Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова»

М.В. Быкова
Е.В. Кобелькова
Н.А. Лосева

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

Утверждено Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия

Магнитогорск
2012

УДК 517.521

Рецензенты:

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики и вычислительной техники,
ФГБОУ ВПО «Магнитогорский государственный университет»
В.В. Дубровский

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математических методов в экономике,
ФГБОУ ВПО «Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова»
Н.А. Реент

Быкова М.В., Кобелькова Е.В., Лосева Н.А.
Числовые ряды [Электронный ресурс] : учебное пособие / Мария Васильевна Быкова, Елена Владимировна Кобелькова, Надежда Андреевна Лосева ; ФГБОУ ВПО «Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова». – Электрон. текстовые дан. (0,6 Мб). – Магнитогорск : ФГБОУ ВПО «МГТУ», 2012. – 1 электрон. опт. диск (CD-R). – Систем. требования : IBM PC, любой, более l GHz ; 512 Мб RAM ; 10 Мб HDD ; MS Windows XP и выше ; Adobe Reader 8.0 и выше ; CD/DVD-ROM дисковод ; мышь. – Загл. с титул. экрана.

В учебном пособии рассматриваются следующие вопросы:

- числовой ряд, частичная сумма ряда, общий член ряда; исследование ряда на сходимость по определению и по необходимому признаку сходимости ряда; достаточный признак расходимости ряда.
- достаточные признаки сходимости числовых рядов с положительными членами: сравнения, радикальный и интегральный Коши, Даламбера и условия их применения.
- знакочередующиеся ряды, условия их сходимости (теорема Лейбница); знакопеременные ряды, их свойства; абсолютная и условная сходимости.

Учебное пособие содержит теоретические вопросы и задачи, требующие активной работы с лекцией или учебником. Приведены решения типовых задач, рекомендации для решения задач самостоятельно и контрольные задачи с ответами.

Учебное пособие «Числовые ряды» предназначено для студентов технических специальностей, обучающихся по обычной и ускоренной программам.

УДК 517.521

СОДЕРЖАНИЕ

ЛЕКЦИЯ 1. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

Аннотация: числовой ряд, частичная сумма ряда, общий член ряда; исследование ряда на сходимость по определению и по необходимому признаку сходимости ряда; достаточный признак расходимости ряда.

Цель лекции: вести понятие числового ряда, его суммы. Исследовать числовой ряд на сходимость по определению и по необходимому признаку сходимости ряда; достаточному признак расходимости ряда

1. Определение ряда и его сходимость

Аналитическое выражение, имеющее формально вид суммы, содержащей бесконечно много слагаемых, называется *бесконечным рядом* или *рядом*.

Определение 1.1.

Пусть задана последовательность чисел $\{u_n\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Составим новую последовательность чисел $\{S_n\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, следующим образом:

$$S_1 = u_1,$$

$$S_2 = u_1 + u_2,$$

$$S_3 = u_1 + u_2 + u_3,$$

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n.$$

Пара последовательностей $\{u_n\}$ и $\{S_n\}$называется ***числовым рядом*** (с общим членом u_n) и обозначается через

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots \quad (1.1) \qquad \text{или} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad (1.2)$$

Элементы последовательности $\{u_n\}$ называются членами ряда (1.1), а элементы последовательности $\{S_n\}$ – частичными суммами этого ряда, при этом u_n называется n-ым членом этого ряда, а конечная сумма S_n – n-ой частичной суммой этого ряда, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Если последовательность частичных сумм ряда (1.1) сходится, то он называется сходящимся рядом, а если расходится, то расходящимся.

Определение 1.2.

Ряд, членами которого являются члены ряда (1.1), начиная с $(n+1)$-го взятые в том же порядке, называется n***-ым остатком ряда*** (1.1) и обозначается:

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \qquad \text{или} \qquad u_{n+1}+u_{n+2}+u_{n+3}+\ldots$$

Определение 1.3.

Если ряд (1.1) сходится, то предел $S=\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ называется его ***суммой***.

В этом случае пишут $S=u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots$ или $S=\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ (1.2), то есть, в дальнейшем мы будем употреблять один и тот же символ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ как для обозначения самого ряда (1.1), так и для обозначения его суммы (1.2), если он сходится.

Итак, каждый ряд является парой двух последовательностей, таких, что, первая может быть взята произвольной (последовательность членов ряда), а вторая составлена определённым образом из членов первой (последовательность частичных сумм членов ряда).

Однако ряд однозначно определяется каждой из этих последовательностей. Действительно, если задана последовательность членов u_n ряда, то члены последовательностей частичных сумм находятся согласно (1.1) по формулам:

$$S_n=u_1+u_2+\ldots+u_n,\;\; n=1,2,3,\ldots .$$

Если же задана последовательность $\{S_n\}$ частичных сумм ряда, то его члены определяются по формулам $u_1=S_1$, $u_n=S_n-S_{n-1}$, $n=1,2,3,\ldots$. Отсюда следует, что для каждой последовательности всегда можно найти такой ряд, что она будет последовательностью его частичных сумм.

Это означает, что рассмотрение рядов эквивалентно рассмотрению последовательностей. Задача изучения сходимости рядов равносильна задаче изучения сходимости последовательностей.

Если n-ый остаток ряда (1.1) сходится, то его сумму будем обозначать через R_n:

$$\boldsymbol{R_n=\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k} \qquad (1.3)$$

и называть *остатком ряда.*

Теорема 1.1. (необходимое условие сходимости ряда)

Если ряд (1.1) сходится, то

$$\lim_{n\to\infty} u_n=0 \qquad (1.4).$$

Доказательство: Если ряд (1.1) сходится, то последовательности его частичных сумм S_n, $n=1,2,3,\dots$; S_{n-1}, $n=1,2,3,\dots$, очевидно, имеют один и тот же предел, равный сумме S этого ряда.

Так как $U_n = S_n - S_{n-1}$, $n=1,2,3,\dots$, то $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim(S_n - S_{n-1}) = \lim S_n - \lim S_{n-1} = S - S = 0$.

С помощью теоремы 1.1 иногда удаётся установить расходимость ряда (1.1): если для ряда (1.1) условие (1.4) не выполняется, то он расходится.

Пример 1.1. Пусть дан ряд $b + bq + bq^2 + bq^3 + \ldots + bq^{n-1} + bq^n + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} bq^n \quad (b \neq 0)$. Выясним вопрос сходимости этого ряда, составленного из членов бесконечной геометрической прогрессии.

Составим частичную сумму S_n:

$$S_n = b + bq + \ldots + bq^{n-1} = \frac{b - bq^n}{1-q} = \frac{b}{1-q} - \frac{bq^n}{1-q}.$$

Очевидно, что при $n \to \infty$ изменяется второе слагаемое в формуле для S_n, причём, характер его изменения зависит от того, какое число q.

а) Если $|q| < 1$ (прогрессия убывающая), то, очевидно, $\dfrac{bq^n}{1-q} \to 0$, при $n \to \infty$, поэтому $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{b}{1-q}$ и данный ряд сходящийся.

б) Если $|q| > 1$, то $\dfrac{bq^n}{1-q} \to \infty$ при $n \to \infty$, и S_n не имеет конечного предела, т. е. данный ряд расходится.

в) Если $q = 1$, то $S_n = b + b + \ldots + b = nb$ и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, т.е. ряд расходится.

г) Если $q = -1$, то $S_n = \dfrac{b}{2} - \dfrac{b\cdot(-1)^n}{2}$ и ряд принимает вид: $b - b + b - b + \ldots$, то есть $S_1 = b$, $S_2 = 0, \ldots, S_{2n-1} = b$, $S_{2n} = 0$. Такая последовательность частичных сумм не имеет предела, т.е. данный ряд расходится.

Итак, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b \cdot q^n$ сходится только при $|q| < 1$ и его сумма $S = \dfrac{b}{1-q}$; и расходится при $|q| \geq 1$.

2. Свойства сходящихся рядов

Теорема 2.1. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, сходится то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot u_n$, где $c \in R,\ c = const$, также сходится и $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot u_n = c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Доказательство. Пусть $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ и $S_n^{(1)} = \sum_{k=1}^{n} cu_k$, тогда, очевидно, $S_n^{(1)} = cS_n$.

По условию $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ существует, поэтому существует $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^{(1)} = \lim\limits_{n\to\infty} cS_n = c \lim\limits_{n\to\infty} S_n$, то есть $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot u_n = c \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ согласно определению суммы ряда.

Теорема 2.2. Пусть ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходятся, тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$, называемый суммой данных рядов, также сходится и

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} v_n \qquad (2.1)$$

(то есть сходящиеся ряды, можно почленно складывать).

Доказательство.

Пусть $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$, $S_n^{(1)} = \sum_{k=1}^{n} v_k$ и $\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} (u_k + v_k)$, тогда $\sigma_n = S_n + S_n^{(1)}$ и так как $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^{(1)}$ по условию существуют, то $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n$ также существует и

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} \left(S_n + S_n^{(1)}\right) = \ = \lim_{n\to\infty} S_n + \lim_{n\to\infty} S_n^{(1)}.$$

Это равенство эквивалентно (2.1).

Теорема 2.3. Если ряд сходится, то любой его остаток сходится. Если какой-либо остаток ряда (1.1) сходится, то и сам ряд (1.1) сходится.

При этом, если $S = \sum_{k=1}^{n} u_k$, $S_m = \sum_{k=1}^{m} u_k$, $R_m = \sum_{k=m+1}^{n} u_k$, то $S = S_m + R_m$.

Доказательство. Пусть $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$, $n = 1, 2, ...$ – частичные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, а $S_k^{(m)} = u_{m+1} + \ldots + u_{m+k}$ – частичные суммы его m-го остатка $u_{m+1} + u_{m+2} + ... + u_{m+k} + ...$.

Очевидно, что

$$S_n = S_m + S_k^{(m)},\ n = m + k \qquad (2.2)$$

откуда при фиксированном m следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ существует тогда и только тогда, когда сходится некоторый его остаток $R_m = \lim\limits_{k\to\infty} S_k^{(m)}$.

Поскольку натуральное число m было произвольным, то первая часть теоремы доказана.

Переходя к пределу в равенстве (2.2) при $k\to\infty$ и фиксированном m, имеем $S = S_m + R_m$, так как $n = m+k$ при $k\to\infty$, а $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_k^{(m)} = R_m$.

Из теоремы 2.3 следует, что отбрасывание или добавление конечного числа членов к данному ряду не влияет на его сходимость.

Из $S = S_m + R_m$, если ряд сходится, то его остаток стремится к нулю:

$$\lim_{m\to\infty} R_m = \lim_{m\to\infty}\left(S - S_m\right) = 0. \qquad (2.3)$$

Но условие (2.3) нельзя принять в качестве определения сходящегося ряда, так как остаток ряда сам является рядом, и говорить о его стремлении к нулю, можно лишь уже обладая определением сходимости ряда.

3. Критерий Коши сходимости ряда

Если $\{S_n\}$–последовательность частичных сумм ряда (1.1), то $S_{n+p} - S_{n-1} = u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n+p}$.

Теорема 3.1. (Критерий Коши). Для того, чтобы ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходился, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовал такой номер n_ε, что при любом $n \ge n_\varepsilon$, и любом целом $p \ge 0$ выполнялось неравенство:

$$\left|u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n+p}\right| < \varepsilon \qquad (3.1).$$

Из критерия Коши сходимости ряда легко можно получить необходимое условие сходимости ряда. Действительно, в этом случае неравенство (3.1) выполняется для любого $p \ge 0$ и, в частности для $p = 0$. Поэтому для всех $n \ge n_\varepsilon$ имеем $|U_n| < \varepsilon$, а это в силу произвольности $\varepsilon > 0$ и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Пример 3.1. Рассмотрим так называемый *гармонический ряд:*

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

$u_n = \dfrac{1}{n}$; $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, но ряд расходится.

Действительно, для любого $n = 1, 2, \ldots$ имеем

$$u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{2\cdot n-1} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n-1} > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2},$$

то есть для любого n при $\varepsilon = \frac{1}{2}$ и $p = n-1$ неравенство (3.1) не выполняется, а именно, $\left|u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{2n-1}\right| > \frac{1}{2}$.

Таким образом, из критерия Коши следует, что *гармонический ряд расходится.*

Итак, необходимое условие сходимости, ряда (1.1) (теорема 1.1) не является вместе с тем достаточным.

Из рассмотренного примера следует также, что ряд: $1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \ldots + \frac{1}{n^\alpha} + \ldots$ при $\alpha < 1$ расходится.

