



Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И.Носова»

**В.Г. Дорогобид**  
**М.И. Румянцев**  
**К.Г. Пивоварова**

# **МЕХАНИКА СПЛОШНОЙ СРЕДЫ**

## **Часть 2**

Допущено Учебно-методическим объединением  
по образованию в области металлургии  
в качестве учебного пособия для студентов  
высших учебных заведений, обучающихся  
по специальности «Обработка металлов давлением»  
направления подготовки «Металлургия»

Магнитогорск  
2012

**Рецензенты:**

*Кандидат технических наук, профессор,  
заведующий кафедрой общетехнических дисциплин,  
ФГБОУ ВПО «Магнитогорский государственный университет»  
В.С. Славин*

*Кандидат технических наук, начальник прокатного отдела ЦЛК  
ОАО «Магнитогорский металлургический комбинат»  
С.В. Денисов*

*Доктор технических наук,  
заведующий кафедрой механического оборудования  
металлургических заводов  
ФГБОУ ВПО «Магнитогорский государственный  
технический университет им. Г.И. Носова»  
А.Г. Корчунов*

**Дорогобид В.Г., Румянцев М.И., Пивоварова К.Г.**

**Механика сплошной среды. Часть 2** [Электронный ресурс] : учебное пособие / В.Г. Дорогобид, М.И. Румянцев, К.Г. Пивоварова ; ФГБОУ ВПО «Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова». – Изд. 2-е, испр. и доп. – Электрон. текстовые дан. (1,38 Мб). – Магнитогорск : ФГБОУ ВПО «МГТУ», 2012. – 1 электрон. опт. диск (CD-R). – Систем. требования : IBM PC, любой, более 1 GHz ; 512 Мб RAM ; 10 Мб HDD ; MS Windows XP и выше ; Adobe Reader 8.0 и выше ; CD/DVD-ROM дисковод ; мышь. – Загл. с контейнера.

Излагаются основы теории упругости и пластичности применительно к случаю, когда сплошная среда моделирует металл в процессе его обработки давлением. Рассматриваются опытные связи между напряжениями, деформациями и скоростями деформаций; конструируются реологические модели для линейного напряжённого состояния; производится обобщение реологических моделей для объёмного напряжённого состояния. Выводятся уравнения обобщённого закона Гука; рассмотрены условия пластичности; излагается теория пластического течения и теория упруго-пластических деформаций.

Теоретический материал иллюстрирован задачами с решениями и сопровождается контрольными вопросами.

Учебное пособие для студентов вузов, обучающихся по направлению «Металлургия». Может быть полезно аспирантам, соискателям учёных степеней, специалистам, инженерам, работающим в области обработки металлов давлением.

УДК 621.77.014:531/534(07)

- © Дорогобид В.Г., Румянцев М.И., Пивоварова К.Г., 2007
- © ФГБОУ ВПО «Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова», 2007

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие .....	7
Введение .....	10
Основные обозначения .....	16
Глава 6. ОПЫТНЫЕ СВЯЗИ МЕЖДУ НАПРЯЖЕНИЯМИ И ДЕФОРМАЦИЯМИ .....	21
6.1. Диаграммы растяжения и некоторые эффекты, сопровождающие пластическую деформацию .....	21
6.1.1. Испытания на растяжение и сжатие.....	21
6.1.2. Индикаторная диаграмма и диаграмма условных напряжений .....	22
6.1.3. Некоторые эффекты, сопровождающие пластическую деформацию .....	26
Контрольные вопросы .....	31
6.2. Диаграмма деформирования .....	32
6.2.1. Построение диаграммы деформирова- ния с учетом упругости и сжимаемости ..	32
6.2.2. Построение диаграммы деформирова- ния при условии несжимаемости .....	36
6.2.3. Построение диаграммы деформирова- ния без учета упругости .....	42
Контрольные вопросы .....	44
6.3. Кривые упрочнения .....	45
Контрольные вопросы .....	48
Глава 7. РЕОЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ .....	50
7.1. Простые реологические модели .....	50
7.1.1. Линейно-упругая среда Гука .....	50
7.1.2. Жестко-пластическая среда Мизеса .....	51
7.1.3. Линейно-вязкая среда Ньютона .....	52
Контрольные вопросы .....	53
7.2. Упруго-пластические среды .....	53
7.2.1. Упруго-пластическая среда Прандтля ....	53
7.2.2. Жёстко-пластическая среда с линейным упрочнением .....	54
7.2.3. Упруго-пластическая среда с линейным упрочнением .....	55
Контрольные вопросы .....	56
7.3. Вязко-пластические среды .....	57
Контрольные вопросы .....	59

	7.4.	Вязко-упругие среды .....	59
	7.4.1.	Вязко-упругая релаксирующая среда Максвелла .....	59
	7.4.2.	Вязко-упругая наследственная среда Фойхта .....	62
		Контрольные вопросы .....	64
Глава 8.		<b>СВЯЗЬ МЕЖДУ НАПРЯЖЕНИЯМИ И ДЕФОРМАЦИЯМИ В ПРЕДЕЛАХ УПРУГОСТИ</b> .....	66
	8.1.	Обобщённый закон Гука .....	68
	8.1.1.	Тензор упругих коэффициентов .....	68
	8.1.2.	Потенциал тензора напряжений .....	70
	8.1.3.	Число независимых упругих коэффициентов .....	71
	8.1.4.	Некоторые случаи упругой симметрии.	72
	8.1.5.	Связь между напряжениями и деформациями для изотропной среды .....	73
	8.1.6.	Упругие постоянные изотропной среды ...	74
	8.1.7.	Уравнения состояния изотропной линейно-упругой среды .....	76
	8.1.8.	Упругое изменение объёма .....	77
	8.1.9.	Связь между обобщёнными напряжениями и деформациями при упругой деформации .....	78
	8.1.10.	Закон Гука с учётом температурных напряжений .....	80
		Контрольные вопросы .....	81
	8.2.	Система уравнений линейной теории упругости и методы её решения .....	82
	8.2.1.	Замкнутая система уравнений линейной теории упругости .....	82
	8.2.2.	Постановка задач в теории упругости.....	83
	8.2.3.	Решение задач теории упругости в перемещениях .....	84
	8.2.4.	Решение задач теории упругости в напряжениях .....	85
		Контрольные вопросы .....	93
	8.3.	Плоская задача теории упругости .....	94
	8.3.1.	Система уравнений статических задач для плоского напряжённого состояния...	94
	8.3.2.	Решение плоской задачи в напряжениях.	95

	8.3.3.	Функция напряжений .....	96
		Контрольные вопросы .....	105
Глава 9.		УСЛОВИЯ ПЛАСТИЧНОСТИ .....	107
	9.1.	Условие постоянства максимального касательного напряжения (условие пластичности Треска - Сен-Венана) .....	108
	9.1.1.	Поверхность и кривая текучести для изотропного материала .....	108
	9.1.2.	Аналитическое выражение условия пластичности Треска–Сен-Венана .....	109
	9.1.3.	Геометрическая интерпретация .....	110
	9.1.4.	Условие пластичности Рейсса и условие полной пластичности .....	112
	9.1.5.	Плоское напряжённое и плоское деформированное состояния .....	113
		Контрольные вопросы .....	114
	9.2.	Энергетическое условие пластичности Губера–Мизеса .....	115
	9.2.1.	Геометрическая интерпретация и аналитическое выражение .....	115
	9.2.2.	Физический смысл энергетического условия пластичности .....	116
	9.2.3.	Плоское напряжённое и плоское деформированное состояния .....	117
	9.2.4.	Влияние среднего главного нормального напряжения на наступление пластического состояния .....	118
	9.2.5.	Опытная проверка условий пластичности.....	120
	9.2.6.	Условие пластичности для анизотропного материала .....	121
		Контрольные вопросы .....	124
	9.3.	Условия упрочнения .....	125
	9.3.1.	Нагружение и разгрузка .....	125
	9.3.2.	Поверхность нагружения .....	126
	9.3.3.	Простое и сложное нагружение .....	128
	9.3.4.	Построение поверхностей текучести и нагружения по опытными данным .....	130
	9.3.5.	Гипотеза «единой кривой» .....	131
	9.3.6.	Энергетическое условие упрочнения .....	134
	9.3.7.	Условие упрочнения Удквиста .....	134
	9.3.8.	Разгрузка. Остаточные напряжения и деформации .....	135

	Контрольные вопросы .....	138
Глава 10.	СВЯЗЬ МЕЖДУ НАПРЯЖЁННЫМ И ДЕФОРМИРОВАННЫМ СОСТОЯНИЯМИ ПРИ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ .....	140
10.1.	Постулат Друкера и ассоциированный закон течения .....	142
10.1.1.	Постулат Друкера при линейном напряжённом состоянии .....	142
10.1.2.	Постулат Друкера при объёмном напряжённом состоянии .....	142
10.1.3.	Выпуклость поверхности нагружения ...	144
10.1.4.	Ассоциированный закон течения .....	145
	Контрольные вопросы .....	148
10.2.	Теория пластического течения (ТПТ) .....	148
10.2.1.	Основные предпосылки (гипотезы) ТПТ	148
10.2.2.	Связь между приращениями пластических деформаций и напряжениями .....	150
10.2.3.	Уравнения Прандтля – Рейсса .....	151
10.2.4.	Уравнения Сен-Венана – Леви – Мизе- са.....	152
	Контрольные вопросы .....	159
10.3.	Теория упруго-пластических деформаций (ТУПД).....	159
10.3.1.	Основные предпосылки (гипотезы) ТУПД.....	159
10.3.2.	Связь пластических деформаций с напряжениями .....	161
10.3.3.	Связь между деформациями и напряжениями по ТУПД .....	163
10.3.4.	Сравнение теории пластического течения и теории упруго-пластических деформаций .....	166
10.3.5.	Экспериментальная проверка теорий пластичности .....	166
10.3.6.	Уравнения термопластичности.....	174
	Контрольные вопросы .....	189
	Заключение .....	191
	Библиографический список .....	196
	Приложение. Список задач с решениями .....	203

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Твёрдое деформируемое тело в процессе его обработки давлением моделируется сплошной средой. Теория пластичности (наряду с теорией упругости, гидромеханикой, электродинамикой) является разделом механики сплошной среды.

Книга написана как учебное пособие для студентов вузов, обучающихся по направлениям "Металлургия" и "Материаловедение и технология материалов". Основной теоретический материал иллюстрирован задачами с решениями и сопровождается контрольными вопросами.

В 2006 году вышла из печати первая часть учебного пособия "Механика сплошной среды". Часть 1 посвящена основам механики сплошной среды. Рассмотрены математические основы (векторные и тензорные поля), геометрические основы (теория конечных, бесконечно малых и малых деформаций), кинематические основы (теория скоростей деформаций), динамические основы (теория напряжений) и физические основы (законы сохранения массы, импульса, момента импульса и энергии для конечного объёма сплошной среды). В результате получены 23 уравнения, описывающие движение (в том числе и деформацию) сплошной среды, независимо от её свойств, хотя изложение ведётся все-таки применительно к случаю, когда сплошная среда моделирует металлическое тело в процессе его обработки давлением.

В 2011 году вышло в свет второе, исправленное и дополненное, издание части 1 в виде текстового электронного образовательного ресурса.

Во второй части учебного пособия, которая издана в 2007 году, сплошная среда наделена свойствами упругости, пластичности и вязкости, характерными для металла в процессе его обработки давлением. Получены шесть уравнений состояния упругопластической среды, которые замыкают множество (систему) уравнений, описывающих упругопластическую деформацию.

Получение уравнений состояния производится в три этапа. На первом этапе рассматриваются и анализируются опытные связи между напряжениями, деформациями и скоростями деформаций. Поэтому получаемые уравнения состояния упругопластической среды называются феноменологическими (от греческого слова *phainomenon*). На втором этапе конструируются реологические модели для линейного напряжённого состояния, отражающие наиболее существенные особенности опытных связей между напряжённым и деформированным состояниями. На третьем этапе

производится обобщение реологических моделей на объёмное напряжённое состояние.

Это обобщение не удаётся сделать сразу для всей кривой упрочнения, начиная от деформаций, равных нулю, и до больших (конечных) деформаций вплоть до разрушения. Вначале рассматривается чисто *упругая деформация*, выводятся уравнения, изображающие обобщённый закон Гука для линейно-упругой среды. Затем определяются условия перехода от чисто упругой деформации к упругопластической деформации, т. е. рассматриваются так называемые *условия пластичности*. Наконец, выводятся (конструируются) уравнения состояния *упругопластической среды* по теории пластического течения (ТПТ, уравнения состояния Прандтля – Рейсса) и по теории упругопластических деформаций (ТУПД) как частный случай ТПТ (уравнения состояния Хенки – Ильюшина).

В третьей части учебного пособия будет дана постановка краевых задач теории пластичности для системы дифференциальных уравнений, будут рассмотрены начальные и граничные условия, типичные упрощения в постановке краевых задач и основные методы их решения.

Формулы представлены в тензорном виде, пригодном для использования в любой системе координат; в индексной записи через компоненты векторов и тензоров с использованием правила суммирования А. Эйнштейна и исключения из него А.И. Лурье; в подробной записи в прямоугольной декартовой и цилиндрической системах координат.

Даётся понятие о криволинейной системе координат общего вида, ковариантных и контравариантных компонентах векторов и тензоров, символах Кристоффеля и ковариантном дифференцировании. Это связано с тем, что при изучении движения и деформации материальных сред необходимо пользоваться двумя системами координат: системой координат наблюдателя (системой отсчёта) и сопутствующей (лагранжевой) системой координат, которая составляет единое целое со сплошной средой, движется и деформируется вместе с ней и является поэтому криволинейной и неортогональной. Изучение деформации тела по сути сводится к изучению деформации сопутствующей системы координат. Академик Л.И. Седов писал: «Некоторые думают, что механику подвижных непрерывных материальных сред без существенного ограничения общности можно строить при помощи только одной и притом декартовой системы координат. Эта точка зрения, отраженная в некоторых

книгах и искренне внедряемая в сознание учащихся, неверна и мешает пониманию сущности механики и постановок её задач».

При написании учебного пособия возникли некоторые трудности с терминологией. Например – система координат или множество (осей) координат; система уравнений или множество уравнений; шаровой тензор или сферический тензор; главные касательные напряжения или максимальные (экстремальные) касательные напряжения. То же касается и обозначений различных величин, применения различного вида скобок. При выборе терминов, обозначений, скобок мы стремились к наибольшей простоте, обращались к учебникам известных ученых (Л.И. Седова, А.А. Ильюшина), использовали книги «Математическая энциклопедия» (М.: Сов. энцик., 1977–1984. Т. 1–5) и «Толковый математический словарь» (М.: Рус. яз., 1989. 244 с.).

Первая часть учебного пособия состоит из пяти глав. Поэтому вторая часть начинается с главы 6. Формулы нумеруются двумя числами, разделёнными точкой. Например, (7.3) – третья формула в главе 7. Во второй части учебного пособия даются ссылки на формулы из первой части. Например, (2.11) – формула 11 из главы 2 первой части.

Настоящее, второе, исправленное и дополненное издание второй части учебного пособия "Механика сплошной среды" представляет собой текстовый электронный образовательный ресурс.

Библиографический список состоит из 114 наименований и включает в себя учебники, учебные пособия, монографии по векторному и тензорному анализу, механике сплошной среды, теории упругости, теории пластичности, прикладной теории пластичности. В каждом из перечисленных разделов библиографического списка источники следуют в алфавитном порядке.

Наиболее важные термины выделены курсивом. Изложение учебного материала содержит много формул. Поэтому наиболее важные конечные формулы выделены зелёными и синими рамками.

Авторы благодарят рецензентов – доктора технических наук Г.Л. Колмогорова и доктора технических наук А.Г. Корчунова за ценные указания при подготовке учебного пособия к опубликованию.

Авторы будут благодарны читателям, которые пришлют свои отзывы, замечания и пожелания по адресу:

455000 г. Магнитогорск Челябинской области, проспект Ленина, 38, МГТУ им. Г.И. Носова, кафедра машиностроительных и металлургических технологий или кафедра обработки металлов давлением.

## ВВЕДЕНИЕ

*Обработка металлов давлением* (ОМД) осуществляется путём *пластической деформации* металла, включающей изменение формы и размеров, придание требуемых механических, физических и химических свойств (прочности, пластичности, вязкости, износоустойчивости, электропроводности, жаропрочности, коррозионной стойкости и др.). При этом изменяются взаимное расположение частиц деформируемого тела и расстояния между ними; сами частицы деформируются (растягиваются или сжимаются по трем взаимно перпендикулярным осям) и поворачиваются.

В технологических процессах ОМД деформация происходит под действием внешних сил. *Деформация*, исчезающая после снятия вызвавшей ее нагрузки, называется *упругой*. Для металлических тел упругие деформации в процессах ОМД обычно малы. Деформация состоит в основном из *пластической, остаточной* деформации, которая остаётся после снятия нагрузки. Пластическая деформация осуществляется благодаря тому, что металлы обладают свойством пластичности. *Пластичность* – свойство металлов под действием внешних сил изменять, не разрушаясь, свою форму и размеры и сохранять остаточные, пластические деформации. Под *разрушением* понимается макроскопическое нарушение сплошности металла (например, образование пор, трещин).

*Теория пластичности* металлов изучает основные закономерности их пластической деформации, а также разрабатывает теоретические основы методов расчёта напряжённо-деформированного состояния металла при его обработке давлением. Условно различают физическую, математическую и прикладную теории пластичности.

*Физическая теория пластичности* на основе реального кристаллического строения металлов и дефектов их кристаллических решеток изучает механизм пластической деформации, влияние холодной и горячей пластической деформации на механические, физические и химические свойства металла.

В основе *математической теории пластичности* лежит модель пластически деформируемого материала, называемая *сплошной средой*. В отличие от реального металла, который по объему состоит в основном из "пустоты" (ядерное вещество, в котором сосредоточена большая часть массы, занимает лишь небольшую часть объёма металлического тела, примерно  $7 \cdot 10^{-12} \%$ ),

*сплошная среда* непрерывно заполняет часть реального пространства. Это позволяет использовать математический аппарат непрерывных функций, дифференциальное и интегральное исчисления. "*Гипотеза сплошной среды*" лежит в основе электродинамики, гидромеханики, теории упругости, теории пластичности. Сплошная среда – объект изучения науки "*Механика сплошной среды*".

Математическая теория пластичности – раздел механики сплошной среды, в котором разрабатываются методы математического описания напряжённого и деформированного состояний (с этой целью привлекается аппарат тензорного исчисления); рассматриваются физические законы сохранения применительно к сплошной среде и следствия из них (уравнения неразрывности, дифференциальные уравнения движения, симметрия тензора напряжений, закон сохранения энергии применительно к индивидуальному объёму сплошной среды, уравнения теплового баланса и теплопроводности); создаются реологические модели, т.е. устанавливаются *уравнения состояния*, или определяющие уравнения, выражающие связь между напряжённым и деформированным состояниями в процессе упругопластической деформации; формулируются краевые задачи для системы дифференциальных уравнений теории пластичности и разрабатываются методы их решения.

В *прикладной теории пластичности* производится постановка и решение конкретных задач обработки металлов давлением – прокатки, волочения, прессования,ковки, штамповки и др. Граница между прикладной и математической теориями пластичности является весьма условной. К прикладной теории пластичности можно отнести разработку численных методов решения краевых задач и способов их реализации с помощью ЭВМ.

Основы теории пластичности были созданы в конце XIX и начале XX столетий трудами Б. Сен-Венана, М. Леви, А. Хаара, Т. Кармана, Р. Мизеса, Л. Прандтля, Г. Хенки, А. Надаи, Х. Треска и др. Мощным стимулом развития теории пластичности явились потребности теории и технологии обработки металлов давлением. Интенсивное развитие теории пластичности получила в двадцатых-тридцатых годах прошлого века в работах А. Рейсса, В. Прагера, Ф. Удквиста и др. Первая монография по теории пластичности написана А. Надаи (1927 год).

Большой вклад в развитие теории пластичности внесли советские ученые. Среди первых в этой области являются работы С.Л. Соболева (1935 год), С.А. Христиановича (1938 год),

А.А. Ильюшина (1943 г.), Л.А. Галина (1944 г.), А.Ю. Ишлинского (1944 г.), В.В. Соколовского (1945 г.), К.Н. Шевченко (1946 г.). Первая советская монография по теории пластичности написана А.А. Ильюшиным и опубликована в 1948 году.

Фундаментальные научные труды по механике сплошной среды принадлежат Л.И. Седову, А.А. Ильюшину, Х.А. Рахматуллину. Из иностранных ученых в области механики сплошной среды отметим В. Прагера, Дж. Мейза, К. Трусделла, который механику сплошной среды рассматривает как раздел математики.

Математической теории пластичности посвящены монографии Д.Д. Ивлева, В.В. Соколовского, Ю.И. Работнова, учебники и учебные пособия К.Н. Шевченко, Н.И. Безухова, Н.Н. Малинина, В.Д. Ключникова, Г.Я. Гуна. Из зарубежных ученых отметим Р. Хилла, Т. Томаса и В. Ольшака.

Много полезного, особенно по общим вопросам механики сплошной среды, можно почерпнуть из книг по теории упругости. Из советской литературы можно рекомендовать монографии Н.И. Мухелишвили, А.И. Лурье и учебник Ю.А. Амензаде, а из иностранной – монографии С.П. Тимошенко и В. Новацкого.

Большой вклад в развитие прикладной теории пластичности внесли советские ученые И.М. Павлов, С.И. Губкин, А.Ф. Головин, А.П. Чекмарёв, А.И. Целиков, П.И. Полухин, В.П. Северденко, Е.П. Унксов, Г.А. Смирнов-Аляев, А.В. Крупин, В.С. Смирнов, А.Д. Томленов, М.В. Сторожев, Е.А. Попов, И.Я. Тарновский, А.А. Поздеев, В.Н. Выдрин, В.Л. Колмогоров, В.М. Сегал, Л.Г. Степанский, и многие другие. Из иностранной литературы отметим монографии Э. Томсена, Ч. Янга, Ш. Кабаяши, В. Бэкофена, У. Джонсона и П. Меллора.

Наука о перемещениях тел в пространстве и происходящих при этом взаимодействиях между ними называется *механикой*. В *теоретической механике* изучаются движения материальной точки, дискретных систем материальных точек и абсолютно твёрдого тела. *Материальной точкой* называется тело конечной массы, форма и размеры которого несущественны. *Абсолютно твёрдым телом* называется тело, деформацией которого можно пренебречь. Расстояние между двумя любыми его точками не меняется при его движении.

*Механика сплошной среды* – часть механики, посвящённая изучению движения газообразных, жидких и твёрдых деформируемых тел, т.е. таких тел, расстояния между точками (частицами) которых изменяются. В обработке металлов давлением как раз и имеют дело с твёрдыми деформируемыми

талами. В любом существенном для нас объеме очень много атомов, а расстояния между ними малы.

Найдём, например, число атомов в  $1 \text{ см}^3$  железа и расстояние между соседними атомами. В одном моле железа  $^{56}\text{Fe}$ , масса которого равна 56 г, содержится  $6,022 \cdot 10^{23}$  атомов (постоянная Авогадро). Тогда число атомов в  $1 \text{ см}^3$  железа  $^{56}\text{Fe}$  плотностью  $7,88 \text{ г/см}^3$  равно  $(7,88/56) \cdot 6,022 \cdot 10^{23} = 8,47 \cdot 10^{22}$ .

Найдём теперь расстояние  $a$  между соседними атомами в объёмно-центрированной кубической (ОЦК) кристаллической решетке  $\alpha$ -железа (см. рисунок). В  $1 \text{ см}^3$  содержится  $1/a^3$  элементарных ячеек, количество атомов в которых равно

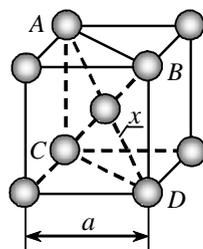
$$\left(\frac{1}{a} + 1\right)^3 + \frac{1}{a^3} = 8,47 \cdot 10^{22}.$$

Здесь первое слагаемое показывает число атомов в вершинах элементарных ячеек, второе слагаемое – число атомов в центрах элементарных ячеек. Решая полученное уравнение, найдём, что  $a = 2,86 \cdot 10^{-8} \text{ см} = 0,286 \text{ нм}$  (нанометров). Расстояние между ближайшими атомами в диагональной плоскости  $ABCD$  решётки равно  $x = 2,48 \cdot 10^{-8} \text{ см} = 0,248 \text{ нм}$ .

Поэтому твёрдое деформируемое тело можно моделировать сплошной средой, занимающей часть реального пространства. Расстояние между ближайшими точками сплошной среды как угодно мало. Эта идеализация позволяет использовать математический аппарат непрерывных функций, дифференциальное и интегральное исчисления при исследовании движения твёрдых деформируемых тел.

Вся дальнейшая теория строится на основе классической ньютоновской механики в евклидовом пространстве с абсолютным временем. Это обусловлено тем, что размеры, массы и скорости движения твёрдых деформируемых тел при обработке металлов давлением много меньше, например, размеров и массы Земли и скорости света. Напомним, что евклидовым называется такое пространство, для всех точек которого можно применить единую декартову систему координат.

Первая часть учебного пособия "Механика сплошной среды" посвящена установлению общих законов движения сплошной среды независимо от того, какими физическими свойствами она



Элементарная ячейка кристаллической решетки  $\alpha$ -железа

обладает, т.е. какие деформируемые тела моделирует – газообразные, жидкие или твёрдые, обладающие упругостью или пластичностью, вязкостью, ползучестью и т.д. Во второй части сплошная среда наделена свойствами, характерными для металлических тел, которые подвергаются обработке давлением.

Конечной целью является расчёт напряжённо-деформированного состояния (НДС) в процессах обработки металлов давлением (ОМД). Для расчёта НДС металла необходимо иметь замкнутую систему уравнений, описывающих упруго-пластическую деформацию металла. В первой части учебного пособия получены 23 уравнения; в общем же случае НДС характеризуют 29 величин (см. "Заключение" первой части учебного пособия).

Недостающие шесть уравнений должны быть получены на основании свойств сплошной среды (упругости, пластичности и др.). Эти уравнения связи между напряжениями, деформациями, скоростями деформаций будем называть *уравнениями состояния* среды. Вторая часть учебного пособия посвящена их конструированию.

Принято считать, что в интервале времени  $[t_0, t_1]$  задан *процесс деформации* тела, если задана непрерывно дифференцируемая по времени тензорная функция  $T_\varepsilon = T_\varepsilon(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)$ . Аналогично, задан *процесс нагружения* тела, если в интервале времени  $[t_0, t_1]$  задана непрерывно дифференцируемая по времени тензорная функция  $T_\sigma = T_\sigma(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)$ .

Процессы деформации и нагружения не могут быть заданы независимо друг от друга. Между ними есть связь, определяемая физическими свойствами среды (например, законом Гука). В основу теории уравнений состояния положен принцип макроскопической определенности А.А. Ильюшина, являющийся *основным постулатом теории пластичности*: *любая макроскопическая термомеханическая величина в точке  $M(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  в момент времени  $t$  однозначно определяется процессом деформации в этой точке  $T_\varepsilon = T_\varepsilon(t)$ , температурой  $T = T(t)$  и начальными значениями деформации  $T_\varepsilon(t_0)$  и температуры  $T(t_0)$  в этой точке*. Таким образом, состояние в точке  $M$  не зависит от деформации и температуры в других точках.

Поскольку тензор напряжений  $T_\sigma$  является макроscopicкой термомеханической величиной, уравнения состояния в соответствии с основным постулатом имеют вид:

$$\sigma_{ij}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) = F_{ij} [T_\varepsilon(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t), T(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)]_{t_0}^{t_1},$$

где операторы  $F_{ij}$  определяются только свойствами среды. Для многих сред верно и обратное: если задан процесс нагружения, то деформации определяются однозначно, т.е

$$\varepsilon_{ij}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) = (F_{ij})^{-1} [T_\sigma(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t), T(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)]_{t_0}^{t_1}.$$

Уравнения состояния должны быть инвариантны по отношению к преобразованиям координат и соответствовать законам сохранения.

Итак, шесть уравнений состояния замыкают систему уравнений теории пластичности. В силу основного постулата решение этой системы существует при некоторых начальных и граничных условиях. Это решение должно удовлетворять уравнениям совместности деформаций (2.61, 2.76), уравнениям совместности скоростей деформаций (3.15), основному динамическому соотношению и закону сохранения энергии (5.91). Вывод (конструирование) уравнений состояния – одна из главных задач теории пластичности.

## ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Даются в порядке следования букв в латинском и греческом алфавитах. Индексы  $i, j, k$  принимают значения 1, 2, 3 или  $x, y, z$ . Например,  $A_i$  означает  $A_1, A_2, A_3$  или  $A_x, A_y, A_z$ .

$A$  – работа.

$\vec{A}$  и  $A_i$  – вектор и его компоненты.

$A_B, A_M, A_\Gamma$  – работы внутренних, массовых, поверхностных сил.

$A_x, A_y, A_z$  и  $A_r, A_\alpha, A_z$  – компоненты вектора  $\vec{A}$  в прямоугольных декартовых и цилиндрических координатах.

$\vec{a}$  и  $a_i$  – вектор ускорения и его компоненты.

$a_B$  – удельная работа внутренних сил, отнесенная к единице объема.

$a_x, a_y, a_z$  и  $a_r, a_\alpha, a_z$  – компоненты вектора ускорения в прямоугольных декартовых и цилиндрических координатах.

$C_{ijmn}$  – упругие коэффициенты.

$D$  и  $D_{ij}$  – девиатор и его компоненты.

$D_\varepsilon, D_{\dot{\varepsilon}}, D_\sigma$  – девиаторы деформаций, скоростей деформаций, напряжений.

$d_w$  – диаметр образца в момент начала образования шейки.

$d_0, d, d_1$  – начальный, текущий, конечный диаметры образца.

$d\varepsilon_u^p$  – приращение интенсивности пластических деформаций.

$\overline{d\varepsilon_u^p}$  – интенсивность приращений пластических деформаций.

$\det$  – детерминант (определитель).

$\operatorname{div}$  – дивергенция (расхождение поля).

$E$  – единичная матрица. Модуль упругости первого рода (модуль Юнга, модуль продольной упругости). Полная энергия.

$\vec{e}_i$  – векторы базиса.

$\overset{\circ}{e}_i$  и  $\widehat{e}_i$  – векторы базиса сопутствующей системы координат в начальном и конечном состояниях.

$e_{ij}$  – компоненты девиатора деформаций.

$\vec{F}$  и  $F_i$  – вектор внешней массовой силы, отнесенной к единице массы, и его компоненты.

$F_x, F_y, F_z$  и  $F_r, F_\alpha, F_z$  – компоненты вектора  $\vec{F}$  в прямоугольных декартовых и цилиндрических координатах.

$F_0, F, F_1$  – начальная, текущая, конечная площади поперечного сечения образца.

$F_K$  – площадь наименьшего поперечного сечения шейки в момент разрыва образца.

$G$  – модуль упругости второго рода (модуль сдвига, модуль касательной упругости).

$g$  и  $g_{ij}$  – метрический тензор и его компоненты.

$g_{ij}$  и  $\widehat{g}_{ij}$  – компоненты метрического тензора сопутствующей системы координат в начальном и конечном состояниях.

grad – градиент.

$h_0, h, h_1$  – начальная, текущая, конечная высота (толщина) образца.

$I_1, I_2, I_3$  – первый, второй, третий инварианты симметричного тензора второго ранга  $T$ .

$\overset{\circ}{I}_i$  и  $\widehat{I}_i$  – инварианты тензоров деформаций  $\overset{\circ}{T}_\varepsilon$  и  $\widehat{T}_\varepsilon$ .

$I_1(D), I_2(D), I_3(D)$  – первый, второй, третий инварианты девиатора.

$I_1(\overset{\circ}{T}_\varepsilon), I_1(\overset{\circ}{D}_\varepsilon)$  – инварианты тензора и девиатора скоростей деформаций.

$K$  – объемный модуль упругости.

$k$  – коэффициент теплопроводности.

$l_0, l, l_1$  – начальная, текущая, конечная длина образца.

$M$  – произвольная точка деформируемого тела. Крутящий момент.

$m$  – масса.

$N_B, N_M, N_\Pi, N_C$  – мощности внутренних, массовых, поверхностных сил, сил среза.

$\vec{n}$  и  $n_i$  – единичный вектор и его компоненты.

$P$  – шаровой (сферический) тензор. Сила, растягивающая (сжимающая) образец.

$P_\varepsilon$  – шаровой тензор деформации.

$P_\sigma$  – шаровой тензор напряжений.

$p$  – диагональные компоненты шарового тензора напряжений в прямоугольных декартовых координатах. Давление.

$\vec{p}$  и  $p_x, p_y, p_z$  – вектор поверхностного напряжения и его компоненты в прямоугольных декартовых координатах.

$p_n$  и  $\tau_n$  – нормальное и касательное поверхностные напряжения.

$Q$  – количество теплоты.

$Q_M$  и  $q_M$  – количество теплоты, выделяющееся во всем объеме тела и в единице его массы.

$Q_\Pi$  – тепловой поток через поверхность тела.

$q$  – параметр упрочнения.

$\vec{q}$  – вектор потока энергии в форме теплоты через плоскую поверхность единичной площади.

$\vec{r}$  – радиус-вектор.

rot – ротор (вихрь)

$S$  – энтропия, Дж/К.

$\vec{S}_n$  и  $S_{ni}$  – вектор напряжения на площадке с нормалью  $\vec{n}$  и его компоненты.

$S_{nx}$ ,  $S_{ny}$ ,  $S_{nz}$  – компоненты вектора  $\vec{S}_n$  в прямоугольных декартовых координатах.

$\vec{S}_i$  и  $\vec{S}_x$ ,  $\vec{S}_y$ ,  $\vec{S}_z$  – векторы напряжений на координатных площадках.

$s_i$  – главные компоненты девиатора напряжений.

$s_{ij}$  – компоненты девиатора напряжений.

$s_{xx}$ ,  $s_{yy}$ ,  $s_{zz}$ ,  $s_{xy}$ ,  $s_{yz}$ ,  $s_{zx}$  – компоненты девиатора напряжений в прямоугольных декартовых координатах.

$T$  – температура. Время релаксации.

$T$  и  $T_{ij}$  – тензор второго ранга и его компоненты.

$T_u$  – интенсивность тензора.

$T_i$  – главные компоненты симметричного тензора второго ранга.

$T_{xx}$ ,  $T_{yy}$ ,  $T_{zz}$ ,  $T_{xy}$ ,  $T_{yz}$ ,  $T_{zx}$  – компоненты симметричного тензора второго ранга в прямоугольных декартовых координатах.

$\overset{\circ}{T}_\varepsilon$ ,  $\widehat{T}_\varepsilon$ ;  $T_\xi$ ;  $T_\omega$ ;  $T_\sigma$  – тензоры деформаций; тензор скоростей деформаций; тензор скоростей вращения; тензор напряжений.

$t_0$ ,  $t$ ,  $t_1$  – начальный, текущий, конечный моменты времени.

$U$  и  $u$  – внутренняя энергия и ее плотность, отнесенная к единице массы.

$\vec{u}$  и  $u_i$  – вектор перемещения и его компоненты.

$u_x$ ,  $u_y$ ,  $u_z$  и  $u_r$ ,  $u_\alpha$ ,  $u_z$  – компоненты вектора перемещения в прямоугольных декартовых и цилиндрических координатах.

$V$  – объем.

$\vec{v}$  и  $v_i$  – вектор скорости и его компоненты.

$v_x$ ,  $v_y$ ,  $v_z$  и  $v_r$ ,  $v_\alpha$ ,  $v_z$  – компоненты вектора скорости в прямоугольных декартовых координатах и цилиндрических координатах.

$W_K$  – кинетическая энергия.

$x_i$  – координаты.

$\alpha$  – относительный температурный коэффициент линейного расширения. Полярный угол.

$\Gamma$  (гамма) – интенсивность деформаций сдвига.

$\gamma$  – угол сдвига.

$\Delta$  – приращение величины. Оператор Лапласа.

$\Delta h$  – абсолютное обжатие образца.

$\Delta l$  – абсолютное удлинение образца.

$\delta$  – относительный сдвиг.

$\delta_{ij}$  – символы Кронекера.

$\varepsilon$  – относительное удлинение при одноосном растяжении. Средняя деформация.

$\varepsilon_u$  – интенсивность деформаций.

$\varepsilon_T$  – деформационный предел текучести.

$\varepsilon_i$  – относительные удлинения в направлениях главных осей деформации.

$\varepsilon_n$  – относительное удлинение в направлении  $\vec{n}$ .

$\bar{\varepsilon}_n$  и  $\bar{\varepsilon}$  – логарифмическая деформация в направлении  $\vec{n}$  и в направлении оси образца при одноосном растяжении.

$\overset{\circ}{\varepsilon}_i$  и  $\widehat{\varepsilon}_i$  – главные компоненты тензоров деформаций  $\overset{\circ}{T}_\varepsilon$  и  $\widehat{T}_\varepsilon$ .

$\varepsilon_{ij}$  – компоненты тензоров деформаций.

$\varepsilon_{ijk}$  – компоненты (псевдо) тензора третьего ранга Леви-Чивита.

$\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{yz}, \varepsilon_{zx}$  – компоненты деформации в прямоугольных декартовых координатах.

$\overset{\circ}{\varepsilon}_{ij}$  и  $\widehat{\varepsilon}_{ij}$  – компоненты тензоров деформаций  $\overset{\circ}{T}_\varepsilon$  и  $\widehat{T}_\varepsilon$ .

$\varepsilon_{ij}^e$  и  $\varepsilon_{ij}^p$  – упругие и пластические (остаточные) деформации.

$N$  (эта) – интенсивность скоростей деформаций сдвига.

