



Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова»

А.А. Николаев

ТЕОРИЯ ФИЗИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ

*Утверждено Редакционно-издательским советом
университета в качестве учебного пособия*

Магнитогорск
2015

УДК 530.1 (075)

Рецензенты:

Заведующий кафедрой физики и МОФ ФГБОУ ВПО «Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова»,
кандидат физико–математических наук
В.В. Мавринский

Доцент кафедры физики и МОФ ФГБОУ ВПО «Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова»,
кандидат физико–математических наук
Д.М. Долгушин

Николаев А.А.

Теория физических полей [Электронный ресурс] : учебное пособие / Александр Александрович Николаев ; ФГБОУ ВПО «Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова». – Изд. 2-е, подгот. по печ. изд. 2014 г. – Электрон. текстовые дан. (1,50 Мб). – Магнитогорск : ФГБОУ ВПО «МГТУ», 2015. – 1 электрон. опт. диск (CD-R). – Систем. требования : IBM PC, любой, более 1 GHz ; 512 Мб RAM ; 10 Мб HDD ; MS Windows XP и выше ; Adobe Reader 8.0 и выше ; CD/DVD-ROM дисковод ; мышь. – Загл. с титул. экрана.

Приведена классификация видов и методов неразрушающегося контроля соответствующих ГОСТ, подробно рассмотрены различные физические поля и их источники, возникновение и распространение волн различной природы и формы. Описаны явления, связанные с взаимной трансформацией неоднородных упругих и электромагнитных волн в твердых телах (электромагнитно-акустическое преобразование – ЭМАП), поскольку ЭМАП успешно используется как бесконтактный метод измерения и оценки физико-механических свойств материалов и изделий.

Пособие может быть рекомендовано для студентов, в основе специализации которых используются физические измерения.

УДК 530.1 (075)

© Николаев А.А., 2014
© ФГБОУ ВПО «Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова», 2014

1. КЛАССИФИКАЦИЯ ВИДОВ И МЕТОДОВ НЕРАЗРУШАЮЩЕГО КОНТРОЛЯ

Согласно ГОСТ 18353–79 в основу классификации методов неразрушающего контроля положены физические процессы взаимодействия физического поля или вещества с объектом контроля. С точки зрения физических явлений, на которых они основаны, выделяют девять видов неразрушающего контроля: магнитный, электрический, вихретоковый, радиоволновой, тепловой, оптический, радиационный, акустический и проникающими веществами. Каждый из видов контроля подразделяют на методы по рассматриваемым ниже признакам.

Характер взаимодействия поля или вещества с объектом. Взаимодействие должно быть таким, чтобы контролируемый признак объекта вызывал определенные изменения поля или состояния вещества. Например, наличие несплошности вызывало изменение прошедшего через нее излучения или проникновение в нее пробного вещества. В некоторых случаях используемое для контроля физическое поле возникает под действием других физических эффектов, связанных с контролируемым признаком. Например, электродвижущая сила, возникающая при нагреве разнородных материалов, позволяет контролировать химический состав материалов (термоэлектрический эффект).

Первичный информативный параметр – конкретный параметр поля или вещества (амплитуда поля, время его распространения, количество вещества и т. д.), изменение которого используют для характеристики контролируемого объекта. Например, наличие несплошности увеличивает или уменьшает амплитуду прошедшего через нее излучения.

Способ получения первичной информации – конкретный тип датчика или вещества, который используют для измерения и фиксации упомянутого информационного параметра.

Довольно подробные сведения о видах контроля имеются в библиографическом списке.

Магнитный вид неразрушающего контроля основан на анализе взаимодействия магнитного поля с контролируемым объектом. Его, как правило, применяют для контроля объектов из ферромагнитных материалов. По характеру взаимодействия физического поля с объектом этот вид контроля не дифференцируют: во всех случаях используют намагничивание объекта и измеряют параметры, используемые при контроле магнитными методами. Процесс намагничивания и перемагничивания ферромагнитного материала сопровождается гистерезисными явлениями (рис. 1.1). Свойства, которые требуется контролировать (химический состав, структура, наличие несплошностей и др.), обычно связаны с параметрами процесса намагничивания и петлей гистерезиса.

Магнитожёсткие материалы (закаленная сталь), по сравнению с магнитомягкими материалами (незакаленной сталью), имеют большую коэрцитивную силу H_c , меньшую магнитную проницаемость $\mu = dB/dH$ и намагченность $I = (B/\mu_0) - H$, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} (\text{В}\cdot\text{с})/(\text{А}\cdot\text{м})$ – магнитная постоянная. Обычно μ и I для характеристики материала ферромагнетика измеряют при малой напряженности намагничивающего поля H . В некоторых случаях также измеряют остаточную намагченность B_r .

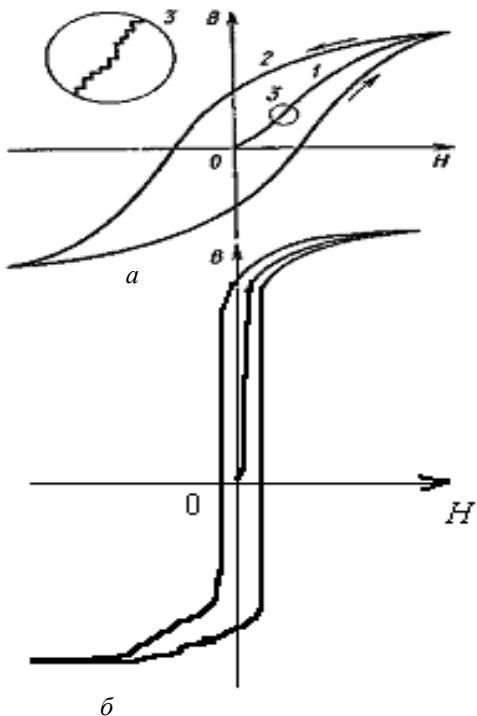


Рис. 1.1. Кривые намагничивания ферромагнитных материалов:
 a – магнитожёсткого; b – магнитомягкого
(1 – основная кривая намагничивания, 2 – петля гистерезиса,
3 – скачкообразный характер намагничивания, наблюдаемый
при точных измерениях)

Эти первичные информативные параметры используют для контроля степени закалки, прочностных характеристик и других свойств. Наличие и количество ферритной составляющей в неферромагнитном материале может быть определено по намагченности насыщения I_∞ ,

т.е. при больших полях намагничивания. Эта величина тем больше, чем больше содержание феррита. Магнитные методы применяют для измерения толщины неферромагнитного покрытия на ферромагнитном основании. В качестве первичного информативного параметра в этом случае используют поток магнитного поля.

П-образный магнит помещают на поверхность объекта контроля с покрытием. Чем меньше толщина покрытия, тем больше поток магнитного поля через ферромагнитное основание и меньше рассеянный поток над объектом контроля. Этот поток измеряют по напряженности поля под изделием. Другой способ оценки потоков основан на измерении силы, необходимой для того, чтобы оторвать некоторый пробный магнит от объекта контроля. Высокоточное измерение кривой намагничивания показывает, что она имеет скачкообразный характер (см. на рис. 1.1, кривая 3) в области крутого подъема. Это так называемый эффект Баркгаузена. Скачки возникают в результате перемагничивания областей спонтанного намагничивания (доменов), содержащихся в ферромагнитном материале. Параметры скачков кривой намагничивания (их число, величина, длительность, спектральный состав) используют как первичный информативный параметр для контроля таких свойств материала, как химсостав, структура, степень пластической деформации. Скачки сливаются в сплошной шум, если масса намагничиваемого материала велика, поэтому этот способ применяют к тонким проволокам, лентам.

При намагничивании объекта контроля, вблизи поверхности которого имеется несплошность (дефект), в области дефекта происходит резкое пространственное изменение напряженности магнитного поля, возникает поле рассеяния. Изменение напряженности магнитного поля, точнее градиента напряженности, используют как первичный информативный параметр для выявления дефектов.

Остаточное намагничивание, коэрцитивную силу и магнитный поток часто оценивают по пондеромоторному взаимодействию (притяжению) пробного магнита и контролируемого объекта. Информацию о магнитной проницаемости и ее изменении в зависимости от напряженности магнитного поля получают с помощью катушки индуктивности (*индуктивный метод*).

Дифференциацию магнитного вида неразрушающего контроля на различные методы по способу получения первичной информации рассмотрим на примере применения различных типов датчиков и веществ для обнаружения градиента магнитного поля вблизи несплошности. Градиент часто обнаруживают с помощью магнитного порошка или магнитной суспензии. Их частицы располагаются вдоль линий магнитной индукции поля рассеяния. Это *магнитопорошковый метод*, широко применяемый для дефектоскопии поверхностных и подповерхностных слоев ферромагнитных материалов.

Для надежного выявления дефект должен пересекать линии магнитной индукции поля. Исходя из этого, для обнаружения различно ориентированных дефектов применяют разные направления намагничивания.

Магнитопорошковым методом можно обнаруживать дефекты длиной около 0,5 мм, шириной 2,5 мм и более. При намагничивании постоянным магнитным полем выявляют дефекты, расположенные на глубине не более 2–3 мм от поверхности. При намагничивании переменным полем максимальная глубина выявляемых дефектов уменьшается.

Помимо магнитного порошка для регистрации рассеянного магнитного поля используют магнитную пленку типа применяемой в магнитофонах, но более широкую (*магнитографический метод*). Считывание сигналов о дефектах с пленки выполняют с помощью прибора, датчиком которого служит магнитофонная головка. Этим методом обнаруживают дефекты в более толстом поверхностном слое, но теряют наглядность их изображения, свойственную магнитопорошковому методу.

Для индицирования полей рассеивания на дефектах и измерения магнитных характеристик материалов также используют датчики типа ферроэндов (*феррозондовый метод*), преобразователей Холла, магниторезисторов (меняющих электросопротивление при внесении в магнитное поле).

Развитие магнитного вида контроля идет по пути изыскания способов отстройки от мешающих факторов, изучения особенностей магнитных полей изделий сложной формы, содержащих дефекты; разработки новых высокочувствительных преобразователей; использования потенциальных возможностей эффекта Баркгаузена, а также других магнитных эффектов, таких, как ядерный, электронный, магнитный резонансы, для целей контроля материалов и изделий.

Электрический вид неразрушающего контроля основан на регистрации параметров электрического поля, взаимодействующего с контролируемым объектом (собственно *электрический метод*), или поля, возникающего в контролируемом объекте в результате внешнего воздействия (*термоэлектрический* и *трибоэлектрический* методы). Первичными информативными параметрами являются электрические емкость или потенциал.

Емкостной метод применяют для контроля диэлектрических или полупроводниковых материалов. По изменению диэлектрической проницаемости, в том числе ее реактивной части (диэлектрическим потерям), контролируют химический состав пластмасс, полупроводников, наличие в них несплошностей, влажность сыпучих материалов и другие свойства.

Метод электрического потенциала применяют для контроля проводников. Измеряя падение потенциала на некотором участке, контролируют толщину проводящего слоя, наличие несплошностей вблизи поверхности проводника. Электрический ток огибает поверхностный де-

фект, по увеличению падения потенциала на участке с дефектом определяют глубину несплошности с погрешностью в несколько процентов.

Термоэлектрический метод применяют для контроля химического состава материалов. Например, нагретый до постоянной температуры медный электрод прижимают к поверхности изделия и по возникающей контактной разности потенциалов определяют марку стали, титана, алюминия или другого материала, из которого сделано изделие.

Вихревоковый вид неразрушающего контроля основан на анализе взаимодействия электромагнитного поля вихревокового преобразователя с электромагнитным полем вихревых токов, наводимых в контролируемом объекте. Его применяют только для контроля изделий из электропроводящих материалов. Вихревые токи возбуждают в объекте с помощью преобразователя в виде катушки индуктивности, питаемой переменным или импульсным током. Приемным преобразователем (измерителем) служит та же или другая катушка. Возбуждающую и приемную катушки располагают либо с одной стороны, либо по разные стороны от контролируемого объекта (*метод прохождения*).

Интенсивность и распределение вихревых токов в объекте зависят от его геометрических размеров, электрических и магнитных свойств материала, от наличия в материале нарушений сплошности, взаимного расположения преобразователя и объекта, т.е. от многих параметров. Это определяет большие возможности метода как средства контроля различных свойств объекта, но в то же время затрудняет его применение, так как при контроле одного параметра другие являются мешающими. Для разделения параметров используют раздельное или совместное измерение фазы, частоты и амплитуды сигнала измерительного преобразователя, подмагничивание изделия постоянным магнитным полем, ведут контроль одновременно на нескольких частотах, применяют спектральный анализ. Получаемые таким образом первичные информативные параметры позволяют контролировать геометрические размеры изделий (толщину стенки при одностороннем доступе), определять химсостав и структуру материала изделия, внутренние напряжения, обнаруживать поверхностные и подповерхностные (на глубине в несколько миллиметров) дефекты.

По взаиморасположению преобразователя и объекта различают проходные, погружные, накладные и экранные преобразователи (рис. 1.2). Последние предназначены для работы по методу прохождения.

Контроль вихревыми токами выполняют без непосредственного контакта преобразователей с объектом, что позволяет вести его при взаимном перемещении преобразователя и объекта с большой скоростью, облегчая тем самым автоматизацию контроля.

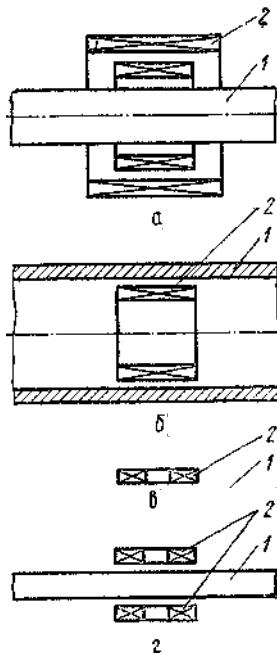


Рис. 1.2. Некоторые типы вихревых преобразователей:
 а, б – проходные наружный и внутренний; в – накладной;
 г – экранный (1 – контролируемый объект, 2 – преобразователи)

Развитие вихревого вида контроля идет в направлениях изыскания путей контроля изделий сложной конфигурации и многослойных объектов, усовершенствования способов отстройки от мешающих параметров, разработки многодатчиковых и многочастотных систем для комплексного контроля свойств объекта.

Радиоволновой вид неразрушающего контроля основан на регистрации изменений параметров электромагнитных волн радиодиапазона, взаимодействующих с контролируемым объектом. Обычно применяют волны сверхвысокочастотного (СВЧ) диапазона длиной 1–100 мм и контролируют изделия из материалов, где радиоволны не очень сильно затухают: диэлектрики (пластмассы, керамика, стекловолокно), магнитодиэлектрики (ферриты), полупроводники, тонкостенные металлические объекты. По характеру взаимодействия с объектом контроля различают методы *прошедшего, отраженного, рассеянного излучения* и резонансный. Первичными информативными параметрами являются амплитуда, фаза, поляризация, частота, геометрия распространения вторичных волн, время их прохождения и др.

Тепловой вид неразрушающего контроля основан на регистрации изменений тепловых или температурных полей контролируемых объек-

тов. Он применим к объектам из любых материалов. По характеру взаимодействия поля с контролируемым объектом различают методы: *пассивный* или *собственного* излучения (на объект не воздействуют внешним источником энергии) и *активный* (объект нагревают или охлаждают от внешнего источника). Измеряемым информативным параметром является температура либо тепловой поток.

При контроле пассивным методом измеряют тепловые потоки или температурные поля работающих объектов с целью определения неисправностей, проявляющихся в виде мест повышенного нагрева. Таким образом выявляют уменьшение толщины футеровки доменных и мартеновских печей, места утечки теплоты в зданиях, участки электроцепей и радиосхем с повышенным нагревом, находят трещины в двигателях и т. д.

При контроле активным методом объект обычно нагревают контактным либо бесконтактным способом, стационарным либо импульсным источником теплоты и измеряют температуру или тепловой поток с той же или с другой стороны объекта. Это позволяет обнаруживать несплошности (трещины, пористость, инородные включения) в объектах, изменения в структуре и физико-химических свойствах материалов по изменению теплопроводности, теплоемкости, коэффициенту теплоотдачи. Таким способом выявляют участки с плохой теплопроводностью в многослойных панелях. Неплотное прилегание слоев и дефекты обнаруживаются как участки повышенного или пониженного нагрева поверхности панели. Измерения температур или тепловых потоков выполняют контактным или бесконтактным способом. В последнем случае передача теплоты происходит, в основном, за счет радиации, т. е. излучения электромагнитных волн в инфракрасной или видимой части спектра в зависимости от температуры тела. Наиболее эффективным средством бесконтактного наблюдения, регистрации температурных полей и тепловых потоков является сканирующий термовизор.

Оптический вид неразрушающего контроля основан на наблюдении или регистрации параметров оптического излучения, взаимодействующего с контролируемым объектом. По характеру взаимодействия различают методы *прошедшего, отраженного, рассеянного и индуцированного* излучения. Последним термином определяют оптическое излучение объекта под действием внешнего воздействия, например люминесценцию. Первичными информативными параметрами являются амплитуда, фаза, степень поляризации, частота или частотный спектр, время прохождения света через объект, геометрия преломления и отражения лучей.

Оптические методы имеют очень широкое применение благодаря большому разнообразию способов получения первичной информации. Возможность их применения для наружного контроля не зависит от материала объекта. Самым простым методом является органолептический визуальный контроль, с помощью которого находят видимые дефекты, отклонения от

заданных формы, цвета и т.д. Применение инструментов (визуально-оптический контроль) типа луп, микроскопов, эндоскопов для осмотра внутренних полостей, проекционных устройств для контроля формы изделий, спроектированных в увеличенном виде на экран, значительно расширяет возможности оптического метода. Использование интерференции позволяет с точностью до 0,1 длины волны контролировать сферичность, плоскость, шероховатость, толщину изделий. Дифракцию применяют для контроля диаметров тонких волокон, толщины лент, форм острых кромок.

Оптические методы широко применяют для контроля прозрачных объектов. В них обнаруживают макро- и микродефекты, структурные неоднородности, внутренние напряжения (по вращению плоскости поляризации). Использование гибких световодов, лазеров, оптической голограммии, телевизионной техники резко расширило область применения оптических методов, повысило точность измерения.

Радиационный вид неразрушающего контроля основан на регистрации и анализе проникающего ионизирующего излучения после взаимодействия его с контролируемым объектом. В зависимости от природы ионизирующего излучения вид контроля подразделяют на подвиды: *рентгеновский, гамма, бета* (поток электронов), *нейтронный* методы контроля. В последнее время находят применение даже потоки позитронов, по степени поглощения которых определяют участки объекта, обедненные или обогащенные электронами.

Наиболее широко используют для контроля рентгеновское и гамма-излучение. Их можно использовать для контроля изделий из самых различных материалов, подбирая благоприятный частотный диапазон. Напомним, что эти виды излучения являются электромагнитными волнами.

Все рассмотренные ранее виды контроля основаны на применении электромагнитного излучения. Частота колебаний повышалась от метода к методу. При контроле магнитными и электрическими методами использовались постоянные или медленно меняющиеся поля. В вихревоковом контроле частоты достигали мегагерцевого диапазона. Далее частота увеличивалась при использовании СВЧ, инфракрасного, оптического излучения. Рентгеновское и гамма-излучения являются наиболее коротковолновыми из всех, рассмотренных ранее: гамма-излучение имеет длину волны $10^{-10} - 10^{-13}$ м (частоту $3 \cdot 10^{18} - 3 \cdot 10^{21}$ Гц).

По характеру взаимодействия с контролируемым объектом основным способом радиационного (рентгеновского и гамма) контроля является метод прохождения. Он основан на разном поглощении излучения материалом изделия и дефектом. Таким образом, информативным параметром здесь является плотность потока излучения: в местах утонений и дефектов плотность прошедшего потока возрастает. Чем больше толщина изделия, тем более высокочастотное (более жесткое) излучение приме-

няют для контроля: рентгеновское, гамма (от распада ядер атомов), жесткое тормозное (от ускорителя электронов: бетатрона, микротрона, линейного ускорителя). Предельное значение толщины стали, контролируемое с помощью излучения последнего типа, – около 600 мм. Приемниками излучения служат, например, рентгенопленка (радиографический метод), сканирующий сцинтилляционный счетчик частиц и фотонов (радиометрический метод), флуоресцирующий экран с последующим преобразованием изображения в телевизионное (радиоскопический метод) и т. д.

Акустический вид неразрушающего контроля основан на регистрации параметров упругих волн, возникающих или возбуждаемых в объекте. Чаще всего используют упругие волны ультразвукового диапазона (с частотой колебаний выше 20 кГц), этот метод называют *ультразвуковым*. В отличие от всех, ранее рассмотренных, методов здесь применяют и регистрируют не электромагнитные, а упругие волны, параметры которых тесно связаны с такими свойствами материалов, как упругость, плотность, анизотропия (неравномерность свойств по различным направлениям) и др.

Акустические свойства твердых материалов и воздуха настолько сильно отличаются, что акустические волны отражаются от тончайших зазоров (трещин, непроваров) шириной 10^{-6} – 10^{-4} мм. Этот вид контроля применим ко всем материалам, достаточно хорошо проводящим акустические волны: металлам, пластмассам, керамике, бетону и т. д.

