Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова»

З.С. Акманова

МНОГОМЕРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

*Утверждено Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия*

Магнитогорск
2013

УДК 519.2

Рецензенты:

Доцент кафедры машиностроительных и металлургических технологий,
ФГБОУ ВПО «Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова»
И.Г. Шубин

Доцент кафедры математики,
ФГБОУ ВПО «Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова»
Е.М. Маленко

Автор: Акманова З.С.
Многомерные случайные величины [Электронный ресурс] : учебное пособие / Зоя Сергеевна Акманова; ФГБОУ ВПО «Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова». – Электрон. текстовые дан. (33,1 Мб). – Магнитогорск : ФГБОУ ВПО «МГТУ», 2013. – 1 электрон. опт. диск (CD-R). – Систем. требования : IBM PC, любой, более I GHz ; 512 Мб RAM ; 10 Мб HDD ; MS Windows XP и выше ; Adobe Reader 8.0 и выше ; CD/DVD-ROM дисковод ; мышь. – Загл. с титул. экрана.

В учебном пособии излагаемые основы теории многомерных случайных величин сопровождаются большим количеством задач (в том числе технических), приводимых с решениями и для самостоятельной работы. Пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлению «Металлургия».

УДК 519.2

Содержание

Основные понятия

Очень часто результат испытания характеризуется не одной случайной величиной, а некоторой системой случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$, которую называют многомерной (n-мерной) случайной величиной или случайным вектором $Z = (X_1, X_2, ..., X_n)$, где X_i - составляющие случайной системы или составляющие случайного вектора.

Приведем примеры многомерных случайных величин:

1. Успеваемость выпускника вуза характеризуется системой n случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ - оценками по различным дисциплинам, проставленными в приложении к диплому.
2. Билет, например, в кино, можно охарактеризовать двумерной случайной величиной: ряд $-X$ и место $-Y$.
3. Дата рождения характеризуется системой трех случайных величин: день $-X$, месяц $-Y$, год $-Z$.
4. Погода в данном месте в определенное время суток может быть охарактеризована системой случайных величин: X_1 − температура; X_2 − влажность; X_3 − давление; X_4 − скорость ветра и т.п.
5. Месторасположение самолета при полете характеризуется тремя декартовыми координатами (X, Y, Z) или тремя сферическими координатами (R, Φ, Θ).

Случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$, входящие в систему, могут быть как *дискретными* (см. выше примеры 1, 2, 3), так и *непрерывными* (пример 4, 5). Таким образом, различают дискретные многомерные величины, когда составляющие дискретны, и непрерывные, когда составляющие непрерывны.

Геометрически двумерную (X, Y) случайную величину можно изобразить случайной точкой (X, Y) или случайным вектором $Z = (X, Y)$ плоскости Oxy (Рисунок 1 а, в), а трехмерную случайную величину (X, Y, Z) можно изобразить случайной точкой (X, Y, Z) или случайным вектором $U = (X, Y, Z)$ соответственно трехмерного пространства $Oxyz$ (Рисунок 1 б, г). В случае n-мерного пространства ($n > 3$) также говорят о случайной точке или случайном векторе этого пространства, хотя геометрическая интерпретация в этом случае теряет наглядность.

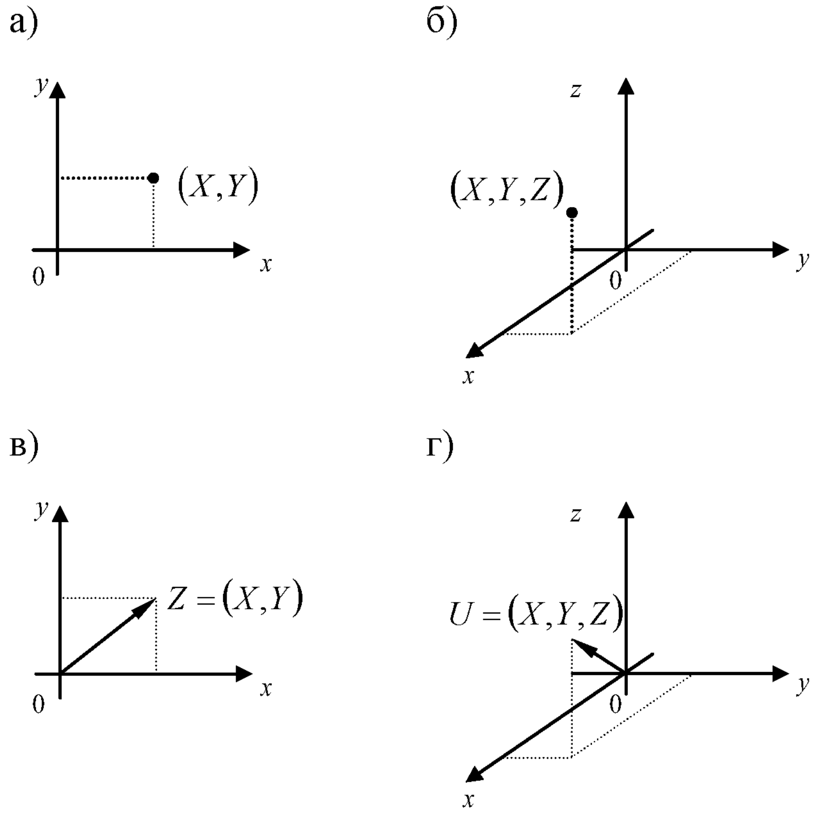


Рисунок 1.

Законы распределения многомерной случайной величины

Наиболее полным, исчерпывающим описанием многомерной случайной величины является *закон ее распределения.*

Определение 1. *Всякое соответствие, которое может быть установлено между всевозможными сочетаниями значений каждой из составляющих случайной системы $Z=(X_1, X_2, ..., X_n)$, и соответствующими этим сочетаниям вероятностями называется законом распределения этой системы.*

Определение 2. *Всякое соответствие, которое может быть установлено между всевозможными парами значений (x_i, y_j) двумерной случайной системы $Z=(X,Y)$, и их вероятностями $p_{ij}=P(x_i, y_j)$ называется законом распределения этой системы.*

Для *двумерной дискретной случайной системы* $Z=(X,Y)$ ее закон распределения можно представить в виде *таблицы (матрицы) распределения* (Таблица 1). Данная таблица содержит всевозможные сочетания значений каждой из составляющих X и Y, т.е. всевозможные пары значений (x_i, y_j) двумерной случайной системы $Z=(X,Y)$ и соответствующие им вероятности $p_{ij}=P(x_i, y_j)=P(X=x_i, Y=y_j)$, где $i=1,2,...,n$, $j=1,2,...,m$.

Таблица 1.

X \ Y	y_1	y_2	$\ldots$	y_m	Σ
x_1	p_{11}	p_{12}	$\ldots$	p_{1m}	$p_{1.}$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\ldots$	p_{2m}	$p_{2.}$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
x_n	p_{n1}	p_{n2}	$\ldots$	p_{nm}	$p_{n\bullet}$
Σ	$p_{.1}$	$p_{.2}$	$\ldots$	$p_{\bullet m}$	1

В каждой клетке (i, j) таблицы распределения (Таблица 1) располагаются вероятности произведения событий $X=x_i$ и $Y=y_i$, где $i=1,2,...,n$, $j=1,2,...,m$, состоящие в том, что случайная величина X примет значение x_i, а случайная величина Y - значение y_i. Так как эти события несовместны и единственно возможны, т.е. образуют полную группу, то сумма их вероятностей равна единице, т.е.

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1.$$

Составляющие многомерной случайной величины - случайные величины, поэтому могут быть описаны законом распределения каждая своим.

Так, итоговые столбец или строка Таблица 1 задают распределения составляющих X и Y двумерной дискретной случайной системы $Z = (X, Y)$(Таблица 2 и Таблица 3).

Таблица 2.

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n
P	$P(x_1) = p_{1.}$	$P(x_2) = p_{2.}$	$\dots$	$P(x_n) = p_{n\bullet}$

Таблица 3.

Y	y_1	y_2	$\dots$	y_m
P	$P(y_1) = p_{.1}$	$P(y_2) = p_{.2}$	$\dots$	$P(y_m) = p_{\bullet m}$

Чтобы по таблице распределения (Таблица 1) найти вероятность того, что одномерная случайная величина примет определенное значение, надо просуммировать вероятности p_{ij} из соответствующей этому значению строки (столбца) данной таблицы:

$$P(X = x_i) = p_{i\bullet} = \sum_{j=1}^{m} p_{ij}\,, \qquad P(Y = y_j) = p_{\bullet j} = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}\,.$$

Замечание. Обратная задача определения закона распределения двумерной случайной величины по известным законам соответствующих одномерных величин решается только для независимых случайных величин.

Определение 3. *Две случайные величины называются независимыми, если закон распределения одной из них не зависит от того, какие возможные значения приняла другая случайная величина, т.е. изменение одной случайной величины не влечет изменение закона распределения другой. В противном случае случайные величины* *называются зависимыми.*

Определение 4. *Система случайных величин называется взаимно независимой, если законы распределения любого числа составляющих не зависят от того, какие возможные значения приняли остальные составляющие.*

Задача 1.

Станок-автомат штампует кольца. Контролируемые размеры X – толщина кольца, Y – диаметр отверстия. Устанавливается, находятся ли размеры кольца в поле допуска или выходят за его пределы, т.е. рассматривается система случайных величин $Z = (X, Y)$.

Известно, что около 5% всех колец брак, причем 3% обусловлены дефектом отверстия, 1% - дефектом толщины и 1% - дефектом обоих признаков.

Описать закон распределения случайной двумерной системы и задать законы распределения составляющих.

Решение:

Пусть «0» означает, что та или иная случайная величина не вышла за пределы поля допуска, «1» означает, что случайная величина находится за пределами поля допуска. Тогда $X = \{0,1\}$, $Y = \{0,1\}$

Значения системы (X,Y) – это всевозможные пары значений составляющих

$(X,Y) = \{(0,0); (0,1); (1;0); (1;1)\}$.

$P(X = 0,\ Y = 0) = p_{11} = 0{,}95$, т.к. 95% колец соответствуют технологическим условиям.

$P(X = 0,\ Y = 1) = p_{12} = 0{,}03$, т.к. 3% обусловлено дефектом отверстия.

$P(X = 1,\ Y = 0) = p_{21} = 0{,}01$, т.к. 1% обусловлен дефектом толщины.

$P(X = 1,\ Y = 1) = p_{22} = 0{,}01$, т.к. 1% обусловлен дефектом как толщины, так и дефектом отверстия.

Таким образом, закон распределения системы (X,Y):

X \ Y	0	1	Σ
0	0,95	0,03	0,98
1	0,01	0,01	0,02

Σ	0,96	0,04	1

Проверка: $0{,}95+0{,}03+0{,}01+0{,}01=1$.

Законы составляющих:

X	0	1
p_i	0,98	0,02

Y	0	1
p_j	0,96	0,04

$P(X=x_1)=p_{11}+p_{12}=0{,}98=p_{1\bullet}$ – вероятность нахождения толщины кольца в поле допуска, в то время как относительно качества отверстия ничего не говорится.

$P(Y=y_1)=p_{11}+p_{21}=0{,}96=p_{\bullet 1}$ – вероятность нахождения диаметра отверстия.

В решенной задаче случайные величины: толщина (X) и размер отверстия (Y) не являются взаимно независимыми:

$p_{1\bullet}\cdot p_{\bullet 1}=0{,}98\cdot 0{,}96=0{,}94\neq p_{11}=0{,}95$.

Замечание. Дискретные составляющие X и Y случайной двумерной величины (X,Y) являются независимыми, если для любой пары значений $(x_i;y_j)$ выполняется равенство

$$p_{ij}=p_{i\bullet}\cdot p_{\bullet j}.$$

Задача 2.

Задано распределение вероятностей дискретной двумерной случайной величины:

X \ Y	4	5
3	0,17	0,10
10	0,13	0,30
12	0,25	0,05

Найти:1) законы распределения составляющих X и Y;

2) вероятность $P(X>Y)$.

<u>Решение:</u>

Сначала составим ряд распределения составляющей X:

$p_1 = P(X=3) = \sum_{j=1}^{2} p(x_1; y_j) = 0{,}17 + 0{,}10 = 0{,}27$; $p_2 = P(X=10) = \sum_{j=1}^{2} p(x_2; y_j) = 0{,}13 + 0{,}30 = 0{,}43$;

$p_3 = P(X=12) = \sum_{j=1}^{2} p(x_3; y_j) = 0{,}25 + 0{,}05 = 0{,}30$. Контроль: $\sum_{i=1}^{3} p_i = 0{,}27 + 0{,}43 + 0{,}30 = 1$.

Напишем закон распределения составляющей X:

X	3	10	12
p_i	0,27	0,43	0,30

Аналогично найдем распределение составляющей Y:

$$p_1 = P(Y=4) = \sum_{i=1}^{3} p(x_i; y_1) = 0{,}17 + 0{,}13 + 0{,}25 = 0{,}55;$$

$$p_2 = P(Y=5) = \sum_{i=1}^{3} p(x_i; y_2) = 0{,}10 + 0{,}30 + 0{,}05 = 0{,}45;$$

Контроль: $\sum_{j=1}^{2} p_j = 0{,}55 + 0{,}45 = 1$.

Y	4	5
p_j	0,55	0,45

$$P(X>Y) = P(X=10, Y=4) + P(X=10, Y=4) +$$
$$+ P(X=12, Y=4) + P(X=12, Y=5) = 0{,}13 + 0{,}30 + 0{,}25 + 0{,}05 = 0{,}73.$$

Задача 3.

Имеется урна с 3 белыми и 3 черными шарами. Производится последовательное извлечение шаров (без возвращения) до первого появления белого шара; X – число извлеченных шаров в результате данных извлечений. Далее извлечение шаров продолжается до первого появления черного шара; Y – число шаров, извлеченных во второй серии.

Требуется составить закон распределения (X,Y).

Решение:

X – число извлеченных шаров до появления белого шара (1-ая серия). Значит, возможные значения X: 1, 2, 3, 4.

Y – число извлеченных шаров до появления черного шара (2-ая серия). Значит, возможные значения Y: 1, 2, 3.

Значения системы (X,Y) – это всевозможные пары значений составляющих: $(1{,}1)$; $(1{,}2)$; $(1{,}3)$; $(2{,}1)$; $(2{,}2)$; $(2{,}3)$; $(3{,}1)$; $(3{,}2)$; $(3{,}3)$; $(4{,}1)$; $(4{,}2)$; $(4{,}3)$.

Например, пара $(1{,}1)$ означает, что при первой серии извлечения сразу появился белый шар, а во второй сразу – черный шар. Пара $(3{,}2)$ означает, что в первой серии пришлось сделать 3 извлечения: черный шар, черный шар, белый шар, а во второй серии 2 извлечения: белый шар, черный шар. Значения системы $(4{,}2)$ и $(4{,}3)$ – это невозможные события (пояснить самостоятельно).

Соответствующие этим парам вероятности вычисляем, пользуясь теоремой умножения для зависимых событий:

$$p_{11} = P(X=1,\ Y=1) = \frac{3}{6}\cdot\frac{3}{5} = \frac{6}{20};\ p_{12} = P(X=1, Y=2) = \frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4} = \frac{3}{20};$$

$$p_{13} = P(X=1, Y=3) = \frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{3} = \frac{1}{20};\ p_{21} = P(X=2, Y=1) = \frac{3}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4} = \frac{3}{20};$$

$$p_{22} = P(X=2, Y=2) = \frac{3}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3} = \frac{2}{20};\ p_{23} = P(X=2, Y=3) = \frac{3}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{2} = \frac{1}{20};$$

$$p_{31} = P(X=3, Y=1) = \frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{20};\ p_{32} = P(X=3, Y=2) = \frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{20};$$

$$p_{33} = P(X=3, Y=3) = \frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1} = \frac{1}{20};\ p_{41} = P(X=4, Y=1) = \frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{3} = \frac{1}{20};$$

$$p_{42} = P(X=4, Y=2) = 0\ ;\ \mathrm{p}_{43} = P(X=4, Y=3) = 0\ .$$

Закон распределения системы (X,Y):

X \ Y	1	2	3	Σ
1	6/20	3/20	1/20	10/20
2	3/20	2/20	1/20	6/20
3	1/20	1/20	1/20	3/20
4	1/20	0	0	1/20
Σ	11/20	6/20	3/20	1

Функция распределения многомерной случайной величины

Определение 5. *Функцией распределения n-мерной случайной величины* $X_1, X_2, \dots, X_n$ *называется функция* $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ *выражающая вероятность совместного выпополнения n неравенств* $X_1 < x_1, X_2 < x_2, \dots, X_n < x_n$, *т.е.*

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(X_1 < x_1, X_2 < x_2, \dots, X_n < x_n).$$

В двумерном случае для случайной величины (X, Y) функция распределения $F(x, y)$ определится равенством:

$$F(x, y) = P(X < x; Y < y).$$

Геометрически функция распределения $F(x, y)$ означает вероятность попадания случайной точки (X, Y)в заштрихованную область - бесконечный квадрант, лежащий левее и ниже точки $A(x, y)$(Рисунок 2). Правая и верхняя границы области в квадрант не включаются – это означает, что функция распределения непрерывна слева по каждому из аргументов.

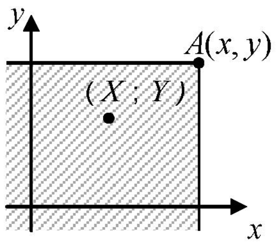


Рисунок 2.

В случае дискретной двумерной случайной величины ее функция распределения определяется по формуле:

$$F(x, y) = \sum_i \sum_j p_{ij},$$

где суммирование вероятностей распространяется на все i, для которых $x_i < x$, и все j, для которых $y_j < y$.