$\eta_i$  – главные оси симметричного тензора второго ранга  $T$ .

$\theta$  – относительное изменение объема. Модуль упрочнения.

$\lambda$  – постоянная Ламе. Коэффициент вытяжки (вытяжка).

$\mu$  – коэффициент Пуассона при упругой деформации. Коэффициент поперечной деформации при упруго-пластической деформации.

$\nu$  – вязкость, Н·с/мм<sup>2</sup>.

$\nu_\varepsilon$  и  $\nu_\sigma$  – коэффициенты Надаи-Лоде для деформаций и напряжений.

$\xi$  – средняя скорость деформации.

$\xi_u$  – интенсивность скоростей деформаций.  
 $\xi_n$  – скорость относительного удлинения в направлении  $\vec{n}$ .  
 $\xi_i$  – главные скорости деформации. Лангранжевы (сопутствующие) координаты.  
 $\xi_\theta$  – скорость относительного изменения объема.  
 $\xi_{ij}$  – компоненты тензора скоростей деформаций.  
 $\xi_{xx}, \xi_{yy}, \xi_{zz}, \xi_{xy}, \xi_{yz}, \xi_{zx}$  – компоненты скорости деформации в прямоугольных декартовых координатах.  
 $\xi_{ij}^e$  и  $\xi_{ij}^p$  – скорости упругих и пластических деформаций.  
 $\rho$  – плотность.  
 $\Sigma$  – поверхность.  
 $\Sigma_T$  – поверхность текучести.  
 $\Sigma_s$  – поверхность нагружения.  
 $\sigma$  – среднее напряжение (гидростатическое давление).  
 $\sigma_o$  – нормальное напряжение на октаэдрической площадке.  
 $\sigma_B$  – временное сопротивление.  
 $\sigma_u$  – интенсивность напряжений.  
 $\sigma_{ист}$ ,  $\sigma_{усл}$  – истинное и условное напряжения.  
 $\sigma_T$ ,  $\sigma_{s0}$ ,  $\sigma_{0,2}$ ,  $\sigma_s$  – физический, начальный, условный, текущий пределы текучести при линейном напряженном состоянии.  
 $\sigma_i$  – главные нормальные напряжения.  
 $\sigma_n$  – нормальное напряжение на площадке с нормалью  $\vec{n}$ .  
 $\sigma_{ij}$  – компоненты тензора напряжений.  
 $\sigma_{rr}, \sigma_{\alpha\alpha}, \sigma_{zz}, \sigma_{r\alpha}, \sigma_{\alpha z}, \sigma_{zr}$  – компоненты тензора напряжений в цилиндрических координатах.  
 $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{zx}$  – компоненты тензора напряжений в прямоугольных декартовых координатах.  
 $T$  (тау) – интенсивность касательных напряжений.  
 $\tau_o$  – касательное напряжение на октаэдрической площадке.  
 $\tau_k$  – касательное напряжение на контактной поверхности.  
 $\tau_T$ ,  $\tau_{s0}$ ,  $\tau_{0,2}$ ,  $\tau_s$  – физический, начальный, условный, текущий пределы текучести на сдвиг.  
 $\tau_{max}$  – максимальное главное касательное напряжение.  
 $\tau_n$  – касательное напряжение на площадке с нормалью  $\vec{n}$ .  
 $\tau_{12}, \tau_{23}, \tau_{31}$  – главные (экстремальные) касательные напряжения.  
 $\varphi$  – функция напряжений Эри.  
 $\psi_\xi$  и  $\psi_\sigma$  – углы вида деформированного и напряженного состояний.

## ГЛАВА 6. ОПЫТНЫЕ СВЯЗИ МЕЖДУ НАПРЯЖЕНИЯМИ И ДЕФОРМАЦИЯМИ

Уравнения состояния получают на основании опытов, поэтому их называют феноменологическими уравнениями состояния. В соответствии с основным постулатом теории пластичности уравнения состояния можно получить из опытов при однородном напряжённо-деформированном состоянии образцов. Наиболее простыми и распространёнными являются опыты на одноосное растяжение, одноосное сжатие и кручение. Поэтому при выводе уравнений состояния прежде всего необходимо получить феноменологические связи между напряжённым и деформированным состояниями в этих относительно простых опытах, чему и посвящается настоящая глава.

### 6.1. Диаграммы растяжения и некоторые эффекты, сопровождающие пластическую деформацию

#### 6.1.1. Испытания на растяжение и сжатие

Наиболее важные и типичные свойства деформируемого металла можно выявить в опытах на одноосное растяжение и сжатие. Начальная расчётная длина  $l_0$  рабочей части образца при растяжении обычно равна  $5d_0$  или  $10d_0$  (соответственно *короткие* и *длинные образцы*), где  $d_0$  - его начальный диаметр. Это практически обеспечивает однородность НДС (напряжённо-деформированного состояния) образца на его расчётной части до момента начала образований шейки при растяжении.

При сжатии достижение однородного НДС затрудняется трением между образцом и инструментом, для уменьшения которого применяется полировка контактных поверхностей, их смазка и другие приёмы. Испытание на растяжение проводят обычно в холодном состоянии, когда велико деформационное упрочнение, что отдаляет момент начала образования шейки. Влияние скорости на сопротивление деформации металла в холодном состоянии невелико, так что испытания на растяжение проводят с постоянной небольшой скоростью растяжения.

Испытание на сжатие проводят обычно в горячем состоянии, когда велико влияние скорости деформации. Специальные приборы – пластометры – сжимают образец с переменной скоростью (см. задачу 3.2), тем самым обеспечивая постоянство скорости деформации.

### 6.1.2. Индикаторная диаграмма и диаграмма условных напряжений

Индикаторная диаграмма (рис. 6.1) – это зависимость силы растяжения  $P$  от абсолютного удлинения  $\Delta l = l - l_0$ , где  $l$  - текущая длина расчётной части образца, на которой определяется удлинение.

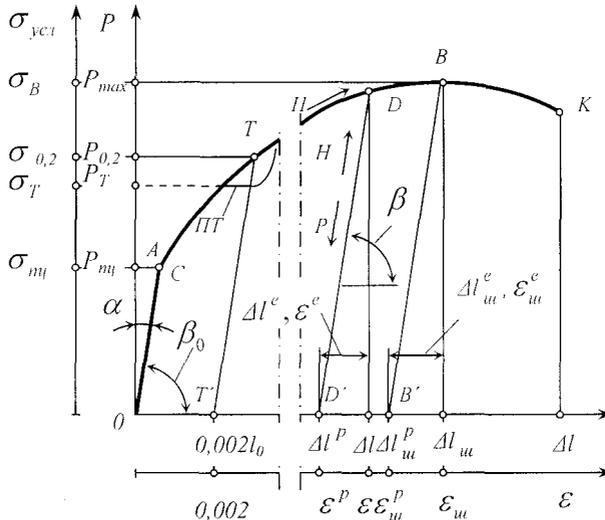


Рис. 6.1. Индикаторная диаграмма растяжения  $P = P(\Delta l)$  и диаграмма условных напряжений  $\sigma_{усл} = \sigma_{усл}(\varepsilon)$ :

$H$  - нагружение;  $P$  - разрузка;  $ПТ$  - площадка текучести

Чтобы устранить масштабный фактор, строят *диаграмму условных напряжений* – зависимость *условного напряжения*  $\sigma_{усл} = P / F_0$ , где  $F_0 = \pi d_0^2 / 4$  - начальная площадь поперечного сечения образца, от *относительного удлинения*  $\varepsilon = \Delta l / l_0$ . Строят также *диаграмму истинных напряжений* (кривую упрочнения первого рода): зависимость истинного напряжения  $\sigma_{ист} = \sigma_{xx} = P / F$  от *относительного удлинения*  $\varepsilon$ , где  $F$  - текущая площадь поперечного сечения образца. Истинное напряжение называют еще *сопротивлением металла деформации*.

Началу испытания соответствует точка  $O$  (рис. 6.1). Затем следует упругая деформация, когда соблюдается закон Гука. На-

клон начального прямолинейного участка диаграммы ОС к оси деформаций находится в соответствии с формулой

$$\operatorname{tg} \beta_0 = \frac{Pm}{\Delta l \cdot n} = \frac{Pm}{(Pl_0 / EF_0)n} = E \frac{F_0}{l_0} \frac{m}{n},$$

где  $m$  [мм диаграммы/Н] - масштаб диаграммы по оси нагрузок,  $n$  [мм диаграммы/мм удлинения] – масштаб диаграммы по оси деформаций.

Здесь использован закон Гука для одноосного растяжения: абсолютное удлинение  $\Delta l$  прямо пропорционально силе растяжения  $P$ , длине образца  $l_0$  и обратно пропорционально площади поперечного сечения образца  $F_0$ ;  $E$  (Н/мм<sup>2</sup>) – *модуль упругости первого рода*, или *модуль продольной упругости*, или *модуль Юнга*.

Однако уже при небольших напряжениях начинается движение отдельных дислокаций, что приводит к появлению *небольшой остаточной, пластической деформации*. Прямая пропорциональность между  $P$  и  $\Delta l$  нарушается. Точка  $A$  соответствует *пределу пропорциональности*  $\sigma_{nc} = P_{nc} / F_0$ . Её положение на индикаторной диаграмме определяется из условия  $\operatorname{tg} \alpha_{nc} = 1,5 \operatorname{tg} \alpha$ , где  $\alpha_{nc}$  - угол между осью  $OP$  и касательной к кривой  $P = P(\Delta l)$  в точке  $A$  (на рис. 6.1 не показан).

Точка  $T$  соответствует *условному пределу текучести*  $\sigma_{0,2} = P_{0,2} / F_0$ . При этом в большинстве зёрен металла начинается процесс скольжения, а остаточное удлинение равно 0,2 %. Прямая  $TT'$  практически параллельна ОС.

Иногда (например, при испытании низкоуглеродистой отожжённой стали) диаграмма растяжения имеет площадку текучести, когда образец удлиняется, а сила не увеличивается, т.е.  $P = P_T$ . При этом условное напряжение  $\sigma_T = P_T / F_0$  называется *физическим пределом текучести*.

За пределом текучести следует дальнейшее развитие пластической деформации и происходит *упрочнение металла*. Рассмотрим точку  $D$ , изображающую НДС образца в рассматриваемый момент времени. Произведём в точке  $D$  разгрузку. Линия разгрузки  $DD'$  практически прямая.

Теперь начнём нагружение из точки  $D'$ . Линия нагружения практически совпадает с  $D'D$ . При этом пределы пропорциональности и текучести повысятся по сравнению с начальными значениями в точках  $A$  и  $T$ . Они будут иметь порядок  $P_D / F$ , где  $P_D$  - сила, соответствующая точке  $D$ . Далее изображающая НДС точка будет двигаться по кривой  $DB$ . Если в точке  $D$  разгрузку не производить, то линия нагружения за точкой  $D$  также совпадает с  $DB$ . При этом НДС образца является однородным, его диаметр уменьшается равномерно по длине. При нагружении имеет место *активная деформация*, а при разгрузке - *пассивная*.

Суммарная деформация в точке  $D$  складывается из упругой и пластической (остаточной) деформации:

$$\Delta l = \Delta l^e + \Delta l^p, \quad \varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p, \quad (6.1)$$

где упругая составляющая абсолютного удлинения в соответствии с законом Гука равна

$$\Delta l^e = \frac{P(l_0 + \Delta l^p)}{EF}. \quad (6.2)$$

Подставим это выражение в первую формулу (6.1). Получим линейное относительно  $\Delta l^p$  уравнение, решая которое найдём

$$\Delta l^p = \frac{EF \Delta l - Pl_0}{EF + P}. \quad (6.3)$$

Подставим это выражение в формулу (6.2). Получим окончательно упругую составляющую абсолютного удлинения

$$\Delta l^e = \frac{P(l_0 + \Delta l)}{EF + P} = \frac{Pl}{EF + P}. \quad (6.4)$$

На упругом участке  $OC$  диаграммы по формуле (6.3) при  $F = F_0$  и  $\Delta l = Pl_0 / EF_0$  получим  $\Delta l^p = 0$ , что и следовало ожидать. А формула (6.4) на этом участке изображает закон Гука  $\Delta l = Pl_0 / EF_0$ , если пренебречь силой растяжения  $P \ll EF_0$ .

Упругая составляющая относительного удлинения с учётом (6.2) и (6.4) равна:

$$\varepsilon^e = \frac{\Delta l^e}{l_0 + \Delta l^p} = \frac{P}{EF},$$

или  $\varepsilon^e = \frac{\sigma_{xx}}{E}$ . (6.5)

Пластическая составляющая относительного удлинения равна:

$$\varepsilon^p = \varepsilon - \varepsilon^e = \frac{\Delta l}{l_0} - \frac{\Delta l - \Delta l^p}{l_0 + \Delta l^p} = \frac{\Delta l^p (l_0 + \Delta l)}{l_0 (l_0 + \Delta l^p)}.$$

Так как при больших деформациях  $\Delta l^p = \Delta l$ , то

$$\varepsilon^p = \frac{\Delta l^p}{l_0}. \quad (6.6)$$

Наклон линии разгрузки  $DD'$  к оси  $\Delta l$  определяется с учётом (6.4) формулой:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{Pm}{\Delta l^e n} = \frac{(EF + P)m}{l \cdot n} \approx E \frac{F}{l} \frac{m}{n},$$

т.е. линия разгрузки  $DD'$  не параллельна начальному упругому участку  $OC$  диаграммы. Обратим внимание также на то, что интенсивность упрочнения  $dP/d(\Delta l)$  уменьшается с увеличением деформации.

При некотором удлинении  $\Delta l_{uu}$  (индекс “ $u$ ” от слова “шейка”) случайное местное уменьшение диаметра образца (“блуждающая шейка”) уже не будет компенсировано за счёт дополнительного упрочнения металла в этом месте. Здесь и начнётся образование шейки (рис. 6.2).

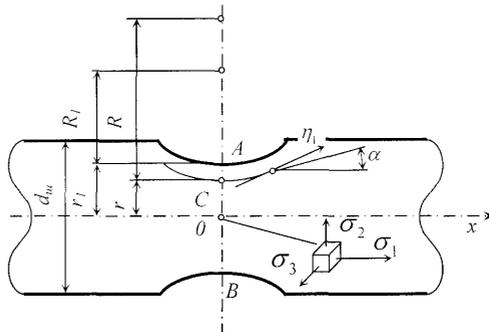


Рис. 6.2. Геометрия шейки при растяжении

Моменту начала образования шейки соответствует точка  $B$  (рис.6.1). Далее удлиняется практически только область шейки. Соответственно и диаметр уменьшается только здесь. Вне области шейки диаметр не меняется, он равен  $d_{uu}$  - диаметру образца в момент начала образования шейки. Таким образом, часть диаграммы растяжения  $OATB$  соответствует периоду равномерного удлинения образца. Этот период невелик:  $\varepsilon_{uu} = \Delta l_{uu} / l_0$  редко достигает 0,3. Это основной недостаток испытания на растяжение.

Поскольку удлинение за точкой  $B$  сосредоточено на небольшой длине шейки (примерно  $1,5d_0$ ), происходит интенсивное уменьшение её диаметра  $2r_1$ . По этой причине, а также из-за дальнейшего уменьшения интенсивности упрочнения сила  $P$  за точкой  $B$  уменьшается. Моменту начала образования шейки соответствует максимальная сила растяжения образца  $P_{max}$ . Поэтому

$$\left[ \frac{dP}{d(\Delta l)} \right]_{uu} = \left( \frac{dP}{dl} \right)_{uu} = \left( \frac{d\sigma_{усл}}{d\varepsilon} \right)_{uu} = 0. \quad (6.8)$$

Условное напряжение в этот момент называется *временным сопротивлением*

$$\sigma_B = (\sigma_{усл})_{max} = P_{max} / F_0. \quad (6.9)$$

В центре шейки металл находится в состоянии всестороннего растяжения, поэтому пластичность его мала, и вскоре в наименьшем сечении шейки наступает разрыв образца (точка  $K$ ). Таким образом, часть диаграммы растяжения  $BK$  соответствует периоду сосредоточенного удлинения образца.

### 6.1.3. Некоторые эффекты, сопровождающие пластическую деформацию

Рассмотрим теперь некоторые эффекты, возникающие при пластической деформации, которые могут быть учтены в уравнениях состояния.

1) Отсутствие однозначной связи между напряжениями и деформациями при пластической деформации. Это очень важный эффект, отличающий пластическую деформацию от упругой, когда между напряжениями и деформациями есть однозначная связь, отображаемая законом Гука. Одному и тому же значению напряжения  $\sigma_{xx}^{(1)}$  (рис. 6.3) может соответствовать бесчисленное множе-

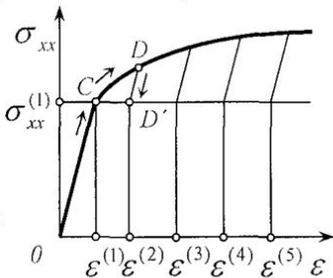


Рис. 6.3. Отсутствие однозначной связи между напряжениями и деформациями при пластической деформации

ство значений деформации  $\varepsilon^{(1)}, \varepsilon^{(2)}$  и т.д. в зависимости от процесса деформации. Например, нагружение по линии  $OC$  даёт деформацию  $\varepsilon^{(1)}$ ; нагружение по линии  $OCD$ , а затем разгрузка по линии  $DD'$  даёт деформацию  $\varepsilon^{(2)}$  и т.д.

2) Деформационная анизотропия. Каждое зерно обладает *анизотропией свойств*, т.е. его свойства различны в разных направлениях. Но поскольку в начальном состоянии образец состоит из большого количества равноосных зёрен, кристаллические решетки

которых ориентированы друг относительно друга случайным образом, в целом свойства образца изотропны, правильнее – квазиизотропны (от латинского *quasi* – якобы, мнимый).

Однако в процессе пластической деформации зёрна поворачиваются так, чтобы преимущественные плоскости скольжения совпали с площадками действия  $\tau_{max}$ . В результате поликристаллический образец становится похожим на монокристалл, разделённый на кристаллиты границами зёрен. Поэтому его свойства уже различны в разных направлениях – в результате пластической деформации возникает *деформационная анизотропия*.

3) Остаточные напряжения В начальный момент времени в образце нет напряжений. До момента образования шейки НДС образца однородно лишь в среднем, так как НДС разных зёрен различно. На рис. 6.4 показаны диаграммы растяжения зёрен 1 и 2.

Зерно 1 имеет большее сопротивление деформации, чем зерно 2. Поэтому зерно 1 называют “сильным”, а зерно 2 – “слабым”.

Произведём в момент времени  $t_1$  (до образования шейки) разгрузку образца. Если бы зёрна 1 и 2 были свободны, то линиями разгрузки для них являлись бы прямые  $CC'$  и  $DD'$  соответственно. Но после разгрузки остаточные деформации обоих зёрен должны быть одинаковы и равны остаточной деформации образца в целом (точка  $H$ ). Поэтому линией разгрузки зерна 1 будет  $CC''$ , и в нём после разгрузки будут растягивающие остаточные на-

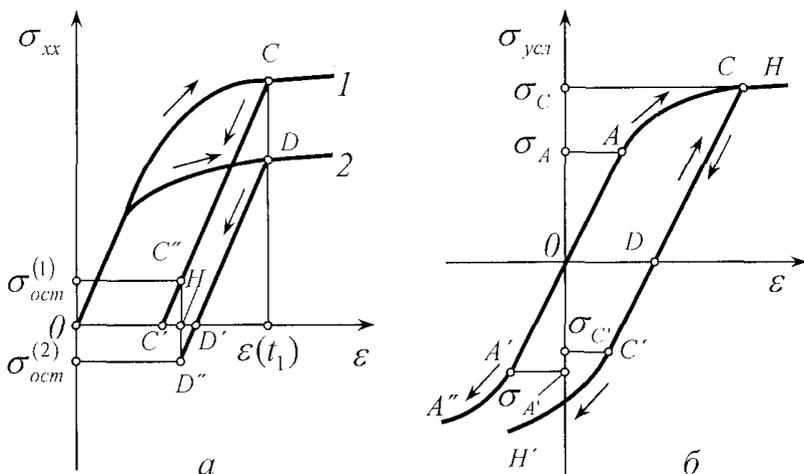


Рис. 6.4. Возникновение остаточных напряжений (а) и эффект Баушингера (б)

пряжения  $\sigma_{osc}^{(1)}$ . Линией разгрузки зерна 2 будет  $DD'D''$ , и в нём после разгрузки будут сжимающие остаточные напряжения  $\sigma_{osc}^{(2)}$ . Таким образом, в результате пластической деформации в образце появляются *остаточные напряжения* и соответственно остаточные упругие деформации (в зерне 1  $C'H > 0$ , в зерне 2  $HD' < 0$ ).

4) Эффект Баушингера. При малых упруго-пластических деформациях квазиизотропного образца диаграммы растяжения  $OACH$  (рис. 6.4, б) и сжатия  $OA'A''$  симметричны, пределы пропорциональности при растяжении  $\sigma_A$  и сжатии  $\sigma_{A'}$  равны по абсолютной величине.

Растянем образец за пределом пропорциональности до точки  $C$  ( $\sigma_C$  значительно меньше временного сопротивления), затем произведём разгрузку по линии  $CD$ . Предел пропорциональности этого деформированного образца при растяжении равен  $\sigma_C$  и больше начального предела пропорциональности на растяжение  $\sigma_A$ .

Подвергнем такой образец из точки  $D$  сжатию за предел пропорциональности  $\sigma_{C'}$ . Его диаграмма сжатия  $DC'H'$  уже не симметрична диаграмме растяжения  $DCH$ , так как  $\sigma_C > |\sigma_{C'}|$ . Пре-

дел пропорциональности  $\sigma_{C'}$  меньше также и начального предела пропорциональности на сжатие  $\sigma_{A'}$  (по абсолютной величине).

Таким образом, пластическая деформация металла приводит к увеличению предела пропорциональности при повторной деформации того же знака и уменьшению его при повторной деформации противоположного знака. В этом и заключается *эффект Баушингера*, связанный с появлением деформационной анизотропии, обусловленной наличием остаточных напряжений в результате предвараительной деформации.

Действительно, при растяжении с последующей разгрузкой по линии *OACD* в слабых зёрнах появляются сжимающие остаточные напряжения. Поэтому при повторном растяжении по линии *DCH* предел пропорциональности увеличивается. А при повторном сжатии по линии *DC'H'* деформация уже сжатых слабых зёрен облегчается, поэтому и предел пропорциональности тоже уменьшается.

Точно так же пластическая деформация металла влияет и на изменение предела текучести при повторной деформации: на рис. 6.4, б величины  $\sigma_A, \sigma_C, \sigma_{A'}, \sigma_{C'}$  можно рассматривать как пределы текучести.

5) Влияние температуры и скорости деформации (рис. 6.5). Обычно это влияние изучают в опытах на сжатие, так как при высоких температурах деформационное упрочнение невелико, и образование шейки начинается практически сразу же после начала растяжения образца. Строят графические зависимости сопротивления металла деформации  $|\sigma_{xx}| = f(\varepsilon, \xi_{xx}, T)$  (рис. 6.5), где  $\varepsilon = \Delta h / h_0 = (h_0 - h) / h_0$  - относительное обжатие образца.

Чем выше температура, тем меньше деформационное упрочнение и сопротивление металла деформации, так как увеличивается разупрочнение металла, ускоряются процессы рекристаллизации, диффузии и залечивания микротрещин, увеличиваются пластичность металла и доля межзёрненной деформации (взаимное смещение и поворот зёрен). С увеличением температуры начинает проявляться *вязкость* металла, т.е. увеличение  $|\sigma_{xx}|$  с ростом скорости деформации.

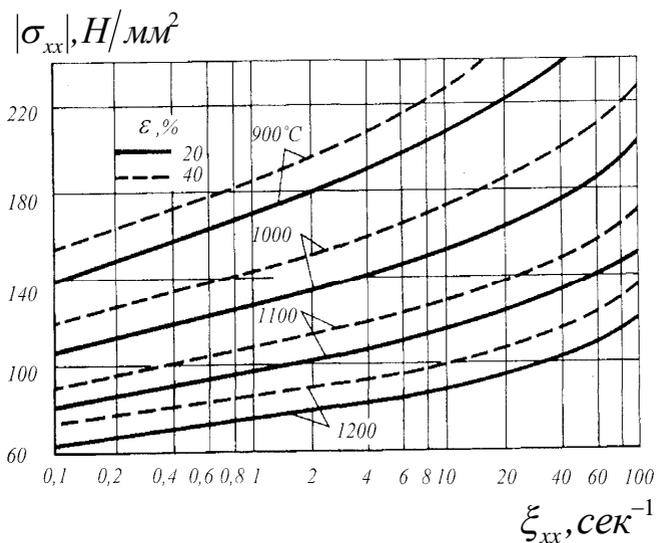


Рис. 6.5. Влияние температуры, степени и скорости деформации на сопротивление деформации при сжатии стали X18H9T (по А.В. Третьякову и В.И. Зюзину)

Таким образом, если при холодной деформации (температура ниже  $0,3T_{\text{плавл}}$ , °K) сопротивление металла деформации определяется главным образом его упругими и пластическими свойствами, то при повышенных температурах и особенно при горячей деформации (выше  $0,7 T_{\text{плавл}}$ , °K) существенным становится влияние вязких свойств.

б) *Ползучесть*. Проявляется обычно при повышенных температурах. Приложим у образцу постоянную растягивающую силу  $P$ , при которой  $P/F_0$  меньше предела текучести. Под действием этой силы в начальный момент времени образец получит упругую деформацию  $\varepsilon_0$  (рис. 6.6, а).

Однако со временем появляется остаточная деформация, которая увеличивается: на участке  $ACB$  равномерно по длине образца, в точке  $B$  образуется шейка, а в конечный момент времени  $t_1$  (точка  $K$ ) происходит разрыв. Медленное увеличение остаточной деформации при напряжениях меньше предела текучести называется *ползучестью*.

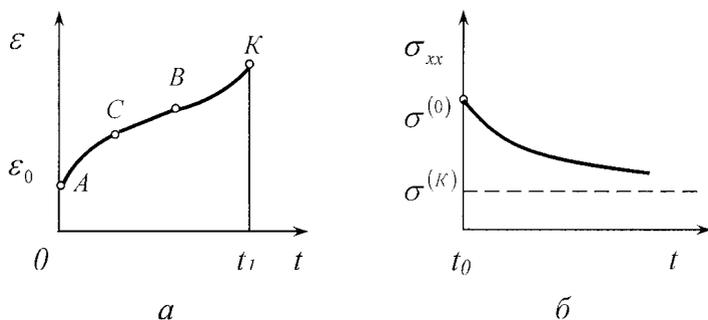


Рис. 6.6. Ползучесть (а) и релаксация напряжений (б)

При ползучести происходит непрерывный переход упругой деформации в пластическую за счёт движения дислокаций при напряжениях меньше макроскопического предела текучести.

7). Релаксация напряжений. Будем растягивать образец. В какой-то момент времени (до образования шейки), который примем за начальный, когда  $\sigma_{xx} = \sigma^{(0)}$ , зафиксируем деформацию образца (рис. 6.6, б). Вследствие ползучести упругая составляющая деформации перейдёт со временем в пластическую (полностью или частично), а напряжение уменьшится (до нуля или до  $\sigma^{(K)}$ ).

Медленное уменьшение напряжений при постоянной длине образца называется *релаксацией напряжений*. Ползучесть и релаксация напряжений – это проявление вязких свойств металла при повышенных температур

### Контрольные вопросы

1. Что значит задать процессы деформации и нагружения тела? Почему эти процессы не могут быть заданы независимо друг от друга?
2. В чём заключается принцип макроскопической определенности – основной постулат теории пластичности?
3. Что такое уравнения состояния и для чего они нужны? Запишите их в общем виде на основании принципа макроскопической определенности.
4. Каковы преимущества и недостатки испытаний на растяжение и сжатие?
5. Что такое индикаторная диаграмма и диаграмма условных напряжений? Укажите характерные точки этих диаграмм и соответствующие им деформации и силы (напряжения). Почему образуется шейка?

6. Что такое условное напряжение, истинное напряжение, сопротивление деформации?
7. На примере диаграммы растяжения поясните, что такое активная и пассивная деформация. Найдите угол между линией разгрузки и осью деформаций на диаграмме условных напряжений.
8. Почему при пластической деформации нет однозначной связи между напряжениями и деформациями?
9. Что такое деформационная анизотропия и текстура деформации?
10. Почему в результате пластической деформации появляются остаточные напряжения и остаточные упругие деформации?
11. В чём заключается эффект Баушингера и чем он объясняется?
12. Какие свойства металла определяют его сопротивление холодной и горячей деформации?
13. Что такое ползучесть металла и каковы её причины?
14. Что такое релаксация напряжений и чем она объясняется?

## **6.2. Диаграммы деформирования**

*Диаграмма деформирования* — зависимость интенсивности напряжении  $\sigma_u$  от интенсивности деформаций  $\varepsilon_u$  (рис. 6.7) строится на основании индикаторной диаграммы. Эта зависимость необходима для обобщения уравнений состояния на объёмное НДС.

### **6.2.1. Построение диаграммы деформирования с учётом упругости и сжимаемости**

Вначале построим диаграмму деформирования с учётом сжимаемости при малых упруго-пластических деформациях, когда упругие и пластические составляющие деформации имеют одинаковый порядок (калибровка прутков, дрессировка полосы, получение гнутых профилей и др.). Воспользуемся теорией бесконечно малых деформаций (см. часть 1, п. 2.3).

Интенсивность напряжений равна  $\sigma_u = \sigma_{xx} = P / F$ . Текущая площадь поперечного сечения определяется относительным удлинением  $\varepsilon$  и коэффициентом поперечной деформации  $\mu'$  (задача 6.1):

$$F = F_0(1 - \mu'\varepsilon)^2 \approx F_0(1 - 2\mu'\varepsilon). \quad (6.10)$$

Коэффициент поперечной деформации  $\mu'$  при упругой деформации равен коэффициенту Пуассона  $\mu$ , а за пределом пропорциональности постепенно увеличивается до значения 0,5 (задача 6.2, рис. 6.8):

$$\mu' = \frac{1}{2} - \frac{1-2\mu}{2E} \cdot \frac{\sigma_{xx}}{\varepsilon} \quad (6.11)$$

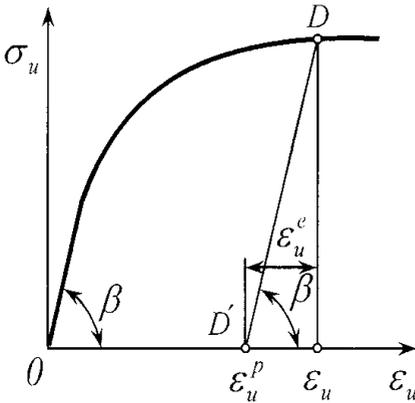


Рис. 6.7. Диаграмма деформирования

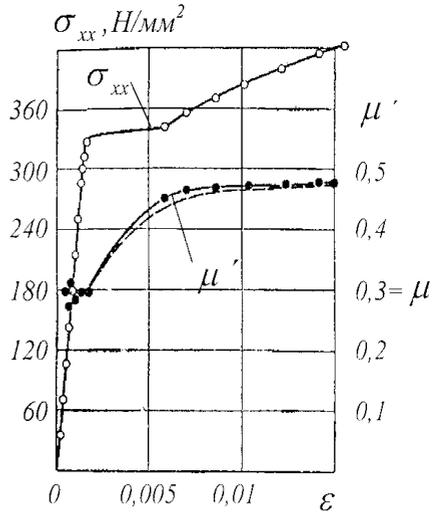


Рис. 6.8. Опытные диаграммы истинных напряжений  $\sigma_{xx} = \sigma_{xx}(\varepsilon)$  и коэффициента поперечной деформации  $\mu'$  и построенная по формуле (6.11) зависимость  $\mu = \mu'(\varepsilon)$  для стали 30 (штриховая линия) (по А.М. Жвковн)

Подставим в формулу  $\sigma_{xx} = P/F$  приближённое выражение  $F$  по формуле (6.10), а затем заменим  $\mu'$  по формуле (6.11). Получим квадратное относительно  $\sigma_{xx}$  уравнение, решая которое найдём

$$\sigma_u = \sigma_{xx} = \frac{\sqrt{(1-\varepsilon)^2 + \frac{4(1-2\mu)}{E} \cdot \frac{P}{F_0}} - (1-\varepsilon)}{2(1-2\mu)/E}. \quad (6.12)$$

При одноосном растяжении  $\varepsilon_1 = \varepsilon$ ,  $\varepsilon_2 = -\mu'\varepsilon$ ,  $\varepsilon_3 = \varepsilon_2$ . Подставим эти выражения главных деформаций в формулу (2.81)

$$\varepsilon_u = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}.$$

Заменим далее  $\mu'$  по формуле (6.11). Получим интенсивность деформаций при одноосном растяжении, когда деформации малы:

$$\varepsilon_u = \varepsilon - \frac{1-2\mu}{3E} \sigma_{xx}. \quad (6.13)$$

По формулам (6.12) и (6.13), имея индикаторную диаграмму, строим диаграмму деформирования (рис. 6.7). В произвольной точке  $D$

$$\varepsilon_u = \varepsilon_u^e + \varepsilon_u^p, \quad (6.14)$$

где  $\varepsilon_u^e$  - интенсивность упругих деформаций с учётом (6.13) и (6.5) равна:

$$\varepsilon_u^e = \varepsilon^e - \frac{1-2\mu}{3} \cdot \frac{\sigma_{xx}}{E} = \frac{\sigma_{xx}}{E} - \frac{1-2\mu}{3} \cdot \frac{\sigma_{xx}}{E} = \frac{2(1+\mu)}{3} \cdot \frac{\sigma_u}{E}, \quad (6.15)$$

а  $\varepsilon_u^p$  - интенсивность пластических деформаций с учетом (6.13) и (6.15) равна:

$$\varepsilon_u^p = \varepsilon_u - \varepsilon_u^e = \varepsilon - \frac{1-2\mu}{3} \cdot \frac{\sigma_u}{E} - \frac{2(1+\mu)}{3} \cdot \frac{\sigma_u}{E} = \varepsilon - \frac{\sigma_u}{E}. \quad (6.16)$$

Наклон линий разгрузки  $DD'$  одинаков для всей диаграммы:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\sigma_u m}{\varepsilon_u^e n} = \frac{3}{2(1+\mu)} E \frac{m}{n}. \quad (6.17)$$

С помощью формулы (6.12), имея индикаторную диаграмму, можно построить также диаграмму истинных напряжений

$\sigma_{xx} = \sigma_{xx}(\varepsilon)$  (кривую упрочнения первого рода) при малых упруго-пластических деформациях.

**Задача 6.1. Площадь поперечного сечения образца при растяжении**

Определить изменение площади  $F = \pi d^2 / 4$  поперечного сечения образца при растяжении.

Решение. В начальный момент времени  $F = F_0 = \pi d_0^2 / 4$ . С увеличением деформации  $\varepsilon$  площадь  $F$  уменьшается тем интенсивнее, чем больше коэффициент поперечной деформации

$$\mu' = -\frac{\varepsilon_{yy}}{\varepsilon_{xx}} = \frac{|\Delta d / d_0|}{|\Delta l / l_0|} = (d_0 - d) / d_0 \varepsilon,$$

откуда текущий диаметр равен  $d = d_0(1 - \mu'\varepsilon)$ . Тогда текущая площадь поперечного сечения равна

$$F = \frac{\pi d_0^2 (1 - \mu'\varepsilon)^2}{4} = F_0 (1 - \mu'\varepsilon)^2.$$

Полученная формула справедлива при малых деформациях.

**Задача 6.2. Коэффициент поперечной деформации**

Определить изменение коэффициента поперечной деформации  $\mu'$  при растяжении за пределом пропорциональности.

Решение. При упругой деформации  $\mu'$  равен коэффициенту Пуассона  $\mu$ . За пределом пропорциональности появляется пластическая деформация, которая протекает без изменения объёма. Поэтому за пределом пропорциональности  $\mu'$  увеличивается, приближаясь с ростом  $\varepsilon$  к 0,5. Как показывают опыты,  $\mu'$  становится практически равным 0,5 при деформации менее 10%, поэтому воспользуемся формулами теории бесконечно малых деформаций. Получим

$$\mu' = -\frac{\varepsilon_{yy}}{\varepsilon_{xx}} = -\frac{\varepsilon_{yy}^e + \varepsilon_{yy}^p}{\varepsilon_{xx}} = -\frac{\varepsilon_{yy}^e / \varepsilon_{xx}^e}{\varepsilon_{xx} / \varepsilon_{xx}^e} - \frac{\varepsilon_{yy}^p / \varepsilon_{xx}^p}{\varepsilon_{xx} / \varepsilon_{xx}^p}. \quad (6.18)$$

Заменяя  $(-\varepsilon_{yy}^e / \varepsilon_{xx}^e) = \mu$ ,  $(-\varepsilon_{yy}^p / \varepsilon_{xx}^p) = 1/2$  найдём, что

$$\mu' = \frac{\mu}{\varepsilon_{xx} / \varepsilon_{xx}^e} + \frac{1/2}{\varepsilon_{xx} / (\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{xx}^e)}. \quad (6.19)$$

Заменяя далее  $\varepsilon_{xx} = \varepsilon$  и  $\varepsilon_{xx}^e = \sigma_{xx} / E$ , получим окончательно по формулу (6.11). При упругой деформации  $\sigma_{xx} / \varepsilon = E$ , и формула (6.11) дает  $\mu' = \mu$ . Имея диаграмму истинных напряжений  $\sigma_{xx} = \sigma_{xx}(\varepsilon)$ , по формуле (6.11) построим график  $\mu' = \mu'(\varepsilon)$  (см. рис. 6.8). На рис. 6.8 показана также (сплошной линией с чёрными точками) опытная зависимость  $\mu'$  от  $\varepsilon$ . Видна хорошая сходимость опытных и расчётных данных для  $\mu'$ .

