрим определение параметров a_i для некоторых частных случаев.

1. Пусть искомая функция есть многочлен m-й степени

$$f(x, a_0, a_1, …, a_m) = P_m(x) = a_0 + a_1 x + … + a_m x^m.$$

Система уравнений (3.2) в этом случае примет вид

$$\begin{cases} a_0 n + a_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i + ... + a_m \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^m = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i; \\ a_0 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i + a_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + ... + a_m \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{m+1} = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i x_i; \\ . \; . \\ a_0 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^m + a_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{m+1} + ... + a_m \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{2m} = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i x_i^m. \end{cases} \tag{3.3}$$

Определитель этой системы отличен от нуля. Тогда система имеет единственное решение $(\hat{a}_0, \hat{a}_1, ..., \hat{a}_m)$, при котором наблюдается V_{min}. При подборе аппроксимирующего многочлена, как правило, используются многочлены не выше четвертого порядка. Дальнейшее повышение порядка может привести к неоправданному усложнению вида искомой функции и копированию ошибок опытных данных.

Для выбора степени аппроксимирующего многочлена можно поступить следующим образом:

а) построить на чертеже точечную диаграмму $(x_i; y_i)$, $i = \overline{0, n}$ и оценить визуально, графику какой функции (прямой, параболе и т.д.) приближенно соответствуют экспериментальные точки и выбрать m;

б) из системы (3.3) вычислить соответствующие коэффициенты a_i, затем рассчитать среднее квадратическое отклонение

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (P_m(x_i) - y_i)^2}$$

и сравнить его с известной погрешностью эксперимента ε.

Если $\delta >> \varepsilon$, т.е. математическая погрешность аппроксимации много больше физической погрешности эксперимента, то степень многочлена недостаточно велика для описания $y=F(x)$ и надо увеличить m.

Если $\delta << \varepsilon$, то старшие коэффициенты аппроксимации физически недостоверны и надо уменьшить m.

Если $\delta \approx \varepsilon$, то число коэффициентов оптимально.

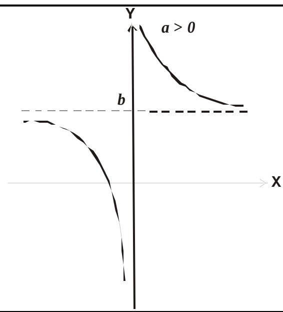
2. Если экспериментальные точки $(x_i; y_i)$ располагаются вдоль некоторой линии, сходной по форме, например, с графиком гиперболической, показательной, логарифмической или других функций, то соответствующая функция с неизвестными параметрами выбирается в качестве аппроксимирующей.

Затем проводится линеаризация этой функции с помощью замены переменных (табл. 3.1) и задача сводится к аппроксимации зависимости многочлена первой степени $P_1(x)= b+ax$. Система уравнений (3.3) примет вид

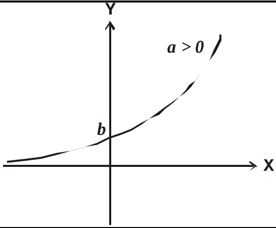
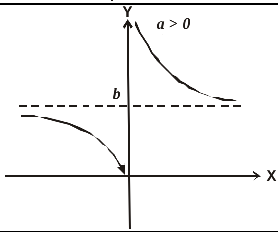
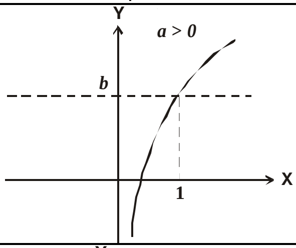
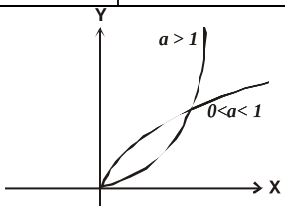
$$\begin{cases} bn + a\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i; \\ b\sum_{i=1}^{n} x_i + a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i. \end{cases} \qquad (3.4)$$

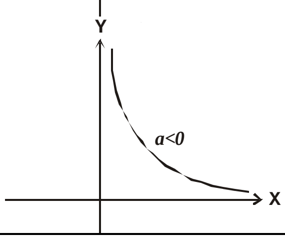
Таблица 3.1

Линеаризация функций

№ п|/п	Вид функциональной зависимости	График функции	Формулы преобразования	Линейная зависимость
1	Гиперболическая $y = b + \frac{a}{x}$		$X = \frac{1}{x}$ $Y = y$	$Y=b+aX$

Окончание табл.3.1

<table>
<tr><th>№ п|/п</th><th>Вид функциональной зависимости</th><th>График функции</th><th>Формулы преоб-разования</th><th>Линейная зависимость</th></tr>
<tr><td rowspan="2">2</td><td>Экспоненциальная:
а) $y = b \cdot e^{ax}$</td><td>
</td><td>$X = x$
$Y = \ln y$
$B = \ln b$</td><td>$Y=B+aX$</td></tr>
<tr><td>б) $y = b \cdot e^{\frac{a}{x}}$</td><td>
</td><td>$X = \frac{1}{x}$
$Y = \ln y$
$B = \ln b$</td><td>$Y=B+aX$</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Логарифмическая
$y = a \ln x + b$</td><td>
</td><td>$X = \ln x$
$Y = y$</td><td>$Y=b+aX$</td></tr>
<tr><td>4</td><td>Степенная
$y = b \cdot x^a$</td><td>


</td><td>$X = \ln x$
$Y = \ln y$
$B = \ln b$</td><td>$Y=B+aX$</td></tr>
</table>

Задания по теме 3

Даны значения функции $y=f(x)$, полученные в ходе эксперимента.

1. Нанесите экспериментальные точки (x_i, y_i) на координатную сетку.
2. Подберите вид аппроксимирующей зависимости.
3. Методом наименьших квадратов оценить параметры подобранной аппроксимирующей зависимости.

1	X	0,3	0,5	0,8	1	1,4	1,7	2,0	2,1	2,4	2,9
	Y	27,58	24,70	20,68	18,20	13,72	10,78	8,20	6,42	5,32	2,62

2	X	1,0	1,2	1,4	1,6	2,0	2,2	2,6	2,7	3,0	3,5
	Y	4,80	4,22	3,68	3,18	2,30	1,92	1,28	1,15	0,80	0,43

3	X	0,3	0,7	1,1	1,3	1,4	2,0	2,1	2,4	3,0	3,5
	Y	41,17	32,77	25,33	21,97	20,38	12,10	10,93	7,78	3,10	0,85

4	X	-0,4	0,1	0,6	1,1	1,2	1,5	2,0	2,2	3,0	3,2
	Y	3,32	3,02	3,72	5,40	5,88	7,51	11,09	12,68	21,01	23,48

5	X	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2
	Y	1,79	1,55	1,32	1,10	0,91	0,74	0,59	0,46	0,35	0,26

6	X	0,3	0,7	1,1	1,3	1,4	2,0	2,1	2,4	3,0	3,5
	Y	42,27	33,87	26,43	23,07	21,48	13,20	12,03	8,88	4,22	1,95

7	X	0,4	0,6	0,9	1,1	1,4	1,6	1,9	2,1	2,5	3,0
	Y	3,440	3,100	2,603	1,890	1,640	1,303	1,103	0,763	0,450	0,448

8	X	-1,0	-0,4	0,1	0,6	1,1	1,2	1,5	2,0	2,2	3,0
	Y	0,50	0,86	1,71	3,06	4,91	5,34	6,76	9,51	10,75	16,50

9	X	0,1	0,3	0,5	0,6	0,9	1,1	1,4	1,6	1,7	1,9
	Y	7,78	6,28	5,00	4,42	2,92	2,12	1,24	0,82	0,68	0,52

10	X	-1,1	-0,8	-0,4	0,1	0,3	1,0	1,2	1,8	2,4	3,5
	Y	0,52	0,60	1,40	3,52	4,72	10,5	12,60	20,1	29,40	31,12

Тема 4. ЧИСЛЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

4.1. Вычисление производной по её определению

Пусть функция $y=f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и имеет производную в этой точке, т.е. существует предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx при стремлении Δx к нулю:

$$y'(x_0) = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \qquad (4.1)$$

Значение производной в точке x_0 можно получить, переходя к пределу в (4.1) по последовательности целых чисел n и полагая $\Delta x = (\Delta x)_n = \dfrac{(\Delta x)_0}{a^n}$. Здесь $(\Delta x)_0$ - некоторое начальное приращение аргумента, a – некоторое число больше единицы, n={0, 1, 2,…}. Тогда значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 запишется так

$$y'(x_0) = f'(x_0) = \lim_{n \to \infty} \frac{(\Delta y)_n}{(\Delta x)_n}, \qquad (\Delta y)_n = f(x_0 + (\Delta x)_n) - f(x_0)\cdot$$

Отсюда получаем приближенное равенство

$$y'(x_0) \approx \frac{(\Delta y)_n}{(\Delta x)_n} = \frac{f\left(x_0 + \dfrac{(\Delta x)_0}{a^n}\right) - f(x_0)}{\dfrac{(\Delta x)_0}{a^n}}. \qquad (4.2)$$

Для функции $y=f(x)$, имеющей непрерывную производную до второго порядка включительно в окрестности точки x_0 , точность приближения производной соотношением (4.2) можно установить, воспользовавшись формулой Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot \Delta x + \frac{1}{2} f''(\xi)\cdot \Delta x^2, \qquad \xi \in (x_0, x).$$

Тогда

$$\left| f'(x_0) - \frac{f(x) - f(x_0)}{\Delta x} \right| \le \frac{\max\limits_{x_0 \le \xi \le x} \left| f''(\xi) \right|}{2} \cdot \Delta x$$

и окончательно имеем

$$\left| y'(x_0) - \frac{(\Delta y)_n}{(\Delta x)_n} \right| \le \frac{\max\limits_{x_0 \le \xi \le x} \left| f''(\xi) \right|}{2} \cdot \frac{(\Delta x)_0}{a^n}.$$

Для достижения заданной точности ε приближения производной при определенном числе вычислений можно использовать неравенство

$$\left|\frac{(\Delta y)_n}{(\Delta x)_n}-\frac{(\Delta y)_{n-1}}{(\Delta x)_{n-1}}\right|<\varepsilon\cdot \qquad (4.3)$$

4.2. Использование многочленов Лагранжа для формул численного дифференцирования

Пусть функция $y=f(x)$ определена на отрезке $[a;\ b]$ и в точках $\{x_i\}$, где $i=0,\ 1,\ \ldots,\ n$ этого отрезка принимает значения $y_i=f(x_i)$, причем $a=x_0$, $b=x_n$.

Разность между соседними значениями аргумента x_i постоянна и определяется шагом $h=\dfrac{b-a}{n}$ разбиения отрезка на n частей, тогда $x_i=x_0+i\cdot h$ $(x_{i+1}=x_i+h)$.

Найдем аппроксимации производных первого и второго порядков с помощью значений функций y_i в узловых точках x_i с погрешностью одного и того же порядка в зависимости от шага h.

Для того, чтобы выразить значения производных через значения функции y_i в узлах интерполяции x_i, построим интерполяционный многочлен Лагранжа $L_m(x)$ степени m, удовлетворяющий условиям

$$L_m(x_k)=f(x_k)=y_k \quad (k=i,\ i+1,\ldots,\ i+m\le n\ ).$$

Многочлен $L_m(x)$, интерполирует функцию $f(x)$ на отрезке $[x_i,\ x_{i+m}]$. Дифференцируя многочлен $L_m(x)$, получаем значения производных в точках $\{\ x_k\ \}$ $(k=i,\ i+1,\ldots,\ i+m)$.