Свойства функции распределения $F(x, y)$:

1. *Функция распределения* $F(x, y)$ *есть неотрицательная функция, заключенная между нулем и единицей, т.е.*

$$0 \le F(x,y) \le 1.$$

2. *Функция распределения $F(x,y)$ есть неубывающая функция по каждому из аргументов, т.е.*

$$\text{если } x_2 > x_1 \Rightarrow F(x_2,y) \ge F(x_1,y);\, \text{если } y_2 > y_1 \Rightarrow F(x,y_2) \ge F(x,y_1).$$

3. *Если хотя бы один из аргументов обращается в $-\infty$, функция распределения $F(x,y)$ равна нулю, т.е.*

$$F(-\infty,y) = F(x,-\infty) = F(-\infty,-\infty) = 0.$$

4. *Если один из аргументов обращается в $+\infty$, функция распределения $F(x,y)$ становится равной функции распределения случайной величины, соответствующей другому аргументу:*

$$F(x,+\infty) = F_1(x),$$
$$F(+\infty,y) = F_2(y),$$

где $F_1(x)$ и $F_2(x)$ – функции распределения составляющих X и Y, т.е.

$$F_1(x) = P(X < x),$$
$$F_2(y) = P(Y < y).$$

5. *Если оба аргумента равны $+\infty$, то функция распределения равна единице:*

$$F(+\infty,+\infty) = 1.$$

6. *Вероятность попадания случайной точки*

а) *в полу-полосу* (Рисунок 3 а, б)

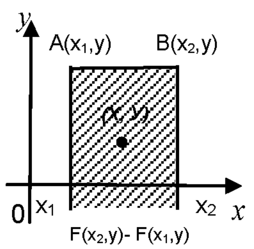
$$P(x_1 < X < x_2;\, Y < y) = F(x_2,y) - F(x_1,y),$$

$$P(X < x;\, y_1 < Y < y_2) = F(x,y_2) - F(x,y_1);$$

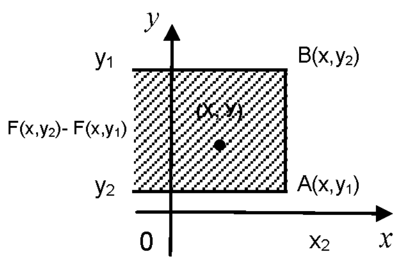
б) *в прямоугольник* (Рисунок 3 в)

$$P(a < X < b;\, c < Y < d) = [F(b,d) - F(a,d)] - [F(b,c) - F(a,c)].$$

а)



б)



в)

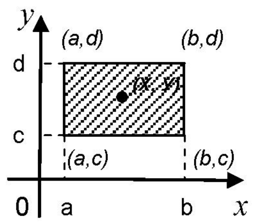


Рисунок 3.

Замечание. Составляющие X и Y случайной двумерной величины (X,Y) являются независимыми, если

$$F(x,y)=F_1(x)\cdot F_2(y).$$

Геометрически функция распределения есть некоторая поверхность, обладающая указанными свойствами. Для дискретной системы двух случайных величин (X,Y) ее функция распределения представляет собой некоторую ступенчатую поверхность, ступени которой соответствуют скачкам функции $F(x,y)$. Для непрерывной системы двух случайных величин (X,Y) ее функция распределения является непрерывной и может быть изображена криволинейной поверхностью.

Задача 4.

Закон распределения двумерной дискретной случайной величины $(X;Y)$ задан таблицей:

X \ Y	-1	1
0	0,1	0,06
1	0,3	0,18
2	0,2	0,16

Составить функцию распределения $F(x,y)$.

Решение:

По определению: $F(x,y)=P(X<x;\ Y<y)$.

Напомним, что геометрически значение $F(x,y)$ – это вероятность попадания случайной точки $(X;Y)$ в бесконечный квадрант с вершиной $(x;y)$.

Для вершины этого квадранта, согласно условию задачи, есть двенадцать областей, образованных тремя вертикальными прямыми $x=0$, $x=1$, $x=2$ и двумя горизонтальными прямыми $y=-1$, $y=1$.

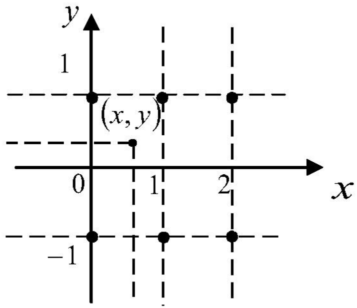


Рисунок 4.

На **Рисунок 4** показан случай, когда вершина $(x;y)$ находится внутри прямоугольника $0<x\le 1, -1<y\le 1$. При этом внутри квадранта находится только одна точка с координатами $(0;1)$, в которой имеется ненулевая вероятность, равна 0,1.

Функцию распределения $F(x,y)$ удобно задавать в виде таблицы (ее значение для случая, когда вершина $(x;y)$ квадранта находится внутри прямоугольника $0<x\le 1, -1<y\le 1$(выделено жирным шрифтом):

y / x	$y\le -1$	$-1<y\le 1$	$y>1$
$x\le 0$	0	0	0
$0<x\le 1$	0	**0,1**	0,16
$1<x\le 2$	0	0,4	0,64
$x>2$	0	0,6	1

Задача 5.

Известна функция распределения $F(x,y)$ двумерного дискретного случайного вектора $(X;Y)$:

y / x	$y\le 1$	$1<y\le 2$	$2<y\le 3$	$y>3$

$x \le 0$	0	0	0	0
$0 < x \le 1$	0	0,5	0,5	0,5
$1 < x \le 2$	0	0,5	0,75	0,75
$2 < x \le 3$	0	0,5	0,75	0,875
$x > 3$	0	0,5	0,75	1

Требуется:

1) *составить функции распределения* $F_1(x)$ и $F_2(y)$ *компонент* X *и* Y,
2) *построить их законы распределения.*

Решение:

Учитывая, что $F(x,\infty) = F_1(x)$, $F(\infty, y) = F_2(y)$, получим («проходя» соответственно по последнему столбцу и последней строке таблицы):

$$F_1(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 0{,}5, & 0 < x \le 1, \\ 0{,}75, & 1 < x \le 2, \\ 0{,}875, & 2 < x \le 3, \\ 1, & x > 3 \end{cases} \quad \text{и} \quad F_2(y) = \begin{cases} 0, & y \le 1, \\ 0{,}5, & 1 < y \le 2, \\ 0{,}75, & 2 < x \le 3, \\ 1, & y > 3 \end{cases}$$

Значит, для случайной величины X функция распределения испытывает «скачки» в точках $x = 0; 1; 2; 3$, для случайной величины Y – в точках $y = 1; 2; 3$. Поэтому законы распределения составляющих выглядят следующим образом:

X	0	1	2	3
p_i	0,5	0,25	0,125	0,125

Y	1	2	3
p_j	0,5	0,25	0,25

Плотность распределения вероятности двумерной системы случайных величин

Определение 6. *Система двух случайных величин* (X,Y) *называется непрерывной, если ее функция распределения* $F(x,y)$ *- непрерывная функция, дифференцируемая по каждому из аргументов, у которой существует вторая смешанная производная* $F_{xy}''(x,y)$. *Обе случайные величины X и Y – непрерывны.*

Для двумерной системы случайных величин, так же как и для одномерной случайной величины, вводится понятие плотности распределения вероятности.
Найдем вероятность попадания случайной точки в прямоугольник со сторонами Δx и Δy, т.е.

$$P(x \le X < x+\Delta x;\ y \le Y < y+\Delta y) = [F(x+\Delta x,\ y+\Delta y) - F(x,\ y+\Delta y)] - [F(x+\Delta x,\ y) - F(x,y)].$$

$$f(x,y) = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{P(x \le X < x+\Delta x; y \le Y < y+\Delta y)}{\Delta x \Delta y} =$$

$$= \lim_{\Delta y\to 0} \frac{1}{\Delta y} \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{F(x+\Delta x; y+\Delta y) - F(x; y+\Delta y)}{\Delta x} - \frac{F(x+\Delta x; y) - F(x;y)}{\Delta x} \right) = = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{F_x'(x; y+\Delta y) - F_x'(x;y)}{\Delta y}.$$

В числителе получили приращение по y функции, равной первой производной по x, т.е. $\lim\limits_{\Delta y\to 0} \frac{F_x'(x; y+\Delta y) - F_x'(x;y)}{\Delta y} = = F_{xy}''(x,y)$ - вторая смешанная производная от функции распределения $F(x,y)$. Итак, $f(x,y) = F_{xy}''(x,y)$.

Определение 7. *Плотностью распределения вероятности (совместной плотностью) непрерывной системы двух случайных величин* (X,Y)*называется вторая смешанная производная ее функции распределения, т.е.* $f(x,y) = F_{xy}''(x,y)$.

Геометрически плотность вероятности двумерной случайной величины (X,Y) представляет собой поверхность распределения в пространстве $Oxyz$ (Рисунок 5).

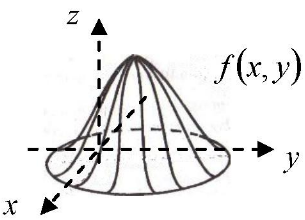


Рисунок 5.

Свойства плотности распределения вероятности $f(x,y)$:

1. *Плотность вероятности двумерной случайной величины есть неотрицательная функция, т.е.* $f(x,y) \ge 0$.
2. *Свойство нормированости: двойной несобственный интеграл в бесконечных пределах от плотности вероятности двумерной случайной величины равен единице:*

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = 1,$$

т.к. $f(x,y)$ с геометрической точки зрения – поверхность распределения, расположенная над плоскостью Oxy, то попадание случайной точки (x,y)на плоскость Oxy есть достоверное событие.

3. *Функция распределения непрерывной двумерной случайной величины выражается через ее плотность вероятности* $f(x,y)$ *по формуле:*

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)dxdy.$$

4. *Функции распределения составляющих* X *и* Y *могут быть найдены по формулам:*

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy, \text{ т.к. } F_1(x) = F(x,+\infty) = P(X < x);$$

$$F_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)dxdy, \text{ т.к. } F_2(y) = F(+\infty, y) = P(Y < y)$$

5. *Плотности распределения составляющих* X *и* Y *могут быть найдены по формулам:*

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy, \text{ т.к. } \frac{dF_1(x)}{dx} = \left(\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy\right)$$

$$f_2(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx\text{, т.к.}$$

6. *Вероятность попадания непрерывной двумерной величины* (X,Y) *в область* D *равна*

$$P[(X,Y)\in D]=\iint_D f(x,y)dxdy.\ (*)$$

Геометрически формула (*) означает, что вероятность попадания непрерывной двумерной величины (X,Y) в область D равна объему цилиндрического тела, ограниченного сверху поверхностью $z=f(x,y)$, основанием которого служит проекция этой поверхности на плоскость xOy (Рисунок 6).

Замечание. Непрерывные составляющие X и Y являются независимыми, если $f(x,y)=f_1(x)\cdot f_2(y)$.

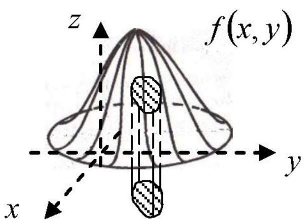


Рисунок 6.

Задача 6.

Двумерный случайный вектор (X,Y) *подчинен закону распределения с плотностью* $f(x,y)=\begin{cases} a(x+y), & (x,y)\in D,\\ 0, & (x,y)\notin D.\end{cases}$

Область $D:\{x=0,\quad y=0,\quad x+y=3\}$.

Найти коэффициент a.

Решение:

Согласно свойству нормированости имеем $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy=1$. Поскольку только в области D подынтегральная функция $f(x,y)$ отлична от нуля, то получаем следующее уравнение $\iint_D a(x+y)dxdy=1$ или $a\iint_D (x+y)dxdy=1$, отсюда $a=\dfrac{1}{\iint_D (x+y)dxdy}$.

Тогда $\iint\limits_D (x+y)dxdy = \int\limits_0^3 dx \int\limits_0^{3-x} (x+y)dy = \int\limits_0^3 dx\left(xy + \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^{3-x} = = \int\limits_0^3 \left(-0{,}5x^2 + 4{,}5\right)dx = \left(\frac{9}{2}x - \frac{1}{6}x^3\right)\Bigg|_0^3 = 9$.

Значит, $a = \frac{1}{9}$.

Задача 7.

Случайные величины X и Y независимы. Случайная величина X распределена по нормальному закону распределения с параметрами $M(X) = 0$, $\sigma^2(X) = 0{,}5$. Случайная величина Y равномерно распределена на отрезке $[0{,}1]$.

Требуется найти:

1)плотность вероятности системы случайных величин (X,Y);

2)функцию распределения системы случайных величин (X,Y);

3)вероятность попадания системы случайных величин (X,Y) в область $D = \{-1 \le X \le 1, \quad |Y| \le 0{,}5\}$.

Решение:

Плотности вероятностей случайных величин X и Y выглядят следующим образом:

$$f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \quad \text{и} \quad f_2(y) = \begin{cases} 1, & y \in [0{,}1], \\ 0, & y \notin [0{,}1]. \end{cases}$$

Так как случайные величины X и Y являются независимыми, то $f(x,y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$.

В данном случае $f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}, & y \in [0{,}1], \\ 0, & y \notin [0{,}1]. \end{cases}$

Найдем функцию распределения.

Двумерная функция распределения независимых случайных величин, по определению, имеет вид: $F(x,y) = F_1(x) \cdot F_2(y)$.

Найдем одномерные функции распределения составляющих по формулам

$$F_1(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt \text{ и } F_2(y) = \int\limits_{-\infty}^{y} f(t)dt: \; F_1(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} dt.$$

$$F_2(y): \; y \le 0 \qquad F_2(y) = \int\limits_{-\infty}^{o} 0dt = 0,$$

$$0 < y \le 1 \qquad F_2(y) = \int\limits_{-\infty}^{o} 0dt + \int\limits_{0}^{y} dt = y,$$

$y > 1$ $\qquad F_2(y) = \int\limits_{-\infty}^{o} 0dt + \int\limits_{0}^{1} dt + \int\limits_{1}^{y} 0dt = 1$. $F_2(y) = \begin{cases} 0, & y \le 0, \\ y, & 0 < y \le 1, \\ 1, & y > 1. \end{cases}$

Тогда $F(x,y) = \begin{cases} 0, & y \le 0, \\ y\int\limits_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2}dt, & 0 < y \le 1, \\ \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2}dt, & y \ge 1. \end{cases}$

Пользуясь представлением гауссовской функции распределения через функцию Лапласа, можно записать $F(x,y)$следующим образом:

$$F(x,y) = \begin{cases} 0, & y \le 0, \\ y\left(\Phi_0\left(\sqrt{2}x\right) + \frac{1}{2}\right), & 0 < y \le 1, \\ \Phi_0\left(\sqrt{2}x\right) + \frac{1}{2}, & y \ge 1. \end{cases}$$

Область $D = \{-1 \le X \le 1, \quad |Y| \le 0{,}5\}$ представляет собой прямоугольник. Вычислим вероятность попадания в него.

1 способ:

$$P((X,Y) \in D) = \iint\limits_D f(x,y)dxdy.\ P((X,Y) \in D = \{-1 \le X \le 1; -0{,}5 \le Y \le 0{,}5\}) = \iint\limits_D \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}dxdy =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{0}^{0{,}5} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}dy = \int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}dx \int\limits_{0}^{0{,}5} dy = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}dx = = \frac{1}{2} \cdot 2\Phi_0\left(\sqrt{2} \cdot 1\right) \approx 0{,}42.$$

2 способ:

$$P(a < X < b;\ c < Y < d) = [F(b,d) - F(a,d)] - [F(b,c) - F(a,c)].$$

$$P(-1 \le X \le 1;\ -0{,}5 \le Y \le 0{,}5) = [F(1;\,0{,}5) - F(-1;\,0{,}5)] - [F(1;-0{,}5) - F(-1;-0{,}5)] = \frac{1}{2} \cdot \left(\Phi_0\left(\sqrt{2} \cdot 1\right) + \frac{1}{2}\right) -$$

$$-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - \Phi_0\left(\sqrt{2} \cdot 1\right)\right) = \Phi_0\left(\sqrt{2}\right) \approx 0{,}42.$$

Задача 8.

Пусть двумерный случайный вектор $(X;Y)$ *равномерно распределен внутри области* $D: \{x > 0,\ y > 0,\ x + y < 2\}$.

Требуется:

1) *найти вероятность неравенства* $X > Y$,

2) *определить, независимы ли составляющие случайного вектора* X *и* Y.

Решение:

Замечание. Пусть задана плоская область A с конечной площадью $S(A)$. Говорят, что случайный вектор $(X;Y)$ имеет двумерное равномерное распределение в области A, если плотность совместного распределения постоянна в области и равна нулю вне этой области, т.е.:

$$f(x,y)=\begin{cases}0, & (x,y)\notin A\\ \dfrac{1}{S(A)}, & (x,y)\in A\end{cases}.$$

Площадь области D равна $S_{\Delta OAB}=\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 2=2$. Тогда в силу определения двумерного равномерного распределения совместная плотность случайных величин X и Y равна

$$f(x,y)=\begin{cases}0, & (x,y)\notin D\\ \dfrac{1}{S_{\Delta OAB}}, & (x,y)\in D\end{cases}=\begin{cases}0, & (x,y)\notin D\\ \dfrac{1}{2}, & (x,y)\in D\end{cases}.$$

Событие $X > Y$ соответствует множеству $G=\{(x,y): x>y\}$ на плоскости, т.е. полуплоскости (Рисунок 7).

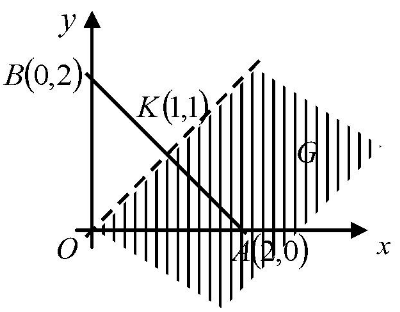


Рисунок 7.

Тогда по условию требуется найти вероятность $P\{(X,Y)\in G\}=\iint\limits_G f(x,y)dxdy$.

На полуплоскости G совместная плотность $f(x,y)$ равна нулю вне области D и $\dfrac{1}{2}$ внутри области D. Таким образом, полуплоскость G разбивается на два множества $G_1=\Delta OAK = G\cap D$ и $G_2 = B\cap\overline{D}$.

Поэтому

$$\iint_G f(x,y)dxdy = \iint_{G_1} \frac{1}{2}dxdy + \iint_{G_2} 0dxdy = \frac{1}{2}\iint_{G_1} dxdy = \frac{1}{2}\int_0^1 dy \int_y^{2-y} dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 dy((2-y)-y) = \frac{1}{2}\int_0^1 (2-2y)dy = \int_0^1 (1-y)dy = \left(y - \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Из данного решения можно сделать следующий вывод. Если $G \in A$ (Рисунок 8), тогда по формуле $P\{(X,Y) \in G\} = \iint_G f(x,y)dxdy$

с учетом того, что

$f(x,y) = \begin{cases} 0, & (x,y) \notin A \\ \dfrac{1}{S(A)}, & (x,y) \in A \end{cases}$ будем иметь: $P\{(X,Y) \in G\} = \iint_G \frac{1}{S(A)}dxdy = \frac{S_G}{S_A}$. Мы пришли к формуле геометрической вероятности.

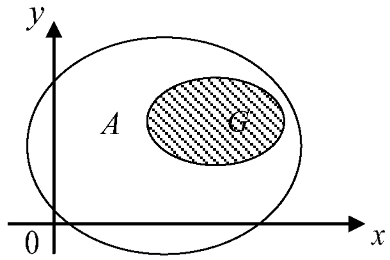


Рисунок 8.

Вычислим частные плотности $f_1(x)$ и $f_2(y)$.

Имеем:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \int_{-\infty}^{0} 0dy + \int_0^{2-x} \frac{1}{2}dy + \int_0^{+\infty} 0dy = \frac{2-x}{2}.$$

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_0^{2-y} \frac{1}{2}dx + \int_0^{+\infty} 0dx = \frac{2-y}{2}.$$

$$f_1(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (0,2) \\ \dfrac{2-x}{2}, & x \in (0,2) \end{cases} \text{ и } f_2(y) = \begin{cases} 0, & y \notin (0,2) \\ \dfrac{2-y}{2}, & y \in (0,2). \end{cases}$$

Очевидно, что в нашем случае $f(x,y) \neq f_1(x) \cdot f_2(y)$, и потому случайные величины X и Y зависимы.