По характеру взаимодействия с объектом различают *пассивный* и *активный* методы. Пассивный акустический метод предусматривает регистрацию упругих волн, возникающих в самом объекте. Шумы работающего механизма (особенно, если обеспечить регистрацию таких информативных параметров, как место их возникновения и амплитудно-частотная характеристика) позволяют судить о исправности или неисправности механизма и даже о характере неисправности. Этот пассивный метод акустического контроля называют *шумовибрационным*. Многие машины снабжают датчиками, регистрирующими уровень вибрации определенных узлов и прогнозирующими их работоспособность. Это *вибрационный* метод м-контроля или диагностики.

Перестройка структуры материала, вызываемая движением групп дислокаций, возникновением и развитием трещин, аллотропическими превращениями в кристаллической решетке, сопровождается появлением упругих волн ультразвукового (реже звукового) диапазона. На использовании этих волн основан метод *акустической эмиссии*. Используя такие информативные параметры, как количество сигналов в единицу времени, их частота, амплитудное распределение, локация места возникновения упругих волн, судят о состоянии материала, происходящих в нем изменениях, прогнозируют работоспособность конструкции.

Активные ультразвуковые методы разнообразнее по схемам применения и получили гораздо более широкое распространение. Для контроля используют стоячие волны (вынужденные или свободные колебания объекта контроля или его части), бегущие волны по схемам прохождения и отражения. Методы колебаний используют для измерения толщин при одностороннем доступе и контроля свойств материалов (модуля упругости, коэффициента затухания). Информативным параметром служат частоты свободных или вынужденных колебаний и их амплитуды. Используют также метод, основанный на измерении режима колебаний преобразователя, прикасающегося с объектом (*импедансный метод*). По амплитудам и резонансным частотам такого преобразователя (часто имеющего вид стержня) судят о твердости материала изделия, податливости (упругому импедансу) его поверхности. Податливость, в частности, улучшается под влиянием дефектов, близких к поверхности изделия.

Наиболее широкое распространение получил метод отражения, или **эхо-метод**.

Эхо-метод очень широко применяют для дефектоскопии металлических заготовок и сварных соединений, контроля структуры металлов, измерения толщины труб и сосудов. Значительно реже используют метод прохождения. Им дефектосcopируют изделия простой формы (листы), оценивают прочность бетона, дерева и других материалов, в которых прочность коррелирует со скоростью ультразвука.

Средством возбуждения и приема ультразвуковых волн, как правило, являются пьезопреобразователи. Учитывая сильное отражение ультразвука от тончайших воздушных зазоров, для передачи волн от пьезопреобразователя к изделию используют жидкостный контакт. Для возбуждения волн звукового диапазона кроме пьезопреобразователей применяют ударное воздействие, а для приема – микрофоны.

Из многочисленных направлений развития акустических методов контроля назовем разработку бесконтактных преобразователей: лазерных возбудителей и приемников, электромагнитно-акустических преобразователей, основанных на возбуждении колебаний поверхности объекта внешним электромагнитным полем. Это открывает возможность повышения производительности при автоматическом контроле.

Ряд работ направлен на отстройку от шумов, главным образом связанных с отражением упругих волн от структурных неоднородностей, например, границ кристаллов в поликристаллическом материале. Осваивается применение специфических типов упругих волн в твердом теле: поверхностных волн, волн в пластинах и стержнях. Это существенно расширяет область изделий, доступных контролю. Разработка средств высокоточного измерения скорости ультразвуковых волн открывает возможности измерения внутренних напряжений в твердых телах по изменению скорости или затухания.

Разрабатывают новые способы обработки информации, где очень перспективна *вычислительная ультразвуковая голограмма*. Например, используя пьезопреобразователи, сканируют большой участок (порядка 200×200 мм) поверхности объекта контроля. Получаемую при этом информацию направляют в память ЭВМ. Дальнейшую обработку всей информации, полученной на большом участке сканирования, выполняют на ЭВМ, используя те же алгоритмы, которые реализуются в оптической голограммии при наложении световых пучков. Благодаря этому удается значительно точнее представить форму и размеры выявляемых дефектов и более обоснованно судить об их влиянии на работоспособность изделия.

Неразрушающий контроль проникающими веществами основан па проникновении пробных веществ в полость дефектов контролируемого объекта. Его делят на методы *капиллярные и течеискания*. Капиллярные методы основаны на капиллярном проникновении в полость дефекта индикаторной жидкости (керосина, скпицидара), хорошо смачивающей материал изделия. Их применяют для обнаружения слабо видимых невооруженным глазом поверхностных дефектов.

Методы течеискания используют для выявления только сквозных дефектов в перегородках. В полость дефекта пробное вещество проникает либо под действием разности давлений, либо под действием капиллярных сил, однако в последнем случае нанесение в индикацию пробных веществ выполняют по разные стороны перегородки.

Сопоставление видов неразрушающего контроля. Проводить сопоставление методов неразрушающего контроля между собой следует с учетом следующих обстоятельств. Как отмечалось в описании методов, многие из них применимы для контроля только определенных типов материалов:

- радиоволновой и электроемкостный – для неметаллических, плохо проводящих ток материалов;
- вихревоковый, электропотенциальный – для хороших электропроводников;
- магнитный – для ферромагнетиков,
- акустический – для материалов, обладающих небольшим затуханием звука соответствующей частоты.

Далее следует иметь в виду различную область применения модификаций методов: измерение геометрических размеров, исследование химсостава и структуры, поиск несплошностей. Поэтому сопоставление различных методов контроля можно проводить только в тех условиях, когда возможно применение нескольких методов. Проведем сопоставление для дефектоскопического контроля металлических ферромагнитных материалов, типа стали, когда применимо большинство из рассмотренных методов.

Сравнение можно проводить по глубине расположения дефектов, которые этими методами выявляются. Контроль течеисканием рассчитан на выявление только сквозных дефектов. Визуальные и капиллярные методы контроля позволяют обнаруживать только дефекты, выходящие на поверхность (в том числе не сквозные). Магнитные и вихревоковые методы позволяют обнаруживать как поверхностные, так и подповерхностные (залегающие на глубине в несколько мм) дефекты. Радиационные и акустические методы в принципе могут обнаруживать дефекты как поверхностные, так и внутренние, но преимущественно их используют для выявления внутренних.

С точки зрения опасности для обслуживающего персонала выделяются радиационные методы. Определенную токсичность имеют методы капиллярные и течеискания при использовании некоторых типов пробных веществ и ультрафиолетовых осветителей. Для остальных методов заметного влияния на здоровье обслуживающего персонала не установлено.

С точки зрения возможностей автоматизации контроля наиболее благоприятными являются вихревоковый вид контроля, магнитные методы с феррозондовыми индукционными и тому подобными типами преобразователей, радиационный радиометрический метод и некоторые виды тепловых методов. Главные их преимущества заключаются в отсутствии необходимости прямого контакта преобразователя с изделием и представлении информации о дефектах в виде показаний приборов. Перечисленным методам уступает ультразвуковой метод, для которого необходим акустический контакт преобразователей с изделием, например через слой воды. Трудность автоматизации других методов заключается в необходимости визуальной обработки информации о дефектах, которую эти методы представляют.

По стоимости выполнения контроля к наиболее дорогим относят методы радиографические и течеискания. Это связано с длительностью операций контроля, а также необходимостью капитальных затрат на оборудование и помещения. Низка производительность также у капиллярного контроля. Если сравнивать, например, затраты на проведение радиационного и ультразвукового контроля сварных соединений толщиной 10–20 мм, то для ультразвукового контроля они будут в 3–5 раз меньше. Преимущество будет возрастать с увеличением толщины сварных соединений.

Специфические особенности каждого метода делают необходимым применение всех рассмотренных видов контроля для решения определенного круга задач. Кроме того, для контроля ответственной продукции возникает необходимость в использовании нескольких взаимно дополняющих и дублирующих методов. Например, тонкостенные трубы для электростанций проходят вихревоковый, ультразвуковой и визуальный контроль.

2. МЕТОДЫ РАСЧЕТА ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ПОЛЕЙ

Большинство физических явлений в таких областях как электричество и магнетизм, оптика, теплопередача, акустика, динамика жидкости могут быть описаны с помощью уравнений с частными производным (УЧП).

С помощью этих уравнений физические явления описываются на языке пространственных и временных производных. Производные появляются в уравнениях, потому что они описывают важнейшие физические величины, такие, как ток, поток, скорость, ускорение, сила трения и т.д. Именно по этой причине возникают УЧП, содержащие неизвестную функцию, которую необходимо определить.

Постановка задач по расчету потенциальных полей

Расчет физических полей в общем случае сводится к определению некоторых скалярных, векторных или тензорных функций, характеризующих пространственное и временное распределения рассматриваемого поля. Это совпадает с математическими понятиями скалярного, векторного и тензорного полей. Говорят, что в некоторой области пространства задано скалярное, векторное или тензорное поле, если в каждой точке этой области ставится в соответствие некоторый скаляр, вектор или тензор.

Если рассматриваемое физическое поле не зависит от времени (стационарное поле), то расчет его целиком сводится к определению соответствующих скалярных, векторных или тензорных полей, понимаемых в указанном выше смысле.

Элементы теории уравнений с частными производными

Уравнения с частными производными – это уравнения, содержащие частные производные.

В отличие от обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), в которых неизвестная функция зависит только от одной переменной, в УЧП неизвестная функция зависит от нескольких переменных, например, температура $T(x, t)$ зависит от координаты x и времени t .

Частная производная функции нескольких переменных первого порядка

Если $U=f(x, y, z, \dots, t)$ – функция нескольких переменных, то частная производная по одной из них, например по x , определится так

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z, \dots, t) - f(x, y, z, \dots, t)}{\Delta x}. \quad (2.1)$$

Как видно из (2.1) приращение получает лишь одна из независимых переменных, остальные рассматриваются как постоянные.

Функция n переменных имеет n частных производных первого порядка $\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}, \dots, \frac{\partial U}{\partial t}$. Частная производная находится по правилам дифференцирования функции одной переменной, причем остальные переменные рассматриваются в данном случае как постоянные.

Пример. $U = \frac{x^2 y}{z}, \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{2xy}{z}, \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{x^2}{z}, \frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{x^2 y}{z^2}.$

Частная производная функции нескольких переменных второго порядка

Частная производная второго порядка от функции может быть взята:

а) по той же переменной, что и первая

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}, \quad (2.2)$$

б) по другой переменной

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}. \quad (2.3)$$

В этом случае производная называется смешанной.

Величина смешанной производной, непрерывной при данных значениях x и y , не зависит от порядка переменных, по которым берутся производные.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}. \quad (2.4)$$

Частные производные более высокого порядка определяются аналогично.

$$\frac{\partial^3 U}{\partial x^3}, \frac{\partial^3 U}{\partial x \partial y^3}, \frac{\partial^3 U}{\partial x \partial y \partial z}. \quad (2.5)$$

В литературе можно встретить следующие обозначения частных производных:

$$U_{xy} \text{ вместо } \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y};$$

$$U_{xx} \text{ вместо } \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}.$$

Таким образом,

$$U_{xy} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}, \quad U_{xx} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}. \quad (2.6)$$

Дифференциальное уравнение

Пусть функция $y=f(x)$ отражает количественную сторону некоторого физического явления. Часто, изучая это явление, мы не можем непосредственно установить характер зависимости y от x , но можем установить зависимость между величинами x , y и производными от y по x : y' , y'' , ..., $y^{(n)}$, другими словами, составить дифференциальное уравнение. Из полученной зависимости между переменной x , y и производными y' , y'' , ..., $y^{(n)}$ требуется установить непосредственную зависимость y от x , т.е. найти $y=f(x)$ или, как говорят, проинтегрировать дифференциальное уравнение.

Таким образом, дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимую переменную x , искомую функцию $y=f(x)$ и ее производные y' , y'' , ..., $y^{(n)}$. Символически это записывают так

$$F = (x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (2.7)$$

или

$$F = (x, y, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial^n y}{\partial x^{(n)}}) = 0. \quad (2.8)$$

Если искомая функция $y=f(x)$ – функция одной независимой переменной (в данном случае x), то дифференциальные уравнения (2.7) и (2.8) называются обыкновенными (ОДУ).

В отличие от ОДУ, дифференциальным уравнением в частных производных (ДУЧП) называется соотношение между неизвестной функцией U , зависящей от двух или нескольких переменных x, y, z, \dots, t этими переменными и частными производными от U .

$$\text{Пример. } x \frac{\partial U}{\partial x} = y \frac{\partial U}{\partial y}; U = f(x, y). \quad (2.9)$$

Типы уравнений с частными производными

ДУЧП можно классифицировать по ряду признаков. Классификация уравнений важна потому, что, как оказывается, для каждого класса существуют своя общая теория и методы решения уравнений. Существуют пять основных параметров классификации уравнений:

1) *Порядок уравнения.* Порядком ДУЧП называется наивысший порядок частных производных, входящих в уравнение.

Пример. $U_t = U_{xx}$ – уравнение второго порядка;

$U_t = U_x$ – уравнение первого порядка;

$U_t = U_{xxx} + tgx$ – уравнение третьего порядка.

2) *Число переменных.* Числом переменных называется число независимых переменных.

Пример. ДУЧП $U_t = U_{xx}$ – имеет две независимые переменные x и t .

ДУЧП $U_t = U_{xxx} + U_r$ – имеет три независимые переменные x, t, r .

Во всех приведенных примерах неизвестная функция U зависит более чем от одной переменной. Переменная U (которую дифференцируют) называется зависимой переменной.

Переменные, по которым происходит дифференцирование, называются независимыми переменными.

3) *Линейность.* ДУЧП бывают линейными и нелинейными.

В линейных ДУЧП зависимая переменная и все ее частные производные входят линейным образом, в частности, они не умножаются друг на друга, не возводятся в квадрат и т.д. Более точно, линейным ДУЧП второго порядка с двумя независимыми переменными называется уравнение вида

$$AU_{xx} + BU_{xy} + CU_{yy} + DU_x + EU_y + FU = G(x, y), \quad (2.10)$$

где A, B, C, D, E, F, G – константы или заданные функции независимых переменных x и y .

Пример. $U_{tt} = e^{-t} U_{xx} + cost$ – линейное ДУЧП,

$U U_{xx} + U_t = 0$ – нелинейное ДУЧП,

$x U_x + y U_y + U^2 = 0$ – нелинейное ДУЧП.

4) *Однородность.* Уравнение (2.10) будет называться однородным, если правая часть $G(x, y)$ тождественно равна нулю для всех x и y . Если $G(x, y) \neq 0$, то уравнение (2.10) называется неоднородным.

5) *Вид коэффициентов.* Если коэффициенты A, B, C, D, E, F уравнения (2.10) постоянны, то уравнение называется уравнением с постоянными коэффициентами. В противном случае – уравнение с переменными коэффициентами.

В зависимости от соотношения между коэффициентами A, B, C все линейные уравнения с частными производными второго порядка (2.10) относятся к одному из трех типов:

- а) параболический,
- б) гиперболический,
- в) эллиптический.

Параболический тип линейных дифференциальных уравнений с частными производными (ЛДУЧП) описывает процессы теплопроводности, диффузии и определяется условием

$$B^2 - 4AC = 0. \quad (2.11)$$

Гиперболический тип ЛДУЧП описывает колебательные системы и волновые движения и определяется условием

$$B^2 - 4AC > 0. \quad (2.12)$$

Эллиптический тип ЛДУЧП описывает установившиеся процессы и определяется условием

$$B^2 - 4AC < 0. \quad (2.13)$$

Пример. Уравнение $U_{tt} = U_{xx}$, $B^2 - 4AC = 0 - 4*1*0 = 0$ – уравнение параболического типа.

Уравнение $U_{tt} = U_{xx}$, $B^2 - 4AC = 0 - 4*1*(-1) > 0$ – уравнение гиперболического типа.

Уравнение $U_{xx} + U_{yy} = 0$, $B^2 - 4AC = 0 - 4*1*1 = -4 < 0$ – уравнение эллиптического типа.

В случае переменных коэффициентов тип уравнения может изменяться от точки к точке.

Например, уравнение $yU_{xx} + U_{yy} = 0$, $B^2 - 4AC = -4y$ может менять свой тип в зависимости от значений y :

$$B^2 - 4AC = -4y \quad \begin{cases} \text{эллиптический тип при } y > 0; \\ \text{параболический тип при } y = 0; \\ \text{гиперболический тип при } y < 0. \end{cases}$$

Решение уравнений с частными производными

Существует арсенал методов, пригодных для практического использования. Из них наиболее важны те, в которых уравнения с частными производными сводятся к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Так поступают наиболее часто, существенно упрощают исходное уравнение с частными производными второго порядка, превратив его в два обыкновенных дифференциальных уравнения. Таким образом, для решения ДУЧП необходимо решить ОДУ.

Запишем стандартный метод решения ОДУ линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Для решения линейного однородного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами вида

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (2.14)$$

необходимо:

- 1) составить характеристическое уравнение

$$ar^2 + br + c = 0;$$

- 2) решить его по формуле

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}; \quad (2.15)$$

- 3) определить частные решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$;

4) составить общее решение заданного уравнения, использовав теорему о том, что если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – частные решения уравнения $ay'' + by' + cy = 0$, причем их отношение $y_1(x)/y_2(x) = const$, то $y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ – общее решение этого уравнения.

При решении квадратного уравнения (2.15) возможны три варианта, которые сведены в табл. 1.

Таблица 1

Корни уравнения (1.14)	Частные решения уравнения (1.14)	Общее решение уравнения (1.14)
1.Действительные разные r_1 и r_2	$y_1 = \exp(r_1 x)$, $y_2 = \exp(r_2 x)$	$c_1 \exp(r_1 x) + c_2 \exp(r_2 x)$ $\exp(rx)(c_1 + c_2 x)$
2.Равные $r_1 = r_2 = r$	$y_1 = \exp(rx)$, $y_2 = x \exp(rx)$	
3.Комплексные сопряженные $r_{1,2} = \alpha \pm \beta i$	$y_1 = \exp(r_1 x)$, $y_2 = \exp(r_2 x)$ или $y_1 = e^{\alpha x} \cos(\beta x)$; $y_2 = i \cdot e^{\alpha x} \sin(\beta x)$	$c_1 \exp(r_1 x) + c_2 \exp(r_2 x)$ или $e^{\alpha x} [c_1 \cos(\beta x) + i \cdot c_2 \sin(\beta x)]$

Математическая аналогия между потенциальными полями

При теоретическом рассмотрении потенциальных полей различной физической природы, таких, например, как:

- стационарное электрическое поле неподвижных электрических зарядов;
- стационарное электрическое поле постоянных токов;
- магнитостатическое поле неподвижных намагниченных тел;
- стационарное магнитное поле постоянных электрических токов;
- стационарное тепловое поле,

оказывается, что все они описываются дифференциальными уравнениями одного и того же вида. Это дает возможность использовать обобщенные уравнения для потенциальных полей, записав их, например, в виде

$$\Delta U = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (2.16)$$

или

$$\Delta U = 0, \quad (2.17)$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа в декартовой системе коор-

динат;

U – потенциал любого из полей рассматриваемого класса;

ϵ – параметр, соответствующий материальной характеристике среды;

ρ – плотность распределения источников поля той или иной природы.

Физический смысл величин, входящих в указанные обобщенные уравнения ((2.16) – уравнение Пуассона и (2.17) – уравнение Лапласа) потенциальных полей, применяющихся в методах неразрушающего контроля качества, приведен в табл. 2.

Таблица 2

Поле	U	ρ	ϵ
1. Электростатическое поле неподвижных электрических зарядов	Потенциал электростатического поля, ϕ	Объемная плотность распределения свободных зарядов, $\rho_{своб}$ (V)	Абсолютная диэлектрическая проницаемость, $\epsilon_0 \epsilon$
2. Стационарное электрическое поле постоянных токов в проводящей среде	Потенциал стационарного электрического поля, ϕ	–	Удельная электрическая проводимость, σ
3. Магнитостатическое поле неподвижных намагниченных тел	Скалярный потенциал магнитостатического поля, ϕ_m	Плотность фиктивных магнитных зарядов, равная дивергенции намагниченности	Магнитная проницаемость, $\mu_0 \mu$
4.Стационарное тепловое поле	Температура, T	Объемная плотность распределения тепловых источников	Коэффициент теплопроводности, λ

Общность уравнений и рассматриваемых в дальнейшем граничных условий для потенциальных полей различной физической природы выражает математическую аналогию между ними. В силу этой аналогии результаты расчета какого-либо одного из указанных полей могут быть непосредственно перенесены на любое другое потенциальное поле путем простой замены величин, характеризующих рассчитанное поле, их аналогами.

Например, результаты расчета магнитного поля произвольного плоского контура с током (рис. 2.1, а) позволяют непосредственно описать стационарное тепловое или электрическое поле систем, изображенных на рис. 2.1, б, в, соответственно.

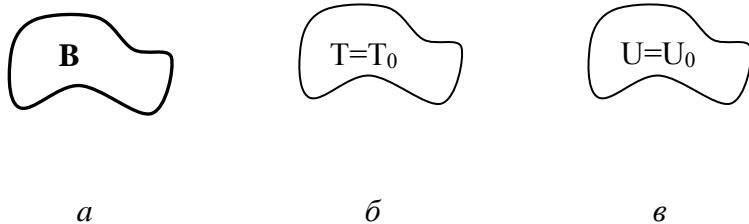


Рис. 2.1. К математической аналогии между стационарными потенциальными полями различной физической природы:

a – магнитное поле произвольного контура с током, лежащего на плоскости; *б* – тепловое поле при нагреве участка плоскости, ограниченного тем же контуром, до температуры $T=T_0$ (температура остальной части плоскости равна нулю); *в* – статическое электрическое поле при поддержании участка плоскости, ограниченного тем же контуром, под потенциалом U_0 (потенциал остальной части плоскости равен нулю)

Таким образом оказывается, что для анализа ряда важных, с точки зрения их применения в неразрушающих методах контроля качества, потенциальных полей различной физической природы необходимо уметь решать уравнения Лапласа.