Если $m=1$, то $L_1(x)$ - линейная функция, график которой проходит через точки $(x_i\ ,\ y_i)$, $(x_{i+1}\ ,\ y_{i+1})$. Тогда

$$L_1(x)=y_i\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}+y_{i+1}\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}=y_i\frac{x-x_{i+1}}{-h}+y_{i+1}\frac{x-x_i}{h}.$$

$$y_i'=y_{i+1}'\approx L'(x)=-\frac{y_i}{h}+\frac{y_{i+1}}{h}=\frac{y_{i+1}-y_i}{h}.$$

Если $m=2$, то $L_2(x)$ - квадратичная функция, график которой парабола, проходящая через точки $(x_i\ ,\ y_i)$, $(x_{i+1}\ ,\ y_{i+1})$, $(x_{i+2}\ ,\ y_{i+2})$. Вычислим первую и вторую производные многочлена $L_2(x)$ на отрезке $[x_i\ ,\ x_{i+2}]$.

$$L_2(x)=y_i\frac{(x-x_{i+1})(x-x_{i+2})}{(x_i-x_{i+1})(x_i-x_{i+2})}+y_{i+1}\frac{(x-x_i)(x-x_{i+2})}{(x_{i+1}-x_i)(x_{i+1}-x_{i+2})}+y_{i+2}\frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{(x_{i+2}-x_i)(x_{i+2}-x_{i+1})}=$$

$$=y_i\frac{(x-x_{i+1})(x-x_{i+2})}{(-h)\cdot(-2h)}+y_{i+1}\frac{(x-x_i)(x-x_{i+2})}{h\cdot(-h)}+y_{i+2}\frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{2h\cdot h}=$$

$$=\frac{1}{2h^2}\left[y_i(x-x_{i+1})(x-x_{i+2})-2y_{i+1}(x-x_i)(x-x_{i+2})+y_{i+2}(x-x_i)(x-x_{i+1})\right].$$

$$L_2'(x)=\frac{1}{2h^2}\left[y_i(2x-x_{i+1}-x_{i+2})-2y_{i+1}(2x-x_i-x_{i+2})+y_{i+2}(2x-x_i-x_{i+1})\right].$$

$$L_2''(x)=\frac{1}{2h^2}\left[2y_i-4y_{i+1}+2y_{i+2}\right]=\frac{1}{h^2}\left[y_i-2y_{i+1}+y_{i+2}\right].$$

Первая и вторая производные многочлена Лагранжа $L_2(x)$ в точках x_i, x_{i+1}, x_{i+2} являются приближениями соответствующих производных функции $f(x)$ в этих точках:

$$y_i'=f'(x_i)\approx L_2'(x_i)=\frac{1}{2h^2}\left[y_i(2x_i-x_{i+1}-x_{i+2})-2y_{i+1}(2x_i-x_i-x_{i+2})+y_{i+2}(2x_i-x_i-x_{i+1})\right]$$

$$=\frac{1}{2h^2}\left[y_i(-3h)-2y_{i+1}(-2h)+y_{i+2}(-h)\right]=\frac{1}{2h}\left[-3y_i+4y_{i+1}-y_{i+2}\right]. \quad (4.4)$$

$$y_{i+1}'=f'(x_{i+1})\approx L_2'(x_{i+1})=\frac{1}{2h}\left[-y_i+y_{i+2}\right].$$

$$y_{i+1}'=f'(x_{i+1})\approx L_2'(x_{i+1})=\frac{1}{2h}\left[y_i-4y_{i+1}+3y_{i+2}\right].$$

$$y_i''=y_{i+1}''=y_{i+1}''\approx L_2''(x)=\frac{1}{h^2}\left[y_i-2y_{i+1}+y_{i+2}\right]. \quad (4.5)$$

Если функция $f(x)$ на отрезке $[x_i, x_{i+2}]$ имеет непрерывную производную до третьего порядка включительно, то справедливо представление функции в виде суммы

$$f(x)=L_2(x)+R_2(x), \quad (4.6)$$

где $R_2(x)$ –остаточный член интерполяционной формулы.

$$R_2(x)=\frac{f'''(\xi)}{3!}(x-x_i)(x-x_{i+1})(x-x_{i+2}), \qquad \xi\in(x_i;x_{i+2}).$$

В этом случае можно дать оценку погрешности приближений производных соотношениями (4.4) и (4.5). Дифференцируя (4.6), получим

$$f'(x)=L'_2(x)+R'_2(x), \quad (4.7)$$

$$f''(x)=L_2''(x)+R_2''(x). \quad (4.8)$$

Здесь

$$R_2'(x)=\frac{f'''(\xi)}{3!}\left[(x-x_{i+1})(x-x_{i+2})+(x-x_i)(x-x_{i+2})+(x-x_i)(x-x_{i+1})\right]. \quad (4.9)$$

$$R_2''(x)=\frac{f'''(\xi)}{3}\left[(x-x_i)+(x-x_{i+1})+(x-x_{i+2})\right]. \quad (4.10)$$

Погрешности при вычислении производных в точках x_i, x_{i+1}, x_{i+2} определяются из формул (4.9, 4.10).

$$R_2'(x_i)=-2R_2'(x_{i+1})=R_2'(x_{i+2})=\frac{1}{3}h^2 f'''(\xi). \quad (4.11)$$

$$R_2''(x_i)=-h\cdot f'''(\xi), \quad R_2''(x_{i+1})=0, \quad R_2''(x_{i+2})=h\cdot f'''(\xi). \quad (4.12)$$

Таким образом, равенства (4.11) показывают, что погрешность аппроксимации первой производной $f'(x)$ с помощью формулы (4.4) имеет один и тот же порядок $O(h^2)$, и естественны следующие рекомендации по их применению на отрезке $[a; b]$ в точках $\{x_i\}$, i=0, 1, 2, …, n≥2.

$$y_0' \approx \frac{1}{2h}\left[-3y_0 + 4y_1 - y_2\right].$$

$$y_i' \approx \frac{1}{2h}\left[-y_{i-1} + y_{i+1}\right], \qquad i = 1, 2, \dots, n-1. \tag{4.13}$$

$$y_n' \approx \frac{1}{2h}\left[y_{n-2} - 4y_{n-1} + 3y_n\right].$$

Из равенств (4.13) следует, что приближение второй производной с помощью формулы (4.5) имеет различный порядок в зависимости от h в разных точках: в точках x_i, x_{i+2} имеется погрешность порядка h, а в точке x_{i+1} порядок погрешности выше ($R_2''(x_{i+1})=0$).

В случае интерполяции функции $f(x)$, имеющей на отрезке $[a;\ b]$ непрерывную производную до четвертого порядка включительно, можно получить погрешность интерполяции второй производной, имеющей порядок h^2 и одинаковую во всех точках, с помощью многочлена Лагранжа третьей степени $L_3(x)$ по четырем узлам интерполяции $\{x_k\}$, $(k=i,\ i+1,\ i+2,\ i+3)$.

Опуская выкладки, приведем результаты для аппроксимации второй производной:

$$y_0'' \approx \frac{1}{h^2}\left[2y_0 - 5y_1 + 4y_2 - y_3\right].$$

$$y_i'' \approx \frac{1}{h^2}\left[y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}\right], \qquad i = 1, 2, \dots, n-1. \tag{4.14}$$

$$y_n' \approx \frac{1}{h^2}\left[-y_{n-3} + 4y_{n-2} - 5y_{n-1} + 2y_n\right].$$

Пример. Значения функции $y = \sin x$ определены таблицей.

x	0	π/6	π/3
sin x	0	0,5	0,866

Требуется с помощью формул (4.13, 4.14) приближенно найти y′(0) и y′′(0) и оценить погрешность результатов вычислений.

Решение

$$y'(0) \approx \frac{1}{2h}\left[-3y_0 + 4y_1 - y_2\right] = \frac{3}{\pi}\left[-3\cdot 0 + 4\cdot 0{,}5 - 0{,}866\right] \approx 1{,}05.$$

$$R_2'(0) = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{6}\right)^2 \cdot f'''(\xi), \qquad 0 < \xi < \frac{\pi}{3},$$

$$\text{т.к.}\quad f'(x) = \cos x,\quad f''(x) = -\sin x,\quad f'''(x) = -\cos x,$$

$$\left|f'''(x)\right| < 1,\quad \text{то}\quad \left|R_2'(0)\right| < \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{6}\right)^2 = 0{,}09\ .$$

Итак y′(0)≈1,05 ± 0,09 (точное значение y′(0)=cos 0 = 1).

Теперь воспользуемся формулой (4.11).

$$y''(0) \approx \frac{1}{h^2}\left[y_0 - 2y_1 + y_2\right] \quad \frac{36}{\pi^2}\left[-1+0,866\right] \approx -0,489.$$

$$R_2''(0) = -\frac{\pi}{6}\cdot f'''(\xi), \qquad \left|R_2''(0)\right| < \frac{\pi}{6} \approx 0,52\,.$$

Для лучшей оценки производной второго порядка необходимо увеличить число узловых точек и выбрать меньший шаг.

Задания по теме 4

Функция f(x) (см. табл. 2.1) определена на отрезке [1; 1.2]. Выбрав шаг h=0,5 найти приближенные значения производных $f'(x)$ и $f''(x)$ в точках 1 и 1,1. Оценить погрешность вычислений. Сравнить результаты с точными значениями производных в этих точках.

Тема 5. ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ. КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ, ТРАПЕЦИЙ, СИМПСОНА

Необходимо приближенно вычислить интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$. Для этого разобьем отрезок интегрирования [a,b] на n равных частей точками $x_0=a$, $x_1= x_0+h$, $x_{i+1}= x_i+h$, …, $x_n= b$, где $h=\dfrac{b-a}{n}$ – шаг разбиения, y_i – значения функции f(x) в точках разбиения x_i.

Затем непрерывная подынтегральная функция y=f(x) заменяется сплайном (кусочно-полиномиальной функцией) S(x), интерполирующей данную функцию. Интегрируя функцию S(x) на отрезке [a,b], придем к некоторой формуле численного интегрирования (квадратурной формуле).

5.1. Формула прямоугольников

Если на каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$, i=1,2,…,n , функцию f(x) заменяем функцией, принимающей постоянное значение, равное, например, значению функции f(x) в середине отрезка $[x_{i-1}, x_i]$, обозначенного $x_{i-\frac{1}{2}} = \dfrac{x_{i-1}+x_i}{2}$. Тогда S(x) будет иметь ступенчатый вид (рис.5.1).

$$S(x)=S_i(x)=y_{i-\frac{1}{2}}=f(x_{i-\frac{1}{2}})=\begin{cases} f(x_{1-\frac{1}{2}}), & x_0\le x\le x_1;\\ f(x_{2-\frac{1}{2}}), & x_1\le x\le x_2;\\ \ldots & \\ f(x_{n-\frac{1}{2}}), & x_{n-1}\le x\le x_n. \end{cases}$$

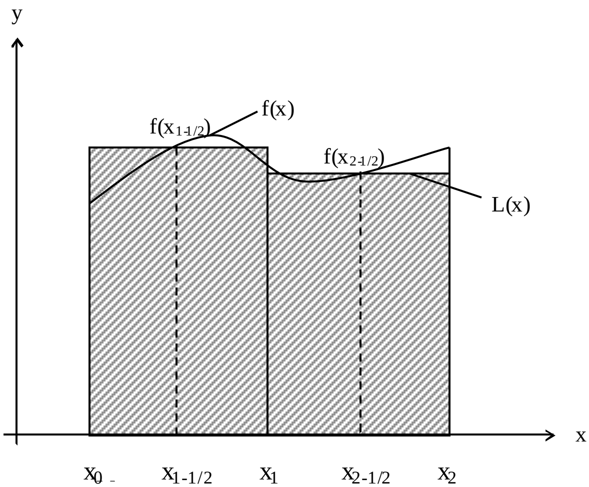


Рис.5.1. Графическая интерпретация метода прямоугольников

В этом случае значение интеграла (площадь под графиком f(x) на отрезке интегрирования) считаем приблизительно равным сумме площадей прямоугольников высотой $f(x_{i-\frac{1}{2}})$ и шириной h_0.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} h\cdot y_{i-\frac{1}{2}} = \sum_{i=1}^{n} h\cdot f(x_{i-\frac{1}{2}}) = h\cdot(y_{1-\frac{1}{2}}+y_{2-\frac{1}{2}}+\ldots+y_{n-\frac{1}{2}}). \quad (5.1).$$

5.2. Формула трапеций

Функцию f(x) на каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$, (i=1,2,…,n) заменяем её линейной интерполяцией по точкам (x_{i-1}, y_{i-1}) и (x_i, y_i), т.е. отрезком прямой, соединяющей эти точки.

S(x) принимает вид:

$$S(x) = S_i(x) = f(x_{i-1})\frac{x_i - x}{h} + f(x_i)\frac{x - x_{i-1}}{h} = y_{i-1}\frac{x_i - x}{h} + y_i\frac{x - x_{i-1}}{h},$$

$$где \quad x \in [x_{i-1}, x_i], \; i = 1,2,\ldots,n,$$

а её графиком является ломаная (рис. 5.2).

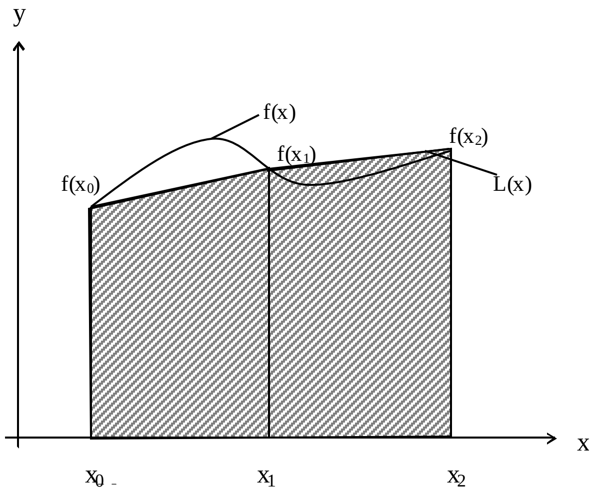


Рис. 5.2. Графическая интерпретация формулы трапеций

Тогда значение интеграла находим как сумму площадей трапеций с основаниями f(x_{i-1}), f(x_i) и высотой h. С учетом формулы площади трапеции $S_{тр.} = \frac{m+n}{2}h$, где m, n основания трапеции (5.2), получим

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} h \cdot \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} = \sum_{i=1}^{n} h \cdot \frac{y_{i-1} + y_i}{2} =$$

$$= h \cdot \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}\right). \qquad (5.2)$$

5.3. Формула Симпсона (формула парабол)

Функцию f(x) на каждом отрезке [x_{i-1}, x_i], (i=1,2,…,n) заменяем сплайном S(x), представляющим собой непрерывную функцию, составленную из примыкающих парабол. Потребуем, чтобы на отрезке [x_{i-1}, x_i] парабола проходила через точки (x_{i-1}, y_{i-1}), ($x_{i-1/2}, y_{i-1/2}$) и (x_i, y_i) (рис.5.3).