Условные законы распределения. Числовые характеристики двумерной случайной величины. Регрессия

Если случайные величины – составляющие системы (X,Y) зависимы между собой, то для их зависимости вводится понятие условных законов распределения случайных величин.

Определение 8. *Условным законом распределения одной из одномерных составляющих двумерной случайной величины (X,Y) называется ее закон распределения, вычисленный при условии, что другая составляющая приняла определенное значение (или попала в какой-то интервал).*

Если зафиксировать значение одного из аргументов, например, положить $Y = y_j$, то полученное распределение случайной величины X называется *условным распределением* X при условии $Y = y_j$. Вероятности $p_j(x_i)$ этого распределения будут *условными вероятностями* события $X = x_i$, найденными в предположении, что событие $Y = y_j$ произошло. Из определения условной вероятности имеем:

$$p_j(x_i) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(Y = y_j)} = \frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}}.$$

Аналогично *условное распределение случайной величины* Y при условии $X = x_i$ задается с помощью условных вероятностей:

$$p_i(y_j) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(X = x_i)} = \frac{p_{ij}}{p_{i\bullet}}.$$

В случае непрерывных случайных величин *условная плотность вероятности одной из одномерных составляющих двумерной случайной величины равна отношению ее совместной плотности к плотности вероятности другой составляющей, т.е.*

$$f_y(x) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)};\quad f_x(y) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)}.$$

Последние равенства принимаются в качестве определения условной плотности вероятности распределений. Как отмечалось выше, совместная плотность $f(x,y)$ двумерной случайной величины представляет собой геометрически некоторую поверхность распределения, то, например, условная плотность $f_y(x)$ есть кривая распределения, подобная сечению этой поверхности плоскостью $Y = y$, параллельной координатной плоскости Oxz и отсекающей на оси Oy отрезок y (Рисунок 9).

Условный закон распределения можно задавать и функцией распределения:

$$F_y(x) = \frac{\int\limits_{-\infty}^{x} f(x,y)dx}{f_2(y)}; \; F_x(y) = \frac{\int\limits_{-\infty}^{y} f(x,y)dy}{f_1(x)}.$$

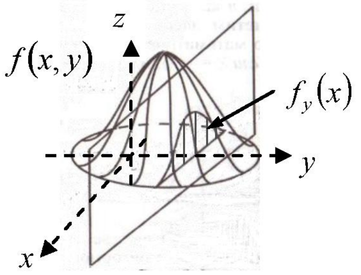


Рисунок 9.

Замечание. Для непрерывных случайных величин условие независимости X от Y может быть записано в виде: $f_y(x) = f_1(x)$ при любом x, а условие независимости X от Y может быть записано в виде: $f_x(y) = f_2(y)$ при любом y. Зависимость или независимость случайных величин всегда взаимны: если величина Y не зависит от X, то и величина X не зависит от Y.

Задача 9.

Закон распределения системы (X,Y) задан таблицей:

X \ Y	*0*	*1*	*2*	*3*
-1	*0,02*	*0,06*	*0,08*	*0,04*
0	*0,03*	*0,12*	*0,20*	*0,15*
1	*0,05*	*0,02*	*0,22*	*0,01*

Требуется найти условный закон распределения Y при $X = 0$. Являются ли величины X и Y зависимыми?

Решение:

Вероятности значений величины Y при условии $X=0$ вычисляем по формуле

$$P(Y=y_j\,/\,X=x_i)=\frac{P((X=x_i)(Y=y_j))}{P(X=x_i)}=\frac{p_{ij}}{p_{i.}}=\frac{p_{ij}}{p(x_i)}.$$

Имеем:

$$p(X=0)=0{,}03+0{,}12+0{,}20=0{,}5\,;\;\; p(Y=0\,/\,X=0)=\frac{0{,}03}{0{,}5}=0{,}06;$$

$$p(Y=1\,/\,X=0)=\frac{0{,}12}{0{,}5}=0{,}24;\; p(Y=2\,/\,X=0)=\frac{0{,}20}{0{,}5}=0{,}4;$$

$$p(Y=3\,/\,X=0)=\frac{0{,}15}{0{,}5}=0{,}3.$$

Итак, при условии, что $X=0$, величины Y распределена по закону:

Y	0	1	2	3
p_j	0,06	0,24	0,4	0,3

Безусловный же закон распределения Y имеет вид:

Y	0	1	2	3
p_j	0,1	0,2	0,5	0,2

Несовпадение условного и безусловного законов говорит о том, что X и Y зависимы.

Задача 10.

Известна функция плотности двумерной случайной величины:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{6\pi}, & \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}\le 1,\\[2mm] 0, & \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}>1.\end{cases}$$

Найти условные плотности распределения компонент X и Y.

Решение:

Условные плотности распределения компонент X и Y находятся по формулам

$$f_x(y)=\frac{f(x,y)}{f_1(x)}\text{ и } f_y(x)=\frac{f(x,y)}{f_2(y)}.$$

Найдем плотности распределения $f_1(x)$ и $f_2(y)$ компонент X и Y.

Очевидно, что если $|x| > 3$, то $f_1(x) = 0$. Пусть $|x| \le 3$, тогда:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \frac{1}{6\pi}\int_{-2\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}}^{2\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}} dy = \frac{2}{6\pi}\int_{0}^{2\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}} dy = \frac{2}{9\pi}\sqrt{9-x^2}.$$

Итак, $f_1(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{9\pi}\sqrt{9-x^2}, & |x| \le 3, \\ 0, & |x| > 3. \end{cases}$

Аналогично $f_2(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{9\pi}\sqrt{4-y^2}, & |y| \le 2, \\ 0, & |y| > 2. \end{cases}$

Поэтому

$$f_x(y) = \begin{cases} \dfrac{3}{4\sqrt{9-x^2}}, & |y| \le \dfrac{2}{3}\sqrt{9-x^2}, \\ 0, & |y| > \dfrac{2}{3}\sqrt{9-x^2}. \end{cases} \qquad f_y(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3\sqrt{4-y^2}}, & |x| \le \dfrac{3}{2}\sqrt{4-y^2}, \\ 0, & |x| > \dfrac{3}{2}\sqrt{4-y^2}. \end{cases}$$

Случайная величина X при условии $Y = y$ *равномерно* распределена на отрезке $\left[-\frac{3}{2}\sqrt{4-y^2}; \frac{3}{2}\sqrt{4-y^2}\right]$, а случайная величина Y при условии $X = x$ *равномерно* распределена на отрезке $\left[-\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}; \frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}\right]$. Условная плотность $f_y(x)$ не определена при $|y| > 2$, а условная плотность $f_x(y)$ не определена при $|x| > 3$.

Задача 11.

Известна функция плотности двумерной случайной величины: $f(x,y) = 4xye^{-(x^2+y^2)}$, $x \ge 0,\ y \ge 0$.

Требуется:

1)составить функцию распределения $F(x,y)$*;*

2) найти условные функции распределения компонент X *и* Y*;*

3)найти условные плотности распределения компонент X *и* Y*;*

4)установить, зависимы ли случайные величины X *и* Y*.*

Решение:

Функция распределения равна $F(x,y)=\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y} f(x,y)dxdy$.

С учетом того, что $x\ge 0,\ y\ge 0$ получим

$$F(x,y)=\int\limits_0^x\int\limits_0^y 4xye^{-x^2-y^2}dxdy=\int\limits_0^x 2xe^{-x^2}dx\int\limits_0^y 2ye^{-y^2}dy==\int\limits_0^x 2e^{-x^2}dx\left(-e^{-y^2}\right)\Big|_0^y=$$
$$\left(1-e^{-y^2}\right)\cdot\left(-e^{-x^2}\right)\Big|_0^x=\left(1-e^{-y^2}\right)\cdot\left(1-e^{-x^2}\right);$$ при $x<0,\ y<0$ $F(x,y)=0$.

Найдем плотности распределения $f_1(x)$ и $f_2(y)$ компонент X и Y.

1 способ:

$$f_1(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\int\limits_0^{+\infty}4xye^{-x^2-y^2}dy=\lim_{b\to+\infty}\left(2xe^{-x^2}\int\limits_0^b 2ye^{-y^2}dy\right)==2xe^{-x^2}\lim_{b\to+\infty}\left(1-e^{-b^2}\right)=2xe^{-x^2}.$$

$$f_2(y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\int\limits_0^{+\infty}4xye^{-x^2-y^2}dx=\lim_{b\to+\infty}\left(2ye^{-y^2}\int\limits_0^b 2xe^{-x^2}dx\right)=2ye^{-y^2}\lim_{b\to+\infty}\left(1-e^{-b^2}\right)=2ye^{-y^2}.$$

2 способ:

$F_1(x)=F(x,+\infty)=\left(1-e^{-x^2}\right)\cdot\left(1-e^{-\infty}\right)=1-e^{-x^2}$ при $x\ge 0$,

$F_2(y)=F(+\infty,y)=\left(1-x^{-\infty}\right)\cdot\left(1-e^{-y^2}\right)=1-e^{-y^2}$ при $y\ge 0$.

$f_1(x)=F_1'(x)=2xe^{-x^2}$ при $x\ge 0$,

$f_2(y)=F_2'(y)=2ye^{-y^2}$ при $y\ge 0$.

Условные функции распределения компонент X и Y находятся по формулам

$$F_y(x)=\frac{\int\limits_{-\infty}^{x} f(x,y)dx}{f_2(y)};\quad F_x(y)=\frac{\int\limits_{-\infty}^{y} f(x,y)dy}{f_1(x)}.$$

$$F_y(x)=\frac{\int\limits_0^x 4xye^{-x^2-y^2}dx}{2ye^{-y^2}}=\int\limits_0^x 2xe^{-x^2}dx=\left(-e^{-x^2}\right)\Big|_0^x=1-e^{-x^2}$$ при $x\ge 0$, аналогично

$$F_x(y)=\frac{\int\limits_0^y 4xye^{-x^2-y^2}dy}{2xe^{-x^2}}=\int\limits_0^y 2ye^{-y^2}dy=\left(-e^{-y^2}\right)\Big|_0^y=1-e^{-y^2}$$ при $y\ge 0$.

Найдем условные плотности распределения $f_y(x)$ и $f_x(y)$ компонент X и Y.

1 способ:

$f_y(x)=\dfrac{f(x,y)}{f_2(y)}=\dfrac{4xye^{-x^2-y^2}}{2ye^{-y^2}}=2xe^{-x^2}$ при $x\geq 0$, $f_x(y)=\dfrac{f(x,y)}{f_1(x)}=\dfrac{4xye^{-x^2-y^2}}{2xe^{-x^2}}=2ye^{-y^2}$ при $y\geq 0$.

2 способ:

$f_y(x)=F_y'(x)=2xe^{-x^2}$ при $x\geq 0$, $f_x(y)=F_x'(y)=2ye^{-y^2}$ при $y\geq 0$.

Так как условные распределения случайных величин X и Y равны распределениям составляющих X и Y $f_y(x)=f_1(x)=2xe^{-x^2}$, $f_x(y)=f_2(y)=2ye^{-y^2}$ и $f(x,y)=f_1(x)\cdot f_2(y)$, то случайные величины X и Y независимы.

Числовые характеристики, найденные на основе условных законов распределения вероятностей, называются *условными числовыми характеристиками* случайных величин.

Условное математическое ожидание имеет большое значение при исследовании статистической зависимости между величинами. Если нужно предсказывать ожидаемые значения величины Y по известным значениям величины X, то следует использовать условное математическое ожидание.

Определение 9. *Условным математическим ожиданием случайной величины Y относительно случайной величины X, называется случайная величина $M_x(Y)$, которая принимает значение $M_{X=x}(Y)$ при $X=x$.*

Условное математическое ожидание $M_x(Y)$ обладает следующими свойствами:

1. $M_x(c)=c$, *где* $c-const$.
2. $M_x(aY+b)=aM_x(Y)+b$, *где* $a,b-const$.
3. $M_x(Y+Z)=M_x(Y)+M_x(Z)$.
4. $M_x(\varphi(X)\cdot Y)=\varphi(X)\cdot M_x(Y)$

Замечание. Случайные величины X и Y являются независимыми, если $M_x(Y)=M(Y)$, $M_y(X)=M(X)$.

Теорема (формула полного математического ожидания).

$$M(X)=M[M_y(X)]\ ,\ M(Y)=M[M_x(Y)].$$

Если X и Y - дискретные, то, например, соотношение $M(X)=M[M_y(X)]$ означает, что выполняется равенство

$$M(X)=\sum_{j=1}^{m} M_{Y=y_j}(X)\cdot P(Y=y_j), \text{ где } P(Y=y_j)=p_{\bullet j}=\sum_{i=1}^{n} p_{ij}\,.$$

Условное математическое ожидание случайной величины Y при $X=x$, т.е. $M_{X=x}(Y)=f(x)$, есть функция от x, называемая *функцией регрессии* или просто *регрессией* Y *на* X, а график этой функции – *линией регрессии Y на X*. Аналогично, $M_{Y=y}(X)=\varphi(y)$ называется *функцией регрессии* или *функцией регрессии* X *на* Y.

Линии регрессии $M_{X=x}(Y)=f(x)$ и $M_{Y=y}(X)=\varphi(y)$ расположены на координатной плоскости xOy симметрично относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов. В связи с этим регрессии $M_{X=x}(Y)=f(x)$и $M_{Y=y}(X)=\varphi(y)$ можно считать взаимно обратными функциями.

Регрессия не охватывает всю глубину статистической связи между величинами. Может оказаться, что $M_{X=x}(Y)=M(Y)$. В таком случае регрессия оказывается бесполезной с точки зрения возможного прогнозирования. Однако нельзя делать вывод, что величина X не влияет на Y. Действительно, величина X, не оказывая влияния на математическое ожидание величины Y, может существенно влиять на её дисперсию или на её моменты более высоких порядков. Для уточнения характера влияния одной величины на другую используются условные моменты более высоких порядков, в частности условная дисперсия.

Определение 10. *Условной дисперсией случайной величины* Y *относительно случайной величины* X, *называется случайная величина* $D_x(Y)\equiv M_x\left[(Y-M_x(Y))^2\right]$, *которая принимает значение* $D_{X=x}(Y)$ *при* $X=x$.

Свойства условной дисперсии $D_x(Y)$**:**

1. $D_x(c)=0$, *где* $c-const$.
2. $D_x(aY+b)=a^2D_x(Y)$, *где* $a,b-const$.
3. $D_x(Y)=M_x(Y^2)-(M_x(Y))^2$.
4. $D_x(\varphi(X)\cdot Y)=\varphi^2(X)\cdot D_x(Y)$.

Замечание. Случайные величины X и Y являются независимыми, если $D_x(Y)=D(Y)$, $D_y(X)=D(X)$.

Теорема (формула полной дисперсии).

$$D(X)=M\left[D_y(X)\right]+D\left[M_y(X)\right],\ D(Y)=M\left[D_x(Y)\right]+D\left[M_x(Y)\right].$$

Числовые характеристики одномерных составляющих – математические ожидания, дисперсии, а также условные числовые характеристики – условные математические ожидания, условные дисперсии находятся по обычным формулам математического ожидания и дисперсии, в которых используются соответствующие вероятности или плотности вероятностей (см. Таблица 4.).

Таблица 4.

Характеристика	формула
Дискретные случайные величины	
$M(X)$	$\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_{i\bullet} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i p_{ij}$
$M(Y)$	$\sum_{j=1}^{m} y_j \cdot p_{\bullet j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} y_j p_{ij}$
$D(X)$	$\sum_{i=1}^{n} (x_i - M(X))^2 \cdot p_{i\bullet} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} (x_i - M(X))^2 p_{ij}$
$D(Y)$	$\sum_{j=1}^{m} (y_j - M(Y))^2 \cdot p_{\bullet j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} (y_j - M(Y))^2 p_{ij}$
$M_y(X)$	$\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_{\bullet j}(x_i)$
$M_x(Y)$	$\sum_{j=1}^{m} y_j \cdot p_{i\bullet}(y_j)$
$D_y(X)$	$\sum_{i=1}^{n} (x_i - M_y(X))^2 \cdot p_{\bullet j}(x_i)$
$D_x(Y)$	$\sum_{j=1}^{m} (y_j - M_x(Y))^2 \cdot p_{i\bullet}(y_i)$

Продолжение Таблица 4.

Характеристика	формула
Непрерывные случайные величины	
$M(X)$	$\int_{-\infty}^{+\infty} x f_1(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,y)dxdy$
$M(Y)$	$\int_{-\infty}^{+\infty} y f_2(y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} yf(x,y)dxdy$
$D(X)$	$\int_{-\infty}^{+\infty} (x-M(X))^2 f_1(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (x-M(X))^2 f(x,y)dxdy$
$D(Y)$	$\int_{-\infty}^{+\infty} (y-M(Y))^2 f_2(y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (y-M(Y))^2 f(x,y)dxdy$
$M_y(X)$	$\int_{-\infty}^{+\infty} x f_y(x)dx$
$M_x(Y)$	$\int_{-\infty}^{+\infty} y f_x(y)dy$
$D_y(X)$	$\int_{-\infty}^{+\infty} (x-M_y(X))^2 f_y(x)dx$
$D_x(Y)$	$\int_{-\infty}^{+\infty} (y-M_x(Y))^2 f_x(y)dy$

Задача 12.

Закон распределения случайного вектора $(X;Y)$ задан таблицей:

X \ Y	0	2	5
1	0,1	0	0,2
2	0	0,3	0
4	0,1	0,3	0

Требуется:

1)найти числовые характеристики (математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение) составляющих;

2)построить регрессии Y на X и X на Y;

3)найти условные дисперсии.