а) Действительно, при $\alpha < 1$ для любого $n = 2, 3, \ldots$ справедливо неравенство $n^\alpha < n$, тогда

$$u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{2\cdot n-1} = \frac{1}{n^\alpha} + \frac{1}{(n+1)^\alpha} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)^\alpha} > \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n+1} > \frac{1}{2}.$$

Поэтому при $\alpha < 1$ для любого $n = 2, 3, \ldots$ при $\varepsilon = \frac{1}{2}$ и $p = n-1$ неравенство (3.1) также не выполняется, и, следовательно, в силу критерия Коши рассматриваемый ряд расходится.

б) Рассмотрим ряд $1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \ldots + \frac{1}{n^\alpha} + \ldots$ при $\alpha > 1$ и покажем, что в этом случае он сходится. Рассмотрим сначала частичные суммы этого ряда порядков $n = 2^k - 1$, $k = 1, 2, \ldots$:

$$\frac{1}{2^{p\cdot\alpha}} + \frac{1}{(2^p+1)^\alpha} + \frac{1}{(2^p+2)^\alpha} + \ldots + \frac{1}{(2^{p+1}-1)^\alpha},$$

$p = 0, 1, \ldots, k-1$, то есть

$$S_{2^k-1} = 1 + \left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha}\right) + \left(\frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{6^\alpha} + \frac{1}{7^\alpha}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2^{(k-1)\alpha}} + \ldots + \frac{1}{\left(2^k-1\right)^\alpha}\right).$$

Заметим, что для каждого слагаемого p-ой группы справедливо неравенство:

$\frac{1}{2^{p\cdot\alpha}} \geq \frac{1}{(2^p+m)^\alpha}$, $m = 0, 1, \ldots, 2^p - 1$, и что в этой группе 2^p–слагаемых, получим

$S_{2^k-1} \prec 1 + \frac{2}{2^\alpha} + \frac{2^2}{2^{2\alpha}} + \ldots + \frac{2^{\kappa-1}}{2^{(k-1)\cdot\alpha}} < \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{1}{2^{(\kappa-1)\cdot(\alpha-1)}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{\alpha-1}}} = \frac{2^{\alpha-1}}{2^{\alpha-1}-1}$, т.е. последовательность частичных сумм S_{2^k-1} ограничена сверху при $\alpha > 1$.

В силу положительности членов рассматриваемого ряда последовательность его частичных сумм возрастает. Поэтому существует конечный или бесконечный $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. Но тогда выполнено неравенство (3.1), следовательно, данный ряд сходится.

Итак, ряд с общим членом $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$, то есть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}^{\alpha}}$ называемый обобщённым гармоническим рядом (или рядом Дирихле) сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \le 1$.

Пример 3.2. Написать ряд по общему члену $u_n = \dfrac{2n+1}{n!}$.

Пользуясь формулой общего члена ряда $u_n = f(n) = \dfrac{2n+1}{n!}$, можно написать любой член ряда. Заметим, что $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot (n-2)\cdot (n-1)\cdot n$. Чтобы получить k-ый член ряда, достаточно в формуле общего члена u_n вместо n подставить k, то есть:

если $n=1$, то $u_1 = \dfrac{3}{1!} = \dfrac{3}{1}$;

если $n=2$, то $u_2 = \dfrac{5}{2!} = \dfrac{5}{1\cdot 2} = \dfrac{5}{2}$;

если $n=3$, то $u_3 = \dfrac{7}{3!} = \dfrac{7}{1\cdot 2\cdot 3} = \dfrac{7}{6}$;…

Складывая члены этой бесконечной последовательности, получим ряд:

$$\frac{3}{1}+\frac{5}{1\cdot 2}+\frac{7}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{9}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\frac{11}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+...+\frac{2\cdot n+1}{1\cdot 2\cdot 3...(n-1)\cdot n}+...$$ или

$$\frac{3}{1!}+\frac{5}{2!}+\frac{7}{3!}+\frac{9}{4!}+\frac{11}{5!}+\ldots+\frac{2\cdot n+1}{n!}+\ldots$$

Пример 3.3. Найти общий член ряда: $\dfrac{3}{2}+\dfrac{7}{2^2}+\dfrac{11}{2^3}+\dfrac{15}{2^4}+\ldots$

Эта задача является обратной к задаче 3.3. Чтобы её решить достаточно найти закон, которому подчиняются все члены данного ряда, то есть найти: $u_n = f(n),\ \ n = 1, 2,...$.

Числители членов данного ряда образуют арифметическую прогрессию: 3,7,11,15,…, где первый член $a_1 = 3$, разность прогрессии $d = 4$.

Известна формула общего, n-го члена арифметической прогрессии: $a_n = a_1 + d(n-1)$; поэтому n-ый числитель равен:

$$a_n = 3 + 4(n-1) = 4n - 1 .$$

Знаменатели членов данного ряда: 2, 2^2, 2^3,… образуют геометрическую прогрессию, где первый член $b_1 = 2$, знаменатель прогрессии $q = 2$.

Известна формула n-го члена геометрической прогрессии $b_n = b_1 q^{n-1}$; поэтому n-ый знаменатель равен: $b_n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$. Тогда общий член ряда $u_n = \dfrac{4n+1}{2^n}$.

Приведём алгоритм нахождения суммы ряда.

1. Найти последовательность частичных сумм ряда: $S_1, \ S_2, ..., S_n, ...$ как функцию номера n, то есть $S_n = \varphi(n)$.
2. Найти предел этой последовательности при $n \to \infty$, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

Пример 3.4. Найти сумму ряда:

$$\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + ... + \frac{1}{(3\cdot n - 2)\cdot(3\cdot n + 1)} + ...$$

1.Найдем S_n**:**

а) *Первый способ.* Составим последовательность частичных сумм данного ряда:

$$S_1 = \frac{1}{1\cdot 4} = \frac{1}{4},$$

$$S_2 = \frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} = \frac{2}{7},$$

$$S_3 = \frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 10} = \frac{3}{10},$$

$$S_4 = \frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 10} + \frac{1}{10\cdot 13} = \frac{4}{13},$$

. . . .

Частичные суммы представляют собой дроби, числители которых равны индексу (номеру) частичной суммы, а знаменатели – утроенному индексу (номеру) сложенному с единицей.

Поэтому можно предположить, что $S_n = \dfrac{n}{3n+1}$.

Методом полной математической индукции докажем, что эта формула верна.

$$S_{n+1} = S_n + U_{n+1} = \frac{n}{3n+1} + \frac{1}{(3(n+1)-2)(3(n+1)+1)} = = \frac{n}{3n+1} + \frac{1}{(3n+1)(3n+4)} =$$

$$=\frac{n(3n+4)+1}{(3n+1)(3n+4)}=\frac{3n^2+4n+1}{(3n+1)(3n+4)}=\frac{3n^2+3n+n+1}{(3n+1)(3n+4)}=\frac{3n(n+1)+(n+1)}{(3n+1)(3n+4)}=\frac{(3n+1)(n+1)}{(3n+1)(3n+4)}=$$

$=\dfrac{n+1}{3n+4}=\dfrac{n+1}{3(n+1)+1}$, то есть доказано, что $S_n=\dfrac{n}{3n+1}$.

б) *Второй способ.* Представим общий член ряда в виде суммы двух дробей, то есть, разложим дробь на простейшие, пользуясь методом неопределённых коэффициентов.

Пусть $u_n=\dfrac{1}{(3n+1)(3n-2)}=\dfrac{A}{3n-2}+\dfrac{B}{3n+1}$,

тогда $1=A(3n+1)+B(3n-2)$ или $1=(3A+3B)n+A-2B$;

при $n=2$; $1=7A+4B$ или $1=3A\Rightarrow A=\dfrac{1}{3}$;

при $n=-1$; $1=4A+B\Rightarrow 1=-3B\Rightarrow B=-\dfrac{1}{3}$;

Итак, $u_n=\dfrac{1}{(3n+1)(3n-2)}=\dfrac{1}{3(3n-2)}-\dfrac{1}{3(3n+1)}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3n-2}-\dfrac{1}{3n+1}\right)$.

Тогда при $n=1$ $\quad u_1=\dfrac{1}{3}\left(1-\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3\cdot 4}$;

при $n=2$ $\quad u_2=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{7}\right)=\dfrac{1}{3\cdot 4}-\dfrac{1}{3\cdot 7}$;

. . . .

Тогда,

$$S_n=u_1+u_2+\ldots+u_n=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3\cdot 4}\right)+\left(\frac{1}{3\cdot 4}-\frac{1}{3\cdot 7}\right)+\left(\frac{1}{3\cdot 7}-\frac{1}{3\cdot 10}\right)+\ldots+\frac{1}{3(3n-2)}-\frac{1}{3(3n+1)}=$$

$=\dfrac{1}{3}\left(1-\dfrac{1}{3n+1)}\right)=\dfrac{n}{3n+1}$,

так как все слагаемые, кроме первого и последнего взаимно уничтожаются.

2. Найдём сумму ряда.

а) $S_n=\dfrac{n}{3n+1}$; $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{3n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{n}{n}}{\frac{n}{n}+\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{3+\frac{1}{n}}=\dfrac{1}{3}$

б) $S_n=\dfrac{1}{3}\left(1-\dfrac{1}{3n+1}\right)$; $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{3}\left(1-\dfrac{1}{3n+1}\right)=\dfrac{1}{3}$.

Итак, сумма данного ряда $S=\frac{1}{3}$, следовательно, он сходится по определению (1.1).

Замечание: В большинстве случаев, не удаётся найти общей формулы для n-ой частичной суммы ряда, тогда вопрос о сходимости ряда приходится решать, используя достаточные признаки сходимости ряда.

Контрольные вопросы

1) Дайте определение числового ряда с положительными членами.

2) Сформулируйте определение общего члена ряда.

3) Если дан общий член ряда, то можно ли найти первый, второй, пятый член ряда? Приведите примеры.

4) Каково условие сходимости ряда (Критерий Коши) ?

5) Дать определение суммы числового ряда.

6) Каковы условия сходимости геометрической прогрессии?

7) Сформулируйте необходимый признак сходимости числовых рядов с положительными членами.

8) Каков достаточный признак расходимости ряда?

9) Каков алгоритм нахождения суммы ряда?

10) Если известно, что $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, то можно ли утверждать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится?

11) Пусть дан сходящийся ряд. Является ли сходящимся ряд, который получен из исходного ряда, если:

а) из него удалить конечное число членов;

б) к нему добавить конечное число членов?

12) Свойства сходящихся рядов: сформулируйте теоремы.

Задачи для самостоятельного решения

1. Записать несколько первых членов ряда:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)^n}{n!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{2n!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n+2}$;

2. Записать формулу $n-$го члена ряда:

а) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\ldots$;

б) $\frac{\ln 2}{1^2}+\frac{\ln 3}{2^2}+\frac{\ln 4}{3^2}+\ldots$;

в) $\frac{1}{2\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 12}+\frac{1}{12\cdot 17}+\frac{1}{17\cdot 22}+\ldots$;

г) $\frac{2}{1!}-\frac{4}{2!}+\frac{8}{3!}-\frac{16}{4!}+\ldots$;

3. Исследовать числовой ряд на сходимость по определению и найти его сумму:

а) $1+1+1+1+\ldots$;

б) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}\ldots$;

в) $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 9}+\ldots$;

4. Исследовать ряд на сходимость с помощью необходимого признака сходимости рядов:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{100n+1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\sin\frac{1}{n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}(1+2n)^{\frac{1}{n}}$;

5. Доказать сходимость ряда, опираясь на свойства сходящихся рядов:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7}{n^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n+\left(\frac{1}{5}\right)^n\right)$;

Ответы:

1. а) $\frac{3}{1!}+\frac{5^2}{2!}+\frac{7^3}{3!}+\ldots$; б) $\frac{1}{2\cdot 1!}+\frac{\sqrt{2}}{2\cdot 2!}+\frac{\sqrt{3}}{2\cdot 3!}+\ldots$; в) $\frac{1}{5}+\frac{2}{11}+\frac{3}{29}+\frac{4}{83}+\ldots$;

2. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{(n-1)^2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(5n-3)(5n+2)}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot 2^n}{n!}$;

3. а) $S_n=n$, $\lim\limits_{n\to\infty}n=+\infty$; б) $S_n=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$; в) $S_n=\frac{1}{2}$;

4. а) расходится; б) расходится; в) расходится

5. а) сходится б) сходится

Задания для практического занятия

1. Зная формулу общего члена ряда, записать несколько первых его членов:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n^2+2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2n-1)\cdot 2n}$;

2. Написать формулу n – ой частичной суммы ряда; найти $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ или показать, что он не существует; сделать вывод о сходимости ряда.

а) $1+2+3+\ldots+n+\ldots$;

б) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots$;

в) $1-1+1-1+\ldots+(-1)^{n-1}+\ldots$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3\cdot 2^{n-1}}$;

д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$;

е) $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}+\ldots$;

3. Проверить необходимый признак сходимости ряда и достаточный признак расходимости:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n+1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} arctg\,\frac{n^2+1}{n+3}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^n$;

д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+5}{(n+1)^3}$; е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot n}{\ln(n+1)}$.