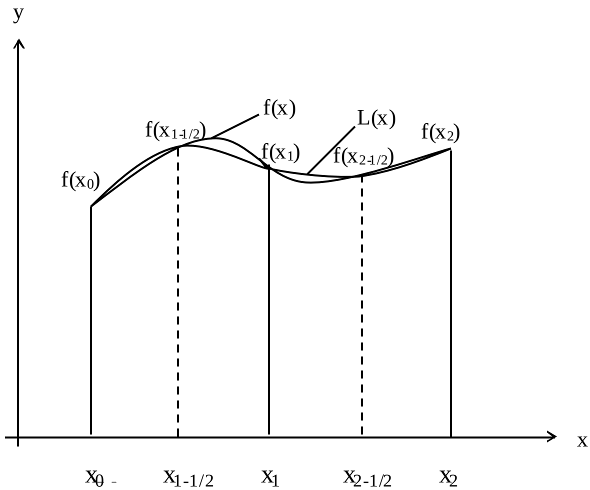


Рис. 5.3. Графическая интерпретация формулы Симпсона

Используя построение интерполяционного многочлена Лагранжа второго порядка на отрезке $[x_{i-1,} x_i]$, получим сплайн

$$S(x) = S_i(x) = y_{i-1}\frac{2(x-x_i)(x-x_{i-1/2})}{h^2} + y_{i-1/2}\frac{4(x_i-x)(x-x_{i-1})}{h^2} + y_i\frac{2(x-x_{i-1/2})(x-x_{i-1})}{h^2},$$

где $x \in [x_{i-1}, x_i],\ i = 1,2,\ldots,n.$

Для дальнейших преобразований введем переменную $t \in [0,1]$ с помощью равенства $x = x_{i-1} + ht$. Значениям t, равным 0, ½, 1, соответствуют значения x, равные $x_{i-1}, x_{i-1/2}, x_i$.

Выразим сплайн S(x) через новую переменную t

$$S(x) = S_i(x) = \tilde{S}_i(t) = y_{i-1}(1-t)(1-2t) + 4y_{i-1/2}(1-t)t + y_i(2t-1)t =$$
$$= y_{i-1}(1-3t+2t^2) + 4y_{i-1/2}(t-t^2) + y_i(2t^2-t), \qquad (i = 1,2,\ldots, n).$$

Учитывая, что $\int_0^1 (1-3t+2t^2)dt = \int_0^1 (t-t^2)dt = \int_0^1 (2t^2-t)dt = \frac{1}{6}$, имеем

$$\int_a^b S(x)dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} S_i(x)dx = \sum_{i=1}^n h\int_0^1 \tilde{S}_i(t)dt \quad \sum_{i=1}^n \frac{h}{6}\cdot(y_{i-1} + 4y_{i-1/2} + y_i).$$

И в результате приходим к квадратурной формуле парабол:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{6}\cdot\left[y_0 + y_n + 4(y_{1/2} + y_{3/2} + \ldots + y_{n-1/2}) + 2(y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1})\right]. \qquad (5.3)$$

5.4. Оценка погрешности

Погрешность каждой квадратурной формулы оценивается величиной остаточного члена $R(h)$, зависящего от шага разбиения h (или от числа разбиений n).

$$R(h) = \left| \int_a^b f(x)dx - \int_a^b S(x)dx \right|.$$

Приведем оценки погрешностей квадратурных формул в том случае, когда подынтегральная функция имеет непрерывную производную второго порядка:

для формулы прямоугольников

$$R(h) \le \frac{b-a}{24} \max_{a \le x \le b} \left| f''(x) \right| \cdot h^2 = \frac{(b-a)^3}{24n^2} \max_{a \le x \le b} \left| f''(x) \right| \cdot h^2;$$

для формулы трапеций

$$R(h) \le \frac{b-a}{12} \max_{a \le x \le b} \left| f''(x) \right| \cdot h^2 = \frac{(b-a)^3}{12n^2} \max_{a \le x \le b} \left| f''(x) \right| \cdot h^2.$$

Если подынтегральная функция имеет непрерывную производную четвертого порядка, то справедлива такая оценка погрешности формулы Симпсона

$$R(h) \le \frac{b-a}{2880} \max_{a \le x \le b} \left| f^{(4)}(x) \right| \cdot h^4 = \frac{(b-a)^5}{2880n^4} \max_{a \le x \le b} \left| f^{(4)}(x) \right| \cdot h^4.$$

Заметим, что при интегрировании степенной функции, степень которой не выше трех, квадратурная формула Симпсона дает точный результат.

Практически важно вести вычисления до достижения заданной точности ε по той или иной формуле. Этой цели удовлетворяет ***метод двойного пересчета.*** Для этого по квадратурной формуле проводят вычисление интеграла с шагом h и получают значение $I(h)$. Затем уменьшают шаг вдвое и получают новое приближенное значение интеграла $I(h/2)$.

Чтобы определить, как сильно уклоняется значение $I(h/2)$ от точного значения интеграла I, используется ***правило Рунге***:

$$\left| I - I(h/2) \right| \approx \frac{1}{2^k - 1} \left| I(h) - I(h/2) \right|,$$

где k=2 для формул прямоугольников и трапеций и k=4 для формулы Симпсона.

При заданной точности ε вычисления с уменьшающимся шагом проводят до окончания приближений при выполнении условия

$$\frac{1}{2^k - 1} \left| I(h) - I(h/2) \right| < \varepsilon.$$

При этом полагают $I \approx I(h/2)$ с точностью ε.

Задания по теме 5

Вычислить заданные интегралы по формулам прямоугольников, трапеций и Симпсона, если отрезок интегрирования разбит на n=2 и n=4 равные части. Оценить погрешность результата и сравнить приближенные значения интеграла с точными.

1. $\int\limits_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx \quad (I = \frac{\pi}{4} \approx 0.785)$.

2. $\int\limits_0^1 \frac{1}{1+x}dx \quad (I = \ln 2 \approx 0.693)$.

3. $\int\limits_0^{\pi/4} \sin 4x dx \quad (I = 0.5)$.

4. $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx \quad (I = \ln(1+\sqrt{2} \approx 0.881)$.

5. $\int\limits_1^e \ln x dx \quad (I = 1)$.

6. $\int\limits_0^1 \ln(x+1)dx \quad (I = 2\ln 2 - 1 \approx 0386)$.

7. $\int\limits_0^{\pi/2} x\cos x dx \quad (I = \frac{\pi}{2} \approx 0.571)$.

8. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\sin x}dx \quad (I = 1)$.

9. $\int\limits_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx \quad (I = arctge - \frac{\pi}{4} \approx 0.433)$.

10. $\int\limits_0^{\pi} \cos^3 x dx \quad (I = 0)$.

11. $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos x}dx \quad (I = \ln(1+\sqrt{2}) \approx 0.881)$.

12. $\int\limits_0^1 arctg\, x\, dx \quad (I = \frac{1}{4}(\pi - 2\ln 2) \approx 0.438)$.

13. $\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}dx \quad (I \approx 0.38)$.

14. $\int_0^{\sqrt{2}/2} \arcsin x dx \quad (I = \frac{\sqrt{2}}{8}(\pi+4)-1 \approx 0.26)$.

15. $\int_0^{\pi/4} tg\ x dx \quad (I = \frac{1}{2}\ln 2 \approx 0.346)$.

16. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} ctg\ x dx \quad (I = \frac{1}{2}\ln 2 \approx 0.346)$.

17. $\int_0^1 xe^x dx \quad (I = 1)$.

18. $\int_0^1 \sqrt{1+x}\ dx \quad (I = \frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1) \approx 1.22)$.

19. $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\cos x}dx \quad (I = 1)$.

20. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x}}dx \quad (I = 2(\sqrt{2}-1) \approx 0.828)$.

21. $\int_1^e \ln^2 x dx \quad (I = e - 2 \approx)$.

22. $\int_0^{\pi/4} tg^2 x dx \quad (I = \frac{4-\pi}{4} \approx 0.215)$.

23. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} ctg^2 x dx \quad (I = \frac{4-\pi}{4} \approx 0.215)$.

24. $\int_0^{\pi/2} e^x \cos x dx \quad (I = \frac{e^{\pi/2}-1}{2} \approx 1.905)$.

25. $\int_0^{\pi/2} e^x \sin x dx \quad (I = \frac{e^{\pi/2}+1}{2} \approx 2.905)$.

Тема 6. РЕШЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ И ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ

6.1. Корни уравнения. Отделение корней

Функция f(x)называется алгебраической, если для получения ее числового значения по данному значению аргумента x требуется выполнить арифметические операции и возведение в степень с рациональным показателем.

Если в запись уравнения входят только алгебраические функции, то уравнение называется *алгебраическим.*

Алгебраическое уравнение всегда может быть приведено к виду

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0, \qquad (6.1)$$

где $n = 1,2,3\ldots,\quad a_n \neq 0$.

Все неалгебраические функции: показательная a^x, логарифмическая $\log_a$ x, тригонометрические sin x, cos x, tg x, ctg x и обратные тригонометрические arcsin x, arccos x, arctg x, arcctg x – называются трансцендентными.

Если в запись уравнения входят трансцендентные функции, то уравнение называется трансцендентным, например tg x = ax.

Решение уравнения f (x) =0 с одним неизвестным x заключается в отыскании корней, т.е. тех значений x, которые обращают уравнение в тождество.

В общем случае для уравнения f (x) =0 отсутствуют аналитические формулы, определяющие его корни.

Задача отыскания корней сводится к нахождению всех точек x_i пересечения графика функции f(x) с осью x (рис. 6.1).

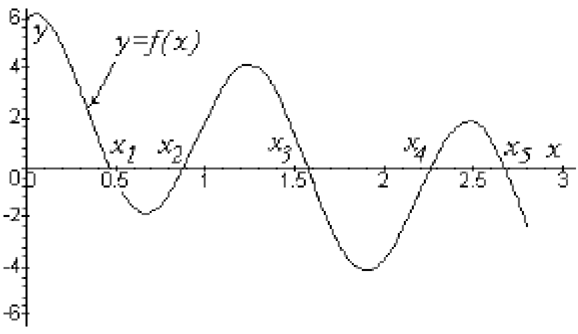


Рис. 6.1. Геометрическая интерпретация корней уравнения f(x) = 0

Из рис. 6.1 видно, что число точек пересечения графика функции с осью x может быть несколько. Поэтому в качестве первого шага при решении любого уравнения проводят *отделение* его корней. Это означает, что ось x разбивают на такие отрезки, что в каждом из них содержится только один корень уравнения. После этого следует уточнить положение каждого корня в пределах допустимой погрешности.

Для отделения корней полезна следующая теорема: если непрерывная функция $f(x)$ принимает значения разных знаков на концах отрезка $[a, b]$, т.е. $f(a)\cdot f(b) < 0$, то внутри этого отрезка содержится, по меньшей мере, один корень уравнения $f(x) = 0$. На основе этой же теоремы реализуются самые простые и надежные методы численного определения корней уравнений: метод половинного деления и метод хорд.

Процесс отделения корней начинается с установления знаков $f(x)$ в граничных точках интересующего нас отрезка определения переменной x: $x = a$ и $x = b$. Затем определяются знаки f(x) в ряде промежуточных точек $x = \alpha_1, \alpha_2$ ..., выбор которых должен учитывать особенности функции $f(x)$. Если окажется, что $f(\alpha_i)f(\alpha_i+1) < 0$, то в интервале (α_i, α_i+1) есть корень уравнения $f(x) = 0$. Необходимо убедиться, является ли этот корень единственным на данном интервале. Для отделения корней практически достаточно провести процесс половинного деления, последовательно деля исходный отрезок $[a, b]$ на 2, 4, 8 и т. д. равных частей и определяя знаки $f(x)$ в точках деления. Напомним, что алгебраическое уравнение степени n имеет не более n действительных корней. Поэтому, если для алгебраического уравнения мы получили n+1 перемену знака $f(x)$, то все его корни отделены.

6.2. Численное решение уравнения методом половинного деления (метод дихотомии)

Предположим, что процесс отделения корней проведен и на отрезке $[a, b]$ находится ровно один корень ξ уравнения $f(x)=0$. Необходимо определить его положение с погрешностью ε.

Метод половинного деления заключается в следующем (рис. 6.2).

Сначала определяем середину c отрезка $[a, b]$ $c = (a+b)/2$ и вычисляем значение функции $f(c)$. Далее делаем выбор, какую из двух частей взять для уточнения корня. Очевидно, что корень будет находиться в той половине исходного отрезка, на концах которой функция имеет разные знаки. На рис. 6.2 таким будет правый отрезок – отрезок $[a, c]$.

Для очередного шага уточнения положения корня отрезок $[c, b]$ из рассмотрения исключаем, а с отрезком $[a, c]$ продолжаем процесс деления, как и с первоначальным отрезком [a, b], формально переприсваивая новому значению b значение c . Если же реализуется ситуация, когда функция имеет разные знаки на концах отрезка $[c, b]$, то из рассмотрения следует исключить отрезок $[a, c]$, формально присваивая новому значению a значение c .

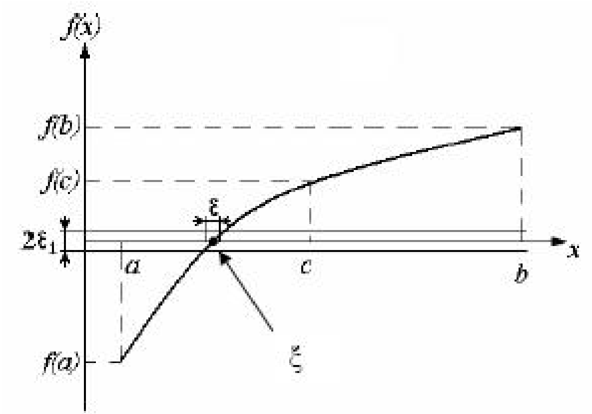


Рис. 6.2. Графическая интерпретация метода половинного деления

В результате мы получим последовательность вложенных друг в друга отрезков все уменьшающейся длины: $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$,... $[a_n, b_n]$. Этот повторяющийся (итерационный) процесс будем продолжать до тех пор, пока длина отрезка $[a_n, b_n]$ не станет меньше заданной погрешности ε вычислений.