### 6.2.2. Построение диаграммы деформирования при условии несжимаемости

В процессах ОМД деформации обычно большие. При этом доля упругой деформации невелика, и коэффициент поперечной деформации  $\mu'$  близок к  $1/2$  (рис. 6.8), поэтому можно принять условие несжимаемости

$$F_0 l_0 = Fl = const, \quad (6.20)$$

откуда найдем текущую площадь поперечного сечения

$$F = \frac{F_0 l_0}{l} = \frac{F_0 l_0}{l_0 + \Delta l} = \frac{F_0}{1 + \varepsilon}. \quad (6.21)$$

Интенсивность напряжений равна

$$\sigma_u = \sigma_{xx} = \frac{P}{F} = \frac{P}{F_0} (1 + \varepsilon); \quad \sigma_u = \sigma_{ysl} (1 + \varepsilon). \quad (6.22)$$

Интенсивность конечных деформаций при одноосном растяжении равна [формула (3.74), ч.1]

$$\varepsilon_u = \ln \frac{l}{l_0} = \ln \frac{l_0 + \Delta l}{l_0}; \quad \varepsilon_u = \ln(1 + \varepsilon) = \bar{\varepsilon}, \quad (6.23)$$

где  $\bar{\varepsilon}$  - логарифмическая деформация в направлении оси образца. Построенная по формулам (6.22) и (6.23) диаграмма деформирования имеет такой же вид, как и на рис. 6.7, изменяется лишь масштаб. Наклон линий разгрузки  $DD'$  одинаков для всей диаграммы и определяется формулой:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\sigma_u m}{\varepsilon_u^e n} = \frac{\sigma_{xx} m}{\varepsilon_u^e n} = E \frac{m}{n}.$$

Интенсивность деформаций складывается из интенсивности упругих деформаций  $\varepsilon_u^e$  и интенсивности пластических деформаций  $\varepsilon_u^p$ :

$$\varepsilon_u = \ln \frac{l}{l_0} = \varepsilon_u^e + \varepsilon_u^p = \ln \frac{l}{l_0 + \Delta l^p} + \ln \frac{l_0 + \Delta l^p}{l_0}. \quad (6.24)$$

Формулы (6.20) – (6.24) справедливы до точки  $B$  включительно (рис. 6.1). В точке  $B$  на образце появляется шейка. На участке сосредоточенного удлинения  $BK$  интенсивности  $\varepsilon_u$  и  $\sigma_u$  находим для наименьшего сечения шейки  $AB$  (рис. 6.2).

Предположим, что деформированное состояние в этом сечении однородно. Тогда интенсивность деформаций в нём можно приравнять интенсивности деформаций образца, который равномерно удлинялся до тех пор, пока площадь его поперечного сечения стала равной площади наименьшего сечения шейки  $F_{min} = \pi r_1^2$ :

$$\varepsilon_u = \ln \frac{l}{l_0} = \ln \frac{F_0}{F} = \ln \frac{F_0}{F_{min}}. \quad (6.25)$$

В шейке главные нормальные напряжения растягивающие. Тогда при  $\sigma_2 = \sigma_3$  (что в центре шейки соблюдается точно) по формуле (4.42), ч.1:

$$\sigma_u = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

получим, что  $\sigma_u = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_1 \cdot \eta = \sigma_{xx} \eta = \left( \frac{P}{F_{min}} \right) \eta$ , где  $\eta < 1$ .

Из анализа напряжённого состояния шейки (см. задачу 6.4) получим

$$\sigma_u = \frac{P}{F_{min}} \eta = \frac{P / F_{min}}{1 + (r_1 / 4R_1)}. \quad (6.26)$$

Коэффициент  $\eta$  равен единице в момент начала образования шейки, когда  $R_1 \rightarrow \infty$  и  $F = F_u = \pi d_u^2 / 4$ , и уменьшается с увеличением сосредоточенного удлинения (рис. 6.9).

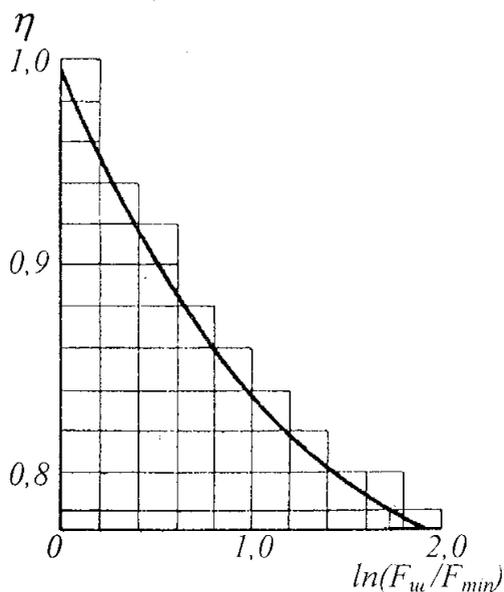


Рис. 6.9. Зависимость коэффициента  $\eta$  [формула (6.26)] от величины

$$\ln(F_u/F_{min}) \text{ (по Г.А. Смирнову-Аляеву)}$$

По формулам (6.25) и (6.26) диаграмма деформирования строится на участке сосредоточенного удлинения. Радиусы  $R_1$  и  $r_1$  можно определить при помощи киносъёмки или останавливая растяжение образца при определённом  $\Delta l$  и замеряя их, а также другими способами. Если пользоваться рис. 6.9, достаточно измерять лишь  $r_1$ . Часто ограничиваются определением  $\sigma_u$  и  $\varepsilon_u$  после начала образования шейки лишь в точке разрыва  $K$  (см. рис. 6.1). Для определения  $R_1$  и  $r_1$  половинки разорванного образца плотно прижимают друг к другу. При этом упругая деформация не учитывается.

### Задача 6.3. Потеря устойчивости при растяжении

Найти условие, при котором на растягиваемом образце появляется шейка.

Решение. В момент начала образования шейки сила растяжения образца  $P = \sigma_{xx} F$  имеет максимальное значение (рис. 6.1, точка В). Поэтому, здесь  $dP = F d\sigma_{xx} + \sigma_{xx} dF = 0$ , откуда

$$\frac{d\sigma_{xx}}{(-dF/F)} = \sigma_{xx}. \text{ Из условия несжимаемости (6.20) получим}$$

$$l dF + F dl = 0, \text{ откуда, учитывая (6.23),}$$

$$-\frac{dF}{F} = \frac{dl}{l} = d\left(\ln \frac{l}{l_0}\right) = d\bar{\varepsilon} = \frac{d\varepsilon}{1+\varepsilon}.$$

Тогда искомое условие примет вид

$$\boxed{d\sigma_{xx} / d\varepsilon = \sigma_{xx} / (1 + \varepsilon)}. \quad (6.27)$$

Часто кривую истинных напряжений  $\sigma_{xx} = \sigma_{xx}(\varepsilon)$  аппроксимируют степенной зависимостью  $\sigma_{xx} = C \varepsilon^n$ , где  $n$  – *показатель деформационного упрочнения*. Подставляя это выражение  $\sigma_{xx}$  в (6.27), получим, что шейка на образце появляется при относительном удлинении

$$\varepsilon_u = \Delta l_u / l_0 = n / (1 - n). \quad (6.28)$$

Из этой формулы видно, что период равномерного удлинения образца тем больше, чем больше деформационное упрочнение.

### Задача 6.4. Напряжённое состояние шейки

Найти напряжённое состояние шейки в период сосредоточенного удлинения образца.

Решение (по Н.Н. Давиденкову и Н.И. Спиридоновой). Задачу будем решать в цилиндрических координатах (рис. 1.5, ч.1). Ось  $z$  направим по оси образца и назовём её осью  $x$  (рис. 6.2). Обозначим через  $r_1$  радиус наименьшего сечения шейки  $AB$ , а через  $R_1$  – радиус кривизны контура шейки в точке  $A$ . Тогда площадь наименьшего сечения равна  $F_{min} = \pi r_1^2$ . НДС шейки является осесимметричным, так что матрица физических компонент тензора напряжений в соответствии с (4.16) имеет вид

$$(\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & 0 & \sigma_{rx} \\ 0 & \sigma_{\alpha\alpha} & 0 \\ \sigma_{xr} & 0 & \sigma_{xx} \end{pmatrix}. \quad (6.29)$$

Тогда первое дифференциальное уравнение равновесия [см. уравнения (5.54), ч.1] примет вид:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rx}}{\partial x} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\alpha\alpha}}{r} = 0. \quad (6.30)$$

Запишем это уравнение для наименьшего сечения шейки  $AB$ , в котором  $\sigma_1 = \sigma_{xx}$ ,  $\sigma_2 = \sigma_{\alpha\alpha}$ ,  $\sigma_3 = \sigma_{rr}$ . При решении осесимметричных задач обычно принимают так называемое *условие полной пластичности*, когда два главных нормальных напряжения равны. В нашей задаче  $\sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_{\alpha\alpha} = \sigma_{rr}$ . Тогда третье слагаемое в левой части (6.30) равно нулю.

Проведём через произвольную точку  $C$  наименьшего сечения шейки  $AB$  линию  $\eta_1$  действия  $\sigma_1$ . Обозначим  $\angle(x, \eta_1) = \alpha$ . Тогда для осесимметричной задачи (при условии  $\sigma_{rr} = \sigma_{\alpha\alpha}$ ) справедливости формулы, аналогичные формулам (4.55), ч.1, так что

$$\sigma_{rx} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin 2\alpha. \quad (6.31)$$

Ввиду малости угла  $\alpha$  принимаем  $\sin 2\alpha \approx 2\alpha$ , тогда  $\sigma_{rx} = (\sigma_1 - \sigma_3)\alpha$ . Подставляя это выражение в уравнение (6.30), получим

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + (\sigma_1 - \sigma_3) \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \alpha \frac{\partial (\sigma_1 - \sigma_3)}{\partial x} = 0. \quad (6.32)$$

В наименьшем сечении шейки  $AB$   $\sigma_2 = \sigma_3$ , и по формуле [(4.42), ч.1] получим  $\sigma_u = \sigma_1 - \sigma_3$ . Тогда уравнение (6.32) с учётом того, что в сечении  $AB$  угол  $\alpha = 0$ , примет вид

$$\frac{d \sigma_{rr}}{d r} + \sigma_u \frac{d \alpha}{d x} = 0. \quad (6.33)$$

Обозначим через  $R$  радиус кривизны линии  $\eta_1$  в точке  $C$ . Тогда  $dx = R d\alpha$ , откуда  $d\alpha / dx = 1/R$ . Так как при  $r = r_1$   $R = R_1$ , а при  $r = 0$   $R \rightarrow \infty$ , примем следующее допущение о кривизне линии  $\eta_1$ :  $R = R_1 r_1 / r$ . Тогда  $d\alpha / dx = r / R_1 r_1$ , а уравнение (6.33) примет вид

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \sigma_u \frac{r}{R_1 r_1} = 0. \quad (6.34)$$

Допустим, что в сечении  $AB$  деформированное состояние является однородным. Тогда в этом сечении  $\varepsilon_u = const$ , следовательно, и  $\sigma_u = const$ . Интегрируя при этом условии уравнение (6.34), получим

$$\sigma_{rr} = C - \frac{\sigma_u}{2r_1 R_1} r^2.$$

Постоянную интегрирования  $C$  определим из условия, что  $\sigma_{rr} = 0$  при  $r = r_1$ . Получим  $C = \sigma_u r_1 / 2R_1$ . Тогда

$$\sigma_{rr} = \sigma_u \frac{r_1}{2R_1} \left( 1 - \frac{r^2}{r_1^2} \right);$$

$$\sigma_{xx} = \sigma_1 = \sigma_u + \sigma_3 = \sigma_u + \sigma_{rr};$$

$$\sigma_{xx} = \sigma_u \left( 1 + \frac{r_1}{2R_1} - \frac{r^2}{2R_1 r_1} \right). \quad (6.35)$$

Сила растяжения образца равна

$$P = 2\pi \int_{r=0}^{r_1} \sigma_{xx} r dr.$$

Подставляя сюда выражение для  $\sigma_{xx}$  по формуле (6.35) и произведя интегрирование при  $\sigma_u = const$ , найдём окончательно интенсивность напряжений в наименьшем сечении шейки:

$$\sigma_u = \left( \frac{P}{\pi r_1^2} \right) / \left( 1 + \frac{r_1}{4R_1} \right). \quad (6.36)$$

### 6.2.3. Построение диаграммы деформирования без учёта упругости

Так как при ОМД деформации обычно большие, упругими составляющими деформаций часто пренебрегают. Вначале строят диаграмму  $P = P(\Delta l^p)$ , где остаточное удлинение  $\Delta l^p$  определяется по формуле (6.3). Текущую площадь поперечного сечения  $F$  можно рассчитать по формуле (6.21).

Теперь находим  $\sigma_u$  и  $\varepsilon_u^p$ , учитывая лишь остаточную длину  $l_0 + \Delta l^p$  и остаточную площадь поперечного сечения  $F^p$ , т.е. берём удлинение и площадь поперечного сечения в точке  $D'$  после разгрузки из точки  $D$  (рис. 6.1).

Интенсивность остаточных деформаций с учётом сказанного и формул (6.24), (6.6) равна

$$\varepsilon_u^p = \ln \frac{l_0 + \Delta l^p}{l_0} = \ln(1 + \varepsilon^p). \quad (6.37)$$

Интенсивность напряжений найдём в соответствии с формулами (6.21) и (6.22):

$$\sigma_u = \frac{P}{F^p} = \frac{P}{F_0} \cdot \frac{l_0 + \Delta l^p}{l_0};$$

$$\sigma_u = \sigma_{ycl} (1 + \varepsilon^p) \quad (6.38)$$

Формулы (6.37) и (6.38) справедливы на участке равномерного удлинения образца, включая точку  $B$  (рис. 6.1). За точкой  $B$  величины  $\sigma_u$  и  $\varepsilon_u^p$  обычно находят только для точки разрыва  $K$  по формулам (6.25) и (6.26), (6.36). Построенная таким образом диаграмма деформирования показана на рис. 6.10.

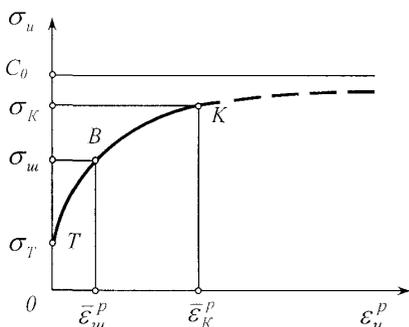


Рис. 6.10. Диаграмма деформирования без учета упругости

Кривая  $\sigma_u = \sigma_u(\varepsilon_u^p)$  может быть аппроксимирована (т.е. приближённо описана) различными функциями, например, степенной вида

$$\sigma_u = C(\varepsilon_u^p)^n. \quad (6.39)$$

В.М. Розенберг предложила такое выражение:

$$\sigma_u = C_0 - C_1 \frac{F^p}{F_0} - C \left( \frac{F^p}{F_0} \right)^n. \quad (6.40)$$

Хорошо аппроксимирует опытную зависимость также функция вида (задача 6.5)

$$\sigma_u = C_0 - C \exp(-n \varepsilon_u^p). \quad (6.41)$$

Прямая  $\sigma_u = C_0$  является её асимптотой (рис. 6.10), т.е.  $C_0$  - предел деформационного упрочнения. Как уже отмечалось, с увеличением холодной пластической деформации упрочнение уменьшается, металл теряет пластичность (охрупчивается), наступает разрушение.

### Задача 6.5. Аппроксимация диаграммы деформирования

Аппроксимировать диаграмму деформирования без учёта упругости (см. рис. 6.10) функцией (6.41), если измерены силы  $P_T$  (соответствует пределу текучести),  $P_{max}$  (соответствует началу образования шейки) и  $P_K$  (соответствует разрыву образца), а также начальный диаметр  $d_0$  и диаметры разорванного образца -  $d_K^p$  (в наименьшем сечении шейки) и  $d_u^p$  (вне области шейки).

Решение. По остаточной площади поперечного сечения вычисляем интенсивность напряжений: в начале текучести (точка Т)  $\sigma_T = P_T / F_0 = 4P_T / \pi d_0^2$ ; в момент начала образования шейки (точка В)  $\sigma_u = P_{max} / F_u^p = 4P_{max} / \pi (d_u^p)^2$ ; в момент разрыва образца (точка К) в соответствии с формулой (6.26)

$\sigma_K = (P_K / F_K^p) \eta = 4P_K \eta / \pi (d_K^p)^2$ , где  $\eta$  определяем по рис. 6.9.

Интенсивность остаточных деформаций в соответствии с (6.37) и (6.20) в точке  $T$  равна нулю. В точке  $B$

$$\bar{\varepsilon}_{u}^p = \ln \frac{F_0}{F_u^p} = 2 \ln(d_0 / d_u^p);$$

в точке разрыва образца  $K$

$$\bar{\varepsilon}_K^p = \ln \frac{F_0}{F_K^p} = 2 \ln(d_0 / d_K^p).$$

Тогда для нахождения трёх неизвестных ( $C_0$ ,  $C$  и  $n$ ) в формуле (6.41) имеем три уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_T &= C_0 - C, & \sigma_u &= C_0 - C \exp(-n \bar{\varepsilon}_u^p), \\ \sigma_K &= C_0 - C \exp(-n \bar{\varepsilon}_K^p), \end{aligned} \right\} \quad (6.42)$$

откуда получим

$$\boxed{C = C_0 - \sigma_T, \quad n = \frac{1}{\bar{\varepsilon}_u^p} \ln \frac{C_0 - \sigma_T}{C_0 - \sigma_u}}, \quad (6.43)$$

а  $C_0$  найдём, решая трансцендентное уравнение

$$\boxed{\frac{C_0 - \sigma_K}{C_0 - \sigma_T} = \left( \frac{C_0 - \sigma_u}{C_0 - \sigma_T} \right)^{\bar{\varepsilon}_K^p / \bar{\varepsilon}_u^p}}. \quad (6.44)$$

### Контрольные вопросы

1. Что такое диаграмма деформирования и зачем она нужна?
2. Почему и как в процессе растяжения образца меняется коэффициент поперечной деформации?
3. Выведите приближённую формулу (6.10), формулы (6.12) и (6.13).
4. С какой целью и на каком основании принимается условие несжимаемости?
5. Какова связь между  $F$  и  $\varepsilon$ ,  $\sigma_{усл}$  и  $\sigma_{xx}$  при растяжении при условии несжимаемости?
6. Чему равна интенсивность деформаций при растяжении при условии несжимаемости?

7. Как строится диаграмма деформирования при условии несжимаемости?
8. Каково условие начала образования шейки на образце? Как влияет здесь деформационное упрочнение?
9. Дайте схемы главных нормальных напряжений и главных деформаций в центре шейки О и в точке А (рис. 6.2).
10. В чем состоит условие полной пластичности для осесимметричных задач?
11. Почему в шейке  $\sigma_u < \sigma_1$ ?
12. Как и почему с увеличением отношения  $r_1/R_1$  (рис. 6.2) меняется коэффициент  $\eta$  (рис. 6.9)?
13. На каком основании при расчётах многих процессов ОМД можно пренебречь свойством упругости?
14. Как строится диаграмма деформирования без учёта упругости? Какими функциями её можно аппроксимировать? Показать, что при  $C_1=0$  аппроксимирующие зависимости (6.40) и (6.41) совпадают.

### 6.3. Кривые упрочнения

*Кривые упрочнения* первого рода  $\sigma_{xx} = \sigma_{xx}(\varepsilon)$ , второго рода  $\sigma_{xx} = \sigma_{xx}(q)$ , где  $q = (F_0 - F)/F_0$  - *относительное сужение*, третьего рода  $\sigma_{xx} = \sigma_{xx}(\bar{\varepsilon})$  бывают полезны при расчётах процессов ОМД. Как и диаграмму деформирования, их можно строить на основании индикаторной диаграммы с учётом сжимаемости и упругости; без учёта сжимаемости; без учёта упругости.

1) Построим, например, *кривую упрочнения первого рода* без учёта упругости. Она представляет собой графическую зависимость  $\sigma_s = \sigma_s(\varepsilon^p)$  (рис. 6.11), где  $\sigma_s$  - *сопротивление металла пластической деформации* с учётом (6.38) равно

$$\sigma_s = \frac{P}{F^p} = \frac{P}{F_0} (1 + \varepsilon^p) = \sigma_{ycl} (1 + \varepsilon^p). \quad (6.45)$$

Остаточное относительное удлинение по формуле (6.6) равно  $\varepsilon^p = \Delta l^p / l_0$ , где  $\Delta l^p$  определяется по формуле (6.3). При этом  $F$  можно определить при условии несжимаемости по формуле (6.21), в которой  $\varepsilon^p = \Delta l / l_0 = (\Delta l^p + \Delta l^e) / l_0$ .

Кривая упрочнения проходит через три характерные точки: точку  $T$  ( $0, \sigma_T$ ), соответствующую началу текучести; точку

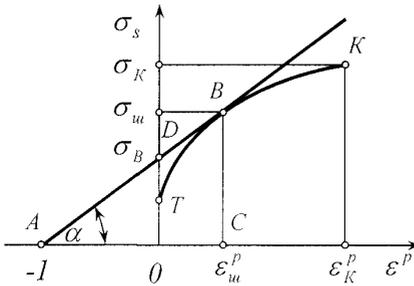


Рис. 6.11 Кривая упрочнения первого рода без учёта упругости

$B (\varepsilon_{ш}^p, \sigma_{ш})$ , соответствующую началу образования шейки; точку  $K (\varepsilon_K^p, \sigma_K)$ , соответствующую разрыву образца.

Предел текучести  $\sigma_T$  равен либо физическому пределу текучести (если на индикаторной диаграмме есть площадка текучести), либо условному пределу текучести  $\sigma_{0,2}$ . Определе-

ние  $\varepsilon_{ш}^p$  и  $\sigma_{ш}$  изложено в задаче 6.6. Определение  $\sigma_K$  изложено в задаче 6.5, а деформация  $\varepsilon_K^p$  на основании (6.20) равна

$$\varepsilon_K^p = \frac{F_0}{F_K^p} - 1 = \left( \frac{d_0}{d_K^p} \right)^2 - 1, \quad (6.46)$$

где  $d_K^p$  – диаметр наименьшего сечения шейки после разрыва.

Свойство кривой упрочнения первого рода устанавливается на основании условия (6.27), которое в нашем случае примет вид  $d\sigma_s / d\varepsilon^p = \sigma_s / (1 + \varepsilon^p)$ . Или, учитывая формулу (6.45),  $d\sigma_s / d\varepsilon^p = \sigma_{ysl}$ . Для момента начала образования шейки получим на основании (6.9)  $(d\sigma_s / d\varepsilon^p)_{ш} = \sigma_B = \operatorname{tg} \alpha$ , где  $\alpha$  – угол между осью  $\varepsilon^p$  и касательной  $AB$  к кривой упрочнения в точке  $B$ . Из  $\triangle ABC$  с учётом формулы (6.45) найдём

$$AC = BC / \operatorname{tg} \alpha = \sigma_{ш} / \sigma_B = 1 + \varepsilon_{ш}^p.$$

Тогда  $AO = AC - OC = 1 + \varepsilon_{ш}^p - \varepsilon_{ш}^p = 1$ , а из  $\triangle AOD$  найдём  $OD = AO \cdot \operatorname{tg} \alpha = \sigma_B$ . Итак, свойство кривой упрочнения первого рода: касательная к кривой упрочнения первого рода в точке, соответствующей началу образования шейки, отсекает от на-

чала координат на оси напряжений отрезок, численно равный временному сопротивлению  $\sigma_B$ , а на отрицательной части оси деформаций – отрезок, численно равный единице.

Свойства кривых упрочнения устанавливаются для аппроксимации их линейными функциями. В качестве аппроксимирующей прямой принимается касательная АВ. Тогда для кривой упрочнения первого рода линейная аппроксимация имеет вид

$$\sigma_S = \sigma_B + \sigma_B \varepsilon^P. \quad (6.47)$$

Для её получения необходимы лишь  $F_0$  и  $P_{max}$ . Более точной является степенная зависимость

$$\sigma_S = \sigma_T + C(\varepsilon^P)^n, \quad (6.48)$$

которая также устанавливается на основании свойства кривой упрочнения (задача 6.6). Здесь  $n$  – показатель деформационного упрочнения.

2) На рис. 6.12 показана кривая упрочнения второго рода. По-

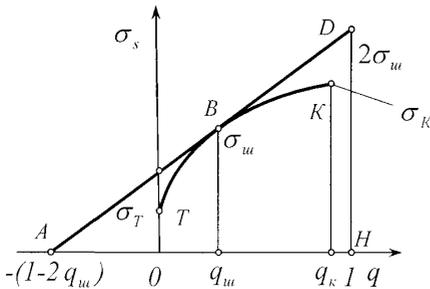


Рис. 6.12. Кривая упрочнения второго рода без учёта упругости

прежнему точка  $T$  соответствует началу текучести, точка  $B$  – началу сосредоточенного удлинения (началу образования шейки), точка  $K$  – разрыву образца. Соответствующие напряжения обозначены  $\sigma_T$  (предел текучести при линейном напряжённом состоянии),  $\sigma_u$  и  $\sigma_K$ .

Кривая упрочнения второго рода имеет то преимущество перед кривой упрочнения первого рода, что относительное сужение поперечного сечения  $q$  изменяется в пределах от 0 до 1, тогда как относительное удлинение  $\varepsilon$  может быть в принципе неограниченной величины.

*Свойство кривой упрочнения второго рода: касательная AD, проведённая к кривой упрочнения второго рода в точке B, соответствующей началу образования шейки, отсекает на отрицательном направлении оси деформаций отрезок OA, численно равный  $1-2q_u$ , а на перпендикуляре к оси деформаций в точке  $q = 1$  отрезок HD, численно равный удвоенному значению напряжения текучести в момент начала образования шейки  $2\sigma_u$ .*

### Задача 6.6. Аппроксимация кривой упрочнения первого рода степенной зависимостью

Дано:  $d_0, d_{u}^p, P_T, P_{max}$ . Аппроксимировать кривую упрочнения первого рода степенной зависимостью (6.48).

Решение. Вычислим

$$\sigma_T = P_T / F_0 = 4P_T / \pi d_0^2;$$

$$\sigma_B = P_{max} / F_0 = 4P_{max} / \pi d_0^2;$$

$$\sigma_{u} = P_{max} / F_{u}^p = 4P_{max} / \pi (d_{u}^p)^2.$$

Аналогично (6.46) найдём

$$\varepsilon_{u}^p = \frac{F_0}{F_{u}^p} - 1 = \left( \frac{d_0}{d_{u}^p} \right)^2 - 1. \quad (6.49)$$

Запишем (6.48) для момента начала образования шейки:

$$\sigma_{u} = \sigma_T + C(\varepsilon_{u}^p)^n. \quad (6.50)$$

На основании свойства кривой упрочнения

$$\left( d\sigma_s / d\varepsilon^p \right)_u = \sigma_B.$$

Заменим здесь  $\sigma_s$  по формуле (6.48). Получим

$$C n (\varepsilon_{u}^p)^{n-1} = \sigma_B. \quad (6.51)$$

Решая полученную систему уравнений (6.50) и (6.51) относительно  $C$  и  $n$ , найдём

$$n = \frac{\sigma_B \varepsilon_{u}^p}{\sigma_{u} - \sigma_T}, \quad C = \frac{\sigma_{u} - \sigma_T}{(\varepsilon_{u}^p)^n}. \quad (6.52)$$

#### Контрольные вопросы

1. Какие кривые упрочнения вы знаете? На основании чего они строятся? Зачем изучаются свойства кривых упрочнения?
2. Как построить кривую упрочнения первого рода?
3. Выведите формулу (6.46).
4. Сформулируйте и докажете свойство кривой упрочнения первого рода.

5. Как аппроксимировать кривую упрочнения первого рода линейной зависимостью?
6. Как аппроксимировать кривую упрочнения первого рода степенной зависимостью?
7. Докажите свойство кривой упрочнения второго рода.
8. Дайте линейную аппроксимацию кривой упрочнения второго рода.

## ГЛАВА 7. РЕОЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

*Реология* (от греческих слов rheos- течение, поток и logos – слово, учение) – наука о течении вещества, устанавливающая связь между напряжённым и деформированным состояниями для различных веществ. Так что с этой точки зрения получение *уравнений состояния* для пластически деформируемой среды является разделом реологии, а сами уравнения состояния называются *реологическими моделями*. В настоящей главе, на втором этапе вывода уравнений состояния, последние составляются для линейного напряжённого состояния на основании идеализации истинных диаграмм растяжения с учётом эффектов, сопровождающих пластическую деформацию, и наиболее существенных свойств деформируемой среды (упругости, вязкости, пластичности).

### 7.1. Простые реологические модели

#### 7.1.1. Линейно-упругая среда Гука

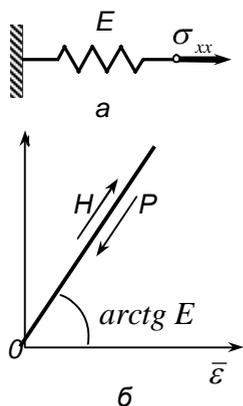


Рис. 7.1 Линейно-упругая среда Гука:  
а - механическая модель; б -  
реологическая линия (H –  
нагружение; P – разгрузка)

Сопrotивление металла деформации определяется в основном тремя его свойствами – упругостью, пластичностью и вязкостью. В связи с этим вводятся три простые реологические модели, изображающие эти свойства. Первая модель – *линейно-упругая среда Гука* (рис. 7.1) изображает *свойство упругости*. В соответствии с законом Гука приращение длины образца при растяжении в области упругой деформации равно  $dl = ldP / FE$ , откуда  $dl / l = d\sigma_{xx} / E$ . Интегрируя в пределах от  $l_0$  (когда  $\sigma_{xx} = 0$ ) до  $l$ , получим уравнение состояния линейно-упругой среды

при линейном напряжённом состоянии

$$\sigma_{xx} = E \bar{\epsilon}, \quad (7.1)$$

где  $\bar{\varepsilon} = \ln(l/l_0)$  - логарифмическая деформация в направлении оси образца. При малых деформациях  $\bar{\varepsilon} \approx \varepsilon = \Delta l/l_0$ , где  $\varepsilon$  - относительное удлинение. Действительно, запишем степенной ряд

$$\bar{\varepsilon} = \ln \frac{l}{l_0} = \ln \frac{l_0 + \Delta l}{l_0} = \ln(1 + \varepsilon) = \varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^3}{3} - \frac{\varepsilon^4}{4} + \dots,$$

где  $1 \geq \varepsilon > -1$ . При малых деформациях  $\varepsilon \ll 1$ . Поэтому можно ограничиться только одним, первым членом степенного ряда.

Механической моделью линейно-упругой среды является пружина с линейной характеристикой с жёсткостью  $E$  (рис. 7.1, а), а реологической линией – прямая линия (рис. 7.1, б), причём линии нагружения и разгрузки совпадают (обратимый процесс). Наклон реологической прямой к оси деформаций  $\bar{\varepsilon}$  определяется модулем упругости первого рода (модулем Юнга)  $E$  и зависит от масштабов по осям деформаций и напряжений. Сопротивление деформации упругой среды зависит от степени деформации и не зависит от скорости деформации. *Модуль продольной упругости*, или *модуль Юнга*  $E$  меняется с температурой (например, у стали при 20 °С  $E = 2,1 \cdot 10^5$  Н/мм<sup>2</sup>, а при 500 °С  $E = 1,8 \cdot 10^5$  Н/мм<sup>2</sup>).

### 7.1.2. Жёстко-пластическая среда Мизеса

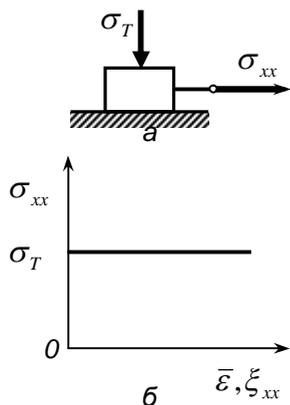


Рис. 7.2. Жёстко-пластическая среда Мизеса: а - механическая модель; б - реологическая линия

Эта реологическая модель (рис. 7.2) изображает свойство *пластичности*, заключающееся в том, что по достижении некоторого напряжения появляется *остаточная, пластическая деформация*.

Уравнение состояния имеет вид

$$\sigma_{xx} = \sigma_T \quad (7.2)$$

и называется *условием пластичности при линейном напряжённом состоянии*.

При  $\sigma_{xx} < \sigma_T$  среда не деформируется. Деформация среды начинается и продолжается при  $\sigma_{xx} = \sigma_T$ , где

$\sigma_T$  – предел текучести при линейном напряжённом состоянии. После снятия напряжения деформация среды сразу же прекращается.

Механической моделью является элемент трения (рис. 7.2, а), а реологической линией – прямая линия, параллельная оси деформации (рис. 7.2, б). Как видно, здесь отсутствует однозначная связь между напряжениями и деформациями. Сопротивление деформации не зависит ни от степени, ни от скорости деформации. Предел текучести  $\sigma_T$  меняется с температурой.

### 7.1.3. Линейно-вязкая среда Ньютона

Третьей простой реологической моделью является *линейно-вязкая среда Ньютона* (рис. 7.3), изображающая *свойство вязкости*. Сопротивление деформации прямо пропорционально скорости деформации.

Уравнение состояния при линейном напряжённом состоянии имеет вид:

$$\sigma_{xx} = \nu \cdot \dot{\xi}_{xx} = \nu \frac{d\bar{\varepsilon}}{dt} = \nu \frac{v}{l}, \quad (7.3)$$

где  $v$  - скорость растяжения образца,  $\nu$  - коэффициент вязкости, Па·с (Н·с/мм<sup>2</sup>). Действительно,

$$\frac{d\bar{\varepsilon}}{dt} = \frac{d}{dt} \ln \frac{l}{l_0} = \frac{1}{l} \cdot \frac{dl}{dt} = \frac{v}{l}.$$

Механической моделью является невесомый поршень, перемещающийся в цилиндре, заполненном вязкой жидкостью (рис. 7.3, а). Жидкость протекает в зазоре между поршнем и стенкой цилиндра. Реологическая линия – прямая линия, наклон которой к оси  $\dot{\xi}_{xx}$  определяется величиной коэффициента вязкости  $\nu$  (рис. 7.3, б) и зависит от масштабов по осям скоростей деформаций и напряжений. Сопротивление деформации линейно-

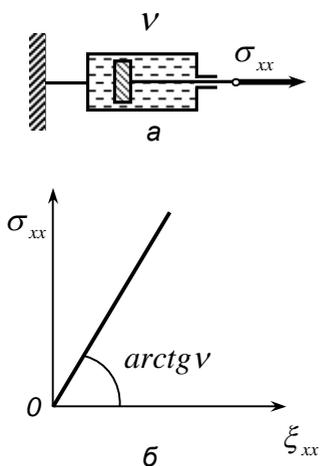


Рис. 7.3. Линейно-вязкая среда Ньютона: а - механическая модель; б - реологическая линия

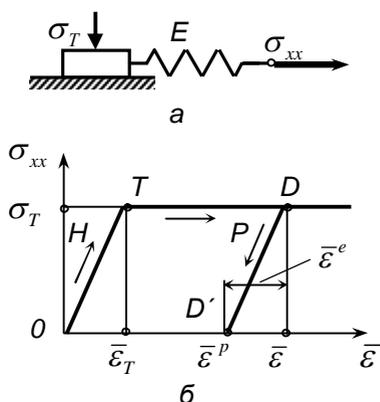
вязкой среды зависит от скорости деформации, но не зависит от степени деформации. Вязкость  $\nu$  меняется с температурой.

### Контрольные вопросы

1. Что такое реология, реологические модели, уравнения состояния?
2. Назовите простые реологические модели. Какие свойства реального металла они изображают?
3. Нарисуйте механические модели простых реологических сред.
4. Нарисуйте реологические линии простых сред и запишите соответствующие уравнения состояния при линейном напряжённом состоянии.
5. Что такое предел текучести при линейном напряжённом состоянии?
6. Запишите условие пластичности при линейном напряжённом состоянии.
7. В каких единицах измеряются модуль продольной упругости  $E$  и коэффициент вязкости  $\nu$  ?

## 7.2. Уруго-пластические среды

### 7.2.1. Уруго-пластическая среда Прандтля



Соединяя упругий, пластический и вязкий элементы последовательно и параллельно, можно создать *сложные реологические модели*. Последовательное соединение линейно-упругого  $E$  и пластического  $\sigma_T$  элементов (рис. 7.4, а) даёт механическую модель *уруго-пластической среды Прандтля*, обладающей упругими и пластическими свойствами. Реологическая линия (рис. 7.4, б) состоит из двух прямых:  $OT$  соответствует упругой деформации (пружина  $E$  растягивается, а ползу-

Рис. 7.4. Уруго-пластическая среда Прандтля:  
а - механическая модель;  
б - реологическая линия

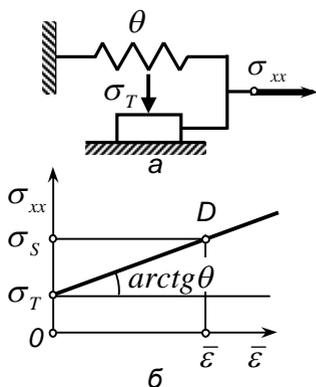
нок  $\sigma_T$  неподвижен);  $TD$  соответствует упруго-пластической деформации (пружина  $E$  более не растягивается, а ползунок  $\sigma_T$  перемещается). Деформация складывается из упругой  $\bar{\varepsilon}^e$  и пластической (остаточной) деформации  $\bar{\varepsilon}^p$ :  $\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}^e + \bar{\varepsilon}^p$ . Линия разгрузки  $DD'$  параллельна  $OT$ . Уравнения состояния имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= E \bar{\varepsilon} \text{ при } \bar{\varepsilon} < \bar{\varepsilon}_T, \\ \sigma_{xx} &= \sigma_T \text{ при } \bar{\varepsilon} \geq \bar{\varepsilon}_T, \end{aligned} \right\} \quad (7.4)$$

где  $\bar{\varepsilon}_T = \sigma_T / E$  - деформационный предел текучести при линейном напряженном состоянии.