Контрольные задания

Вариант 1	Вариант 2
1. Найти сумму ряда S_n, сделать вывод о сходимости ряда:	
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot(n+3)}$;	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+2^n}{6^n}$;
2. Применяя необходимый признак сходимости ряда, сделать вывод о поведении ряда:	
а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n}$;	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n^2}{2n^2-1}}$;
б) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{2n+1}{n}}$.	б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{5n+3}$.

Ответы:

1. а) $1+\frac{2}{3}+\frac{5}{11}+\frac{1}{3}+\ldots$; б) $-1+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{5}}+\ldots$; в) $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{14}+\ldots$.

2. а) $S_n=\frac{1+n}{2}\cdot n=\frac{n}{2}(1+n)$; $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(1+n)}{2}=+\infty$; расходится.

б) $u_n=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$; $S_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$;

$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=1$; сходится.

в) $S_n=0$ при n – четном; $S_n=-1$ при n – нечетном; расходится.

г) $S_n=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{4}{3}$; сходится.

д) $u_n=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$;

$$S_n=\frac{1}{2}\cdot\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2n-3}-\frac{1}{2n-1}\right)+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right]=\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{2n+1}\right);$$

$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{2}$; сходится.

е) $S_n=\frac{1}{4}$; сходится.

3.

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5^n}{n+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5^n\cdot\ln 5}{1}=+\infty$, расходится;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}arctg\frac{n^2+1}{n+3}=\lim\limits_{n\to\infty}arctgn=\frac{\pi}{2}$, расходится;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, вывод о сходимости ряда сделать нельзя;

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^n=\left(1^\infty\right)=e^3$, расходится;

д) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+5}{(n+1)^3}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, вывод о сходимости ряда сделать нельзя;

е) $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\ln(n+1)}=\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)=\infty$, расходится;

ЛЕКЦИЯ 2. ДОСТАТОЧНЫЕ ПРИЗНАКИ СХОДИМОСТИ РЯДОВ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ЧЛЕНАМИ

Аннотация: достаточные признаки сходимости числовых рядов с положительными членами: сравнения, радикальный и интегральный Коши, Даламбера и условия их применения.

Цель лекции: Обосновать условия применения достаточных признаков сходимости рядов. Рассмотреть примеры их применения.

4. Сравнение рядов с положительными членами

Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$, (1.1) и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots$, (1.1')

где все $u_i > 0, v_i > 0$, $i = 1,2,3,\ldots,n,\ldots$.

Теорема 4.1. Если члены ряда (1.1) не больше соответствующих членов ряда (1.1′), то есть $u_n \le v_n$ $(n = 1,2,...)$, и ряд (1.1′) сходится, то сходится и ряд (1.1).

Доказательство: Пусть $S_n = \sum_{i=1}^{n} u_i$, $\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} v_i$.

Из того, что $u_n \le v_n$ следует, что $S_n \le \sigma_n$.

Так как ряд (1.1′) сходится, то существует предел σ , его n -ой частичной суммы $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma$.

Из того, что все $u_i > 0$, $v_i > 0$, следует, что $\sigma_n < \sigma$, и тогда из неравенства $S_n \le \sigma_n \Rightarrow S_n < \sigma$ то есть частичные суммы S_n ограничены. Заметим, что при увеличении и частичная сумма S_n возрастает. Итак, S_n возрастает и ограничена сверху, значит, она имеет предел, пусть $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, очевидно, что $S \le \sigma$. Следовательно, ряд (1) сходится.

Пример 4.1. Ряд $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} \ldots + \frac{1}{n^n} + \ldots$ сходится, так как его члены меньше соответствующих членов ряда $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$, который сходится как геометрическая прогрессия со знаменателем $q = \frac{1}{2}$, начиная со второго члена. Его сумма $S = 1 + \frac{\frac{1}{2^2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{4 \cdot \frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. Тогда данный ряд сходится, и его сумма не превосходит $\frac{3}{2}$.

Теорема 4.2. Если члены ряда (1.1) не меньше соответствующих членов ряда (1.1′), то есть $u_n \ge v_n$, и ряд (1.1′) расходится, то ряд (1.1) расходится.

Доказательство. Из того, что $u_n \ge v_n$ следует, что $S_n \ge \sigma_n$. Члены ряда $(1.1')$ положительны его частичная сумма σ_n возрастает при возрастании n, а так как он расходится, то $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n = \infty$, но тогда из неравенства $S_n \ge \sigma_n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, то есть ряд (1.1) расходится.

Замечания:

1. Теоремы 4.1 и 4.2 справедливы только для рядов с положительными членами. Они остаются в силе, если некоторые члены рядов (1.1) и $(1.1')$ равны нулю. Но эти теоремы не работают, если среди членов рядов (1.1) и $(1.1')$ есть отрицательные.
2. Теоремы 4.1 и 4.2 справедливы и тогда когда неравенства $u_n \le v_n$ и $u_n \ge v_n$ выполняется лишь при $n > N$, а не для всех $n = 1,2,\ldots$

Алгоритм исследования ряда на сходимость с помощью непредельного признака сравнения:

Дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$

0. Написать формулу общего члена ряда u_n (если ряд записан в развернутом виде);

1. Подобрать ряд для сравнения так, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ чтобы:

а) $u_n \ge v_n$;	б) $u_n \le v_n$;

2. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ на сходимость;

3. Сделать вывод о сходимости исходного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, если

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ - расходится, то и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится	б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ - сходится, то и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ - сходится, то ?	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ - расходится, то ?

Пример 4.2. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots$ расходится, так как его члены, начиная со второго, больше соответствующих членов гармонического расходящегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$

Пример 4.3. Применяя непредельный признак сравнения, исследовать ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n n}$$

1) Выберем для сравнения ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$

Общий член ряда: $u_n = \frac{1}{3^n n}$; $v_n = \frac{1}{n}$; $\frac{1}{3^n n} < \frac{1}{n} \Rightarrow u_n < v_n$;

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ – гармонический ряд, он расходится;

Вывод: т.к. ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ расходится и $u_n < v_n$, то вопрос о сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ остается открытым.

2)Выберем другой ряд для сравнения $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$

Общий член ряда: $u_n = \frac{1}{3^n n}$; $v_n = \frac{1}{3^n}$; $\frac{1}{3^n n} < \frac{1}{3^n} \Rightarrow u_n < v_n$;

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ – геометрический ряд, $q = \frac{1}{3} < 1 \Rightarrow$ сходится;

Вывод: т.к. ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходится и $u_n < v_n$, то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится.

Ответ: ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n n}$ сходится.

Теорема 4.3. Пусть даны два ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ (1.1) и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ (1.1′).

Если существует конечный, отличный от нуля предел отношения общих членов этих рядов $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = A(A \neq 0, \quad A \neq \infty)$,то оба ряда сходятся или расходятся одновременно. (Без доказательства).

Замечания:

1. В теории пределов дано понятие одинакового порядка малости двух бесконечно малых, а именно: две бесконечно малые u_n и v_n называются бесконечно малыми одинакового порядка малости, если $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = A, (A \neq 0, A \neq \infty)$. В частности, если $A = 1$, то бесконечно малые называются эквивалентными $(u_n \sim v_n)$. При исследовании сходимости рядов интерес представляют те из них, для которых предел n-го члена при $n \to \infty$ равен нулю. Поэтому теорему 4.3 можно сформулировать так:

Если два ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ имеют общие члены одинакового порядка малости; то есть $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = A, (A \neq 0, A \neq \infty)$, то оба ряда сходятся или расходятся одновременно.

2. На практике, при использовании теоремы 4.3 надо находить более простую бесконечно малую при $n \to \infty$ того же порядка малости, что и общий член исследуемого ряда. Так как при этом поведение ряда, с которым производится сравнение, должно быть известно, то удобно иногда брать для сравнения обобщённый гармонический ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} (\alpha > 0)$, общий член которого $v_n = \frac{1}{n^{\alpha}} \to 0$ при $n \to \infty$,а также ряд $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$, для $|q| < 1$ – сходящийся.

Алгоритм исследования ряда на сходимость с помощью предельного признака сравнения:

Дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

0. Написать формулу общего члена ряда u_n (если ряд записан в развернутом виде);

1. Подобрать ряд для сравнения так, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ чтобы существовал

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = A, \ (0 < A < \infty);$$

2. Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ на сходимость;

3. Сделать вывод о сходимости исходного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, если

а) $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ - расходится, то и $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ - сходится, то и $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится.

Пример 4.3. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \sin\frac{1}{\sqrt{n}}$.

$$\lim_{n\leftarrow\infty} \frac{1}{n}\sin\frac{1}{\sqrt{n}} = \left[\begin{array}{l} при\ n \to \infty \\ \sin\frac{1}{\sqrt{n}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} \end{array}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

Общий член ряда $u_n = \frac{1}{n} \cdot \sin \frac{1}{\sqrt{n}} \sim \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} = v_n$, так как

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}} = 1.$$

Но ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ - сходится (обобщённый гармонический при $\alpha = \frac{3}{2} > 1$), следовательно, сходится и данный ряд (по теореме 4.3).

5. Признак Даламбера

Теорема 5.1. Если в ряде с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ (1.1) отношение $\frac{u_{n+1}}{u}$ при $n \to \infty$ имеет конечный предел l, то есть $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, то:

1) ряд (1) сходится при $l < 1$;
2) ряд (1) расходится при $l > 1$,
3) при $l = 1$ теорема не даёт ответа на вопрос о сходимости или расходимости ряда.

Доказательство:

1. Пусть $l < 1$ и $l < q < 1$(рис. 5.1).

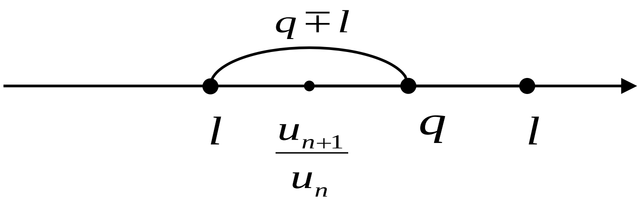

Рис. 5.1

Из определения предела и из того, что $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, следует, что для всех значений n, начиная с некоторого номера N, то есть для $n \geq N$, будет иметь место неравенство $\frac{u_{n+1}}{u_n} < q$.

Действительно, так как величина $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to l$, то разность $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n} - l\right| < q - l$, где $(q-l)$ – любое положительное число. Тогда справедливо $\frac{u_{n+1}}{u_n} < q$ для различных n, начиная с номера N,

получим: $\begin{cases} u_{N+1} < q \cdot u_n, \\ u_{N+2} < q \cdot u_{n+1} < q^2 \cdot u_n, \\ u_{N+3} < q \cdot u_{n+2} < q^3 \cdot u_n, \end{cases}$

Рассмотрим ряды (1.1): $u_1 + u_2 + ... + u_N + u_{N+1} + u_{N+2} + ...$,

и ряд (1.1′): $u_N + qu_N + q^2 u_N + \ldots$.

Ряд (1.1′) – геометрическая прогрессия с положительным знаменателем $q < 1$, то есть этот ряд сходится. Члены ряда (1.1), начиная с u_{N+1}, меньше членов ряда (1.1′), следовательно, по теореме 4.1 ряд (1.1) сходится.

2. Пусть $l > 1$. Тогда из равенства $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$ (где $l > 1$) следует, что, начиная с некоторого номера N, то есть для $n \geq N$, будет иметь место неравенство $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ (рис. 5.2).

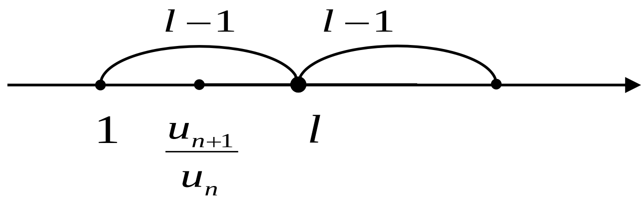

Рис.5.2

Или $u_{n+1} > u_n$ для всех $n \geq N$. Но это означает, что члены ряда возрастают, начиная с номера $N+1$, и поэтому общий член ряда не стремится к нулю, то есть ряд расходится по теореме 1.1.

Замечания:

1. Ряд будет расходиться и в том случае, когда $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \infty$, так как начиная с некоторого номера $n = N$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, или $u_{n+1} > u_n$.

2. Признак Даламбера даёт ответ на вопрос о том, сходится ли данный положительный ряд, только в том случае, когда $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ существует и отличен от 1. Если же этот предел не существует или равен 1, то признак Даламбера не даёт возможности установить сходится или

расходится данный ряд. Для решения вопроса о сходимости ряда в этом случае надо применить какой-либо другой признак.