Тогда искомый корень

$$\xi \approx a_n \approx b_n \approx (a_n + b_n)/2. \qquad (6.2)$$

Следует учитывать, что функция $f(x)$ вычисляется с некоторой абсолютной погрешностью ε_1. Вблизи корня значения функции $f(x)$ малы по абсолютной величине и могут оказаться сравнимыми с погрешностью ее вычисления. Другими словами, при подходе к корню мы можем попасть в “полосу шумов” $2\varepsilon_1$ (см. рис. 6.2) и дальнейшее уточнение корня становится бессмысленным. Поэтому надо задать ширину “полосы шумов” и прекратить итерационный процесс при попадании в нее. Также необходимо иметь в виду, что при уменьшении длины интервала $[a_n, b_n]$ увеличивается погрешность вычисления его длины $a_n - b_n$ за счет вычитания двух близких чисел.

Метод половинного деления обладает довольно большой скоростью сходимости. Так как за каждую итерацию интервал, где расположен корень, уменьшается в два раза, то через n итераций длина интервала будет равна (b–a)/2n. За 10 итераций интервал уменьшится в 210 ≈1024 ≈103 раз, а за 20 итераций – в 220≈106 раз.

6.3. Метод хорд

В предположениях предыдущего параграфа укажем более быстрый способ нахождения корня ξ уравнения $f(x) = 0$. В этом методе очередное приближение к корню берется не в середине отрезка [a, b], а в точке x1, где хорда графика функции $f(x)$, соединяющая точки $f(a)$ и $f(b)$, пересекает ось абсцисс (рис. 6.3).

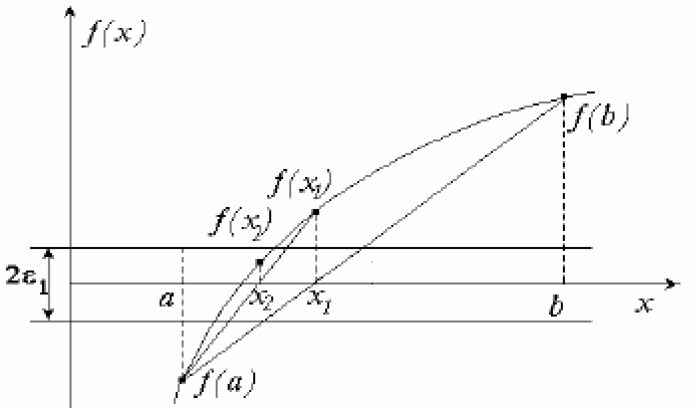


Рис. 6.3. Графическая интерпретация метода хорд

В качестве нового интервала для продолжения итерационного процесса выбираем ту из двух частей ($[a, x_1]$ или $[x_1, b]$) отрезка [a, b], на концах которого функция $f(x)$ меняет знак.

Процесс уточнения корня заканчивается, когда расстояние между очередными приближениями станет меньше требуемой погрешности ε вычислений

$$\left|x_n - x_{n-1}\right| < \varepsilon,$$

или когда значения функции попадут в область шума, т.е.

$$\left|f(x)\right| < \varepsilon_1.$$

Уравнение хорды в нашем случае имеет вид

$$y(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (a - x) + f(a),$$

откуда для x_1 получаем

$$x_1 = a - \frac{b - a}{f(b) - f(a)} \cdot f(a) \qquad (6.3)$$

Схема вычислений при решении трансцендентного уравнения методом хорд в основном совпадает со схемой вычислений по методу дихотомии. Метод хорд требует вдвое–втрое меньшего числа итераций, чем метод половинного деления, для отыскания корня с той же погрешностью. Однако, если функция $f(x)$ в области пересечения с осью абсцисс достаточно пологая, то очередная хорда может практически лечь на ось абсцисс, т.е. полностью попасть в полосу шумов. В этой ситуации произойдет сильное увеличение ошибки вычислений, так как в в формуле (6.3) разность двух близких величин $f(a)-f(b)$ стоит в знаменателе. В этом смысле метод половинного деления значительно устойчивее.

6.4. Метод касательных (метод Ньютона)

Пусть x* есть корень уравнения $f(x) = 0$, единственный на отрезке [a, b]. Предположим, что каким-либо способом, например, графически определено начальное приближение x_0 к корню. В этой точке вычислим значение функции $f(x_0)$ и ее производной $f'(x = x_0)$. Значение этой производной равно $tg\alpha$ (рис. 6.4) – тангенсу угла наклона соответствующей касательной к оси абсцисс.

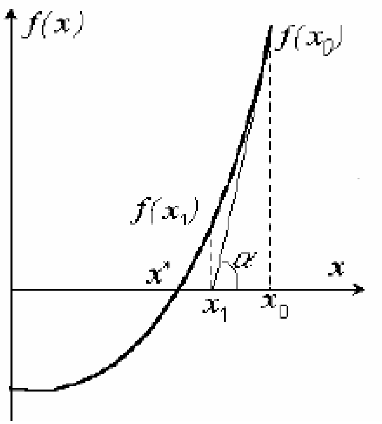


Рис. 6.4. Иллюстрация метода касательных (Ньютона)

Точка x_1 пересечения этой касательной с осью абсцисс есть следующее приближение к корню (поэтому метод Ньютона и называют методом касательных). Эта точка x_1 принимается за новое начальное приближение и процесс повторяется. Из рис. 6.4 видно, что процесс сходится к искомому корню x*. Процесс уточнения корня закончится, когда выполнится условие

$$\left|x_{k+1} - x_k\right| < \varepsilon,$$

где ε – допустимая погрешность определения корня. Из геометрических соображений можно получить расчетную формулу для метода Ньютона в виде

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}. \qquad (6.4)$$

Метод Ньютона обладает высокой скоростью сходимости. Обычно абсолютная погрешность нахождения корня $\varepsilon = 10^{-5} \ldots 10^{-6}$ достигается за 5 – 6 итераций. Однако существенным недостатком этого метода является необходимость вычисления производной функции на каждом шаге итерационного процесса. Это может явиться серьезным препятствием, когда функция вычисляется по очень сложному или трудоемкому алгоритму. Несколько уменьшив скорость сходимости, можно ограничиться вычислением производной только на первой итерации, а затем вести вычисления по формуле (6.4), полагая

$$f'(x_k) \approx f'(x_0)$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_0)}.$$

Структура программы решения уравнений методом Ньютона похожа на структуру программ для методов дихотомии и хорд. Главное отличие заключается в том, что в методе Ньютона не нужно делать выбор между левой и правой частями отрезка, а также в том, что нет необходимости задавать полосу шума функции, так как по разности двух последовательных приближений $x_{k+1} - x_k$ можно сразу оценивать и величину отношения $f(x)/f'(x)$. Для предотвращения возможного “зацикливания” программы в случае неудачного выбора начального приближения или неправильно заданных параметров, рекомендуется предусмотреть счетчик числа итераций.

Замечание. Отметим три особенности метода Ньютона:

1. Метод Ньютона имеет квадратичную сходимость, т.е. в отличие от метода половинного деления (и метода хорд) его погрешность на следующей итерации пропорциональна квадрату погрешности на предыдущей итерации. У метода дихотомии такая зависимость линейна.

2. Быстрая сходимость метода Ньютона гарантируется лишь при близких к точному решению начальных приближениях. Если начальное приближение выбрано неудачно, то метод может сходиться медленно либо не сойдется вообще.

3. Если вблизи корня функция $f(x)$ пологая, т.е. на очередной итерации $\mathrm{tg}(\alpha) \to 0$, возможно резкое увеличение ошибки вычислений.

6.5. Метод простых итераций (метод последовательных приближений)

От исходного трансцендентного уравнения $f(x) = 0$ тождественными алгебраическими преобразованиями перейдем к эквивалентной записи в виде

$$x = \varphi(x). \tag{6.5}$$

Выберем какое-то начальное приближение x_0 к корню x^*. Подставив его в правую часть (6.5), получим первое приближение $x_1 = \varphi(x_0)$, затем втрое $x_2 = \varphi(x_1)$ и т.д.

$$x_k = \varphi(x_{k-1}). \tag{6.6}$$

Возникает вопрос о том, при каких условиях данный итерационный процесс будет сходиться к корню трансцендентного уравнения x^*. Для ответа на него проведем графический анализ (рис. 6.5).

Из графиков видно, что при любом знаке производной $\varphi'(x)$ возможны как сходящиеся, так и расходящиеся итерационные процессы. Скорость сходимости зависит от абсолютной величины производной. Чем меньше $|\varphi'(x)|$ вблизи корня, тем быстрее сходится процесс. Более детальный математический анализ показывает, что необходимым для сходимости метода простых итераций является условие

$$|\varphi'(x)| < 1. \tag{6.7}$$

Выполнение условия (6.7) можно обеспечить путем рационального выбора вида функции $\varphi(x)$. Рассмотрим один из общих алгоритмов такого выбора.

Умножим левую и правую части уравнения $f(x)=0$ на произвольную постоянную b и добавим к обеим частям неизвестное x. При этом корни исходного уравнения не изменятся.

$$x + b \cdot f(x) = x + 0 \cdot b.$$

Введем обозначение

$$\varphi(x) = x + b \cdot f(x). \tag{6.8}$$

Произвольный выбор константы b поможет обеспечить выполнение условия сходимости. Желательно выбрать b так, чтобы

$$-1 < \varphi'(x) < 0,$$

тогда сходимость итерационного процесса будет двухсторонней (рис. 6.5, в).

Если функция $\varphi(x)$ выбрана в виде (6.5), то ее производная выражается формулой

$$\varphi'(x) = 1 + b \cdot f'(x).$$

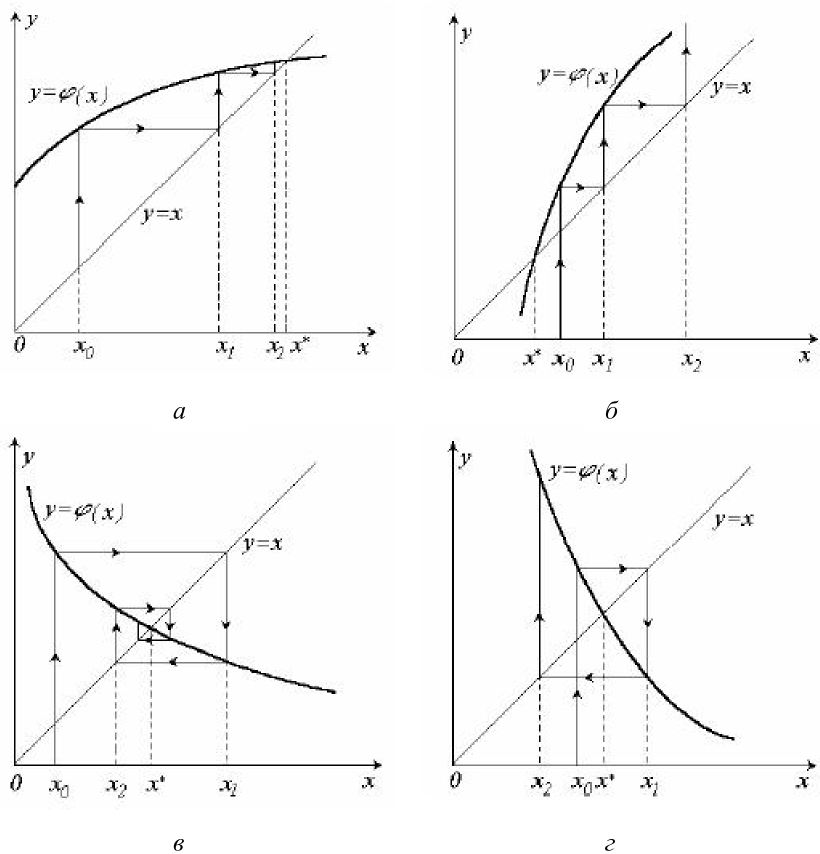


Рис. 6.5. Метод простых итераций:
а - односторонний сходящийся процесс;
б - односторонний расходящийся процесс;
в - двухсторонний сходящийся процесс;
г - двухсторонний расходящийся процесс

Наибольшая скорость сходимости получается при $\varphi'(x) = 0$, тогда

$$b = -\frac{1}{f'(x)}$$

и итерационная формула (6.6) метода простых итераций переходит в формулу Ньютона (6.4).

Пример. Уравнение

$$f(x) = x^3 - x - 1 = 0 \tag{6.9}$$

имеет корень в интервале $1 < x^* < 2$, так как $f(1) = -1 < 0$ и $f(2) = 5 > 0$.

Это уравнение можно представить в виде $x = x^3 - 1$.

Здесь $\varphi(x) = x^3 - 1$, $\varphi'(x) = 3x^2$. Поэтому $\varphi'(x) \ge 3$ при $1 \le x \le 2$ и, следовательно, условие (6.7) сходимости процесса итераций не выполнено.