### 7.2.2. Жёстко-пластическая среда с линейным упрочнением

Механическая модель (рис. 7.5, а) представляет собой параллельно соединённые линейно-упругий  $\theta$  и пластический  $\sigma_T$  элементы. При напряжении  $\sigma_{xx} < \sigma_T$  среда не деформируется. При  $\sigma_{xx} = \sigma_T$  начинается деформация: ползунок  $\sigma_T$  перемещается, а



пружина  $\theta$  растягивается, поэтому для поддержания течения напряжение  $\sigma_{xx}$  должно возрастать. Поскольку элемент  $\theta$  линейно-упругий,

$$\sigma_{xx} = \sigma_T + \theta \bar{\varepsilon}. \quad (7.5)$$

Это и есть уравнение состояния жёстко-пластической среды с линейным упрочнением при линейном напряжённом состоянии.

Соответственно реологическая линия (рис. 7.5, б) – прямая, наклон которой определяется модулем упрочнения  $\theta$  (единица измерения  $\text{Н/мм}^2$ ). Пружина  $\theta$  моделирует деформационное упрочнение. Модуль упрочнения

Рис. 7.5. Жёстко-пластическая среда с линейным упрочнением:  
а - механическая модель;  
б - реологическая линия

$\theta$  примерно равен временному сопротивлению  $\sigma_B$  [см. формулу (6.47)], поэтому  $\theta \ll E$ .

Если в точке  $D$  растяжение остановить и нагрузку снять, деформация в среде прекратится. Пружина  $\theta$  останется растянутой, но она не будет перемещать ползунок  $\sigma_T$  в обратном направлении. Если вновь начать растягивать образец, его предел текучести  $\sigma_s$  будет выше начального значения  $\sigma_T$ . В соответствии с (7.5)

$$\sigma_s = \sigma_T + \theta \bar{\varepsilon},$$

где  $\sigma_s$  - текущий предел текучести при линейном напряжённом состоянии, а  $\sigma_T$  - начальный предел текучести при линейном напряжённом состоянии.

### 7.2.3. Уруго-пластическая среда с линейным упрочнением

Если наделить жёстко-пластическую среду с линейным упрочнением свойством упругости, получим *уруго-пластическую среду с линейным упрочнением* (рис. 7.6, а).

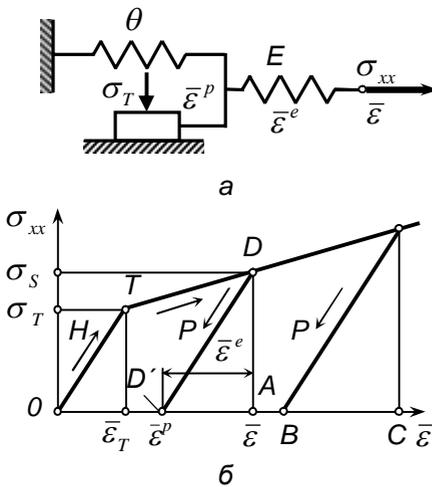


Рис. 7.6. Уруго-пластическая среда с линейным упрочнением:  
а - механическая модель;  
б - реологическая линия

Суммарная деформация состоит из *уругой*  $\bar{\varepsilon}^e$  (деформация пружины  $E$ ) и *пластической (остаточной)*  $\bar{\varepsilon}^p$  (деформация элементов  $\sigma_T$  и  $\theta$ ) составляющих:  $\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}^e + \bar{\varepsilon}^p$ . Напряжение с одной стороны определяется упругой деформацией:  $\sigma_{xx} = E \bar{\varepsilon}^e$ . А с другой стороны напряжение определяется сопротивлением перемещению пластического элемента  $\sigma_T$  и *деформационным упрочнением* (деформацией пружины  $\theta$ ):  $\sigma_{xx} = \sigma_T + E \bar{\varepsilon}^p$ .

Исключая из записанных трёх уравнений деформации

$\bar{\varepsilon}^e$  и  $\bar{\varepsilon}^p$ , получим уравнение состояния

$$\sigma_{xx} = \sigma_T + (\bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}_T) \frac{E\theta}{E + \theta} \approx \sigma_T + (\bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}_T)\theta, \quad (7.6)$$

так как  $\theta \ll E$ , и в знаменателе величиной  $\theta$  можно пренебречь.

Если  $\bar{\varepsilon}$  меньше деформационного предела текучести  $\bar{\varepsilon}_T$ , среда ведет себя как линейно-упругая: пружина  $E$  растягивается, а ползунок  $\sigma_T$  и пружина  $\theta$  неподвижны. При  $\sigma_{xx} = \sigma_T$  начинает перемещаться ползунок и растягиваться пружина  $\theta$ . Соответственно реологическая линия (рис. 7.6, б) состоит из двух прямых:  $OT$  ( $\bar{\varepsilon} < \bar{\varepsilon}_T, \sigma_{xx} < \sigma_T$ ) соответствует упругой деформации; линия  $TD$  ( $\bar{\varepsilon} \geq \bar{\varepsilon}_T, \sigma_{xx} \geq \sigma_T$ ) соответствует упруго-пластической деформации. Линия разгрузки  $DD'$  параллельна  $OT$ . В отличие от упруго-пластической среды без упрочнения (рис. 7.4) в рассматриваемой среде упругая деформация  $\bar{\varepsilon}^e$  увеличивается с возрастанием суммарной деформации  $\bar{\varepsilon}$ , что наглядно видно из рис. 7.6: отрезок  $BC$  больше отрезка  $D'A$ .

### Контрольные вопросы

1. Что такое сложные реологические модели? Как они получают-ся?
2. Нарисуйте механическую модель, реологическую линию, запишите уравнения состояния упруго-пластической среды Прандтля. Какие свойства реального металла отражает эта модель?
3. Что такое деформационный предел текучести?
4. Как моделируется деформационное упрочнение пластического тела?
5. Что такое модуль упрочнения, в каких единицах он измеряется?
6. Почему модуль упрочнения  $\theta$  значительно меньше модуля продольной упругости  $E$ ? Чему примерно равен модуль упрочнения?
7. Запишите уравнение состояния жёстко-пластической среды с линейным упрочнением.
8. Нарисуйте механическую модель, реологическую линию, запишите уравнения состояния упруго-пластической среды с ли-

нейным упрочнением. Какие свойства реального металла отражает эта модель?

9. Выведите уравнение состояния упруго-пластической среды с линейным упрочнением (7.6).
10. Почему упругая составляющая деформации упруго-пластической среды с линейным упрочнением увеличивается с ростом суммарной деформации?

### 7.3. Вязко-пластические среды

Параллельное соединение вязкого и пластического элементов (рис. 7.7, а) даёт *вязко-пластическую среду Шведова и Бингама*. При  $\sigma_{xx} < \sigma_T$  среда не деформируется. При  $\sigma_{xx} \geq \sigma_T$  уравнение состояния имеет вид

$$\sigma_{xx} = \sigma_T + v \dot{\xi}_{xx}, \quad (7.7)$$

т.е. сопротивление деформации зависит от её скорости. Или наоборот: скорость деформации определяется величиной приложенного напряжения. При очень малой скорости деформации среда ведёт себя как жёстко-пластическая ( $\sigma_{xx} = \sigma_T$ ). Вязкий элемент

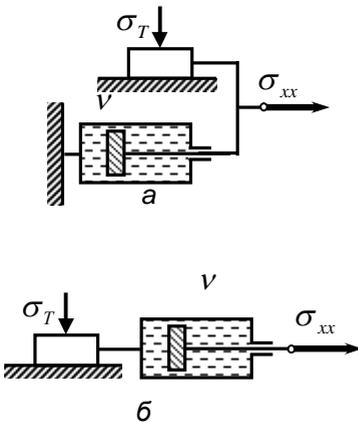


Рис. 7.7. Вязко-пластические среды:  
а – Шведова и Бингама;  
б - ползуче-пластическая среда

$v$  моделирует здесь *скоростное упрочнение* подобно тому, как пружина  $\theta$  моделирует деформационное упрочнение. В соответствии с уравнением состояния (7.7, б) на рис. 7.8, а показана реологическая линия вязко-пластической среды Шведова и Бингама. Это прямая линия, наклон которой к оси скорости деформации определяется величиной скоростного упрочнения и масштабами по осям координат.

Последовательное соединение вязкого и пластического элементов (рис. 7.7, б) даёт *ползуче-пластическую среду*. При  $\sigma_{xx} < \sigma_T$  она ведёт себя подобно линейно-вязкой среде, при этом ползунок  $\sigma_T$  неподвижен.

При  $\sigma_{xx} = \sigma_T$  она подобна жёстко-пластической среде. Такое со-

стояние наступает при скорости деформации  $\xi_T = \sigma_T / \nu$ . Вязкий элемент  $\nu$  моделирует здесь эффект *ползучести* – течение при напряжении меньше предела текучести  $\sigma_T$ .

В соответствии со сказанным на рис. 7.8, б построена реологическая линия ползуче-пластической среды. Она состоит из двух прямых линий. Наклон прямой  $OT$  к оси скорости деформации  $\xi_{xx}$  определяется вязкостью  $\nu$ . Линия  $TD$  параллельна оси  $\xi_{xx}$ . Уравнения состояния имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= \nu \xi_{xx} && \text{при } \xi_{xx} < \xi_T; \\ \sigma_{xx} &= \sigma_T && \text{при } \xi_{xx} \geq \xi_T. \end{aligned} \right\} \quad (7.8)$$

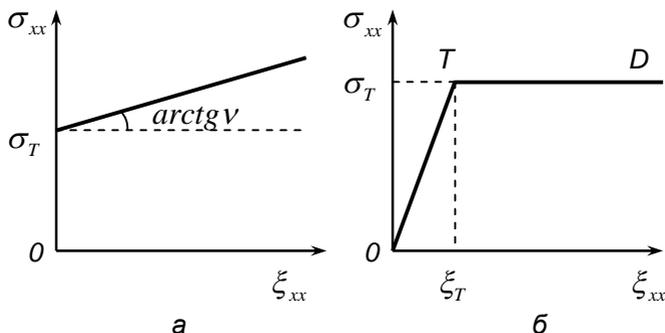


Рис. 7.8. Реологические линии вязко-пластических сред: а – среды Шведова и Бингама; б – ползуче-пластической среды

Поскольку сопротивление движению элемента  $\sigma_T$  не зависит от скорости, то при любой скорости деформации  $\xi_{xx} \geq \xi_T$  вязкий элемент  $\nu$  имеет сопротивление деформации равное  $\sigma_T$ . Поэтому при любой скорости деформации  $\xi_{xx} \geq \xi_T$  поршень вязкого элемента  $\nu$  движется с постоянной скоростью.

В заключение заметим, что вязкие свойства металла проявляются при его обработке давлением в горячем состоянии.

## Контрольные вопросы

1. Что такое скоростное упрочнение? Как оно моделируется?
2. Нарисуйте механическую модель, реологическую линию, запишите уравнение состояния вязко-пластической среды Шведова и Бингама.
3. Что такое ползучесть? Как она моделируется?
4. Нарисуйте механическую модель, реологическую линию, запишите уравнения состояния ползуче-пластической среды.
5. Когда проявляются вязкие свойства металла?
6. Какие элементы привносят неоднозначность связи между напряжениями и деформациями в реологических моделях?

## 7.4. Вязкоупругие среды

### 7.4.1. Вязкоупругая релаксирующая среда Максвелла

Механическая модель – последовательно соединённые упругий и вязкий элементы (рис. 7.9, а). Суммарная деформация состоит из деформации этих элементов:  $\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}^e + \bar{\varepsilon}^p$ . Дифференцируя по времени, получим

$$d\bar{\varepsilon} / dt = \xi_{xx} = \xi_{xx}^e + \xi_{xx}^p.$$

Скорость упругой деформации равна

$$\xi_{xx}^e = \frac{d\bar{\varepsilon}^e}{dt} = \frac{d(\sigma_{xx} / E)}{dt} = \frac{1}{E} \frac{d\sigma_{xx}}{dt}.$$

Скорость пластической деформации равна

$$\xi_{xx}^p = d\bar{\varepsilon}^p / dt = \sigma_{xx} / \nu.$$

Тогда

$$\frac{d\bar{\varepsilon}}{dt} = \frac{1}{E} \frac{d\sigma_{xx}}{dt} + \frac{\sigma_{xx}}{\nu}.$$

Обозначив

$$T = \nu / E, \tag{7.9}$$

получим уравнение состояния *вязкоупругой релаксирующей среды Максвелла*:

$$\frac{d\sigma_{xx}}{dt} + \frac{\sigma_{xx}}{T} = E \frac{d\bar{\varepsilon}}{dt}. \tag{7.10}$$

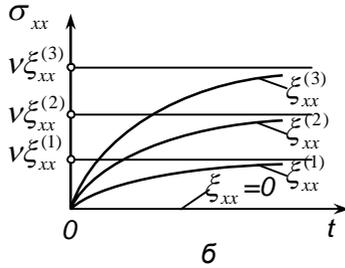
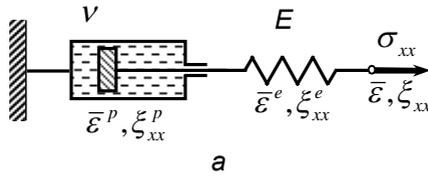


Рис. 7.9. Вязкоупругая релаксирующая среда Максвелла:  
 а - механическая модель;  
 б - реологические кривые при  $\xi_{xx} = const$

Относительно  $\sigma_{xx}$  это линейное дифференциальное уравнение первого порядка вида  $y' + P(x)y = Q(x)$ . Его общий интеграл находится по формуле

$$y = \exp\left(-\int P dx\right) \left[ \int Q \exp\left(\int P dx\right) dx + C \right].$$

В нашем случае  $x = t$ ,  $y = \sigma_{xx}$ ,  $P(x) = 1/T$ ,  $Q(x) = E(d\bar{\epsilon}/dt)$ . Тогда при начальном условии  $t = 0$ ,  $\sigma_{xx} = \sigma_{xx}^{(0)}$  решение уравнения (7.10) имеет вид

$$\sigma_{xx} = \exp\left(-\frac{t}{T}\right) \left[ E \int_0^t \frac{d\bar{\epsilon}}{dt} \exp\left(\frac{t}{T}\right) dt + \sigma_{xx}^{(0)} \right]. \quad (7.11)$$

Если  $\sigma_{xx}^{(0)} = 0$  и среда деформируется с постоянной скоростью  $\xi_{xx} = d\bar{\epsilon}/dt = const$ , то напряжение согласно (7.11) меняется со временем по закону

$$\sigma_{xx} = v \xi_{xx} \left( 1 - e^{-\frac{t}{T}} \right). \quad (7.12)$$

Построенные по этой формуле реологические кривые показаны на рис. 7.9, б. Это асимптотические кривые. При  $t \rightarrow \infty$   $\sigma_{xx} \rightarrow v \xi_{xx}$ . Уже при  $t = 3T$   $\sigma_{xx} = 0,95 v \xi_{xx}$ . «Переходный процесс» объясняется наличием пружины  $E$ . Если пружину  $E$  убрать, напряжение  $\sigma_{xx} = v \xi_{xx}$  установится мгновенно.

Пусть в какой-то момент времени, который примем за начальный ( $t = 0$ ), напряжение равно  $\sigma_{xx}^{(0)}$ . Зафиксируем в этот момент деформацию (например, закреплением концов растягиваемого образца). При этом  $d\bar{\epsilon} / dt = 0$ , а уравнение (7.11) примет вид

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xx}^{(0)} \exp\left(-\frac{t}{T}\right), \quad (7.13)$$

т.е. напряжение с течением времени стремится к нулю по экспоненциальному закону (рис. 7.10). Происходит *релаксация напряжений*, поршень перемещается за счёт сокращения пружины.

Время  $T$ , за которое напряжение  $\sigma_{xx}$  уменьшается в  $e = 2,7183$  раза, называется *временем релаксации*.

Уравнение релаксации напряжений (7.13) можно получить непосредственно из уравнения (7.10). Если длина растягиваемого образца зафиксирована, то  $d\bar{\epsilon} / dt = 0$ , и уравнение состояния (7.10) принимает вид

$$\frac{d\sigma_{xx}}{dt} + \frac{\sigma_{xx}}{T} = 0.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Интегрируя, найдём, что

$$\sigma_{xx} = C \exp(-t/T).$$

Постоянную интегрирования  $C$  найдём из начального условия: при  $t = 0$   $\sigma_{xx} = \sigma_{xx}^{(0)}$ .

В результате получим прежнему уравнение (7.13).

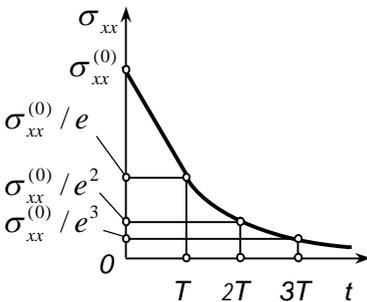


Рис. 7.10. Релаксация напряжений в вязкоупругой среде Максвелла

### 7.4.2. Вязкоупругая наследственная среда Фойхта

Механическая модель представляет собой параллельно соединённые упругий  $\theta$  и вязкий  $\nu$  элементы (рис. 7.11, а). Сопротивление деформации  $\sigma_{xx}$  равно сумме сопротивлений деформации этих элементов:

$$\sigma_{xx} = \theta \bar{\varepsilon} + \nu \frac{d\bar{\varepsilon}}{dt} = \theta \bar{\varepsilon} + \nu \xi_{xx}. \quad (7.14)$$

Соответственно реологические линии представляют собой параллельные прямые линии (рис. 7.11, б). При  $\xi_{xx} \rightarrow 0$  среда ведет себя подобно линейно-упругой среде.

Запишем дифференциальное уравнение (7.14) в виде

$$\frac{d\bar{\varepsilon}}{dt} + \frac{\bar{\varepsilon}}{T} = \frac{1}{\nu} \sigma_{xx}, \quad (7.15)$$

где  $T$  - время релаксации

$$T = \nu / \theta.$$

Это дифференциальное уравнение подобно уравнению (7.10) и решается точно так же.

Решим (7.15) относительно деформации  $\bar{\varepsilon}$  при начальном условии  $t = 0$ ,  $\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}^{(0)}$ . Получим закон изменения деформации со временем [сравнить с формулой (7.11)]

$$\bar{\varepsilon} = \exp\left(-\frac{t}{T}\right) \left[ \frac{1}{\nu} \int_0^t \sigma_{xx} \exp\left(\frac{t}{T}\right) dt + \varepsilon^{(0)} \right]. \quad (7.16)$$

Приложим к среде при  $t = 0$  постоянное напряжение  $\sigma_{xx} = \sigma_{xx}^{(0)} > 0$  по величине такое, что если  $\bar{\varepsilon}^{(0)} > 0$ , деформация будет увеличиваться. Тогда формула (7.16) примет вид

$$\bar{\varepsilon} = \varepsilon^{(0)} \exp\left(-\frac{t}{T}\right) + \frac{\sigma_{xx}^{(0)}}{\theta} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t}{T}\right) \right]. \quad (7.17)$$

Эта зависимость деформации от времени показана на рис. 7.12, кривая АВ. Она имеет горизонтальную асимптоту  $\sigma_{xx}^{(0)} / \theta$ .

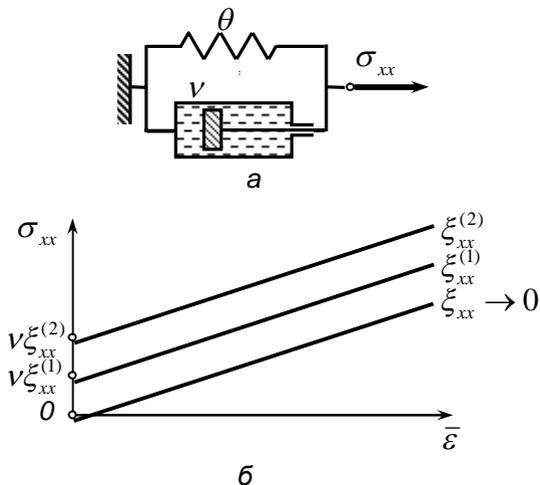


Рис. 7.11. Вязкоупругая наследственная среда Фойхта:  
 а – механическая модель;  
 б – реологические линии при  $\xi_{xx} = \text{const}$

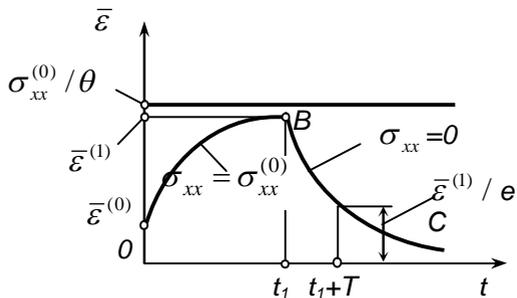


Рис. 7.12. Деформация вязкоупругой наследственной среды Фойхта:  
 АВ – нагружение при  $\sigma_{xx} = \text{const}$ ;  
 ВС – деформация последствия после разгрузки в точке В

В момент времени  $t = t_1$  (точка  $B$ ), когда  $\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}^{(1)}$ , произведём разгрузку, так что при  $t > t_1$   $\sigma_{xx} = 0$ . Уравнение (7.15) примет вид  $d\bar{\varepsilon}/dt + \bar{\varepsilon}/T = 0$ . Его решение при начальном условии  $t = t_1$ ,  $\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}^{(1)}$ , имеет вид

$$\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}^{(1)} \exp\left(-\frac{t-t_1}{T}\right), \quad (7.18)$$

т.е. *деформация последействия* после разгрузки с течением времени уменьшается по экспоненциальному закону (кривая  $BC$ ). При этом пружина  $\theta$  будет сокращаться и перемещать поршень элемента  $\nu$ . Деформацию  $\bar{\varepsilon}^{(1)}$  в точке  $B$  найдём по формуле (7.17) при  $t = t_1$ . Следовательно, деформация  $\bar{\varepsilon}^{(1)}$  зависит от деформации  $\bar{\varepsilon}^{(0)}$ . За время релаксации  $T$  деформация уменьшается в  $e$  раз.

Обратим внимание на то, что деформация  $\bar{\varepsilon}$  на всём интервале времени  $t \geq 0$  зависит от деформации  $\bar{\varepsilon}^{(0)}$ , достигнутой при  $t < 0$ . Это свойство называется *наследственностью*. Среда «помнит» всю историю своей деформации за время от  $t = -\infty$ . Таким образом, рассматриваемая среда обладает *релаксацией деформации*, или *последействием*, что и придает ей свойство наследственности.

### **Контрольные вопросы**

1. Какие вязкоупругие среды вы знаете? Какими характерными свойствами обладают вязкоупругие среды?
2. Как моделируется релаксация напряжений? Нарисуйте механическую модель вязкоупругой релаксирующей среды Максвелла.
3. Выведите уравнение состояния (7.10). Что такое время релаксации?
4. Решите дифференциальное уравнение состояния (7.10) и выведете формулу (7.11).
5. Выведите формулу (7.12)
6. Покажите, что по истечении времени  $t = 3T$  напряжение в соответствии с формулой (7.12) достигнет значения  $0,95\nu \xi_{xx}$  (см. рис. 7.9).
7. Выведите формулу (7.13) непосредственно из уравнения состояния (7.10).

8. Покажите, что за время релаксации  $T$  напряжение уменьшается в  $e$  раз [см. формулу (7.13) и рис. 7.10].
9. В чем заключается свойство наследственности? Как оно моделируется? Нарисуйте механическую модель вязкоупругой наследственной среды Фойхта и запишите для неё уравнение состояния. Выведите формулы (7.16), (7.17).
10. Что такое последствие? Чему равна деформация последствия в среде Фойхта? Выведите формулу (7.18).

## ГЛАВА 8. СВЯЗЬ МЕЖДУ НАПРЯЖЕНИЯМИ И ДЕФОРМАЦИЯМИ В ПРЕДЕЛАХ УПРУГОСТИ

Приступаем к третьему этапу конструирования уравнений состояния – обобщению реологических моделей для линейного напряжённого состояния на объёмное напряжённое состояние.

Деформация металла при обработке давлением начинается с его упругой деформации, которая не исчезает с появлением пластических деформаций  $\varepsilon_{ij}^p$  и остаётся до тех пор, пока на тело действуют внешние силы. Суммарные деформации  $\varepsilon_{ij}$  складываются из упругих деформаций  $\varepsilon_{ij}^e$  и остаточных, пластических деформаций  $\varepsilon_{ij}^p$ :

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p, \quad (8.1)$$

так что упругие деформации  $\varepsilon_{ij}^e$  являются неотъемлемой частью деформации металла и определяют напряжённое состояние тела. Даже после снятия внешних нагрузок, если в теле есть остаточные напряжения, то имеются и соответствующие им остаточные упругие деформации. Поэтому вначале установим связь между напряжениями и деформациями в рамках классической линейной теории упругости идеально упругого тела.

Твёрдое тело называется *идеально упругим*, если напряжения в любой его точке в любой момент времени зависят только от деформаций в этой точке в тот же момент времени (и от температуры или других немеханических параметров), а именно

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\varepsilon_{mn}). \quad (8.2)$$

Эти шесть зависимостей однозначно разрешимы относительно компонент деформации

$$\varepsilon_{mn} = \varepsilon_{mn}(\sigma_{ij}). \quad (8.3)$$

Процесс деформации идеально упругого тела термодинамически обратим, рассеяние энергии равно нулю, а внутренняя энергия является функцией только деформаций и температуры.

Деформации предполагаются малыми ( $\varepsilon_{ij} \ll 1$ ), так что будем пользоваться теорией (бесконечно) малых деформаций. Поэтому при одноосном растяжении образца логарифмическая де-

формация совпадает с относительным удлинением. Действительно, воспользуемся разложением логарифмической функции в степенной ряд. Получим

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon} &= \ln \frac{l}{l_0} = \ln \frac{l_0 + \Delta l}{l_0} = \ln(1 + \varepsilon_{xx}) = \\ &= \varepsilon_{xx} - \frac{\varepsilon_{xx}^2}{2} + \frac{\varepsilon_{xx}^3}{3} - \frac{\varepsilon_{xx}^4}{4} + \dots \approx \varepsilon_{xx}.\end{aligned}$$

Тогда формула (7.1) принимает вид

$$\sigma_{xx} = E \varepsilon_{xx} \quad (8.4)$$

и изображает закон Гука при линейном напряжённом состоянии.

В случае объёмного напряжённого состояния также действует линейный закон связи между напряжениями и деформациями. В анизотропной среде упругие свойства в разных направлениях различны, поэтому в выбранной системе координат каждое напряжение зависит от всех деформаций. Например, в прямоугольной декартовой системе координат

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= C_{xxxx} \varepsilon_{xx} + C_{xxxy} \varepsilon_{xy} + C_{xxxz} \varepsilon_{xz} + \\ &+ C_{xxyx} \varepsilon_{yx} + C_{xxyy} \varepsilon_{yy} + C_{xyyz} \varepsilon_{yz} + \\ &+ C_{xxzx} \varepsilon_{zx} + C_{xxzy} \varepsilon_{zy} + C_{xxzz} \varepsilon_{zz}.\end{aligned} \quad (8.5)$$

Аналогичные выражения можно записать и для остальных восьми напряжений, т.е. каждая компонента тензора напряжений  $T_\sigma$  линейно зависит от всех компонент тензора малых деформаций  $T_\varepsilon$ . Величины  $C_{ijmn}$  называются упругими коэффициентами, где первые два индекса указывают на выражаемую компоненту напряжения, а вторые два индекса указывают на компоненту деформации  $\varepsilon_{mn}$ , которая создает свою долю в напряжении  $\sigma_{ij}$ . Тогда девять зависимостей (8.2) можно кратко записать так:

$$\sigma_{ij} = C_{ijmn} \varepsilon_{mn}, \quad (8.6)$$

где по индексам  $m$  и  $n$  производится суммирование. Получили запись обобщённого закона Гука для идеальной линейно-упругой среды.

Число упругих коэффициентов  $C_{ijmn}$  равно  $3^4 = 81$ . Далее показано, что они образуют тензор четвёртого ранга, характеризующий упругие свойства анизотропной среды.

Основными задачами теории упругости являются: конкретизация соотношений (8.6) для различных случаев упругой симметрии тела; выявление физического смысла упругих коэффициентов с целью определения их из опытов; составление замкнутой системы уравнений, описывающей напряжённо-деформированное состояние тела при его упругой деформации; разработка методов решения этой системы уравнений для тел различной формы (призматические тела, стержневые системы, плиты, пластинки, тонкие оболочки и др.).

## 8.1. Обобщённый закон Гука

### 8.1.1. Тензор упругих коэффициентов

Так как тензор напряжений  $T_\sigma$  и тензор деформаций  $T_\varepsilon$  - симметричные тензоры ( $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ ,  $\varepsilon_{mn} = \varepsilon_{nm}$ ), то упругие коэффициенты  $C_{ijmn}$  обладают следующими свойствами симметрии:

$$C_{ijmn} = C_{jimn} = C_{ijnm} = C_{jnm}.$$

Поэтому число независимых упругих коэффициентов не более 36. Перечислим независимые упругие коэффициенты:

$$\left( \begin{array}{cccccc} +C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1112} & C_{1123} & C_{1131} \\ C_{2211} & +C_{2222} & C_{2233} & C_{2212} & C_{2223} & C_{2231} \\ C_{3311} & C_{3322} & +C_{3333} & C_{3312} & C_{3323} & C_{3331} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & +C_{1212} & C_{1223} & C_{1231} \\ C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & C_{2312} & +C_{2323} & C_{2331} \\ C_{3111} & C_{3122} & C_{3133} & C_{3112} & C_{3123} & +C_{3131} \end{array} \right). \quad (8.7)$$

Покажем, что упругие коэффициенты являются компонентами тензора четвёртого ранга. Запишем (8.6) в новой системе координат:

$$\sigma'_{pq} = C'_{pqrs} \varepsilon'_{rs}. \quad (8.8)$$

Компоненты тензора напряжений преобразуются с помощью матриц обратного преобразования координат по формулам (1.50):

$$\sigma'_{pq} = \sigma_{kl} b_{pk} b_{ql}. \quad (8.9)$$

Поскольку компоненты тензора деформаций согласно формуле (2.8) представляют собой полуразности компонент метрического тензора в конечном и начальном состояниях, то они преобразуются точно так же, как и компоненты метрического тензора, т.е. с помощью матриц прямого преобразования координат. Получим согласно формуле (1.37)

$$\varepsilon'_{rs} = \varepsilon_{mn} a_{mr} a_{ns}. \quad (8.10)$$

Тогда формула (8.8) примет вид

$$\sigma_{kl} b_{pk} b_{ql} = C'_{pqrs} \varepsilon_{mn} a_{mr} a_{ns}. \quad (8.11)$$

Умножим обе части равенства (8.11) скалярно на  $a_{ip} a_{jq}$ :

$$\sigma_{kl} a_{ip} b_{pk} a_{jq} b_{ql} = C'_{pqrs} a_{ip} a_{jq} \varepsilon_{mn} a_{mr} a_{ns}. \quad (8.12)$$

Согласно формуле (1.17) произведение матриц преобразования  $A$  и  $B$  равно единичной матрице  $E$  (1.15), составленной из символов Кронекера  $\delta_{ij}$ . Поэтому

$$a_{ip} b_{pk} = \delta_{ik}, \quad a_{jq} b_{ql} = \delta_{jl}. \quad (8.13)$$

Теперь равенство (8.12) примет вид

$$\sigma_{kl} \delta_{ik} \delta_{jl} = C'_{pqrs} a_{ip} a_{jq} \varepsilon_{mn} a_{mr} a_{ns}. \quad (8.14)$$

Символы Кронекера меняют индексы в обозначениях компонент тензора (см. правило изменения индексов с помощью символов Кронекера в п. 1.2.2). Поэтому равенство (8.14) примет вид

$$\sigma_{ij} = C'_{pqrs} a_{ip} a_{jq} \varepsilon_{mn} a_{mr} a_{ns}. \quad (8.15)$$

Сравнивая с формулой (8.6) получим закон преобразования упругих коэффициентов

$$C_{ijmn} = C'_{pqrs} a_{ip} a_{jq} a_{mr} a_{ns}. \quad (8.16)$$

Однако таким образом, с помощью матриц обратного преобразования, преобразуются компоненты тензора четвёртого ранга. Следовательно, упругие коэффициенты образуют тензор четвёр-

того ранга, а потому зависят не только от физических свойств деформируемого тела, но и от метрического тензора сопутствующей системы координат начального состояния, когда тело не деформировано, т.е. все напряжения  $\sigma_{ij} = 0$  и все деформации  $\varepsilon_{ij} = 0$ .

### 8.1.2. Потенциал тензора напряжений

Допустим, что процесс упругой деформации является изотермическим и адиабатическим, а кинетическая энергия деформируемого тела не меняется со временем. Напомним, что в *изотермическом процессе* температура не меняется, а *процесс адиабатический* протекает без теплообмена с окружающей средой, т.е. при полной теплоизоляции. Тогда с учётом закона сохранения механической энергии  $dA_{II} + dA_M = dA_B$  [формула (5.86)] закон сохранения энергии (5.90) примет вид  $dU = dA_B$ , т.е. приращение внутренней энергии тела равно элементарной работе внутренних сил. Или для единицы объёма  $du = da_B$ , где  $u$  – удельная внутренняя энергия,  $a_B$  – удельная работа внутренних сил. Поскольку в нашем случае приращение внутренней энергии в сравнении с недеформированным телом зависит только от деформаций, то  $du$ , а следовательно и  $da_B$ , являются полными дифференциалами функции деформаций, т.е.  $da_B = (\partial a_B / \partial \varepsilon_{ij}) \cdot d\varepsilon_{ij}$ . По формуле (5.80) найдём, что

$$dA_B = N_B dt = \iiint_V \sigma_{ij} \xi_{ij} dt dV,$$

где согласно (3.2)  $\xi_{ij} dt = d\varepsilon_{ij}$ . Тогда  $da_B = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}$ . Сравнивая с предыдущим выражением  $da_B$ , получим, что

$$\sigma_{ij} = \partial a_B / \partial \varepsilon_{ij}, \quad (8.17)$$

т.е. удельная работа внутренних сил является потенциалом тензора напряжений, или *упругим потенциалом*.

Сравнивая (8.17) и (8.6) найдём, что величины  $\partial a_B / \partial \varepsilon_{ij}$  линейны и однородны относительно деформаций  $\varepsilon_{ij}$ . Тогда на основании равенства  $da_B = (\partial a_B / \partial \varepsilon_{ij}) \cdot d\varepsilon_{ij}$  делаем заключение, что  $a_B$  – однородная функция второй степени относительно аргу-

ментов  $\varepsilon_{ij}$ . Напомним, что *однородная функция*  $f$  одного или нескольких переменных удовлетворяет соотношению

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) = \lambda^m f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

для любого допустимого  $\lambda$ . Натуральное число  $m$  называется степенью однородности.

Воспользуемся теоремой Эйлера об однородных функциях. Если  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  - непрерывно дифференцируемая однородная функция степени  $r$  относительно аргументов  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , то  $x_i (\partial f / \partial x_i) = r f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , где по  $i$  производится суммирование от 1 до  $n$ . В нашем случае аргументами  $x_i$  являются деформации  $\varepsilon_{ij}$ , функцией  $f$  является удельная работа внутренних сил  $a_B$ , а степень однородности  $r = 2$ . Тогда согласно теореме Эйлера  $\varepsilon_{ij} (\partial a_B / \partial \varepsilon_{ij}) = 2 a_B$ , откуда с учётом (8.17) и (8.6) удельная работа внутренних сил равна

$$a_B = \frac{1}{2} \frac{\partial a_B}{\partial \varepsilon_{ij}} \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} C_{ijmn} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{mn}. \quad (8.18)$$

Например, в прямоугольной декартовой системе координат

$$a_B = \frac{1}{2} \left[ \sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \varepsilon_{yy} + \sigma_{zz} \varepsilon_{zz} + 2(\sigma_{xy} \varepsilon_{xy} + \sigma_{yz} \varepsilon_{yz} + \sigma_{zx} \varepsilon_{zx}) \right]. \quad (8.19)$$

### 8.1.3. Число независимых упругих коэффициентов

Продифференцируем (8.17) по  $\varepsilon_{mn}$ . Получим

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{mn}} = \frac{\partial^2 a_B}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{mn}}.$$

Согласно (8.6)  $\partial \sigma_{ij} / \partial \varepsilon_{mn} = C_{ijmn}$ . Поэтому

$$\partial^2 a_B / \partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{mn} = C_{ijmn}.$$

Запишем (8.17) в виде  $\sigma_{mn} = \partial a_B / \partial \varepsilon_{mn}$  и продифференцируем по  $\varepsilon_{ij}$ . Получим

$$\partial \sigma_{mn} / \partial \varepsilon_{ij} = \partial^2 a_B / \partial \varepsilon_{mn} \partial \varepsilon_{ij} = C_{ijmn}.$$

Запишем теперь (8.6) в виде  $\sigma_{mn} = C_{mnij} \varepsilon_{ij}$  и продифференцируем по  $\varepsilon_{ij}$ :  $\partial \sigma_{mn} / \partial \varepsilon_{ij} = C_{mnij}$ . Сравнивая с предыдущим выражением  $\partial \sigma_{mn} / \partial \varepsilon_{ij}$ , находим, что  $C_{ijmn} = C_{mni j}$ . Следовательно, матрица упругих коэффициентов (8.7) симметрична относительно главной диагонали, а независимые упругие коэффициенты располагаются на этой диагонали и выше её. Число их равно 21. В матрице (8.7) упругие коэффициенты, расположенные на главной диагонали, отмечены знаком «+».