3. Если $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=1$, и отношение $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ для всех n, начиная с некоторого номера, больше единицы, то ряд расходится.

Это следует из того, что если $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}>1$, то $u_{n+1}>u_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$.

4. Признак Даламбера удобно применять в том случае, когда общий член ряда $u_n=f(n)$ содержит факториалы, степенные, показательные функции, а также произведения чисел.

Алгоритм исследования ряда на сходимость с помощью признака Даламбера:

Дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$

0. Написать формулу общего члена ряда u_n (если ряд записан в развернутом виде);

1. Записать u_{n+1} член ряда;

2. Составить и упростить отношение $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$;

3. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=l$;

4. Сделать вывод о сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$, если

а) $l>1 \Longrightarrow$ расходится;

б) $l<1 \Longrightarrow$ сходится;

в) $l=1 \Longrightarrow ?$

Пример 5.1. Исследовать сходимость рядов

1. $1+\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots+\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}+\ldots,$

Общий член ряда: $u_n=\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}=\dfrac{1}{n!}$; $u_{n+1}=\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n(n+1)}=\dfrac{1}{(n+1)!}$;

$\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{n!}{(n+1)!}=\dfrac{1}{n+1},\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}=0<1$, то есть ряд сходится.

2. $\dfrac{2}{1}+\dfrac{2^2}{2}+\dfrac{2^3}{3}+\ldots+\dfrac{2^n}{n}+\ldots$, Общий член ряда: $u_n = \dfrac{2^n}{n}$; $u_{n+1} = \dfrac{2^{n+1}}{n+1}$;

$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n \cdot 2^{n+1}}{2^n \cdot (n+1)} = 2 \cdot \dfrac{n}{n+1}$; $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 2\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 2 \cdot 1 > 1 \Rightarrow$ ряд расходится.

3. $\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{3} + \dfrac{3}{4} + \ldots + \dfrac{n}{n+1} + \ldots,$

Общий член ряда $u_n = \dfrac{n}{n+1}$, $u_{n+1} = \dfrac{n+1}{n+2}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)\cdot(n+1)}{(n+2)\cdot n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+2n+1}{n^2+2n} = 1$, но ряд расходится, так как не выполнен необходимый признак сходимости ряда $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1 \neq 0$.

4. $\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)} + \ldots,$

Общий член ряда: $u_n = \dfrac{1}{n\cdot(n+1)}$; $u_{n+1} = \dfrac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}$;

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\cdot(n+1)}{(n+1)\cdot(n+2)} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+2} = 1$, то есть на основании признака Даламбера сделать заключение о сходимости ряда нельзя, однако, можно установить, что этот ряд сходится и его сумма равна 1 по определению сходящегося ряда . Заметим, что

$\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$, запишем

$S_n = \left(1 - \dfrac{1}{2}\right) + \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}\right) + \left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right) = 1 - \dfrac{1}{n+1}$; $\quad S = \lim\limits_{n\leftarrow\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right) = 1$.

6. Признак Коши (радикальный)

Теорема 6.1. Если для ряда с положительными членами: $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$ (1) величина $\sqrt[n]{u_n}$ имеет конечный предел l при $n \to \infty$, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$ то:

1) при $l < 1$ ряд сходится;
2) при $l > 1$ ряд расходится.

Доказательство:

1) Пусть $l < 1$ и $l < q < 1$. Начиная с некоторого номера $n = N$, будет иметь место соотношение $\left|\sqrt[n]{u_n} - l\right| < q - l$, следовательно, $\sqrt[n]{u_n} < q$ или $u_n < q^n$, для всех $n \geq N$.

Рассмотрим ряды: $u_1 + u_2 + \ldots + u_N + u_{N+1} + u_{N+2}$ (1.1)

$$q^N + q^{N+1} + q^{N+2} + \dots \quad (1.1').$$

Ряд (1.1′) сходится, так как его члены образуют убывающую геометрическую прогрессию. Члены ряда (1.1), начиная с u_N, меньше членов ряда (1.1′), следовательно, ряд (1.1) сходится.

2) Пусть $l > 1$. Тогда, начиная с некоторого номера $n = N$ будем иметь: $\sqrt[n]{u_N} > 1$ или $u_N > 1$. Но если все члены ряда (1.1) начиная с u_N, больше 1, то ряд расходится по теореме 1. ($\lim\limits_{n\to\infty} u_N \neq 0$).

Алгоритм исследования ряда на сходимость с помощью радикального признака Коши:

Дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$

0. Написать формулу общего члена ряда u_n (если ряд записан в развернутом виде);

1. Составить и упростить выражение $\sqrt[n]{u_n}$;

2. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$;

3. Сделать вывод о сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, если

а) $l > 1 \quad \Longrightarrow$ расходится;

б) $l < 1 \quad \Longrightarrow$ сходится;

в) $l = 1 \quad \Longrightarrow ?$

Пример 6.1. Исследовать на сходимость ряд:

$$\frac{1}{3} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n + \ldots$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1, \text{ ряд сходится.}$$

Замечания.

1. Случай $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = 1$ требует дополнительного исследования. Среди рядов, удовлетворяющих этому условию, могут встречаться и сходящиеся и расходящиеся.

А. Рассмотрим гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, мы знаем, что он расходится, а $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1$.

Убедимся в этом:

$$\lim_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{\frac{1}{n}}=\begin{bmatrix}\ln a^b=b\ln a\\ \ln\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}=\ln(n)^{-\frac{1}{n}}\end{bmatrix}=\lim_{n\to\infty}\frac{-\ln n}{n}=\begin{bmatrix}\textit{правило}\\ \textit{Лапиталя}\end{bmatrix}=\lim_{n\to\infty}\frac{-\frac{1}{n}}{1}=0.$$

Но если $\ln\sqrt[n]{\frac{1}{n}}\to 0$, то $\sqrt[n]{\frac{1}{n}}\to 1$.

Б. Для ряда:

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{U_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}}\cdot\sqrt[n]{\frac{1}{n}}=1$, но этот ряд сходится как обобщённый гармонический $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ при $\alpha=2>1$.

2. Признак Коши решает вопрос о сходимости ряда в тех случаях, когда этот вопрос решает и признак Даламбера, а в некоторых случаях, когда признак Даламбера бессилен. В этом смысле можно сказать, что признак Коши является более сильным признаком, чем признак Даламбера.

3. Если применять признак Коши к рядам, члены которых содержат факториалы чисел, то их можно заменить по формуле Стирлинга:

$$n!=\left(\frac{n}{e}\right)^n\cdot\sqrt{2\cdot\pi\cdot n}\cdot e^{\frac{\Theta}{12n}},\ \text{где}\ 0<\Theta<1.$$

4. При исследовании сходимости ряда применение признака Даламбера оказывается практически более простым, чем признака Коши (радикального). Следует знать, что если радикальный признак Коши не решил вопрос сходимости ряда, то и признак Даламбера не будет полезен в данном случае.

Пример 6.2. Исследовать на сходимость ряд: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(n+1)^n}$.

Применим радикальный признак Коши.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n!}{(n+1)^n}}=\begin{bmatrix}\textit{по формуле}\\ \textit{Спирлинга}\end{bmatrix}=\lim_{m\to\infty}\sqrt[n]{\frac{\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}\cdot e^{\frac{\Theta}{12n}}}{(n+1)^n}}=\frac{1}{e}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot(2\pi n)^{\frac{1}{2n}}\cdot e^{\frac{\Theta}{12n^2}}=$$

$$=\begin{bmatrix}\textit{теорема}\\ \textit{о пределах}\end{bmatrix}==\frac{1}{e}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\lim_{n\to\infty}(2\pi n)^{\frac{1}{2n}}\cdot\lim_{n\to\infty}e^{\frac{\Theta}{12n^2}}=\ldots$$

Рассмотрим пределы отдельно:

$\lim\limits_{n\leftarrow\infty}\dfrac{n}{n+1}=1;$

$\lim\limits_{n\leftarrow\infty}(2\pi n)^{\frac{1}{2n}}=\lim\limits_{n\leftarrow\infty}e^{\ln(2\pi n)^{\frac{1}{2n}}}=\lim\limits_{n\leftarrow\infty}e^{\frac{1}{2n}\ln(2\pi n)}=e^{\frac{1}{2n}\ln(2\pi n)}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(2\pi n)}{2n}}=\left[\begin{matrix}\textit{правило}\\ \textit{Лопиталя}\end{matrix}\right]=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{2\pi}{2\pi n}}{2}}=$
$e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n}}=e^0=1;$

$\lim\limits_{n\to\infty}e^{\frac{\Theta}{12n^2}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\Theta}{12n^2}}=e^0=1$

Подставляем результаты: $\ldots=\dfrac{1}{e}<1$, следовательно, данный ряд сходится.

7. Признак Коши (интегральный)

Если для данного ряда (1.1) удаётся подобрать функцию $f(x)$, определённую при $x\geq 1$ и такую, что $f(n)=u_n$, то при определённых условиях из сходимости или расходимости несобственного интеграла $\int_1^\infty f(x)dx$ можно судить о сходимости или расходимости ряда (1.1).

Теорема 7.1. (интегральный признак сходимости рядов).

Пусть члены ряда: $u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$ (1.1) положительны и не возрастают, то есть $u_1\geq u_2\geq\ldots\geq u_n\geq\ldots$ (1.1′) и пусть $f(x)$ – непрерывная и не возрастающая функция такая, что $f(1)=u_1$, $f(2)=u_2$, …., $f(n)=u_n$.

Тогда:

1) если несобственный интеграл $\int_1^\infty f(x)dx$ сходится, то сходится и ряд(1.1);

2) если несобственный интеграл $\int_1^\infty f(x)dx$ расходится, то расходится и ряд (1.1).

Доказательство: Изобразим члены ряда геометрически, откладывая по оси абсцисс номера $1,2,3,\ldots,n,n+1,\ldots$ членов ряда, а по оси ординат – соответствующие значения членов ряда $u_1,u_2,\ldots,u_n,\ldots$ (рис. 7.1)

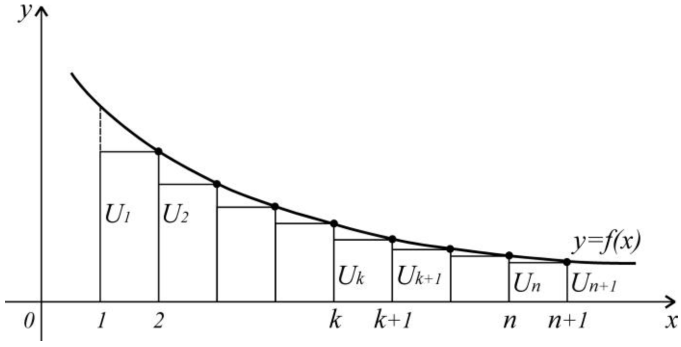

Рис. 7.1

$y = f(x)$ – непрерывная, не возрастающая функция. Площадь k-го прямоугольника, как видно из рис.7.1, равна произведению его длины $k+1-k=1$ на u_k. Сумма площадей всех n прямоугольников равна сумме S_n первых n членов ряда (1.1). С другой стороны площадь ступенчатой фигуры, изображённой на рис. 7.1 заключает в себе площадь криволинейной трапеции, ограниченной прямыми: $x=1, x=n+1, y=0$ и кривой $y = f(x)$, причём

$$S_n > \int_1^{n+1} f(x)dx \qquad (7.1).$$

Обратимся к рис. 7.2.

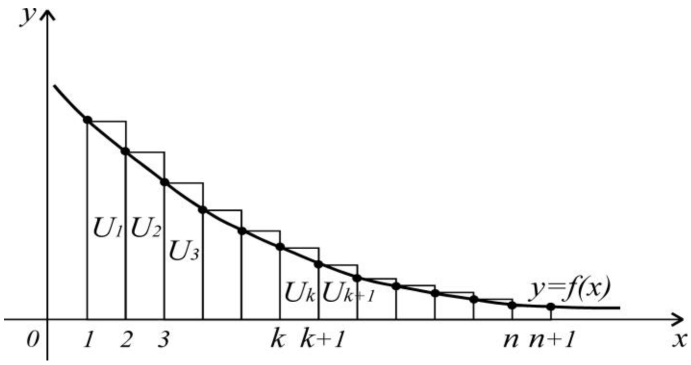

Рис. 7.2.