Общие свойства уравнения Лапласа. Классификация уравнения

Уравнение Лапласа в декартовой системе координат записывается $U_{xx} + U_{yy} + U_{zz} = 0$. Проведем классификацию этого уравнения по признакам, рассмотренным ранее:

- 1) порядок уравнения – второй;
- 2) число переменных – три;
- 3) линейность – линейное;
- 4) однородность – однородное;
- 5) вид коэффициентов – уравнение с постоянными коэффициентами;
- 6) тип уравнения – уравнение эллиптического типа, поскольку $A=I$, $B=0$, $C=I$, $B^2 - 4AC = -4 < 0$.

Физический смысл оператора Лапласа

Оператор Лапласа $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ является одним из самых важных операторов математической физики.

Возникает вопрос, каков смысл этого оператора и какое отношение имеет сумма трех частных производных второго порядка к законам природы? Ответы на эти вопросы связаны с тем фактом, что лапласиан функции позволяет оценить значение функции в точке через значения функции в соседних точках. Кроме того, лапласиан можно считать обобщением второй производной функции одной переменной на многомерный случай.

Основное свойство двумерного оператора Δ :

1. Если $\Delta U > 0$ в точке (x, y) , то $U(x, y)$ меньше среднего значения функции в соседних точках, например, на окружности с центром в точке (x, y) .
2. Если $\Delta U = 0$ в точке (x, y) , то $U(x, y)$ равна среднему значению функции в соседних точках.
3. Если $\Delta U < 0$ в точке (x, y) , то $U(x, y)$ больше среднего значения функции в соседних точках.

Рассмотренное свойство может быть обобщено на трехмерное пространство. Таким образом, если функция удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta U = 0$, то ее значение всегда совпадает со средним значением. Например, натянутая неподвижная резиновая мембрана удовлетворяет уравнению Лапласа, следовательно, смещение мембранны в любой точке равно среднему смещению мембранны на окружности с центром в этой точке.

Особенности решения

В ОДУ искомая функция $y=f(x)$ есть функция одной независимой переменной, а число независимых решений определяется их порядком. Уравнения Лапласа и Пуассона являются УЧП, им удовлетворяет множество функций. Другими словами, уравнения Лапласа и Пуассона имеют множество решений, выражющихся разными функциями. Так, например, непосредственной подстановкой в уравнение Лапласа можно убедиться, что ему удовлетворяют следующие функции:

$$U = ax + by + cz; \quad U = c \ln(\sqrt{x^2 + y^2}); \quad U = \frac{c}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \quad (2.18)$$

Поэтому при анализе поля, прежде всего, необходимо сформулировать те условия, при которых эти уравнения имеют единственное решение.

Границные условия

Решение уравнения Лапласа станет однозначным, если наложить на задачу дополнительные так называемые граничные условия. Этими условиями являются значения зарядов, величин потенциалов, токов, температуры, так или иначе ограничивающих пространство поля (см. рис. 2.1).

Границные условия (ГУ) определяются только из физической постановки задачи. Для стационарных потенциальных полей все возможные ГУ могут быть сведены к трем наиболее важным типам:

- 1) граничное условие первого рода (условие или задача Дирихле);
- 2) граничное условие второго рода (условие или задача Неймана);
- 3) граничное условие третьего рода (условие или задача Робена).

В отличие от гиперболического волнового уравнения и параболического уравнения теплопроводности, эллиптические уравнения не требуют начальных условий (НУ). Для них нужны только граничные условия. По этой причине задачи для таких уравнений называются краевыми задачами.

Рассмотрим основные типы граничных условий в краевых задачах.

Краевая задача с граничными условиями первого рода (задача Дирихле)

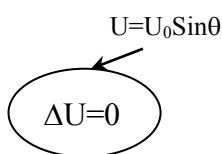


Рис. 2.2. Внутренняя задача Дирихле

Задача возникает, когда требуется найти решение уравнения в некоторой области пространства, которое принимает на границе области заданные значения. В качестве примера можно рассмотреть задачу о нахождении стационарного распределения температуры внутри области, если задана температура на границе этой области, или задачу о распределении потенциала внутри области, если известен потенциал на границе. Задачи такого типа еще называют внутренними задачами Дирихле (рис. 2.2).

Помимо внутренней задачи Дирихле, различают внешнюю задачу Дирихле, для которой решение уравнения Лапласа ищется вне границы, а граничные условия заданы на границе.

В общем случае первая краевая задача формулируется так: найти функцию $U(x,y,z)$, удовлетворяющую уравнению $\Delta U = 0$, внутри объема dV и принимающую в каждой точке M поверхности Σ заданные значения $\Psi(M)$.

$$U|_{\Sigma} = \Psi(M). \quad (2.19)$$

Выражение (2.19) и есть математическая формулировка граничного условия в краевой задаче Дирихле.

***Краевая задача с граничными условиями второго рода
(задача Неймана)***

Задача возникает тогда, когда требуется найти решение уравнения в некоторой области пространства, на границе которой задана внешняя нормальная производная $\partial U / \partial n$, которая пропорциональна втекающему потоку, например, тепла, электронов, дифундирующих частиц и т.д. Математическая формулировка краевого условия второго рода выглядят так

$$\left. \frac{\partial U}{\partial n} \right|_{\Sigma} = \Psi^*(M). \quad (2.20)$$

В общем случае вторая краевая задача формулируется так: найти функцию $U(x, y, z)$, удовлетворяющую уравнению $\Delta U = 0$, внутри объема $d\Omega$, нормальная производная которой $\partial U / \partial n$ принимает в каждой точке M поверхности Σ заданные значения $\Psi^*(M)$.

***Краевая задача с граничными условиями третьего рода
(задача Робена)***

Задача возникает тогда, когда требуется найти такое решение в некоторой области пространства, которое удовлетворяет на границе условию

$$\frac{\partial U}{\partial n} + h(U - g) = 0, \quad (2.21)$$

где $\partial U / \partial n$ – внешняя нормальная производная;

h – заданная константа;

g – заданная функция, которая меняется вдоль границы.

По сути, это граничное условие является как бы суммой граничных условий первых двух типов. Его еще записывают так

$$\frac{\partial U}{\partial n} = -h(U - g). \quad (2.22)$$

Согласно этому граничному условию, если речь идет, например, о тепловом поле, поток тепла, втекающий в область через границу, пропорционален разности между температурой U и некоторой заданной температурой g . Это означает, что при $h > 0$:

- 1) если температура на границе выше температуры окружающей среды на границе g , то тепло вытекает из области;
- 2) если $U < g$, то тепло втекает в область.

Выбор системы координат при решении уравнений Лапласа и Пуассона

Итак, однозначное решение уравнений Лапласа и Пуассона требует задания граничных условий. Эти граничные условия выражаются аналитически наиболее кратко в том случае, когда форма граничных поверхностей соответствует форме координатных поверхностей. Говорят, что выбранная система координат должна быть адекватна исследуемой задаче:

- а) При расчете поля между плоскостями, например, очевидно удобна прямоугольная система координат Декарта.
- б) При анализе поля с осевой симметрией преимущества имеет цилиндрическая система координат.
- в) В случае симметрии относительно центра преимущества имеет сферическая система координат и т.д.

Отсюда становится ясным, что необходимо уметь составлять основные уравнения поля в любой системе координат, следовательно, знать выражение лапласиана в других (не декартовых) координатах. Таким образом, необходимо решить вопрос, как записывается лапласиан в различных системах координат, и как проводить основные операции векторного анализа в этих координатах?

Существуют пять основных систем координат в двумерном и трехмерном пространствах:

- 1) декартова прямоугольная система в двумерном пространстве;
- 2) декартова прямоугольная система в трехмерном пространстве;
- 3) полярные координаты в двумерном пространстве;
- 4) цилиндрические координаты в трехмерном пространстве;
- 5) сферические координаты в трехмерном пространстве.

Рассмотрим кратко основные из них.

I. Декартовы прямоугольные координаты:

- координаты x, y, z ;
- элемент длины $d\vec{l} = \vec{i} dx + \vec{j} dy + \vec{k} dz$,
- градиент функции U

$$grad U = \vec{\nabla} U = \vec{i} \frac{\partial U}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial U}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial U}{\partial z};$$

- дивергенция функции $\vec{F} : \operatorname{div}\vec{F} = \vec{\nabla}\vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z};$
- уравнение Лапласа

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} U = \nabla^2 U = \Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0. \quad (2.23)$$

II. Цилиндрические координаты:

- координаты $r, \alpha, z;$
- связь с декартовыми координатами $x=r\cos\alpha; y=r\sin\alpha, z=z;$
- элемент длины $d\vec{l} = \vec{e}_r dr + \vec{e}_\alpha r d\alpha + \vec{e}_z dz;$
- градиент функции

$$U : \operatorname{grad} U = \vec{\nabla} U = \vec{e}_r \frac{\partial U}{\partial r} + \vec{e}_\alpha \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \alpha} + \vec{e}_z \frac{\partial U}{\partial z};$$

- дивергенция функции

$$\vec{F} : \operatorname{div} \vec{F} = \vec{\nabla} \vec{F} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot F_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial F_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial F_z}{\partial z};$$

- уравнение Лапласа

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} U = \nabla^2 U = \Delta U = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0. \quad (2.24)$$

III. Сферические координаты:

- координаты $R, \theta, \alpha;$
- связь с декартовыми координатами $x=R\sin\theta\cos\alpha; y=R\sin\theta\sin\alpha\cos\alpha, z=R\cos\theta;$
- элемент длины $d\vec{l} = \vec{e}_R dR + \vec{e}_\theta R d\theta + \vec{e}_\alpha R \sin\theta d\alpha;$
- градиент функции U

$$\operatorname{grad} U = \vec{\nabla} U = \vec{e}_R \frac{\partial U}{\partial R} + \vec{e}_\theta \frac{1}{R} \frac{\partial U}{\partial \theta} + \vec{e}_\alpha \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \alpha};$$

- дивергенция функции \mathbf{F}

$$\operatorname{div} \vec{F} = \vec{\nabla} \vec{F} = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} (R^2 \cdot F_R) + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (F_\theta \sin \theta) + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial F_\alpha}{\partial \alpha};$$

- уравнение Лапласа

$$\Delta U = \frac{1}{R} \frac{\partial^2}{\partial R^2} (R U) + \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta}) + \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2}. \quad (2.25)$$

IV. Полярные координаты:

- координаты r, θ ;
- связь с декартовыми координатами $r^2=x^2+y^2; x=rcos\theta; tg\theta=y/x; y=rsin\theta$.
- уравнение Лапласа

$$\operatorname{div} grad U = \nabla^2 U = \Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}. \quad (2.26)$$

Из сравнения (2.23)–(2.26) следует, что только в декартовой системе координат уравнение Лапласа обладает постоянными коэффициентами. Этим объясняется, почему задачи в других системах координат решать труднее. К этим уравнениям с переменными коэффициентами все еще применим метод разделения переменных. Правда, получающиеся при этом ОДУ тоже будут с переменными коэффициентами. Так получаются уравнения Бесселя, уравнения Лежандра и другие так называемые классические уравнения математической физики.

Единственность решения уравнения Лапласа. Принцип композиции

Итак, уравнение Лапласа, как ДТЧП, имеет множество решений, выражющихся разными функциями. Решение становится однозначным, если наложить на задачу граничные условия, так или иначе ограничивающие пространство поля. Условие единственности решения уравнения Лапласа формулируется так: не существует двух различных функций U_1 и U_2 удовлетворяющих одновременно уравнению Лапласа и поставленным граничным условиям. Практически никогда не удается сразу найти такую функцию, которая удовлетворяла бы как уравнению Лапласа, так и всем граничным условиям. Поэтому пользуются принципом композиции решения.

Суть и методика применения принципа композиции решения заключается в следующем:

1. Уравнение Лапласа имеет множество решений, т.е. существует обширный класс функций, удовлетворяющих этому уравнению. Все эти решения являются частными решениями уравнения Лапласа. Обычно частные решения являются функциями одной или нескольких переменных.

2. В большинстве случаев простым выбором параметров частного решения не удается удовлетворить всем граничным условиям, и тогда остается путь композиции решения, т.е. составления общего решения как суммы частных решений.

3. Поскольку уравнение Лапласа является уравнением линейным, то сумма частных решений будет также решением *второго* уравнения.

Поэтому, если удастся подобрать частные решения так, чтобы их сумма в целом удовлетворяла бы всем граничным условиям задачи, хотя каждое частное решение в отдельности этим условиям может не удовлетворять, и если эта сумма выражается конечным числом членов или сходящимся бесконечным рядом, то тем самым задача считается решенной.

Расчетные модели и основные принципы их построения

В математической физике – основном инструменте анализа физических полей – изучение явлений (объектов) природы осуществляется в рамках тех или иных моделей, в которых учитываются не все реальные факторы, определяющие явление или свойства объекта, а лишь наиболее существенные, определяющие с разной степенью подробности сущность изучаемого явления (объекта). В рамках такого рода моделей и рассматриваются задачи анализа физических полей, приводящие к уравнениям в частных производных.

В общем случае расчет любых физических полей базируется на рассмотрении тех или иных упрощенных систем – расчетных моделей, позволяющих определить параметры исследуемого поля с точностью, достаточной для решения соответствующих инженерных задач. Принципы построения таких расчетных моделей сводятся к следующему:

1) Упрощение граничных условий для рассматриваемого поля. Упрощение реальных граничных условий конкретно заключается в сведении их к одному из типичных условий, условиям Неймана, Дирихле, Робена или в замене смешанных граничных условий однотипными.

2) Замена реальных физических сред "идеальными" (идеальный проводник, идеальный диэлектрик, идеальный тепловой изолятор и т.д.). Такая замена оказывается правомерной в тех случаях, когда материальный параметр одной из указанных сред существенно отличается от того же параметра другой среды в рассматриваемой области поля.

3) Идеализация геометрических форм области распространения поля. В инженерной практике это достигается двумя путями: выделением из анализируемой области более простых подобластей и заменой граничных поверхностей упрощенными. При этом в первом случае стремится выделить ту часть рассматриваемой области, которая представляет наибольший интерес при решении данной задачи. Такое выделение оказывается наиболее простым в ситуациях, когда материальные параметры сред в выделяемых подобластях существенно различны. Если же вся рассматриваемая область однородна, то выделение упрощенных подобластей **становится** более трудной задачей и требует дополнительного физического обоснования приближенных граничных условий для выделенной подобласти.

Следует отметить, что основные способы построения расчетных моделей не зависят от природы рассматриваемых полей, а сами расчетные модели во многих случаях оказываются общими для совершенно различных ситуаций.

Методы, наиболее часто применяемые на практике при решении уравнений с частными производными

Итак, анализ потенциальных полей совершенно различной физической природы требует решения дифференциального уравнения одного и того же вида – уравнения Пуассона или Лапласа.

Классификация методов решения уравнений с частными производными

Различают две большие группы методов решения УЧП – аналитические и численные. Под аналитическими методами подразумевают такие решения, в которых неизвестная функция U выражена через независимые переменные и параметры изучаемой системы в виде формул, бесконечных рядов и интегралов.

Под численными *методами* понимают решения, полученные численно после приближенной замены исходного уравнения другим, более простым уравнением. Результатом такой процедуры обычно является таблица значений *величины* U при некоторых значениях независимых переменных.

Обе группы методов обладают своими достоинствами и недостатками. Обсудим их кратко.

Преимущества аналитического решения:

1. Очевидно, что решение задачи в аналитическом виде более информативно, чем таблица чисел, получаемая при решении численным методом:

а) значение *величины* U в любой конкретной точке (x, y, z) можно вычислить как угодно точно, просто увеличивая, например, число учитываемых членов ряда;

б) при этом легко получить оценку величины допускаемой ошибки.

2. Аналитическое решение всегда позволяет вычислить значение *величины* U в одной точке (x, y, z) , не прибегая к вычислению значений *величины* U в других точках, как это бывает при численных методах решения задач.

3. Аналитическое решение позволяет определить значение *величины* U в любой точке, а не только в узлах сетки.

4. Важным преимуществом аналитического решения является возможность проследить влияние физических параметров, начальных и гра-

ничных условий на характер решения. Численные методы не выявляют таких закономерностей.

Преимущества численных методов:

1. Главным преимуществом численных решений является то, что их можно получить даже в том случае, когда аналитическое решение получить невозможно. Дело в том, что число задач, решение которых может быть найдено в замкнутом аналитическом виде, т.е. в виде формул, содержащих суммы, интегралы и другие выражения от элементарных алгебраических и изученных трансцендентных функций, очень ограничено. В основном, это решение для "хороших" областей в виде полосы, полуплоскости, клина, угловой области, внутренности и внешности сферы, цилиндра, конуса и некоторых других областей. При этом краевые условия должны быть тоже "хорошими" на "хороших" границах. Ни в коем случае они не должны *определеняться* так, что на одной части границы одно краевое условие, а на другой части – другое. Иными словами, применяя аналитические методы решения, мы не можем поступать так, как нам хотелось бы и как это наблюдается в действительности.

Таким образом, область применения аналитических методов – ряд упрощенных примеров, которые допускают теоретический анализ, аналитические решения и оценки.

2. Решающее преимущество численных методов решения УЧП заложено в его сути. В этом методе УЧП сводятся к системам алгебраических уравнений, методы решения которых на ЭВМ хорошо разработаны. Именно поэтому прогресс в области высокопроизводительных ЭВМ привел к созданию новых численных методов, позволяющих решать такие задачи, о решении которых аналитическими методами никто даже не задумывался. Граница разделения аналитических и численных методов условна. При любом методе количественной оценки параметров физического поля необходимо выполнение численных расчетов. В этом смысле степень использования ЭВМ для расчетов полей определяется требованиями к полноте расчетов. Даже если применяется аналитический метод решения задачи, для получения численных результатов приходится на последнем этапе использовать ЭВМ.

С другой стороны, при решении задач расчета физических полей численными методами стремятся использовать аналитические решения, особенно на начальном этапе при постановке задачи, что имеет исключительно важное значение.

Помимо рассмотренных, разработан ряд частных методов расчета потенциальных полей. Наиболее распространенными из них являются: метод наложения, метод, основанный на применении теоремы Гаусса, метод конформных изображений, метод зеркальных изображений, метод функции Грина, метод интегральных преобразований и т.д. Основная идея всех этих методов – приведение сложной задачи к более простой с

теми же граничными условиями, существенное упрощение или исключение вообще необходимости решения уравнений Лапласа и Пуассона.

Метод Фурье решения краевых задач (метод разделения переменных)

Одним из наиболее широко применяемых в математической физике аналитических методов решения ДУЧП является метод Фурье. Типичными задачами, к решению которых применяется этот метод, являются краевые задачи в ограниченных областях для уравнений гиперболического и параболического типов. Метод Фурье применяют также и при решении краевых задач для уравнений эллиптического типа. Суть метода рассмотрим на примере решения уравнения Лапласа в прямоугольной, цилиндрической и сферической системах координат.

Решение уравнения Лапласа в прямоугольной системе координат методом разделения переменных

Основные этапы заключаются в следующем:

1. Записываем уравнение Лапласа в прямоугольных координатах

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0. \quad (2.27)$$

2. Ищем частное решение этого уравнения $U_p(x,y,z)$ в виде произведения трех функций $X(x)$, $Y(y)$, $Z(z)$.

$$U_p(x,y,z) = X(x) * Y(y) * Z(z). \quad (2.28)$$

3. $U_p(x,y,z)$ из уравнения (2.28) подставляем в исходное уравнение (2.27). Теперь вместо частных производных нужно пользоваться полными производными

$$\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} \cdot Y(y) \cdot Z(z) + \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} \cdot X(x) \cdot Z(z) + \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} \cdot X(x) \cdot Y(y) = 0. \quad (2.29)$$

4. Обе части уравнения (2.29) разделим на произведение $X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z)$, в записи функции опустим аргументы

$$\frac{1}{X} \cdot \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{1}{Y} \cdot \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \frac{1}{Z} \cdot \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = 0. \quad (2.30)$$

5. Равенство (2.30) имеет вид

$$F_1(x) + F_2(y) + F_3(z) = 0. \quad (2.31)$$

Левая часть уравнения (2.31) и, следовательно, (2.30) может обращаться в ноль только в том случае, если каждое из слагаемых в отдельности есть величина постоянная.

6. Таким образом, уравнение (2.30) распадается на три обыкновенных дифференциальных уравнения

$$\frac{1}{X} \cdot \frac{d^2 X}{dx^2} = -K_x^2; \quad \frac{1}{Y} \cdot \frac{d^2 Y}{dy^2} = -K_y^2; \quad \frac{1}{Z} \cdot \frac{d^2 Z}{dz^2} = -K_z^2, \quad (2.32)$$

где $-K_x^2, -K_y^2, -K_z^2$ – постоянные величины, связанные между собой очевидным равенством

$$K_x^2 + K_y^2 + K_z^2 = 0. \quad (2.33)$$

Знак « \leftrightarrow » у K_x^2, K_y^2, K_z^2 введен для получения решения в виде тригонометрических функций и принципиального значения не имеет. Величину K^2 называют константой разделения.