Но, если записать уравнение (6.9) в виде

$$x = \sqrt[3]{x+1}, \tag{6.10}$$

то будем иметь

$$\varphi(x) = \sqrt[3]{x+1}, \qquad \varphi'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}.$$

Отсюда при $1 \le x \le 2$

$$0 < \varphi'(x) < 0{,}25 ,$$

значит процесс итераций для уравнения (6.10) быстро сойдется.

Задания по теме 6

Найти решения следующих уравнений с точностью $\varepsilon = 10^{-2}$:
а) методом половинного деления; б) методом простых итераций; в) методом хорд и касательных.

1. $x^4 - 3x - 20 = 0 \quad (x > 0)$.
2. $x^3 - 2x - 5 = 0 \quad (x > 0)$.
3. $x^3 + 3x + 5 = 0$.
4. $x^4 + 5x - 7 = 0 \quad (x > 0)$.
5. $x^3 - 12x - 5 = 0 \quad (x > 0)$.
6. $x + e^x = 0$.
7. $x^3 - 2x^2 - 4x + 5 = 0 \quad (x < 0)$.
8. $x^5 - x - 2 = 0$.
9. $x^3 - 10x + 5 = 0 \quad (x < 0)$.
10. $2 - \ln x - x = 0$.
11. $x^3 + 2x - 7 = 0$.
12. $x^3 + x^2 - 11 = 0 \quad (x > 0)$.
13. $x^4 - 2x - 4 = 0 \quad (x > 0)$.
14. $2e^x + x - 1 = 0$.
15. $x^4 - 2x - 4 = 0 \quad (x < 0)$.
16. $2x^3 + x^2 - 4 = 0 \quad (x > 0)$.
17. $e^x - x - 2 = 0$.
18. $\frac{1}{2}e^x - x - 1 = 0 \quad (x > 0)$.
19. $x^2 - \cos x = 0 \quad (x > 0)$.
20. $x^2 + \ln x = 0$.

21. $\ln x + 0.5x - 1 = 0$. 22. $\ln x - 0.5x + 1 = 0 \quad (x > 1)$.

23. $\dfrac{1}{1+x^2} - \ln x = 0$. 24. $\dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{e^x}{2} = 0 \quad (x > 0)$.

25. $\dfrac{x}{2+x} - \ln x = 0$.

Тема 7. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

7.1. Метод простой итерации

Все методы решения систем уравнений можно разбить на условно точные и приближенные. К точным алгоритмам относятся методы Крамера, Гаусса, Жордана-Гаусса и т.д. Среди приближенных следует отметить, прежде всего, итерационные методы. Рассмотрим подробно метод простой итерации, который обладает следующими преимуществами:

1. Если процесс итерации сходится быстро, т.е. количество приближений меньше, чем порядок системы, то получается выигрыш во времени решения по сравнению с точными методами.

2. Метод итераций является самокорректирующимся, т.е. отдельные ошибки не отражаются на конечном результате решения.

3. Процесс итераций легко программируется на ЭВМ.

Пусть дана система линейных алгебраических уравнений

$$A\bar{x} = \bar{b}$$

где A – невырожденная матрица.

Расширенная матрица A этой системы имеет вид

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix}$$

Приводя с помощью линейных преобразований эту систему к эквивалентному виду

$$\bar{x} = c\bar{x} + \bar{d}$$

будем решать последнюю методом последовательных приближений. Взяв за нулевое приближение какой-либо вектор $\bar{x}^{(0)}$, вычислим приближение $\bar{x}^{(1)}$ по формуле

$$\bar{x}^{(1)} = c\bar{x}^{(0)} + \bar{d},$$

аналогично

$$\overline{x}^{(2)} = c\overline{x}^{(1)} + \overline{d} \text{ и т.д.}$$

Последовательность векторов $\left\{\overline{x}^{(k)}\right\}$, $k=1,2,\ldots,$ сходится к точному решению $\overline{x}^*$, т.е.

$$\lim_{k\to\infty} \overline{x}^{(k)} = \overline{x}^*$$

если норма матрицы c

$$\|c\| < 1.$$

Норма $\|c\|$ определяется по одному из следующих способов:

$$\|c\|_m = \max_i \sum_j |a_{ij}|$$

$$\|c\|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}|$$

$$\|c\|_k = \sqrt{\sum_{i,j} a_{ij}^2}$$

При сделанных предположениях о норме матрицы c погрешность k-го приближения можно оценить следующим образом:

$$\left\|\overline{x}^* - \overline{x}^{(k)}\right\| \le \frac{\|c\|^{k+1}}{1-\|c\|}\left\|\overline{d}\right\| \quad \text{при } \overline{x}^{(0)} = \overline{d}$$

$$\left\|\overline{x}^* - \overline{x}^{(k)}\right\| \le \frac{\|c\|}{1-\|c\|}\left\|\overline{x}^{(k)} - \overline{x}^{k-1}\right\|$$

Первая из этих формул позволяет оценить количество итераций, теоретически необходимых для достижения заданной точности.

Задания по теме 7

Найти решения систем линейных алгебраических уравнений $Ax = b$ с точностью $\varepsilon = 10^{-2}$: а) используя метод Гаусса; б) используя метод итераций. Сравнить их с точными решениями ξ.

1. $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -3 & 2 & 10 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 11 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \xi = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

2. $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad b=\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \xi=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

3. $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad b=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \xi=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

4. $A=\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad b=\begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \xi=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

5. $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad b=\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \xi=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$

6. $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad b=\begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \xi=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

7. $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad b=\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \xi=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

8. $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad b=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \xi=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$

9. $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad b=\begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix}, \quad \xi=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$

10. $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad b=\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \xi=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$

11. $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad b=\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \xi=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

12. $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad b=\begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \xi=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$

13. $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & -5 & 1 \\ 2 & -2 & 6 \end{pmatrix}, \quad b=\begin{pmatrix} -4 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \xi=\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$

14. $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & -5 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad b=\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \xi=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$

15. $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad b=\begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \xi=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$

16. $A=\begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad b=\begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \xi=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

17. $A=\begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad b=\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \xi=\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

18. $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\xi=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

19. $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix} -6 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\xi=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

20. $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\xi=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

21. $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}$, $\xi=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

22. $A=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ 11 \end{pmatrix}$, $\xi=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

23. $A=\begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

24. $A=\begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ -2 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix} -6 \\ 13 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

25. $A=\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\xi=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Тема 8. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

В прикладных задачах часто встречаются обыкновенные дифференциальные уравнения, точное решение которых найти не удается или оно не выражается через элементарные функции. Возникает необходимость найти решение приближенно.

8.1. Понятие о численном методе решения задачи Коши

Рассмотрим задачу Коши

$$y' = f(x, y), \tag{8.1}$$

$$y(x_0) = y_0 . \tag{8.2}$$

Требуется найти численное решение $y=\varphi(x)$ в виде таблицы его приближенных значений для заданных значений аргумента x на некотором отрезке $[a, b]$ с указанной точностью.

Решение задачи Коши (8.1) будем искать на отрезке $[a, b]$. Отрезок $[a, b]$ разобьем на n равных частей. Величина $h=(b-a)/n$ называется шагом интегрирования. Точки разбиения (узловые точки) располагаются равномерно и связаны соотношениями

$$x_0 = a , \quad x_i = x_0+i\,h , \; (i=1, 2, \dots , n).$$

Пусть $y= \varphi(x)$ – искомое точное решение задачи Коши. Разложим его по формуле Тейлора на промежутке $[x_i , x_{i+1}]$.

$$\varphi(x_{i+1}) = \varphi(x_i) + \varphi'(x_i)\cdot h + \frac{1}{2!}\varphi''(x_i)\cdot h^2 + \frac{1}{3!}\varphi'''(x_i)\cdot h^3 + O(h^4) . \tag{8.3}$$

Производные, стоящие в правой части равенства (8.3), можно найти из уравнения (8.1)

$$\varphi'(x_i)=f(x_i,y_i), \qquad \varphi''(x_i)=f_x'(x_i,y_i) \text{ и т. д.}$$

Значение $\varphi(x_0)=y_0$ дано в начальном условии (8.2). По формуле (8.3) можно найти значение $\varphi(x_1)$, затем, зная $\varphi(x_1)$, найти $\varphi(x_2)$, и т. д. Однако практическое использование формулы (8.3) затруднительно, так как правая часть равенства (8.3) содержит бесконечно много членов. Поэтому на практике ограничиваются лишь несколькими первыми членами разложения Тейлора.

8.2. Метод Эйлера

Простейший метод решения дифференциальных уравнений. На практике используется довольно редко из-за относительно невысокой точности.

Приближенные значения численного решения задачи Коши (8.1) в узловых точках x_i обозначим y_i

$$y_i \approx \varphi(x_i).$$

В методе Эйлера для подсчета y_{i+1} в равенстве (8.3) берут только первые два слагаемых и полагают

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h, \tag{8.4}$$

при $x_{i+1} = x_i + h$.

Геометрическая интерпретация метода дана на рис. 8.1, где изображены интегральные кривые. Использование формулы (8.4) означает, что движение от точки $P_i(x_i, y_i)$ к точке $P_{i+1}(x_{i+1}, y_{i+1})$ происходит не по самой интегральной кривой, проходящей через точку P_i (она нам неизвестна), а по отрезку касательной к ней, проведенной в этой точке. На каждом следующем шаге мы заново находим касательную к интегральной кривой (уже другой интегральной кривой семейства интегральных кривых). В результате получаем линию, которую называют ломаной Эйлера.

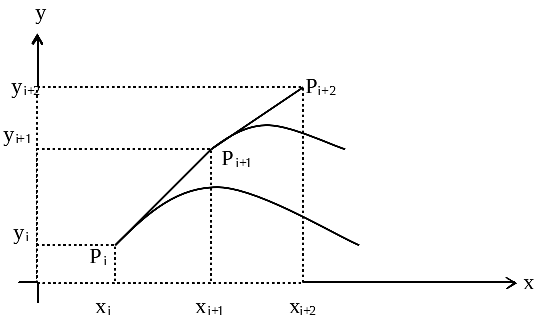


Рис. 8.1. Геометрическая интерпретация метода Эйлера

8.3. Методы Рунге-Кутта

Для уменьшения погрешности метода, использующего разложение искомого решения в ряд Тейлора (8.3), необходимо учитывать большее количество членов ряда. В зависимости от старшей степени, с которой учитываются члены ряда, построены вычислительные Рунге-Кутта разных порядков точности. Так метод Эйлера можно назвать методом Рунге-Кутта первого порядка.

Метод Рунге-Кутта второго порядка называют методом Эйлера-Коши. В этом случае в формуле (8.3) отбрасываются члены, начиная с четвертого. Вычислительные формулы метода Эйлера-Коши

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \frac{h}{2}(f(x_i, y_i) + f(x_i + h, \tilde{y}_i)), \\ \tilde{y}_i &= y_i + f(x_i, y_i). \end{aligned} \tag{8.5}$$

Геометрический смысл этого вычисления показан на рис. 8.2. Каждое очередное звено $P_i P_{i+1}$ ломаной стоится так:

- В точке $P_i(x_i, y_i)$ определяем направление α_1, касательной к интегральной кривой, проходящей через эту точку, и значение $k_1 = \mathrm{tg}(\alpha_1)$. Проводим отрезок P_iP^1 по направлению α_1.
- В середине $N_1(x_i+h/2, y_i+k_1 \cdot h/2)$ отрезка P_iP^1 определяем направление α_2, касательной к интегральной кривой, проходящей через эту точку, и значение $k2 = \mathrm{tg}(\alpha_2)$. Проводим отрезок P_iP_{i+1} по направлению α_2.

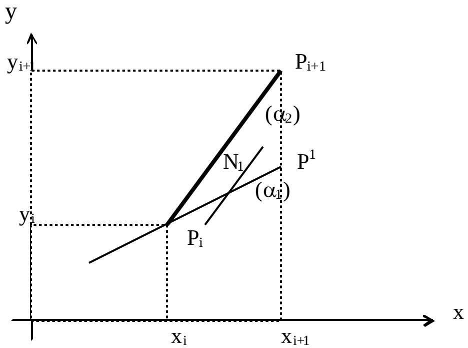


Рис. 8.2. Геометрический смысл вычисления методом Эйлера-Коши

Таким образом, мы производим пересчет, уточнение углового коэффициента звеньев ломаной. Уже из геометрического смысла ясно, что данный метод точнее метода Эйлера, так как здесь учитывается поворот касательной на интервале $[x_i,x_{i+1}]$.

Метод Рунге-Кутта четвертого порядка называют классическим методом Рунге-Кутта. Здесь получится еще более точный результат. Алгоритм решения задачи Коши:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

$$k_1 = f(x_i, y_i), \qquad k_2 = f(x_i + \frac{h}{2},\ y_i + \frac{h}{2}k_1), \tag{8.6}$$

$$k_3 = f(x_i + \frac{h}{2},\ y_i + \frac{h}{2}k_2), \qquad k_4 = f(x_i + h,\ y_i + hk_3)$$

при $x_{i+1} = x_i+h$.

Геометрический смысл этого вычисления показан на рис.8.3. Каждое очередное звено $P_i P_{i+1}$ ломаной стоится так:

- В точке $P_i(x_i, y_i)$ определяем направление α_1, касательной к интегральной кривой, проходящей через эту точку, и значение $k_1 = \mathrm{tg}(\alpha_1)$. Проводим отрезок P_iP^1 по направлению α_1.