Такое большое число независимых коэффициентов объясняется анизотропией свойств кристаллов, т.е. различием их свойств, в том числе и упругих, в различных направлениях.

#### 8.1.4. Некоторые случаи упругой симметрии

Если в каждой точке упругой среды имеется *плоскость упругой симметрии*, обладающая тем свойством, что в любых двух направлениях, симметричных относительно этой плоскости, упругие свойства одинаковы, то число независимых упругих коэффициентов сокращается до 13. Например, если  $x_1 O x_2$  - плоскость упругой симметрии, то независимыми упругими коэффициентами являются следующие 13 [см. формулу (8.7)]: расположенные на главной диагонали (отмеченные знаком «+») и расположенные выше её без точек и с двумя точками внизу.

Если через каждую точку среды проходят три взаимно перпендикулярные плоскости упругой симметрии, такая среда называется *ортотропной*, а число независимых упругих коэффициентов сокращается до девяти. Если  $x_2 O x_3$ ,  $x_3 O x_1$  также плоскости упругой симметрии (ортотропная среда), то девять независимых упругих коэффициентов располагаются следующим образом: шесть на главной диагонали (отмеченные знаком «+») и три без точек, расположенные выше главной диагонали.

Если во всех точках среды упругие свойства одинаковы во всех направлениях, такая среда называется *изотропной*. Её упругие коэффициенты не меняются при ортогональных преобразованиях, когда новая система координат получается путём жёсткого поворота старой. В прямоугольных декартовых координатах они представляют собой упругие постоянные.

Упругий потенциал  $a_B$  - инвариантная величина, поскольку работа внутренних сил не зависит от выбора системы координат. Так как  $a_B$  - однородная функция второй степени деформаций  $\varepsilon_{ij}$ , то  $a_B$  можно выразить через квадрат первого инварианта шарового тензора деформаций и второй инвариант девиатора деформаций, а именно

$$a_B = C_1[I_1(P_\varepsilon)]^2 + C_2I_2(D_\varepsilon). \quad (8.20)$$

Из этой формулы видно, что упругие свойства изотропной среды определяются только двумя постоянными величинами, через которые можно выразить все независимые упругие коэффициенты.

### 8.1.5. *Связь между напряжениями и деформациями для изотропной среды*

В соответствии с формулами (2.80), (2.81) первый инвариант шарового тензора деформаций равен

$$I_1(P_\varepsilon) = 3\varepsilon = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{ii} = \varepsilon_{ij}g_{ij}. \quad (8.21)$$

Второй инвариант девиатора деформаций согласно формулам (1.95) и (1.90) равен

$$\begin{aligned} I_2(D_\varepsilon) &= -\frac{1}{2}\left[\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ji} - \frac{1}{3}(\varepsilon_{ii})^2\right] = \\ &= -\frac{1}{2}\left[\varepsilon_{ij}\varepsilon_{mn}g_{im}g_{jn} - \frac{1}{3}(\varepsilon_{ij}g_{ij})^2\right]. \end{aligned} \quad (8.22)$$

Подставим эти выражения инвариантов в формулу (8.20). Получим, что удельная работа внутренних сил равна

$$a_B = C_3(\varepsilon_{ij}g_{ij})^2 + C_4\varepsilon_{ij}\varepsilon_{mn}g_{im}g_{jn}, \quad (8.23)$$

где новые постоянные равны  $C_3 = C_1 + (1/6)C_2$ ,  $C_4 = -(1/2)C_2$ .

Продифференцируем (8.23) по  $\varepsilon_{ij}$ . Получим согласно (8.17) искомую связь между напряжениями и деформациями:

$$\sigma_{ij} = \partial a_B / \partial \varepsilon_{ij} = 2C_3\theta g_{ij} + C_4\varepsilon_{mn}g_{im}g_{jn}, \quad (8.24)$$

где по формуле (2.69) относительное изменение объёма равно

$$\theta = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{ii} = \varepsilon_{ij}g_{ij}. \quad (8.25)$$

### 8.1.6. Упругие постоянные изотропной среды

Найдём постоянные  $C_3$  и  $C_4$ . Рассмотрим простой (чистый) сдвиг в плоскости  $xOy$ . В случае малой деформации простой сдвиг (рис. 2.8) и чистый сдвиг (рис. 2.2, б) совпадают. В этом случае относительное изменение объема  $\theta = 0$ . В нашем случае компоненты метрического тензора образуют единичную матрицу, т.е. они равны символам Кронекера, а именно  $g_{ij} = \delta_{ij}$  [см. формулу (1.34)]. В нашем случае из 9 напряжений отличны от нуля только два напряжения,  $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$  [см. формулу (4.34)], а из 9 деформаций также отличны от нуля только две деформации,  $\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx}$ . Формула (8.24) для сдвига примет вид с учётом формулы (2.63)

$$\sigma_{xy} = C_4 \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} C_4 \gamma_{xy}. \quad (8.26)$$

Сравнивая с формулой (5.2)  $\sigma_{yx} = G \gamma_{yx}$  найдём, что

$$C_4 = 2G, \quad (8.27)$$

где  $G$  - модуль упругости второго рода, или модуль сдвига.

Рассмотрим теперь одноосное растяжение по оси  $x$ . При этом согласно формуле (5.9) относительная деформация в поперечном направлении (по диаметру растягиваемого образца) равна

$$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = -\mu \varepsilon_{xx}, \quad (8.28)$$

где  $\mu$  - коэффициент поперечной деформации при упругой деформации, или коэффициент Пуассона, равный абсолютной величине отношения поперечной деформации  $\varepsilon_{yy}$  к продольной деформации  $\varepsilon_{xx}$ . Подставим выражение поперечной деформации (8.28) в формулу (8.25). Получим относительное изменение объема при упругой деформации при одноосном растяжении

$$\theta = (1 - 2\mu) \varepsilon_{xx}. \quad (8.29)$$

При одноосном растяжении из 9 напряжений отлично от нуля только одно,  $\sigma_{xx}$ . Формула (8.24) для одноосного растяжения примет вид

$$\sigma_{xx} = 2C_3(1 - 2\mu) \varepsilon_{xx} + 2G \varepsilon_{xx}. \quad (8.30)$$

Сравнивая с формулой (5.1)  $\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx}$ , найдём, что

$$2C_3 = (E - 2G)/(1 - 2\mu) = \lambda, \quad (8.31)$$

где  $E$  - модуль упругости первого рода, или модуль продольной (нормальной) упругости, или модуль Юнга. С модулем сдвига  $G$  он связан известным из «Сопrotivления материалов» соотношением

$$E = 2G(1 + \mu), \quad G = \frac{E}{2(1 + \mu)}. \quad (8.32)$$

Величина  $\lambda$  называется *постоянной Ламе*. Заменяем в формуле (8.31) модуль упругости первого рода  $E$  по формуле (8.32). Получим и такое выражение постоянной Ламе

$$\lambda = 2\mu G/(1 - 2\mu). \quad (8.33)$$

Теперь связь (8.24) между напряжениями и деформациями изотропной линейно-упругой среды можно выразить через упругие постоянные  $G$  и  $\lambda$ . Заменяем  $2C_3$  по формуле (8.31), а  $C_4$  по формуле (8.27). Получим, что

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{mn}g_{im}g_{jn} + \lambda\theta g_{ij}. \quad (8.34)$$

Найдём теперь упругие коэффициенты изотропной среды. Заменяем в формуле (8.34) относительное изменение объёма по формуле (8.25). Получим

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{mn}g_{im}g_{jn} + \lambda\varepsilon_{mn}g_{mn}g_{ij}. \quad (8.35)$$

Сравнивая эту формулу с формулой (8.6), получим выражение упругих коэффициентов  $C_{ijmn}$  через упругие постоянной  $G$  и  $\lambda$ :

$$C_{ijmn} = G(g_{im}g_{jn} + g_{in}g_{jm}) + \lambda g_{ij}g_{mn}. \quad (8.36)$$

В прямоугольной декартовой системе координат, как отмечалось выше,  $g_{ij} = \delta_{ij}$  (т.е. это 1, если  $i = j$  и 0, если  $i \neq j$ ). Кроме того, в прямоугольной декартовой системе координат порядок нумерации осей вследствие изотропии свойств среды несущественен. Тогда по формуле (8.36) получим, что упругие коэффициенты изотропной среды равны

$$\left. \begin{aligned} C_{1111} = C_{2222} = C_{3333} &= 2G + \lambda; \\ C_{1122} = C_{2233} = C_{1133} &= \lambda; \\ C_{1212} = C_{2323} = C_{3131} &= 2G. \end{aligned} \right\} \quad (8.37)$$

Остальные коэффициенты, расположенные выше главной диагонали в матрице упругих коэффициентов (8.7), равны нулю.

### 8.1.7. Уравнения состояния изотропной линейно-упругой среды

В прямоугольной декартовой системе координат выражение напряжений через деформации (8.34) имеет вид

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + \lambda\theta\delta_{ij}, \quad (8.38)$$

или подробно, учитывая, что  $\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\gamma_{xy}$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} = 2G\varepsilon_{xx} + \lambda\theta, \quad \sigma_{xy} = 2G\varepsilon_{xy} = G\gamma_{xy}, \\ \sigma_{yy} = 2G\varepsilon_{yy} + \lambda\theta, \quad \sigma_{yz} = 2G\varepsilon_{yz} = G\gamma_{yz}, \\ \sigma_{zz} = 2G\varepsilon_{zz} + \lambda\theta, \quad \sigma_{zx} = 2G\varepsilon_{zx} = G\gamma_{zx}. \end{aligned} \right\} \quad (8.39)$$

Решим систему уравнений (8.39) относительно деформаций. Получим выражение деформаций через напряжения:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \mu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})], \quad \varepsilon_{xy} = \sigma_{xy}/2G, \\ \varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \mu(\sigma_{zz} + \sigma_{xx})], \quad \varepsilon_{yz} = \sigma_{yz}/2G, \\ \varepsilon_{zz} = \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \mu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})], \quad \varepsilon_{zx} = \sigma_{zx}/2G. \end{aligned} \right\} \quad (8.40)$$

Эти формулы можно получить непосредственно из простых соображений, если принять, что нормальные напряжения вызывают только линейные деформации, а касательные напряжения вызывают только сдвиговые деформации. В направлении оси  $x$  напряжение  $\sigma_{xx}$  вызывает деформацию  $\sigma_{xx}/E$  [см. формулу (5.1)]. Напряжение  $\sigma_{yy}$  в направлении оси  $x$  вызывает деформацию  $-\mu\sigma_{yy}/E$ . Напряжение  $\sigma_{zz}$  в направлении оси  $x$  вызывает

деформацию  $-\mu\sigma_{zz}/E$ . Суммарная деформация в направлении оси  $x$  равна

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E} - \frac{\mu\sigma_{yy}}{E} - \frac{\mu\sigma_{zz}}{E},$$

т.е. получили первую формулу (8.40). Формулы для  $\varepsilon_{yy}$  и  $\varepsilon_{zz}$  по-

лучаются аналогично. Формулы для  $\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\gamma_{xy}$ ,  $\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}\gamma_{yz}$ ,

$\varepsilon_{zx} = \frac{1}{2}\gamma_{zx}$  получаются на основании формулы (5.2)  $\sigma_{yx} = G\gamma_{yx}$ .

Если теперь решить систему уравнений (8.40) относительно напряжений, получим формулы (8.39). Обратим внимание на то, что первые и последние три формулы (8.39), (8.40) получаются одна из другой по правилу круговой замены индексов (см. п. 1.2.6).

Формулы (8.40) также можно представить в краткой, индексной записи:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E} [\sigma_{ij} - \mu(3\sigma\delta_{ij} - \sigma_{ij})], \quad (8.41)$$

где  $\sigma = (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})/3 = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3 = \sigma_{ii}/3$  - среднее нормальное напряжение, или гидростатическое давление. Формулы (8.38) и (8.39), (8.40) и (8.41) – это и есть *уравнения состояния изотропной линейно-упругой среды*.

Уравнения состояния (8.39), (8.40) можно записать и в главной системе координат. Для изотропной упругой среды главные системы координат тензоров напряжений и деформаций совпадают. Запишем, например, уравнения (8.39) в главной системе координат:

$$\sigma_1 = 2G\varepsilon_1 + \lambda\theta, \quad \sigma_2 = 2G\varepsilon_2 + \lambda\theta, \quad \sigma_3 = 2G\varepsilon_3 + \lambda\theta, \quad (8.42)$$

где относительное изменение объема  $\theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$  [см. формулу (2.69)].

### 8.1.8. Упругое изменение объема

Сложим уравнения (8.42):

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 2G(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) + 3\lambda\theta,$$

или

$$3\sigma = 2G\theta + 3\lambda\theta,$$

откуда относительное изменение объёма равно

$$\theta = \frac{3\sigma}{2G + 3\lambda}. \quad (8.43)$$

Заменим  $\lambda$  по формуле (8.33), а затем  $G$  по формуле (8.32). Получим

$$\theta = \frac{3\sigma}{E/(1-2\mu)}. \quad (8.44)$$

Итак, относительное изменение объёма при упругой деформации пропорционально среднему нормальному напряжению  $\sigma$  и равно

$$\theta = \sigma/K, \quad (8.45)$$

где согласно (8.43), (8.44) величина  $K$  равна

$$K = \frac{2}{3}G + \lambda = \frac{E}{3(1-2\mu)} \quad (8.46)$$

и называется *объёмным модулем упругости*.

Мы рассмотрели пять упругих постоянных линейно-упругой изотропной среды:  $E$ ,  $\mu$ ,  $G$ ,  $\lambda$ ,  $K$ . Из них независимыми являются только две. Из опытов наиболее просто определить  $E$  и  $\mu$ , затем  $G$ ,  $\lambda$  и  $K$  можно найти по формулам соответственно (8.32), (8.33), (8.46), а упругие коэффициенты можно найти по формулам (8.37).

### 8.1.9. Связь между обобщёнными напряжениями и деформациями при упругой деформации

Вычитая уравнения (8.42) одно из другого, получим

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 - \sigma_2 &= 2G(\varepsilon_1 - \varepsilon_2), \\ \sigma_2 - \sigma_3 &= 2G(\varepsilon_2 - \varepsilon_3), \\ \sigma_1 - \sigma_3 &= 2G(\varepsilon_1 - \varepsilon_3). \end{aligned} \right\} \quad (8.47)$$

В этих формулах в левых частях стоят диаметры кругов Мора для напряжений (см. п. 4.3.1), а в правых частях – диаметры кругов Мора для деформаций. Следовательно, при упругой деформации

диаграммы Мора для напряжений и деформаций подобны, а коэффициент подобия равен  $2G$ .

Запишем формулу (4.41) для интенсивности касательных напряжений:

$$T = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}.$$

Заменим разности главных нормальных напряжений по формулам (8.47). Сравним полученное выражение с формулой (2.85) для интенсивности деформации сдвига

$$\Gamma = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}.$$

Получим связь между обобщёнными напряжениями и деформациями при упругой деформации:

$$T = G\Gamma. \quad (8.48)$$

Заменим согласно (4.42)  $T = \sigma_u / \sqrt{3}$ , а согласно (2.83)  $\Gamma = \sqrt{3}\varepsilon_u$ . Получим связь между интенсивностью напряжений  $\sigma_u$  и интенсивностью деформаций  $\varepsilon_u$ :

$$\sigma_u = 3G\varepsilon_u = 3 \frac{E}{2(1 + \mu)} \varepsilon_u. \quad (8.49)$$

Обратим внимание на то, что простая, аналогичная (8.48), зависимость

$$\sigma_u = E\varepsilon_u \quad (8.50)$$

имеет место только при условии несжимаемости, когда  $\mu = 1/2$ .

Вычтем из левых частей (8.42) среднее нормальное напряжение  $\sigma$ , а из правых частей равную ему согласно (8.43) величину

$$\sigma = \left( \frac{2}{3}G + \lambda \right) \theta = K\theta. \quad (8.51)$$

Получим

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 - \sigma &= 2G \left( \varepsilon_1 - \frac{\theta}{3} \right), \\ \sigma_2 - \sigma &= 2G \left( \varepsilon_2 - \frac{\theta}{3} \right), \\ \sigma_3 - \sigma &= 2G \left( \varepsilon_3 - \frac{\theta}{3} \right), \end{aligned} \right\} \quad (8.52)$$

где согласно (2.81)  $\theta/3 = \varepsilon$  - средняя деформация. В левых частях (8.52) стоят компоненты девиатора напряжений [см. п. 4.2.6], а в правых согласно формуле (2.80) – компоненты девиатора деформаций. Итак, при упругой деформации девиатор напряжений  $D_\sigma$  пропорционален девиатору деформаций  $D_\varepsilon$ , а коэффициент пропорциональности равен  $2G$ :

$$D_\sigma = 2GD_\varepsilon. \quad (8.53)$$

Формулы (8.48), (8.49), (8.53) также изображают *обобщённый закон Гука*, т.е. являются *уравнениями состояния изотропной линейно-упругой среды*.

### 8.1.10. Закон Гука с учётом температурных напряжений

Обозначим через  $T_0$  и  $T$  температуру в рассматриваемой точке  $M$  деформируемого тела соответственно в начальный  $t_0$  и текущий  $t$  моменты времени. Вследствие разности этих температур относительные удлинения всех материальных волокон, проходящих через точку  $M$ , увеличатся за время  $t - t_0$  на  $\alpha(T - T_0)$ , где  $\alpha$  - *коэффициент линейного теплового расширения* (для железа в интервале температур от 0 до  $100^\circ\text{C}$  в среднем  $\alpha = 12,2 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ ). Сдвиговые же деформации в точке  $M$  не меняются. Тогда обобщённый закон Гука с учётом температурных напряжений примет вид

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E} [\sigma_{ij} - \mu(3\sigma\delta_{ij} - \sigma_{ij})] + \alpha(T - T_0)\delta_{ij}. \quad (8.54)$$

Если напряжения отсутствуют ( $\sigma_{ij} = \sigma = 0$ ), деформации не равны нулю. Вследствие изменения температуры

$\varepsilon_{ij} = \alpha(T - T_0)\delta_{ij}$ , т.е. тензор деформаций является шаровым, а относительное изменение объёма равно  $\theta = 3\alpha(T - T_0)$ . Решая (8.54) относительно напряжений, получим [сравнить с (8.38)]

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + \lambda\theta\delta_{ij} - 3\alpha K(T - T_0)\delta_{ij}, \quad (8.55)$$

где  $-3\alpha K(T - T_0)\delta_{ij}$  - температурные напряжения, отличные от нуля, если даже все деформации равны нулю. В этом случае тензор напряжений шаровой, а среднее напряжение равно  $\sigma = -3\alpha K(T - T_0)$ . Записывая (8.55) при  $i = j$  и произведя суммирование, получим, учитывая, что  $\delta_{ii} = 3$ , обобщённый закон Гука вида (8.51) с учётом температурных напряжений

$$\sigma = K\theta - 3\alpha K(T - T_0). \quad (8.56)$$

При высоких температурах следует учитывать зависимость постоянных упругости  $E$ ,  $G$ ,  $K$  от температуры.

### **Контрольные вопросы**

1. Что такое идеально упругое твёрдое тело?
2. Как записывается связь между напряжениями и деформациями для анизотропной линейно-упругой среды? Что такое упругие коэффициенты и как они преобразуются при изменении системы координат?
3. Покажите, что упругие коэффициенты образуют тензор четвёртого ранга.
4. Назовите основные задачи теории упругости.
5. Запишите матрицу независимых упругих коэффициентов. Почему число независимых коэффициентов равно не 81, а 36?
6. Что такое упругий потенциал? Как выражаются через него напряжения? Покажите, что упругий потенциал – величина инвариантная.
7. Почему матрица упругих коэффициентов (8.7) является симметричной, т.е. число независимых упругих коэффициентов фактически равно 21?
8. Что такое анизотропная, ортотропная, изотропная среда? Каким числом независимых упругих коэффициентов характеризуются эти среды?
9. Почему формула (8.20) справедлива только для изотропной среды? Почему в неё не входят второй и третий инва-

- рианты шарового тензора, а также первый и третий инварианты девиатора деформаций?
10. Какие формы записи обобщённого закона Гука для изотропной линейно-упругой среды вы знаете?
  11. Выведите формулу (8.36). почему первое слагаемое в правой части не имеет вид  $2Gg_{im}g_{jn}$ , как это кажется на первый взгляд?
  12. Сколько упругих постоянных изотропной линейно-упругой среды вы знаете? Какова между ними связь? Как выражаются через них упругие коэффициенты?
  13. Чему равно относительное изменение объёма при упругой деформации?
  14. Запишите формулу связи между обобщёнными напряжениями и деформациями при упругой деформации.
  15. Запишите обобщённый закон Гука для изотропной линейно-упругой среды с учётом температурных напряжений.
  16. Покажите, что при учёте температурных напряжений формулы обобщённого закона Гука (8.48), (8.49) и (8.53) не меняются.

## 8.2. Система уравнений линейной теории упругости и методы её решения

### 8.2.1. Замкнутая система уравнений линейной теории упругости

Для решения динамических задач термоупругости имеем 22 уравнения. В том числе три уравнения движения (5.51), шесть уравнений связи деформаций с перемещениями (2.72), шесть уравнений состояния (8.55), три уравнения связи скоростей и перемещений (1.111), три уравнения связи ускорений и скоростей (1.133), уравнение теплопроводности (5.98) при условии, что диссипативная функция  $\sigma_{ij} \xi_{ij}^p$  равна нулю. Это объясняется тем, что при деформации идеально упругой среды остаточная деформация отсутствует, а рассеяние энергии равно нулю. Запишем перечисленные уравнения:

$$\left. \begin{aligned}
 & \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \rho F_i = \rho a_i, & (a) \\
 & \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), & (б) \\
 & \sigma_{ij} = 2G \varepsilon_{ij} + \lambda \theta \delta_{ij} - 3\alpha K (T - T_0) \delta_{ij}, & (в) \\
 & \vec{v} = \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right)_{\xi_i}, & (г) \\
 & a_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k}, & (д) \\
 & c\rho \frac{dT}{dt} = k \operatorname{div} \operatorname{grad} T. & (e)
 \end{aligned} \right\} (8.57)$$

Эти уравнения содержат 22 переменных величины: шесть напряжений  $\sigma_{ij}$ , шесть деформаций  $\varepsilon_{ij}$ , три перемещения  $u_i$ , три скорости  $v_i$ , три ускорения  $a_i$ , температуру  $T$ . Если температурные напряжения не учитываются, имеем 21 переменную, при этом уравнение (8.57, е) исключается.

Для статической задачи не рассчитываются скорости и ускорения, поэтому имеем 15 переменных и соответственно 15 уравнений (8.57, а, б, в), причём уравнения движения (8.57, а) заменяются уравнениями равновесия  $\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \rho F_i = 0$ .

Дополнительно могут использоваться также уравнения совместности деформаций (2.77), (2.78).

### 8.2.2. Постановка задач в теории упругости

Решения указанных систем уравнений должны удовлетворять для статических задач *граничные условия*, т.е. условия на поверхности деформируемого тела, а для динамических задач дополнительно и *начальные условия*, т.е. условия в начальный момент времени.

При решении *статических задач* задаются форма и размеры тела, его положение в пространстве, постоянные упругости, плотность, массовые силы. Задаются либо *кинематические граничные условия* (перемещение каждой точки поверхности тела), либо

*статические граничные условия* (поверхностные напряжения в каждой точке поверхности тела), *либо смешанные граничные условия* (на части поверхности тела задаются перемещения, а на остальной части поверхности – напряжения).

При решении *динамических задач* задаются *динамические граничные условия* как функции не только точек поверхности тела, но и времени. Начальные условия включают в себя задание в начальный момент времени перемещений и скоростей всех точек тела.

При решении *задач термоупругости* дополнительно задают температурное поле в начальный момент времени и граничные условия для расчёта температуры (температура точек поверхности тела, тепловой поток через поверхность тела и др.).

Различают *прямую и обратную задачи теории упругости*. В прямой задаче граничные условия заданы, а требуется определить напряжения, деформации, перемещения и др. во всём объёме деформируемого тела. В обратной задаче в объёме тела заданы поля напряжений, перемещений и др., а требуется найти граничные условия.

Доказано, что решение указанных статических и динамических задач упругости и термоупругости при рассмотренных граничных и начальных условиях существует, причём решение является единственным.

### 8.2.3. Решение задач теории упругости в перемещениях

В уравнения состояния (8.39) подставим выражения деформаций через перемещения (8.57, б). Полученные выражения напряжений подставим в уравнения движения (8.57, а). Получим *уравнения теории упругости в перемещениях*, или *уравнения Ламе*

$$\left. \begin{aligned} (\lambda + G) \frac{\partial \theta}{\partial x} + G \Delta u_x + \rho F_x &= a_x, \\ (\lambda + G) \frac{\partial \theta}{\partial y} + G \Delta u_y + \rho F_y &= a_y, \\ (\lambda + G) \frac{\partial \theta}{\partial z} + G \Delta u_z + \rho F_z &= a_z, \end{aligned} \right\} \quad (8.58)$$

где  $\Delta \equiv \text{div grad} \equiv \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$  - оператор Лапласа,  $\theta = \partial u_x/\partial x + \partial u_y/\partial y + \partial u_z/\partial z = \text{div } \vec{u}$  - относительное изменение объёма.

Умножим первое уравнение (8.58) на  $\vec{i}$ , второе – на  $\vec{j}$ , третье – на  $\vec{k}$  и сложим их правые части. Получим *уравнение Ламе* в векторной форме, пригодное в любой системе координат:

$$(\lambda + G)\text{grad div } \vec{u} + G\Delta \vec{u} + \rho \vec{F} = \rho \vec{a}. \quad (8.59)$$

Если учитываются температурные напряжения, необходимо взять уравнение состояния (8.55). Произведя аналогичные выкладки, получим *уравнение термоупругости в перемещениях*, или *уравнение Дюгамеля-Неймана*

$$(\lambda + G)\text{grad div } \vec{u} + G\Delta \vec{u} + \rho \vec{F} - 3\alpha K \text{grad } T = \rho \vec{a}. \quad (8.60)$$

Как видно, неравномерность нагрева тела как бы равна добавлению к реальным объёмным силам  $\vec{F}$  фиктивных объёмных сил  $-3\alpha K \text{grad } T$ , пропорциональных градиенту температурного поля.

#### 8.2.4. Решение задач теории упругости в напряжениях

Выражения деформаций из уравнений состояния (8.40) подставим в уравнения совместности деформаций (2.77) и (2.78). Получим шесть уравнений, содержащих только напряжения. Решая их совместно с уравнениями равновесия  $\partial \sigma_{ik}/\partial x_k + \rho F_i = 0$ , получим шесть *уравнений теории упругости в напряжениях*, или *уравнения Бельтрами-Митчела*:

$$\left. \begin{aligned}
 \Delta \sigma_{xx} + \frac{3}{1+\mu} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} &= -2\rho \frac{\partial F_x}{\partial x} - \frac{\mu\rho}{1-\mu} \left( \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right); \\
 \Delta \sigma_{yy} + \frac{3}{1+\mu} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2} &= -2\rho \frac{\partial F_y}{\partial y} - \frac{\mu\rho}{1-\mu} \left( \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right); \\
 \Delta \sigma_{zz} + \frac{3}{1+\mu} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2} &= -2\rho \frac{\partial F_z}{\partial z} - \frac{\mu\rho}{1-\mu} \left( \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right); \\
 \Delta \sigma_{xy} + \frac{3}{1+\mu} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial y} &= -\rho \left( \frac{\partial F_x}{\partial y} + \frac{\partial F_y}{\partial x} \right); \\
 \Delta \sigma_{yz} + \frac{3}{1+\mu} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y \partial z} &= -\rho \left( \frac{\partial F_y}{\partial z} + \frac{\partial F_z}{\partial y} \right); \\
 \Delta \sigma_{zx} + \frac{3}{1+\mu} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial z \partial x} &= -\rho \left( \frac{\partial F_z}{\partial x} + \frac{\partial F_x}{\partial z} \right);
 \end{aligned} \right\} \quad (8.61)$$

где, как и прежде,  $\Delta$  - оператор Лапласа. Если массовые силы отсутствуют, правые части равны нулю.

### **Задача 8.1. Упругая деформация толстостенной трубы под действием внутреннего и наружного давлений**

Рассчитать напряжённо-деформированное состояние толстостенной трубы (рис. 8.1) в условиях плоского деформированного состояния.

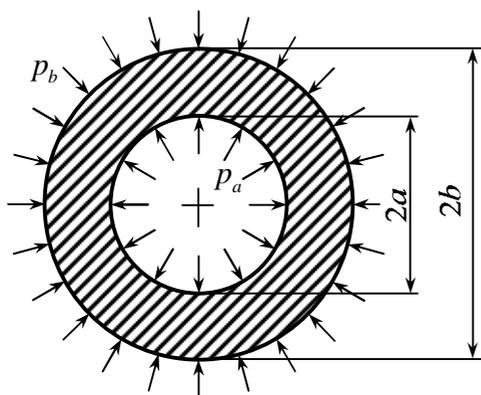


Рис. 8.1. Поперечное сечение толстостенной трубы, находящейся под действием внутреннего  $p_a$  и наружного  $p_b$  давлений

Решение. 1) Вначале заметим, что в толстостенной трубе толщина её стенки  $b - a$  сопоставима по величине с внутренним  $a$  и наружным  $b$  радиусами. Используем цилиндрическую систему координат (см. п. 1.1.4). Направим координатные линии  $r, \alpha, z$  соответственно по радиусу трубы, в окружном направлении и

вдоль оси трубы. Так как деформированное состояние плоское, то  $\sigma_{rz} = \sigma_{zr} = \sigma_{\alpha z} = \sigma_{z\alpha} = 0$ . Напряжённо-деформированное состояние трубы является осесимметричным. Поэтому согласно (4.21)  $\sigma_{r\alpha} = \sigma_{\alpha r} = 0$ , так что отличны от нуля только нормальные напряжения  $\sigma_1 = \sigma_{\alpha\alpha}$ ,  $\sigma_2 = \sigma_{zz}$ ,  $\sigma_3 = \sigma_{rr}$ .

2) Из трёх компонент вектора перемещения  $\vec{u} = u_r \vec{e}_r + u_\alpha \vec{e}_\alpha + u_z \vec{e}_z$  две ( $u_\alpha$  и  $u_z$ ) равны нулю, а  $u_r$  зависит только от координаты  $r$ , т.е. точки трубы перемещаются в радиальных направлениях. Соотношение между внутренним  $p_a$  и наружным  $p_b$  давлениями полагаем таким, что внутренний  $a$  и наружный  $b$  радиусы трубы увеличиваются.

3) Система уравнений состоит из уравнения равновесия, которое получается из первого уравнения (5.54)

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\alpha\alpha}}{r} = 0, \quad (8.62)$$

соотношений между деформациями и перемещениями, которые получаются из формул (2.75)

$$\varepsilon_{rr} = \frac{du_r}{dr}, \quad \varepsilon_{\alpha\alpha} = \frac{u_r}{r}, \quad (8.63)$$

уравнений состояния (8.39)

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr} &= 2G\varepsilon_{rr} + \lambda\theta, \\ \sigma_{\alpha\alpha} &= 2G\varepsilon_{\alpha\alpha} + \lambda\theta, \\ \sigma_{zz} &= \lambda\theta, \end{aligned} \right\} \quad (8.64)$$

где  $\theta = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\alpha\alpha} + \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\alpha\alpha}$  - относительное изменение объёма.

4) Решим задачу в перемещениях. Подставим в (8.64) выражения деформаций по формулам (8.63). Полученные выражения напряжений подставим в уравнение равновесия (8.62). Получим уравнение в перемещениях

$$\frac{d^2 u_r}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_r}{dr} - \frac{u_r}{r^2} = 0, \quad (8.65)$$

решение которого имеет вид  $u_r = C_1 r + C_2 / r$ . Тогда согласно (8.63)  $\varepsilon_{rr} = C_1 - C_2 / r^2$ ,  $\varepsilon_{\alpha\alpha} = C_1 + C_2 / r^2$ , а

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr} &= 2G(C_1 - C_2 / r^2) + 2\lambda C_1, \\ \sigma_{\alpha\alpha} &= 2G(C_1 + C_2 / r^2) + 2\lambda C_1. \end{aligned} \right\} \quad (8.66)$$

5) Постоянные  $C_1$  и  $C_2$  найдём из граничных условий: на внутренней поверхности трубы (при  $r = a$ )  $\sigma_{rr} = -p_a$ , на наружной поверхности (при  $r = b$ )  $\sigma_{rr} = -p_b$ . Подставим эти значения  $r$  и  $\sigma_{rr}$  в первую формулу (8.66):

$$\left. \begin{aligned} -p_a &= 2G(C_1 - C_2 / a^2) + 2\lambda C_1, \\ -p_b &= 2G(C_1 - C_2 / b^2) + 2\lambda C_1. \end{aligned} \right\} \quad (8.67)$$

Решая эту систему уравнений относительно  $C_1$  и  $C_2$ , найдём

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{2(G + \lambda)} \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2}, \\ C_2 &= \frac{1}{2G} \frac{a^2 b^2 (p_a - p_b)}{b^2 - a^2}. \end{aligned} \right\} \quad (8.68)$$

6) Подставим эти выражения постоянных  $C_1$  и  $C_2$  в формулы (8.66). Получим окончательно распределение напряжений в поперечном сечении трубы:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\alpha\alpha} \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} \left. \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2} \mp \frac{p_a - p_b}{b^2 - a^2} \frac{a^2 b^2}{r^2} \right\} \quad (8.69)$$

Как видно, формулы для радиального  $\sigma_{rr}$  и окружного  $\sigma_{\alpha\alpha}$  напряжений различаются только знаками между слагаемыми. Обратим внимание на то, что эти напряжения не зависят от упругих постоянных  $G$  и  $\lambda$ . Осевое напряжение постоянно по всему поперечному сечению трубы:

$$\sigma_{zz} = \lambda\theta = \lambda(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\alpha\alpha}) = 2C_1\lambda = \frac{\lambda}{G + \lambda} \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2}. \quad (8.70)$$

7) Радиальное перемещение найдём по формуле

$$u_r = C_1 r + C_2 / r. \quad (8.71)$$

Если принять условие несжимаемости ( $\mu = 1/2$ ), то согласно формуле (8.33) постоянная Ламе  $\lambda \rightarrow \infty$ . В этом случае по первой формуле (8.68) найдём, что  $C_1 = 0$ . Тогда радиальное перемещение равно  $u_r = C_2 / r$ , или окончательно

$$u_r = \frac{1}{2G} \frac{a^2 b^2 (p_a - p_b)}{b^2 - a^2} \frac{1}{r}. \quad (8.72)$$

Радиальное перемещение зависит, конечно, от упругих постоянных материала трубы.

8) При положительных значениях внутреннего  $p_a$  и наружного  $p_b$  давлений радиальное напряжение всегда отрицательно ( $\sigma_{rr} < 0$ ), т. е. частицы трубы испытывают вдоль оси  $r$  сжатие. Знаки окружного напряжения  $\sigma_{\alpha\alpha}$  и осевого напряжения  $\sigma_{zz}$  зависят от соотношения между  $p_a$  и  $p_b$ . Окружное напряжение может быть только сжимающим (рис. 8.2), может менять свой знак (рис. 8.3), а может быть только растягивающим (рис. 8.4).

9) Влияние сжимаемости материала трубы (коэффициента поперечной деформации  $\mu$ ). Как уже отмечалось, напряжения  $\sigma_{rr}$  и  $\sigma_{\alpha\alpha}$  не зависят от упругих констант материала [формулы (8.69)].