Уравнения (2.32) могут быть записаны так:

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + K_x^2 = 0; \quad \frac{d^2 Y}{dy^2} + K_y^2 = 0; \quad \frac{d^2 Z}{dz^2} + K_z^2 = 0. \quad (2.34)$$

7. Уравнения (2.34) являются хорошо известными ОДУ второго порядка, решение их проводится по стандартной методике:

а) Характеристическое уравнение и его решение

$$r^2 + k^2 = 0, \quad r_{1,2} = \pm ik.$$

б) Согласно табл. 1 частные решения каждого из уравнений (2.34) следует записать как

$$y_1 = \cos(kx); \quad y_2 = \sin(kx).$$

Общее решение каждого из уравнений (2.34) находится как сумма частных решений:

$$\begin{aligned} X(x) &= A_1 \cos(K_x x) + A_2 \sin(K_x x); \\ Y(Y) &= B_1 \cos(K_y y) + B_2 \sin(K_y y); \\ Z(z) &= C_1 \cos(K_z z) + C_2 \sin(K_z z). \end{aligned} \quad (2.35)$$

8. Поскольку K_x^2, K_y^2, K_z^2 – вещественные числа, то для удовлетворения равенству (2.33) хотя бы одно из них должно быть отрицатель-

ным числом. Предположим, например, что $K_x^2 > 0$ и $K_y^2 > 0$, тогда $K_z^2 < 0$ ($K_x^2 + K_y^2 + K_z^2 = 0$) и, следовательно, K_z – мнимое число.

В этом случае решение для $Z(z)$ удобно представить не как тригонометрическую функцию мнимого аргумента ($K_z z$), а как гиперболическую функцию вещественного аргумента. Введем новое обозначение для K_z

$$K_z = \sqrt{-K_x^2 - K_y^2} = i\sqrt{K_x^2 + K_y^2} = iK. \quad (2.36)$$

Тогда $Z(z)$ из уравнения (2.35) запишем так

$$Z(z) = C_1 \cos(iKz) + C_2 \sin(iKz). \quad (2.37)$$

Из курса высшей математики известны правила преобразования функции от мнимого аргумента к функции вещественного аргумента

$$\begin{aligned} \sin(iy) &= ish(y), \\ \cos(iy) &= ch(y). \end{aligned} \quad (2.38)$$

На основании (2.38) в уравнении (2.37) производим замены

$$\begin{aligned} \sin(iKz) &\rightarrow ish(Kz); \\ \cos(iKz) &\rightarrow ch(Kz); \\ iC_2 &\rightarrow C'_2. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Окончательно для $Z(z)$ получим

$$Z(z) = C_1 ch(Kz) + C'_2 sh(Kz). \quad (2.40)$$

9. Таким образом, частные решения $Up(x, y, z)$ будут представляться в виде произведения тригонометрических и гиперболических синусов и косинусов.

$$\begin{aligned} U(x, y, z) = & [A_1 \cos(K_x x) + A_2 \sin(K_x x)] \cdot [B_1 \cos(K_y y) + B_2 \sin(K_y y)] \times \\ & \times [C_1 ch(Kz) + C'_2 sh(Kz)] \end{aligned} \quad (2.41)$$

10. При составлении частного решения необходимо выбрать постоянные интегрирования $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C'_2$ и два *параметра* K_x, K_y, K_z так, чтобы удовлетворить, хотя бы частично, граничным условиям задачи.

Если в задаче не удается удовлетворить всем граничным условиям *подбора* перечисленных постоянных, решение ищут в виде бесконечной суммы частных решений (принцип композиции решения), удовлетворяющих оставшимся граничным условиям, и в ряде случаев для прибли-

женного расчета оказывается достаточным вычисление двух–трех членов этой суммы.

Пример

Дано: бесконечно протяженный вдоль оси Z заземленный металлический желоб прямоугольного сечения (рис. 2.3) с крышкой, изолированной от корпуса, имеющий потенциал $U=U_0$.

Требуется найти: распределение поля внутри желоба.

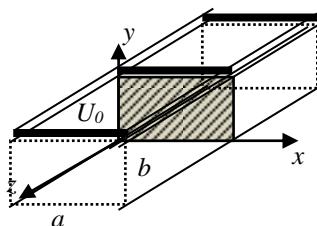


Рис. 2.3 Прямоугольный бесконечно протяженный вдоль оси Z металлический желоб с сечением $a \cdot b$

Решение:

1. Определим тип граничных условий. В задаче требуется найти решение уравнения Лапласа $U(x,y,z)$ в сечении желоба, причем на границе указанной области решения принимаем заданные значения $U=0$ и $U=U_0$. Следовательно, это краевая задача с граничными условиями первого рода (задача Дирихле).

2. Обоснуем выбор си-

стемы координат, в которой следует решать задачу. Очевидно, что граничные условия имеют наиболее простой вид в прямоугольной системе координат:

- $a) x=0, U=0 (0 < x < a);$
- $b) x=a, U=0;$
- $c) y=0, U=0 (0 < y < b);$
- $d) y=b, U=U_0.$

3. С целью поиска возможного решения проведем анализ симметрии задачи. Очевидно, что функция $U(x,y,z)$, записанная в общем случае, в данном конкретном случае не будет зависеть от Z , т.е. $U(x,y,z) \rightarrow U_p(x,y)$. Математически этот факт выражается тем, что в системе уравнений (2.35) нужно положить $Z(z)=\text{const}$.

Для этого достаточно, чтобы $K_z=0$. Тогда $Z(z)=C_1$, а частное решение $U_p(x,y)$ в соответствии с (2.36) примет вид

$$U_p(x,y) = [A_1 \cos(K_x x) + A_2 \sin(K_x x)] \cdot [B_1 \cos(K_y y) + B_2 \sin(K_y y)] \quad (2.42)$$

где коэффициенты A_1, A_2, B_1, B_2 уже учитывают множитель C_1 , а в соответствии с (2.36) $K_x^2 + K_y^2 = 0$.

4. Удовлетворим граничное условие а п. 2

$$\begin{aligned} U_p(0, y) &= [A_1 \cos(K_x \cdot 0) + A_2 \sin(K_x \cdot 0)] \times \\ &\times [B_1 \cos(K_y y) + B_2 \sin(K_y y)] = 0 \end{aligned} \quad (2.43)$$

или

$$A_1 \cdot [B_1 \cos(K_y y) + B_2 \sin(K_y y)] = 0.$$

Последнее равенство будет справедливым при любом y , если $A_1 = 0$.

5. Удовлетворим граничному условию в п. 2

$$U_p(x, 0) = A_2 \sin(K_x x) \cdot [B_1 \cos(K_y \cdot 0) + B_2 \sin(K_y \cdot 0)] = 0. \quad (2.44)$$

$$A_2 B_1 \sin(K_x x) = 0.$$

Последнее равенство будет справедливым при любом x , если $B_1 = 0$.

Итак, граничные условия а и в будут удовлетворяться при $A_1 = B_1 = 0$, а частное решение $U_p(x, y)$ после определения будет иметь вид

$$U_p(x, y) = A_2 B_2 \sin(K_x x) \cdot \sin(K_y y) = A_p \sin(K_x x) \cdot \sin(K_y y). \quad (2.45)$$

6. Рассмотрим граничное условие б

$$U_p(a, y) = A_p \sin(K_x \cdot a) \cdot \sin(K_y y) = 0, \quad (2.46)$$

$A_p = 0$ – это тривиальное решение, оно не интересно. Равенство возможно при любом y , если

$$\sin(K_x \cdot a) = 0; \quad K_x = p \frac{\pi}{a}; \quad K_x \cdot a = p \cdot \pi, \quad (2.47)$$

где p – произвольное целое число ($p = 0, 1, 2 \dots$).

Таким образом, K_x может принимать различные, но не любые значения, а именно должно быть кратным π/a .

Выбор K_x однозначно определяет K_y , поскольку между ними существует связь

$$K_x^2 + K_y^2 = 0. \text{ Отсюда } K_y = \sqrt{-K_x^2} = iK_x = ip \frac{\pi}{a}.$$

Итак, $K_y = ip \frac{\pi}{a}$, а частное решение $U_p(x,y)$ на этом этапе будет

иметь вид

$$U_p(x,y) = A_p \sin(p \frac{\pi}{a} x) \cdot \sin(ip \frac{\pi}{a} y) \quad (2.48)$$

или

$$U_p(x,y) = A_p \sin(p \frac{\pi}{a} x) \cdot sh(p \frac{\pi}{a} y),$$

где A_p включает в себя умножение на i .

7. Рассмотрим последнее граничное условие г

$$U_p(x,y) = A_p \sin(p \frac{\pi}{a} x) \cdot sh(p \frac{\pi}{a} y). \quad (2.49)$$

Каким бы ни было целое число p , его не удается подобрать так, чтобы это равенство выполнялось. Это следует из того, что $A \cdot sh(p \frac{\pi}{a} b) = const$, тогда равенство, соответствующее граничному условию г, можно записать

$$\sin(p \frac{\pi}{a} x) const = U_0. \quad (2.50)$$

В левой части равенства стоит синусоидально изменяющаяся функция (2.50), в правой – постоянная величина U_0 , равенство не будет выполняться ни при каких значениях p .

Здесь необходимый закон изменения потенциала обозначен сплошной линией, а распределение потенциала, которое дается частным решением при различных значения p , – пунктирной линией. Из рис.2.4 видно, что можно взять сумму частных решений с различными p и A_p так, чтобы эта сумма на интервале $0 < x < a$ при $y=b$ давала требуемый закон постоянства потенциала.

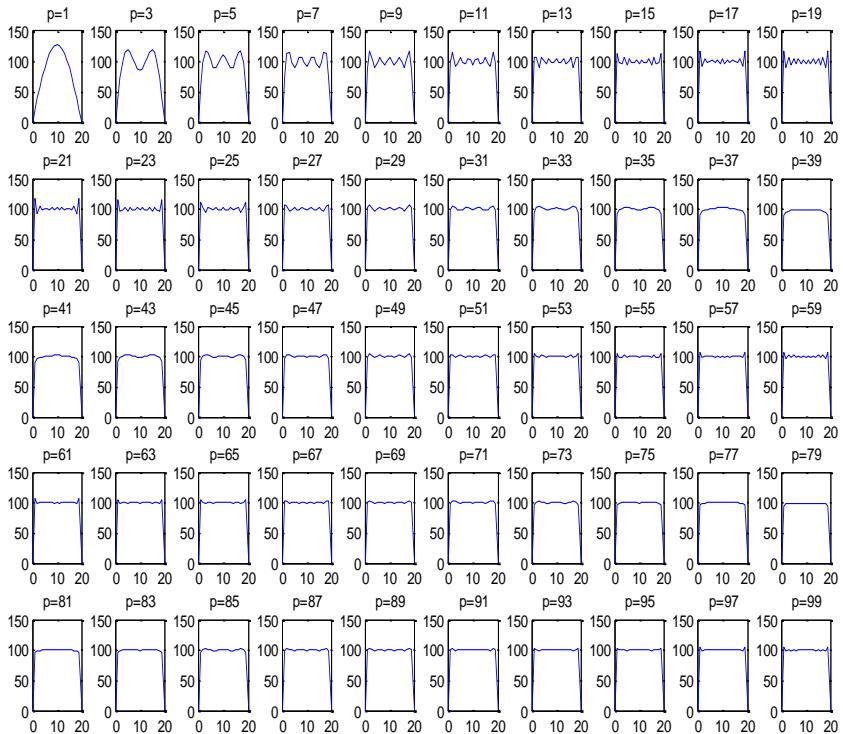


Рис. 2.4. Закон изменения и распределения потенциала

8. Будем искать решение в виде бесконечной суммы частных решений, соответствующих всем положительным значениям p . Частные решения соответствующие $p < 0$, являются, как можно убедиться, линейно зависящими от решений, соответствующих значениям $p > 0$, и могут не учитываться.

$$U(x, y) = \sum_{p=1}^{\infty} A_p \sin(p \frac{\pi}{a} x) \cdot sh(p \frac{\pi}{a} y). \quad (2.51)$$

Вновь попытаемся удовлетворить заданное граничное условие г.

$$U(x, b) = \sum_{p=1}^{\infty} A_p \sin(p \frac{\pi}{a} x) \cdot sh(p \frac{\pi}{a} b) = U_0. \quad (2.52)$$

a) В уравнении (2.52) зафиксируем какое-либо значение p , сделав его равным числу m , $p=m$, умножим обе его части на $\sin(m\frac{\pi}{a}x)$, получим

$$U_0 \sin(m\frac{\pi}{a}x) = A_m \sin^2(m\frac{\pi}{a}x) \cdot sh(m\frac{\pi}{a}b). \quad (2.53)$$

б) Уравнение (2.53) проинтегрируем по x в пределах от 0 до a .

$$U_0 \int_0^a \sin(m\frac{\pi}{a}x) dx = A_m \cdot sh(m\frac{\pi}{a}b) \int_0^a \sin^2(m\frac{\pi}{a}x) dx. \quad (2.54)$$

Рассмотрим $\int_0^a \sin(m\frac{\pi}{a}x) dx$. Это табличный интеграл

$$\begin{aligned} \int_0^a \sin(tx) dx &= -\frac{1}{t} \cos(tx) \Big|_0^a = -\frac{a}{m\pi} \cos(m\frac{\pi}{a} \cdot a) - \left[-\frac{a}{m\pi} \cos(m\frac{\pi}{a} \cdot 0) \right] = \\ &= \frac{a}{m\pi} [1 - \cos(m\pi)] \end{aligned}$$

$$\int_0^a \sin(m\frac{\pi}{a}x) dx = \begin{cases} 0 & \text{для } m - \text{четных,} \\ \frac{2a}{m\pi} & \text{для } m - \text{нечетных} \end{cases}$$

Поскольку нулевое значение интеграла – тривиальный случай не представляющий интереса, для выполнения граничных условий на крышке желоба необходимо взять только нечетные значения m , и, следовательно, p , например, $p=2l-1$, где l – любое число (рис. 2.5).

Рассмотрим интеграл в правой части уравнения (2.54)

$$\int_0^a \sin^2(m\frac{\pi}{a}x) dx.$$

Интеграл табличный, вида $\int_0^a \sin^2(tx) dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4t}\sin(2tx) \Big|_0^a = \frac{a}{2}$.

в) Уравнение (2.54) после взятия интегралов будет иметь вид

$$U_0 \frac{2a}{\pi m} = A_m \frac{a}{2} sh(m \frac{\pi}{a} b). \quad (2.55)$$

Значение A_m будет равно

$$A_m = \frac{4U_0}{m\pi \cdot sh(m \frac{\pi}{a} b)}. \quad (2.56)$$

9. Поскольку значение m выбиралось произвольным, то в найденном выражении для A_m можно m заменить на p и окончательное решение задачи представить в виде

$$U(x, y) = \frac{4U_0}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p \cdot sh(p \frac{\pi}{a} b)} \sin(p \frac{\pi}{a} x) \cdot sh(p \frac{\pi}{a} y), \quad (2.57)$$

где $p=2l-1$, а суммирование ведется по всем целым значениям $l=1, 2, \dots$. В ряде случаев для приближенного расчета оказывается достаточным вычислить два–три члена этой суммы.

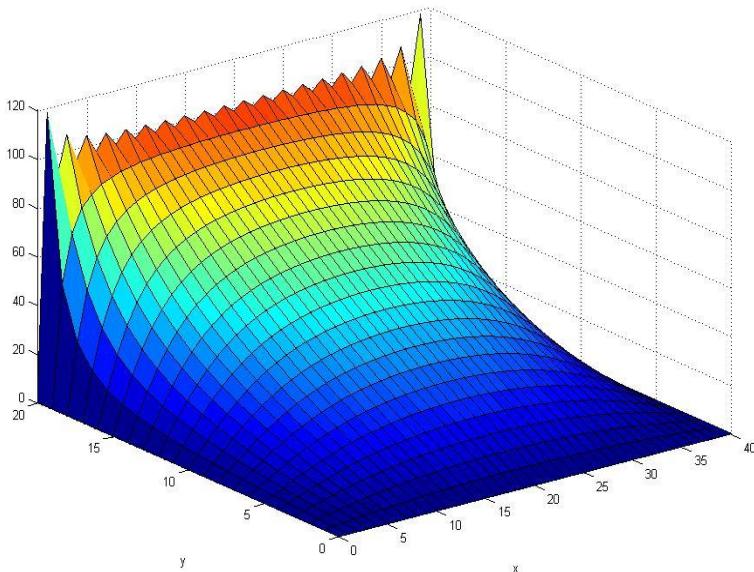


Рис. 2.5. К расчету поля прямоугольного желоба

Решение уравнений Лапласа в цилиндрической системе координат

1. Уравнение Лапласа в цилиндрической системе координат (r, φ, z)

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0. \quad (2.58)$$

2. Ищем частное решение этого уравнения $U_p(r, \varphi, z)$ в виде произведения трех функций

$$U_0(r, \varphi, z) = R(r) \cdot \Phi(\varphi) \cdot Z(z). \quad (2.59)$$

3. Подставляем (2.59) в исходное уравнение (2.58)

$$\Phi Z \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial R}{\partial r} \right) + RZ \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + R\Phi \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = 0. \quad (2.60)$$

4. Обе части уравнения (2.60) делим на произведение $\Phi R Z$

$$\frac{1}{R} \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{1}{\Phi} \cdot \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = 0. \quad (2.61)$$

5. Равенство (2.61) может соблюдаться только в том случае, если

$$\frac{1}{R} \cdot \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} = f(r); \quad \frac{1}{\Phi} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = f(\varphi); \quad \frac{1}{Z} \cdot \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = f(z). \quad (2.62)$$

Другими словами, для соблюдения равенства нулю левой части уравнения (2.61) необходимо положить

$$\frac{1}{R} \cdot \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} = -m^2; \quad \frac{1}{\Phi} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = K^2, \quad (2.63)$$

где K и m – произвольные постоянные числа. Выбор знака у K^2 и m^2 не носит принципиального значения. Выбрав знаки таким образом, мы сразу предполагаем, что решение для Φ будет выражено в обычных тригонометрических функциях, а для Z – в гиперболических функциях.

Уравнения для Z и Φ (2.63) – обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + m^2 \Phi = 0, \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} - K^2 Z = 0. \quad (2.64)$$

По аналогии с (2.34) и (2.35) решение для $\Phi(\varphi)$ запишется как

$$\Phi(\varphi) = A_1 \cos(m\varphi) + A_2 \sin(m\varphi), \quad (2.65)$$

а для $Z(z)$ по аналогии с (2.36) и (2.40) решение запишется как

$$Z(z) = B_1 ch(Kz) + B_2 sh(Kz). \quad (2.66)$$

6. Вернемся к уравнению (2.61). С учетом принятых в (2.63) обозначений его можно записать так

$$\frac{1}{R} \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} (-m^2) + K^2 = 0. \quad (2.67)$$

а) Умножим обе части этого уравнения на R , получим

$$\frac{1}{R} \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \left(K^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) R = 0. \quad (2.68)$$

б) В левой части уравнения (2.68) выполним дифференцирование d/dr по правилам дифференцирования произведения двух функций

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial R}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial r}{\partial r} \frac{\partial R}{\partial r} + r^2 \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} \right] = \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} + \frac{\partial^2 R}{\partial r^2}.$$

Тогда уравнение (2.68) в результате будет иметь вид

$$\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} + \left(K^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) R = 0. \quad (2.69)$$

Комментарии к уравнению (2.69):

- Уравнение (2.69) является дифференциальным уравнением второго порядка с переменными коэффициентами, поэтому его решение не выражается через обычные элементарные функции, а приводит к так называемым специальным функциям – функциям Бесселя m -го порядка.
- Смысл выражения «функция Бесселя m -го порядка» заключается в том, что для различных значений m решением уравнения будут являться различные функции, т.е. разные значения m определяют собой разные дифференциальные уравнения и, следовательно, различные по характеру решения.
- Величина K при заданном значении m не имеет характера уравнения.

– Уравнение (2.69) может быть легко приведено к «классическому» виду уравнения Бесселя, для этого:

а) все члены уравнения (2.69) делим на K^2

$$\frac{1}{K^2} \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{K^2} \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} + \left(1 - \frac{m^2}{K^2 r^2}\right) R = 0;$$

б) введем новую независимую переменную $x=Kr$, тогда $dx=Kdr$, $dr^2=dx^2/K^2$, $dr=dx/K$.

Составляющее уравнение (6.69) в новой переменной

$$\frac{1}{K^2} \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} = \frac{1}{K^2} \frac{\partial^2 R}{\left(\frac{\partial x^2}{K^2}\right)} = \frac{\partial^2 R}{\partial x^2};$$

$$\frac{1}{K^2} \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} = \frac{1}{K^2} \cdot \frac{K}{x} \frac{\partial R}{\left(\frac{\partial x}{K}\right)} = \frac{1}{x} \frac{\partial R}{\partial x};$$

$$\left(1 - \frac{m^2}{K^2 r^2}\right) R = \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right) R.$$

Классический вид уравнения Бесселя

$$\frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial R}{\partial x} + \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right) R = 0, \quad (2.70)$$

именно в таком виде оно обсуждается в специальных разделах курса высшей математики, приводится в справочной литературе;

в) таким образом, при решении уравнения Лапласа в цилиндрической системе координат методом Фурье или методом разделения переменных с помощью подстановки $U_p(r, \varphi, z) = R(r) \cdot \Phi(\varphi) \cdot Z(z)$, мы определили $\Phi(\varphi)$, $Z(z)$, а для нахождения $R(r)$ необходимо решить уравнение Бесселя (2.69) или (2.70), прежде, чем выяснить, как это делать, обсудим смысл постоянной m .