Площадь k-го прямоугольника равна $u_{k+1}\cdot 1$. Сумма площадей всех построенных прямоугольников равна сумме всех членов ряда, начиная со второго до $(n+1)$ – го, то есть равна $S_{n+1}-u_1$. Из рис. 7.2 видно, что ступенчатая фигура содержится внутри криволинейной трапеции, ограниченной прямыми: $x=1, x=n+1, y=0$ и кривой $y = f(x)$, то есть:

$$S_{n+1}-u_1 < \int_1^{n+1} f(x)dx \text{ или } S_{n+1} < \int_1^{n+1} f(x)dx + u_1 \qquad (7.2)$$

Рассмотрим два случая:

1. Предположим, что $\int_1^{\infty} f(x)dx$ сходится, то есть имеет конечное значение. Так как $\int_1^{n+1} f(x)dx < \int_1^{\infty} f(x)dx$, то в силу неравенства (7.2) $S_n < S_{n+1} < \int_1^{\infty} f(x)dx + u_1$, то есть частичная сумма S_n - остаётся ограниченной при всех значениях n. Но при увеличении n она возраста-

ет, так как все члены u_n положительны. Следовательно, S_n при $n \to \infty$ имеет конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, то есть ряд сходится.

2. Предположим, что $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx = \infty$. Это значит, что $\int\limits_1^{n+1} f(x)dx$ неограниченно возрастает при возрастании n. Но тогда в силу (7.1) S_n также неограниченно возрастает при возрастании n, то есть ряд расходится.

Замечание. Теорема 6.1 справедлива и тогда, когда неравенства (1.1′) выполняются, лишь начиная с некоторого N.

Алгоритм исследования ряда на сходимость с помощью радикального признака Коши:

Дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$

0. Написать формулу общего члена ряда u_n (если ряд записан в развернутом виде);

1. Записать функцию $y = f(x)$, где $f(1) = u_1$, $f(2) = u_2$,…, $f(n) = u_n$;

2. Проверить условия, что $y = f(x)$ на интервале (a, ∞) при $a \geq 1$:

а) непрерывная; б) не возрастающая; в) неотрицательная;

3. Если все условия выполняются, составить интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ и исследовать его на сходимость ;

4. Сделать вывод о сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, если

а) $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, то и ряд сходится;

б) $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится, то и ряд расходится.

Пример 7.1. С помощью интегрального признака Коши исследовать сходимость обобщённого гармонического ряда (или ряда Дирихле): $\frac{1}{1^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha} + \ldots + \frac{1}{n^\alpha} + \ldots$,,

$u_n = \frac{1}{n^\alpha}$; введём функцию $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$:

$f(x) > 0$ при $\forall x \in [1;+\infty)$;

$f(x)$ – непрерывна на $[1;+\infty)$;

$f'(x) = \left(x^{-\alpha}\right)' = -\alpha \cdot x^{-\alpha-1} = -\frac{\alpha}{x^{\alpha+1}} < 0$, при $\forall x \in [1;+\infty)$, то есть невозрастающая.

Итак, $f(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 7.1. Рассмотрим

$$\int_1^N \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha}\Big|_1^N = \frac{1}{1-\alpha}\left(N^{1-\alpha}-1\right) \ \textit{при} \ \alpha \neq 1 \\ \ln x\Big|_1^N = \ln N \quad \textit{при} \quad \alpha = 1. \end{cases}$$

Пусть $N \to \infty$, тогда:

1) если $\alpha > 1$,

то $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim\limits_{N\to+\infty} \int_1^N \frac{dx}{x^\alpha} = \lim\limits_{N\to+\infty} \frac{1}{1-\alpha}\left(N^{1-\alpha}-1\right) = \frac{1}{1-\alpha} \lim\limits_{N\to+\infty}\left(\frac{1}{N^{\alpha-1}}-1\right) = \left[\begin{array}{l} \textit{при}\, N \to +\infty \ \textit{и} \\ \alpha > 1 \\ \frac{1}{N^{\alpha-1}} \to 0 \end{array}\right] = \frac{1}{1-\alpha}$

то интеграл конечен и, следовательно, ряд сходится.

2) если $\alpha < 1$, то

$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim\limits_{N\to+\infty} \int_1^N \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} \lim\limits_{N\to+\infty}\left(N^{1-\alpha}-1\right) = \left[\begin{array}{l} \textit{при} \ N \to +\infty \ \textit{и} \ \alpha < 1 \\ N^{1-\alpha} \to +\infty \end{array}\right] = +\infty$, то интеграл расходится и, следовательно, расходится ряд.

3)если $\alpha = 1$, то $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim\limits_{N\to+\infty} \int_1^N \frac{dx}{x^\alpha} = \lim\limits_{N\to+\infty} \int_1^N \frac{dx}{x} = \lim\limits_{N\to+\infty} \ln|x|\Big|_1^N = +\infty$,

то интеграл расходится и, следовательно, расходится ряд.

Заметим, что ни признак Даламбера, ни признак радикальный Коши, рассмотренные ранее, не решают вопрос о сходимости ряда Дирихле, так как:

а) $\lim\limits_{N\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha = \left[1^\alpha\right] = 1.$

б) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{1}{n^\alpha}} = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt[n]{\frac{1}{n}}\right)^\alpha = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{\alpha}{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{\frac{\alpha}{n}\ln\frac{1}{n}} =$

$$= e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\alpha}{n}\ln\frac{1}{n}} = \left[\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\alpha \ln \frac{1}{n}}{n} = \left[\textit{по пр.Лопиталя}\right] = \\ = \alpha \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\frac{1}{\frac{1}{n}} \cdot \left(-\frac{1}{n^2}\right)}{1} = -\alpha \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n^2} = 0 \end{array}\right] = e^0 = 1$$

Итак, можно сделать вывод, что интегральный признак Коши «сильнее» признаков Даламбера и радикального признака Коши.

Контрольные вопросы

1. В чем состоит необходимый признак сходимости числовых рядов с положительными членами?

2. Каковы достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами?

3. Сформулировать признак Даламбера. Когда его можно применять?

4. Радикальный признак Коши когда применяется ? Каким должно быть u_n ?

5. С какими интегралами связан интегральный признак Коши? Когда он применяется ?

6. Сформулируйте, признаки сравнения рядов. На свойства каких функций опираются эти признаки?

7. С какими рядами обычно сравнивают данные ряды?

8. При каких условиях сходится и расходится обобщенный гармонический ряд?

9. При каких условиях сходится ряд, члены которого образуют геометрическую прогрессию?

10. Можно ли сделать вывод о сходимости числового ряда с положительными членами, применяя один из достаточных признаков сходимости?

Задачи для самостоятельного решения

1. Исследовать ряды на сходимость по признакам сравнения рядов:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arcsin^3\frac{1}{\sqrt{n}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{arctg(n+1)}{n^2}$;

2. Исследовать ряды на сходимость по признаку Даламбера:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 4\cdots(3n-2)}{n!\cdot 5^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$;

3. Исследовать ряды на сходимость по признаку Коши (радикальному):

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\cdot n!}{n^n}$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{2\cdot n+1}\right)^n$;

4.Исследовать ряды на сходимость по признаку Коши (интегральному):

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-2\cdot n+2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{\sqrt{1+e^{2n}}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\cdot\ln(n+1)}$;

Ответы:

1. а) $\frac{1}{\ln n}>\frac{1}{n}$; расходятся; б) $\arcsin^3\frac{1}{\sqrt{n}}\approx\frac{1}{n^{3/2}}$; сходится; в) сходится;

2. а)расходится; б)сходится; в)расходится;

3. а)расходится; б)расходится; в)сходится;

4. а) сходится; б) расходится; в) расходится

Задания для практического занятия

Исследовать ряды на сходимость, применяя необходимый признак сходимости и подходящие достаточные признаки сходимости числовых рядов с положительными членами:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3n-1}$; 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos\frac{1}{n^2}$; 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{3n}$;

2. 4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 6^n}$; 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}$; 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{5^n}$

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^4+n^2+1}}$; 8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^4\cdot\sin^2\frac{2\pi}{n^3}$; 9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{n!}$;

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^7}{5^{\frac{n}{2}}}$; 11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{n^3\cdot 3^n}$ 12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2^n}$;

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^n(n+1)}$; 14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{4^n}$; 15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\arcsin n}{\sqrt{1-n^2}}$;

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{n^3+5}$; 17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(3n)!}{n!\cdot 2^{3n}}$; 18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\sqrt[n]{3}}$;

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}arctg\,\frac{2n+1}{n^3}$; 20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin^n\frac{2\pi}{n}$.

Контрольная работа

Исследуйте на сходимость следующие ряды:

Вариант 1	Вариант 2
а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n}$;	а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1) \cdot 2^{2n+1}}$;
б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{n^2(n+1)^2}$;	б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2+1}$;
в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n-2}$;	в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n}{1+n^2}\right)^n$;
г) $\sum_{n=1}^{\infty} arctg^n \frac{1}{n^3}$	г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2-5}$

Ответы:

1. а) расходится; б) сходится; в) расходится; г) сходится.
2. а) сходится; б) сходится; в) сходится ; г) расходится.

Ответы к заданиям для практического занятия.

1. расходится; 2. расходится; 3. сходится; 4. сходится; 5. расходится; 6. сходится; 7. сходится; 8. сходится; 9. сходится; 10. сходится; 11. расходится; 12. расходится; 13. сходится; 14. сходится;15. расходится; 16. сходится; 17. расходится; 18. расходится; 19. сходится; 20. расходится;

ЛЕКЦИЯ 3. ЗНАКОПЕРЕМЕННЫЕ РЯДЫ. АБСОЛЮТНАЯ И УСЛОВНАЯ СХОДИМОСТЬ

Аннотация: знакочередующиеся ряды, условия их сходимости (теорема Лейбница); знакопеременные ряды, их свойства; абсолютная и условная сходимости.

Цель лекции: научить исследовать на сходимость ряды Лейбница. Познакомить с теоремой об абсолютной сходимости ряда как достаточным признаком сходимости знакопеременного ряда.

8. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница

Рассмотрим ряд

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots \qquad (8.1)$$

где $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$ положительны, называемый *знакочередующимся.*

Теорема 12. (Лейбница)

Если в знакочередующемся ряде (8.1) $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots \quad (u_i > 0,\, i = 1,2,\ldots)$, члены таковы, что

$$u_1 > u_2 > u_3 > \ldots \qquad (8.1^{/})$$

и

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0 \qquad (8.1^{//}),$$

то ряд (8.1) сходится, его сумма положительна и не превосходит первого члена.

Доказательство. Рассмотрим сумму $n = 2m$ первых членов ряда (8.1):

$$S_{2m} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + (u_5 - u_6) + \ldots + (u_{2m-1} - u_{2m}).$$

Из условия ($8.1^{/}$) следует, что выражение в каждой скобке положительно. Следовательно, сумма S_{2m} положительна, $S_{2m} > 0$, и возрастает с возрастанием m. Запишем теперь эту же сумму так:

$$S_{2m} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \ldots - (u_{2m-2} - u_{2m-1}) - u_{2m}.$$

В силу условия ($8.1^{/}$) каждая из скобок положительна. Поэтому в результате вычитания этих скобок из u_1 мы получим число, меньшее, чем u_1, то есть $S_{2m} < u_1$.

Следовательно, S_{2m} при возрастании m возрастает и ограничена сверху, то есть $\lim\limits_{m\to\infty} S_{2m} = S$, причём $0 < S < u_1$.

Покажем теперь, что при $n = 2m+1$ предел $\lim\limits_{m\to\infty} S_{2m} = S$, $S_{2m+1} = S_{2m} + u_{2m+1}$.

Так как по условию ($8.1^{//}$), $\lim\limits_{m\to\infty} u_{2m+1} = 0$, то

$$\lim_{m\to\infty} = S_{2m+1} = \lim_{m\to\infty} S_{2m} + \lim_{m\to\infty} u_{2m+1} = \lim_{m\to\infty} S_{2m} = S .$$

Итак, $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ как при чётном n, так и при нечётном n, то есть ряд (8.1) сходится.

Замечания.

1. Теорема Лейбница справедлива, если неравенства (8.1$^{/}$) выполняются, начиная с некоторого N.

2. Геометрическая иллюстрация теоремы Лейбница представлена на рис.8.1.

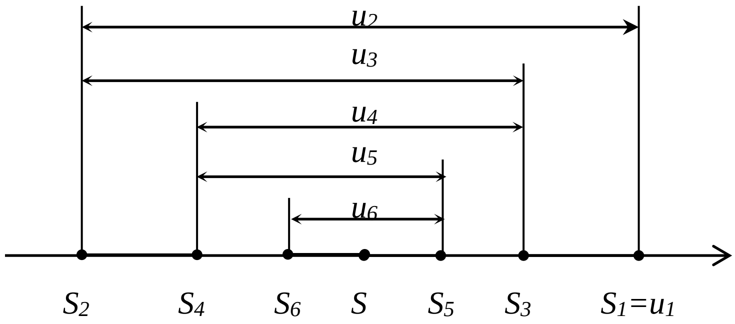

Рис.8.1

На числовой оси (рис.8.1) откладываются частичные суммы:

$$S_1 = u_1,\ S_2 = u_1 - u_2 = S_1 - u_2,\ S_3 = S_2 + u_3,\ S_4 = S_3 - u_4,\ S_5 = S_4 + u_5 \text{ и т. д.}$$

Точки, соответствующие частичным суммам, будут приближаться к точке S, которая изображает сумму ряда. При этом точки, соответствующие чётным частичным суммам, располагаются слева от S, а точки, соответствующие нечётным суммам - справа от S.