- В середине $N_1(x_i+h/2,\ y_i+k_1{\cdot}h/2)$ отрезка P_iP^1 определяем направление α_2, касательной к интегральной кривой, проходящей через эту точку, и значение $k2 = \mathrm{tg}(\alpha_2)$. Проводим отрезок P_iP^2 по направлению α_2.
- В середине $N_2(x_i+h/2,\ y_i+k_2{\cdot}h/2)$ отрезка P_iP^2 определяем направление α_3, касательной к интегральной кривой, проходящей через эту точку, и значение $k3 = \mathrm{tg}(\alpha_3)$. Проводим отрезок P_iP^3 по направлению α_3.
- В точке $P^3(x_i+h,\ y_i+k_3{\cdot}h)$ определяем направление α_4, касательной к интегральной кривой, проходящей через эту точку, и значение $k4 = \mathrm{tg}(\alpha_4)$.
- Полученные четыре тангенса усредняются весами 1/6, 2/6, 2/6, 1/6 по формуле $\frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$. По этому окончательному направлению мы проводим отрезок из точки $P_i(x_i, y_i)$ в точку $P_{i+1}(x_{i+1}, y_{i+1})$.

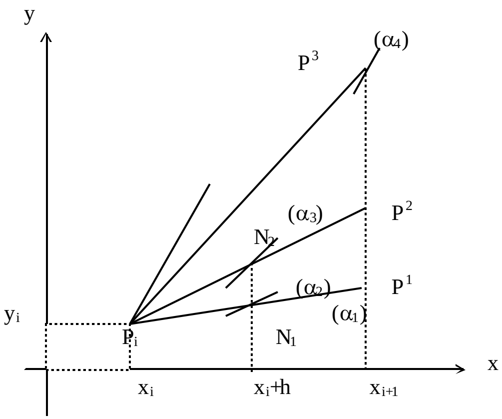


Рис. 8.3. Геометрический смысл вычисления методом Рунге-Кутта

Из геометрического смысла ясно, что данный метод намного точнее метода Эйлера и Эйлера-Коши.

8.4. Погрешности методов

При проведении вычислений возникают две погрешности:

- **локальная погрешность**, т.е. погрешность на одном шаге, возникающая за счет перемещения не по интегральной кривой, а по касательной к ней;
- **глобальная погрешность**, т.е. максимальная погрешность решения $|\,y_n-\varphi(x_n)\,|$.

Говорят, что численный метод имеет **p-й порядок точности** по шагу h, если выполняется условие

$$\max_{1 \le i \le n} \left| y_i - \varphi\left(x_i\right) \right| = Ch^p ,$$

где C – некоторая положительная постоянная, зависящая от правой части уравнения (8.1) и от рассматриваемого метода. **Р-й порядок точности означает**, что, например, при уменьшении шага в 10 раз, погрешность уменьшится примерно в 10^p раз.

Для метода Эйлера локальная погрешность имеет порядок точности h^2 (второй порядок точности). Эта величина соответствует h в той степени, в которой h стоит в первом отброшенном члене в формуле Тейлора (8.3). Глобальная погрешность и метод Эйлера имеют порядок точности h (первый порядок точности).

Соответственно для метода Эйлера-Коши локальная погрешность имеет порядок точности h^3, глобальная погрешность имеет порядок точности h^2.

Для метода Рунге-Кутта четвертого порядка локальная погрешность имеет порядок точности h^5, глобальная погрешность имеет порядок точности h^4.

На практике оценку погрешности решения, найденного с шагом $h/2$ в точке $x_i \in [a,b]$, производят с помощью **правила Рунге**

$$\left|\varphi(x_i) - y_i(h/2)\right| \approx \frac{\left|y_i(h) - y_{2i}(h/2)\right|}{2^p - 1}, \tag{8.7}$$

где p – порядок точности численного метода (для метода Эйлера $p = 1$, для метода Эйлера-Коши $p = 2$, для метода Рунге-Кутта четвертого порядка $p = 4$). Получение оценки результата по формуле (8.7) вынуждает проводить вычисления дважды: один раз с шагом h, другой – с шагом $h/2$.

Если по условию задачи требуется найти численное решение с точностью ε (предельная абсолютная погрешность), то в этом случае начальный шаг вычислений h устанавливают с помощью неравенства

$$H^p < \varepsilon \tag{8.8}$$

при p=2, 3, 4 соответственно для методов Эйлера, Эйлера–Коши, Рунге-Кутта четвертого порядка. Условием достижения заданной точности вычислений является выполнение неравенства

$$\frac{\left|y_i(h) - y_{2i}(h/2)\right|}{2^p - 1} < \varepsilon \tag{8.9}$$

при всех i и где p=2, 3, 4 соответственно для методов Эйлера, Эйлера–Коши, Рунге-Кутта четвертого порядка.

8.5. Численное решение систем дифференциальных уравнений первого порядка

Рассмотрим задачу Коши для системы из n дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ y_2' = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ .... \\ y_3' = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n), \end{cases} \qquad (8.10)$$

при начальных условиях

$$y_1(x_0) = y_{10},\ y_2(x_0) = y_{20}\ , ...,\ y_n(x_0) = y_{n0}\ . \qquad (8.11)$$

Если ввести векторные обозначения

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ ... \\ y_n(x) \end{pmatrix}, \qquad Y'(x) = \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \\ ... \\ y_n'(x) \end{pmatrix},$$

$$F(x,Y) = \begin{pmatrix} f_1(x,Y) \\ f_2(x,Y) \\ ... \\ f_n(x,Y) \end{pmatrix}, \qquad Y_0 = \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \\ ... \\ y_{n0} \end{pmatrix},$$

то задача Коши (8.10), (8.11) в векторной форме запишется так

$$Y' = F(x,Y), \quad Y(x_0) = Y_0. \qquad (8.12)$$

Численное решение задачи Коши (8.12) состоит в том, что на отрезке [a,b] требуется получить приближенные значения координат вектора $Y(x)$ в узловых точках x_i $(i=1, 2,\dots, m)$ с шагом $h=(b-a)/m$.

Обозначим вектор, доставляющий приближенное решение, через $Y_i \approx Y(x_i)$ $(i = 1, 2, ..., m)$, а его координаты – через y_{ki} $(k=1, 2,\dots, n);$ $I = 1, 2,\dots, m)$ так, что $y_{ki} \approx y_k(x_i)$.

Рассмотрим численное решение задачи Коши для системы дифференциальных уравнений с помощью **метода Рунге-Кутта четвертого порядка**. Векторная форма алгоритма метода для задачи (8.12) соответствует формулам (8.6) и имеет вид

$$
\begin{aligned}
&x_{i+1} = x_i + h \qquad (i = 1, 2, \dots, m),\\
&Y_{i+1} = Y_i + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4),\\
&K_1 = F(x_i, Y_i), \qquad K_2 = F\left(x_i + \frac{h}{2}, Y_i + \frac{h}{2}K_1\right),\\
&K_3 = F\left(x_i + \frac{h}{2}, Y_i + \frac{h}{2}K_2\right), \quad K_4 = F(x_i + h, Y_i + hK_3),
\end{aligned}
\tag{8.13}
$$

где векторы $K_j = \begin{pmatrix} k_{j1} \\ k_{j2} \\ \dots \\ k_{jn} \end{pmatrix}, \ (j = 1, 2, 3, 4)$.

Оценка погрешности метода на практике осуществляется по **правилу Рунге** аналогично (8.7). Пусть

$$
Y_i(h) = \begin{pmatrix} y_{1i}(h) \\ y_{2i}(h) \\ \dots \\ y_{ni}(h) \end{pmatrix}, \qquad Y_i(h/2) = \begin{pmatrix} y_{1i}(h) \\ y_{2i}(h) \\ \dots \\ y_{ni}(h) \end{pmatrix}
$$

- значения численного решения в точке x_i, полученные для шагов h и $h/2$ соответственно; тогда погрешность d_i в точке x_i для вычислений с шагом $h/2$ выражается приближенным равенством

$$
d_i(h/2) \approx \frac{\max\limits_{1 \le k \le n} \left\{ \left| y_{ki}(h) - y_{ki}(h/2) \right| \right\}}{2^p - 1}, \tag{8.14}
$$

где p – порядок точности численного метода (p=4).

8.6. Численное решение дифференциальных уравнений высших порядков

Задача Коши для дифференциального уравнения n-го порядка ставится так: найти решение уравнения

$$
y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \tag{8.15}
$$

при начальных условиях

$$
y(x_0) = y_0, \ y'(x_0) = y'_0, \ \dots \ , y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \tag{8.16}
$$

Задача Коши (8.15), (8.16) для дифференциального уравнения n-го порядка приводится к задаче Коши для систем n дифференциальных уравнений первого порядка (8.10), (8.11), к которой затем применяют численные методы решения систем.

Введем обозначения

$$z_1 = y, \ \ z_2 = z_1', \ \ z_3 = z_2', \ \ \dots \ , \ z_n = z_{n-1}'$$

и выразим функцию y(x) и ее производные до (n-1) порядка включительно через введенные функции:

$$y = z_1, \ \ y' = z_2, \ \ y'' = z_3, \ \ \dots \ , \ y^{n-1} = z_n .$$

Вместо задачи (8.15), (8.16) имеем задачу для системы уравнений

$$\begin{cases} z_1' = z_2 ; \\ z_2' = z_3; \\ \quad \dots \\ z_{n-1}' = z_n; \\ z_n' = f(x, z_1, z_2, \dots, z_n). \end{cases} \tag{8.17}$$

при начальных условиях

$$z_1(x_0) = y_0, \ z_2(x_0) = y_0' \ , \dots, \ z_n(x_0) = y_0^{(n-1)} . \tag{8.18}$$

Задания по теме 8

I. Найти решение задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка на равномерной сетке отрезка [a;b] один раз с шагом h=0,2, другой с шагом h=0,1 методами Эйлера, Эйлера-Коши и классическим методом Рунге-Кутта. Оценить погрешность численного решения по принципу Рунге. Сравнить численное решение с точным $\varphi(x)$. Результаты представить в виде таблицы.

1. $y' = \dfrac{1+xy}{x^2}, \quad y\big|_{x=1} = 0, \quad 1 \le x \le 2, \quad \varphi(x) = \dfrac{1}{2}\left(x - \dfrac{1}{x} \right).$

2. $y' = y - \dfrac{2x}{y}, \quad y\big|_{x=0} = 1, \quad 0 \le x \le 1, \quad \varphi(x) = \sqrt{2x+1} .$

3. $y' = x + \dfrac{3y}{x}, \quad y\big|_{x=1} = 0, \quad 1 \le x \le 2, \quad \varphi(x) = x^2(x-1) .$

4. $y' = xy, \quad y\big|_{x=0} = 1, \quad 0 \le x \le 1, \quad \varphi(x) = e^{x^2/2}.$

5. $y' = \dfrac{y^2 + xy}{x^2}, \quad y\big|_{x=1} = 1, \quad 1 \le x \le 2, \quad \varphi(x) = x/(1 - \ln x).$

6. $y' = \dfrac{1 - y + \ln x}{x}, \quad y\big|_{x=1} = 0, \quad 1 \le x \le 2, \quad \varphi(x) = \ln x.$

7. $y' = \dfrac{x + y}{x}, \quad y\big|_{x=1} = 0, \quad 1 \le x \le 2, \quad \varphi(x) = x \ln x.$

8. $y' + 2xy = xe^{-x^2}, \quad y\big|_{x=0} = 0, \quad 0 \le x \le 1, \quad \varphi(x) = \dfrac{1}{2} x^2 e^{-x^2}.$

9. $y' + y\cos x = \dfrac{1}{2}\sin 2x, \quad y\big|_{x=0} = 0, \quad 0 \le x \le 1, \quad \varphi(x) = \sin x + e^{-\sin x} - 1.$

10. $y' + y\,tgx = \sin 2x, \quad y\big|_{x=0} = -1, \quad 0 \le x \le 1, \quad \varphi(x) = (1 - 2\cos x)\cos x.$

11. $xy' - y^2 \ln x + y = 0, \quad y\big|_{x=1} = 1, \quad 1 \le x \le 2, \quad \varphi(x) = 1/(1 + \ln x).$

12. $xy' = x + y + xe^{y/x}, \quad y\big|_{x=1} = 0, \quad 1 \le x \le 1.9, \quad \varphi(x) = x \ln \dfrac{x}{2 - x}.$

13. $x^2 y' - y = x^2 e^{\frac{x-1}{x}}, \quad y\big|_{x=1} = 1, \quad 1 \le x \le 2, \quad \varphi(x) = e^{\frac{x^2-1}{x}}.$

14. $(x^2 + 1)y' + xy - 1 = 0, \quad y\big|_{x=0} = 0, \quad 0 \le x \le 1, \quad \varphi(x) = \dfrac{\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})}{\sqrt{x^2 + 1}}.$

15. $xy' - y = \dfrac{x}{\ln x}, \quad y\big|_{x=e} = 0, \quad e \le x \le e + 1, \quad \varphi(x) = x \ln \ln x.$

16. $xy' - y = x^2 \sin x, \quad y\big|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0, \quad \dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{\pi}{2} + 1, \quad \varphi(x) = \dfrac{\sin x - 1}{x} - \cos x.$

17. $y' + e^{x-y} = e^{x(1-x)} + 2x, \quad y\big|_{x=0} = 0, \quad 0 \le x \le 1, \quad \varphi(x) = x^2.$

18. $y' + e^{x-y} = e^{x(1-x)}, \quad y\big|_{x=0} = 0, \quad 0 \le x \le 1, \quad \varphi(x) = x^2.$

19. $xy' = y \ln y, \quad y\big|_{x=1} = e, \quad 1 \le x \le 2, \quad \varphi(x) = e^x.$

20. $xy' - y\ln(xy) - 1 = 0, \quad y\big|_{x=1} = e, \quad 1 \le x \le 2, \quad \varphi(x) = e^x / x.$

21. $xy' = x\sin\dfrac{y}{x} + y, \quad y\big|_{x=1} = \dfrac{\pi}{2}, \quad 1 \le x \le 2, \quad \varphi(x) = 2x\, arctg\, x.$

22. $x^2 y' = (x - 1)y, \quad y\big|_{x=1} = e, \quad 1 \le x \le 2, \quad \varphi(x) = xe^{1/x}.$

23. $(x^2+1)y'+xy=x(x^2+1), \quad y\big|_{x=\sqrt{2}}=1, \quad \sqrt{2}\le x\le\sqrt{2}+1, \quad \varphi(x)=\dfrac{x^2+1}{3}.$

24. $y'-\dfrac{y}{x\ln x}=x\ln x, \quad y\big|_{x=e}=\dfrac{e^2}{2}, \quad e\le x\le e+1, \quad \varphi(x)=\dfrac{x^2}{2}\ln x$.