Постоянная m входит в уравнение Бесселя и определяет закон изменения поля вдоль радиуса r . Кроме того, входя в решение для $\Phi(\varphi)$, m определяет зависимость потенциала от угла φ . Из уравнения (2.65) $\Phi(\varphi) = A_1 \cos(m\varphi) + A_2 \sin(m\varphi)$ следует, что m может быть только целым числом. Действительно, если рассуждать от обратного и считать m дроб-

ным числом, то $\cos[m(\varphi+2\pi)] \neq \cos(m\varphi)$, а $\sin[m(\varphi+2\pi)] \neq \sin(m\varphi)$, что в таком случае свидетельствует о многозначной зависимости потенциала от угла φ , а это физически не реализуется, т.е. неверно. Итак, m – целое число.

7. Решение дифференциального уравнения Бесселя.

Для любого фиксированного m уравнение Бесселя является дифференциальным уравнением второго порядка. Как и всякое линейное дифференциальное уравнение, содержащее в качестве наивысшей производной вторую производную, это уравнение имеет два независимых частных решения.

Первое частное решение уравнения Бесселя называют функцией Бесселя m -го порядка или цилиндрической функцией первого рода. Эта функция обозначается $J_m(x)$.

Второе частное решение называют цилиндрической функцией m -го порядка второго рода или функцией Неймана. Ее обозначают $N_m(x)$.

$$R = C_1 J_m(x) + C_2 N_m(x), \quad (2.71)$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные, определяемые из граничных условий.

Функции Бесселя и Неймана имеют широкое применение в различных областях техники и, в частности, в радиотехнике, электронике, электротехнике. Эти функции табулированы, для них имеются графические зависимости численных значений функции для различных целых значений индексов m от аргумента x ; если известны x и m , то по графикам находятся числа, соответствующие $J_m(x)$ и $N_m(x)$.

Для $m=0$, $J_0(x)$ может быть вычислена по формуле

$$J_0(x) = 1 - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{(1!)^2} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{(2!)^2} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^6}{(3!)^2} + \dots . \quad (2.72)$$

Для $m=1$, $J_1(x)$ рассчитывают так

$$J_1(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)}{0!1!} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^3}{1!2!} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^5}{2!3!} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^7}{3!4!} + \dots . \quad (2.73)$$

Для произвольного m , $J_m(x)$ рассчитывают по формуле

$$J_m(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^m}{m!} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2+m}}{1!(m+1)!} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{4+m}}{2!(m+2)!} - \dots . \quad (2.74)$$

Функции Неймана любого нецелого порядка m можно представить через функцию Бесселя

$$N_m(x) = \frac{J_m(x) \cos(m\pi) - J_{-m}(x)}{\sin(m\pi)}. \quad (2.75)$$

Ряд простейших свойств функций Бесселя и Неймана важно запомнить:

$$\begin{aligned} J_0(0) &= 1; \\ J_m(0) &= 0; \\ N_m(0) &= -\infty; \\ J_m(-x) &= (-1)^m J_m(x); \\ J_{-m}(x) &= (-1)^m J_m(x); \\ N_{-m}(x) &= (-1)^m N_m(x). \end{aligned} \quad (2.76)$$

При решении задач анализа физических полей часто бывает необходимым знать значения корней Бесселевых функций, т.е. те значения x , которые обращают в ноль функцию. Корни обозначаются символом v_{mn} , где m – порядок функции Бесселя; n – номер корня. Корни функций Бесселя и Неймана приведены в справочной литературе в виде таблиц и графиков.

Практически важным свойством функции Бесселя является то, что любую функцию кусочно-гладкую на интервале от 0 до a можно представить в виде ряда Бесселевых функций

$$f(x) = \sum_{p=1}^{\infty} A_p J_m(v_{mp} \cdot \frac{x}{a}). \quad (2.77)$$

Этот ряд называется рядом Фурье–Бесселя $\Phi(\varphi)$, $Z(z)$, $R(r)$.

$$\begin{aligned} \Phi(\varphi) &= A_1 \cos(m\varphi) + A_2 \sin(m\varphi); \\ Z(z) &= B_1 ch(Kz) + B_2 sh(Kz); \\ R(r) &= C_1 J_m(x) + C_2 N_m(x), \end{aligned} \quad (2.78)$$

где $x=Kr$.

Тогда частное решение $U_p(r, \varphi, z)$ в соответствии с основными идеями метода Фурье запишется

$$U_p(r, \varphi, z) = [A_1 \cos(m\varphi) + A_2 \sin(m\varphi)] \cdot [B_1 ch(Kz) + B_2 sh(Kz)] \times \\ \times [C_1 J_m(x) + C_2 N_m(x)]$$

Рассмотрим конкретный пример, иллюстрирующий применение результатов решения уравнения Лапласа в цилиндрической системе координат.

Дано: круглый металлический заземленный цилиндр радиусом a . верхняя крышка цилиндра изолирована и имеет потенциал $U=U_0$ (рис. 2.6). Требуется найти распределение потенциала внутри цилиндра.

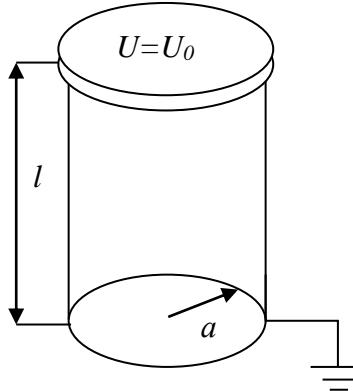


Рис. 2.6. Круглый металлический заземленный цилиндр радиусом a и высотой l

Решение:

1. По типу граничных условий данная задача – типичная краевая задача с граничными условиями первого рода (задача Дирихле). Требуется найти решение уравнения Лапласа внутри цилиндра, на границе указанной области решение должно принять заданные значения $U=0$; $U=U_0$.

2. Очевидно, что граничные условия поставленной задачи будут иметь наиболее простой вид в цилиндрической системе координат:

$$z=0, U=0;$$

$$r=a, U=0;$$

$$z=l, U=U_0.$$

3. Анализ симметрии задачи при выбранной системе координат не показывает, что потенциал не зависит от угла φ , т.е. в решении уравнения Лапласа в цилиндрической системе координат (2.78) функция $\Phi(\varphi) \neq f(\varphi) = const$, а это возможно только при $m=0$. Действительно, тогда

$$\varPhi(\varphi) = A_1 \cos(0 \cdot \varphi) + A_2 \sin(0 \cdot \varphi) = A_1 = \text{const} \neq f(\varphi). \quad (2.79)$$

Таким образом после учета симметрии задачи частное решение $U_p(r, \varphi, z) \rightarrow U_p(r, z)$ будет иметь вид

$$U_p(r, z) = [B_1 \text{ch}(Kz) + B_2 \text{sh}(Kz)] \cdot [C_1 J_0(Kr) + C_2 N_0(rK)]. \quad (2.80)$$

Выражение (2.80) составлено уже с учетом $m=0, x=Kr$.

4. Исходный потенциал должен иметь конечное значение во всех точках внутри цилиндра, в том числе и на оси цилиндра при $r=0$. Однако, как следует из (2.76) функция Неймана не остается конечной при нулевом значении аргумента. Поэтому из физических соображений конечности потенциала во всех точках исследуемого пространства, необходимо в решении (2.80) положить $C_2=0$. После этого этапа частное решение $U_p(r, z)$ запишем

$$U_p(r, z) = [B_1 \text{ch}(Kz) + B_2 \text{sh}(Kz)] \cdot C_1 J_0(Kr). \quad (2.81)$$

5. Дальнейшее определение входящих в решение констант связано с использованием граничных условий:

a) Удовлетворим первому из них $z=0, U=0$

$$U_p(r, z) = [B_1 \text{ch}(K \cdot 0) + B_2 \text{sh}(K \cdot 0)] \cdot C_1 J_0(Kr) = 0$$

или

$$B_1 C_1 J_0(Kr) = 0. \quad (2.82)$$

Равенство (2.82) возможно при любом значении r , если $B_1=0$. Итак, после удовлетворения первого граничного условия

$$U_p(r, z) = B_2 C_1 \text{sh}(K \cdot z) \cdot J_0(Kr) = C_1 \text{sh}(K \cdot z) \cdot J_0(Kr). \quad (2.83)$$

$$B_2 C_1 = C_p.$$

б) Удовлетворим второму граничному условию $r=a, U=0$

$$U(a, z) = C_p \text{sh}(K \cdot z) \cdot J_0(Ka) = 0. \quad (2.84)$$

Для выполнения этого условия при любом z необходимо, чтобы

$$J_0(Ka) = 0. \quad (2.85)$$

Из (2.85) следует, что произведение aK должно быть равным одному из корней бесселевой функции нулевого порядка.

Итак, $aK = \nu_{op}$, где ν_{op} является p -й корень (номер корня) бесселевой функции нулевого порядка от аргумента aK , тогда

$$K = \frac{\nu_{op}}{a}. \quad (2.86)$$

Частное решение $U_p(r, z)$ после нахождения K запишется

$$U_p(r, z) = C_p sh\left(\frac{\nu_{op}}{a} \cdot z\right) J_0\left(\frac{\nu_{op}}{a} \cdot r\right). \quad (2.87)$$

6) Предпримем попытку удовлетворить третьему граничному условию задачи $z=l$, $U=U_0$.

$$U(r, l) = C_p sh\left(\frac{\nu_{op}}{a} \cdot l\right) J_0\left(\frac{\nu_{op}}{a} \cdot r\right) = U_0. \quad (2.88)$$

В этом уравнении сомножитель $C_p sh\left(\frac{\nu_{op}}{a} \cdot l\right)$ – это число, кото-

рое можно обозначить $const$, тогда предполагаемое равенство (2.88) можно переписать

$$const J_0\left(\frac{\nu_{op}}{a} \cdot r\right) = U_0. \quad (2.89)$$

Из выражения (2.89) видно, что это равенство не может быть справедливым ни при каких значениях p , т.е. полученная функция потенциала

$const J_0\left(\frac{\nu_{op}}{a} \cdot r\right)$ не остается постоянной вдоль крышки цилиндра при $z=l$, как этого требует третье граничное условие, а изменяется по закону функции Бесселя.

Придавая p разные значения $p=1, 2, 3, \dots$, можно построить распределение потенциала вдоль радиуса цилиндра, даваемое частным решением (2.87), и убедиться в невозможности достижения требуемого распределения потенциала при $z=l$ с помощью этого решения.

Поскольку ни при каких значениях p не удается удовлетворить третьему граничному условию, используем принцип суперпозиции – сумма частных решений будет так же решением. Итак, решение ищем в виде суммы частных решений.

$$U_p(r, z) = \sum_{p=1}^{\infty} C_p sh\left(\frac{V_{op}}{a} \cdot z\right) J_0\left(\frac{V_{op}}{a} \cdot r\right). \quad (2.90)$$

6. Снова попытаемся удовлетворить третьему граничному условию при $z=l$, $U=U_0$.

$$U(r, l) = \sum_{p=1}^{\infty} C_p sh\left(\frac{V_{op}}{a} \cdot l\right) J_0\left(\frac{V_{op}}{a} \cdot r\right) = U_0. \quad (2.91)$$

Кроме того, в соответствии с (2.77) разложим функцию $U(r, l)$ в ряд Фурье–Бесселя

$$U(r, l) = \sum_{p=1}^{\infty} A_p J_m\left(\frac{V_{op}}{a} \cdot r\right). \quad (2.92)$$

Составляя равенство на основании (2.91) и (2.92), получим

$$\sum_{p=1}^{\infty} C_p sh\left(\frac{V_{op}}{a} \cdot l\right) J_0\left(\frac{V_{op}}{a} \cdot r\right) = \sum_{p=1}^{\infty} A_p J_m\left(\frac{V_{op}}{a} \cdot r\right).$$

Приходим к заключению, что

$$A_p = C_p sh\left(\frac{V_{op}}{a} \cdot l\right). \quad (2.93)$$

Отсюда видно, что для нахождения C_p необходимо найти A_p .

7. Для нахождения A_p воспользуемся уравнением (2.77). Зафиксируем число p , приравняв его к произвольному числу, например K . Тогда

$$f(x) = A_K J_m\left(\frac{V_{mK}}{a} \cdot x\right). \quad (2.94)$$

Равенство (2.94) умножим на функцию $x J_m\left(\frac{V_{mK}}{a} \cdot x\right)$.

$$f(x) x J_m\left(\frac{V_{mK}}{a} \cdot x\right) = x A_K \left[J_m\left(\frac{V_{mK}}{a} \cdot x\right) \right]^2. \quad (2.95)$$

И проинтегрируем в пределах от 0 до a

$$\int_0^a f(x) x J_m \left(\frac{\nu_{mK}}{a} \cdot x \right) dx = \int_0^a x A_K \left[J_m \left(\frac{\nu_{mK}}{a} \cdot x \right) \right]^2 dx. \quad (2.96)$$

Тогда постоянный коэффициент A_K будет определяться выражением

$$A_K = \frac{\int_0^a f(x) x J_m \left(\frac{\nu_{mK}}{a} \cdot x \right) dx}{\int_0^a x A_K \left[J_m \left(\frac{\nu_{mK}}{a} \cdot x \right) \right]^2 dx}. \quad (2.97)$$

В условиях данной конкретной задачи $f(x)=U(r,l)=U_0$, $x=r$, $m=0$, равенство (2.97) упростится до вида

$$A_K = \frac{U_0 \int_0^a r J_0 \left(\frac{\nu_{0K}}{a} \cdot r \right) dr}{\int_0^a r \left[J_0 \left(\frac{\nu_{0K}}{a} \cdot r \right) \right]^2 dr}. \quad (2.98)$$

Теперь для нахождения A_K нужно вычислить два интеграла

$$\int_0^a r J_0 \left(\frac{\nu_{0K}}{a} \cdot r \right) dr \text{ и } \int_0^a r \left[J_0 \left(\frac{\nu_{0K}}{a} \cdot r \right) \right]^2 dr.$$

Для вычисления этих интегралов необходимо обратиться к специальному пособию*.

Первый интеграл в (2.98)

$$\int_0^a r J_0 \left(\frac{\nu_{0K}}{a} \cdot r \right) dr = \frac{\int_0^a \left(\frac{\nu_{0K}}{a} \cdot r \right) J_0 \left(\frac{\nu_{0K}}{a} \cdot r \right) dr}{\left(\frac{\nu_{0K}}{a} \right)}. \quad (2.99)$$

Введем новую переменную

$$l = \frac{\nu_{0K}}{a} \cdot r, \quad (2.100)$$

* Анго А. Математика для электро- и радиоинженеров.

тогда

$$dt = \frac{v_{0K}}{a} dr, dr = \frac{a}{v_{0K}} dt. \quad (2.101)$$

В новой переменной интеграл (2.99) запишется как

$$\frac{\frac{a}{v_{0K}} \int_0^a t J_0(t) dt}{\left(\frac{v_{0K}}{a}\right)^2} = \left(\frac{a}{v_{0K}}\right)^2 \int_0^a t J_0(t) dt. \quad (2.102)$$

Интеграл $\int_0^a t J_0(t) dt$ – табличный, вида

$$\int t^m J_{m-1}(t) dt = t^m J_m(t). \quad (2.103)$$

При $m=1$ (как следует из (2.102) и (2.103))

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{v_{0K}}\right)^2 \int_0^a t J_0(t) dt &= \left(\frac{a}{v_{0K}}\right)^2 [t J_1(t)]_0^a = \frac{a^2}{v_{0K}^2} \left[\left(\frac{v_{0K}}{a} r \right) J_1 \left(\frac{v_{0K}}{a} r \right) \right]_0^a = \\ &= \frac{a^2}{v_{0K}^2} v_{0K} J_1(v_{0K}) = \frac{a^2}{v_{0K}} J_1(v_{0K}). \end{aligned} \quad (2.104)$$

Второй интеграл в (2.98) по аналогии с (2.104) может быть приведен к виду

$$\int_0^a r \left[J_0 \left(\frac{v_{0K}}{a} \cdot r \right) \right]^2 dr = \left(\frac{a}{v_{0K}} \right)^2 \int_0^a t [J_0(t)]^2 dt, \quad (2.105)$$

где интеграл $\int_0^a t [J_0(t)]^2 dt$ – табличный.

$$\int t [J_m(t)]^2 dt = \frac{t^2}{2} \{ [J_m(t)]^2 - J_{m-1}(t) J_{m+1}(t) \}. \quad (2.106)$$

При $m=0$ (как следует из (2.106) и (2.105))

$$\left(\frac{a}{\nu_{0K}} \right)^2 \int_0^a t [J_0(t)]^2 dt = \frac{a^2}{\nu_{0K}^2} \frac{t^2}{2} \{ [J_0(t)] - J_{-1}(t)J_1(t) \}_0^a. \quad (2.107)$$

Учитывая, что $\{J_{-m}(t) = (-1)^m J_m(t)\}$ при $m=1$ можно преобразовать к виду $J_{-1}(t) = (-1)J_1(t) = -J_{-1}(t)$, выражение (2.107) можно представить так

$$\frac{a^2}{\nu_{0K}^2} \cdot \frac{t^2}{2} ([J_0(t)]^2 + [J_1(t)]^2)_0^a = \frac{a^2}{2} [J_1(\nu_{0K})]^2. \quad (2.108)$$

С учетом (2.105) и (2.108) для A_K можно записать

$$A_K = \frac{2U_0}{\nu_{0K} J_1(\nu_{0K})}. \quad (2.109)$$

Таким образом, для удовлетворения последнего граничного условия коэффициент A_K должен быть равным

$$A_K = \frac{2U_0}{\nu_{0K} J_1(\nu_{0K})}. \quad (2.110)$$

После этого, из (2.93) находим C_K

$$C_K = \frac{2U_0}{\nu_{0K} J_1(\nu_{0K})} \cdot \frac{1}{sh(\frac{\nu_{0K}}{a} l)}. \quad (2.111)$$

Возвращаясь снова к индексу и подставляя найденные значения в разложение (2.90), получаем окончательное решение задачи

$$U(r, z) = 2U_0 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{sh(\frac{\nu_{op}}{a} \cdot z) J_0(\frac{\nu_{op}}{a} \cdot r)}{\nu_{op} J_1(\nu_{op}) sh(\frac{\nu_{op}}{a} \cdot l)}. \quad (2.112)$$

3. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В СРЕДЕ

Уравнения Максвелла

I. $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ (Поток \mathbf{E} через замкнутую поверхность) = (Заряд внутри нее) / ϵ_0

II. $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ (Интеграл от \mathbf{E} по замкнутому контуру) = $-\frac{d}{dt}$ (Поток \mathbf{B} сквозь контур)

III. $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ (Поток \mathbf{B} через замкнутую поверхность) = 0

IV. $c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$, c^2 (Интеграл от \mathbf{B} по контуру) = (Ток в контуре) / $\epsilon_0 + \frac{\partial}{\partial t}$ (Поток \mathbf{E} сквозь контур)

$\left[\begin{array}{l} \text{Сохранение заряда} \\ \text{(следует из I и IV)} \\ \nabla \cdot \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \end{array} \right]$ (Поток заряда через замкнутую поверхность) = $-\frac{\partial}{\partial t}$ (Заряд внутри нее)

Закон силы

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

Закон движения

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{p}) = \mathbf{F}, \text{ где } \mathbf{p} = \frac{mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$
 (Закон Ньютона, исправленный Эйнштейном)

Гравитация

$$\mathbf{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \mathbf{e}_r$$

Первое уравнение – дивергенция \mathbf{E} равна плотности заряда, деленной на ϵ_0 . Третье уравнение – соответствующий общий закон для магнитных полей. Второе уравнение – закон Фарадея.

До появления работы Максвелла уравнение для магнитного поля постоянных токов было известно только в виде

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0 c^2}. \quad (3.1)$$

Максвелл начал с рассмотрения известных законов электричества и магнетизма и выразил их в виде дифференциальных уравнений. Он заметил что в уравнении (3.1) есть нечто странное. Если взять дивергенцию от этого уравнения, то левая сторона обратится в нуль, потому что дивергенция ротора всегда равна нулю. Таким образом, это уравнение требует, чтобы дивергенция \mathbf{j} так же была равна нулю. Но если дивергенция \mathbf{j} равна нулю, то полный ток через любую замкнутую поверхность тоже равен нулю.

Полный ток через замкнутую поверхность равен уменьшению заряда внутри этой поверхности. Он наверняка не может быть всегда равен нулю, так как мы знаем, что заряды могут перемещаться из одного места в другое. Уравнение

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (3.2)$$

фактически есть наше определение \mathbf{j} . Это уравнение выражает самый фундаментальный закон – сохранение электрического заряда: любой поток заряда должен поступать из какого-то запаса. Максвелл заметил эту трудность и, чтобы избежать ее, предложил добавить $\partial \mathbf{E} / \partial t$ в правую часть уравнения (3.1); тогда он получил уравнение IV.

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

Покажем, что добавочный член имеет тот самый вид, который требуется, чтобы преодолеть обнаруженную Максвеллом трудность. Взяв дивергенцию его уравнения IV, мы должны получить, что дивергенция правой части равна нулю.

$$\nabla \cdot \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0} + \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0. \quad (3.3)$$

Во втором слагаемом можно переставить порядок дифференцирования по координатам и времени, так что уравнение может быть переписано в виде

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{E} = 0. \quad (3.4)$$

Согласно первому из уравнений Максвелла, дивергенция \mathbf{E} равна ρ/ϵ_0 . Подставляя это равенство в (3.4), мы придем к уравнению (3.2), которое, как мы знаем, правильно.