<u>Решение:</u>

Найдем законы распределения компонент X и Y:

x_i	1	2	4
p_i	0,3	0,3	0,4

y_j	0	2	5
p_j	0,2	0,6	0,2

Вычислим числовые характеристики X и Y:

$$M(X)=\sum_{i=1}^{3}x_i p_i=1\cdot 0{,}3+2\cdot 0{,}3+4\cdot 0{,}4=2{,}5.\ M\left(X^2\right)=\sum_{i=1}^{4}x_i^2 p_i=1\cdot 0{,}3+4\cdot 0{,}3+16\cdot 0{,}4=7{,}9.$$

$$D(X)=M\left(X^2\right)-M^2(X)=7{,}9-(2{,}5)^2=1{,}65.\quad \sigma(X)=\sqrt{D(X)}\approx 1{,}285.$$

$$M(Y)=\sum_{j=1}^{3}y_j p_j=0\cdot 0{,}2+2\cdot 0{,}6+5\cdot 0{,}2=2{,}2.\ M\left(Y^2\right)=\sum_{j=1}^{3}y_j^2 p_j=0\cdot 0{,}2+4\cdot 0{,}6+25\cdot 0{,}2=7{,}4.$$

$$D(Y)=M\left(Y^2\right)-M^2(Y)=7{,}4-(2{,}2)^2=2{,}56\ .\ \sigma(Y)=\sqrt{D(Y)}\approx 1{,}6.$$

Построим вначале регрессию Y *на* X.

$$p(Y=0/X=1)=\frac{0{,}1}{0{,}3}=\frac{1}{3};\ p(Y=2/X=1)=\frac{0}{0{,}3}=0;\ p(Y=5/X=1)=\frac{0{,}2}{0{,}3}=\frac{2}{3}.$$

$$M_{X=1}(Y)=0\cdot\frac{1}{3}+2\cdot 0+5\cdot\frac{2}{3}=\frac{10}{3}.$$

$$p(Y=0/X=2)=\frac{0}{0{,}3}=0;\ p(Y=2/X=2)=\frac{0{,}3}{0{,}3}=1;\ p(Y=5/X=2)=\frac{0}{0{,}3}=0.$$

$$M_{X=2}(Y)=0\cdot 0+2\cdot 1+5\cdot 0=2.$$

$$p(Y=0/X=4)=\frac{0{,}1}{0{,}4}=\frac{1}{4};\ p(Y=2/X=4)=\frac{0{,}3}{0{,}4}=\frac{3}{4};\ p(Y=5/X=4)=\frac{0}{0{,}4}=0.$$

$$M_{X=4}(Y)=0\cdot\frac{1}{4}+2\cdot\frac{3}{4}+5\cdot 0=\frac{3}{2}.$$

Графическое изображение регрессии Y *на* X показано на Рисунок 10:

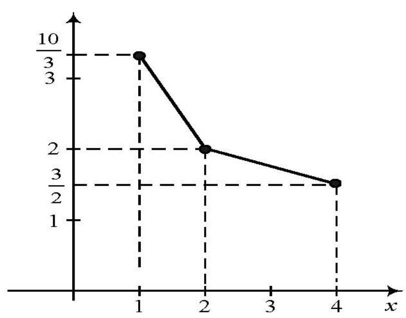


Рисунок 10.

Построим теперь регрессию X *на* Y.

$$p(X=1/Y=0)=\frac{0,1}{0,2}=\frac{1}{2};\ p(X=2/Y=0)=\frac{0}{0,2}=0;\ p(X=4/Y=0)=\frac{0,1}{0,2}=\frac{1}{2};$$

$$M_{Y=0}(X)=1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot 0+4\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{2}.$$

$$p(X=1/Y=2)=\frac{0}{0,6}=0;\ p(X=2/Y=2)=\frac{0,3}{0,6}=\frac{1}{2};\ p(X=4/Y=2)=\frac{0,3}{0,6}=\frac{1}{2};$$

$$M_{Y=2}(X)=1\cdot 0+2\cdot\frac{1}{2}+4\cdot\frac{1}{2}=3.$$

$$p(X=1/Y=5)=\frac{0,2}{0,2}=1;\ p(X=2/Y=5)=\frac{0}{0,2}=0;\ p(X=4/Y=5)=\frac{0}{0,2}=0;$$

$$M_{Y=5}(X)=1\cdot 1+2\cdot 0+4\cdot 0=1.$$

Графическое изображение регрессии X на Y показано на Рисунок 11:

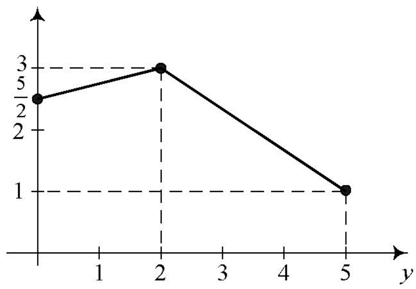


Рисунок 11.

Для наглядности значения условного математического ожидания на Рисунок 10 и Рисунок 11 соединены отрезками прямых.

Рассчитаем теперь условные дисперсии:

$$1)\ D_x(Y)=M_x(Y^2)-(M_x(Y))^2:$$

$$M_{X=1}(Y^2)=0\cdot\frac{1}{3}+4\cdot 0+25\cdot\frac{2}{3}=\frac{50}{3};\ M_{X=2}(Y^2)=0\cdot 0+4\cdot 1+25\cdot 0=4;\ M_{X=4}(Y^2)=0\cdot\frac{1}{4}+4\cdot\frac{3}{4}+25\cdot 0=3.$$

$$D_{X=1}(Y)=\frac{50}{3}-\left(\frac{10}{3}\right)^2=\frac{50}{9};\ D_{X=2}(Y)=4-2^2=0;\ D_{X=1}(Y)=3-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{3}{4}.$$

$$2)\ D_y(X)=M_y(X^2)-(M_y(X))^2:$$

$$M_{Y=0}(X^2)=1\cdot\frac{1}{2}+4\cdot 0+16\cdot\frac{1}{2}=\frac{17}{2};\ M_{Y=2}(X^2)=1\cdot 0+4\cdot\frac{1}{2}+16\cdot\frac{1}{2}=10;\ M_{Y=5}(X^2)=1\cdot 1+4\cdot 0+16\cdot 0=1.$$

$$D_{Y=0}(X)=\frac{17}{2}-\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{9}{4};\ D_{Y=2}(X)=10-3^2=1;\ D_{Y=5}(X)=1-1^2=0.$$

Задача 13.

Дано: $P(X=50)=0{,}1$; $P(X=70)=0{,}9$; $M_{X=50}(Y)=4$; $M_{X=70}(Y)=2$; $D_{X=50}(Y)=9$; $D_{X=70}(Y)=5$.

Найти: $M(D_x(Y))$, $D(Y)$.

Решение:

Пусть $D_x(Y)=Z$, т.е. $z_1=D_{X=50}(Y)=9$; $z_2=D_{X=70}(Y)=5$; $p_1=P(X=50)=0{,}1$ и

$$p_2=P(X=70)=0{,}9.$$

Тогда $M(D_x(Y))=M(Z)=\sum_{i=1}^{2}z_ip_i=9\cdot 0{,}1+5\cdot 0{,}9=5{,}4.$ Теперь найдем $D(Y)$.

1 способ:

По формуле полной дисперсии $D(Y)=M[D_x(Y)]+D[M_x(Y)]$.

Пусть $M_x(Y)=U$, $u_1=M_{X=50}(Y)=4$ и $u_2=M_{X=70}(Y)=2$; $p_1=P(X=50)=0{,}1$ и $p_2=P(X=70)=0{,}9$.

Тогда $D(M_x(Y))=D(U)=M(U^2)-M^2(U)$.

$M(U)=\sum_{i=1}^{2}u_ip_i=4\cdot 0{,}1+2\cdot 0{,}9=2{,}2.$ $M(U^2)=\sum_{i=1}^{2}u_i^{\,2}p_i=16\cdot 0{,}1+4\cdot 0{,}9=5{,}2.$

Таким образом, $D(M_x(Y))=D(U)=5{,}2-2{,}2^2=0{,}36$. Значит, $D(Y)=5{,}4+0{,}36=5{,}76$.

2 способ:

$D(Y)=M(Y^2)-M^2(Y)$.

По формуле полного математического ожидания $M(Y)=M[M_x(Y)]$, т.е. $M(Y)=M(U)=2{,}2$. А $M(Y^2)=M[M_x(Y^2)]$. Пусть $M_x(Y^2)=V$, тогда

$M(Y^2)=M(V)=\sum_{i=1}^{2}v_ip_i$. $v_1=M_{X=50}(Y^2)=D_{X=50}(Y)+M^2{}_{X=50}(Y)=z_1+u_1^{\,2}=9+4^2=25$,

$v_2=M_{X=70}(Y^2)=D_{X=70}(Y)+M^2{}_{X=70}(Y)=z_2+u_2^{\,2}=5+2^2=9$.

Таким образом, $M(Y^2)=25\cdot 0{,}1+9\cdot 0{,}9=10{,}6$. Значит, $D(Y)=10{,}6-2{,}2^2=5{,}76$.

Задача 14.

Для данных Задача 10. найти условные математические ожидания.

Решение:

Условные математические ожидания вычисляются по формулам: $M_x(Y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} y\cdot f_x(y)dy$;

$M_y(X)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} x\cdot f_y(x)dx$.

В ***Задача 10.*** *были найдены условные плотности распределения компонент* X *и* Y.

$$f_x(y)=\begin{cases}\dfrac{3}{4\sqrt{9-x^2}}, & |y|\le\dfrac{2}{3}\sqrt{9-x^2},\\ 0, & |y|>\dfrac{2}{3}\sqrt{9-x^2}.\end{cases}\quad f_y(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3\sqrt{4-y^2}}, & |x|\le\dfrac{3}{2}\sqrt{4-y^2},\\ 0, & |x|>\dfrac{3}{2}\sqrt{4-y^2}.\end{cases}$$

$$M_y(X)=\int\limits_{-1,5\sqrt{4-y^2}}^{1,5\sqrt{4-y^2}} x\cdot\frac{1}{3\sqrt{4-y^2}}dx\left|\begin{matrix}\textit{нечетная по } x \textit{ функция}\\ \textit{в симметричных пределах}\end{matrix}\right|=0.$$

$$M_x(Y)=\int\limits_{-\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}}^{\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}} y\cdot\frac{3}{4\sqrt{9-x^2}}dx\left|\begin{matrix}\textit{нечетная по } x \textit{ функция}\\ \textit{в симметричных пределах}\end{matrix}\right|=0.$$

Заметим, что при вычислении условных математических ожиданий можно было воспользоваться тем, что случайная величина X при условии $Y=y$ равномерно распределена на отрезке $\left[-\frac{3}{2}\sqrt{4-y^2};\frac{3}{2}\sqrt{4-y^2}\right]$, а случайная величина Y при условии $X=x$ равномерно распределена на отрезке $\left[-\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2};\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}\right]$.

Действительно, для равномерно распределенной на отрезке $[a;b]$ случайной величины математическое ожидание равно $\frac{a+b}{2}$. Отсюда, очевидно, $M_y(X)=0$ при $|y|\le 2$, $M_x(Y)=0$ при $|x|\le 3$.

Задача 15.

Найти условные дисперсии для системы случайных величин (X,Y): $f(x,y)=12xy;\ D:\{y\le 1-x^2,\ x\ge 0,\ y\ge 0\}$.

Решение:

Условные дисперсии вычисляются по формулам:

$D_y(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(x-M_y(X))^2 f_y(x)dx$; $D_x(Y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(y-M_x(Y))^2 f_x(y)dy$.

Найдем условные плотности, которые равны соответственно

$$f_y(x)=\frac{f(x,y)}{f_2(y)},\ f_x(y)=\frac{f(x,y)}{f_1(x)}.$$

Найдем плотности отдельных величин:

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=12\int_0^{1-x^2}xydy=6x\left(1-x^2\right)^2,\ f_2(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=12\int_0^{\sqrt{1-y}}xydx=6y(1-y).$$

Поэтому

$$f_y(x)=\frac{12xy}{6y(1-y)}=\frac{2x}{1-y},\ f_x(y)=\frac{12xy}{6x\left(1-x^2\right)^2}=\frac{2y}{(1-x^2)^2}.$$

Найдем уравнения регрессии по формулам:

$$M_y(X)=\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot f_y(x)dx\ ;M_x(Y)=\int_{-\infty}^{\infty}y\cdot f_x(y)dy.$$

Таким образом,

$$M_y(X)=\int_0^{\sqrt{1-y}}\frac{2x^2dx}{1-y}=\frac{2}{1-y}\int_0^{\sqrt{1-y}}x^2dx=\frac{2}{1-y}\left(\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{1-y}}=\frac{2}{3}\sqrt{1-y}.$$

$$M_x(Y)=\int_0^{1-x^2}\frac{2y^2dy}{\left(1-x^2\right)^2}=\frac{2}{\left(1-x^2\right)^2}\int_0^{1-x^2}y^2dy=\frac{2}{\left(1-x^2\right)^2}\left(\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^{1-x^2}==\frac{2}{3}\left(1-x^2\right)$$

$$D_y(X)=\int_0^{\sqrt{1-y}}\left(x-\frac{2}{3}\sqrt{1-y}\right)^2\frac{2x}{1-y}dx=\frac{2}{1-y}\int_0^{\sqrt{1-y}}\left(x^2-\frac{4}{3}x\sqrt{1-y}+\frac{4}{9}(1-y)\right)xdx=$$

$$=\frac{2}{1-y}\int_0^{\sqrt{1-y}}\left(x^3-\frac{4}{3}x^2\sqrt{1-y}+\frac{4}{9}x(1-y)\right)dx=\frac{2}{1-y}\left(\frac{x^4}{4}-\frac{4x^3\sqrt{1-y}}{9}+\frac{2x^2(1-y)}{9}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{1-y}}=$$

$$=\frac{2}{1-y}\left(\frac{(1-y)^2}{4}-\frac{4(1-y)^2}{9}+\frac{2(1-y)^2}{9}\right)=\frac{2}{1-y}\cdot\frac{(1-y)^2}{36}=\frac{1-y}{18}.$$

$$D_x(Y)=\int_0^{1-x^2}\left(y-\frac{2}{3}\left(1-x^2\right)\right)^2\frac{2y}{\left(1-x^2\right)^2}dy==\frac{2}{\left(1-x^2\right)^2}\int_0^{1-x^2}\left(y^2-\frac{4}{3}y\left(1-x^2\right)+\frac{4}{9}\left(1-x^2\right)^2\right)ydy=$$

$$=\frac{2}{\left(1-x^2\right)^2}\int_0^{1-x^2}\left(y^3-\frac{4}{3}y^2\left(1-x^2\right)+\frac{4}{9}y\left(1-x^2\right)^2\right)dy=\frac{2}{\left(1-x^2\right)^2}\left(\frac{y^4}{4}-\frac{4y^3\left(1-x^2\right)}{9}+\frac{2y^2\left(1-x^2\right)^2}{9}\right)\Bigg|_0^{1-x^2}=$$

$$=\frac{2}{\left(1-x^2\right)^2}\left(\frac{\left(1-x^2\right)^4}{4}-\frac{4\left(1-x^2\right)^4}{9}+\frac{2\left(1-x^2\right)^4}{9}\right)=\frac{2}{\left(1-x^2\right)^2}\cdot\frac{\left(1-x^2\right)^4}{36}=\frac{\left(1-x^2\right)^2}{18}.$$

До сих пор мы сталкивались с понятием функциональной зависимости между переменными X и Y, когда каждому значению x одной переменной соответствовало строго определенное значение у другой. Например, зависимость между двумя случайными величинами – числом вышедших из строя единиц оборудования за определенный период времени и их стоимостью – функциональная.

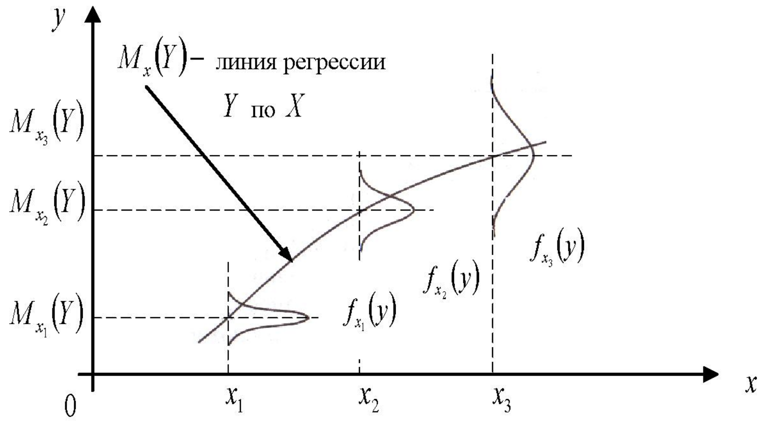
В общем случае, сталкиваются с зависимостью другого типа, менее жесткой, чем функциональная.

Определение 11. *Зависимость между двумя случайными величинами называется вероятностной (стохастической или статистической), если каждому значению одной из них соответствует определенное (условное) распределение другой.*

В случае вероятностной (стохастической) зависимости нельзя, зная значение одной из них, точно определить значение другой, а можно указать лишь распределение другой величины.

На Рисунок 12. приведены примеры зависимых случайных величин X и Y. На Рисунок 12., а) зависимость между X и Y проявляется в том, что с изменением x меняется как распределение Y, так и условное математическое ожидание $M_x(Y)$. Там же показана зависимость $M_x(Y)$ от x, т.е.линия регрессии Y по X. На Рисунок 12., б) зависимость между случайными величинами проявляется в изменении условных дисперсий, при этом $M_x(Y) = const$, т.е. линия регрессии Y по X параллельна оси Ox.

а)



б)

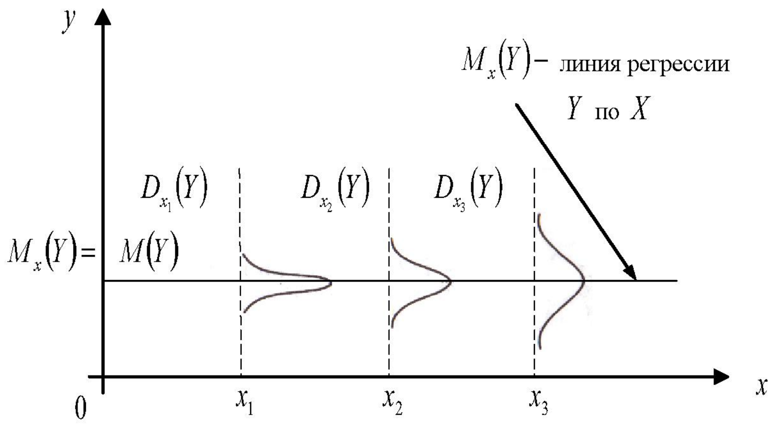


Рисунок 12.

На Рисунок 13. приведен пример независимых случайных величин. Случайные величины X и Y независимы, так как с изменением x распределение случайной величины Y, а значит, условное математическое ожидание $M_x(Y)$ и условная дисперсия $D_x(Y)$ не меняются. Таким образом, *если случайные величины* X и Y *независимы, то линии регрессии* Y по X *и* X по Y *параллельны координатным осям Ox и Oy.*

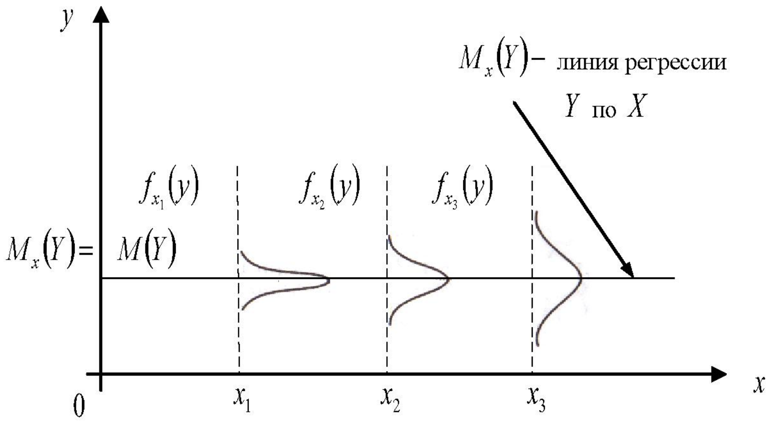


Рисунок 13.