Осевое напряжение  $\sigma_{zz}$  зависит от упругих свойств материала [формула (8.70)]. Но если принять условие несжимаемости ( $\mu = 1/2, \lambda \rightarrow \infty$ ), то и оно не будет зависеть от упругих констант, а формула (8.70) принимает более простой вид

$$\sigma_{zz} = \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2}.$$

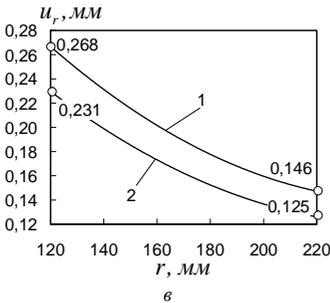
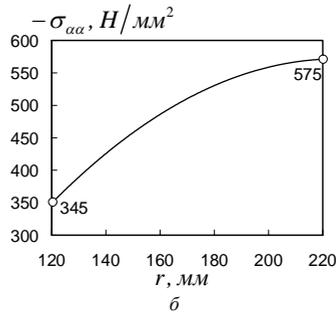
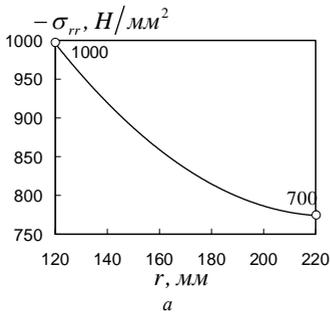


Рис. 8.2. Распределение радиального  $\sigma_{rr}$  и окружного  $\sigma_{\alpha\alpha}$  напряжений и радиального перемещения  $u_r$  (1- при допущении нежимаемости  $\mu = 0,5$ ; 2 - при  $\mu = 0,3$ ) в поперечном сечении толстостенной трубы ( $a = 120 \text{ мм}, b = 220 \text{ мм}, p_a = 1000 \text{ Н/мм}^2, p_b = 700 \text{ Н/мм}^2, E = 220 \cdot 10^3 \text{ Н/мм}^2$ )

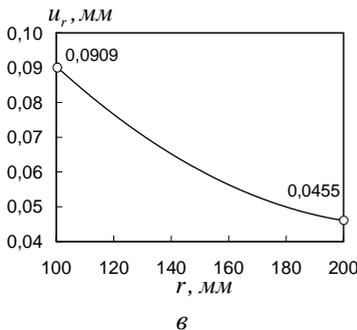
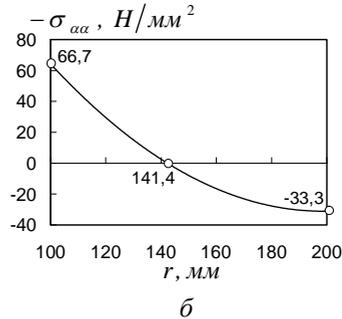
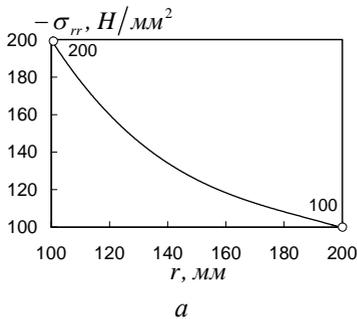
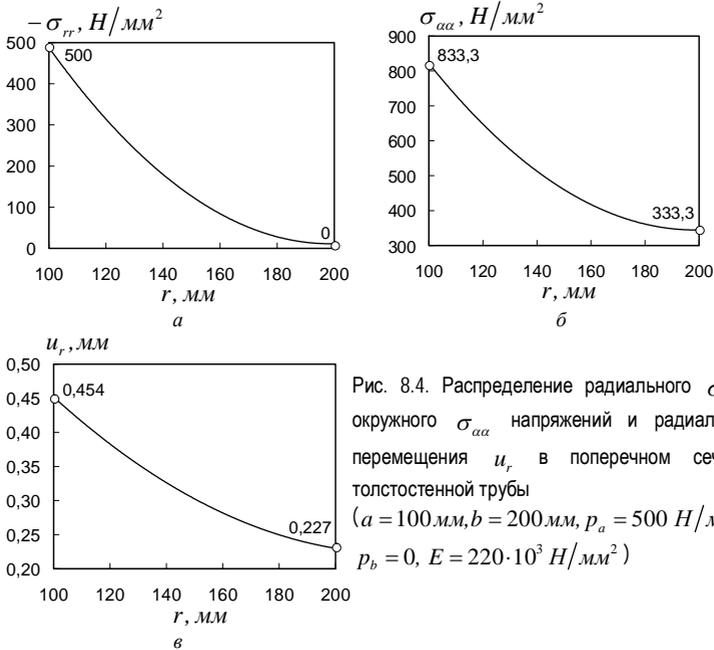


Рис. 8.3. Распределение радиального  $\sigma_{rr}$  и окружного  $\sigma_{\alpha\alpha}$  напряжений и радиального перемещения  $u_r$  в поперечном сечении толстостенной трубы ( $a = 100 \text{ мм}, b = 200 \text{ мм}, p_a = 200 \text{ Н/мм}^2, p_b = 100 \text{ Н/мм}^2, E = 220 \cdot 10^3 \text{ Н/мм}^2$ )



10) Радиальное перемещение  $u_r$  в любом случае зависит от упругих свойств материала. В условиях несжимаемости находим его по формуле (8.72). Если материал трубы сжимаем ( $\mu < 1/2$ ), то радиальное перемещение рассчитывается по формуле (8.71), где постоянные  $C_1$  и  $C_2$  находим по формулам (8.68). На рис. 8.2 показано изменение радиального перемещения вдоль радиуса трубы, рассчитанное при условии несжимаемости по формуле (8.72) (линия 1). Для сжимаемого материала ( $\mu = 0,3$ ) расчёт  $u_r$  сделан по формуле (8.71) (линия 2). Видно, что для сжимаемого материала радиальное перемещение меньше и становится минимальным, когда  $\mu \rightarrow 0$ .

**Задача 8.2. Влияние толщины стенки трубы на ее прочность**

Определить насколько эффективно увеличивать толщину стенки толстостенной трубы (рис. 8.1) с целью увеличения её прочности.

Решение (по Л.И. Седову). 1) Рассмотрим распространённый случай, когда  $p_b = 0$ . Наиболее опасными напряжениями являются в этом случае растягивающие (положительные) напряжения  $\sigma_{\alpha\alpha}$ , так как они могут вызвать появление трещин и разрушение трубы. Осевые напряжения  $\sigma_{zz}$  в этом случае тоже растягивающие, но они по всему сечению трубы меньше, чем  $\sigma_{\alpha\alpha}$ . Действительно, из сравнения формулы (8.69) для расчета  $\sigma_{\alpha\alpha}$  и формулы (8.70) для осевого напряжения  $\sigma_{zz}$  видно, что при  $\mu = \frac{1}{2}$

$$\sigma_{\alpha\alpha} = \sigma_{zz} + \frac{p_a - p_b}{b^2 - a^2} \frac{a^2 b^2}{r^2}.$$

Максимальные по величине напряжения  $\sigma_{\alpha\alpha}$  (при  $p_a > 0$ ) возникают на внутренней поверхности трубы (рис. 8.4). Поэтому при повышении внутреннего давления  $p_a$  на внутренней поверхности трубы ( $r = a$ ) прежде всего могут появиться пластические деформации (см. задачу 9.1) или трещины.

2) Рассмотрим, насколько выгодно увеличивать толщину стенки трубы ( $b - a$ ). Зафиксируем внутренний радиус трубы  $a$  и исследуем изменение окружного напряжения  $\sigma_{\alpha\alpha}$  на внутренней поверхности трубы  $\sigma_{\alpha\alpha}|_{r=a}$  в зависимости от внешнего радиуса  $b$  при  $p_b = 0$ . Из (8.69) найдем, что

$$\sigma_{\alpha\alpha}|_{r=a} = p_a \left( \frac{2}{1 - a^2/b^2} - 1 \right).$$

По этой формуле на рис. 8.5 и построена зависимость  $\sigma_{\alpha\alpha}|_{r=a}(b)$ .

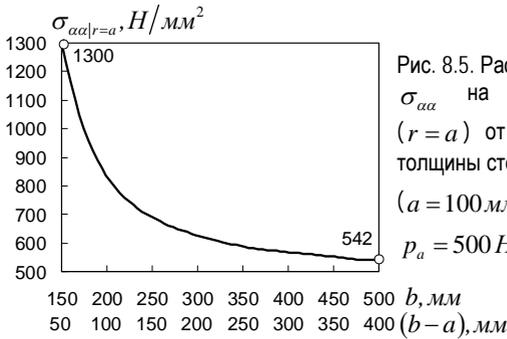


Рис. 8.5. Распределение окружного напряжения  $\sigma_{\alpha\alpha}$  на внутренней поверхности трубы ( $r = a$ ) от наружного радиуса трубы  $b$  и толщины стенки ( $b - a$ )

( $a = 100 \text{ мм}$ ,  $E = 220 \cdot 10^3 \text{ Н/мм}^2$ ,  $p_b = 0$ ,  $p_a = 500 \text{ Н/мм}^2$ )

Видно, что при увеличении толщины стенки ( $b - a$ ) вначале происходит быстрое уменьшение  $\sigma_{\alpha\alpha|_{r=a}}$ , но затем это уменьшение замедляется. Поэтому большое увеличение толщины стенки не дает существенного увеличения прочности трубы. Действительно, увеличение толщины стенки от 50 до 150 мм, т. е. на 100 мм, снижает  $\sigma_{\alpha\alpha|_{r=0}}$  с 1300 до 690 Н/мм<sup>2</sup>, т. е. на 47%. А увеличение толщины стенки на те же 100 мм, но от 150 до 250 мм снижает  $\sigma_{\alpha\alpha|_{r=0}}$  с 690 до 625 Н/мм<sup>2</sup>, т. е. всего на 9,4%. Кривая на рис. 8.5 имеет горизонтальную асимптоту  $\sigma_{\alpha\alpha|_{r=a}} = p_a$ .

### Контрольные вопросы

1. Запишите замкнутую систему 22 уравнений линейной теории упругости для динамических задач.
2. Запишите замкнутую систему 15 уравнений линейной теории упругости для статических задач.
3. Что такое начальные и граничные условия?
4. Какие виды граничных условий вы знаете?
5. Что такое прямая и обратная задачи теории упругости?
6. Дайте подробный вывод уравнений Ламе (8.58).
7. Дайте вывод уравнений Ламе (8.59) и Дюгамеля-Неймана (8.60) в векторной форме.
8. Используя (8.59), выведите уравнения Ламе в цилиндрических координатах.
9. Дайте вывод уравнений Бельтрами-Митчела (8.61).
10. Выведите дифференциальное уравнение в перемещениях (8.65) и решите его.

11. Найдите постоянные интегрирования  $C_1$  и  $C_2$  [формулы (8.68)].
12. Выведите формулы (8.69).
13. Постройте эпюры деформаций  $\varepsilon_{rr} = \varepsilon_{rr}(r)$  и  $\varepsilon_{\alpha\alpha} = \varepsilon_{\alpha\alpha}(r)$  в задаче 8.1.
14. Как изменится напряжённо-деформированное состояние трубы, если она находится не в плоском деформированном состоянии, а имеет по торцам доньшки, так что торцы трубы могут свободно перемещаться?
15. Как влияет сжимаемость материала трубы на её напряжённо-деформированное состояние ( $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{\alpha\alpha}$ ,  $\sigma_{zz}$ ,  $u_r$ )?
16. Как влияет толщина стенки трубы на её прочность?

### 8.3. Плоская задача теории упругости

#### 8.3.1. Система уравнений статических задач для плоского напряжённого состояния

Матрицы тензоров напряжений  $T_\sigma$  и деформаций  $T_\varepsilon$  в прямоугольных декартовых координатах для плоского напряжённого состояния имеют вид

$$(\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\varepsilon_{ij}) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}, \quad (8.73)$$

причём напряжения  $\sigma_{ij}$  и деформации  $\varepsilon_{ij}$  не зависят от координаты  $z$ . Система уравнений включает в себя восемь уравнений: два уравнения равновесия, которые получим из (5.53)

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0; \quad (8.74)$$

три уравнения связи деформаций с перемещениями, которые получим из (2.73)

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right); \quad (8.75)$$

три уравнения состояния, которые получим из (8.40)

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E} (\sigma_{xx} - \mu \sigma_{yy}), \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E} (\sigma_{yy} - \mu \sigma_{xx}), \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \frac{\sigma_{xy}}{G}. \end{aligned} \right\} \quad (8.76)$$

Эти 8 уравнений содержат восемь неизвестных:  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{xy}$ ,  $\varepsilon_{xx}$ ,  $\varepsilon_{yy}$ ,  $\varepsilon_{xy}$ ,  $u_x$ ,  $u_y$ . Относительное удлинение в направлении оси  $z$  найдём по третьей формуле (8.40),  $\varepsilon_{zz} = -\mu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})/E$ . Найденные функции для деформаций должны удовлетворять первое уравнение совместности деформаций (2.77)

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y}, \quad (8.77)$$

остальные уравнения (2.77) и (2.78) удовлетворяются тождественно.

### 8.3.2. Решение плоской задачи в напряжениях

Подставим в уравнение совместности (8.77) выражения (8.76) для деформаций. Получим уравнение, содержащее только напряжения

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_{yy} - \mu \sigma_{xx}) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma_{xx} - \mu \sigma_{yy}) = 2(1 + \mu) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \sigma_{xy}. \quad (8.78)$$

Продифференцируем первое уравнение равновесия (8.74) по  $x$ , а второе по  $y$ . Складывая полученные выражения, найдём

$$2 \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x \partial y} = - \left( \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2} \right). \quad (8.79)$$

Подставим полученное выражение для  $2\partial^2 \sigma_{xy} / \partial x \partial y$  в уравнение (8.78). Получим *уравнение в напряжениях для плоской задачи*

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = \Delta(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = 0, \quad (8.80)$$

где, как и прежде,  $\Delta \equiv \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$  - оператор Лапласа. Это уравнение вместе с (8.74) составляет систему трёх уравнений с тремя неизвестными напряжениями  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{xy}$ . Система эта справедлива и для плоского деформированного состояния, если массовые силы отсутствуют. Итак, нормальные напряжения  $\sigma_{xx} = \sigma_{xx}(x, y)$  и  $\sigma_{yy} = \sigma_{yy}(x, y)$  являются гармоническими функциями, удовлетворяющими уравнению Лапласа (8.80) и граничным условиям.

### 8.3.3. Функция напряжений

Для дальнейшего облегчения решения плоской задачи вместо определения трёх функций  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{xy}$  достаточно определить одну так называемую функцию напряжений, посредством которой дальше уже не путём интегрирования, а дифференцированием определяют все искомые функции.

Дифференциальные уравнения равновесия (8.74) показывают, что выражения

$$\sigma_{xy}dx - \sigma_{xx}dy, \quad \sigma_{yy}dx - \sigma_{xy}dy \quad (8.81)$$

являются полными дифференциалами некоторых функций, соответственно  $A(x, y)$  и  $B(x, y)$  таких, что

$$\sigma_{xx} = -\frac{\partial A}{\partial y}, \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial B}{\partial x}, \quad \sigma_{xy} = \frac{\partial A}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial y}. \quad (8.82)$$

Действительно, полные дифференциалы функций  $A$  и  $B$  равны

$$dA = \frac{\partial A}{\partial x}dx + \frac{\partial A}{\partial y}dy = \sigma_{xy}dx - \sigma_{xx}dy,$$

$$dB = \frac{\partial B}{\partial x}dx + \frac{\partial B}{\partial y}dy = \sigma_{yy}dx - \sigma_{xy}dy,$$

т.е. получим выражения (8.81).

На основании последнего равенства (8.82) можно сделать вывод о существовании функции  $\varphi(x, y)$ , которая подчиняется условиям

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = B, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -A. \quad (8.83)$$

Тогда компоненты тензора напряжений  $T_\sigma$  в плоской задаче выражаются через функцию  $\varphi(x, y)$  следующим образом:

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}. \quad (8.84)$$

Функция  $\varphi(x, y)$  называется *функцией напряжений Эри*, а распределение напряжений (8.84) удовлетворяет уравнения равновесия (8.74), обращая их в тождества. Поскольку формулы (8.84) являются следствием только универсальных уравнений равновесия, они верны для решения плоских задач не только при упругой, но и при пластической деформации.

Подставляя выражения (8.84) для напряжений в уравнение (8.80), получим бигармоническое уравнение

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = \Delta \Delta \varphi = 0, \quad (8.85)$$

к решению которого и сводится плоская задача теории упругости. Следовательно, функция напряжений вполне определяется граничными условиями. Поэтому в рамках линейной теории упругости распределение напряжений в плоских задачах не зависит от свойств материала, т.е. от значений модуля упругости  $E$  и коэффициента Пуассона  $\mu$  (*теорема Леви*) [см., например, формулы (8.69), выражающие распределение напряжений по сечению трубы].

Часто функцию напряжений выбирают в виде целого полинома координат  $x, y$ , подбирая его коэффициенты так, чтобы удовлетворить бигармоническое уравнение (8.85) и граничные условия. Такое решение задачи называется *решением в полиномах*.

### **Задача 8.3. Напряжённое состояние консоли**

Узкая балка ( $b \ll 2h$ , рис. 8.6, а) прямоугольного поперечного сечения с одного конца жёстко закреплена и нагружена равно-

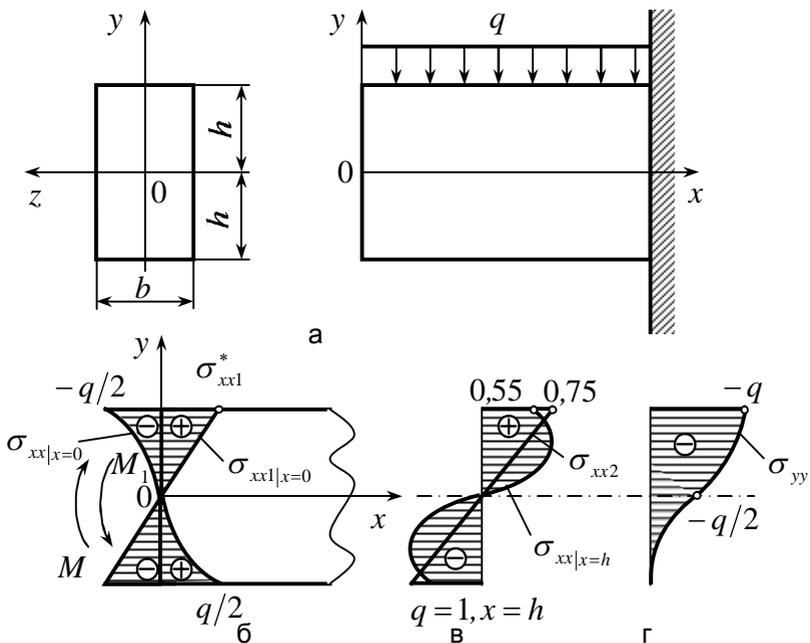


Рис. 8.6. К решению задачи о напряжённом состоянии консоли:

а – геометрические размеры и схема нагружения;

б – схема для расчета нормального напряжения  $\sigma_{xx}$ ;

в – эпюра нормального напряжения  $\sigma_{xx}$  при  $x = h$ , построенная по формуле (8.97);

$\sigma_{xx2}$  - решение методами «Сопrotивления материалов» [формула (8.98)];

г – эпюра нормального напряжения  $\sigma_{yy}$

мерно распределенной по верхней поверхности нагрузкой  $q, H/\text{мм}^2$ . Требуется найти распределение напряжений в объёме балки.

Решение. 1) Напряжённое состояние балки можно считать плоским. Поэтому распределение напряжений  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{xy}$  в любой плоскости  $z$  одинаково, т.е. напряжения от координаты  $z$  не зависят. Так как напряжённое состояние плоское, то  $\sigma_{zz} = \sigma_{yz} = \sigma_{xz} = 0$ .

2) Задачу будем решать в полиномах. Функцию напряжений выберем в виде

$$\varphi = ax^2 + bx^2y + cx^2y^3 + dy^5, \quad (8.86)$$

где  $a, b, c, d$  - постоянные величины. Подставим это выражение функции напряжений в бигармоническое уравнение (8.85). Получим

$$24c y + 120d \cdot y = 0,$$

откуда  $d = -c/5$ . По формулам (8.84) найдём напряжения

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 2cy(3x^2 - 2y^2); \\ \sigma_{yy} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 2(a + by + cy^3); \\ \sigma_{xy} &= -2x(b + 3cy^2). \end{aligned} \right\} \quad (8.87)$$

3) Постоянные  $a, b, c$  найдём из граничных условий:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{yy}|_{y=h} &= 2(a + bh + ch^3) = -q; \\ \sigma_{yy}|_{y=-h} &= 2(a - bh - ch^3) = 0; \\ \sigma_{xy}|_{y=h} &= -2x(b + 3ch^2) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (8.88)$$

Решая эту систему линейных уравнений, найдём

$$a = -\frac{q}{4}; \quad b = -\frac{3q}{8h}; \quad c = \frac{q}{8h^3}. \quad (8.89)$$

Подставим эти выражения постоянных в формулы (8.87). Получим напряжения

$$\sigma_{xx} = \frac{q}{4h^3} (3x^2 - 2y^2)y; \quad (8.90)$$

$$\sigma_{yy} = -\frac{q}{2} \left( 1 + \frac{3y}{2h} - \frac{y^3}{2h^3} \right); \quad (8.91)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{3q}{4h} x \left( 1 - \frac{y^2}{h^2} \right). \quad (8.92)$$

Легко проверить, что граничные условия (8.88) удовлетворены. Обратим внимание на то, что нормальное напряжение  $\sigma_{yy}$  (давление продольных волокон друг на друга) не равно нулю. Кроме того, на свободном торце балки (при  $x = 0$ ) нормальное напряжение  $\sigma_{xx} = 0$ . Однако по формуле (8.90) получим

$$\sigma_{xx|x=0} = -\frac{y^3}{2h^3}q. \quad (8.93)$$

4) Это напряжение (рис. 8.6, б) создаёт на свободном торце балки момент  $M$ , величина которого равна

$$\begin{aligned} M &= 2 \int_0^h |\sigma_{xx|x=0}| dy \frac{\int_0^h y |\sigma_{xx|x=0}| dy}{\int_0^h |\sigma_{xx|x=0}| dy} = \\ &= 2 \int_0^h y |\sigma_{xx|x=0}| dy = 2 \int_0^h y \frac{y^3}{2h^3} q dy = \frac{h^2}{5} q. \end{aligned} \quad (8.94)$$

5) По условию задачи никакого момента на свободном торце балки нет. Поэтому для его компенсации приложим момент  $M_1$ , равный по величине моменту  $M$ , но противоположно направленный. Момент  $M_1$  вызывается дополнительным напряжением  $\sigma_{xx1}$ , эпюра которого – прямая линия показана на рис. 8.6, б. Найдём это дополнительное напряжение. Обозначим значение  $\sigma_{xx1}$  при  $y = h$  через  $\sigma_{xx1}^*$ . Тогда

$$\begin{aligned} M_1 = M &= \frac{h^2}{5} q = 2 \int_0^h y \sigma_{xx1} dy = \\ &= 2 \int_0^h y \frac{\sigma_{xx1}^*}{h} y dy = \frac{2}{3} h^2 \sigma_{xx1}^*, \end{aligned} \quad (8.95)$$

откуда  $\sigma_{xx1}^* = 0,3q$ , а дополнительное напряжение на свободном торце балки равно

$$\sigma_{xx1}^* = 0,3q \frac{y}{h}. \quad (8.96)$$

6) Тогда окончательно продольное нормальное напряжение [см. формулу (8.90)] равно

$$\sigma_{xx} = \frac{q}{4h^3} (3x^2 - 2y^2)y + 0,3q \frac{y}{h} = q \left( \frac{3x^2}{2h^2} - \frac{y^2}{h^2} + \frac{3}{5} \right) \frac{y}{2h}. \quad (8.97)$$

Построенная по этой формуле эпюра при  $q = 1$ ,  $x = h$  показана на рис. 8.6, в. Там же показана прямая линия, это эпюра продольного нормального напряжения  $\sigma_{xx2}$ , полученного методами «Сопrotивления материалов»:

$$\sigma_{xx2} = \frac{M_z}{J_z} y = \frac{q x b x}{2 \frac{b(2h)^3}{12}} y = \frac{3}{4} q \frac{x^2 y}{h^3}. \quad (8.98)$$

Обратим внимание на то, что это первое слагаемое в более точной формуле (8.97). На рис. 8.6, г по формуле (8.91) построена эпюра давления  $\sigma_{yy}$ . Она не меняется по длине балки. Отметим, что «Сопrotивление материалов» даёт  $\sigma_{yy} = 0$ . Для касательного напряжения  $\sigma_{xy}$  «Сопrotивление материалов» даёт решение, полностью совпадающее с полученным [формула (8.92)]. Необходимо отметить также, что с увеличением координаты  $x$  разница между значениями напряжений  $\sigma_{xx}$ , найденными по формулам (8.97) и (8.98) уменьшается. При  $x = 10h$  они практически совпадают, т.е.  $\sigma_{xx} \approx \sigma_{xx2}$ .

7) При упругой деформации существует однозначная связь между напряжениями и деформациями. Поэтому после того, как найдены напряжения, можно найти и деформации по формулам (8.76). Затем, используя связь между деформациями и перемещениями (8.75), можно найти и перемещения, и уравнение изогнутой оси консоли (упругую кривую).

### **Задача 8.4. Температурные напряжения в толстостенной трубе**

На внутренней поверхности толстостенной трубы (рис. 8.1) температура равна  $T_a$ , а на наружной поверхности -  $T_b$ . Найти распределение в поперечном сечении трубы температуры и напряжений, если поле температур установившееся (стационарное), а деформированное состояние является плоским.

Решение. 1) Задача является осесимметричной, поэтому окружная координата  $\alpha$  является несущественной. Задача является плоской, поэтому продольная координата  $z$  (аппликата) является также несущественной. Поэтому температурное поле описывается уравнением  $T = T(r)$ , т.е. температура зависит только от радиуса  $r$ . В этих условиях уравнение теплопроводности в цилиндрических координатах (5.100) принимает вид, учитывая, что диссипативная функция  $\sigma_{ij}^{\xi P}$  равна нулю:

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} = 0, \quad (8.99)$$

откуда найдём, что

$$T = C_1 \ln r + C_2. \quad (8.100)$$

2) Постоянные интегрирования  $C_1$  и  $C_2$  найдём из граничных условий:

- при  $r = a$   $T = T_a$  и (8.100) принимает вид

$$T_a = C_1 \ln a + C_2; \quad (8.101)$$

- при  $r = b$   $T = T_b$  и (8.100) принимает вид

$$T_b = C_1 \ln b + C_2. \quad (8.102)$$

Решая совместно (8.101) и (8.102) относительно  $C_1$  и  $C_2$ , найдём

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= -\frac{T_a - T_b}{\ln(b/a)}, \\ C_2 &= T_a + (T_a - T_b) \frac{\ln a}{\ln(b/a)}. \end{aligned} \right\} \quad (8.103)$$

Подставим эти выражения постоянных  $C_1$  и  $C_2$  в формулу (8.100). Получим распределение температуры в радиальном направлении (рис. 8.7)

$$T = T_a - (T_a - T_b) \frac{\ln(r/a)}{\ln(b/a)}. \quad (8.104)$$

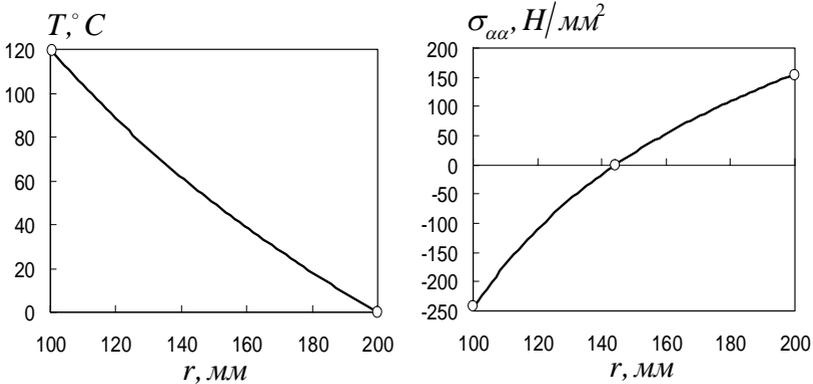


Рис .7. Распределение температуры  $T$  и температурного окружного  $\sigma_{\alpha\alpha}$  напряжения в поперечном сечении толстостенной трубы  
 $(a = 100 \text{ мм}, b = 200 \text{ мм}, T_a = 120^\circ \text{ C}, T_b = 0^\circ \text{ C}, \alpha = 10^{-5} \text{ K}^{-1}$   
 $E = 220 \cdot 10^3 \text{ H/мм}^2, \mu = 0,3)$

3) Найдём далее температурные напряжения. Полагаем, что труба находится в упругом состоянии. Тогда температурные напряжения можно найти точно так же, как были найдены напряжения при решении задачи 8.1. Дифференциальные уравнения равновесия (8.62) и формулы (8.63), выражающие связь между деформациями и радиальным перемещением  $u_r$  остаются в силе, а уравнения состояния (8.64) согласно (8.55) изменяются:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr} &= 2G\varepsilon_{rr} + \lambda\theta - 3\alpha KT, \\ \sigma_{\alpha\alpha} &= 2G\varepsilon_{\alpha\alpha} + \lambda\theta - 3\alpha KT, \end{aligned} \right\} \quad (8.105)$$

где по-прежнему  $G$  - модуль сдвига,  $\lambda = 2\mu G(1 - 2\mu)$  - постоянная Ламе,  $\mu$  - коэффициент Пуассона,  $\alpha$  - коэффициент линей-

ного теплового расширения,  $\theta = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\alpha\alpha} + \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\alpha\alpha}$  - относительное изменение объема,  $K = E/[3(1 - 2\mu)]$  - объемный модуль упругости,  $E = 2G(1 + \mu)$  - модуль Юнга.

4) Подставим в формулы (8.105) выражения деформаций по формулам (8.63). Полученные выражения для напряжений подставим в уравнение равновесия (8.62). Получим уравнение в перемещениях

$$\frac{d^2 u_r}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_r}{dr} - \frac{u_r}{r^2} = \frac{3\alpha K}{2G + \lambda} \frac{dT}{dr}, \quad (8.106)$$

где согласно (8.104)

$$\frac{dT}{dr} = -(T_a - T_b) / \left( r \ln \frac{b}{a} \right). \quad (8.107)$$

Интегрируя полученное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка (8.106), найдём радиальное перемещение

$$u_r = C_3 r + \frac{C_4}{r} - \frac{3}{2} \frac{\alpha K}{2G + \lambda} (T_a - T_b) \frac{\ln r}{\ln(b/a)} r. \quad (8.108)$$

5) Подставим это выражение  $u_r$  в формулы (8.63). Полученные выражения деформаций подставим в формулы (8.105) для напряжений. Получим формулы для напряжений, в которые входят неизвестные пока постоянные интегрирования  $C_3$  и  $C_4$ . Найдем их, используя граничные условия:

- при  $r = a$   $\sigma_{rr} = 0$ ;

- при  $r = b$   $\sigma_{rr} = 0$ .

Окончательно получим следующие формулы для радиальных  $\sigma_{rr}$  и окружных  $\sigma_{\alpha\alpha}$  температурных напряжений:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr} &= C \left[ \frac{1 - (a/r)^2}{1 - (a/b)^2} - \frac{\ln(r/a)}{\ln(b/a)} \right], \\ \sigma_{\alpha\alpha} &= C \left[ \frac{1 + (a/r)^2}{1 - (a/b)^2} - \frac{1 + \ln(r/a)}{\ln(b/a)} \right], \end{aligned} \right\} \quad (8.109)$$

где обозначено

$$C = -\frac{\alpha E}{2(1-\mu)}(T_a - T_b). \quad (8.110)$$

Если  $T_a > T_b$ , на внутренней поверхности трубы окружные напряжения являются сжимающими, а на наружной поверхности – растягивающими (рис. 8.7). Радиальные напряжения  $\sigma_{rr} \geq 0$  и много меньше  $|\sigma_{\alpha\alpha}|$ , поэтому на рис. 8.7 не показаны. Осевые напряжения  $\sigma_{zz}$  найдём по формуле (8.54) при  $\varepsilon_{zz} = 0$

$$\sigma_{zz} = \mu(\sigma_{rr} + \sigma_{\alpha\alpha}) - \alpha ET. \quad (8.111)$$

### **Контрольные вопросы**

1. Запишите матрицы тензоров напряжений и деформаций для плоского напряжённого и плоского деформированного состояний.
2. Запишите систему из восьми уравнений для плоского напряжённого и плоского деформированного состояний изотропной линейно-упругой среды.
3. Запишите шесть уравнений совместности деформаций. Покажите, что для плоской задачи пять из них удовлетворяются тождественно, т.е. превращаются в равенства  $0 = 0$ .
4. Запишите уравнение Лапласа в напряжениях для плоской задачи.
5. Что такое функция напряжений Эри? Решением какого уравнения она является? Как выражаются через неё напряжения?
6. Напишите несколько функций напряжений, удовлетворяющих бигармоническое уравнение (8.85) Покажите графическую зависимость соответствующих напряжений от координат, используя формулы (8.84).
7. Покажите, что напряжения (8.90) – (8.92) удовлетворяют граничные условия.
8. Поясните, как получается формула (8.94).
9. Постройте по точкам эпюры напряжений, показанные на рис. 8.6, б, в, г. Постройте также эпюру касательного напряжения  $\sigma_{xy}$  по формуле (8.92).
10. Найдите в задаче 8.3 касательное напряжение  $\sigma_{xy}$  методами «Сопrotivления материалов».

11. Постройте эпюры, как на рис. 8.6, в, при  $x = 10h$ . Сравнивая их с эпюрами на рис. 8.6, в, сделайте вывод о том, как меняется по длине балки соотношение между решениями для напряжения  $\sigma_{xx}$ , полученного методами теории упругости и «Сопrotivления материалов».
12. Выведите формулы (8.103) для постоянных интегрирования  $C_1$  и  $C_2$ .
13. Выведите дифференциальное уравнение в перемещениях (8.106) и решите его, т.е. получите формулу (8.108).
14. Найдите постоянные интегрирования  $C_3$  и  $C_4$  и выведите формулы (8.109).
15. Дайте вывод формулы (8.111).
16. Как изменится эпюра напряжения  $\sigma_{\alpha\alpha}$  на рис. 8.7, если температура наружной поверхности трубы больше температуры её внутренней поверхности, т.е.  $T_b > T_a$ ?
17. Поясните смысл теоремы Леви.

## Глава 9. УСЛОВИЯ ПЛАСТИЧНОСТИ

Допустим, что на тело действуют внешние силы, которые вызывают упругую деформацию. Уравнения состояния при упругой деформации получены в главе 8. Если увеличивать внешние силы, то, как показывает опыт, в некоторый момент времени в теле появятся *остаточные, пластические деформации*. Произойдёт переход из упругого состояния в пластическое (вернее в упруго-пластическое). При одноосном растяжении этому переходу соответствует *условие пластичности при линейном напряжённом состоянии*

$$\sigma_{xx} = \sigma_1 = \sigma_T, \quad (9.1)$$

где  $\sigma_T$  – *предел текучести при линейном напряжённом состоянии*. При простом (или чистом) сдвиге этому переходу соответствует *условие пластичности при сдвиге*

$$\sigma_{xy} = \sigma_1 = \tau_T, \quad (9.2)$$

где  $\tau_T$  – *предел текучести на сдвиг*.

Теперь возникает вопрос об условии пластичности при объёмном напряжённом состоянии. Согласно закону Гука при фиксированной системе координат, постоянных температуре и других физико-химических параметрах напряжённо-деформированное состояние частицы однозначно определяется напряжениями. Поэтому в этих условиях переход частицы из упругого состояния в пластическое определяется напряжениями в этой частице, и условие пластичности имеет вид  $f_T(\sigma_{ij}) = 0$ . В это уравнение входят также механические характеристики материала, определяющие возникновение пластических деформаций (например,  $\sigma_T$ ). В пространстве напряжений, т.е. в девятимерном пространстве, точки которого задаются девятью значениями  $\sigma_{ij}$  компонент тензора напряжений  $T_\sigma$ , это уравнение *поверхности текучести*  $\Sigma_T$ , которая является границей упругой области  $D_e$  (рис. 9.1). Если точка  $A$ , изображающая напряжённое состояние, лежит внутри области  $D_e$ , частица ведёт себя как упругое тело. Если изображающая точка  $B$  находится на поверхности текучести  $\Sigma_T$ , в частице воз-

никают пластические (остаточные) деформации. Граница  $\Sigma_T$  области  $D_e$  представляет собой совокупность пределов текучести для всевозможных напряжённых состояний.

Поверхность текучести не проходит через начало координат  $O$ , так как пластические деформации не могут возникнуть, если все напряжения  $\sigma_{ij}$  равны нулю. Поверхность  $\Sigma_T$  выпуклая, т.е. лежит по одну сторону касательной плоскости  $PQ$ , проведённой в любой точке  $N$  поверхности текучести.

В настоящей главе определяется вид функции  $f_T$  и её свойства. Иными словами, производится обобщение условий пластичности при линейном напряжённом состоянии (9.1) и при сдвиге (9.2) на случай объёмного напряжённого состояния. Уравнение  $f_T(\sigma_{ij})=0$  и является уравнением состояния, соответствующим возникновению пластических деформаций.

## 9.1. Условие постоянства максимального касательного напряжения (условие пластичности Треска – Сен-Венана)

### 9.1.1. Поверхность и кривая текучести для изотропного материала

Поскольку свойства *изотропного материала* одинаковы во всех направлениях, уравнение поверхности текучести можно выразить через главные нормальные напряжения, т.е.  $f_T(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)=0$ . Так как  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  выражаются по формулам (4.46) через инварианты тензора напряжений  $T_\sigma$ , то уравнение поверхности текучести можно представить в виде  $f_T[I_1(T_\sigma), I_2(T_\sigma), I_3(T_\sigma)]=0$ . Опыты показывают, что среднее на-

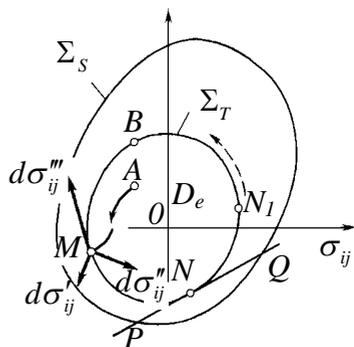


Рис. 9.1. Поверхности текучести  $\Sigma_T$  и нагружения  $\Sigma_S$

пряжение  $\sigma = I_1(T_\sigma)/3$  практически не влияет на возникновение пластических деформаций, поэтому можно принять, что это возникновение определяется инвариантами девиатора напряжений. Тогда  $f_T [I_2(D_\sigma), I_3(D_\sigma)] = 0$ . Это уравнение цилиндра, осью которого является прямая  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ , проходящая через начало координат, равнонаклонённая к осям координат и называемая *гидростатической осью*. Она является нормалью к *девиаторной плоскости*  $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$ , которая проходит через начало координат. Линия пересечения поверхности текучести с девиаторной плоскостью называется *кривой текучести* (рис. 9.2).