Что дает добавка

В качестве первого примера рассмотрим что происходит со сферически симметричным радиальным распределением тока. Пусть полный заряд внутри сферы произвольного радиуса r есть $Q(r)$. Если плотность тока при таком же радиусе равна $j(r)$, то уравнение (3.2) требует, чтобы Q уменьшалось со скоростью

$$\frac{\partial Q(r)}{\partial t} = -4\pi r^2 j(r). \quad (3.5)$$

Рассмотрим магнитное поле, создаваемое токами в таком случае. Предположим мы начертли какую-то петлю Γ на сфере радиуса r (рис.3.1). Сквозь петлю проходит какой-то ток, поэтому можно ожидать, что магнитное поле циркулирует в направлении, указанном на рис.3.1.

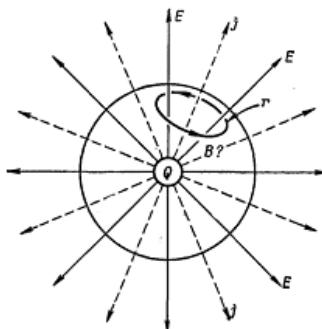


Рис. 3.1. Магнитное поле

Циркуляция \mathbf{B} зависит не только от полного тока, проходящего через петлю Γ , но и от скорости изменения со временем потока электрического поля \mathbf{E} через нее. Должно быть так, чтобы эти две части как раз погашались.

Электрическое поле на расстоянии r должно быть равно $Q(r)/4\pi\epsilon_0 r^2$, пока, как мы предположили, заряд распределен симметрично, поле радиально, и скорость его изменения тогда равна

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\partial Q}{\partial t}. \quad (3.6)$$

Сравнивая это с (3.5), мы видим, что для любого расстояния

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -\frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0}. \quad (3.7)$$

В уравнении IV оба члена от источника погашаются и ротор \mathbf{B} всегда равен нулю. Магнитного поля в данном случае нет.

В качестве второго примера рассмотрим магнитное поле провода, используемого для зарядки плоского конденсатора (рис.3.2).

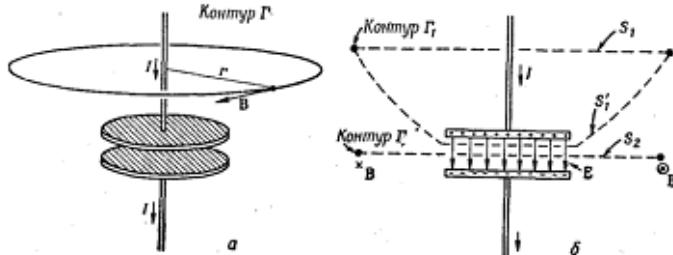


Рис. 3.2. Магнитное поле провода

Если заряд Q на пластинах со временем изменяется (но не слишком быстро), ток в проводах равен dQ/dt . Предположим, мы выбрали петлю Γ_1 в виде окружности с радиусом r (см. рис. 3.2, а). Контурный интеграл от магнитного поля будет равен току I , деленному на $\epsilon_0 c^2$. Мы имеем

$$2\pi r B = \frac{I}{\epsilon_0 c^2}. \quad (3.8)$$

Все это мы получили бы для постоянного тока, но результат не изменится, если учесть добавку Максвелла, потому что для плоской поверхности S внутри окружности электрического поля нет (считая, что провод очень хороший проводник). Поверхностный интеграл от $d\mathbf{E}/dt$ равен нулю.

Предположим, что мы медленно продвигаем кривую Γ_1 вниз. Мы будем получать всегда тот же самый результат до тех пор, пока не нарисуем кривую вровень с пластинами конденсатора. Тогда ток I будет стремиться к нулю. Контурный интеграл от \mathbf{B} вокруг Γ есть $2\pi r B$. Он должен быть равен производной по времени потока \mathbf{E} , проходящего сквозь плоскую поверхность круга S_2 . Этот поток \mathbf{E} , как мы знаем из закона Гаусса, должен быть равен произведению $1/\epsilon_0$ на заряд Q на одной из пластин конденсатора. Мы имеем

$$c^2 2\pi r B = \frac{d}{dt} \left(\frac{Q}{\epsilon_0} \right). \quad (3.9)$$

Интегрирование по меняющемуся электрическому полю дает то же магнитное поле, что и интегрирование по току в проводе.

Решение уравнений Максвелла. Потенциалы и волновое уравнение

Начнем с $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ – простейшего из уравнений. Мы знаем, что оно подразумевает, что \mathbf{B} – есть ротор чего-то. Поэтому мы записали

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (3.10)$$

а значит, уже решили одно из уравнений Максвелла.

Теперь разберем закон Фарадея $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$, потому что он не содержит никаких токов или зарядов. Если мы запишем \mathbf{B} как $\nabla \times \mathbf{A}$ и продифференцируем по t , то сможем переписать закон Фарадея в форме

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{A}.$$

Поскольку мы можем дифференцировать сначала либо по времени, либо по координатам, то можно написать это уравнение также в виде

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0. \quad (3.11)$$

Мы видим, что $\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ – это вектор, ротор которого равен нулю.

Мы полагаем

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \varphi. \quad (3.12)$$

Закон Фарадея можно представить в форме

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad (3.13)$$

т.е. \mathbf{A} определяет часть \mathbf{E} так же, как и \mathbf{B} . Что же произойдет, когда мы заменим \mathbf{A} на $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \psi$. В общем \mathbf{E} должно было бы измениться, если не принять особых мер. Мы можем, однако, допустить, что \mathbf{A} изменяется так, чтобы не влиять на поля \mathbf{E} и \mathbf{B} , если всегда будем изменять \mathbf{A} и φ вместе по правилам

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \psi \quad \text{и} \quad \varphi' = \varphi - \frac{\partial \psi}{\partial t}. \quad (3.14)$$

Тогда ни \mathbf{B} , ни \mathbf{E} , полученные из уравнения (3.13), не меняются.

Начнем с подстановки уравнения (3.13) в $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho / \varepsilon_0$; получаем

$$\nabla \cdot \left(-\nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}. \quad (3.15)$$

Это можно записать еще в виде

$$-\nabla^2 \varphi - \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}. \quad (3.16)$$

Таково первое уравнение, связывающее φ и \mathbf{A} с источниками.

Перепишем четвертое уравнение Максвелла

$$c \nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0},$$

а затем выразим \mathbf{B} и \mathbf{E} через потенциалы, используя уравнения (3.10) и (3.13).

$$c^2 \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) - \frac{\partial}{\partial t} \left(-\nabla \varphi = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0}.$$

Первый член можно переписать, используя алгебраическое тождество

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A},$$

мы получаем

$$-c^2 \nabla^2 \mathbf{A} + c^2 \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \varphi + \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = \frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0}. \quad (3.17)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (3.18)$$

Подставив (3.18) в (3.17) получаем

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0 c^2}. \quad (3.19)$$

Тогда уравнение (3.16) для φ принимает такую же форму

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}. \quad (3.20)$$

$$\text{или } \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}. \quad (3.21)$$

Это уравнение имеет симметрию по x, y, z, t .

Свет и электромагнитные волны

Уравнение для электрического поля, создаваемого зарядом, который может как-то произвольно двигаться, имеет вид

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'^2} \left[\frac{\mathbf{e}_{r'}}{r'^2} + \frac{r'}{c} \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{e}_{r'}}{r'^2} \right) + \frac{1}{c^2} \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{e}_{r'} \right], \quad (3.22)$$

$$c\mathbf{B} = \mathbf{e}_{r'} \times \mathbf{E}.$$

Если заряд движется произвольным образом, то электрическое поле, которое существует в некоторой точке, в *настоящий момент* зависит только от положения и движения заряда в *более ранний* момент времени, отстающий на интервал, необходимый для того, чтобы свет, двигаясь со скоростью c , прошел расстояние r' от заряда до точки поля. Иными словами, если вам нужно знать электрическое поле в точке (1) в момент времени t , вы должны подсчитать положение (2') заряда и его движение в момент $(t-r'/c)$ из положения заряда (2') в момент $(t-r'/c)$ (рис. 3.3).

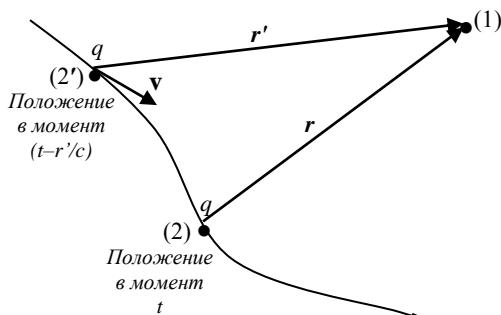


Рис. 3.3. Движение заряда

Если скорость заряда v всегда много меньше c и если рассматриваются только точки, сильно удаленные от заряда, так что в (3.22) существенно лишь последнее слагаемое, то поля можно записать в виде

$$\mathbf{E} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 r'} \left[\text{проекция ускорения заряда в момент } t - \frac{r'}{c} \text{ на направление, попечное к } r' \right] \quad (3.22)$$

и

$$c\mathbf{B} = \mathbf{e}_{r'} \times \mathbf{E}.$$

Вектор \mathbf{e}_r – это единичный вектор, направленный от «запаздывающей» точки (2') к точке (1). Тогда первое слагаемое дает то, чего следовало бы ожидать, если бы заряд в своем «запаздывающем» положении создавал кулоново поле, – это можно назвать «запаздывающим кулоновым полем». Электрическое поле обратно пропорционально квадрату расстояния и направлено от «запаздывающего» положения заряда (т.е. по вектору \mathbf{e}_r).

К «запаздывающему кулонову полю» надо добавить два других слагаемых. Второе говорит, что к запаздывающему кулонову полю надо сделать «поправку», равную быстроте изменения запаздывающего кулонова поля, умноженной на r'/c , т.е. на само запаздывание. Два первых слагаемых соответствуют вычислению «запаздывающего кулонова поля» и затем экстраполяции его в будущее, но время r'/c , т.е. как раз к моменту времени t .

В формуле (3.22) имеется еще третье слагаемое – вторая производная единичного вектора \mathbf{e}_r .

Сферические волны от точечного источника

Чтобы найти решение уравнений (3.19) и (3.20) нужно уметь решать уравнение

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -s. \quad (3.23)$$

Путем математических преобразований получаем, что решение уравнения (3.23) имеет вид

$$\psi(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi} \frac{s(t-r/c)}{r}, \quad (3.24)$$

где

$$s(t) = \int s(t)dV.$$

Влияние слагаемого с $\partial^2 \psi / \partial t^2$ в (3.23) сказывается лишь на появлении запаздывания ($t-r/c$) в потенциале кулоновского типа.

Общее решение уравнений Максвелла

Всякий источник $s(x, y, z, t)$ можно считать состоящим из суммы многих «точечных» источников, расположенных поодиночке в каждом элементе объема dV и имеющих силу $s(x, y, z, t)dV$. Поскольку (3.23) линейно, суммарное поле представляет собой суперпозицию полей от всех таких элементов источника.

В момент t поле $d\psi$ в точке (x_1, y_1, z_1) , создаваемое элементом источника sdV в точке (x_2, y_2, z_2) , выражается формулой

$$d\psi(1, t) = \frac{s(2, t - \frac{r_{12}}{c}) dV_2}{4\pi r_{12}},$$

где r_{12} – расстояние от (2) до (1). Сложение вкладов от всех частей источника означает, конечно, интегрирование по всей области, где $s \neq 0$, так что мы имеем

$$\psi(1, t) = \int \frac{s(2, t - r_{12}/c)}{4\pi r_{12}} dV_2. \quad (3.25)$$

Выражение (3.25) является решением волнового уравнения для любой системы источников.

Если подразумевать под ψ скалярный потенциал φ , то функция источника s превращается в ρ/ϵ_0 . Но можно считать, что ψ представляет одну из трех компонент векторного потенциала \mathbf{A} ; тогда s означает соответствующую компоненту $j/\epsilon_0 c^2$. Стало быть, если известна плотность зарядов $\rho(x, y, z, t)$ и плотность тока $\mathbf{j}(x, y, z, t)$, то решения уравнений (3.19) и (3.20) можно выписать немедленно.

$$\varphi(1, t) = \int \frac{\rho(2, t - r_{12}/c)}{4\pi \epsilon_0 r_{12}} dV_2, \quad (3.26)$$

$$\mathbf{A}(1, t) = \int \frac{j(2, t - r_{12}/c)}{4\pi \epsilon_0 c^2 r_{12}} dV_2. \quad (3.27)$$

Уравнения Максвелла	Их решения
$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$	$\mathbf{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$
$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$
$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\varphi(1, t) = \int \frac{\rho(2, t - r_{12}/c)}{4\pi \epsilon_0 r_{12}} dV_2$
$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$	$\mathbf{A}(1, t) = \int \frac{\mathbf{j}(2, t - r_{12}/c)}{4\pi \epsilon_0 c^2 r_{12}} dV_2$

Уравнения Максвелла в диэлектрике

Наличие в веществе поляризации означает, что там возникают поляризованные заряды и токи, которые необходимо учитывать в полных уравнениях Максвелла при нахождении полей. Сейчас мы будем решать

уравнения Максвелла для случая, когда заряды и токи не равны нулю, но неявно определяются вектором поляризации. Первым шагом должно быть явное нахождение плотности зарядов ρ и плотности тока \mathbf{j} , усредненных по малому объему. Когда поляризация \mathbf{P} меняется от точки к точке, то возникает плотность зарядов

$$\rho_{\text{пол}} = -\nabla \cdot \mathbf{P}. \quad (3.28)$$

Когда \mathbf{P} изменяется со временем, заряды движутся так, что появляется поляризационный ток. Каждый из осциллирующих зарядов вносит свой вклад, равный произведению его заряда q_e на скорость \mathbf{v} . Когда таких зарядов в единице объема N штук, то они создают плотность тока \mathbf{j}

$$\mathbf{j} = N q_e \mathbf{v}.$$

Так как известно, что $\mathbf{v} = d\mathbf{x}/dt$, то $\mathbf{j} = N q_e \frac{d\mathbf{x}}{dt}$, что как раз равно $d\mathbf{P}/dt$. Следовательно, при переменной поляризации возникает плотность тока

$$\mathbf{j}_{\text{пол}} = \frac{d\mathbf{P}}{dt}. \quad (3.29)$$

Обозначим через ρ полную плотность зарядов, включая в нее и заряды, связанные с индивидуальными атомами. Если назвать эту часть зарядов $\rho_{\text{пол}}$, то можно написать

$$\rho = \rho_{\text{пол}} + \rho_{\text{др}},$$

где $\rho_{\text{др}}$ – плотность зарядов, учтенная Максвеллом и относящаяся к другим зарядам, не связанным с определенными атомами. При этом мы бы написали

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_{\text{пол}} + \rho_{\text{др}}}{\epsilon_0}.$$

После подстановки $\rho_{\text{пол}}$ из (3.28), получаем

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_{\text{др}}}{\epsilon_0} - \frac{1}{\epsilon_0} \nabla \cdot \mathbf{P}$$

или

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho_{\text{др}}. \quad (3.30)$$

В плотность тока, фигурирующего в уравнениях Максвелла для $\nabla \times \mathbf{B}$, вносится вклад от связанных атомных электронных токов.

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_{\text{пол}} + \mathbf{j}_{\text{др}},$$

уравнение Максвелла приобретает вид

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}_{\text{др}}}{\epsilon_0} + \frac{\mathbf{j}_{\text{пол}}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (3.31)$$

Используя уравнение (3.29), получаем

$$\epsilon_0 c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{j}_{\text{др}} + \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}). \quad (3.32)$$

Если определить новый вектор $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$, то два уравнения поля приняли бы вид

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{\text{др}} \quad (3.33)$$

и

$$\epsilon_0 c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{j}_{\text{др}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (3.34)$$

Это и есть та форма уравнений, которую использовал Максвелл для диэлектриков.

Перед Максвеллом и другими учеными того времени вставала проблема магнетиков. Они ничего не знали о циркулирующих токах, ответственных за атомный магнетизм, и поэтому в плотности тока утеряли еще одну часть. Вместо уравнения (3.34) они на самом деле писали

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}' + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (3.35)$$

где \mathbf{H} отличается от $\epsilon_0 c^2 \mathbf{B}$, так как последнее учитывает эффекты атомных токов.

Таким образом, у Максвелла было четыре полевых вектора: \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{B} и \mathbf{H} , причем в \mathbf{D} и \mathbf{H} скрывалось то, на что он не обратил внимания, — процессы, происходящие внутри вещества.

Чтобы решить их, необходимо как-то связать \mathbf{D} и \mathbf{H} с другими полями, поэтому зачастую писали

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad \text{и} \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}. \quad (3.36)$$

Однако эти связи верны лишь приближенно для некоторых веществ, и то лишь когда поля не изменяются слишком быстро со временем.

4. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭМВ В НАПРАВЛЯЮЩИХ СИСТЕМАХ И В ВОЛНОВОДАХ

Если поля ограничить в двух измерениях и дать им свободу в третьем, они распространяются в виде волн.

Линии передачи

На частоте от нескольких килогерц до нескольких тысяч мегагерц электромагнитные сигналы и электромагнитная энергия обычно передаются по коаксиальным линиям, т.е. по проводу, помещенному внутрь цилиндрического «внешнего проводника» или «защиты».

Рассмотрим простейшую коаксиальную линию, состоящую из центрального проводника (тонкостенный цилиндр) и внешнего проводника (тонкостенный цилиндр), ось которого совпадает с осью внутреннего проводника (рис.4.1).

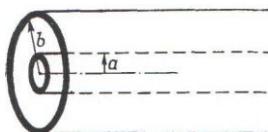


Рис. 4.1. Коаксиальная передающая линия

Предположим, что мы наблюдаем за происходящим в двух соседних точках передающей линии, на расстояниях x и $x + \Delta x$ от начала линии. Обозначим напряжение между проводниками $V(x)$, а ток в верхнем проводнике $I(x)$ (рис.4.2).

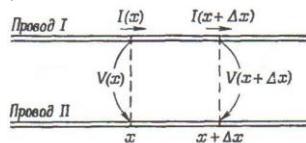


Рис. 4.2. Токи и напряжения в передающей линии

Если ток в линии меняется, то индуктивность вызовет падение напряжения вдоль небольшого участка линии от x до $x + \Delta x$.

$$\Delta V = V(x + \Delta x) - V(x) = -L_0 * \Delta x * \frac{dI}{dt} \quad (4.1)$$

или, беря предел при $\Delta x \rightarrow 0$, получаем

$$\frac{dV}{dx} = -L_0 * \frac{dI}{dt}. \quad (4.2)$$

Если взять небольшой участок линии от x до $x + \Delta x$, то заряд на нем равен $q = C_0 * \Delta x * V$. Скорость изменения этого заряда равна $C_0 * \Delta x * dV/dt$, но заряд меняется только тогда, ток когда $I(x)$, входящий в элемент, отличается от выходящего тока $I(x + \Delta x)$.

$$\Delta I = -C_0 * \Delta x * \frac{dV}{dt}. \quad (4.3)$$

При $\Delta x \rightarrow 0$

$$\frac{dI}{dx} = -C_0 * \frac{dV}{dt}. \quad (4.4)$$

Уравнения (4.2) и (4.4) передающей линии можно объединить. Продифференцировав первое по t , а второе по x , исключив V или I , получим

$$\frac{d^2V}{dx^2} = C_0 * L_0 * \frac{d^2V}{dt^2}; \quad (4.5)$$

$$\frac{d^2I}{dx^2} = C_0 * L_0 * \frac{d^2I}{dt^2}. \quad (4.6)$$

В однородной передающей линии напряжение (и ток) распространяется вдоль линии как волна.

Чтобы найти скорость распространения и характеристический импеданс, узнаем индуктивность и емкость единицы длины линии. Положим, что магнитная энергия равна $\frac{1}{2} * L * I^2$, в свою очередь, получаемая интегрированием $\epsilon_0 * c^2 * B^2 / 2$ по объему. Пусть по внутреннему проводнику течет ток I , тогда $B = I/2 * \pi * \epsilon_0 * c^2 * r$, где r – расстояние от оси. Беря в качестве элемента объема цилиндрический слой толщины dr и длины l , получаем для магнитной энергии

$$U = \frac{\epsilon_0 * c^2}{2} * \int_a^b \left(\frac{l}{2 * \pi * \epsilon_0 * c^2 * r} \right)^2 * l * 2 * \pi * r * dr, \quad (4.7)$$

где a и b – радиусы внутреннего и внешнего проводников.

Интегрируем и приравниваем эту энергию к $\frac{1}{2} * L * I^2$, получаем

$$L = \frac{l}{2 * \pi * \epsilon_0 * c^2} \ln \frac{b}{a}. \quad (4.8)$$

Индуктивность на единицу длины

$$L_0 = \frac{\ln \frac{b}{a}}{2 * \pi * \epsilon_0 * c^2}. \quad (4.9)$$

Прямоугольный волновод

Труба, служащая для прохождения волн, называется волноводом. Выбираем оси координат для прямоугольного волновода (рис.4.3).