Корреляционный момент. Коэффициент корреляции

Для описания случайного вектора $Z=(X,Y)$ служат числовые характеристики составляющих X и Y. Однако математические ожидания и дисперсии случайных величин X и Y недостаточно полно характеризуют двумерную случайную величину, так как не выражают степени зависимости ее составляющих X и Y. Эту роль выполняют **ковариация** и **коэффициент корреляции**.

Определение 12. *Начальным моментом* v_{KS} *порядка* $K+S$ *системы* (X,Y) *называют математическое ожидание произведения* $X^K\cdot Y^S$*:* $v_{KS}=M\left[X^K\cdot Y^S\right]$.

В частности, $v_{10}=M(X)$, $v_{01}=M(Y)$.

Определение 13. *Центральным моментом* μ_{KS} *порядка* $K+S$ *системы* (X,Y) *называют математическое ожидание произведения отклонений соответственно* K*-й и* S*-й степеней:*

$$\mu_{KS}=M\left\{[X-M(X)]^K\cdot[Y-M(Y)]^S\right\}.$$

В частности, $\mu_{10}=M[X-M(X)]=0$, $\mu_{01}=M[Y-M(Y)]=0$, $\mu_{20}=M[X-M(X)]^2=D(X)$, $\mu_{02}=M[Y-M(Y)]^2=D(Y)$.

Определение 14. *Ковариацией (или корреляционным моментом)* μ_{xy} *системы* (X,Y) *называют центральный момент* μ_{11} *порядка* $1+1$, *т.е. математическое ожидание произведения отклонений случайных величин* X *и* Y *от своих математических ожиданий:*

$$\mu_{xy}=M\{[X-M(X)]\cdot[Y-M(Y)]\}.$$

Формулы для вычисления μ_{xy}:

а) если (X,Y)- дискретные

$$\mu_{xy}=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}(x_i-M(X))(y_j-M(Y))p_{ij}$$

или

$$\mu_{xy}=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}x_i y_j p_{ij}-M(X)M(Y).$$

б) если (X,Y) - непрерывные

$$\mu_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x - M(X))(y - M(Y))f(x,y)dxdy$$

или

$$\mu_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)dxdy - M(X)M(Y).$$

Ковариация двух случайных величин характеризует как степень зависимости случайных величин, так и их рассеяние вокруг точки $(M(X), M(Y))$.

Свойства ковариации:

1. *Ковариация двух независимых случайных величин равна нулю.*
2. *Ковариация двух случайных величин равна математическому ожиданию их произведения минус произведение математических ожиданий, т.е.*

$$\mu_{xy} = M(XY) - M(X)M(Y).$$

3. *Ковариация двух случайных величин по абсолютной величине не превосходит произведения их средних квадратических отклонений, т.е.*

$$|\mu_{xy}| \le \sigma(X)\sigma(Y).$$

4. *Математическое ожидание произведения двух случайных величин равно сумме произведения их математических ожиданий и ковариации этих случайных величин:*

$$M(XY) = M(X) \cdot M(Y) + \mu_{xy}.$$

5. *Дисперсия суммы двух случайных величин равна сумме их дисперсий плюс удвоенная ковариация этих случайных величин:*

$$D(X+Y) = D(X) + D(Y) + 2\mu_{xy}.$$

Ковариация, как уже было отмечено ранее, характеризует не только степень зависимости двух случайных величин, но и их разброс, рассеяние. Кроме того, она - величина размерная, ее размерность определяется произведением размерностей случайных величин. Это затрудняет использование ковариации для оценки степени зависимости для различных случайных величин. Этих недостатков лишен **коэффициент корреляции –** величина безразмерная**.**

Определение 15. *Коэффициентом корреляции двух случайных величин называется* *отношение их ковариации к произведению средних квадратических отклонений этих величин:*

$$r_{xy} = \frac{\mu_{xy}}{\sigma(X)\sigma(Y)} .$$

Свойства:

1. $|r_{xy}| \le 1$.
2. *Если случайные величины независимы, то* $r_{xy} = 0$.
3. *Если коэффициент корреляции двух случайных величин равен (по абсолютной величине) единице, то между этими случайными величинами существует линейная функциональная зависимость.*

Определение 16. *Случайные величины называются некоррелированными, если их коэффициент корреляции равен нулю.*

Замечание. Две коррелированные величины также и зависимы, обратное утверждение – неверно. Из независимости двух величин следует их некоррелированность, но из некоррелированности еще нельзя сделать вывод о независимости этих величин, исключение – нормально распределенные величины.

Задача 16.

Система двух дискретных случайных величин $(X;Y)$ *задана таблицей.*

Y \ X	-3	-1	0	1
1	0,03	0,06	0,10	0,06
2	0,05	0,09	0,15	0,10
3	a	$2a$	$3a$	$3a$

Найти коэффициент корреляции r_{xy}.

Решение:

Вычислим коэффициент корреляции по формуле:

$$r_{xy} = \frac{\mu_{xy}}{\sigma(X)\sigma(Y)} .$$

Сначала найдем значение параметра a из условия $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} P_{ij} = 1$.

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{3}P_{ij}=0{,}03+0{,}06+0{,}10+0{,}06+0{,}05+0{,}09+0{,}15+0{,}10+$$

$$+a+2a+3a+3a=9a+0{,}54.$$

$$9a+0{,}54=1.$$

$$9a=0{,}36.$$

$$a=0{,}04.$$

Напишем законы распределения составляющих систему случайных величин X и Y в виде ряда распределения.

$p_1(X)=\sum_{j=1}^{4}p(x_1;y_j)=0{,}03+0{,}05+0{,}04=0{,}12$; $p_2(X)=\sum_{j=1}^{3}p(x_2;y_j)=0{,}06+0{,}09+0{,}08=0{,}23$;

$p_3(X)=\sum_{j=1}^{3}p(x_3;y_j)=0{,}10+0{,}15+0{,}12=0{,}37$; $p_4(X)=\sum_{j=1}^{3}p(x_4;y_j)=0{,}06+0{,}10+0{,}12=0{,}28$.

X	-3	-1	0	1
p_i	0,12	0,23	0,37	0,28

$p_1(Y)=\sum_{i=1}^{3}p(x_i;y_1)=0{,}03+0{,}10+0{,}06+0{,}06=0{,}25$; $p_2(Y)=\sum_{i=1}^{3}p(x_i;y_2)=0{,}05+0{,}09+0{,}15+0{,}1=0{,}39$;

$p_3(Y)=\sum_{i=1}^{3}p(x_i;y_3)=0{,}04+0{,}08+0{,}12+0{,}12=0{,}36$.

Y	1	2	3
p_i	0,25	0,39	0,36

Вычислим числовые характеристики X и Y:

$$M(X)=\sum_{i=1}^{4}x_ip_i=-3\cdot 0{,}12-1\cdot 0{,}23+0\cdot 0{,}37+1\cdot 0{,}28=-0{,}31.$$

$$M(X^2)=\sum_{i=1}^{4}x_i^2p_i=9\cdot 0{,}12+1\cdot 0{,}23+0\cdot 0{,}37+1\cdot 0{,}28=1{,}59.$$

$$D(X)=M(X^2)-M^2(X)=1{,}59-(-0{,}31)^2=1{,}4939. \quad \sigma(X)=\sqrt{D(X)}\approx 1{,}222.$$

$$M(Y)=\sum_{j=1}^{3}y_jp_j=1\cdot 0{,}25+2\cdot 0{,}39+3\cdot 0{,}36=2{,}11.$$

$$M(Y^2)=\sum_{j=1}^{3}y_j^2p_j=1^2\cdot 0{,}25+2^2\cdot 0{,}39+3^2\cdot 0{,}36=5{,}05.$$

$$D(Y)=M(Y^2)-M^2(Y)=5{,}05-2{,}11^2=0{,}5979\ .\ \sigma(Y)=\sqrt{D(Y)}\approx 0{,}773.$$

$$M(XY)=\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{3}x_i y_j p_{ij}=-3\cdot 1\cdot 0{,}03-1\cdot 1\cdot 0{,}06+1\cdot 1\cdot 0{,}06+$$

$$+(-3)\cdot 2\cdot 0{,}05++1\cdot 2\cdot 0{,}09+1\cdot 2\cdot 0{,}10+(-3)\cdot 3\cdot 0{,}04-1\cdot 3\cdot 0{,}08+1\cdot 3\cdot 0{,}12=-0{,}61.$$

Корреляционный момент:

$$\mu_{xy}=M(XY)-M(X)M(Y)=-0{,}61-(-0{,}31)\cdot 2{,}11=0{,}0441.$$

Коэффициент корреляции:

$$r_{xy}=\frac{0{,}0441}{1{,}222\cdot 0{,}773}=0{,}047.$$

Величины X и Y - коррелированны, с возрастанием одной величины другая имеет тенденцию к возрастанию, так как $r_{xy}>0$.

Задача 17.

Два стрелка, независимо друг от друга, делают по одному одиночному выстрелу каждый по своей мишени. Пусть случайная величина X – число попаданий первого стрелка, Y – число попаданий второго стрелка. Вероятность попадания для первого стрелка $p=0{,}8$, для второго $p=0{,}6$.

Требуется:

1) построить матрицу распределения системы случайных величин (X,Y);

2) доказать некоррелированность случайных величин X и Y.

Решение:

Возможные значения случайных величин X и Y: $x_1=0$; $x_2=1$; $y_1=0$; $y_2=1$.

Возможные пары значений системы случайных величин: $(0;0)$, $(0;1)$, $(1;0)$, $(1;1)$.

Соответствующие этим парам вероятность вычисляем пользуясь теоремой умножения для независимых событий.

$$p_{11}=P(X=0,Y=0)=0{,}2\cdot 0{,}4=0{,}08;\ p_{12}=P(X=0,Y=1)=0{,}2\cdot 0{,}6=0{,}12.$$

$$p_{21}=\underline{P}(X=1,Y=0)=0{,}8\cdot 0{,}4=0{,}32;\ p_{22}=P(X=1,Y=1)=0{,}8\cdot 0{,}6=0{,}48.$$

Закон распределения $(X;Y)$:

X \ Y	0	1	p_i
0	0,08	0,12	0,2

1	0,32	0,48	0,8
p_j	0,4	0,6	1

Чтобы доказать некоррелированность случайных величин, покажем, что коэффициент корреляции равен нулю.

$$M(X)=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}x_i p_{ij}=0\cdot 0{,}08+0\cdot 0{,}12+1\cdot 0{,}32+1\cdot 0{,}48=0{,}8.$$

$$M(Y)=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}y_j p_{ij}=0\cdot 0{,}08+1\cdot 0{,}12+0\cdot 0{,}32+1\cdot 0{,}48=0{,}6.$$

$$M(XY)=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}x_i y_j p_{ij}=0\cdot 0\cdot 0{,}08+0\cdot 1\cdot 0{,}12+1\cdot 0\cdot 0{,}32+\ +1\cdot 1\cdot 0{,}48=0{,}48.$$

$$\mu_{xy}=M(XY)-M(X)M(Y)=0{,}48-0{,}8\cdot 0{,}6=0{,}48-0{,}48=0.$$

Получили, что момент корреляции равен нулю, а это значит, что и коэффициент корреляции равен нулю, т.е. случайные величины X и Y некоррелированные.

В условии задачи сказано, что стрелки стреляют независимо друг от друга, следовательно, случайные величины X и Y независимы, а из этого следует их некоррелированность.

Задача 18.

Дана плотность вероятности системы случайных величин

$$f(x,y)=\begin{cases} C, если (X,Y)\in D \\ 0, если (X,Y)\notin D \end{cases},$$

где D - треугольник ΔABC: $A(0,0)$, $B(0,1)$, $C(1,1)$.

Найти коэффициент корреляции r_{xy}.

Решение:

Вычислим коэффициент корреляции по формуле:

$$r_{xy}=\frac{\mu_{xy}}{\sigma(X)\sigma(Y)}.$$

Найдем параметр C, при котором данная функция $f(x,y)$ может служить плотностью совместного распределения вероятностей двумерной случайной величины $(X;Y)$ из условия:

$$\iint_D f(x,y)dxdy=1.$$

$$\iint_D Cdxdy = C\iint_D dxdy = 1.$$

$\iint_D dxdy$ - площадь прямоугольного треугольника ΔABC, найдем ее по формуле

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot BC = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, получается $\frac{1}{2}C = 1$ или $C = 2$.

Значит, плотность вероятности системы случайных величин будет иметь вид:

$$f(x,y) = \begin{cases} 2, \in D, \\ 0, \notin D. \end{cases}$$

Вычислим числовые характеристики X и Y:

$$M(X) = \iint_D xf(x,y)dxdy = \iint_D x\cdot 2dxdy = 2\int_0^1 xdx\int_x^1 dy =$$

$$2\int_0^1 x(1-x)dx = 2\int_0^1 \left(x - x^2\right)dx = 2\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}.$$

$$M\left(X^2\right) = \iint_D x^2 f(x,y)dxdy = \iint_D x^2\cdot 2dxdy = 2\int_0^1 x^2dx\int_0^1 dy =$$

$$= 2\int_0^1 x^2(1-x)dx = 2\int_0^1\left(x^2 - x^3\right)dx = 2\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 = 2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{6}.$$

$$D(X) = M\left(X^2\right) - M^2(X) = \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{6} - \frac{1}{9} = \frac{1}{18}.\ \sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\frac{1}{18}}.$$

$$M(Y) = \iint_D yf(x,y)dxdy = \iint_D 2ydxdy = 2\int_0^1 dx\int_x^1 ydy = 2\int_0^1 dx\left(\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_x^1 =$$

$$= 2\cdot\int_0^1\left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{2}\right)dx = 2\cdot\left(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{6}\right)\Bigg|_0^1 = 2\cdot\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) = 2\cdot\frac{2}{6} = \frac{2}{3}.$$

$$M\left(Y^2\right) = \iint_D y^2 f(x,y)dxdy = \iint_D 2ydxdy = 2\cdot\int_0^1 dx\int_x^1 y^2dy =$$

$$2\cdot\int_0^1 dx\left(\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_x^1 2\cdot\int_0^1\left(\frac{1}{3} - \frac{x^3}{3}\right)dx = 2\cdot\left(\frac{x}{3} - \frac{x^4}{12}\right)\Bigg|_x^1 = 2\cdot\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{12}\right) = \frac{1}{2}.$$

$$D(Y) = M\left(Y^2\right) - M^2(Y) = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{9-8}{18} = \frac{1}{18}.\ \sigma(Y) = \sqrt{D(Y)} = \sqrt{\frac{1}{18}}.$$

$$M(XY)=\iint_D xyf(x,y)dxdy=\iint_D 2\cdot xydxdy=2\cdot\int_0^1 xdx\int_x^1 ydy=$$

$$=2\cdot\int_0^1 xdx\left.\left(\frac{y^2}{2}\right)\right|_x^1=2\int_0^1 xdx\left(\frac{1}{2}-\frac{x^2}{2}\right)=2\int_0^1\left(\frac{1}{2}x-\frac{x^3}{2}\right)dx=\int_0^1(x-x^3)dx=$$

$$=\left.\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right)\right|_0^1=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}.$$

$$r_{xy}=\frac{\mu_{xy}}{\sigma(X)\sigma(Y)}=\frac{M(XY)-M(X)M(Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}=\frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}}{\sqrt{\frac{1}{18}}\cdot\sqrt{\frac{1}{18}}}=\frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{18}}=\frac{1}{2}.$$

Двумерный нормальный закон распределения

Двумерное нормальное распределение хорошо описывает, например, скорость ветра в районе аэропорта, прогнозируемые координаты падения метеорита на поверхность Земли и т.п.

Определение 17.

Случайная величина (X,Y)*называется распределенной по двумерному нормальному закону, если ее совместная плотность имеет вид:*

$$f_N(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}}e^{-L(x,y)},$$

где

$$L(x,y)=\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-a_x}{\sigma_x}\right)^2-2\rho\frac{x-a_x}{\sigma_x}\cdot\frac{y-a_y}{\sigma_y}+\left(\frac{y-a_y}{\sigma_y}\right)^2\right].$$

Из Определение 17 следует, что двумерный нормальный закон распределения определяются пятью параметрами: $a_x,a_y,\sigma_x^2,\sigma_y^2,\rho$, т.е. $(X,Y)\sim N\left(a_x,a_y,\sigma_x^2,\sigma_y^2,\rho\right)$.

Для выяснения теоретико-вероятностного смысла этих параметров по формулам (см. Таблица 4.) найдем математические ожидания случайных величин $M(X)$ и $M(Y)$, их дисперсии $D(X)$ и $D(Y)$ и ковариацию μ_{xy}:

$$M(X)=a_x;\ M(Y)=a_y;\ D(X)=\sigma_x^2;\ D(Y)=\sigma_y^2;\ \mu_{xy}=\rho\sigma_x\sigma_y\ ^{1}.$$

Таким образом, параметры a_x, a_y выражают математические ожидания (центры рассеивания) случайных величин X и Y, параметры σ_x, σ_y- их средние квадратические отклонения, а параметр $\rho=\frac{\mu_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}$- коэффициент корреляции между случайными величинами X и Y.

Каждый из законов распределения одномерных случайных величин X и Y является нормальным с параметрами (a_x,σ_x^2) и (a_y,σ_y^2) соответственно[2]:

$$f_1(x)=\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a_x)^2}{2\sigma_x}},$$

[1] Проверьте самостоятельно!
[2] Проверьте самостоятельно!

$$f_2(y)=\frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-a_y)^2}{2\sigma_y}}.$$

Условные плотности распределения имеют вид:

$$f_y(x)=\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{\left(x-a_x-\rho\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y-a_y)\right)^2}{2(1-\rho^2)\sigma_x^2}},$$

$$f_x(y)=\frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{\left(y-a_y-\rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-a_x)\right)^2}{2(1-\rho^2)\sigma_y^2}}.$$

А условные математические ожидания и дисперсии соответственно равны:

$$M_y(X)=a_x+\rho\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y-a_y),$$

$$M_x(Y)=a_y+\rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-a_x);$$

$$D_y(X)=\sigma_y^2(1-\rho^2),$$

$$D_y(X)=\sigma_x^2(1-\rho^2).$$

Значит, если X и Y распределены нормально, то регрессия одной величины на другую всегда будет линейной. Линии регрессии являются прямыми линиями, пересекающимися в точке (a_x, a_y), графики линий симметричны относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов. Другой связи между нормально распределёнными величинами быть не может.