3. Если знакочередующейся ряд удовлетворяет условию теоремы Лейбница, то можно оценить ошибку, которая получится если заменить его сумму S частичной суммой S_n. При такой замене отбрасываются все члены ряда, начина с u_{n+1}. Но эти числа сами образуют знакочередующийся ряд, сумма которого по абсолютной величине меньше первого члена этого ряда (то есть меньше u_{n+1}). Тогда, ошибка, совершаемая при замене S на S_n, не превосходит по абсолютной величине первого из отброшенных членов.

Пример 8.1

1. Исследовать на сходимость ряд: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$

Ряд $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$сходится, по теореме Лейбница так как:

а) $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \ldots > \frac{1}{n} > \ldots$,

б) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}$ отличается от суммы ряда S на величину, меньшую, чем $\frac{1}{n+1}$..

2. Исследовать на сходимость ряд: $1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \ldots$

Ряд $1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \ldots$ сходится в силу теоремы Лейбница, так как:

а) $1 > \frac{1}{2!} = \frac{1}{2} > \frac{1}{3!} = \frac{1}{6} > \ldots$,

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n!} = 0$, $\quad S - S_n < \frac{1}{(n+1)!}$.

9. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость

Определение 9.1: Ряд называется знакопеременным, если среди его членов имеются как положительные, так и отрицательные.

Знакочередующиеся ряды являются частным случаем знакопеременных рядов.

Свойства знакопеременных рядов.

Теорема 9.1. Если знакопеременный ряд

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots \qquad (9.1)$$

таков, что ряд, составленный из абсолютных величин его членов

$$|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots \qquad (9.1')$$

сходится, то и данный знакопеременный ряд также сходится.

Доказательство. Пусть S_n и σ_n – суммы n первых членов рядов (9.1) и (9.1$'$).

Пусть S_n' - сумма всех положительных, а S_n'' - сумма абсолютных величин всех отрицательных членов среди первых n членов данного ряда; тогда

$$S_n = S_n' - S_n'', \; \sigma_n = S_n' + S_n''.$$

По условию: $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n' = S'$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n'' = S''$, $S' < \sigma$ и $S'' < \sigma$,

$\lim\limits_{n\to\infty} \left(S_n' - S_n'' \right) = S' - S''$, то есть знакопеременный ряд (9.1) сходится.

Рассмотренный признак сходимости знакочередующегося ряда является достаточным, но не необходимым: существуют такие знакопеременные ряды, которые сами сходятся, а ряды, составленные из абсолютных величин их членов, расходятся. В связи с этим возникла потребность классифицировать знакопеременные ряды.

Определение 9.2. Знакопеременный ряд

$$u_1 + u_2 + ... + u_n + ... \qquad (9.1)$$

называется *абсолютно сходящимся,* если сходится ряд, составленный из абсолютных величин его членов:

$$|u_1| + |u_2| + ... + |u_n| + ... \qquad (9.1')$$

Если ряд (9.1) сходится, а ряд (9.1′) расходится, то ряд (9.1) называется *условно сходящимся.*

Свойства абсолютно и условно сходящихся рядов

(без доказательств)

1. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ абсолютно сходится, то он и просто сходится.
2. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ абсолютно сходится, то он остаётся абсолютно сходящимся при любой перестановке его членов. При этом сумма ряда не зависит от порядка его членов.
3. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ абсолютно сходится и $c = const$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot u_n$ также абсолютно сходится.
4. Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ абсолютно сходятся, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ также абсолютно сходится.
5. Если ряды $\sum_{m=1}^{\infty} u_m$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ абсолютно сходятся, то ряд, составленный из всевозможных попарных произведений $u_m \cdot v_n$ членов этих рядов, расположенных в произвольном порядке, также абсолютно сходится, причём, если

$$S_m = \lim_{m\to\infty} u_m = S', \; S_n = \lim_{n\to\infty} v_n = S'', \text{а } S = \lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} u_m \cdot v_n, \text{ то } S = S' \cdot S'' .$$

6. Если ряд сходится условно, то, каким бы не было число A, можно так переставить члены этого ряда, чтобы его сумма оказалась бы в точности равной A. Более того, можно так переставить члены условно сходящегося ряда, что ряд, полученный после перестановки, окажется расходящимся.

Пример 9.1. Исследуем его на сходимость ряд:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n}+\ldots \qquad (9.2)$$

Ряд из абсолютных величин имеет вид: $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ - это гармонический расходящийся ряд.

Проверим условия теоремы (признака) Лейбница:

1) $1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\frac{1}{4}>\ldots>\frac{1}{n}>\ldots,$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

По теореме Лейбница данный ряд сходится, а так как ряд из абсолютных величин расходящийся, то заданный ряд сходится условно.

На примере ряда (9.2) покажем, что сумма условно сходящегося ряда может меняться при перестановке его членов.

Обозначим сумму ряда через S, очевидно, $S>0$. Переставим члены ряда так:

$$\underbrace{1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}+\underbrace{\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}}+\ldots+\underbrace{\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}}+\ldots \qquad (9.3)$$

Докажем, что сумма ряда (9.3) S' в два раза меньше суммы ряда (9.2), то есть $S'=\frac{1}{2}S$.

Рассмотрим сумму $3k$ членов ряда (9.3):

$$S'_{3k}=\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}\right)=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)\right]=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)=\frac{1}{2}S_{2k},$$

следовательно, $\lim\limits_{k\to\infty}S_{3k}=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{1}{2}S_{2k}=\frac{1}{2}S$.

Далее,

$$\lim_{k\to\infty}S'_{3k+1}=\lim_{k\to\infty}\left(S'_{3k}+\frac{1}{2k+1}\right)=\frac{1}{2}S$$

$$\lim_{k\to\infty}S'_{3k+2}=\lim_{k\to\infty}\left(S'_{3k}+\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{4k+2}\right)=\frac{1}{2}S$$

Таким образом, $\lim\limits_{k\to\infty} S'_n = S' = \frac{1}{2}S$, то есть после перестановки членов ряда его сумма изменилась.

Алгоритм исследования знакопеременного ряда на сходимость

Дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$

5. Составить ряд из абсолютных величин членов ряда (9.1), то есть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ (9.1′)

6. Исследовать его на сходимость

а) если ряд (9.1′) сходится, то ряд (9.1) абсолютно сходится;

б) если ряд (9.1′) расходится, то

7. Проверить условия теоремы Лейбница:

а) $|u_1| > |u_2| > \ldots > |u_n| > \ldots$

б) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ (9.1) сходится по признаку Лейбница, но сходится условно так как $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ (9.1′) - расходится;

Замечание. Для исследования на абсолютную сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ (9.1) можно для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ (9.1′) использовать достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами.

В частности, ряд (9.1) сходится абсолютно, если:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < 1 \text{ или } \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{|u_n|} < 1.$$

Пример 9.2. Исследовать на сходимость ряд:

$$\frac{\sin\beta}{1^2} + \frac{\sin 2\beta}{2^2} + \frac{\sin 3\beta}{3^3} + \ldots + \frac{\sin n\beta}{n^2} + \ldots, \qquad \beta\text{- любое число.}$$

Данный ряд является знакопеременным, так как функция

$\sin\beta > 0$ для $\beta \in (0 + 2\pi k; \pi + 2\pi k)$ и

$\sin\beta < 0$ для $\beta \in (\pi + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k)$, где $k = 0,1,2,\ldots$

Составим ряд из абсолютных величин членов данного ряда:

$$\left|\frac{\sin\beta}{1^2}\right| + \left|\frac{\sin 2\beta}{2^2}\right| + \left|\frac{\sin 3\beta}{3^3}\right| + \ldots + \left|\frac{\sin n\beta}{n^2}\right| + \ldots$$

Значения функции $\sin n\beta \in [-1;1]$. В каждом члене ряда заменим числитель единицей, то есть получим ряд: $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots$, члены которого $\frac{1}{n^2} \geq \left|\frac{\sin n\beta}{n^2}\right|$.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ - обобщённый гармонический (или ряд Дирихле) сходится, так как $\alpha = 2$, тогда по теореме 9.1 ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда, сходится, следовательно, данный ряд *абсолютно сходится.*

Пример 9.3. Исследовать на сходимость ряд:

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-...+\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}+...$$

1. Составим ряд из абсолютных величин членов данного ряда: $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-1}+\ldots$

Сравним его с расходящимся, гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

По теореме 6.1 ряды с общими членами $u_n = \frac{1}{2n-1}$ и $v_n = \frac{1}{n}$ ведут себя одинаково, то есть расходятся, так как $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2} \neq 0$.

2. Проверим условия признака Лейбница (теорема 8.1):

а) $1 > \frac{1}{3} > \frac{1}{5} > \ldots > \frac{1}{2n-1} > \ldots$

б) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n-1} = 0$

Условия признака Лейбница выполнены, следовательно, данный ряд сходится по признаку Лейбница. Данный знакопеременный ряд сходится *условно*.

Пример 9.4. Исследовать на сходимость ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2n}{3n+2}.$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2n}{3n+2} = \frac{2}{5}-\frac{4}{7}+\frac{6}{11}-\frac{8}{14}+\frac{10}{17}-\ldots.$

1. Составим ряд из абсолютных величин членов данного ряда:

Поскольку знак членов ряда здесь определяется множителем $(-1)^{n+1}$, то достаточно отбросить этот множитель, и все члены ряда станут положительными.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{3n+2}=\frac{2}{5}+\frac{4}{7}+\frac{6}{11}+\frac{8}{14}+\frac{10}{17}+\dots$$

Исследуем этот ряд на сходимость.

Необходимый признак сравнения:

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, если $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq 0$, то ряд расходится.

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{3n+2}=\frac{2}{3}\neq 0$, значит, ряд расходится.

2. Проверим условия признака Лейбница (теорема 8.1):

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2n}{3n+2}$ - знакочередующийся ряд.

1) $\frac{2}{5}<\frac{4}{7}>\frac{6}{11}<\frac{8}{14}<\frac{10}{17}\dots$члены ряда не убывают по абсолютной величине

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{3n+2}=\frac{2}{3}\neq 0$.

Условия признака не выполняются, следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2n}{3n+2}$ расходится.

Пример 9.5. Исследовать на сходимость ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{2n-1}.$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{2n-1}=-1+\frac{2}{3}-\frac{3}{5}+\frac{4}{7}-\frac{5}{9}+\dots$

1. Составим ряд из абсолютных величин членов данного ряда:

Поскольку знак членов ряда здесь определяется множителем $(-1)^n$, то достаточно отбросить этот множитель, и все члены ряда станут положительными.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n-1}=1+\frac{2}{3}+\frac{3}{5}+\frac{4}{7}+\frac{5}{9}+\dots$

Исследуем этот ряд на сходимость.

Необходимый признак сравнения:

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, если $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq 0$, то ряд расходится.

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1}=\frac{1}{2}\neq 0$, значит, ряд расходится.

2. Проверим условия признака Лейбница (теорема 8.1):

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{2n-1}$ - знакочередующийся ряд.

1) $1>\frac{2}{3}>\frac{3}{5}>\frac{4}{7}>\frac{5}{9}>\ldots$члены ряда убывают по абсолютной величине.

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1}=\frac{1}{2}\neq 0$.

Условие признака не выполняется, следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2n}{3n+2}$ расходится.

Пример 9.6. Исследовать на сходимость ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3^n}.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3^n}=\frac{1}{3}-\frac{1}{9}+\frac{1}{27}-\ldots$$

1. Составим ряд из абсолютных величин членов данного ряда:

Поскольку знак членов ряда здесь определяется множителем $(-1)^{n+1}$, то достаточно отбросить этот множитель, и все члены ряда станут положительными.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}=\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\ldots$$

Исследуем его на сходимость по признаку Даламбера.

Составим $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l$. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3^{n+1}}\cdot\frac{3^n}{1}=\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}<1$, следовательно, по признаку Даламбера ряд сходится.

Т.к. ряд, составленный из модулей, сходится, следовательно, исходный ряд сходится абсолютно.

Контрольные вопросы

1. Дать определение знакопеременного ряда.

2. Какой ряд называется рядом Лейбница?

3. Каков достаточный признак сходимости знакопеременных рядов?

4. Какой ряд называется знакочередующимся?

5. Дайте определение абсолютно сходящегося ряда?