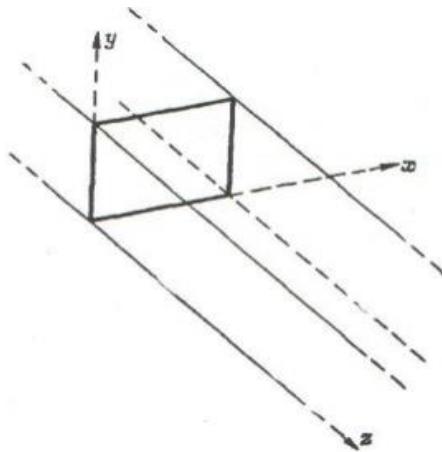


Рис. 4.3. Выбор осей координат для прямоугольного волновода

Когда волны бегут по трубе, их электрическое поле поперечно. Ищем решения, в которых E перпендикулярно z , решения с одной только y – компонентой (рис. 4.4, а). Это электрическое поле должно меняться поперек волновода, т.е. обращаться в нуль на сторонах, параллельных оси y : токи и заряды в проводнике устраиваются всегда так, чтобы на его поверхности не осталось никаких касательных составляющих электрического поля. График E_y от x – гармоническая функция (рис. 4.4, б)

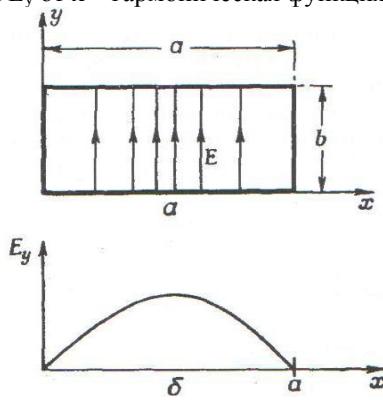


Рис. 4.4. Электрическое поле в волноводе при некотором значении x

Для волн, бегущих вдоль трубы, поле, как и функция z , будет колебаться между положительными и отрицательными значениями (рис. 4.5) и они будут бежать с какой-то скоростью.

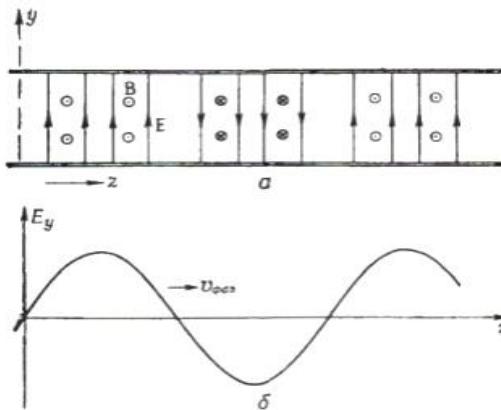


Рис. 4.5. Зависимость поля в волноводе от \$x\$

Если имеются колебания с определенной частотой, то волна в трубе имеет следующую математическую форму:

$$E_y = E_0 * \sin k_x * x * e^{i(\omega*t - k_z*z)}. \quad (4.10)$$

Рассматриваемое поле вверху и внизу направлено поперек стенок, а с боков равно нулю. Последнее выполняется тогда, когда полволны $\sin k_x * x$ укладываются на всей ширине волновода, т.е.

$$k_x * a = n * \pi, \quad (4.11)$$

где \$a\$ – внутренняя ширина трубы.

Так как в трубе нет зарядов, дивергенция поля должна быть равна нулю. У нашего \$\mathbf{E}\$ есть только компонента и она не меняется, следовательно $\nabla E = 0$.

Наше поле должно согласоваться с остальными уравнениями Максвелла для пустого пространства внутри трубы. Берем вторые производные по \$x\$, \$y\$, \$z\$ и \$t\$ в уравнении поля \$E_y\$.

$$k_x^2 * E_y + k_z^2 * E_y + \frac{\omega^2}{c^2} * E_y = 0. \quad (4.12)$$

Если \$E_y\$ не обращается всюду в нуль, то это уравнение выполняется всегда, если

$$k_x^2 + k_z^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = 0. \quad (4.13)$$

То есть волны предположенного нами типа возможны тогда, когда

$$k_z = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{a^2}}. \quad (4.14)$$

Волновое число k_z дает нам скорость, с которой бегут вдоль трубы узлы волн. Фазовая скорость равна

$$v = \frac{\omega}{k_z}. \quad (4.15)$$

Также

$$k_z = \frac{2\pi}{\lambda_g}, \quad (4.16)$$

где λ_g – длина волны в волноводе.

Если длину волны в пустом пространстве обозначить λ_0 , то

$$\lambda_g = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - (\lambda_0/2\pi)^2}}. \quad (4.17)$$

Граничная частота

Уравнение (4.16) для k_z на самом деле имеет два корня – один с плюсом, другой с минусом, т.е. волны могут бежать с отрицательной и положительной фазовой скоростью; высшие частоты приводят к более коротким волнам, пока в пределе больших ω величина k не станет равной ω/c . Свет, который мы «видим» сквозь трубу, все еще бежит со скоростью c . При убывании частоты волны становятся все длиннее и длиннее. Но если частота станет чересчур малой, то под корнем уравнения (4.15) окажется отрицательное число, т.е. когда частота становится меньше некоторой критической частоты $\omega_c = \pi * c/a$, волновое число становится мнимым и решения нет.

Если $\omega < \omega_c$, то

$$k_z = \pm i * k', \quad (4.18)$$

где k' – действительное положительное число.

$$E_y = E_0 * \sin k_x * x * e^{i * (\omega * t \mp i * k' * z)}. \quad (4.19)$$

$$E_y = E_0 * \sin k_x * x * e^{\pm k' * z} * e^{i * \omega * t}. \quad (4.20)$$

Итак, при частотах ниже граничной частоты волны вдоль трубы не распространяются. Если в любой задаче на волны k при какой-то частоте становится мнимым, это означает, что форма волны меняется – синусоида переходит в экспоненту (рис. 4.6).

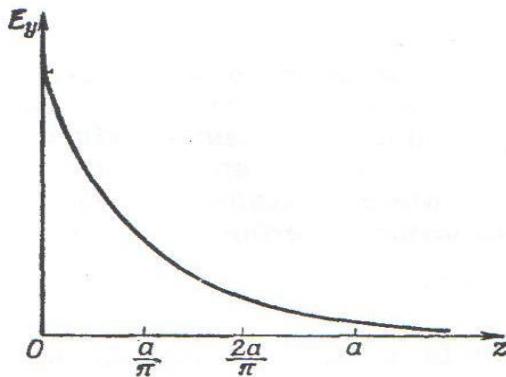


Рис. 4.6. Изменение E_y с ростом z при $\omega \ll \omega_c$

Скорость волн в волноводе

Фазовая скорость

$$v_{\phi as} = \frac{c}{\sqrt{(1 - \frac{\omega_c}{\omega})^2}}. \quad (4.21)$$

Для частот выше граничной, фазовая скорость – действительное число, больше скорости света.

Волновая скорость – скорость огибающей интерферируемых волн с одной частотой с волнами чуть другой частоты.

$$v_{zp} = \frac{d\omega}{dk}. \quad (4.22)$$

Дифференцируем по ω

$$v_{zp} = c * \sqrt{(1 - \frac{\omega_c}{\omega})^2}. \quad (4.23)$$

Это меньше скорости света.

Среднее геометрическое между $v_{\phi as}$ и v_{zp} равно квадрату скорости света.

Групповая скорость волн – это также скорость, с которой энергия передается по трубе.

Излучателем электромагнитных волн является линейный вибратор.

Роль такого вибратора выполняет антенна, возбуждаемая переменным электрическим током высокой частоты, создаваемым в клистроне отражательного типа.

Клистроны относятся к классу электронно-лучевых приборов СВЧ с динамическим управлением электронным потоком, и широко применяются в приборах неразрушающего радиоволнового контроля в качестве маломощного источника поля.

В энергию СВЧ преобразуется кинетическая энергия электронов, движущихся вдоль оси прибора. Бесспорным достоинством отражательных клистронов являются простота и надёжность конструкции, малые габариты и масса, невысокие питающие напряжения, наличие механической и электронной перестройки частоты, механическая прочность, высокая радиационная стойкость, слабая зависимость параметров от изменения температуры окружающей среды и малый уровень шумов.

По своей конструкции отражательные клистроны подразделяются на клистроны с внешними резонаторами и внутренними резонаторами.

Принцип действия клистрона

Устройство отражательного клистрона и принципиальная схема питания показаны на рис. 4.7.

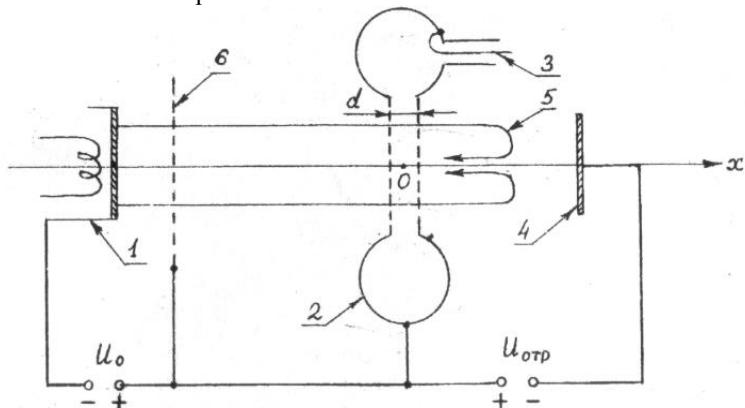


Рис. 4.7. Устройство отражательного клистрона:

- 1 – катод; 2 – резонатор; 3 – петля связи для вывода энергии из резонатора во внешний СВЧ тракт; 4 – отражатель; 5 – электронный поток;
- 6 – ускоряющий электрод (анод)

Электронный поток, эмитируемый катодом, ускоряется под действием постоянного напряжения U_o , приложенного между катодом 1 и анодом 6. Благодаря этому скорость электронов после прохождения промежутка катод 1 – анод 6 становится равной V_0 и остаётся постоянной вплоть до первой сетки резонатора 2.

$$V_0 = \sqrt{\frac{2eU_0}{m}} ,$$

где e – заряд электрона; m – масса электрона.

Затем, в пространстве между сетками резонатора, под действием переменного электрического поля СВЧ резонатора $U(t)=U \sin \omega t$ скорость электронов становится равной

$$V(t) = V_0 + V_1 \sin \omega t ,$$

где V_1 – амплитуда переменной составляющей скорости;

ω – циклическая частота СВЧ колебаний резонатора.

Промодулированный по скорости электронный поток входит в так называемое пространство группирования (пространство резонатор 2 – отражатель 4), где действует постоянное электрическое поле с напряженностью E , равной

$$E = \frac{U_{omp}}{L} ,$$

где U_{omp} – напряжение между резонатором 2 и отражателем 4;

L – расстояние между второй сеткой резонатора 2 и отражателем 4.

В пространстве группирования происходит преобразование скоростной модуляции электронного потока в модуляцию по плотности. Это происходит следующим образом: между резонатором и отражателем электроны движутся равномерно (сначала равнозамедленно, вплоть до остановки, затем меняют движение на противоположное, и, двигаясь равноускоренно, возвращаются ко второй сетке резонатора). Так как электроны выходят из резонатора в пространство группирования с разными скоростями, (быстрые электроны тратят времени на возвращение в резонатор больше, чем медленные), то становится возможной ситуация, когда целая группа электронов вернётся в резонатор одновременно, образуя электронный сгусток.

Пространственно-временные диаграммы движения электронов в пространстве группирования дают возможность определить оптимальную величину времени τ_{onm} формирования центра электронного сгустка.

$$\tau_{onm} = T \left(n + \frac{3}{4} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots ,$$

где T – период СВЧ колебаний ЭП резонатора.

На диаграмме (рис. 4.8) этому промежутку времени соответствует отрезок времени

$$\tau_{onm} = t_{max}(n) - t_2,$$

за который электрон, вошедший в зазор резонатора в момент времени t_2 , когда напряжение поля резонатора $U_{pe3} = 0$, выходит в пространство группирования со скоростью V_0 и возвращается вновь к резонатору в момент времени $t_{max}(n)$, когда поле резонатора находится в фазе максимального торможения сгустка электронов. При этом происходит отбор кинетической энергии сгустка электронов, за счёт чего в резонаторе поддерживаются незатухающие колебания.

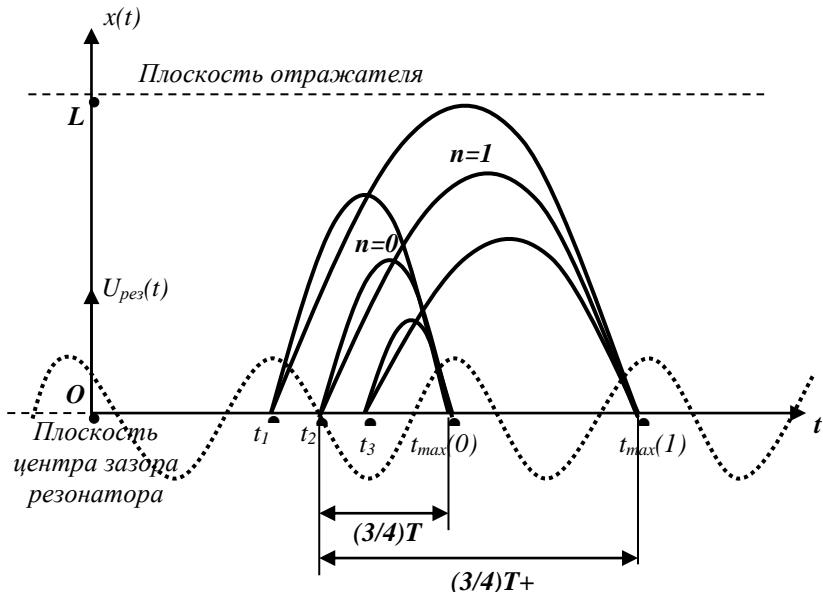


Рис. 4.8. Пространственно-временная диаграмма

Уравнение движения электрона в пространстве группирования

$$m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -eE.$$

Интегрируя первый раз уравнение движения и учитывая скорость $V(t_i)$ электрона при выходе из зазора резонатора в сторону отражателя, получим

$$V(t) = V(t_i) - \frac{eE}{m}(t - t_i).$$

Повторное интегрирование при условии, что начало координат $x = 0$ отсчитывается от второй сетки резонатора, даёт

$$x(t) = V(t_i) \cdot (t - t_i) - \frac{eE}{m} \frac{(t - t_i)^2}{2}.$$

Обозначая момент возвращения электрона ко второй сетке через $t_{max}(n)$ (при этом учтём, что $x(t_{max})=0$), найдём время пролёта электрона в пространстве группирования $\tau = t_{max}(n) - t_i$.

$$x(t_{max}) = V(t_i) \cdot (t_{max} - t_i) - \frac{eE}{m} \frac{(t_{max} - t_i)^2}{2} = 0,$$

$$\text{откуда } \tau_i(n) = t_{max}(n) - t_i = \frac{2m}{eE} \cdot V_i,$$

где индекс $i=1, 2, 3$ связывает моменты времени t_i с соответствующими фазами поля резонатора U_{pez} , а значениям $n = 0, 1, 2\dots$ соответствует одна из возможных зон генерации.

В момент времени t_1 поле резонатора U_{pez} находится в фазе максимального ускорения электронов, вошедших в зазор резонатора, так что они выходят в пространство группирования со скоростью $V(t_1) = V_0 + V_1$ и движутся там на четверть периода дольше, чем τ_{onm} .

Моменту t_3 соответствует фаза максимального торможения входящих электронов полем резонатора, так что они выходят из резонатора в пространство группирования со скоростью $V(t_3) = V_0 - V_1$ и движутся там на четверть периода меньше, чем τ_{onm} .

Таким образом, все электроны, вышедшие в течение полупериода СВЧ поля от t_1 до t_3 в пространство группирования, вернутся к резонатору и соберутся в сгусток в один из моментов $t_{max}(n)$, когда этот сгусток испытывает максимальное торможение полем резонатора. При этом энергия сгустка переходит в энергию СВЧ колебаний ЭП резонатора.

Время пролёта может быть выражено через электрические параметры отражательного клистрона.

$$\tau = \frac{2m}{eE} \cdot V_0 = \frac{2mL}{eU_{omp}} \cdot \sqrt{\frac{2eU_0}{m}} = L \frac{\sqrt{8 \frac{m}{e} U_0}}{U_{omp}}.$$

Приравнивая τ_{onm} и τ , получим условие баланса, необходимое для получения генерации колебаний.

$$L \frac{\sqrt{8 \frac{m}{e} U_0}}{U_{omp}} = T \left(n + \frac{3}{4} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Подставляя вместо периода T частоту генерируемых колебаний $f = 1/T$, получим уравнение, определяющее фазовые условия, при которых возможна максимальная отдача энергии электронами сгустка в резонаторе клистрона.

$$U_{omp}(n) = \frac{f \cdot L}{(n + 3/4)} \sqrt{8 \frac{m}{e} U_0}.$$

Зависимость генерируемой мощности P от напряжения отражателя U_{omp} при постоянном напряжении на резонаторе $U_0 = \text{const}$ имеет вид зон (рис. 4.9).

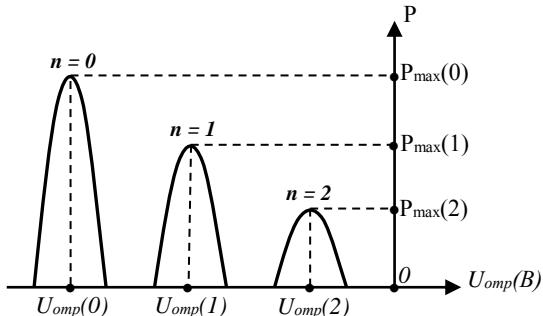


Рис. 4.9. Зависимость мощности клистрона от напряжения на отражателе

Максимальная мощность развивается в центре зоны генерации $P_{\max}(n)$ при $U_{\text{опт}}(n)$, когда имеет место оптимальное торможение сгустков в зазоре резонатора.

$$P_{\max}(n) = \frac{I_0 \cdot U_0}{\pi \cdot (n + 3/4)},$$

где I_0 — ток электронного пучка.

При изменении напряжения на отражателе относительно $U_{\text{опт}}(n)$, соответствующего центру зоны, время пролёта электронами пространства группирования отличается от оптимального и происходит уменьшение

мощности. При достаточно больших отклонениях $\Delta U_{\text{отр}} = U_{\text{отр}} - U_{\text{отр}}(n)$ происходит прекращение генерации СВЧ колебаний.

Частота колебаний $f = 1/T$, генерируемых клистроном в первом приближении, определяется резонансной частотой контура, связанного с зазором резонатора. Электронный сгусток в сеточном зазоре влияет на его резонансную частоту. Изменение частоты зависит от величины и формы электронного сгустка, времени пролёта и момента входа в сеточный зазор. Следовательно, частота, генерируемая отражательным клистроном, зависит от U_0 и $U_{\text{отр}}$. Изменение частоты колебаний при изменении напряжения на электродах называют *электронной перестройкой частоты*. В отражательном клистроне электронная перестройка частоты обычно производится изменением напряжения на отражателе, так как в цепи этого электрода отсутствует ток, и, следовательно, не потребляется мощность.

Диапазоном электронной перестройки называется изменение частоты генерируемых колебаний в пределах половинной мощности по отношению к максимальной мощности в центре зоны.

Необходимым условием генерации также является наличие положительной обратной связи. В отражательном клистроне функцию внутренней положительной обратной связи выполняет электронный пучок.

Третьим условием генерации является выполнение условия баланса амплитуд, которое выражается уравнением

$$P_0 \geq P_{\text{пол}} + P_{\text{пот}},$$

где $P_0 = U_0 I_0$ – мощность источника постоянного тока; I_0 – сила тока, непромоделированного потока; $P_{\text{пол}}$ – полезная мощность, генерируемая клистроном и поступающая в нагрузку; $P_{\text{пот}}$ – мощность потерь.

Минимальное значение I_0 , при котором начинается генерация, называется *пусковым*.

Таким образом, для получения устойчивой генерации необходимо выполнение трёх условий:

- а) наличие положительной обратной связи;
- б) выполнение условия баланса фаз;
- в) выполнение условия баланса амплитуд.

Электрические параметры и характеристики

1. Частота и мощность

Выпускаемые в мире отражательные кластронны работают на частотах 0.8–220 ГГц. Среди них около 200 типов предназначены для использования в миллиметровом диапазоне волн.

Мощность отражательных кластронов находится в широких пределах от 10 мВт до 2.5 Вт. Максимальные значения выходной мощности являются характерными для кластронов, используемых, в основном, в качестве генераторов передающих устройств радиорелейных линий связи маломощных доплеровских радиорелейных станций.

У большинства отражательных кластронов мощность лежит в пределах 10–500 мВт. При этом наибольшие значения являются характерными для кластронов, используемых в качестве генераторов накачки параметрических усилителей и генераторов в измерительной аппаратуре. Отражательные кластронны, применяемые в качестве гетеродинов приёмных устройств, имеют выходную мощность 10–100 мВт.

2. Перестройка частоты

Одной из положительных особенностей отражательных кластронов является наличие возможности механической и электронной перестройки частоты. Электронная перестройка рабочей частоты определяется формулой

$$\delta f = \frac{f_{\max} - f_{\min}}{f_{cp}} \cdot 100\%,$$

где f_{\max} и f_{\min} соответствуют точкам половинной мощности, а f_{cp} – максимальной мощности зоны генерации (рис. 4.10).