Если $\rho=0$, то случайные величины X и Y независимы, а плотность вероятности $f_N(x,y)$ системы (X,Y) будет равна $f_1(x)\cdot f_2(y)$:

$$f_N(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y}e^{-\left(\frac{(x-a_x)^2}{2\sigma_x^2}+\frac{(y-a_y)^2}{2\sigma_y^2}\right)}.$$

Если при этом $a_x=a_y=0$, то нормальный закон примет *канонический вид*:

$$f_N(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y}e^{-\left(\frac{x^2}{2\sigma_x^2}+\frac{y^2}{2\sigma_y^2}\right)}.$$

Уравнение

$$\frac{(x-a_x)^2}{\sigma_x{}^2}+\frac{(y-a_y)^2}{\sigma_y{}^2}=k^2$$

определяет эллипс на координатной плоскости xOy с центром в точке (a_x, a_y) и с осями, параллельными осям координат. Поделим это уравнение на $k^2(k>0)$:

$$\frac{(x-a_x)^2}{(k\sigma_x)^2}+\frac{(y-a_y)^2}{(k\sigma_y)^2}=1.$$

Таким образом, полуоси эллипса пропорциональны средним квадратическим отклонениям и равны соответственно $k\sigma_x$ и $k\sigma_y$. Придавая константе k различные значения, получаем эллипсы различного размера. Такие эллипсы называются *эллипсами рассеяния*. Эллипс, полученный при $k=1$, называют *единичным эллипсом рассеяния*.

Во всех точках эллипса рассеяния плотность распределения вероятностей $f_N(x,y)$ является постоянна: $f_N(x,y)=const$.

При $\sigma_x=\sigma_y=\sigma$ получаем так называемое *круговое нормальное распределение*:

$$f_N(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{(x-a_x)^2+(y-a_y)^2}{2\sigma^2}}.$$

График плотности $f_N(x,y)$ нормального распределения представляет собой холмообразную поверхность, называемую иногда «палаткой Гаусса».

Вершина «палатки Гаусса» находится в точке $\left(a_x, a_y, \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}}\right)$. Сечения поверхности распределения плоскостями, проходящими через данную точку перпендикулярно плоскости xOy, представляют собой кривые Гаусса. Пересекая поверхность плоскостями, параллельными плоскости xOy, получим эллипсы рассеивания (Рисунок 14.).

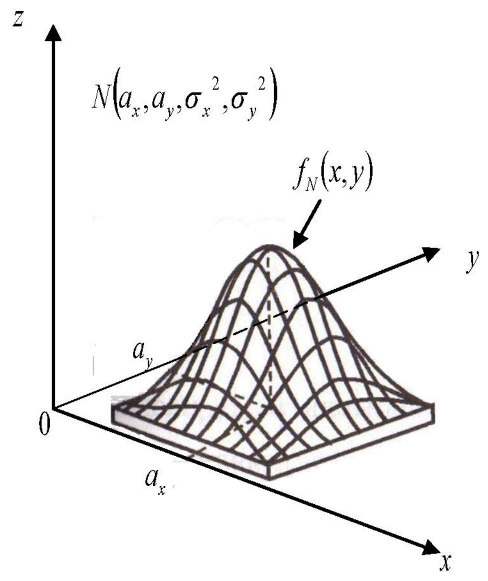


Рисунок 14.

Вероятность попадания случайной точки (X,Y), распределенной по нормальному закону, в прямоугольник с осями, параллельными осям координат, выражается формулой

$$P(a < X < b;\ c < Y < d) = \left[\Phi_0\left(\frac{b-a_x}{\sigma_x}\right) - \Phi_0\left(\frac{a-a_x}{\sigma_x}\right)\right]\left[\Phi_0\left(\frac{d-a_y}{\sigma_y}\right) - \Phi_0\left(\frac{c-a_y}{\sigma_y}\right)\right].$$

Вероятность попадания случайной точки (X,Y), распределенной по нормальному закону, в область D, ограниченную эллипсом рассеивания, равна

$$P((X,Y) \in D) = 1 - e^{-\frac{k^2}{2}}.$$

Таким образом, вероятность попадания (X,Y) в эллипс рассеяния не зависит от дисперсий. Вероятность попадания точки (X,Y) в единичный эллипс равна приблизительно 0,39.

При $k=3$ вероятность будет равна примерно 0,99. Это означает, что почти всегда точка (X,Y) попадёт в эллипс рассеяния с полуосями $3\sigma_x$ и $3\sigma_y$.

Если область D отличается от рассмотренных, то задача по аналитическому определению вероятности попадания в эту область может оказаться достаточно сложной. То же самое можно сказать и о том случае, когда величины X и Y оказываются статистически зависимыми. Заметим, однако, что простым поворотом системы координат можно перейти от зависимых нормально распределённых случайных величин к независимым.

Задача 19.

Положение ориентира на плоскости распределено по нормальному закону при $a_x = 125м$, $a_y = -30м$, $\sigma_x = 40м$, $\sigma_y = 30м$, $r_{xy} = 0{,}6$. *Координата* X *определяет отклонение ориентира «по дальности», т.е. по направлению, параллельному линии наблюдения. Координата* Y *определяет отклонение ориентира «по боковому направлению», перпендикулярному линии наблюдения. Отклонения отсчитываются от начала координат.*

Определить:

1) *плотность вероятности отклонений ориентира по дальности;*
2) *плотность вероятности отклонений ориентира по боковому направлению;*
3) *условную плотность вероятности отклонений ориентира по дальности при отсутствии боковых отклонений;*
4) *условную плотность вероятности отклонений ориентира по боковому направлению при отклонении по дальности* $+25м$;
5) *уравнения регрессии* X *на* Y *и* Y *на* X.

Решение:

Плотность вероятности отклонений ориентира по дальности:

$$f_1(x) = \frac{1}{40\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-125)^2}{80}}.$$

А плотность вероятности отклонений ориентира по боковому направлению:

$$f_2(y) = \frac{1}{30\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y+30)^2}{60}}.$$

Условная плотность вероятности отклонений ориентира по дальности при отсутствии боковых отклонений:

$$f_0(x) = \frac{1}{40\sqrt{2\pi}\sqrt{1-0{,}6^2}} e^{-\frac{\left(x-125-0{,}6\frac{40}{30}(0+30)\right)^2}{2\left(1-0{,}6^2\right)40^2}} = \frac{1}{32\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-149)^2}{2048}},$$

а условная плотность вероятности отклонений ориентира по боковому направлению при отклонении по дальности $+25м$:

$$f_{25}(y)=\frac{1}{30\sqrt{2\pi}\sqrt{1-0{,}6^2}}e^{-\frac{\left(y+30-0{,}6\frac{30}{40}(25-125)\right)^2}{2\left(1-0{,}6^2\right)30^2}}=\frac{1}{24\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y+75)^2}{1152}}.$$

Уравнение регрессии X на Y: $M_y(X)=125+0{,}6\frac{40}{30}(y+30)=0{,}8y+149$.

А уравнение регрессии Y на X: $M_x(Y)=-30+0{,}6\frac{30}{40}(x-125)=0{,}45x-86{,}25$.

Задача 20.

Система случайных величин (X,Y) распределена по нормальному круговому закону с параметрами $a_x=a_y=0$ и $\sigma=1$.

Найти:

1)плотность вероятности $f(x,y)$системы (X,Y);

2)плотности вероятности $f_1(x)$ и $f_2(y)$ координат X и Y;

3)функцию распределения $F(x,y)$;

4)вероятность попадания случайной точки (X,Y) в квадрат : $-1\le x\le 1, -1\le y\le 1$;

5)вероятность попадания случайной точки (X,Y) в область D (Рисунок 15.).

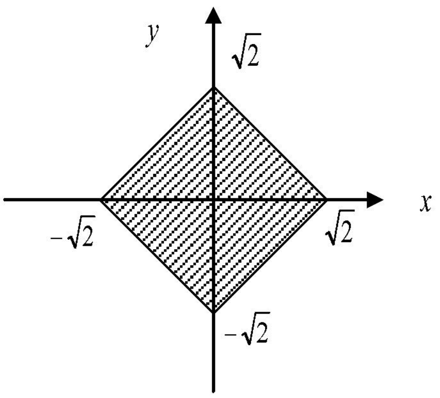


Рисунок 15.

Решение:

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{(x-a_x)^2+(y-a_y)^2}{2\sigma^2}}=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}==f_1(x)\cdot f_2(y)\quad\Rightarrow$$

$$f_1(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}};\quad f_2(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}.$$

$$F(x,y)=P(X<x,Y<y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(x,y)dxdy=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dx\,dy=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{x^2}{2}}dx\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{y^2}{2}}dy= =\left(\frac{1}{2}+\Phi_0(x)\right)\cdot\left(\frac{1}{2}+\Phi_0(y)\right),$$ где Φ_0 – функция Лапласа.

Вероятность попадания случайной точки в прямоугольник в общем случае при нормальном круговом законе с параметрами $a_x = a_y = 0$ $и$ $\sigma = 1$ равна:

$$P(x_1 \le X \le x_2, y_1 \le Y \le y_2)=\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} f(x,y)dxdy =$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dx\,dy=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{x^2}{2}}dx\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{y_1}^{y_2} e^{-\frac{y^2}{2}}dy= \left(\Phi_0(x_2)-\Phi_0(x_1)\right)\cdot\left(\Phi_0(y_2)-\Phi_0(y_1)\right).$$

$$P(-1 \le X \le 1, -1 \le Y \le 1)=(\Phi_0(1)-\Phi_0(-1))\ (\Phi_0(1)-\Phi_0(-1)) = 4\cdot(\Phi_0(1))^2 = 4\cdot(0{,}3413)^2 \approx 0{,}466.$$

Так как система случайных величин (X,Y) распределена по нормальному круговому закону, то координаты точки (X,Y) остаются независимыми при любом повороте осей, поэтому при повороте 45° получаем $P(-1 \le X \le 1, -1 \le Y \le 1) \approx 0{,}466$.

Задача 21.

Независимые случайные величины X *и* Y *распределены по нормальным законам с параметрами* $a_x = 2$, $a_y = -3$, $\sigma_x = 1, \sigma_y = 2$. *Найти вероятность события* $A = \{Y < X - 5\}$.

Решение:

Плотности вероятности $f_1(x)$ и $f_2(y)$ координат X и Y:

$f_1(x)=\frac{1}{\sqrt{2\cdot 1\cdot\pi}}e^{-\frac{(x-2)^2}{2\cdot 1^2}}$; $f_2(y)=\frac{1}{\sqrt{2\cdot 2\cdot\pi}}e^{-\frac{(y+3)^2}{2\cdot 2^2}}$, т.к. X и Y независимые, то

$f_1(x)\cdot f_2(y)=f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sqrt{2}}e^{-\left(\frac{(x-2)^2}{2}+\frac{(y+3)^2}{8}\right)}$. $P(A)=\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_D \frac{1}{2\pi\sqrt{2}}e^{-\left(\frac{(x-2)^2}{2}+\frac{(y+3)^2}{8}\right)}dxdy$, где $D=\{y<x-5\}$.

Прямая $y = x - 5$ проходит через точку с координатами $a_x = 2$, $a_y = -3$. В силу симметричности нормального закона вероятность попадания случайной точки по одну сторону от прямой, проходящей через точку (a_x, a_y), равна вероятности попадания по другую сторону от этой прямой, поэтому $P(A)=\frac{1}{2}$.

Задачи для самостоятельного решения

Двумерные дискретные случайные величины

Задача 1. Найти закон распределения системы (X,Y).

1. Дважды брошена игральная кость. Пусть X – количество выпавших очков при первом бросании, а Y – сумма выпавших очков в обоих бросаниях.

2. Из коробки, в которой 4 красных, 2 синих и 3 зеленых карандаша, наудачу извлекли 3 карандаша. Пусть X – число красных, а Y – число синих карандашей среди извлеченных.

3. 10 студентов написали контрольную работу по математике, причем 4 из них получили оценку «отлично», 3 – «хорошо», а остальные «удовлетворительно». Для разбора в группе случайным образом отобрано 4 работы. Пусть X – число отличных, а Y – число хороших работ среди отобранных.

4. Слово АМЕРИКА разрезано по буквам. Случайным образом вынимаем три буквы и X – количество гласных среди вынутых букв, далее вынимаем две буквы и Y – количество гласных среди двух вынутых букв.

5. 2 стрелка независимо друг от друга сделали по 2 выстрела по одной и той же мишени. Вероятность попадания для первого стрелка 0,8; а для второго – 0,6. Пусть X – число попаданий первого стрелка, а Y – общее число попаданий в мишень.

6. В урне имеются четыре шара с номерами 1, 2, 3, 4. Из урны наугад выбирают сразу два шара. Рассмотрим двумерный дискретный случайный вектор $Z=(X,Y)$, где X – число шаров с четным номером в паре, Y – положительная разность номеров в каждой возможной паре.

Задача 2. Найти законы распределения составляющих системы (X,Y).

1. Закон распределения системы (X,Y) задан следующей таблицей:

X \ Y	-1	0	1
0	0,1	0,2	0
1	0,2	0,3	0,2

2. Закон распределения системы (X,Y) задан следующей таблицей:

X \ Y	26	30	41	50
2,3	0,05	0,12	0,08	0,04
2,7	0,09	0,30	0,11	0,21

Задача 3. Составить функцию распределения системы (X,Y).

1. Закон распределения системы (X,Y) задан следующей таблицей:

X \ Y	1	2	3
1	0,12	0,14	0,1
2	0,21	0,31	0,12

2. Из отобранных 6 изделий X оказались кондиционными, среди которых $Y\,(Y \le 3)$ – высшего сорта, система (X,Y) задана следующей:

Y \ X	0	1	2	3	4	5	6
0	0, 202	0,174	0,113	0,062	0,049	0,023	0,004
1	0	0,099	0,064	0,04	0,031	0,02	0,006
2	0	0	0,031	0,025	0,018	0,013	0,008
3	0	0	0	0,001	0,002	0,004	0,011

Задача 4. Найти условный закон распределения:

1. составляющей X при условии, что составляющая Y приняла значение 0, если закон распределения двумерной дискретной случайной величины задан следующей таблицей:

Y \ X	3	5	7
0	0,10	0,20	0,30
1	0,05	0,15	0,20

2. отклонения внешнего диаметра втулки (Y) при условии, что отклонение внутреннего диаметра втулки (X) приняло значение 0,03 мм, если совместное распределение отклонений задано таблицей:

Y / X	0,002	0,004	0,006	0,008
0,01	0,01	0,03	0,04	0,02
0,02	0,02	0,24	0,10	0,04
0,03	0,04	0,15	0,08	0,03
0,04	0,04	0,06	0,08	0,02

Задача 5. Найти безусловные и условные законы распределения составляющих системы (X,Y).

1. Распределение 100 студентов по количеству пропущенных часов занятий (X) и экзаменационной оценке (Y) представлено в следующей таблице:

Y / X	2	3	4	5
0	0	5	10	10
4	5	15	20	15
10	10	5	5	0

2. Распределение хозяйств по дозам внесения удобрений (Y) и урожайности озимой пшеницы (X) приведено в следующей таблице:

X (ц с 1га) / Y (на1 га, ц д.в.)	до 35	30-35	35-40	свыше 40
до 1	18	a	5	0
1-2	a	15	20	10
свыше 2	0	a	12	20

3. Распределение двух случайных величин: X – числа клиентов банка, каждый

из которых берет в определенный день недели кредит на сумму, превышающую некоторую заданную критическую сумму, Y – число клиентов, каждый из которых вносит на дополнительный счет в этот же день сумму, превышающую критическую, задано двумерным рядом распределения:

$X \backslash Y$	0	1	2	3
0	0,02	0,1	0,1	0,03
1	0,11	0,21	0,04	0,03
2	0,05	0,13	0,03	0,02
3	0,04	0,05	0,02	0,02

Задача 6. Найти числовые характеристики (математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение) составляющих системы (X,Y).

1. Закон распределения системы (X,Y) задан следующей таблицей:

$Y \backslash X$	10	20	30
50	0,15	0,30	0,15
100	0,1	0,05	0,25

2. Закон распределения системы (X,Y) задан следующей таблицей:

$Y \backslash X$	-3	-2	-1
-2	$2a$	a	$5a$
-1	$4a$	$4a$	$8a$

Задача 7. Найти условные числовые характеристики одномерных составляющих X и Y:

1. условное математическое ожидание и условную дисперсию X при условии, что $Y=6$, если закон распределения двумерной дискретной случайной величины задан следующей таблицей:

Y / X	3	6
10	0,25	0,10
14	0,15	0,05
18	0,32	0,13

2. условное математическое ожидание и условную дисперсию Y при условии, что $X=3$, если закон распределения двумерной дискретной случайной величины задан следующей таблицей:

Y / X	0	1	2	3
0	0,01	0,02	0,03	0,01
1	0,02	0,1	0,3	0,01
2	0,03	0,3	0,1	0,03
3	0,01	0,01	0,01	0,01

Задача 8. Выяснить, зависимы ли случайные величины X и Y и найти вероятность события A:

1. $A=\{X>0,\ 1\le Y<3\}$. Закон распределения системы (X,Y) задан следующей таблицей:

Y / X	1	2	3
0	0,08	0,12	0,2
1	0,12	0,18	0,3

2. $A=\{X<2,\ Y<1\}$. Закон распределения системы (X,Y) задан следующей таблицей:

Y / X	-1	0	1
0	0,01	0,04	0,05
1	0,06	0,24	0,10

2	0,05	0,15	0,10
3	0,04	0,07	0,09

Задача 9. Найти ковариацию и коэффициент корреляции.

1. Закон распределения системы (X,Y) задан следующей таблицей:

Y \ X	1	2	3
1	0,2	0	0,2
2	0	0,6	0

2. Закон распределения системы (X,Y) задан следующей таблицей:

X \ Y	1	3	5	8	9
7	0,04	0,04	0,03	0,03	0,05
9	0,04	0,07	0,06	0,05	0,03
11	0,01	0,08	0,09	0,08	0,03
13	0,03	0,04	0,04	0,06	0,08

Двумерные непрерывные случайные величины

Задача 1. Является ли функция $F(x,y)$ функцией распределения некоторого случайного вектора?

1. $F(x,y)=xy$, $x,y\in R$.

2. $F(x,y)=\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{2}+arctgx\right)\cdot\left(\frac{\pi}{2}+arctgy\right)$, $x,y\in R$.

Задача 2. Найти плотность вероятности системы (X,Y).

1. Функция распределения системы (X,Y):

$$F(x,y)=\begin{cases}\left(1-e^{-4x}\right)\cdot\left(1-e^{-2y}\right), & \text{если } x\geq 0 \text{ и } y\geq 0;\\ 0, & \text{если } x<0 \text{ или } y<0.\end{cases}$$

2. Функция распределения системы (X,Y):

$$F(x,y)=\begin{cases}0, & \text{если } x\le -1,\ y\le 0;\\ 0{,}25(x+1)y, & \text{если } -1<x\le 10,\ 0<y\le 2,\\ 0{,}5(x+1), & \text{если } -1<x\le 1,\ y\ge 2,\\ 0{,}5y, & \text{если } x>1,\ 0<y\le 2,\\ 1, & \text{если } x>1,\ y>2.\end{cases}$$

3. Система двух независимых случайных величин (X,Y) распределена по нормальному закону с параметрами $a_1=3$, $a_2=-2$; $\sigma_1=3$, $\sigma_2=4$.