6. Какой ряд называется условно сходящимся?

7. Составить почленную разность расходящихся рядов $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$ и $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}$ и исследовать ее сходимость.

8. Показать, что ряд $\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\ldots$ расходится. Почему признак Лейбница неприменим к этому ряду?

Задачи для самостоятельного решения

Исследовать на сходимость следующие ряды:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 2^n}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot \sqrt{\ln n}}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^{n+1}}{10n+1}$

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot (n+1)}{n^2+n+1}$

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3}$

6) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[3]{n+1}}{(2n+1)!}$

Ответы:

1) абсолютно сходится

2) условно сходится

3) расходится

4) условно сходится

5) абсолютно сходится

6) абсолютно сходится

Задания для практического занятия

Исследовать ряды на сходимость:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{6n+5}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{2n+1}{2^n}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}$

4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\left(\frac{3n+2}{4n}\right)^n$

5) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\sqrt{n}}{n+1}$

6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot 3^n}{n}$

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n^2}$

8) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+1}{n}$

9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n^3}$

10) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\left(\frac{10}{11}\right)^n\cdot n^5$

11) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n+10}}$

12) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n^3}{5^n}$

13) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$

14) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n^3}{(2n-1)^2}$

Ответы к заданиям для практического занятия.

1) расходится
2) абсолютно сходится
3) условно сходится
4) абсолютно сходится
5) условно сходится
6) расходится
7) абсолютно сходится
8) расходится
9) абсолютно сходится
10) абсолютно сходится
11) условно сходится
12) абсолютно сходится
13) условно сходится
14) расходится

Структура теста «Числовые ряды»

Тест состоит из двух разделов, каждый из которых разбит на части, различающиеся по форме и уровню сложности. Из заданий раздела 1 можно сформировать несколько вариантов, выбрав из каждой части несколько заданий на усмотрение проверяющего. Раздел 2 содержит 2 варианта.

Тип заданий и форма ответа	**Раздел 1** задания на непосредственную проверку теоретических знаний	**Раздел 2** задания на применение теоретических знаний
	Номера вопросов	
Часть 1 Задания с выбором одного или нескольких правильных ответов	1-28	1-16
Часть 2 Задания на установление соответствия	29-34	17-20
Часть 3 Задания на конструирование верных утверждений	35-46	-----

Раздел 1

Часть 1

1. Для обозначения частичной суммы ряда используют запись

a) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$;

b) $\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$;

c) $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$;

d) $\sum_{k=1}^{n} u_k$.

2. Какое из перечисленных утверждений является верным:

a) сумма числового ряда – это сумма всех его членов;
b) сумма числового ряда – это предел его частичных сумм;
c) сумма числового ряда – это сумма n первых его членов;
d) сумма числового ряда – это сумма абсолютных величин его членов.

3. Какое из перечисленных утверждений является верным:

a) частичная сумма числового ряда – это сумма всех его членов;
b) частичная сумма числового ряда – это предел его частичных сумм;
c) частичная сумма числового ряда – это сумма n первых его членов;
d) частичная сумма числового ряда – это сумма абсолютных величин его членов.

4. Для обозначения n – го остатка ряда используют запись

a) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$;

b) $\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$;

c) $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$;

d) $\sum_{k=1}^{n} u_k$.

5. Какое из перечисленных утверждений является верным:

a) $n-$ый остаток числового ряда – это разность суммы всех его членов и $n-$ой частичной суммы;

b) $n-$ый остаток числового ряда – это предел его частичных сумм;

c) $n-$ый остаток числового ряда – это сумма n первых его членов;

d) $n-$ый остаток числового ряда – это разность всех его членов и суммы абсолютных величин его членов.

6. Закончить утверждение «Числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется сходящимся, если…»

a) существует конечный предел $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k$;

b) $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$;

c) существует конечный или бесконечный предел $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k$;

d) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k = 0$.

7. Необходимым признаком сходимости числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ является утверждение:

a) если ряд сходится, то $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k = 0$;

b) если $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, то ряд сходится;

c) если ряд сходится, то $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$;

d) если $\lim_{n\to\infty} u_n < 0$, то ряд сходится.

8. Какое из перечисленных утверждений является верным:

a) если предел общего члена ряда при $n \to \infty$ равен нулю, то ряд сходится;

b) если предел общего члена ряда при $n \to \infty$ равен нулю, то ряд расходится;

c) если ряд расходится, то предел общего члена ряда при $n \to \infty$ не равен нулю;

d) если ряд сходится, то предел общего члена ряда при $n \to \infty$ равен нулю.

9. Какое из перечисленных утверждений является верным:

a) если предел общего члена ряда при $n \to \infty$ равен нулю, то ряд сходится;

b) если предел общего члена ряда при $n \to \infty$ не равен нулю, то ряд расходится;

c) если ряд расходится, то предел общего члена ряда при $n \to \infty$ равен нулю;

d) если ряд сходится, то предел общего члена ряда при $n \to \infty$ не равен нулю.

10. Какое из перечисленных утверждений является верным:

a) если предел общего члена ряда при $n \to \infty$ равен нулю, то ряд сходится;

b) если предел общего члена ряда при $n \to \infty$ равен нулю, то ряд может, как сходиться, так и расходится;
c) если ряд расходится, то предел общего члена ряда при $n \to \infty$ равен нулю;
d) если ряд сходится, то предел общего члена ряда при $n \to \infty$ не равен нулю.

11. Если для рядов с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ выполняется неравенство $a_n \le b_n$, то:

a) из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$;

b) из расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$;

c) из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$;

d) из расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ следует расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$;

12. Если для рядов с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ выполняется неравенство $u_n \le v_n$, то:

a) из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ следует расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$;

b) из расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ следует расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$;

c) из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$;

d) из расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ следует расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$;

13. Признак Даламбера сходимости числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ с положительными членами заключается в том, что если существует предел

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, то при

$l < 1 -$ ряд расходится,
$l > 1 -$ ряд сходится,
$l = 1 -$ требуется дополнительное исследование;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{u_{n+1}}{u_n}} = l$, то при

$l < 1 -$ ряд сходится,
$l > 1 -$ ряд расходится,
$l = 1 -$ требуется дополнительное исследование;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, то при

$l < 1 -$ ряд сходится,

$l > 1$ – ряд расходится,
$l = 1$ – требуется дополнительное исследование;

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$, то при

$l < 1$ – ряд сходится,
$l > 1$ – ряд расходится,
$l = 1$ – требуется дополнительное исследование;

14. Радикальный признак Коши сходимости числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ с положительными членами заключается в том, что если существует предел

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$, то при

$l < 1$ – ряд расходится,
$l > 1$ – ряд сходится,
$l = 1$ – требуется дополнительное исследование;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{u_{n+1}}{u_n}} = l$, то при

$l < 1$ – ряд сходится,
$l > 1$ – ряд расходится,
$l = 1$ – требуется дополнительное исследование;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l$, то при

$l < 1$ – ряд сходится,
$l > 1$ – ряд расходится,
$l = 1$ – требуется дополнительное исследование;

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$, то при

$l < 1$ – ряд сходится,
$l > 1$ – ряд расходится,
$l = 1$ – требуется дополнительное исследование;

15. Интегральный признак Коши сходимости убывающего положительного числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ заключается в том, что (при соответствующем выборе функции $f(x)$)

a) если $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ – сходится, то и ряд сходится, если же данный интеграл расходится, то и ряд расходится;

b) если $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ – сходится, то и ряд сходится, если же данный интеграл расходится, то и ряд расходится;

c) если $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx$ сходится, то и ряд сходится, если же данный интеграл расходится, то и ряд расходится;

d) если $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx$ сходится, то и ряд сходится, если же данный интеграл расходится, то и ряд расходится.

16. Геометрическая прогрессия $\sum_{n=1}^{\infty} bq^n$ $(b \neq 0)$ является сходящимся числовым рядом, если

a) $|q| \leq 1$;

b) $|q| \geq 1$;

c) $|q| > 1$;

d) $|q| < 1$.

17. Обобщенный гармонический ряд сходится $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$, если

a) $|\alpha| < 1$;

b) $\alpha < 1$;

c) $\alpha > 1$;

d) $0 < \alpha < 1$.

18. Отметьте верные утверждения, относящиеся к ряду Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$:

a) $\alpha = 1$ указанный ряд сходится;

b) $\alpha = 1$ указанный ряд расходится;

c) $\alpha < 1$ указанный ряд расходится;

d) $\alpha > 1$ указанный ряд сходится;

e) $\alpha < 1$ указанный ряд сходится;

f) $\alpha > 1$ указанный ряд расходится.

19. Дан сходящийся ряд. При отбрасывании нескольких его ненулевых членов:

a) ряд останется сходящимся и его сумма обязательно не изменится;

b) ряд останется сходящимся, и его сумма уменьшится на значение, равное сумме отброшенных членов;

c) ряд станет расходящимся;

d) ряд останется сходящимся и его сумма обязательно уменьшится;

e) не зная членов исходного ряда, ничего сказать о сходимости или расходимости нового ряда нельзя.

20. Укажите верные утверждения:

a) если сходится ряд $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$, то сходится и ряд $u_{m+1} + u_{m+2} + u_{m+3} + \ldots$, получаемый из данного ряда отбрасыванием первых m членов;

b) если сходятся ряды $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$ и $v_1 + v_2 + v_3 + \ldots$, имеющие соответственно суммы S и σ, то сходится и ряд $(u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + (u_3 + v_3) + \ldots$, причем сумма последнего ряда равна $S + \sigma$;

c) если расходятся ряды $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$ и $v_1 + v_2 + v_3 + \ldots$ расходятся, то и ряд $(u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + (u_3 + v_3) + \ldots$ расходится;

d) если сходится ряд $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$ и его суммой является число S, то сходится и ряд $cu_1 + cu_2 + cu_3 + \ldots$ (при $c \neq 0$), причем сумма последнего ряда также равна S.

21. Знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется абсолютно сходящимся, если

a) сходится ряд, составленный из абсолютных величин его членов;

b) выполняется признак Лейбница;

c) расходится ряд, составленный из абсолютных величин его членов;

d) не выполняется признак Лейбница.

22. Даны ряды $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ – Iи $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ – II , где $u_n > 0$.Ряд Iявляется абсолютно сходящимся, если

a) сходится ряд I;
b) сходятся ряды Iи II;
c) ряд Iсходится, а ряд II расходится;
d) ряд IIсходится, а ряд I расходится;
e) расходятся ряды Iи II.

23. Укажите верную формулировку признака абсолютной сходимости знакопеременного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$:

a) если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ сходится абсолютно;
b) если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ сходится абсолютно, то сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$;
c) если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ не сходится условно, то он сходится абсолютно;
d) если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ расходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ сходится абсолютно.

24. Если $\lim_{n\to\infty}u_n = 0$ и $u_1 > u_2 > u_3 > ... > u_n > ...$ $(u_i > 0,\ i = 1,2,...)$, то знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$

a) сходится абсолютно;
b) сходится условно;
c) расходится;
d) сходится.

25. Знакочередующийся ряд $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + ...$ $(u_i > 0,\ i = 1,2,...)$ сходится (признак Лейбница), если:

a) $\lim_{n\to\infty}u_n = 0$ и $u_1 < u_2 < u_3 < ... < u_n < ...$;
b) $\lim_{n\to\infty}u_n = 0$ и ряд $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + ...$ расходится;
c) $\lim_{n\to\infty}u_n = 0$ и $u_1 > u_2 > u_3 > ... > u_n > ...$;
d) ряд $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + ...$ расходится.

26. Знакочередующийся ряд $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + ...$ $(u_i > 0,\ i = 1,2,...)$ сходится условно, если:

a) $\lim_{n\to\infty}u_n = 0$ и $u_1 < u_2 < u_3 < ... < u_n < ...$;
b) $\lim_{n\to\infty}u_n = 0$ и $u_1 > u_2 > u_3 > ... > u_n > ...$ и ряд $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + ...$ расходится;
c) $\lim_{n\to\infty}u_n = 0$ и $u_1 > u_2 > u_3 > ... > u_n > ...$;
d) ряд $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + ...$ расходится.

27. Укажите верные утверждения:

a) если расходится знакопеременный ряд $u_1 + u_2 + u_3 + ...$, то и ряд $cu_1 + cu_2 + cu_3 + ...$ (при $c \neq 0$) расходится;

b) если абсолютно сходятся знакопеременные ряды $u_1+u_2+u_3+\dots$ и $v_1+v_2+v_3+\dots$, то сходится абсолютно и ряд $(u_1+v_1)+(u_2+v_2)+(u_3+v_3)+\dots$;

c) если сходятся условно знакопеременные ряды $u_1+u_2+u_3+\dots$ и $v_1+v_2+v_3+\dots$, то и ряд $(u_1+v_1)+(u_2+v_2)+(u_3+v_3)+\dots$ сходится условно;

d) если абсолютно сходится знакопеременный ряд $u_1+u_2+u_3+\dots$, то сходится абсолютно и ряд $cu_1+cu_2+cu_3+\dots$ (при $c\neq 0$).