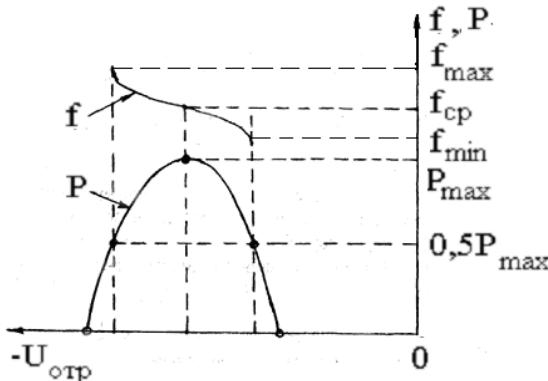


Рис. 4.10. Зона генерации и перестройка частоты

Электронная перестройка частоты, осуществляемая изменением отрицательного напряжения отражателя, составляет 0.1–1% от средней частоты клистрона. Механическая перестройка рабочей частоты осуществляется обычно в пределах 1–15%. Отдельные типы клистронов миллиметрового диапазона волн имеют механическую перестройку до 40%.

3. Коэффициент полезного действия

Электронный КПД отражательного клистрона равен

$$\eta_e = \frac{P_e}{I_0 U_0},$$

где P_e – выходная мощность в центре зоны генерации;

I_0 – ток электронного пучка;

U_0 – ускоряющее напряжение анода.

В отражательных клистронах КПД невелик и составляет в приборах малой мощности доли процента, а в приборах повышенной мощности 2–3% .

Малая величина КПД обусловлена двумя причинами:

- а) использование одного резонатора в качестве модулирующего и выходного устройства, что приводит к слишком большим амплитудам модулирующего напряжения и как результат – формирование сгустков недостаточной плотности;
- б) отсутствие коллектора для удаления отработанных электронов, которые частично "садятся" на сетки резонатора, частично бесполезно "болтаются" в рабочем пространстве.

4. Крутизна электронной перестройки

Отражательные клистроны в зависимости от выходной мощности и частоты работают при $U_{\text{отр}}$ от минус 200 В до минус 2700 В. Наибольшие значения относятся к клистронам миллиметрового диапазона. Максимальные напряжения отражателя у клистронов сантиметрового диапазона волн достигают минус 500 В, а у клистронов миллиметрового диапа-

зона минус 1000 В. Крутизна электронной перестройки $\frac{\Delta f}{\Delta U_{\text{omp}}}$ в сан-

тиметровом диапазоне составляет 0.3–1.2 МГц/В, а в миллиметровом достигает 10–15 МГц/В.

Область применения

Количество типов отражательных клистронов из года в год сокращается в связи с их заменой твердотельными СВЧ генераторами. Вместе

с тем рекламируются сотни типов этих приборов. Это определяется большим разнообразием их технических характеристик прежде всего по частоте, выходной мощности, стабильности частоты и мощности, а также по конструкции и технологии изготовления. Поэтому отражательные клаистроны широко применяются в различной радиоэлектронной аппаратуре. Они используются как генераторы СВЧ колебаний в передатчиках радиорелейных линий связи, маломощных доплеровских РЛС, измерительной аппаратуре, для накачки параметрических усилителей, в качестве гетеродинов приёмных устройств и т.д. При этом вне конкуренции остаётся область миллиметровых и субмиллиметровых волн, в которой созданы и с успехом используются отражательные клаистроны.

Заслуживают внимания также миниатюрные отражательные клаистроны, которые по своим размерам и применению приближаются к полупроводниковым СВЧ приборам. В частности, у них рабочее напряжение не превышает 100 В, а их габариты – около 1 см.

Изучаемый клаистрон

Изучаемый отражательный клаистрон К-19 является серийным клаистроном, имеет конструкцию, рассчитанную на включение в волноводный тракт и относится к виду клаистронов с внутренним резонатором.

Конструктивно клаистрон состоит из металлокерамического корпуса с расположенным внутри него резонатором (рис.4.11).

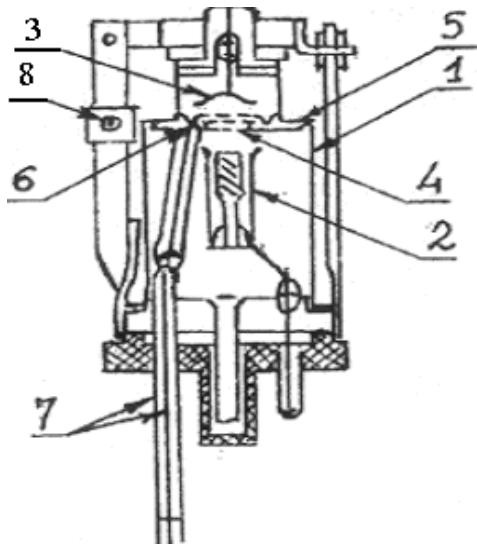


Рис. 4.11. Клистрон

Внутри корпуса 1 смонтированы три основные части прибора: электронная пушка 2, отражатель 3, сетки 4, являющиеся анодом. Вывод энергии из резонатора 5 осуществляется петлей связи 6, заканчивающейся линией 7 на цоколе лампы. Эта коаксиальная линия 7 вставляется в отверстие широкой стенки волновода и является возбуждающей антенной. Механическая настройка частоты осуществляется изменением частоты резонатора с помощью винта 8.

Клистрон К-19 имеет мощность до 10 мВт на частоте 10 ГГц. Механическая перестройка может осуществляться в диапазоне 1500 МГц, а электрическая – в диапазоне 100 МГц.

Описание экспериментальной установки

Изучение работы отражательного клистрона производится на установке, функциональная схема которой показана на рис. 4.12.

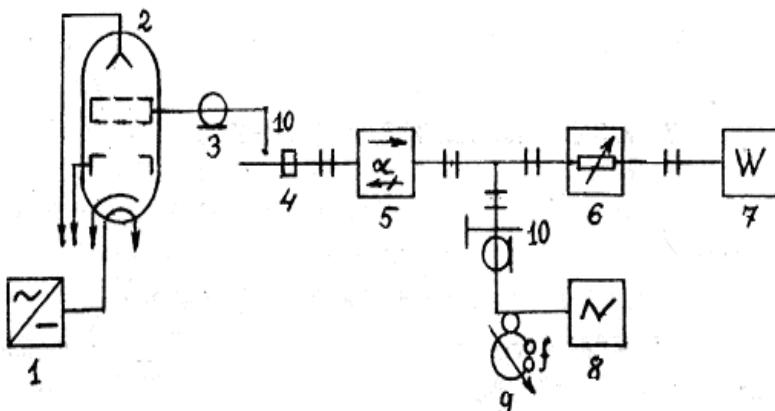


Рис. 4.12. Структурная схема лабораторной установки:

- 1 – источник питания; 2 – клистрон К-19; 3 – коаксиальная линия;
- 4 – прямоугольный волновод сечением 23 x 10 мм; 5 – ферритовый вентиль;
- 6 – аттенюатор; 7 – ваттметр МЗ-41; 8 – осциллограф С1-20 ;
- 9 – волномер 35 ИМ; 10 – коаксиально–волноводный переход

Источник питания обеспечивает подачу на электроды клистрона (анод и отражатель) необходимых напряжений, величины которых могут плавно регулироваться и измеряться.

Рабочее напряжение накала клистрона равно 6,3 В.

СВЧ мощность, генерируемая клистроном, поступает через ферритовый вентиль, обеспечивающий необходимую развязку, на измеритель мощности МЗ-41. Часть мощности ответвляется на волномер 35 ИМ и на осциллограф С1-20.

Для наблюдения зон генерации на экране осциллографа с помощью тумблера МОДУЛЯЦИЯ на блоке питания подаётся синусоидальное напряжение на отражатель клистрона. Этим же напряжением производится развертка осциллографа. На вход вертикального отклонения луча поступает сигнал с детектора.

В свободном пространстве, в так называемой волновой зоне (где расстояние от антенны до приемника $r \gg \lambda$), распространяются попечевые электромагнитные волны. По мере удаления от источника амплитуды напряженностей электрического E и магнитного H полей убывают как $1/r$.

Если вибратор, возбужденный клистроном, расположен в волноводе, который заканчивается рупором, то излучение происходит через отверстие рупора. В этом случае излучение направлено преимущественно вдоль оси рупора.

В полость резонатора вставлена петля связи с вибратором – антенной А, введенной в волновод, которая и возбуждает в последнем электромагнитные волны. Эти волны распространяются по волноводу к рупору, из которого излучаются в свободное пространство.

Клистрон укреплен непосредственно на волноводе. Питание клистрона осуществляется следующим образом: накал ~6,3 В; на резонатор подается +(200,300) В относительно катода; на отражатель 0,–200 В. Волновод, оканчивающийся рупором, расположен на подставке, позволяющей менять высоту расположения рупора над лабораторным столом и ориентацию рупора. Сама подставка может перемещаться вдоль стола. Клистрон и волновод имеют регулировочные устройства, позволяющие оптимизировать режим излучения. Индикатором электрического поля служит зонд с детектором, контакты которого являются ненастроенной антенной; концы детектора присоединяются к микроамперметру. Эквивалентная схема измерительного зонда может быть представлена в виде, показанном на рис. 4.13, где ε – ЭДС, пропорциональная амплитуде напряженности электрического поля в точке наблюдения; R_i – внутреннее сопротивление детектора; R_H – внутреннее сопротивление микроамперметра; С – входная собственная емкость прибора. Из рис. 4.13, а видно, что схема представляет собой электрическую цепь однополупериодного выпрямителя. Среднее значение выпрямленного тока в такой цепи будет определяться характеристикой детектора, которая представлена на рис. 4.13, б. Для малых сигналов характеристика может быть представлена аналитической зависимостью между изменением напряжения и изменением тока в виде $I = aU^2$. Так как U пропорционально амплитуде поля E , ток пропорционален E^2 и, следовательно, интенсивности S электромагнитного поля.

Основное требование, предъявляемое к зонду, заключается в том, что при внесении его в поле он должен не влиять или мало влиять на структуру измеряемого поля. Это требование накладывает ограничения на конструкцию самого прибора – индикатор должен быть мал по сравнению с длиной волны λ (размеры детектора примерно в 8 раз меньше λ). Материал держателя, на котором крепится индикатор, должен иметь такую же диэлектрическую проницаемость ϵ , как и среда, в которой распространяется волна. В качестве держателя детектора–антенны взят пенопластовый стержень длиной 300 мм.

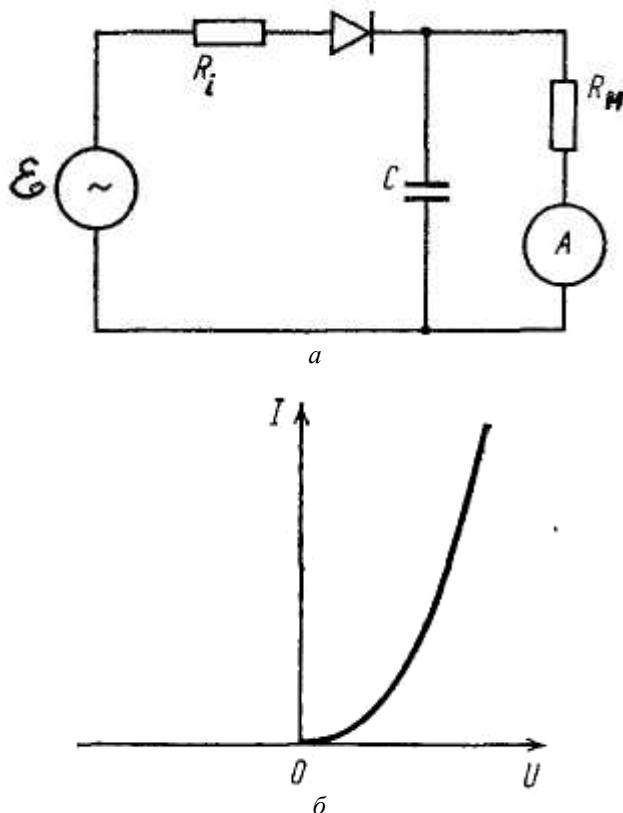


Рис. 4.13. Схема измерительного зонда:
а – эквивалентная схема измерительного зонда;
б – вольт-амперная характеристика детектора

Относительная диэлектрическая проницаемость пенопласта $\epsilon=1,03$ мало отлична от $\epsilon=1$ воздуха. На одном конце стержня укреплен детектор-

антенна, второй конец стержня крепится к подставке. Провода, соединяющие головки детектора-антенны с прибором постоянного тока, уложены в пазу, прорезанном в стержне. Провода, как правило, свивают и располагают так, чтобы они образовывали замкнутый контур наименьшей площади. Это делается для того, чтобы ЭДС, наведенная магнитным полем, была значительно меньше ЭДС, наведенной электрическим полем.

Детектор-антенна укреплен перпендикулярно к проводам: в этом случае электрическое поле, если вектор E параллелен антенне, наведет в ней максимальную ЭДС, а в соединительном проводе наводимая ЭДС практически будет равна нулю.

Зонд может вращаться вокруг вертикальной оси и перемещаться на лабораторном столе.

В комплект установки входит также металлическая пластина размером 300×400 мм, укрепленная на специальной подставке. Эта пластина может служить отражателем электромагнитных волн.

Включение установки

Проверить расположение элементов установки на лабораторном столе и монтаж электрической схемы (рис. 4.14).

Включить источник питания клистрона в сеть и прогреть его 10 мин. Установить напряжения отражателя и резонатора клистрона, обеспечивающие максимальную мощность излучения, о чем можно судить по показанию микроамперметра, включенного в цепь СВЧ детектора.

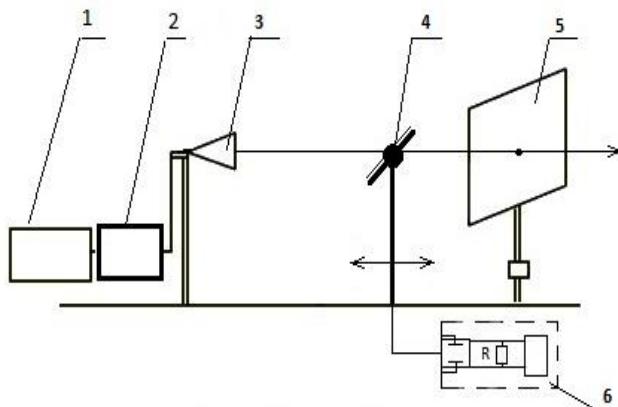


Рис. 4.14. Схема лабораторной установки:

- 1 – генератор СВЧ; 2 – амплитудный модулятор звуковой частоты (модулируем СВЧ волну); 3 – рупорная антенна;
- 4 – антенна индикатора положения узлов и пучностей стоячей волны;
- 5 – отражатель (зеркало); 6 – регистрирующее устройство сигнала антенны детектора

Определение длины волны излучения

Определение длины волны λ производится измерением расстояния между максимумами или минимумами в системе стоячих волн. Получить стоячие волны можно, отразив плоскую электромагнитную волну от металлической плоскости, на которую волна падает нормально. Для получения стоячих волн следует поставить на пути их распространения пластину-отражатель. Пластину установить нормально к оси излучателя на расстоянии 400–450 мм от него. Между пластиной и излучателем поместить зонд. Антенну зонда повернуть вокруг горизонтальной оси так, чтобы токоизмерительный прибор показал максимальное значение тока детектора.

Перемещая зонд вдоль оси излучателя, от пластины к излучателю, измерить распределение интенсивности $S=f(x)$. Координата зонда x отсчитывается от пластины. Перемещать зонд следует так, чтобы x менялось в пределах от 3 до 100 мм. Близко к излучателю проводить измерения не рекомендуется.

Построить график изменения интенсивности $S=f(x)$. Этот график иллюстрирует интерференцию двух волн – прямой и отраженной. Расстояние между точками, в которых амплитуда как функция x имеет одну и ту же фазу, равно половине длины бегущей волны. Это позволяет определить длину волны λ излучения рупора.

В пучности фиксируется СВЧ сигнал, модулированный звуковой частотой, который с помощью детектора, встроенного в звуковой индикатор, разделяется на СВЧ и звуковые колебания. Звуковые колебания подаются на динамик, а СВЧ колебания гасятся сопротивлением. В результате по максимальному уровню звукового сигнала мы можем судить о местонахождении пучности СВЧ волны (рис.4.15). В узлах отсутствуют колебания СВЧ, а следовательно, и нет звуковой модуляции, поэтому по минимуму звукового сигнала индикатора можно судить о местонахождении узлов СВЧ волны.

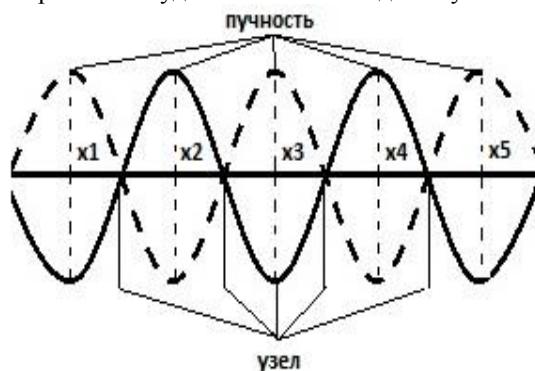


Рис. 4.15. График изменения интенсивности $S=f(x)$

Определение координат пучности не обладает высокой точностью. Координаты узлов находятся по отсутствию сигнала. Рекомендуется находить длину волны СВЧ по координатам узлов. Расстояние между парой узлов равно половине длине волны и в нашем эксперименте составляет 16 мм, что соответствует длине волны 32 мм.

Контрольные вопросы

1. Принцип действия отражательного клистрона. Условия генерации.
2. Пространственно временные диаграммы. Зоны генерации в отражательном клистроне.
3. Где применяется клистрон?
4. Что такое флуктуации?
5. Что такое коаксиальные линии?
6. Что такое волновод?
7. Что такая граничная частота?
8. Как определяется скорость в волноводе?

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Комаров В.А., Мужицкий В.Ф., Гуревич С.Ю. Теория физических полей: В 3 т. Челябинск – Ижевск: Изд–во ЮУрГУ, 1997-2000. Т. 1: Электромагнитное поле. 1997. 208 с.; Т. 2: Акустическое поле. 1998. 304 с.; Т. 3: Связанные поля. 2000. 627 с.
2. Бессонов Л.А. Электромагнитное поле. М.: Гардарики, 2001. 317 с.
3. Ермолов И.Н., Остапин Ю.Я. Методы и средства неразрушающего контроля качества. М.: Высшая школа, 1988.
4. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.. Фейнмановские лекции по физике. М.: Мир, 1966. 5-7 Т.: Т. 5. Электричество и магнетизм. 296 с.; Т. 6. Электродинамика. 343 с.; Т. 7. Физика сплошных сред. 290 с.
5. Иродов И.Е. Электромагнетизм. Основные законы. М.–СПб.: Физматлит, 2001. 351с.
6. Иродов И.Е. Волновые процессы. М.–СП б.: Физматлит, 2001. 253 с.
7. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. М.: Наука, 1967. 460 с.
8. Лепедин А.Ф. Акустика. М.: Высшая школа, 1978.
9. Исаченко В.П. и др. Теплопередача. М.: Энергия, 1981.
10. Румянцев С.В. Радиационная дефектоскопия. М.: Атомиздат, 1974.
11. Ермолов И.Н., Остапин Ю.Я. Методы и средства неразрушающего контроля качества. М.: Высшая школа, 1988.

12. Лебедев И.В. Техника и приборы СВЧ. М.: Высшая школа, 1972. Т. 2. 579 с.
13. Фёдоров Н.Д. Электронные приборы СВЧ и квантовые приборы: учебник для вузов. М.: Атомиздат, 1979. 288 с.
14. Пчельников Ю.Н., Свиридов В.Т. Электроника сверхвысоких частот. М.: Радио и связь, 1981. 96 с.
15. Матвеев А.Н. Электричество и магнетизм. М.: Высшая школа, 1983.
16. Матвеев А.Н. Оптика. М.: Высшая школа, 1985.
17. Сивухин Д.В. Общий курс физики: В 5 т. М.: Физматлит, МФТИ, 2002: Т. 2. Термодинамика и молекулярная физика; Т. 3. Электродинамика; Т. 4. Оптика.
18. Бочкарев В.Г., Леднов А.Ю. Теория физических полей: метод. указания. Магнитогорск: МГТУ, 2003.
19. Белов В.К. Метрологическая обработка результатов физического эксперимента: учеб. пособие. Магнитогорск: МГТУ, 1999.
20. Белов В.К. Фурье-преобразование в оптике: метод. указания. Магнитогорск: МГМА, 1995.
21. Бочкарев В.Г. Исследование цепей переменного тока. Добротность: метод. указания. Магнитогорск: МГМА, 1995.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Классификация видов и методов неразрушающего контроля.....	3
2. Методы расчета потенциальных полей.....	15
3. Основные уравнения электромагнитного поля в среде	54
4. Распространение ЭМВ в направляющих системах и в волноводах.....	65
Контрольные вопросы	85
Библиографический список.....	85

Учебное текстовое электронное издание

Николаев Александр Александрович

ТЕОРИЯ ФИЗИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ

Учебное пособие

1,50 Мб

1 электрон. опт. диск

Редактор Т.А. Колесникова

г. Магнитогорск, 2015 год
ФГБОУ ВПО «МГТУ»

Адрес: 455000, Россия, Челябинская область, г. Магнитогорск,
пр. Ленина 38

ФГБОУ ВПО «Магнитогорский государственный
технический университет им. Г.И. Носова»

Кафедра физики
Центр электронных образовательных ресурсов и
дистанционных образовательных технологий
e-mail: ceor_dot@mail.ru