Задача 3. Найти коэффициент a и функцию распределения системы (X,Y).

1. $f(x,y)=\begin{cases}a\sin(x+y), & \text{если } 0\le x\le \dfrac{\pi}{2},\ \ 0\le y\le \dfrac{\pi}{2};\\ 0, & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$

2. Система случайных величин (X,Y) имеет плотность вероятности

$f(x,y)=\dfrac{a}{1+x^2+y^2+x^2y^2}$.

3. Система случайных величин (X,Y) имеет плотность вероятности

$f(x,y)=a\,e^{-(x+1)^2-|y|}$.

Задача 4. Для независимых случайных величин X и Y найти плотность вероятности и функцию распределения системы (X,Y).

1. Случайные величины X и Y равномерно распределены соответственно в промежутках $[-1;1]$ и $[0;2]$.

2 Случайные величины X и Y подчинены показательному закону:

$f_1(x)=\begin{cases}2e^{-2x}, & \text{если } x>0;\\ 0, & \text{если } x\le 0.\end{cases}$ $\qquad f_2(y)=\begin{cases}5e^{-5y}, & \text{если } x>0;\\ 0, & \text{если } x\le 0.\end{cases}$

Задача 5. Найти одномерные плотности вероятности случайных величин X и Y, найти вероятность события A:

1. $f_1(x)$ -? известна совместная плотность распределения

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{216}\cdot(x+y), & \text{если } 0\le x\le 6,\ \ 0\le y\le 6;\\ 0, & \text{в остальных случаях.}\end{cases}.$$

$A=\{X>2\}$.

2. $f_1(x)$ -? известна совместная плотность распределения

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{3}{8}\cdot(x+y), & если\quad 0\le x+y\le 2,\quad x\ge 0,\; y\ge 0;\\ 0, & в\ остальных\quad случаях.\end{cases}$$

$$A=\left\{\ \frac{1}{2}\le X<1, Y<1\right\}.$$

3. $f_2(y)$ -? известна совместная плотность распределения

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{3}{32}\cdot(x^2+y^2), & если\quad 0\le x\le 2,\quad 0\le y\le 2;\\ 0, & в\ остальных\quad случаях.\end{cases}.$$

$$A=\{Y>1\}.$$

4. $f_1(x)$, $f_2(y)$ -? Система двух независимых случайных величин (X,Y) распределена по нормальному закону с параметрами $a_1=3$, $a_2=-2$; $\sigma_1=3$, $\sigma_2=4$.

$$A=\{\ 1\le X\le 5, -6\le Y\le 2\}.$$

Задача 6. Найти одномерные функции распределения случайных величин X и Y:

1. Известна совместная функция распределения

$$F(x,y)=\begin{cases}1-e^{-x^2}-e^{-2y}+e^{-x^2-2y}, & если\ x\ge 0\ и\ \ y\ge 0;\\ 0, & если\ x<0\ или\ \ y<0.\end{cases}.$$

2. Известна совместная плотность распределения

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{3}{2}\cdot xy^2, & если\quad 0\le x\le 2,\quad x\ge 0,\; 0\le y\le 1;\\ 0, & в\ остальных\quad случаях.\end{cases}$$

3. Плотности вероятности независимых случайных величин X и Y соответственно равны:

$$f_1(x)=\begin{cases}\dfrac{a}{\pi\sqrt{1-x^2}}, & если\quad |x|<1,\\ 0, & если\quad |x|\ge 1,\end{cases}\qquad f_2(y)=\frac{1}{\pi(1+y^2)}.$$

Задача 7. Найти двумерную плотность вероятности системы (X,Y), одномерные и условные плотности вероятности случайных величин X и Y:

1. Непрерывная двумерная случайная величина (X,Y) распределена равномерно внутри треугольника с вершинами $O(0,0)$, $A(0,6)$ и $B(6,0)$.

2. Система случайных величин (X,Y) распределена равномерно внутри квадрата

со стороной a, диагонали которого совпадают с осями координат.

Задача 8. Зависимы ли случайные величины X и Y?

1. Совместная плотность распределения случайных величин X и Y имеет вид

$$f(x,y)=\begin{cases} 2\lambda\, x\, e^{-\lambda y}, & \text{если } 0\le x\le 1,\quad y\ge 0; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

2. . Совместная плотность распределения случайных величин X и Y имеет вид

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}.$$

3. Совместное распределение случайных величин X и Y является равномерным в круге $x^2+y^2\le 1$.

Задача 9. Найти числовые характеристики (математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение) составляющих системы (X,Y), найти ковариацию и коэффициент корреляции.

1. Совместная плотность распределения случайных величин X и Y имеет вид

$$f(x,y)=\frac{1}{2}\cos(x-y),\ \text{при } 0\le x\le\frac{\pi}{2},\ 0\le y\le\frac{\pi}{2}.$$

2. Двумерная случайная величина распределена равномерно в треугольнике, ограниченном прямыми $x=0$, $y=0$, $4x+5y=20$.

3. Двумерная случайная величина распределена по нормальному закону с плотностью распределения $f(x,y)=\dfrac{9}{2\pi}e^{-\frac{9}{2}x^2+3x-5-12xy+13y-\frac{25}{2}y^2}$.

Задача 10. Найти уравнение регрессии Y на X и X на Y:

1. Двумерная случайная величина равномерно распределена в треугольнике $0<x<5,\quad 0<y<2-0{,}4x$.

2. . Совместная плотность распределения случайных величин X и Y имеет вид

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x+1}{\pi}, & \text{если } x^2+y^2\le 1; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

3. Двумерная случайная величина распределена по нормальному закону с плотностью распределения $f(x,y)=\dfrac{1}{2\pi}e^{-\frac{5}{2}x^2-10x-10-3xy-6y-y^2}$.

Ответы:

Двумерные дискретные случайные величины

1.1.

$X \backslash Y$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	0	0	0	0
2	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	0	0	0
3	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	0	0
4	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	0
5	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	0
6	0	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$

1.2.

$X \backslash Y$	0	1	2
0	$\frac{1}{84}$	$\frac{6}{84}$	$\frac{3}{84}$
1	$\frac{12}{84}$	$\frac{24}{84}$	$\frac{4}{84}$
2	$\frac{18}{84}$	$\frac{12}{84}$	0
3	$\frac{4}{84}$	0	0

1.3.

$X \backslash Y$	0	1	2	3
0	0	$\frac{3}{210}$	$\frac{9}{210}$	$\frac{3}{210}$
1	$\frac{4}{210}$	$\frac{36}{210}$	$\frac{36}{210}$	$\frac{4}{210}$
2	$\frac{18}{210}$	$\frac{54}{210}$	$\frac{18}{210}$	0
3	$\frac{12}{210}$	$\frac{12}{210}$	0	0

4	$\frac{1}{210}$	0	0	0

1.4.

Y / X	0	1	2
0	0	0	$\frac{1}{35}$
1	0	$\frac{6}{35}$	$\frac{6}{35}$
2	$\frac{3}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{3}{35}$
3	$\frac{2}{35}$	$\frac{2}{35}$	0

1.5.

Y / X	0	1	2	3	4
0	0,0064	0,0192	0,0144	0	0
1	0	0,0512	0,1536	0,1152	0
2	0	0	0,1024	0,3072	0,2304

1.6.

Y / X	1	2	3
0	0	$\frac{1}{6}$	0
1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{6}$
2	0	$\frac{1}{6}$	0

2.1.

x_i	0	1
p_i	0,3	0,7

y_j	-1	0	1
p_j	0,3	0,5	0,2

2.2.

x_i	2,3	2,7
p_i	0,29	0,71

y_j	26	30	41	50
p_j	0,14	0,42	0,19	0,25

3.1.

y / x	$y \le 1$	$1 < y \le 2$	$2 < y \le 3$	$y > 3$
$x \le 1$	0	0	0	0
$1 < x \le 2$	0	0,12	0,26	0,36
$x > 2$	0	0,33	0,78	1

3.2.

y / x	$y \le 0$	$0 < y \le 1$	$1 < y \le 2$	$2 < y \le 3$	$3 < y \le 4$	$4 < y \le 5$	$5 < y \le 6$	$y > 6$
$x \le 0$	0	0	0	0	0	0	0	0
$0 < x \le 1$	0	0, 202	0,376	0,489	0,551	0,6	0,623	0,627
$1 < x \le 2$	0	0, 202	0,475	0,652	0,754	0,834	0,877	0,887
$2 < x \le 3$	0	0, 202	0,475	0,683	0,81	0,908	0,964	0,982
$x > 3$	0	0, 202	0,475	0,683	0,811	0,911	0,971	1

4.1.

x_i	3	5	7
$p_i(X = x_i / Y = 0)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

4.2.

y_j	0,002	0,004	0,006	0,008
$p_j(Y = y_j / X = 0{,}03)$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{10}$

5.3.

Безусловные распределения составляющих:

x_i	0	1	2	3
p_i	0,25	0,39	0,23	0,13

y_j	0	1	2	3
p_j	0,22	0,49	0,19	0,1

Условные распределения X при каждом возможном значении Y:

x_i	0	1	2	3
$p_i(X = x_i / Y = 0)$	0,0909	0,5	0,2273	0,1818

x_i	0	1	2	3
$p_i(X = x_i / Y = 1)$	0,2041	0,4286	0,2653	0,1020

x_i	0	1	2	3
$p_i(X = x_i / Y = 2)$	0,5263	0,2105	0,1579	0,1053

x_i	0	1	2	3
$p_i(X = x_i / Y = 1)$	0,3	0,3	0,2	0,2

Условные распределения Y при каждом возможном значении X:

y_j	0	1	2	3
$p_j(Y = y_j / X = 0)$	0,08	0,4	0,4	0,12

y_j	0	1	2	3
$p_j(Y = y_j / X = 1)$	0,2821	0,5385	0,1026	0,0769

Проверка: ошибка округления до 4-х верных цифр после запятой равна 0,0001 с избытком.

y_j	0	1	2	3
$p_j(Y = y_j / X = 2)$	0,2174	0,5652	0,1304	0,087

y_j	0	1	2	3
$p_j(Y = y_j / X = 3)$	0,3077	0,3846	0,1538	0,1538

Проверка: ошибка округления до 4-х верных цифр после запятой равна 0,0001 с недостатком.

6.1. $M(X) = 1{,}64$, $M(Y) = 1{,}89$, $D(X) = 0{,}2304$, $D(Y) = 0{,}7579$, $\sigma(X) = 0{,}48$, $\sigma(Y) = 0{,}87$.

6.2. $M(X) = 1{,}4$, $M(Y) = 0{,}8$, $D(X) = 0{,}64$, $D(Y) = 0{,}16$, $\sigma(X) = 0{,}8$, $\sigma(Y) = 0{,}4$.

7.1. $M_{Y=6}(X) = \dfrac{404}{28} \approx 14{,}43$, $D_{Y=6}(X) = \dfrac{6192}{28} \approx 221{,}14$.

7.2. $M_{X=3}(Y) = 1{,}5$, $D_{X=3}(Y) = 1{,}25$.

8.1. Независимы, $P(A) = 0{,}3$.

8.2. Зависимы, $P(A) = 0{,}35$.

9.1. $\mu_{xy} = 0$, $r_{xy} = 0$.

9.2. $\mu_{xy} = 0{,}886$, $r_{xy} = 0{,}15$.

Двумерные непрерывные случайные величины

1.1. нет.

1.2. да.

2.1. $f(x,y) = \begin{cases} 0, & \textit{если } x < 0 \textit{ или } y < 0, \\ 8e^{-4x-2y}, & \textit{если } x \ge 0,\ y \ge 0. \end{cases}$

2.2. $f(x,y) = \begin{cases} 0, & \textit{если } x < -1 \textit{ или } x > 1, \quad y < 0 \textit{ или } y > 2, \\ 0{,}25, & \textit{если } -1 < x \le 1, \quad 0 < y \le 2. \end{cases}$

2.3. $f(x,y) = \dfrac{1}{16\pi}\, e^{-\frac{4(x-3)^2+(y+2)^2}{32}}$.

3.1. $a = \dfrac{1}{2}$, $F(x,y) = \dfrac{1}{2}(\sin x + \sin y - \sin(x+y))$, *при* $0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$, $0 \le y \le \dfrac{\pi}{2}$, *иначе* $F(x,y) = 0$.

3.2. $a = \dfrac{1}{\pi^2}$, $F(x,y) = \left(0{,}5 + \dfrac{1}{\pi} arctg\ x\right)\cdot\left(0{,}5 + \dfrac{1}{\pi} arctg\ y\right)$.

3.3. $a = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}$, $F(x,y) = \begin{cases} \left[0{,}5 + \Phi\left(\sqrt{2}(x+1)\right)\right]\cdot 0{,}5e^{y}, & y \le 0, \\ \left[0{,}5 + \Phi\left(\sqrt{2}(x+1)\right)\right]\cdot 0{,}5(2 - e^{y}), & y > 0. \end{cases}$

4.1. $f(x,y) = \begin{cases} 0, & \textit{если } x < -1 \textit{ или } x > 1,\ y < 0 \textit{ или } y > 2, \\ 0{,}25, & \textit{если } -1 < x < 1,\ 0 < y < 2. \end{cases}$

$$F(x,y) = \begin{cases} 0, & \textit{если } x \le -1 \textit{ или } y \le 0, \\ 0{,}25(x+1)y, & \textit{если } -1 < x \le 2,\ 0 < y \le 2, \\ 0{,}5(x+1), & \textit{если } -1 < x \le 2,\ y > 2, \\ 0{,}5y, & \textit{если } x > 1,\ 0 < y \le 2, \\ 1, & \textit{если } x > 1,\ y > 2. \end{cases}$$

4.2. $f(x,y) = \begin{cases} 10e^{-(2x+5y)}, & \textit{если } x \ge 0 \textit{ и } y \ge 0; \\ 0, & \textit{если } x < 0 \textit{ или } y < 0. \end{cases}$

$$F(x,y) = \begin{cases} \left(1 - e^{-2x}\right)\cdot\left(1 - e^{-5y}\right), & \textit{если } x \ge 0 \textit{ и } y \ge 0; \\ 0, & \textit{если } x < 0 \textit{ или } y < 0. \end{cases}$$

5.1. $f_1(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{36}(x+3), & \textit{если } 0 \le x \le 6; \\ 0, & \textit{в остальных случаях.} \end{cases}$, $P(A) = \dfrac{11}{18}$.

5.2. $f_1(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{16}\left(4-x^2\right), & \text{если } 0\le x\le 2;\\ 0, & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$, $P(A)=\dfrac{15}{64}$.

5.3. $f_2(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{16}y^2, & \text{если } 0\le y\le 2;\\ 0, & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$, $P(A)=\dfrac{11}{16}$.

5.4. $f_1(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-3)^2}{8}}$; $f_2(y)=\dfrac{1}{4\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y+2)^2}{32}}$, $P(A)\approx 0{,}47$

6.1. $F_1(x)=\begin{cases}1-e^{-x^2}, & \text{если } x\ge 0;\\ 0, & \text{если } x<0.\end{cases}$ $F_2(y)=\begin{cases}1-e^{-2y}, & \text{если } y\ge 0;\\ 0, & \text{если } y<0.\end{cases}$

6.2. $F_1(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{4}, & \text{если } 0<x\le 2,\\ 1, & \text{если } x>2.\end{cases}$ $F_2(y)=\begin{cases}0, & \text{если } y\le 0,\\ y^3, & \text{если } 0<y\le 1,\\ 1, & \text{если } y>1.\end{cases}$

6.3. $F_1(x)=\begin{cases}0 & ,\text{если } x\le 1,\\ 0{,}5+\dfrac{1}{\pi}\arcsin x, & \text{если } -1<x\le 1,\\ 1, & \text{если } x>1.\end{cases}$ $F_2(y)=0{,}5+\dfrac{1}{\pi}arctg\ y$;

7.1. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{18}, & \text{внутри треугольника;}\\ 0, & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$

$f_1(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{18}x, & \text{если } 0\le x\le 6;\\ 0, & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$, $f_2(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{18}y, & \text{если } 0\le y\le 6;\\ 0, & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$,

$f_y(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{6-y}, & \text{если } 0\le y\le 6;\\ 0, & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$,

$f_x(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{6-x}, & \text{если } 0\le x\le 6;\\ 0, & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$.

7.2. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{a^2}, & \text{внутри квадрата;}\\ 0, & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$

$$f_1(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{a^2}\left(a\sqrt{2}-2|x|\right), & \textit{если } |x|\le\dfrac{a\sqrt{2}}{2};\\ 0, & \textit{в остальных случаях}.\end{cases}, \quad f_2(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{a^2}\left(a\sqrt{2}-2|y|\right), & \textit{если } |y|\le\dfrac{a\sqrt{2}}{2};\\ 0, & \textit{в остальных случаях}.\end{cases},$$

$$f_y(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{a\sqrt{2}-2|y|}, & \textit{если } |x\pm y|\le\dfrac{a\sqrt{2}}{2};\\ 0, & \textit{в остальных случаях}.\end{cases}.$$

$$f_x(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{a\sqrt{2}-2|x|}, & \textit{если } |x\pm y|\le\dfrac{a\sqrt{2}}{2};\\ 0, & \textit{в остальных случаях}.\end{cases}.$$

8.1. Независимы.

8.2. Независимы.

8.3. Зависимы.

9.1. $M(X)=M(Y)\approx 0{,}785$, $D(X)=D(Y)\approx 0{,}188$, $\sigma(X)=\sigma(Y)\approx 0{,}43$, $\mu_{xy}\approx 0{,}046$, $r_{xy}\approx 0{,}246$.

9.2. $M(X)=\dfrac{5}{3}$, $M(Y)=\dfrac{4}{3}$, $D(X)=\dfrac{25}{18}$, $D(Y)=\dfrac{8}{9}$, $\sigma(X)=\dfrac{5\sqrt{2}}{6}$, $\sigma(Y)=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$, $\mu_{xy}=-\dfrac{5}{9}$, $r_{xy}=-\dfrac{1}{2}$.

9.3. $M(X)=-1$, $M(Y)=1$, $D(X)=\dfrac{25}{81}$, $D(Y)=\dfrac{1}{9}$, $\sigma(X)=\dfrac{5}{9}$, $\sigma(Y)=\dfrac{1}{3}$, $\mu_{xy}=-\dfrac{4}{27}$, $r_{xy}=-\dfrac{4}{5}$.

10.1 . $M_x(Y)=1-\dfrac{1}{5}x$ *при* $0<x<5$, $M_y(X)=\dfrac{5}{2}-\dfrac{5}{4}y$ *при* $0<y<2$.

10.2. $M_x(Y)=0$, $M_y(X)=\dfrac{1}{3}\left(1-y^2\right)$ *при* $|y|\le 1$.