28. Перестановка членов ряда не влияет на его сходимость, если ряд

a) сходится абсолютно;
b) сходится условно;
c) расходится;
d) сходится.

Часть 2

29. Установите соответствие между обозначением ряда и его названием:

1) геометрическая прогрессия	a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$
2) обобщенный гармонический ряд	b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}bq^n$
3) гармонический ряд	c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$

30. Дана числовая последовательность $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$. Установите соответствие между понятием и его записью:

1) сумма ряда	a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$
2) ряд	b) $\sum\limits_{k=1}^{n}u_k$
3) частичная сумма ряда	c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}u_k$

31. К знакоположительному ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ применен признак Даламбера. Установите соответствие между полученными результатами и характером сходимости ряда:

если	1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$	то	a)	ряд сходится
	2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=0$		b)	ряд расходится
	3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=10$		c)	требуется дополнительное исследование

32. К знакоположительному ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ применен радикальный признак Коши. Установите соответствие между полученными результатами и характером сходимости ряда:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1$	a)	ряд сходится

если	2)	$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1{,}3$	то	b)	ряд расходится
	3)	$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\frac{1}{3}$		c)	требуется дополнительное исследование

33. Дан знакоположительный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$. Установите соответствие между полученными результатами и характером сходимости ряда:

	1)	$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=0$		a)	ряд сходится
если	2)	$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$	то	b)	ряд расходится
	3)	$\int\limits_1^{+\infty}f(x)dx$ – расходится		c)	требуется дополнительное исследование

34. Даны знакоположительные ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$. Установите соответствие между полученными результатами и характером сходимости ряда:

	1)	$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}<1$ и $u_n\ge v_n$		a)	ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ сходится
если	2)	$\lim\limits_{n\to\infty}u_n\ne 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=1$	то	b)	ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ расходится
	3)	$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{2}$		c)	для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ требуется дополнительное исследование

Часть 3

Установить характер сходимости ряда: для утверждений вместо пропуска вставьте слово (словосочетание) из списка

a) сходится;
b) расходится;
c) сходится абсолютно;
d) сходится условно.

35. Если знакоположительные ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ – сходятся, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ –.

36. Если знакоположительный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ – расходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)\cdot u_n$ –.

37. Если какой-либо остаток ряда –, то сам ряд сходится.

38. Если знакопеременные ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ – абсолютно сходятся, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ –.

39. Если знакопеременный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ – сходится абсолютно, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)\cdot u_n$ –.

40. Если выполняется признак Лейбница и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ – расходится, то знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ – .

41. Если не выполняется признак Лейбница и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ – расходится, то знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ – .

42. Известно, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ – расходится, так как $\lim_{n\to\infty}|u_n| \neq 0$. Тогда знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ – .

43. Если $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ – сходится, то знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ – .

44. Если выполняется признак Лейбница, то знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ – .

45. Известно, что $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = 1$ и $v_n = \frac{1}{n}$, значит, знакоположительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ – .

46. Дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty}v_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, известно, что $u_n \leq v_n$, следовательно, знакоположительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ – .

Раздел 2

<u>Вариант 1</u>

Часть 1

1. Укажите знакоположительный ряд:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)$;

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n^2}$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^{2n}}{n^3}$;

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-4)^{3n}}{n^4}$.

2. Укажите знакочередующийся ряд:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{n!}$;

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n}}{(2n)!}$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n+1}}{(2n+1)!}$;

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n+2}}{(2n+2)!}$.

3. Укажите вид $n-$ го члена для ряда $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\cdots$:

a) $\frac{1}{3^n}$;

b) $\frac{(-1)^n}{3^{n-1}}$;

c) $\frac{(-1)^n}{3^n}$;

d) $\frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}$.

4. Укажите, чему равен 5-й член ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n+1}$:

a) $\frac{5}{6}$;

b) $-\frac{5}{6}$;

c) $\frac{6}{5}$;

d) $-\frac{6}{5}$.

5. Укажите чему равна частичная сумма S_2 ряда $-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ldots$:

a) $\frac{1}{4}$;

b) $-\frac{1}{4}$;

c) $\frac{1}{2}$;

d) $-\frac{1}{2}$.

6. Укажите, чему равна сумма ряда $\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\ldots+\frac{1}{10^n}+\ldots$:

a) $\frac{1}{9}$;

b) $\frac{1}{2}$;

c) 1;

d) 2.

7. Укажите сходящиеся ряды:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$;

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty}2^n$;

e) все ряды расходящиеся.

8. Укажите расходящиеся ряды:

a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots$;

b) $1+2+3+4+\ldots$;

c) $1-1+1-1+1-\ldots$;

d) все ряды сходящиеся.

9. Укажите расходящиеся ряды, для которых не выполняется необходимый признак сходимости:

a) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{2n+1}{n-2}$;

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2n!}$;

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{5n^2+7}{n}$.

10. Укажите возможное значение параметра α, при котором ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}+n}$ сходится:

a) $\alpha=1$;

b) $\alpha=0$;

c) $\alpha=2$;

d) $\alpha=-1$.

11. Укажите возможное значение n, при котором ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}$ сходится:

a) $n=1$;

b) $n=0$;

c) $n=-2$;

d) $n=-1$.

12. Укажите возможное значение предела $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l$ для расходящегося числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ с положительными членами

a) $l=1$;

b) $l=0$;

c) $l=2$;

d) $l=-1$.

13. Укажите возможное значение предела $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l$ для сходящегося числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ с положительными членами

a) $l=1$;
b) $l=0$;
c) $l=2$;
d) $l=-1$.

14. Укажите функцию, необходимую для интегрирования при исследовании сходимости числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+3}$ по интегральному признаку Коши

a) $f(x)=\frac{1}{x^2+3}$;

b) $f(x)=\frac{1}{x^2}$;

c) $f(x)=\frac{1}{x+3}$;

d) $f(x)=\frac{1}{x}$.

15. Укажите абсолютно сходящийся ряд:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n}$;

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n!}$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-4)^n$;

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{2n+1}\cdot 4n$.

16. Укажите ряд, для которого не выполняется признак Лейбница:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+2}$;

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos n$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos\frac{1}{n}$;

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(3n+2)$.

Часть 2

17. Установите соответствие между числовыми рядами и пределами их общих членов

если дан ряд	1)	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+n}{n}\right)^n$	то	a) $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=1$

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ b) $\lim_{n\to\infty} u_n = e$

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$ c) $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

18. Установите соответствие между числовыми рядами и признаками, применяемые для исследования их на сходимость

если дан ряд

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+n}{n}\right)^{n^2}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^2}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}$

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}tg\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$

то применить

a) признак Даламбера

b) признак сравнения в предельной форме

c) радикальный признак Коши

d) интегральный признак Коши

19. Установите соответствие между числовыми рядами и признаками, применяемые для исследования их на сходимость

если дан ряд

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+5}\right)^{n}$

2) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{(n+1)\ln(n+1)}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{n+1}}{n}$

4) $\sum_{n=3}^{\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n-2}}$

то применить

a) признак Даламбера

b) необходимый признак сходимости

c) радикальный признак Коши

d) интегральный признак Коши

20. Установите соответствие между знакопеременным ряд и характером его сходимости

ряд

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n^2+1}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3n!}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin n$

a) сходится абсолютно

b) расходится

c) сходится условно

Вариант 2

Часть 1

1. Укажите знакоположительный ряд:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2^n}{n}\right)$;

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^{n^2}}{n^2}$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-4)^{n^3}}{n^3}$;

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-5)^{n^4}}{n^4}$.

2. Укажите знакочередующийся ряд:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} n$;

b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-n)$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n$;

d) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{2n} n$.

3. Укажите вид $n-$го члена для ряда $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots$:

a) $\frac{1}{2^n}$;

b) $\frac{(-1)^n}{2^{n-1}}$;

c) $\frac{(-1)^n}{2^n}$;

d) $\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}$.

4. Укажите, чему равен 5-й член ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{n+1}$:

a) $\frac{5}{6}$;

b) $-\frac{5}{6}$;

c) $\frac{6}{5}$;

d) $-\frac{6}{5}$.

5. Укажите, чему равна частичная сумма S_2 ряда $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\ldots$:

a) $-\frac{1}{2}$;

b) $-\frac{1}{4}$;

c) $\frac{1}{4}$;

d) $\frac{1}{2}$.

6. Укажите, чему равна сумма ряда $\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\ldots+\frac{1}{3^n}+\ldots$:

a) $\frac{1}{9}$;

b) $\frac{1}{2}$;

c) 1;

d) 2.

7. Укажите сходящиеся ряды:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$;

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty}3^n$;

d) все ряды расходящиеся**.**

8. Укажите расходящиеся ряды:

a) $\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\ldots$;

b) $1+3+5+7+\ldots$;

c) $2-2+2-2+2-\ldots$;

d) все ряды сходящиеся.

9. Укажите расходящиеся ряды, для которых не выполняется необходимый признак сходимости:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)!$;

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{1}{\sqrt{n}}$;

c) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$;

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7n+8}{\sqrt[3]{n}}$.

10. Укажите возможное значение параметра α, при котором ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha+1}+n}$ сходится:

a) $\alpha=1$;

b) $\alpha=0$;

c) $\alpha=2$;

d) $\alpha=-1$.

11. Укажите возможное значение n, при котором ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 7^{n+1}$ расходится:

a) $n = -3$;
b) $n = 0$;
c) $n = -2$;
d) $n = -1$.

12. Укажите возможное значение предела $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$ для сходящегося числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ с положительными членами

a) $l = 1$;
b) $l = 0$;
c) $l = 2$;
d) $l = -1$.

13. Укажите возможное значение предела $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$ для расходящегося числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ с положительными членами

a) $l = 1$;
b) $l = 0$;
c) $l = 2$;
d) $l = -1$.

14. Укажите функцию, необходимую для интегрирования при исследовании сходимости числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2}$ по интегральному признаку Коши

a) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 2}$;
b) $f(x) = \frac{1}{x^2}$;
c) $f(x) = \frac{1}{x + 2}$;
d) $f(x) = \frac{1}{x}$.

15. Укажите абсолютно сходящийся ряд:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$;
b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$;
c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$;
d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-n)^n$.

16. Укажите ряд, для которого не выполняется признак Лейбница:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$;

b) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{\ln n}}$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+3}{\sqrt{n}}$;

d) $\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sqrt{n}}{\ln 3}$.

Часть 2

17. Установите соответствие между числовыми рядами и пределами их общих членов

если дан ряд	1)	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	то	a)	$\lim_{n\to\infty} u_n = 1$
	2)	$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{1+n}{n}\right)$		b)	$\lim_{n\to\infty} u_n = e$
	3)	$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n}{n+1}}$		c)	$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

18. Установите соответствие между числовыми рядами и признаками, применяемые для исследования их на сходимость

если дан ряд	1)	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3+n}{n+2}\right)^{n^2}$	то применить	a)	признак Даламбера
	2)	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{(n^2+1)arctgn}$		b)	признак сравнения в предельной форме
	3)	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n^3}$		c)	радикальный признак Коши
	4)	$\sum_{n=1}^{\infty}1-\cos\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$		d)	интегральный признак Коши

19. Установите соответствие между числовыми рядами и признаками, применяемые для исследования их на сходимость

если дан ряд	1)	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+5}\right)^n$	то применить	a)	признак Даламбера
	2)	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$		b)	необходимый признак сходимости
	3)	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{n+1}}{n}$		c)	радикальный признак Коши

4)	$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\left(\frac{5n+2}{n^2}\right)^n}$	d)	интегральный признак Коши

20. Установите соответствие между знакопеременным ряд и характером его сходимости

ряд	1)	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}$	a)	сходится абсолютно
	2)	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}5^n}{3}$	b)	расходится
	3)	$\sum_{n=1}^{\infty}\cos n$	c)	сходится условно

Учебное текстовое электронное издание

Быкова Мария Васильевна
Кобелькова Елена Владимировна
Лосева Надежда Андреевна

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

Учебное пособие

0,6 Мб
1 электрон. опт. диск

г. Магнитогорск, 2012 год
ФГБОУ ВПО «МГТУ»
Адрес: 455000, Россия, Челябинская область, г. Магнитогорск,
пр. Ленина 38

ФГБОУ ВПО «Магнитогорский государственный
технический университет им. Г.И. Носова»
Кафедра математики
Центр электронных образовательных ресурсов и
дистанционных образовательных технологий
e-mail: ceor_dot@mail.ru