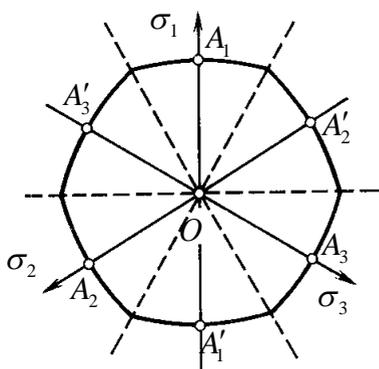


Рис. 9.2. Кривая текучести изотропного материала на девиаторной плоскости

Кривая текучести выпуклая и не проходит через начало координат вследствие указанных выше свойств поверхности текучести. Кривая текучести симметрична относительно осей  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , так как они равноправны вследствие изотропности тела. Поэтому кривая текучести проходит через шесть точек  $A_1, A_1', A_2, A_2', A_3, A_3'$  равноудалённых от начала координат  $O$ . Если механические свойства материала при растяжении и сжатии

одинаковы и эффект Баушингера не учитывается, кривая текучести симметрична относительно прямых, перпендикулярных осям  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  (штриховые линии на рис. 9.2). На основании изложенного заключаем, что кривая текучести состоит из 12 одинаковых дуг.

### 9.1.2. Аналитическое выражение условия пластичности Треска – Сен-Венана

На полированной поверхности отожжённого образца из низкоуглеродистой стали при его одноосном растяжении за пределом упругости появляются *линии текучести Чернова–Людерса* под

углом  $\pi/4$  к оси образца. Это линии пересечения плоскостей, на которых действуют максимальные касательные напряжения  $\tau_{max}$  и в которых произошло скольжение, с поверхностью образца. Поэтому можно предположить, что началу пластической деформации соответствует равенство максимального касательного напряжения пределу текучести на сдвиг, т.е.  $\tau_{max} = (\sigma_{max} - \sigma_{min})/2 = \tau_T$ . Так как при одноосном растяжении  $\sigma_{max} = \sigma_1 = \sigma_T$ , а  $\sigma_{min} = 0$ , то соотношение между пределами текучести при линейном напряжённом состоянии и на сдвиг имеет вид

$$\sigma_T = 2\tau_T, \quad \tau_T = \sigma_T/2. \quad (9.3)$$

Поскольку при решении задач часто заранее не известно, какое из главных нормальных напряжений наибольшее, а какое наименьшее, условие пластичности Треска–Сен-Венана записывается в виде

$$|\sigma_1 - \sigma_2| = \sigma_T, \quad |\sigma_2 - \sigma_3| = \sigma_T, \quad |\sigma_3 - \sigma_1| = \sigma_T. \quad (9.4)$$

Пластическая деформация возникает при соблюдении хотя бы одного из этих условий.

### 9.1.3. Геометрическая интерпретация

В пространстве главных нормальных напряжений уравнения (9.4) определяют правильную шестигранную призму, осью которой является гидростатическая ось  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ , а каждая грань параллельна одной из координатных осей и равнонаклонена к двум другим (рис. 9.3). Поскольку возникновение пластических деформаций определяется не величиной главных нормальных напряжений, а их разностью, длина призмы не ограничена в обоих направлениях от начала координат. В соответствии с условием текучести при линейном напряжённом состоянии  $\sigma_1 = \sigma_T$  призма отсекает на осях координат отрезки, равные  $\sigma_T$ .

Кривая текучести на девиаторной плоскости – правильный шестиугольник со стороной, равной

$$\sigma_T \sin\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \sigma_T \sin 54^{\circ}44' = \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_T,$$

где  $54^{\circ}44'$  - угол между осью призмы и каждой из координатных осей.

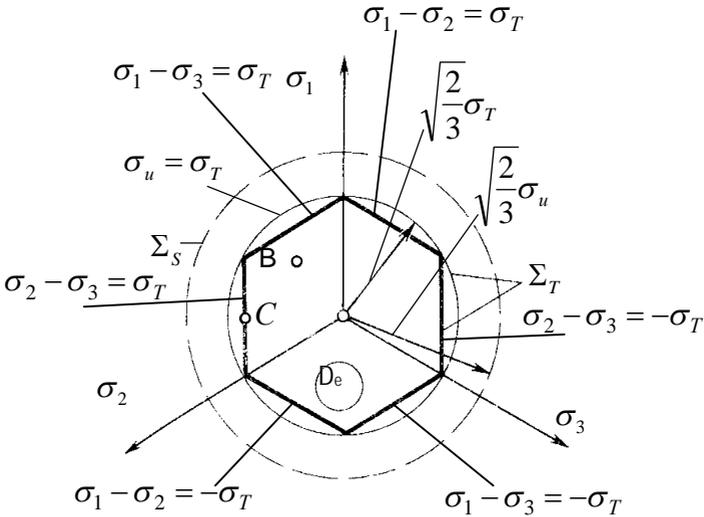
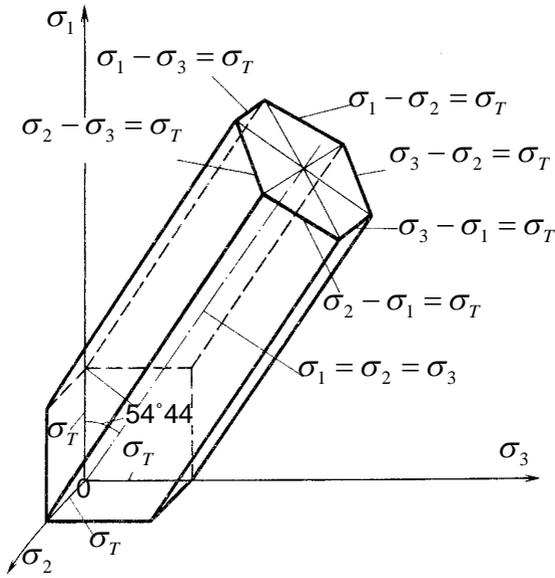


Рис. 9.3. Призма текучести Треска – Сен-Венана и проекции призмы и описанного вокруг неё цилиндра текучести на девиаторную плоскость:

$\Sigma_T$  - поверхности текучести,  $\Sigma_S$  - поверхность нагружения

Если изображающая напряжённое состояние точка  $B$  находится внутри призмы, в упругой области  $D_e$ , частица деформируется упруго. Когда изображающая напряжённое состояние точка  $C$  попадает на поверхность призмы, в частице возникает пластическая деформация.

#### **9.1.4. Условие пластичности Рейсса и условие полной пластичности**

При решении задач заранее обычно не известно, какое из главных нормальных напряжений наибольшее, а какое наименьшее. Поэтому неизвестно, какое из шести уравнений (9.4) применить. Это затрудняет использование условия пластичности Треска – Сен-Венана. Для устранения этого затруднения уравнения (9.4) объединяют:

$$\left[ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 - \sigma_T^2 \right] \left[ (\sigma_2 - \sigma_3)^2 - \sigma_T^2 \right] \left[ (\sigma_3 - \sigma_1)^2 - \sigma_T^2 \right] = 0. \quad (9.5)$$

Это уравнение изображает *условие пластичности Рейсса*. Его можно выразить через второй и третий инварианты девиатора напряжений:

$$4[I_2(D_\sigma)]^3 + 27[I_3(D_\sigma)]^2 + 9\sigma_T^2[I_2(D_\sigma)]^2 + 6\sigma_T^4 I_2(D_\sigma) + \sigma_T^6 = 0. \quad (9.6)$$

Ввиду сложности условие пластичности Рейсса представляет скорее теоретический интерес.

Согласно *условию полной пластичности Хаара и Кармана* для наступления пластического состояния нужно, чтобы не одно, а два главных касательных напряжения были равны пределу текучести на сдвиг  $\tau_T$ . Например,

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 2\tau_T = \sigma_T, \quad \sigma_1 - \sigma_3 = 2\tau_T = \sigma_T,$$

откуда следует равенство двух главных нормальных напряжений ( $\sigma_2 = \sigma_3$ ). Условие полной пластичности находит применение при решении осесимметричных задач, когда окружное напряжение  $\sigma_{\alpha\alpha}$  является одним из главных нормальных напряжений.

### 9.1.5. Плоское напряжённое и плоское деформированное состояния

При плоском напряжённом состоянии, если  $\sigma_2 = 0$ , уравнения (9.4) принимают вид

$$|\sigma_1| = \sigma_T, \quad |\sigma_3| = \sigma_T, \quad |\sigma_3 - \sigma_1| = \sigma_T. \quad (9.7)$$

На плоскости  $\sigma_3 O \sigma_1$  эти уравнения определяют шестиугольник (рис. 9.4). Если точка  $A$ , изображающая напряжённое состояние, находится внутри шестиугольника, частица деформируется упруго. Если изображающая напряжённое состояние точка  $B$  оказывается на одной из линий, образующих шестиугольник, в частице возникает пластическая деформация.

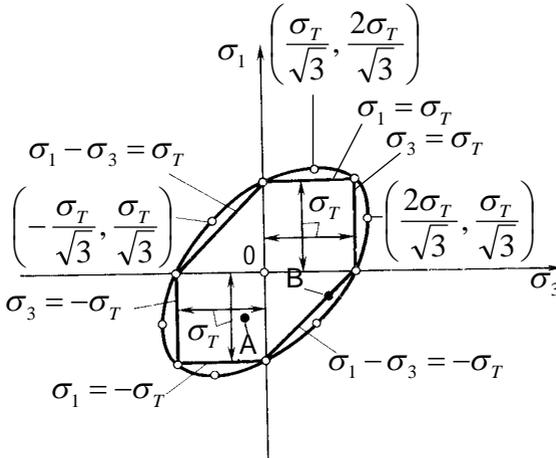


Рис. 9.4. Шестиугольник и эллипс текучести для плоского напряжённого состояния ( $\sigma_2 = 0$ )

При плоском деформированном состоянии  $\sigma_2$  всегда среднее главное нормальное напряжение. Поэтому из трёх уравнений (9.4) остаётся только одно  $|\sigma_3 - \sigma_1| = \sigma_T$ . После возведения обеих частей в квадрат имеем  $(\sigma_1 - \sigma_3)^2 = \sigma_T^2 = 4\tau_T^2$ . Выразим главные

нормальные напряжения  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$  через напряжения  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{xy}$  в произвольной системе координат [формулы (4.57)]

$$\left. \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_3 \end{matrix} \right\} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\sigma_{xy}^2}.$$

Получим условие пластичности в не главной системе координат, если ось  $z$  совпадает с главной осью  $\eta_2$

$$(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\sigma_{xy}^2 = 4\tau_T^2. \quad (9.8)$$

В главных осях условие пластичности (9.8) имеет вид

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_T = 2\tau_T. \quad (9.9)$$

### **Контрольные вопросы**

1. Что такое остаточные, пластические деформации?
2. Запишите условия пластичности при линейном напряжённом состоянии и при сдвиге.
3. Какие пределы текучести вы знаете? Какова между ними связь?
4. Что такое поверхность текучести? Какими свойствами она обладает?
5. Что такое изотропный материал?
6. Какие инварианты девиатора напряжений входят в уравнение поверхности текучести?
7. Что такое гидростатическая ось и девиаторная плоскость?
8. Что такое кривая текучести? Какой вид она имеет в общем случае? Какими свойствами обладает?
9. В чем состоит условие пластичности Треска – Сен-Венана? Какое физическое явление лежит в его основе?
10. Дайте аналитическую запись условия пластичности Треска – Сен-Венана.
11. Что является поверхностью и кривой текучести по условию пластичности Треска–Сен-Венана?
12. Почему призма текучести имеет неограниченную длину?
13. Запишите условие пластичности Рейсса. Покажите, что уравнения пластичности (9.5) и (9.6) совпадают.
14. В чём состоит условие полной пластичности Хаара и Кармана? К какому упрощению решения осесимметричных задач оно приводит?

15. Запишите условие пластичности Треска–Сен-Венана для плоского напряжённого состояния. Что представляет собой в этом случае линия текучести? Запишите уравнения (9.7), если  $\sigma_1 = 0$ , если  $\sigma_3 = 0$ . Как изменится при этом линия текучести?
16. Запишите условие пластичности Треска–Сен-Венана для плоского деформированного состояния в главной и произвольной осях координат (если ось  $z$  совпадает с главной осью  $\eta_2$ ).

## 9.2. Энергетическое условие пластичности Губера–Мизеса

### 9.2.1. Геометрическая интерпретация и аналитическое выражение

Призма текучести ограничена шестью попарно параллельными плоскостями, а потому описывается тремя уравнениями (9.4), что затрудняет использование условия пластичности Треска–Сен-Венана для решения задач.

Если в качестве поверхности текучести принять цилиндр радиусом  $\sqrt{2/3}\sigma_T$ , описанный вокруг призмы (рис. 9.3), энергетическое условие пластичности Губера–Мизеса выразится одним уравнением поверхности этого цилиндра

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_T^2. \quad (9.10)$$

При сдвиге в начале текучести  $\sigma_1 = \tau_T$ ,  $\sigma_2 = 0$ ,  $\sigma_3 = -\sigma_1 = -\tau_T$ . Тогда уравнение (9.10) примет вид  $6\tau_T^2 = 2\sigma_T^2$ , откуда получим связь между пределами текучести при линейном напряжённом состоянии и на сдвиг:

$$\sigma_T = \sqrt{3}\tau_T, \quad \tau_T = \sigma_T/\sqrt{3} = 0,577\sigma_T. \quad (9.11)$$

Выразим в уравнении (9.10) сумму квадратов разностей главных нормальных напряжений через интенсивность напряжений  $\sigma_u$  и интенсивность касательных напряжений  $T$  по формулам (4.41), (4.42). Получим

$$\sigma_u = \sigma_T, \quad T = \tau_T, \quad (9.12)$$

что позволяет записать условие пластичности Губера–Мизеса в

произвольной системе координат:

$$\boxed{3(\sigma_{ij}\sigma_{ji} - 3\sigma)^2 = (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2) = 2\sigma_T^2.} \quad (9.13)$$

Следовательно, уравнение текучести  $f_T[I_2(D_\sigma), I_3(D_\sigma)] = 0$  принимает вид

$$I_2(D_\sigma) + \tau_T^2 = 0, \quad (9.14)$$

т.е. третий инвариант девиатора напряжений не оказывает влияния на наступление пластического состояния.

### 9.2.2 Физический смысл энергетического условия пластичности

Если действует только гидростатическое давление  $\sigma$ , то  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma$ , а главные деформации по закону Гука (8.40) равны

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon = \frac{1}{E}[\sigma - \mu(\sigma + \sigma)] = \frac{\sigma}{E}(1 - 2\mu).$$

Тогда удельная работа внутренних сил, которая в данном случае равна удельной работе  $a_0$  изменения объёма, согласно (8.19) равна

$$a_0 = \frac{1}{2}(\sigma\varepsilon_1 + \sigma\varepsilon_2 + \sigma\varepsilon_3) = \frac{1}{2}3\sigma\varepsilon = \frac{3}{2} \frac{\sigma^2(1-2\mu)}{E}. \quad (9.15)$$

В общем случае напряжённого состояния при упругой деформации эта формула определяет ту часть удельной работы внутренних сил, которая расходуется на изменение объёма. Другая часть ( $a_\phi$ ) расходуется на изменение формы. Она равна

$$\alpha_\phi = \alpha_B - \alpha_0 = \frac{1}{2}(\sigma_1\varepsilon_1 + \sigma_2\varepsilon_2 + \sigma_3\varepsilon_3) - \frac{3}{2} \frac{(1-2\mu)}{E} \left( \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \right)^2. \quad (9.16)$$

Выразим главные деформации через главные нормальные напряжения в соответствии с законом Гука (8.40). Например,

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)].$$

Получим

$$\alpha_\phi = \frac{1+\mu}{6E}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] = \frac{1+\mu}{3E}\sigma_u^2. \quad (9.17)$$

Сравнивая это выражение с (9.12), устанавливаем физический смысл энергетического условия пластичности Губера-Мизеса: пластическая деформация в частице возникает тогда, когда удельная работа упругого изменения формы достигает величины

$$\sigma_\phi = (1 + \mu)\sigma_T^2/3E.$$

### 9.2.3. Плоское напряжённое и плоское деформированное состояния

Если  $\sigma_2 = 0$ , уравнение (9.10) примет вид

$$\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_3 = \sigma_T^2. \quad (9.18)$$

На плоскости  $\sigma_3 O \sigma_1$  это уравнение эллипса, описанного вокруг шестиугольника, изображающего условие текучести Треска-Сен-Венана (рис. 9.4).

В не главной системе координат, если ось  $z$  совпадает с главной осью  $\eta_2$ , согласно (8.73)  $\sigma_{zz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = 0$ , и уравнение (9.13) принимает вид

$$\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 - \sigma_{xx}\sigma_{yy} + 3\sigma_{xy}^2 = \sigma_T^2. \quad (9.19)$$

В случае плоского деформированного состояния  $\varepsilon_2 = \varepsilon_{zz}$ , и на основании (8.40) при упругой деформации

$$\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3) = \sigma_{zz} - \mu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = 0,$$

откуда

$$\sigma_2 = \mu(\sigma_1 + \sigma_3), \quad \sigma_{zz} = \mu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}).$$

При пластической деформации имеют место аналогичные зависимости, но вместо коэффициента Пуассона  $\mu$  необходимо взять коэффициент поперечной деформации  $\mu' = 0,5$ . Тогда

$$\sigma_2 = \sigma_{zz} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} = \sigma, \quad (9.20)$$

где  $\sigma$  - среднее напряжение, или гидростатическое давление [формула (4.37)]. Подставим в уравнение (9.10) вместо  $\sigma_2$  полу- сумму  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$ , а в уравнении (9.13) вместо  $\sigma_{zz}$  полусумму  $\sigma_{xx}$  и  $\sigma_{yy}$ . Кроме того, в уравнении (9.13) приравняем нулю  $\sigma_{yz}$  и  $\sigma_{zx}$  согласно (8.73). Получим энергетическое условие пластичности для плоского деформированного состояния в главной и неглавной системах координат:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2\tau_T = \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_T = 1,155\sigma_T, \quad (9.21)$$

$$(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\sigma_{xy}^2 = 4\tau_T^2 = \frac{4}{3}\sigma_T^2. \quad (9.22)$$

Сравнивая (9.22) и (9.8), видим, что для плоского деформированного состояния рассмотренные условия пластичности по форме совпадают, но по Треска–Сен-Венану  $\tau_T = \sigma_T/2$ , а по Мизесу  $\tau_T = \sigma_T/\sqrt{3}$ . Следовательно, при плоской деформации в состоянии пластичности

$$\tau_{max} = (\sigma_1 - \sigma_3)/2 = \tau_T = k, \quad (9.23)$$

где  $k$  – постоянная пластичности.

#### 9.2.4. Влияние среднего главного нормального напряжения на наступление пластичного состояния

Условие пластичности Треска–Сен-Венана

$$\tau_{max} = (\sigma_1 - \sigma_3)/2 = \tau_T$$

не учитывает влияния на наступление пластического состояния среднего главного нормального напряжения  $\sigma_2$ . Оценим это влияние. Энергетическое условие пластичности (9.10), учитывающее влияние  $\sigma_2$ , представим в виде

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \beta\sigma_T, \quad (9.24)$$

где влияние  $\sigma_2$  учитывается коэффициентом

$$\beta = 2/\sqrt{3+v_\sigma^2}, \quad (9.25)$$

который выражается через коэффициент Надаи–Лоде

$$v_\sigma = \frac{(\sigma_2 - \sigma_3) - (\sigma_1 - \sigma_3)}{\sigma_1 - \sigma_3}. \quad (9.26)$$

Если среднее главное нормальное напряжение равно одному из крайних, т.е.  $\sigma_2 = \sigma_1$  или  $\sigma_2 = \sigma_3$ , то  $\beta = 1$ , а (9.24) принимает вид  $\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_T$ , т.е. совпадает с условием пластичности Треска–Сен-Венана. Максимальную величину коэффициент  $\beta$  имеет при плоском деформированном состоянии, когда  $\sigma_2 = (\sigma_1 + \sigma_3)/2$ ,  $v_\sigma = 0$ ,  $\beta = 2/\sqrt{3} = 1,155$  (рис.9.5). В этом случае

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_T = 1,155 \sigma_T, \quad (9.27)$$

и разница между обоими условиями пластичности наибольшая. Как видно, эта наибольшая разница невелика, т. е. влияние  $\sigma_2$  на переход из упругого состояния в пластическое не очень существенно.

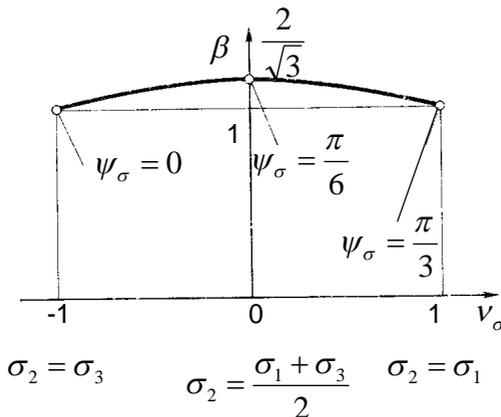


Рис. 9.5. Зависимость коэффициента  $\beta$ , характеризующего влияние  $\sigma_2$  на наступление пластического состояния, от коэффициента Надаи–Лоде  $v_\sigma$

Энергетическое условие пластичности часто используется в виде (9.24), где  $\frac{2}{\sqrt{3}} \geq \beta \geq 1$ . Если принять максимальное значение  $\beta$ , то (9.27) можно рассматривать как приближённую запись энергетического условия пластичности.

### 9.2.5. Опытная проверка условий пластичности

Обычно производится в опытах по совместному растяжению силой  $P$  и кручению моментом  $M$  тонкостенных труб ( $P + M$  - опыты). Тогда напряжённое состояние является плоским и осесимметричным, а матрица (4.18) тензора напряжений в цилиндрических координатах имеет вид

$$(\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\alpha z} \\ 0 & \sigma_{z\alpha} & \sigma_{zz} \end{pmatrix},$$

причём  $\sigma_{zz} = P / (2\pi R h)$ ,  $\sigma_{\alpha z} = M / (2\pi R^2 h)$ , где  $R$  - средний радиус трубы,  $h$  - толщина её стенки. Инварианты тензора напряжений по формулам (4.29) равны  $I_1(T_\sigma) = \sigma_{zz}$ ,  $I_2(T_\sigma) = -\sigma_{\alpha z}^2$ ,  $I_3(T_\sigma) = 0$ . Кубическое уравнение (4.30) принимает вид  $\lambda^3 - \sigma_{zz}\lambda^2 - \sigma_{\alpha z}^2\lambda = 0$ , а его корни – главные нормальные напряжения равны

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \left( \sigma_{zz} + \sqrt{\sigma_{zz}^2 + 4\sigma_{\alpha z}^2} \right) / 2, \\ \sigma_2 &= 0, \\ \sigma_3 &= \left( \sigma_{zz} - \sqrt{\sigma_{zz}^2 + 4\sigma_{\alpha z}^2} \right) / 2 \end{aligned} \right\} \quad (9.28)$$

Условие пластичности Треска–Сен-Венана примет вид  $\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_T$

$$\sigma_{zz}^2 + 4\sigma_{\alpha z}^2 = \sigma_T^2, \quad (9.29)$$

а условие пластичности Мизеса (9.18)

$$\sigma_{zz}^2 + 3\sigma_{\alpha z}^2 = \sigma_T^2. \quad (9.30)$$

В координатах  $(\sigma_{zz}/\sigma_T)$ ,  $(\sigma_{\alpha\alpha}/\sigma_T)$  это уравнения эллипсов с полуосями соответственно  $(1; 0,5)$  и  $(1; 1/\sqrt{3})$  (рис.9.6).

С целью разнообразить в опытах соотношение между главными нормальными напряжениями иногда создают в трубе внутреннее давление  $p$ . Тогда окружное нормальное напряжение равно  $\sigma_{\alpha\alpha} = pR/h$ . Радиальное нормальное напряжение  $\sigma_{rr}$ , имеющее

порядок  $p$ , пренебрежимо мало по сравнению с  $\sigma_{\alpha\alpha}$ , так как  $R/h \gg 1$ . За некоторыми исключениями опыты лучше подтверждают энергетическое условие пластичности, как это наглядно видно из рис. 9.6.

### 9.2.6. Условие пластичности для анизотропного материала

Как уже отмечалось, поликристаллические металлы на макрокопическом уровне изотропны. Однако в результате обработки давлением (прокатка, ковка) поликристаллические металлы могут стать *анизотропными материалами*, у которых свойства зависят от направления. Это так называемая *деформационная анизотропия* в отличие от начальной анизотропии кристалла. Одной из причин деформационной анизотропии является появление *текстуры*, т.е. системы закономерно ориентированных кристаллографических элементов большинства кристаллитов (зёрен), составляющих деформируемое тело. Анизотропией свойств обладают и слоистые металлы, например биметаллы, а также композитные материалы, производство и применение которых непрерывно увеличивается.

В общем случае для анизотропного материала Мизесом было предложено следующее условие начала пластичности

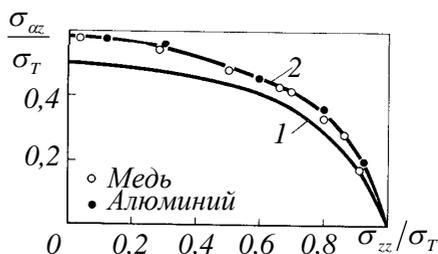


Рис. 9.6. Теоретическая зависимость между напряжениями  $\sigma_{zz}$  и  $\sigma_{\alpha\alpha}$  в  $(P + M)$ -опытах по условию пластичности Треска-Сен-Венана (1) и по энергетическому условию пластичности Губера-Мизеса (2) и результаты опытов Тейлора и Квинни

$$A_{ijmn} \sigma_{ij} \sigma_{mn} = 1, \quad (9.31)$$

где, как и в случае упругости, из 81 коэффициента  $A_{ijmn}$  независимы только 21 [матрица (8.7)]. Упругие коэффициенты  $C_{ijmn}$  характеризуют различие упругих свойств металла в различных направлениях, а коэффициенты  $A_{ijmn}$  характеризуют различие пределов текучести металла в разных направлениях. Для ортотропного материала, который имеет три взаимно перпендикулярные плоскости симметрии механических свойств (пример – холоднокатаный лист) независимыми являются только девять коэффициентов, а уравнение (9.31) принимает вид

$$\begin{aligned} & A_{1111} \sigma_{xx}^2 + A_{2222} \sigma_{yy}^2 + A_{3333} \sigma_{zz}^2 + \\ & + 2(A_{1122} \sigma_{xx} \sigma_{yy} + A_{2233} \sigma_{yy} \sigma_{zz} + A_{3311} \sigma_{zz} \sigma_{xx}) + \\ & + 4(A_{1212} \sigma_{xy}^2 + A_{2323} \sigma_{yz}^2 + A_{3131} \sigma_{zx}^2) = 1 \end{aligned} \quad (9.32)$$

Примем, что гидростатическое давление  $p$  не вызывает пластических деформаций и в анизотропном металле. Тогда соотношение (9.32) не изменится при подстановке в него вместо  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{zz}$  соответственно  $\sigma_{xx} + p$ ,  $\sigma_{yy} + p$ ,  $\sigma_{zz} + p$ . Приравнивая нулю слагаемые при первой и второй степенях  $p$ , получим

$$\left. \begin{aligned} & A_{1111} + A_{1122} + A_{3311} = 0, A_{2222} + A_{2233} + A_{1122} = 0, \\ & A_{3333} + A_{3311} + A_{2233} = 0, \\ & A_{1111} + A_{2222} + A_{3333} + 2(A_{1122} + A_{2233} + A_{3311}) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (9.33)$$

Из первых трёх соотношений найдём и введём обозначения:

$$\left. \begin{aligned} & -A_{1122} = \frac{1}{2}(A_{1111} + A_{2222} - A_{3333}) = H_0, \\ & -A_{2233} = \frac{1}{2}(A_{2222} + A_{3333} - A_{1111}) = F_0, \\ & -A_{3311} = \frac{1}{2}(A_{3333} + A_{1111} - A_{2222}) = G_0. \end{aligned} \right\} \quad (9.34)$$

Эти выражения удовлетворяют и четвертому соотношению (9.33). Подставим соотношения (9.34) в условие пластичности

(9.32). получим после преобразований для ортотропного материала

$$H_0(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + F_0(\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + G_0(\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 2(N_0\sigma_{xy}^2 + L_0\sigma_{yz}^2 + M_0\sigma_{zx}^2) = 1, \quad (9.35)$$

где  $N_0 = 2A_{1212}$ ,  $L_0 = 2A_{2323}$ ,  $M_0 = 2A_{3131}$ . В таком виде условие пластичности было предложено Хиллом. Из опытов на одноосное растяжение в направлениях осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и сдвиг в плоскостях  $xOy$ ,  $yOz$ ,  $zOx$  получим

$$\left. \begin{aligned} H_0 + G_0 &= 1/\sigma_{xT}^2, & H_0 + F_0 &= 1/\sigma_{yT}^2, \\ F_0 + G_0 &= 1/\sigma_{zT}^2, \\ N_0 &= 1/2\tau_{xyT}^2, & L_0 &= 1/2\tau_{yzT}^2, & M_0 &= 1/2\tau_{zxT}^2, \end{aligned} \right\} \quad (9.36)$$

откуда найдём

$$\left. \begin{aligned} H_0 &= (1/\sigma_{xT}^2 + 1/\sigma_{yT}^2 - 1/\sigma_{zT}^2)/2, \\ F_0 &= (1/\sigma_{yT}^2 + 1/\sigma_{zT}^2 - 1/\sigma_{xT}^2)/2, \\ G_0 &= (1/\sigma_{zT}^2 + 1/\sigma_{xT}^2 - 1/\sigma_{yT}^2)/2. \end{aligned} \right\} \quad (9.37)$$

Тогда окончательно условие пластичности для ортотропной среды имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{\sigma_{xx}^2}{\sigma_{xT}^2} + \frac{\sigma_{yy}^2}{\sigma_{yT}^2} + \frac{\sigma_{zz}^2}{\sigma_{zT}^2} - \left( \frac{1}{\sigma_{xT}^2} + \frac{1}{\sigma_{yT}^2} - \frac{1}{\sigma_{zT}^2} \right) \sigma_{xx}\sigma_{yy} - \\ & - \left( \frac{1}{\sigma_{yT}^2} + \frac{1}{\sigma_{zT}^2} - \frac{1}{\sigma_{xT}^2} \right) \sigma_{yy}\sigma_{zz} - \\ & - \left( \frac{1}{\sigma_{zT}^2} + \frac{1}{\sigma_{xT}^2} - \frac{1}{\sigma_{yT}^2} \right) \sigma_{zz}\sigma_{xx} + \frac{\sigma_{xy}^2}{\tau_{xyT}^2} + \frac{\sigma_{yz}^2}{\tau_{yzT}^2} - \frac{\sigma_{zx}^2}{\tau_{zxT}^2} = 1. \end{aligned} \quad (9.38)$$

Здесь  $\sigma_{iT}$  - пределы текучести в разных направлениях, а  $\tau_{ijT}$  - пределы текучести на сдвиг в разных плоскостях.

### **Задача 9.1. Условие появления пластической деформации в толстостенной трубе**

Найти давления  $p_a$  и  $p_b$  (см. задачу 8.1 и рис. 8.1), при которых в трубе появляется пластическая деформация.

Решение. Напряжения  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{\alpha\alpha}$  [формулы (8.69)] и  $\sigma_{zz} = \mu(\sigma_{rr} + \sigma_{\alpha\alpha})$  являются главными нормальными напряжениями. Так как  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ , то  $\sigma_1 = \sigma_{\alpha\alpha}$ ,  $\sigma_2 = \sigma_{zz}$ ,  $\sigma_3 = \sigma_{rr}$ . Согласно энергетическому условию пластичности (9.21) для плоского деформированного состояния появление пластической деформации зависит от величины разности

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_{\alpha\alpha} - \sigma_{rr} = 2 \frac{p_a - p_b}{b^2 - a^2} \cdot \frac{a^2 b^2}{r^2}, \quad (9.39)$$

которая имеет наибольшую величину на внутренней поверхности трубы при  $r = a$ . Приравняем выражение (9.39) согласно (9.21) величине  $2\tau_T$  при  $r = a$ . Получим, что при разности внутреннего и наружного давлений

$$p_a - p_b = \tau_T \left( 1 - \frac{a^2}{b^2} \right) = p_{kp1} \quad (9.40)$$

на внутренней поверхности трубы появляется пластическая деформация. Если  $p_a - p_b < p_{kp1}$ , то труба находится в упругом состоянии.

### **Контрольные вопросы**

1. В чём состоят энергетические условия пластичности? Дайте аналитическую запись и геометрическую интерпретацию.
2. Какая существует связь между пределами текучести при линейном напряжённом состоянии и на сдвиг по энергетическому условию пластичности? Как она получается?
3. Сформулируйте словами условия (9.12).
4. Покажите справедливость краткой записи (9.13).
5. На основании (9.13) выведите уравнение текучести (9.14).

6. В чём состоит физический смысл энергетического условия пластичности?
7. Запишите энергетическое условие пластичности для плоского напряжённого состояния. Как оно получается? Дайте геометрическую интерпретацию.
8. Выведите аналитическую запись (9.21), (9.22) энергетического условия пластичности для плоского деформированного состояния.
9. Что такое постоянная пластичности?
10. Как оценивается влияние среднего главного нормального напряжения на наступление пластического состояния? Как велико это влияние?
11. Что такое коэффициент Надаи–Лоде? В каких пределах он меняется?
12. Когда энергетическое условие пластичности и условие пластичности Треска–Сен-Венана совпадают? Когда между ними наибольшая разница?
13. Дайте приближённую запись энергетического условия пластичности.
14. Как проводится опытная проверка условий пластичности?
15. Какова особенность условия пластичности для анизотропного материала?
16. Выведите формулы (9.32) – (9.38).
17. В каком месте поперечного сечения толстостенной трубы появляется пластическая деформация? Почему?

### 9.3. Условия упрочнения

#### 9.3.1. Нагружение и разгрузка

Пластическая деформация приводит к упрочнению металла, предел его текучести повышается (рис.9.7).

Если образец растягивать из начального (например, отожжённого) состояния (точка  $O$ ), то как только начинает соблюдаться условие  $\sigma_{xx} = \sigma_T$ , в образце возникает пластическая деформация. Произведём нагружение образца до точки  $A$  (обозначим  $\sigma_{xx_A} = \sigma_s$ ), а затем полную его разгрузку до точки  $N$ . Если теперь вновь растягивать образец из упрочнённого состояния (точка  $N$ ), то вначале кривая растяжения  $\sigma_{xx} = \sigma_{xx}(\varepsilon_{xx})$  будет совпадать с прямой  $NA$ , параллельной  $OT$ . Пластическая деформация возникает в образце в точке  $A$ , когда соблюдается условие

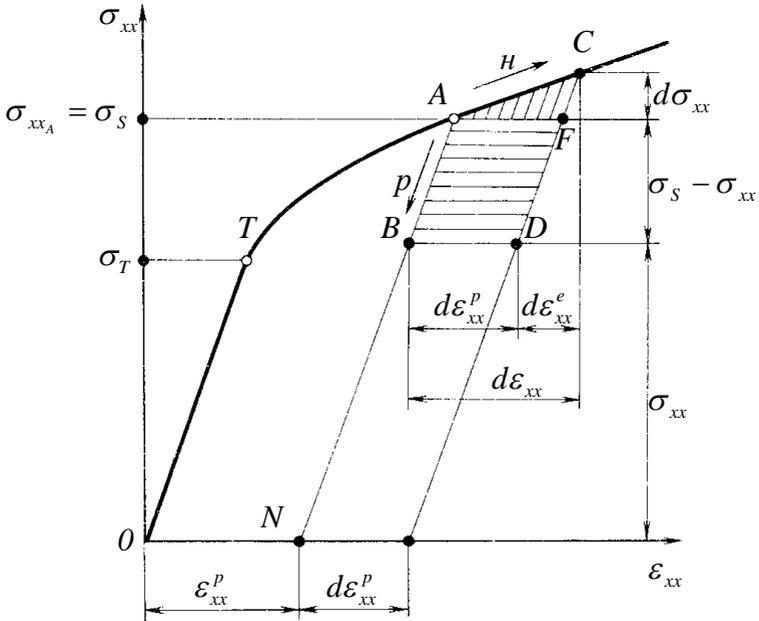


Рис. 9.7. Диаграмма растяжения и построение к иллюстрации постулата Друкера при линейном напряжённом состоянии ( $H$  – нагружение,  $P$  – разгрузка)

$\sigma_{xx} = \sigma_s$ . В связи с этим  $\sigma_T$  называется *начальным*, а  $\sigma_s$  – *текущим пределом текучести* при линейном напряжённом состоянии. Текущий предел текучести  $\sigma_s$  зависит от предыдущей пластической деформации и позволяет легко различать при одноосном растяжении *нагружение*, сопровождающееся дальнейшей пластической деформацией, и *разгрузку*, происходящую чисто упруго. Если по достижении точки  $A$  приращение напряжения  $d\sigma_{xx}$  таково, что  $\sigma_{xx} > \sigma_s$ , произойдёт нагружение, а если  $\sigma_{xx} < \sigma_s$ , то произойдёт разгрузка.