25. $y'-y\,ctgx=\sin x, \quad y\big|_{x=\frac{\pi}{2}}=0, \quad \dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{2}+1, \quad \varphi(x)=(x-\dfrac{\pi}{2})\sin x$.

II. Задачу Коши для данного дифференциального уравнения второго порядка преобразовать к задаче Коши для системы дифференциальных уравнений первого порядка. Найти решение последней задачи методом Рунге–Кутта на сетке отрезка [a;b]. Вычисления провести дважды с шагами h, h/2, полагая h =0,2. Найти численное решение дифференциального уравнения и оценить его погрешность с помощью правила Рунге. Сравнить решение с известным аналитическим решением $\varphi(x)$. Результаты представить в виде таблицы.

1. $xy''-(x+1)y'-2(x-1)y=0, \quad y\big|_{x=1}=e^2, \quad y'\big|_{x=1}=2e^2, \quad 1\le x\le 2, \quad \varphi(x)=e^{2x}$.

2. $x^2y''+xy'-y=3x^2, \quad y\big|_{x=1}=1, \quad y'\big|_{x=1}=1, \quad 1\le x\le 2, \quad \varphi(x)=\dfrac{1}{2}(2x^2-x+\dfrac{1}{x})$.

3. $x^2y''-6y=0, \quad y\big|_{x=1}=1, \quad y'\big|_{x=1}=3, \quad 1\le x\le 2, \quad \varphi(x)=x^3$.

4. $x^2y''-12y=0, \quad y\big|_{x=1}=1, \quad y'\big|_{x=1}=4, \quad 1\le x\le 2, \quad \varphi(x)=x^4$.

5. $xy''+0.5y'=0, \quad y\big|_{x=1}=2, \quad y'\big|_{x=1}=1, \quad 1\le x\le 2, \quad \varphi(x)=2\sqrt{x}$.

6. $x^2y''+y/\ln x=xe^x(2+x\ln x), \quad y\big|_{x=2}=e^2\ln 2, \quad y'\big|_{x=2}=e^2(\ln 2+0.5),$ $2\le x\le 3, \quad \varphi(x)=e^x\ln x$.

7. $x^2y''+xy'=0, \quad y\big|_{x=1}=0, \quad y'\big|_{x=1}=1, \quad 1\le x\le 2, \quad \varphi(x)=\ln x$.

8. $x^2y''-xy'+y=3x^3, \quad y\big|_{x=1}=0.75, \quad y'\big|_{x=1}=2.25, \quad 1\le x\le 2, \quad \varphi(x)=0.75x^3$.

9. $x^2y''-4xy'+6y=x^4-x^2, \quad y\big|_{x=1}=0.5, \quad y'\big|_{x=1}=3, \quad 1\le x\le 2, \quad \varphi(x)=\dfrac{x^4}{2}+x^2\ln x$.

10. $x^2y''+(x^2-1)y'-y=0, \quad y\big|_{x=1}=\dfrac{1}{e}, \quad y'\big|_{x=1}=-\dfrac{1}{e}, \quad 1\le x\le 2, \quad \varphi(x)=e^{-x}$.

11. $x^2y''-(x^2-2x)y'-(3x+2)y=0, \quad y\big|_{x=1}=e, \quad y'\big|_{x=1}=2e, \quad 1\le x\le 2, \quad \varphi(x)=xe^x$.

12. $x^2y''+x^3y'+(x^2-2)y=0, \quad y\big|_{x=1}=1, \quad y'\big|_{x=1}=-1, \quad 1\le x\le 2, \quad \varphi(x)=\dfrac{1}{x}$.

13. $(x^2-1)y''-2xy'+2y=0, \quad y\big|_{x=2}=5, \quad y'\big|_{x=2}=4, \quad 2\le x\le 3, \quad \varphi(x)=x^2+1$.

14. $x(x+1)y''+(3x+2)y'+y=0,\quad y\big|_{x=1}=1,\quad y'\big|_{x=1}=-1,\ 1\le x\le 2,\quad \varphi(x)=\dfrac{1}{x}\cdot$

15. $y''-2(2x^2+1)y=0,\quad y\big|_{x=0}=1,\quad y'\big|_{x=0}=0,\quad 0\le x\le 1,\quad \varphi(x)=e^{x^2}.$

16. $y''+y'tgx-y\cos^2 x=0,\quad y\big|_{x=0}=1,\quad y'\big|_{x=0}=-1,\ 0\le x\le 1,\quad \varphi(x)=e^{-\sin x}.$

17. $y''+4xy'+(4x^2+2)y=0,\quad y\big|_{x=0}=0,\quad y'\big|_{x=0}=1,\ 0\le x\le 1,\quad \varphi(x)=xe^{x^2}.$

18. $y''+2y'tgx+3y=0,\quad y\big|_{x=0}=1,\quad y'\big|_{x=0}=0,\quad 0\le x\le 1,\quad \varphi(x)=\cos^3 x\cdot$

19. $x(x+1)y''-(x-1)y'+y=0,\quad y\big|_{x=1}=y'\big|_{x=1}=-4,\ 1\le x\le 2,\quad \varphi(x)=(x-1)\ln|x|-4x\cdot$

20. $y''+4y=\cos^3 x,\quad y\big|_{x=0}=0.2,\quad y'\big|_{x=0}=0,\quad 0\le x\le 1,\quad \varphi(x)=0.25(\cos x-\dfrac{\cos 3x}{5})\cdot$

21. $y''x^2\ln x-xy'+y=0,\quad y\big|_{x=0}=1,\quad y'\big|_{x=1}=1,\ 1\le x\le 2,\quad \varphi(x)=\ln x+1\cdot$

22. $(e^x+1)y''-2y'-e^x y=0,\quad y\big|_{x=0}=0,\quad y'\big|_{x=0}=1,\ 0\le x\le 1,\quad \varphi(x)=e^x-1\cdot$

23. $\sin yy''-2(y')^2\cos y=0,\quad y\big|_{x=0}=\dfrac{\pi}{4},\quad y'\big|_{x=0}=\dfrac{1}{2},\ 0\le x\le 1,\quad \varphi(x)=arcctg(1-x)\cdot$

24. $(x-2)^2y''-3(x-2)y'+4y=x+2,\quad y\big|_{x=3}=3,\quad y'\big|_{x=3}=3,\ 3\le x\le 4,\quad \varphi(x)=(x-2)^2+x-1\cdot$

25. $y''-2y=2x^2e^{x^2},\quad y\big|_{x=0}=1,\quad y'\big|_{x=0}=0,\quad 0\le x\le 1,\quad \varphi(x)=e^{x^2}.$

Тема 9. ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ

В достаточно общем виде математическую задачу оптимизации можно сформулировать следующим образом: минимизировать (максимизировать) целевую функцию с учетом ограничений на управляемые переменные.

Под минимизацией (максимизацией) функции n переменных $f(x)=f(x_1, \ldots, x_n)$ на заданном множестве X n-мерного векторного пространства R^n понимается определение хотя бы одной из точек минимума (максимума) этой функции на множестве X, а также, если это необходимо, и минимального (максимального) на X значения $f(x)$.

При записи математических задач оптимизации в общем виде обычно используется следующая символика:

$$f(x) \to \min\ (\max),\ x \in X, \tag{9.1}$$

где $f(x)$ - целевая функция, а X - допустимое множество, заданное ограничениями на управляемые переменные.

Множество X выражает ограничения задачи. Например, во многих задачах требуется, чтобы переменные были неотрицательны:

$X = \{x : x_i \geq 0\}$. Если X совпадает с R^n, то говорят о задаче *безусловной оптимизации*, в противном случае говорят об *условной оптимизации*.

Определим также следующие два термина. Будем говорить, что $f(x)$ имеет в точке $x^* \in X$ глобальный минимум, если $f(x) \geq f(x^*)$ для любого $x \in X$. Аналогично $f(x)$ имеет в точке $x^* \in X$ локальный минимум, если $f(x) \geq f(x^*)$ для всех $x \in X \cap D(x^*)$, где $D(x^*)$ – некоторая окрестность точки x^*.

Если локальный минимум достигается во внутренней точке x^* области X и функция $f(x)$ дифференцируема в этой точке, то x^* является критической точкой, т.е. выполняются условия

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*) = 0, \ i=1,\ldots,n. \tag{9.2}$$

Обратное неверно: критическая точка не обязана быть экстремальной. Например, в одномерном случае для функции точка x=0 является критической, но не является точкой экстремума. В двумерном случае для функции критической является точка (0,0).

Если же локальный минимум достигается на границе области ***X***, то точка минимума не обязана быть критической. Например, функция $f(x)=x$ достигает на отрезке [1,2] минимум в точке $x^*=1$, но $f'(1)=1\neq 0$.

9.1. Численные методы решения задач одномерной оптимизации

Задачи одномерной минимизации представляют собой простейшую математическую модель оптимизации, в которой целевая функция зависит от одной переменной, а допустимым множеством является отрезок вещественной оси

$$f(x) \to \min, \ x \in [a, b].$$

Максимизация целевой функции эквивалента минимизации ($f(x) \to \max$) эквивалентна минимизации противоположной величины ($-f(x) \to \min$), поэтому, не умаляя общности, можно рассматривать только задачи минимизации.

К математическим задачам одномерной минимизации приводят прикладные задачи оптимизации с одной управляемой переменной. Кроме того, необходимость в минимизации функций одной переменной возникает при реализации некоторых методов решения более сложных задач оптимизации.

Для решения задачи минимизации функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ на практике, как правило, применяют приближенные методы. Они позволяют найти решения этой задачи с необходимой точностью в результате определения конечного числа значений функции $f(x)$ и ее производных в некоторых точках отрезка $[a, b]$. Методы, использующие только значения функции и не требующие вычисления ее производных, называются прямыми методами минимизации.

Большим достоинством прямых методов является то, что от целевой функции не требуется дифференцируемости и, более того, она может быть не задана в аналитическом виде. Единственное, на чем основаны алгоритмы прямых методов минимизации, это возможность определения значений f(x) в заданных точках.

Рассмотрим наиболее распространенные на практике прямые методы поиска точки минимума. Самым слабым требованием на функцию f(x), позволяющим использовать эти методы, является ее унимодальность. Поэтому далее будем считать функцию f(x) унимодальной на отрезке [a, b].

Определение. Пусть функция f(x) определена на отрезке $[a,b]$, строго убывает при $x<x^*$ ($x^* \in[a,b]$) и строго возрастает при $x>x^*$. Такая функция называется унимодальной на отрезке $[a,b]$ и имеет на $[a,b]$ единственный минимум. Заметим, что унимодальная функция не обязана быть непрерывной.

9.1.1. Метод половинного деления

Применение метода для отыскания точек x* локального минимума функции f(x) включает два этапа:

1) отыскание промежутков унимодальности функции, т.е. нахождение отрезков, которым принадлежит одна точка локального минимума;
2) вычисление значения x*, принадлежащего выбранному промежутку, с заданной точностью. Последнее предполагает сужения отрезка унимодальности функции $[a,b]$, содержащего точку x*, до размеров, не превышающих заданную точность ε ($b-a\le\varepsilon$).

Для сужения отрезка унимодальности $[a,b]$ используем точки x_1 и x_2 , расположенные симметрично относительно середины отрезка $[a,b]$ (рис. 9.1).

$$x_{1,2}=\frac{a+b}{2}\mp k\frac{b-a}{2},$$

где k - число гораздо меньше 1 (k<<1), тогда точки $x_1 < x_2$ принадлежат отрезку $[a,b]$.

Далее получим отрезок меньшей длины $[a_1,b_1]$ в соответствии со схемой.

I. Если $y_1 = f(x_1) < y_2 = f(x_2),$ то полагаем $a_1 = a,\ b_1 = x_2$, длина отрезка $[a_1,b_1]$ равна $b_1 - a_1 = \frac{1+k}{2}(b-a)$.

II. Если $y_1 = f(x_1) > y_2 = f(x_2),$ то полагаем $a_1 = x_1,\ b_1 = b$, длина отрезка $[a_1,b_1]$ равна $b_1 - a_1 = \frac{1+k}{2}(b-a)$.