10.3. $M_x(Y)=-1{,}5x-3$, $M_y(X)=2-0{,}6y$.

Вопросы для самопроверки

1. Что понимают под многомерной случайной величиной?
2. Что понимают под законом распределения многомерной случайной величины?
3. Какие виды законов распределения для двумерной случайной величины?
4. Определение и свойства плотности двумерной случайной величины?
5. Определение и свойства функции распределения двумерной случайной величины?
6. Какая существует связь между плотностью и функцией распределения вероятностей двумерной случайной величины?
7. Что такое условный и безусловный законы распределения случайной величины, входящей в систему?
8. Дайте определение независимости случайных величин. Сформулируйте необходимое и достаточное условия независимости случайных величин.
9. Дайте определения основных числовых характеристик условных распределений.
10. Дайте определения основных числовых характеристик системы случайных величин
11. Что называют коэффициентом корреляции, ковариацией двух случайных величин, каковы их свойства?
12. Какие величины называются коррелированными? Взаимосвязь коррелированности и независимости.
13. Двумерное нормальное распределение.

Итоговый тест

Вариант 1*

Выберите правильный ответ:

1. *Плотность распределения двумерной случайной величины принимает значения*

а) положительные;

б) отрицательные;

в) неотрицательные;

г) неположительные.

2. *Функция распределения* $F(x,y)$, *если известна плотность распределения* $f(x,y)$, *определяется по формуле:*

а) $F(x,y)=\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y} f(x,y)dxdy$;

б) $F(x,y)=\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy$;

в) $F(x,y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy$;

г) $F(x,y)=\int\limits_{x}^{+\infty}\int\limits_{y}^{+\infty} f(x,y)dxdy$.

3. *Плотность распределения случайной величины* X, *входящей в систему* (X,Y) *выражается через плотность распределения системы:*

а) $f_1(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$;

б) $f_1(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy$;

в) $f_1(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(x,y)dy$;

* Остальные варианты см. Теория вероятностей. Случайные величины: варианты заданий в тестовой форме / Кобелькова Е.В., Лосева Н.А. Магнитогорск: МГТУ, 2010. 65 с.

г) $f_1(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$.

4. *Если случайные величины X и Y независимы, то для них выполняется следующее соотношение:*

а) $F_x(y)=F_1(x)$;

б) $F_x(y)=F(x,y)$;

в) $F_x(y)=F_2(y)$;

г) $F_x(y)=F_y(x)$.

5. *Условное математическое ожидание $M_x(Y)$, непрерывной случайной величины Y вычисляется по формуле:*

а) $M_x(Y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} xf_x(y)dx;$

б) $M_x(Y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} yf_x(y)dy;$

в) $M_x(Y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} yf_y(x)dy;$

г) $M_x(Y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} xf_y(x)dx$.

6. *Начальный момент ν_{KS} порядка $K+S$ системы (X,Y) это*

а) $M\left[(x\cdot y)^{K+S}\right]$;

б) $M\left[X^K\cdot Y^S\right]$;

в) $M\left[X^K\right]\cdot M\left[Y^S\right]$;

г) $M^{K+S}[X\cdot Y]$.

7. *Для дискретных случайных величин центральный момент μ_{KS} порядка $K+S$ вычисляется по формуле:*

а) $\mu_{xy}=\sum\limits_{j=1}^{m}\sum\limits_{i=1}^{n}\left[(x_i-M(X))\cdot(y_j-M(Y))\right]^{K+S}p_{ij}$;

б) $\mu_{xy}=\sum\limits_{j=1}^{m}\sum\limits_{i=1}^{n}\left[(x_i-M(X))\cdot(y_j-M(Y))\right]p_{ij}^{\;K+S}$;

в) $\mu_{xy} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\left[(x_i - M(X))^K \cdot (y_j - M(Y))^S\right] p_{ij}$;

г) $\mu_{xy} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} x_i y_j p_{ij}^{K+S}$.

Вместо знака «?» укажите значение величины (функцию):

8. *Закон распределения системы* (X,Y) *задан таблицей:*

$X \backslash Y$	0	1
0	0,2	0,3
1	0,1	**?**

9. *Закон распределения системы* (X,Y) *задан таблицей в задании 8.*

$M(XY) = \textbf{?}$

10. *Закон распределения системы* (X,Y) *задан таблицей в задании 8.*

Область $\Omega : \{-1 < x < 1,\quad 0 < y < 1\}$.

$P((X,Y) \in \Omega) = \textbf{?}$

11. *Закон распределения системы* (X,Y) *задан таблицей:*

$X \backslash Y$	-1	0	1
0	0,5	0,1	0,05
2	0,15	0,1	0,1

Тогда

X	0	2
p_i	**?**	**?**

12. *Закон распределения системы* (X,Y) *задан таблицей в задании 10.*

$P(Y = -1 / X = 2) = \textbf{?}$

13. *Закон распределения системы* (X,Y) *задан плотностью распределения:*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + ay, & \text{если} \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 2; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

$a = \textbf{?}$

14. *Система случайных величин (X,Y)равномерно распределена в области*

$$\Omega : \begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ 2x + 3y \le 12 \end{cases}.$$

$f(x,y) = ?$

15. *Независимые случайные величины заданы своими плотностями распределения:*

$$f_1(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{3} e^{-\frac{x}{3}}, & x \ge 0, \end{cases};$$

$$f_2(y) = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ \frac{1}{5} e^{-\frac{y}{5}}, & y \ge 0. \end{cases}$$

$f(x,y) = ?$

16. *Закон распределения системы (X,Y) задан функцией распределения.*

Область Ω - полуполоса, изображенная на Рисунок 16.

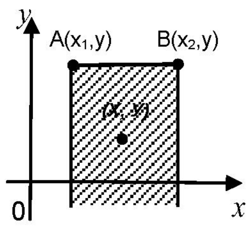


Рисунок 16.

$P((X,Y) \in \Omega) = ?$

17. *Закон распределения системы (X,Y) задан функцией распределения:*

$$F(x,y) = \begin{cases} 1 - 3^{-x} - 3^{-y} + 3^{-x-y}, & \text{если} \quad x \ge 0, \quad y \ge 0; \\ 0, & \text{в остальных случаях}. \end{cases}$$

Область $\Omega : \{0 < x < 1, \quad 0 < y < 1\}$.

$P((X,Y) \in \Omega) = ?$

18. $D(X) = 0{,}49$; $D(Y) = 0{,}25$; $\mu_{xy} = -0{,}07$.

$r_{xy} = ?$

19. $P(X = 50) = 0{,}7$; $P(X = 60) = 0{,}3$; $M_{x=50}(Y) = 4$; $M_{x=60}(Y) = 2$.

$M(Y) = ?$

Установите соответствие:

20.

1) X и Y независимые	а) Закон распределения системы (X,Y) задан плотностью распределения
2) X и Y некоррелируемые	б) Закон распределения системы (X,Y) задан таблицей
3) X и Y непрерывные	в) Плотность распределения равна произведению плотностей распределения одномерных составляющих
4) X и Y дискретные	г) Коэффициент корреляции равен нулю

21.

Функция (величина)	Свойство
1) $f(x,y)$	а) Значения по модулю меньше или равны единице
2) $F(x,y)$	б) Значения заключены между нулем и единицей
3) r_{xy}	в) Двойной несобственный интеграл в бесконечных пределах от данной функции равен единице

Сформируйте формулу (предложение):

22. *Для создания формулы совместной плотности двумерного нормального распределения выберите необходимые элементы, и запишите формулу.*

$$f(x,y)=\frac{1}{?\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2\left(1-?^2\right)}\left[\left(\frac{x-a_x}{?}\right)^2+\left(\frac{y-a_y}{?}\right)^2-2\rho\left(\frac{x-a_x}{?}\right)\cdot\left(\frac{y-a_y}{?}\right)\right]}.$$

Элементы для конструирования:

а) 2; б) 2π; в) a_x; г) a_y;

д) σ_x; е) σ_y; ж) ρ; з) μ_{xy}.

23. *Вставьте в предложение вместо многоточия нужные равенства (слова):*

Пусть задан двумерный нормальный закон распределения совместной плотностью. Если **…**, то случайные величины X и Y **…**, если при этом **…**, то нормальный закон примет канонический вид, при **...** получаем так называемое круговое нормальное распределение.

Элементы для конструирования:

а) зависимые; б) $a_x = a_y = 0$; в) $a_x = a_y$; г) $\rho = 0$;

д) независимые; е) $\sigma_x = \sigma_y = 0$; ж) $\sigma_x = \sigma_y$; з) $\rho \neq 0$.

Таблица значений функции $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$															
x	*Φ(x)*	*x*	*Φ(x)*	*x*	*Φ(x)*	*x*	*Φ(x)*	*x*	*Φ(x)*	*x*	*Φ(x)*	*x*	*Φ(x)*	*x*	*Φ(x)*

Приложение

0,00	0,0000	0,32	0,1255	0,64	0,2389	0,96	0,3315	1,26	0,3962	1,59	0,4441	1,92	0,4726	2,50	0,4938
0,01	0,0040	0,33	0,1293	0,65	0,2422	0,97	0,3340	1,27	0,3980	1,60	0,4452	1,93	0,4732	2,52	0,4941
0,02	0,0080	0,34	0,1331	0,66	0,2454	0,98	0,3365	1,28	0,3997	1,61	0,4463	1,94	0,4738	2,54	0,4945
0,03	0,0120	0,35	0,1368	0,67	0,2486	0,99	0,3389	1,29	0,4015	1,62	0,4474	1,95	0,4744	2,56	0,4948
0,04	0,0160	0,36	0,1406	0,68	0,2517	1,00	0,3413	1,30	0,4032	1,63	0,4484	1,96	0,4750	2,58	0,4951
0,05	0,0199	0,37	0,1443	0,69	0,2549	1,01	0,3438	1,31	0,4049	1,64	0,4495	1,97	0,4756	2,60	0,4953
0,06	0,0239	0,38	0,1480	0,70	0,2580	1,02	0,3461	1,32	0,4066	1,65	0,4505	1,98	0,4761	2,62	0,4956
0,07	0,0279	0,39	0,1517	0,71	0,2611	1,03	0,3485	1,33	0,4082	1,66	0,4515	1,99	0,4767	2,64	0,4959
0,08	0,0319	0,40	0,1554	0,72	0,2642	1,04	0,3508	1,34	0,4099	1,67	0,4525	2,00	0,4772	2,66	0,4961
0,09	0,0359	0,41	0,1591	0,73	0,2673	1,05	0,3531	1,35	0,4115	1,68	0,4535	2,02	0,4783	2,68	0,4963
0,10	0,0398	0,42	0,1628	0,74	0,2703	1,06	0,3554	1,36	0,4131	1,69	0,4545	2,04	0,4793	2,70	0,4965
0,11	0,0438	0,43	0,1664	0,75	0,2734	1,07	0,3577	1,37	0,4147	1,70	0,4554	2,06	0,4803	2,72	0,4967
0,12	0,0478	0,44	0,1700	0,76	0,2764	1,08	0,3599	1,38	0,4162	1,71	0,4564	2,08	0,4812	2,74	0,4969
0,13	0,0517	0,45	0,1736	0,77	0,2794	1,09	0,3621	1,49	0,4177	1,72	0,4573	2,10	0,4821	2,76	0,4971
0,14	0,0557	0,46	0,1772	0,78	0,2823	1,10	0,3643	1,40	0,4192	1,73	0,4582	2,12	0,4830	2,78	0,4973
0,15	0,0596	0,47	0,1808	0,79	0,2852	1,11	0,3665	1,41	0,4207	1,74	0,4591	2,14	0,4838	2,80	0,4974
0,16	0,0636	0,48	0,1844	0,80	0,2881	1,12	0,3686	1,42	0,4222	1,75	0,4599	2,16	0,4846	2,82	0,4976
0,17	0,0675	049	0,1879	0,81	0,2910	1,13	0,3708	1,43	0,4236	1,76	0,4608	2,18	0,4854	2,84	0,4977
0,18	0,0714	0,50	0,1915	0,82	0,2939	1,14	0,3729	1,44	0,4251	1,77	0,4616	2,20	0,4861	2,86	0,4979
0,19	0,0753	0,51	0,1950	0,83	0,2967	1,15	0,3749	1,45	0,4265	1,78	0,4625	2,22	0,4868	2,88	0,4980
0,20	0,0793	0,52	0,1985	0,84	0,2995	1,16	0,3770	1,46	0,4279	1,79	0,4633	2,24	0,4875	2,90	0,4981
0,21	0,0832	0,53	0,2019	0,85	0,3023	1,17	0,3790	1,47	0,4292	1,80	0,4641	2,26	0,4881	2,92	0,4982
0,22	0,0871	0,54	0,2054	0,86	0,3051	1,18	0,3810	1,48	0,4306	1,81	0,4649	2,28	0,4887	2,94	0,4984
0,23	0,0910	0,55	0,2088	0,87	0,3078	1,19	0,3830	1,59	0,4319	1,82	0,4656	2,30	0,4893	2,96	0,4985
0,24	0,0948	0,56	0,2123	0,88	0,3106	1,20	0,3849	1,50	0,4332	1,83	0,4664	2,32	0,4898	2,98	0,4986
0,25	0,0987	0,57	0,2157	0,89	0,3133	1,21	0,3869	1,51	0,4345	1,84	0,4671	2,34	0,4904	3,00	0,49865
0,26	0,1026	0,58	0,2190	0,90	0,3159	1,22	0,3883	1,52	0,4357	1,85	0,4678	2,36	0,4909	3,20	0,49931
0,27	0,1064	0,59	0,2224	0,91	0,3186	1,23	0,3907	1,53	0,4370	1,86	0,4686	2,38	0,4913	3,40	0,49966
0,28	0,1103	0,60	0,2257	0,92	0,3212	1,24	0,3925	1,54	0,4382	1,87	0,4693	2,40	0,4918	3,60	0,499811
0,29	0,1141	0,61	0,2291	0,93	0,3238	1,25	0,3944	1,55	0,4394	1,88	0,4699	2,42	0,4922	3,80	0,499926
0,30	0,1179	0,62	0,2324	0,94	0,3264			1,56	0,4406	1,89	0,4706	2,44	0,4927	4,00	0,499968
0,31	0,1217	0,63	0,2357	0,95	0,3289			1,57	0,4418	1,90	0,4713	2,46	0,4931	4,50	0,499997
								1,58	0,4429	1,91	0,4719	2,48	0,4934	5,00	0,499997

Список литературы

1. Андрухаев Х. М. Сборник задач по теории вероятностей: Учеб. пособие для студентов пед. ин-тов по спец. 2104 «Математика», «Математика с доп. спец. физика» и 2105 «Физика с доп. спец. математика» / Под ред. А.С. Солодовникова. – М.: Просвещение, 1985. – 160 с.
2. Бородин А.Н. Элементарный курс теории вероятностей и математической статистики. Серия «Учебники для вузов. Специальная литература» / Оформление обложки С. Шапиро, А. Олексенко. – СПб.: Издательство «Лань», 1999. – 224с.
3. Браилов А. В., Рябов П.Е, Теория вероятностей и математическая статистика: методические указания по выполнению самостоятельной работы. Часть 3. Учебное издание для студентов общеэкономических специальностей. М.: Финансовая академия при Правительстве РФ, кафедра «Математика и финансовые приложения», 2006. – 76с.
4. Браилов А.В., Гончаренко В.М., Коннов В.В. Вопросы и задачи по теории вероятностей. Учебное издание для студентов общеэкономических специальностей. М.: Финансовая академия при Правительстве РФ, кафедра «Математика и финансовые приложения», 2006. – 52 с.
5. Венцель Е. С.. Задачи и упражнения по теории вероятностей: Учеб. для вузов / Е. С. Венцель., Л.А. Овчаров. – 5-е изд., испр., – М.: Издательский центр «Академия», 2003. – 448 с.
6. Венцель Е. С.. Теория вероятностей: Учеб. для вузов / Е. С. Венцель. – 8-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2002. – 575 с.: ил.
7. Гмурман В.Е. Руководство крешению задач по теории вероятностей и математической статистике: Учеб. пособие. – 11-е изд., перераб. – М.: Высшее образование, 2007. – 404 с. – (Основы наук).
8. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М: Высшая школа, 1977. - 397 с.
9. Горелова Г.В., Кацко И.А. Теория вероятностей и математическая статистика в примерах и задачах с применением Excel. – Ростов-на-Дону: Феникс, 2002. – 400 с., ил.

10. Гурский Е.И. Теория вероятностей с элементами математической статистики. М: Высшая школа, 1971. - 270 с.
11. Гусак А. А. Теория вероятностей: справ. пособ. к решению задач / А. А. Гусак, Е. А. Бричникова. – 5-е изд. – Мн.: ТетраСистемс, 2006. – 288с.
12. Данко П.Е. Попов А.Г. Кожевников Т.Я. Высшая математика, в упражнениях и задачах. Высшая школа, 1980. Т.3.- с.
13. Кибзун А.И., Горяинова Е.Р., Наумов А.В.,.Сиротин А.Н. Теория вероятностей и математическая статистика. Базовый курс с примерами и задачами. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. - 224 с.
14. Кимайкина Н.И, и др. Теория вероятностей и математическая статистка. Учебные карты. Магнитогорск, МГМИ, 1991. - 20 с
15. Кремер Н.Ш, Теория вероятностей и математическая статистика. - М.: 2007г.- с.
16. Лисьев В.П.Теория вероятностей и математическая статистика: Учебное пособие/ Московский государственный университет экономики, статистики и информатики. – М., 2006. – 199 с.
17. Письменный Д.Т. Конспект лекций по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Айрис-пресс, 2004. – 256 с. – (Высшее образование).
18. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций под ред. А. А. Свешникова, М., 1965. – 632с.: ил.
19. Теория вероятностей в примерах и задачах: Учебное пособие / В. А. Колемаев, В. Н. Калинина, В. И. Соловьёв и др.; ГУУ. – М., 2001. – 87 с.
20. Теория вероятностей и математическая статистика в задачах: Учеб. пособие для вузо / В.А. Ватутин, Г.И. Ивченко, Ю.И. Медведев и др. – 2-е изд., испр. – М.: Дрофа, 2003. – 328с.: ил.
21. Тырсин А. Н. Математика. Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие. Челябинск : Челяб. гос. ун-т, 2007. - 235 с.
22. Четыркин Е.М., Калихман Н.А.. Вероятность статистика, М.: Финансы и статистика, 1982

Учебное текстовое электронное издание

Акманова Зоя Сергеевна

МНОГОМЕРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Учебное пособие

Издается полностью в авторской редакции
33,1 Мб
1 электрон. опт. диск

г. Магнитогорск, 2013 год
ФГБОУ ВПО «МГТУ»
Адрес: 455000, Россия, Челябинская область, г. Магнитогорск,
пр. Ленина 38

ФГБОУ ВПО «Магнитогорский государственный
технический университет им. Г.И. Носова»
Кафедра математики
Центр электронных образовательных ресурсов и
дистанционных образовательных технологий
e-mail: ceor_dot@mail.ru