III. Если $y_1 = f(x_1) = y_2 = f(x_2),$ то полагаем $a_1 = x_1,\ b_1 = x_2$, длина отрезка $[a_1,b_1]$ равна $b_1 - a_1 = k(b-a)$.

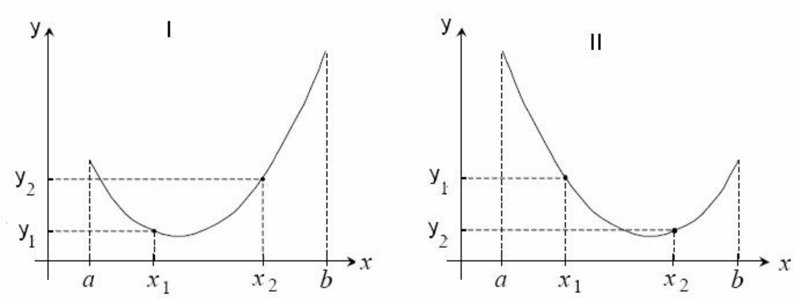


Рис. 9.1. Отрезки унимодальности

Затем в новом суженном отрезке $[a_1,b_1]$ снова выберем точки x_1 и x_2.

$$x_{1,2} = \frac{a_1 + b_1}{2} \mp k\frac{b_1 - a_1}{2}.$$

Проводя вычисления, аналогичные проделанным ранее, получаем отрезок $[a_2,b_2]$, длина которого не более

$$b_2 - a_2 = \frac{1+k}{2}(b_1 - a_2) = (1+k)^2\frac{b-a}{2^2},$$

и т.д.

В результате приходим к последовательности таких вложенных отрезков $[a,b]$, $[a_1,b_1]$,…, $[a_n,b_n]$, …, что точка локального минимума x* функции f(x) принадлежит каждому из них и является общим пределом последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$.

Отсюда получаем приближенные равенства

$$x* \approx a_n \approx b_n,$$

точность которых на n-м шаге вычислений можно оценить неравенством

$$0 \le x* - a_n \le b_n - a_n \le (1+k)^n\frac{b-a}{2^n} < \varepsilon.$$

9.1.2. Метод сканирования

Пусть точка x_0 промежутка унимодальности функции f(x) является исходной для поиска точки x* с точностью ε.

Обозначим через h произвольное приращение аргумента x и, сделав один шаг от точки x_0, получим новое значение аргумента $x_1 = x_0 + h$.

Сравним значения функции $y_0 = f(x_0)$ *и* $y_1 = f(x_1)$. Возможны три варианта:

I. $y_1 < y_0$ - произошло уменьшение значения функции. Тогда сделаем еще один шаг h от точки x_1 к точке $x_2 = x_1 + h$. Если окажется, что $y_2 < y_1$, то снова сделаем шаг h от точки x_2 к точке $x_3 = x_2 + h$, и т.д. На некотором k-м шаге произойдет увеличение значений функции, т.е. $y_k > y_{k-1}$ и при этом $|h| < \varepsilon$, то примем $x^* \approx x_{k-1}$ с погрешностью $|h|$. В противном случае полагаем, что точка x_k является исходной $\tilde{x}_0$ для продолжения расчетов по схеме II.

II. $y_1 > y_0$ - значение функции возросло. В этом случае полагаем, что начальной точкой вычислений является точка $\tilde{x}_0$, а шагом вычисления становится величина $\tilde{h} = -\dfrac{h}{r}$, где r – некоторое целое положительное число, r >2. Далее производим вычисления по схеме I или II, вплоть до достижения заданной точности вычисления.

III. $y_1 = y_0$. В этом маловероятном случае либо принимаем $x^* \approx (x_0 + x_1)/2$ при достижении заданной точности $|h| < \varepsilon$, либо следуем схеме II.

Поиск минимума функции одной переменной указанным методом представляет собой колебательный процесс, совершающийся около точки x* локального минимума функции f(x) с непрерывно уменьшающейся амплитудой.

Замечания

1) Для использования метода сканирования необязательно находить промежуток унимодальности целевой функции. Задавая различные начальные значения x_0 и начальный шаг h, с помощью метода сканирования можно найти различные точки локального минимума, если целевая функция имеет не единственный минимум.

2) Если предварительно получен отрезок унимодальности $[a,b]$, а шаг h – таким, чтобы результаты вычислений принадлежали отрезку $[a,b]$.

3) Для целевой функции f(x), имеющей непрерывные производные до второго порядка включительно, начальное приращение аргумента h в точке x_0 можно вычислять по формуле $h = -f'(x_0)/ f''(x_0)$.

9.2. Численные методы поиска минимума функции нескольких переменных. Методы покоординатного и наискорейшего спуска

Основная идея методов спуска состоит в том, что при заданном начальном приближении определяется направление, в котором функция убывает, и производится перемещение в этом направлении. Если величина шага перемещения выбрана не очень большой, то значение функции уменьшится.

Алгоритм любого метода спуска дается формулой

$$x^{k+1} = x^k + h_k \cdot v^k, \tag{9.3}$$

где x^k - вектор, k-е приближение к решению;

v^k - вектор, приращения вектора x^k;

h_k - скалярная величина, длина шага в направлении v^k.

Величина h_k определяется решением задачи одномерной минимизации

$$f(x^k + h \cdot v^k) \to \min_h, \quad h \in R. \tag{9.4}$$

В методе наискорейшего градиентного спуска (или наискорейшего спуска) вектор v^k полагается равным вектору, противоположному градиенту функции f в точке x^k и задающему направление наискорейшего убывания функции f в точке x^k.

$$v^k = -grad\ f(x^k) = -\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^k),\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(x^k)\right).$$

В методе покоординатного спуска в качестве v^k выбираются векторы единичной длины, параллельные поочередно каждой из осей координат (например, в двумерном случае $v^{2k} = (1, 0), v^{2k+1} = (0, 1), \ \ k = 0,1,2,\ldots)$.

Таким образом, задача многомерной минимизации сводится на каждом шаге к решению задачи (9.4). Одномерная минимизация по формуле (9.4) проводится, как правило, методом половинного деления с учетом следующего замечания. Задавшись некоторым начальным значением h_0 на каждом шаге мы вычисляем значения функции $f_j(x^k + h_0 \cdot j \cdot v^k),\ \ j = 0, 1, 2, \ldots$, до тех пор, пока не выполнится условие $f_{j+1} > f_j$. После этого вызываем процедуру метода половинного деления, в которой минимизируется функция $f(x^k + h \cdot v^k)$ по переменной h на отрезке $\left[h_0 \cdot (j-1); h_0 \cdot (j+1)\right]$.

В методе покоординатного спуска неизвестно, убывает или возрастает функция в направлении v^k. Поэтому здесь при выполнении на первом шаге условия $f_1 > f_0$ следует изменить направление на противоположное или, что эквивалентно, изменить знак h_0 и повторить алгоритм локализации.

Метод наискорейшего спуска работает, как правило, быстрее метода покоординатного спуска, но и требует вычисления частных производных.

Задания по теме 9

I. Для заданной целевой функции *f(x)* найти промежуток $X \subset R$, на котором она унимодальна. Найти точное решение задачи одномерной минимизации $f(x) \to min,\ x \in X\ (X \subset R)$. Найти приближенное решение этой задачи с точностью $\varepsilon = 10^{-2}$: а) методом половинного деления; б) методом сканирования.

1. $\dfrac{x^3}{3} + x^2$. 2. $x^3 + 6x^2 + 9x$. 3. $\dfrac{x^2}{x-2}$. 4. $x^3 + \dfrac{x^4}{4}$.

5. $\dfrac{x^4}{4} - 2x^2 \quad (x > 0)$. 6. $2x - 3\sqrt[3]{x^2}$. 7. $\dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}$.

8. $xe^{-\frac{x^2}{2}}$. 9. $x - 2\ln x$. 10. $x^{2/3}(x-5)$. 11. $\dfrac{x^2}{2-x}$.

12 $\dfrac{x^4}{4} - 2x^2 \quad (x < 0)$. 13. $1 + \sqrt[3]{(x-1)^2}$. 14. $\dfrac{x^2-3}{x+2}$.

15. $3x^4 - 8x^3 + 6x^2$. 16. $-\dfrac{\ln x}{x}$. 17. $\dfrac{3 - x^2}{x + 2}$.

18. $\dfrac{x^2 + 1}{x} \quad (x > 0)$. 19. $(1 - x^2)(x^3 - 1)$. 20. $\dfrac{(4 - x)^3}{9(2 - x)}$.

21. $x\sqrt{2 - x^2}$. 22. $(1 - x^2)(1 - x^3)$. 23. $-x - 2\sqrt{-x}$.

24. $(x - 2)^{2/3}(2x + 1)$. 25. $(x - 5)e^x$.

II. Найти приближенное решение задачи $f(X) \to min$, $X \in R^2$, где вид целевой функции $f(X)$ определен ниже. Использовать: а) метод покоординатного спуска; б) метод скорейшего спуска.

1. $f(x) = x_1^3 + 8x_2^3 - 6x_1 x_2 + 1$.
2. $f(x) = e^{0.5x_1}(x_1 + x_2^2)$.
3. $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2 - 3x_1 - 6x_2$.
4. $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + 4(x_2 - x_1)$.
5. $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2 + x_1 - x_2 + 1$.
6. $f(x) = x_1^3 + x_2^2 - 6x_1 x_2 - 39x_1 + 18x_2 + 20$.
7. $f(x) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 + (x_1 - x_2 - 4)^2$.
8. $f(x) = 2x_1^2 + x_2^3 - 4x_1 - 3x_2 + 6$.
9. $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2 - 3x_1 - 6x_2$.
10. $f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 4\sqrt{x_1 x_2} - 2x_1 - 2x_2 + 8$.
11. $f(x) = 2x_1^3 - x_1 x_2^2 + 5x_1^2 + x_2^2$.
12. $f(x) = 2x_1^2 + x_2^2 + 4(x_2 - x_1) + 6$.
13. $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2 - 3x_1 - 6x_2$.
14. $f(x) = 8x_1^2 + 4x_1 x_2 + 2x_2^2 + 4x_1 - 4x_2$.
15. $f(x) = x_1 x_2 + \dfrac{50}{x_1} + \dfrac{20}{x_2}$.
16. $f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2(x_1 + 4x_2) + 5$.
17. $f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 2\ln x_1 - 18\ln x_2$.

18. $f(x) = x_1^3 + x_2^3 - 15x_1 x_2$.

19. $f(x) = (x_1^2 + x_2^2)^{2/3} - 4$.

20. $f(x) = (x_1^2 + x_2^2)(e^{-(x_1^2 + x_2^2)} - 1)$.

21. $f(x) = x_1^4 - 2x_1^2 + 5x_2^2 - 2x_1^2 x_2 - x_2 + 2 \quad (x_1 > 0)$.

22. $f(x) = x_1^4 - 2x_1^2 + 5x_2^2 - 2x_1^2 x_2 - 2x_2 + 2 \quad (x_1 < 0)$.

23. $f(x) = x_1^4 + 2x_2^2 - 2x_1^2 x_2 - 2x_2 + 1 \quad (x_1 > 0)$.

24. $f(x) = x_1^4 + 2x_2^2 - 2x_1^2 x_2 - 2x_2 + 1 \quad (x_1 < 0)$.

25. $f(x) = x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_1 - 6x_2 + 7$.

Библиографический список

1. Бахвалов И.В., Н.П.Жидков, Г.М.Кобельков. Численные методы: Учеб. пособие. – 8-е изд.- М.: -Физматлит, Невский диалект и др., 2001.

2. Бахвалов Н.С., А.В.Лапин и др. Численные методы в задачах и упражнениях: Учеб. пособие. - М.: Высшая школа, 2000.

3. Ракитин В.И., Первушин В.Е. Практическое руководство по методам вычислений с приложением программ для персональных компьютеров: Учеб. пособие. - М.: Высшая школа, 1998.

4. Емченко О.В. и др. Численные методы: Учеб. пособие. – Магнитогорск: МГТУ, 1999.

5. Заварыкин В.М. и др. Численные методы: Учеб. пособие. - М.: Просвещение, 1991.

6. Киреев В.И., Пантелеев А.В. Численные методы в примерах и задачах: Учеб. пособие. – М.: Изд-во МАИ, 2000.

7. Плис А.И., Сливина Н.А. Mathcad 2000: Математический практикум для экономистов и инженеров: Учеб. пособие. - М.: Финансы и статистика, 2000.

8. Самарский А.А. и др. Задачи и упражнения по численным методам: Учеб. пособие. – М.: Факториал УРСС, 2000.

9. Турчак Л.И. Основы численных методов: Учеб. пособие / Под ред. В.В.Щенникова. - М.: Наука, 1987.

Св.темплан 2009, поз.78

Заявки на книгу присылать по адресу:
455000, Магнитогорск, пр. Ленина, 38,
ГОУ ВПО «МГТУ», кафедра ММ в Э
Тел.: (3519) 29-85-83; факс: 23-57-59

Татьяна Александровна Иванова

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Учебное пособие

Редактор Т.А.Колесникова
Оператор компьютерной верстки Е.А.Назарова
Подписано в печать 20.03.09. Формат 60x84 1/16. Бумага тип.№ 1.
Плоская печать. Усл.печ.л.7,75. Уч.-изд.л.8,99. Тираж 150 экз.
Заказ 198.

Издательский центр ГОУ ВПО «МГТУ»
455000, Магнитогорск, пр. Ленина, 38
Полиграфический участок ГОУ ВПО «МГТУ»