### 9.3.2. Поверхность нагружения

Допустим, что тело деформируется пластически, и в какой-то его точке (частице) напряжения  $\sigma_{ij}$  получили приращения  $d\sigma_{ij}$ . Возникает вопрос – приведёт ли это к *нагружению*, т.е. к дополни-

тельной пластической деформации  $d\varepsilon_{ij}^p$  окружающей точку частицы, либо к упругой разгрузке? Для ответа на этот вопрос рассмотрим *поверхность нагружения*  $\Sigma_s$  (рис. 9.1), которая в пространстве напряжений  $\sigma_{ij}$  отделяет в данном (т.е. упрочнённом) состоянии среды область упругого деформирования от области пластического деформирования. В начальном (неупрочнённом) состоянии поверхность нагружения совпадает с поверхностью текучести  $\Sigma_T$ . С увеличением пластической деформации, по мере развития *упрочнения*, поверхность нагружения расширяется и смещается. Расширение поверхности нагружения есть следствие упрочнения металла при пластической деформации. Смещение поверхности нагружения относительно начала координат ( $\sigma_{ij} = 0$ ) есть следствие *эффекта Баушингера*: после пластической деформации пределы текучести при растяжении и сжатии различны (рис. 6.4,б). Поэтому форма и положение поверхности нагружения зависят не только от текущего напряжённого состояния, но и от всего предшествующего процесса деформирования. Поверхность нагружения, как и поверхность текучести, является выпуклой (см. п.10.1).

Для неупрочняющейся упруго-пластической среды (рис. 7.4) поверхность нагружения является фиксированной и совпадает с поверхностью текучести. При пластическом деформировании изображающая напряжённое состояние точка  $N_1$  (рис.9.1) движется по поверхности текучести, не выходя за её пределы. Если точка  $N_1$  перейдёт внутрь области  $D_e$ , то произойдёт разгрузка.

При нагружении упрочняющейся среды, т.е. при её пластической деформации, изображающая напряжённое состояние точка  $M$  непрерывно как бы выходит наружу поверхности нагружения, увлекая её за собой (рис.9.1). Поэтому, если в пространстве напряжений вектор  $d\sigma'_{ij}$ , изображающий приращение напряжений  $\sigma_{ij}$ , направлен в точке  $M$  наружу поверхности нагружения, происходит *нагружение* частицы, т.е. её пластические деформации  $\varepsilon_{ij}^p$  увеличиваются.

Если же вектор  $d\sigma''_{ij}$  направлен внутрь поверхности нагружения, то происходит *разгрузка*, сопровождающаяся упругой дефор-

мацией, при этом пластические деформации  $\varepsilon_{ij}^p$  частицы не меняются.

Если приращение напряжений  $d\sigma_{ij}^m$  лежит в касательной плоскости к поверхности нагружения (*нейтральное нагружение*), в частице произойдут нейтральные изменения, сопровождающиеся упругой деформацией.

Если упрочнение материала происходит одинаково во всех направлениях, поверхность нагружения  $\Sigma_s$  при пластической деформации испытывает равномерное (изотропное) расширение (рис. 9.3). Тогда уравнение поверхности нагружения  $\Sigma_s$  по аналогии с уравнением поверхности текучести  $\Sigma_T$  для изотропного материала может быть представлено в виде  $f_s[I_2(D_\sigma), I_3(D_\sigma)] = 0$ . Это уравнение содержит уже не постоянную величину (например, предел текучести  $\sigma_T$ ), а возрастающую функцию  $F(q)$  параметра упрочнения  $q$ , характеризующую предыдущую пластическую деформацию. В зависимости от выбора параметра упрочнения  $q$  получаются различные условия упрочнения.

### 9.3.3. Простое и сложное нагружения

*Нагружение* частицы называется *простым*, или пропорциональным, если все компоненты  $\sigma_{ij}$  тензора напряжений, характеризующего напряжённое состояние частицы, возрастают от начального состояния пропорционально одному параметру, т.е.  $\sigma_{ij} = \lambda \sigma_{ij}^0$ , где  $\sigma_{ij}^0$  - постоянный тензор, а  $\lambda$  - переменный скалярный параметр. При этом угол вида напряжённого состояния  $\psi_\sigma$ , коэффициент Надаи–Лодэ  $\nu_\sigma$  и положение главных осей тензора напряжений  $T_\sigma$  не меняются в процессе нагружения, а гидростатическое давление  $\sigma$  возрастает пропорционально параметру  $\lambda$ .

Поскольку влияние среднего напряжения  $\sigma$  на условие пластичности незначительно, критерий простого нагружения можно сформулировать в ослабленной форме: при простом нагружении компоненты девиатора напряжений  $s_{ij}$  изменяются пропорцио-

нально возрастающему параметру  $\lambda$ , т.е.  $s_{ij} = \lambda s_{ij}^0$ , где  $s_{ij}^0$  - постоянный девиатор. При этом среднее напряжение  $\sigma$  может меняться произвольно.

Для примера на рис. 9.8 показаны ряд линий на плоскости  $POM$  соответствующие различным видам нагружений в  $(P + M)$ -опытах.

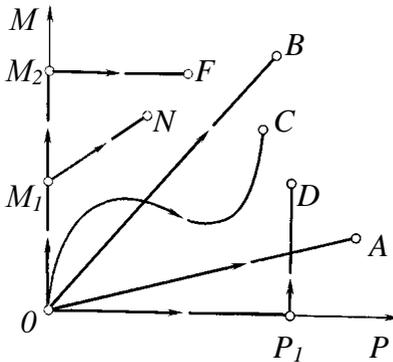


Рис. 9.8. Различные виды нагружений в  $(P + M)$ -опытах:  
 OA, OB - простое (пропорциональное);  
 OC, OM<sub>1</sub>N - сложное;  
 OP<sub>1</sub>D, OM<sub>2</sub>F - сложное ступенчатое

Напомним, что  $P$  - сила, растягивающая тонкостенный трубчатый образец, а  $M$  - крутящий момент.

Теперь возникает вопрос, как в общем случае неоднородного нагруженно-деформированного состояния должны меняться внешние силы, действующие на тело, чтобы нагружение было простым во всех его точках (частицах). Ответ на него даёт теорема А. А. Ильюшина о простом нагружении, утверждающая, что нагружение является простым при малых деформациях, если

- 1) материал несжимаем ( $\theta = 0$ );
- 2) интенсивности напряжений и деформаций связаны степенной зависимостью вида

$$\sigma_u = C \varepsilon_u^n; \tag{9.41}$$

- 3) внешние силы  $p_i$  возрастают пропорционально некоторому параметру  $\lambda$ , т.е.  $p_i = \lambda p_i^0$ .

Выражение (9.41) с достаточной степенью точности аппроксимирует опытную зависимость  $\sigma_u = \sigma_u(\varepsilon_u)$  при холодной пластиче-

ской деформации большинства металлов [формула (6.39)]. Эта степенная зависимость является условием достаточным, но не необходимым. Иногда простое нагружение имеет место и при другой зависимости между интенсивностями  $\sigma_u$  и  $\varepsilon_u$  (но при соблюдении первого и третьего условий). Если же упрочнение отсутствует, то нагружение может оказаться сложным, если даже внешние силы и возрастают пропорционально одному параметру.

### 9.3.4. Построение поверхностей текучести и нагружения по опытным данным

Обычно строят кривые текучести и нагружения в некоторых сечениях соответствующих поверхностей при плоском напряжённом состоянии. Рассмотрим испытания тонкостенных труб под действием осевой силы  $P$  и внутреннего давления  $p$  [ $(P + p)$ -опыты]. При этом  $\sigma_{zz} = P / 2\pi Rh$ ,  $\sigma_{\alpha\alpha} = pR / h$  ( $R$  – средний радиус трубы,  $h$  – толщина её стенки), а  $\sigma_{rr} = 0$ . Эти напряжения являются главными нормальными напряжениями, а напряжённое состояние является плоским. Тогда согласно (9.18) энергетическое условие пластичности изотропного материала имеет вид  $\sigma_{zz}^2 + \sigma_{\alpha\alpha}^2 - \sigma_{zz}\sigma_{\alpha\alpha} = \sigma_T^2$ , а кривая текучести на плоскости  $\sigma_{zz} O \sigma_{\alpha\alpha}$  представляет собой эллипс.

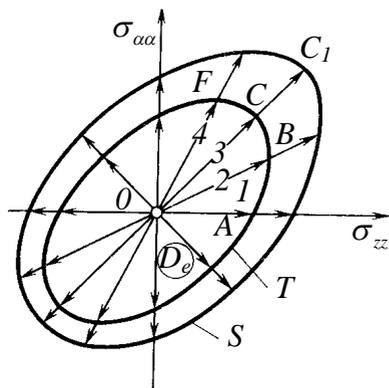


Рис. 9.9 построение кривых текучести и нагружения по экспериментальным данным в  $(P + p)$ -опытах

Построим начальную кривую текучести  $T$  (рис. 9.9), ограничивающую на плоскости  $\sigma_{zz} O \sigma_{\alpha\alpha}$  упругую область  $D_e$  для исходного (неупрочнённого) металла. Для этого испытывается ряд образцов при различных в каждом опыте отношениях  $P/p$ , соответствующих лучам 1, 2, 3, 4 и т. д. На каждом луче отмечается точка ( $A, B, C, F$  и т.д.), соответствующая началу текучести (определяемая, например, по вели-

чине остаточной деформации в  $0,2\%$ ). Соединяя найденные точки плавной кривой, получаем кривую текучести  $T$ , или начальную кривую нагружения.

Построим теперь кривую нагружения металла, предварительно подвергнувшегося пластической деформации при нагружении, например, по лучу  $OC_1$ . Для этого несколько труб подвергаются одинаковому предварительному нагружению по лучу  $OC_1$  с последующей полной разгрузкой. Затем, поступая с ними точно так же, как и при построении кривой  $T$ , строим кривую нагружения  $S$ . Согласно опытам кривая нагружения по сравнению с кривой текучести расширяется и смещается относительно начала координат  $O$  в направлении предварительной пластической деформации.

### 9.3.5. Гипотеза «единой кривой»

По энергетическому условию пластичности третий инвариант девиатора напряжений  $I_3(D_\sigma)$  не влияет на наступление пластического состояния. Уравнение поверхности текучести  $\Sigma_T$  для изотропного материала имеет вид  $f_T[I_2(D_\sigma)] = 0$ , или  $\sigma_u = \sigma_T$ . Аналогично при изотропном упрочнении уравнение поверхности нагружения  $\Sigma_s$  можно представить в виде  $\sigma_u = F(q)$ , где  $q$  – параметр упрочнения. Это уравнение круговой цилиндрической поверхности, ось которой совпадает с гидростатической осью  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ , а радиус  $\sqrt{2/3}\sigma_u$  увеличивается по мере упрочнения (рис. 9.3).

Если в качестве меры упрочнения взять величину достигнутой интенсивности деформаций  $\varepsilon_u$ , получим  $\sigma_u = E'(\varepsilon_u)\varepsilon_u$ , где  $E'(\varepsilon_u)$  – положительная функция, характерная для данного материала, называемая *модулем пластичности*. Если в координатах  $\varepsilon_u, \sigma_u$  строить диаграмму деформирования  $\sigma_u = \sigma_u(\varepsilon_u)$  (рис. 9.10), то для различных напряжённых состояний получим одну и ту же «единую» кривую. Поэтому она совпадает с диаграммой деформирования, которая строится по результатам испытаний на одноосное растяжение (рис. 6.7).

При упругой деформации согласно (8.49)  $\sigma_u = 3G\varepsilon_u$ , тогда  $E'(\varepsilon_u) = 3G = const$ . В момент возникновения пластических де-

формаций в неупрочнённом металле (точка  $T$  на рис. 9.10) согласно (9.12)  $\sigma_u = \sigma_T$ , тогда  $E'(\varepsilon_u) = \sigma_T / \varepsilon_u$ . При пластической деформации (за точкой  $T$ )  $\sigma_u = \sigma_s$ , поскольку при одноосном растяжении  $\sigma_u = \sigma_{xx}$ , а  $\sigma_{xx} = \sigma_s$  (рис. 9.7). Поэтому радиус цилиндра  $\Sigma_s$  равен  $\sqrt{2/3}\sigma_u = \sqrt{2/3}\sigma_s$  (рис. 9.3).

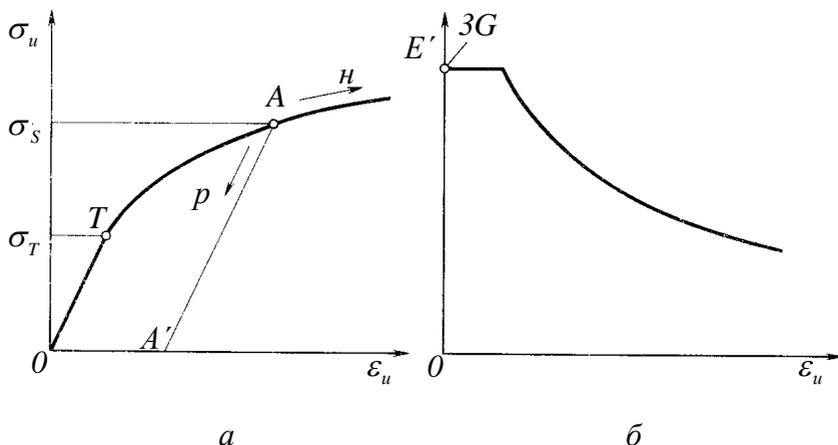


Рис. 9.10. Диаграмма деформирования (а) и зависимость модуля пластичности  $E'$  от интенсивности деформаций  $\varepsilon_u$  (б) ( $n$  - нагружение,  $p$  - разгрузка)

При возрастании интенсивности деформаций  $\varepsilon_u$  упрочнение развивается и растёт интенсивность напряжений  $\sigma_u$ . Следовательно, если в точке  $A$  (рис. 9.10)  $d\sigma_u > 0$ , происходит нагружение ( $n$ ), т.е. возрастание пластических деформаций. При  $d\sigma_u < 0$ , происходит упругая разгрузка ( $p$ ) по линии  $AA'$  параллельной  $OT$ .

Если  $d\sigma_u = 0$ , происходят нейтральные изменения, при этом изображающая напряжённое состояние частицы точка перемещается по поверхности цилиндра  $\Sigma_s$ . Примером нейтрального нагружения в  $(P + M)$  - опытах может служить труба, растянутая до

напряжения  $\sigma_{zz}$ , которая догружается малым кручением. При этом  $\sigma_{zz} \neq 0$ ,  $d\sigma_{zz} = 0$ ,  $\sigma_{\alpha z} = 0$ ,  $d\sigma_{\alpha z} \neq 0$ . Тогда по формуле (4.42) найдём  $d\sigma_u \sim \sigma_{zz}d\sigma_{zz} + \sigma_{\alpha z}d\sigma_{\alpha z} = 0$ .

Подчеркнём, что условие упрочнения  $\sigma_u = E'(\varepsilon_u)\varepsilon_u$ , основанное на гипотезе «единой кривой», выполняется с практически достаточной точностью в общем случае лишь при простом нагружении изотропного материала.

Опыты хорошо подтверждают гипотезу «единой кривой» (рис. 9.11).

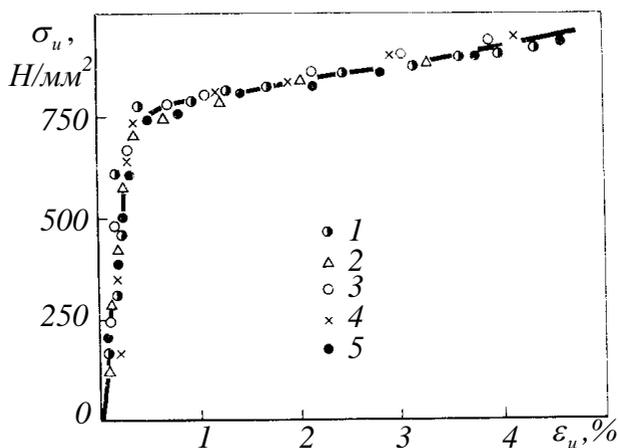


Рис. 9.11. Результаты опытов А.М. Жукова по проверке гипотезы «единой кривой» ( $\sigma_{zz}/\sigma_{\alpha\alpha}$  и  $\psi_\sigma$  в град. соответственно равны 1 – 0 и 0; 2 – 0,1 и 5,2; 3 – 0,3 и 17; 4 – 1 и 60; 5 –  $\infty$  и 0)

Тонкостенные трубы из хромоникелевой стали нагружались растягивающей силой и внутренним давлением [(P + p)- опыты]. Различные виды напряжённого состояния создавались за счёт изменения отношения осевого напряжения к окружному  $\sigma_{zz}/\sigma_{\alpha\alpha}$  от нуля до бесконечности. Напряжения  $\sigma_{rr}, \sigma_{\alpha\alpha}, \sigma_{zz}$  являются главными нормальными напряжениями. Так как  $\sigma_{\alpha\alpha} \geq 0$  и  $\sigma_{zz} \geq 0$ , а  $\sigma_{rr} = 0$ , то  $\sigma_{rr} = \sigma_2 = 0$ , поскольку  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ . Тогда согласно формуле (4.44) угол вида напряжён-

ного состояния равен  $\psi_\sigma = \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sigma_2}{\sigma_u}\right)$ , где интенсивность напряжений (4.42) при плоском напряжённом состоянии равна

$$\sigma_u = \sqrt{\sigma_{\alpha\alpha}^2 + \sigma_{zz}^2 - \sigma_{\alpha\alpha}\sigma_{zz}}. \quad (9.42)$$

Большинство испытаний проводилось в условиях простого нагружения ( $\sigma_{zz} / \sigma_{\alpha\alpha} = \text{const}$ ). Однако в некоторых испытаниях это отношение преднамеренно нарушалось, чем создавалось сложное нагружение. Из рис. 9.11 видно, что диаграмма деформирования не зависит от вида напряжённого состояния.

### 9.3.6. Энергетическое условие упрочнения

Если за меру упрочнения  $q$  взять удельную работу пластической деформации частицы

$$a^p = \int_t \sigma_{ij} \xi_{ij}^p dt = \int \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p,$$

условие изотропного упрочнения принимает вид  $\sigma_u = \Phi(a^p)$ . Характерная для данного материала функция  $\Phi$  может быть определена, например, по кривой растяжения (рис. 9.7). Тогда  $\sigma_u = \sigma_{xx}$ , а работа  $a^p$  является функцией пластической деформации  $\varepsilon_{xx}^p = \varepsilon_{xx} - \varepsilon_{xx}^e$ .

Энергетическое условие упрочнения является более общим, чем предыдущее условие  $\sigma_u = E'(\varepsilon_u)\varepsilon_u$ , и подтверждается опытами для более широкого класса нагружений. Однако оно не учитывает деформационной анизотропии и может быть использовано лишь для сравнительно несложных путей нагружения.

### 9.3.7. Условие упрочнения Удквиста

За меру упрочнения  $q$  можно взять характеризующий накапливаемую частицей пластическую деформацию параметр

$$q = \int_t \xi_u^p dt = \int \overline{d\varepsilon_u^p} = \int \sqrt{\frac{2}{3}} d\varepsilon_{ij}^p d\varepsilon_{ji}^p. \quad (9.43)$$

Здесь  $\xi_u^p$  - интенсивность скоростей пластических деформаций определяется по формуле (3.58), если заменить в ней  $\xi_{ij}$  на  $\xi_{ij}^p$ ;  $\overline{d\varepsilon}_u^p$  - интенсивность приращений пластических деформаций (отличать от приращения интенсивности пластических деформаций  $d\varepsilon_u^p$ ) определяется по формуле (2.82), если заменить в ней  $\varepsilon_{ij}$  на  $d\varepsilon_{ij}^p$  - компоненты тензора приращений пластических деформаций  $T_{d\varepsilon}^p = d\varepsilon_{ij}^p \vec{e}_i \vec{e}_j$ .

### 9.3.8. Разгрузка. Остаточные напряжения и деформации

При разгрузке деформация частицы происходит благодаря накопленной ею упругой потенциальной энергии. Компоненты упругой деформации  $\varepsilon_{ij}^e$  не зависят от пластического деформирования, а определяются только действующими в данный момент времени напряжениями. Например, согласно (8.40)

$$\varepsilon_{xx}^e = \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \mu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})], \dots, \varepsilon_{zx}^e = \frac{\sigma_{zx}}{2G}. \quad (9.44)$$

Как показывает опыт, при разгрузке тело подчиняется закону Гука. При этом компоненты пластической деформации  $\varepsilon_{ij}^p$  не меняются и равны пластическим деформациям, достигнутым при нагружении к моменту начала разгрузки.

Допустим, что при нагружении тела были достигнуты напряжения  $\sigma_{ij}$  и деформации  $\varepsilon_{ij}$ . Тогда после полной простой разгрузки, когда все внешние силы уменьшаются до нуля пропорционально одному общему параметру, в теле будут *остаточные напряжения*  $\sigma_{ij}^{ocm}$  и *остаточные деформации*  $\varepsilon_{ij}^{ocm}$ , равные

$$\sigma_{ij}^{ocm} = \sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*, \quad \varepsilon_{ij}^{ocm} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^*, \quad (9.45)$$

где  $\sigma_{ij}^*$  и  $\varepsilon_{ij}^*$  - напряжения и деформации, которые являются решением задачи теории упругости для тела, нагруженного внешними силами, соответствующими моменту начала разгрузки.

Формулы (9.45), выражающие *теорему о разгрузке*, справедливы, если при разгрузке не возникают вторичные пластические

деформации (например, не соблюдается условие  $\sigma_u^{ocm} = \sigma_s$ , где  $\sigma_u^{ocm}$  - интенсивность остаточных напряжений).

### Задача 9.2. Пластическое кручение

Найти остаточные напряжения после упруго-пластического кручения круглого сплошного стержня (рис. 9.12).

Решение. Из девяти компонент напряжений (4.18) отличны от нуля только касательные напряжения  $\sigma_{\alpha z} = \sigma_{z\alpha} = \tau$ . Действуя на поверхностях, ограничивающих элементарный объём (заштрихо-

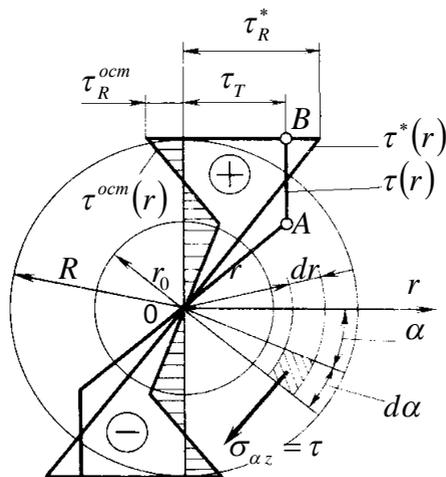


Рис. 9.12 Остаточные напряжения  $\tau^{ocm}$  после упруго-пластического кручения круглого сплошного стержня (к задаче 9.2)

ван на рис. 9.12), они создают элементарный момент относительно оси стержня  $O$ , равный  $dM = \tau r^2 dr d\alpha$ . Тогда крутящий момент равен

$$M = \int_0^{2\pi} \int_0^R \tau r^2 dr d\alpha = 2\pi \int_0^R \tau r^2 dr. \quad (9.46)$$

При упругом кручении стержня касательное напряжение в радиальном направлении меняется по линейному закону, т.е.

$\tau = \tau_R (r/R)$ , где  $\tau_R$  - касательное напряжение в поверхностном слое. Тогда упругий крутящий момент равен

$$M_e = 2\pi \int_0^R \tau_R \frac{r}{R} r^2 dr = \frac{\pi}{2} \tau_R R^3. \quad (9.47)$$

Интенсивность касательных напряжений найдём по формуле (4.41):  $T = \tau$  (полагая  $\tau > 0$ ). Следовательно, с увеличением крутящего момента, когда начинает соблюдаться условие  $\tau_R = \tau_T$ , в поверхностном слое стержня возникает пластическая деформация. При этом максимальный упругий момент равен согласно (9.47)

$$(M_e)_{\max} = \frac{\pi}{2} \tau_T R^3. \text{ При дальнейшем увеличении крутящего мо-}$$

мента  $M$  пластическая деформация распространяется вглубь, достигая оси стержня. Полагая металл неупрочняющимся, имеем при этом по всему сечению  $\tau = \tau_T$ . Тогда крутящий момент чисто пластического кручения равен согласно (9.46)

$$M_p = 2\pi \int_0^R \tau_T r^2 dr = \frac{2}{3} \pi R^3 \tau_T, \quad (9.48)$$

что в 1,33 раза больше максимального упругого момента. Если  $M_p > M > (M_e)_{\max}$ , пластическая деформация распространяется до некоторого радиуса  $r_0$ , а крутящий момент согласно (9.47), (9.48) равен

$$M = \frac{\pi}{2} \tau_T r_0^3 + \frac{2}{3} \pi (R^3 - r_0^3) \tau_T = \frac{\pi}{6} (4R^3 - r_0^3) \tau_T. \quad (9.49)$$

Эпюра  $\tau(r)$  состоит в этом случае из двух прямолинейных участков  $OA$  и  $AB$ . Найдём теперь касательное напряжение  $\tau_R^*$  в поверхностном слое, являющееся решением упругой задачи для заданного момента  $M$ . Имеем согласно (9.47) и (9.49)

$$M = \frac{\pi}{6} (4R^3 - r_0^3) \tau_T = \frac{\pi}{2} \tau_R^* R^3, \quad (9.50)$$

откуда

$$\tau_R^* = \frac{1}{3} \left( 4 - \frac{r_0^3}{R^3} \right) \tau_T. \quad (9.51)$$

Тогда согласно (9.45) остаточное касательное напряжение в наружном слое равно

$$\tau_R^{ocm} = \tau_R - \tau_R^* = \tau_T - \frac{1}{3} \left( 4 - \frac{r_0^3}{R^3} \right) \tau_T = -\frac{1}{3} \left( 1 - \frac{r_0^3}{R^3} \right) \tau_T. \quad (9.52)$$

Наибольшее значение  $\tau_R^{ocm}$  имеет при разгрузке после чисто пластического кручения. В этом случае  $r_0 = 0$ , и  $\tau_R^{ocm} = -\tau_T / 3$ .

На рис. 9.12 эпюра остаточных напряжений  $\tau^{ocm}(r)$  получена вычитанием эпюры  $\tau^*(r)$  из эпюры  $\tau(r)$ . Как видно, остаточные напряжения  $\tau^{ocm}(r)$  меняют знак по сечению стержня, так как остаточные напряжения являются самоуравновешивающимися, поскольку внешние силы после разгрузки отсутствуют.

### **Контрольные вопросы**

1. В чём проявляется упрочнение металла?
2. Что такое начальный и текущий пределы текучести?
3. Что такое нагружение и разгрузка? Укажите критерии нагружения и разгрузки при одноосном растяжении.
4. Что такое поверхность нагружения? Чем объясняется расширение и смещение поверхности нагружения в процессе деформации?
5. Укажите критерии нагружения и разгрузки в общем случае объёмного напряжённого состояния. Что такое нейтральное нагружение? Приведите пример нейтрального нагружения.
6. Что представляет собой поверхность нагружения для случая изотропного упрочнения, если следовать условиям пластичности Треска–Сен-Венана и Губера–Мизеса?
7. Что такое простое и сложное нагружения? Приведите примеры.
8. Сформулируйте теорему А.А. Ильюшина о простом нагружении.
9. Как построить поверхности текучести и нагружения по опытным данным?
10. В чём состоит гипотеза «единой кривой»? Как построить «единую кривую» по опытным данным? Как на опыте прове-

- ритель справедливость гипотезы «единой кривой»? Выведите формулу (9.42)
11. Как построить опытную «единую кривую» в координатах  $\Gamma - T$ ?
  12. Что такое параметр упрочнения? Что можно принять за параметр упрочнения?
  13. В чём состоит энергетическое условие упрочнения?
  14. В чём состоит условие упрочнения Удквиста?
  15. Что такое остаточные напряжения и деформации?
  16. Сформулируйте теорему о разгрузке для случаев полной и частичной разгрузки (когда внешние силы уменьшаются не до нуля).
  17. Как найти радиус  $r_0$  при кручении стержня, до которого от поверхности стержня распространяется пластическая деформация (рис. 9.12)?
  18. Как изменятся на рис. 9.12 эпюры  $\tau(r)$  и  $\tau^{ocm}(r)$ , если металл упрочняется, например по линейному закону?



тому же напряжённому состоянию  $\overline{OA}$  соответствуют разные пластические деформации.

Рассмотрим теперь среду с упрочнением (рис. 9.7). При одноосном растяжении для неё существует однозначная связь между напряжением  $\sigma_{xx}$  и пластической деформацией  $\varepsilon_{xx}^p$ , но только в случае непрерывного нагружения (без разгрузок). Если есть разгрузки, такой связи нет (рис. 6.3).

Обратимся теперь к объёмному напряжённому состоянию в случае, когда разгрузок нет. Напряжённое состояние, соответствующее вектору  $\overline{OA_1}$ , переводит среду в пластическое состояние. В точке  $A_1$  все пластические деформации  $\varepsilon_{ij}^p = 0$ . Для протекания пластической деформации необходимо произвести дальнейшее нагружение. Сделаем это различными путями -  $\overline{A_1A_2}$ ,  $\overline{A_1B_1}$ ,  $\overline{A_1C_1}$ , но так, чтобы точки  $A_2, B_1, C_1$  оказались на одной и той же поверхности нагружения  $\Sigma_s$ . При этом в точках  $A_2, B_1, C_1$  напряжения и пластические деформации разные. Произведём далее из точек  $B_1$  и  $C_1$  нейтральные нагружения  $B_1A_2$  и  $C_1A_2$ , т.е. будем двигаться из точек  $B_1$  и  $C_1$  в точку  $A_2$  по поверхности нагружения  $\Sigma_s$ . При этом меняется напряжённое состояние, но пластические деформации остаются неизменными. В результате получим, что одному и тому же напряжённому состоянию в точке  $A_2$  соответствуют разные пластические деформации, полученные разными путями нагружения -  $OA_1A_2$ ,  $OA_1B_1A_2$ ,  $OA_1C_1A_2$ . Таким образом, при одних и тех же напряжениях в конечном состоянии пластические деформации зависят от пути нагружения.

Итак, в общем случае объёмного напряжённого состояния даже при нагружении упрочняющейся среды без разгрузок однозначная связь между напряжениями и пластическими деформациями отсутствует. В связи с этим уравнения состояния, описывающие пластическую деформацию, в принципе не могут быть конечными соотношениями, связывающими напряжения и деформации (аналогично закону Гука), а должны иметь вид дифференциальных и неинтегрируемых соотношений.

## 10.1. Постулат Друкера и ассоциированный закон течения

### 10.1.1. Постулат Друкера при линейном напряжённом состоянии

В основе уравнений состояния пластически деформируемого тела лежит соотношение, называемое *постулатом Друкера*, которое при одноосном растяжении почти очевидно. Согласно постулату Друкера в цикле нагружение – разгрузка добавочные напряжения выполняют положительную работу, если имели место пластические деформации. Произведём нагружение до точки  $A$  (напряжение равно  $\sigma_s$ ), затем разгрузку до точки  $B$  (напряжение равно  $\sigma_{xx}$ , рис. 9.7). Это состояние примем за начальное. Произведём нагружение по линии  $BA$ . Точка  $A$  лежит на кривой упрочнения, так что ей соответствует наступление пластического состояния. Из точки  $A$  произведём бесконечно малое догружение  $d\sigma_{xx}$  до точки  $C$ , вызывающее пластическую деформацию  $d\varepsilon_{xx}^P$ . Наконец, произведём разгрузку до начального напряжения  $\sigma_{xx}$  в точке  $D$ . Удельная работа пластической деформации в цикле нагружение – разгрузка  $BACD$  в некотором масштабе равна сумме площадей параллелограмма  $BAFD$  и криволинейного треугольника  $ACF$ . Следовательно,

$$\left. \begin{array}{l} (\sigma_s - \sigma_{xx})d\varepsilon_{xx}^P > 0, \\ d\sigma_{xx}d\varepsilon_{xx}^P > 0. \end{array} \right\} \quad (10.1)$$

Итак, за цикл нагружения и разгрузки добавочные напряжения  $(\sigma_s - \sigma_{xx})$  и  $d\sigma_{xx}$  выполняют положительную работу на вызванных ими деформациях. В неравенства (10.1) входит только приращения пластической деформации, так как работа добавочных напряжений на приращениях упругой деформации в замкнутом по нагружению цикле равна нулю. Соотношения (10.1) и выражают постулат Друкера в случае одноосного растяжения (линейного напряжённого состояния)

### 10.1.2. Постулат Друкера при объёмном напряжённом состоянии

Перейдём теперь к общему случаю объёмного напряжённого состояния. Пусть  $\Sigma_s$  - текущее положение поверхности нагружения

(рис. 10.2), а напряжения в начальном состоянии (точка  $B$ ) равны  $\sigma_{ij}^0$ . Произведём нагружение в упругой области  $D_e$  по линии  $BKA$ . Точка  $A$  (напряжения равны  $\sigma_{ij}$ ) лежит на поверхности нагружения  $\Sigma_s$  и соответствует наступлению пластического состояния.

Из точки  $A$  произведём бесконечно малое догружение  $d\sigma_{ij}$ , харак-

теризуемое вектором  $\overline{AC}$ . Точка  $C$  лежит на новом, близком положении поверхности нагружения  $\Sigma'_s$ . Тогда на линии догружения  $AC$  произойдёт пластическая деформация  $d\varepsilon_{ij}^p$ .

Вернёмся теперь в точку  $B$ , т.е. произведём каким-нибудь путём  $CB$  разгрузку. Согласно постулату Друкера за весь цикл нагружения и разгрузки  $BKACB$  добавочные напряжения  $\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^0$  и  $d\sigma_{ij}$  выполняют положительную работу, если имели место пластические деформации  $d\varepsilon_{ij}^p$ , т.е.

$$\boxed{(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^0)d\varepsilon_{ij}^p > 0, \quad d\sigma_{ij}d\varepsilon_{ij}^p > 0.} \quad (10.2)$$

Из первого неравенства (10.2) следует, что

$$\sigma_{ij}d\varepsilon_{ij}^p > \sigma_{ij}^0d\varepsilon_{ij}^p, \quad (10.3)$$

т.е. работа, совершаемая действительными напряжениями  $\sigma_{ij}$  (напряжениями, удовлетворяющими условию пластичности) на заданных приращениях пластических деформаций  $d\varepsilon_{ij}^p$ , больше ра-

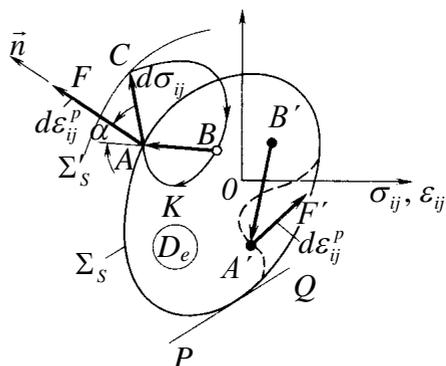


Рис. 10.2. Построения к формулировке постулата Друкера при объёмном напряжённом состоянии и доказательству выпуклости поверхности нагружения

боты, которую совершили бы любые другие напряжения  $\sigma_{ij}^0$  из упругой области  $D_e$  (рис. 10.2) на тех же приращениях пластических деформаций. Это так называемый *принцип максимума работы пластической деформации*.

### 10.1.3. Выпуклость поверхности нагружения

Наряду с девятимерным пространством напряжений рассмотрим девятимерное пространство деформаций  $\varepsilon_{ij}$ , в котором деформации или их приращения также изображены векторами. Например, приращение пластических деформаций  $d\varepsilon_{ij}^p$  изображается вектором  $\overrightarrow{AF}$  (рис. 10.2). Тогда скалярное произведение векторов

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AF} = BA \cdot AF \cos \alpha = (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^0) d\varepsilon_{ij}^p$$

согласно постулату Друкера (10.2) положительно. Поскольку векторы  $\overrightarrow{BA}$  и  $\overrightarrow{AF}$  изображают положительные приращения напряжений и деформаций, угол  $\alpha$  между ними не может быть тупым.

Если поверхность нагружения выпуклая, т.е. лежит по одну сторону любой касательной плоскости  $PQ$ , это условие будет выполнено, если вектор  $\overrightarrow{AF}$ , изображающий приращения пластических деформаций  $d\varepsilon_{ij}^p$ , направлен по нормали  $\vec{n}$  к поверхности нагружения  $\Sigma_s$ . Иначе всегда найдётся вектор  $\overrightarrow{BA}$ , изображающий  $(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^0)$ , образующий с вектором  $\overrightarrow{AF}$  тупой угол. Если же поверхность нагружения  $\Sigma_s$  невыпуклая (штриховая линия на рис. 10.2), то независимо от наклона вектора  $\overrightarrow{A'F'}$  к поверхности  $\Sigma_s$  всегда можно так подобрать точку  $B'$ , что условие (10.2) будет нарушено.

Итак, из постулата Друкера следует, что поверхность нагружения является выпуклой, а вектор, изображающий приращения пластических деформаций  $d\varepsilon_{ij}^p$ , направлен по нормали к ней.

Если материал не упрочняется, т.е. в случае идеальной пластичности, первое неравенство (10.2) сохранится, а второе обратится в равенство

$$d\sigma_{ij}d\varepsilon_{ij}^p = 0, \quad (10.4)$$

так как вектор  $\overrightarrow{AC}(d\sigma_{ij})$ , (рис. 10.2) будет направлен по касательной к поверхности нагружения  $\Sigma_T$  (в случае идеальной пластичности поверхность нагружения фиксирована и совпадает с поверхностью текучести  $\Sigma_T$ ). Но вектор  $\overrightarrow{AF}(d\varepsilon_{ij}^p)$  попрежнему будет направлен по нормали к поверхности текучести  $\Sigma_T$ , т.е. поверхность текучести идеально пластического тела является также выпуклой.

#### 10.1.4. Ассоциированный закон течения

Согласно неравенству (10.3) функция приращения работы пластической деформации  $da_p = \sigma_{ij}d\varepsilon_{ij}^p$  при заданных приращениях пластических деформаций  $d\varepsilon_{ij}^p$  имеет максимум на действительных напряжениях  $\sigma_{ij}$ . Найдём условие максимума функции  $da_p(\sigma_{ij})$ , если соблюдается условие пластичности  $f_s(\sigma_{ij}) = 0$ .

Воспользуемся методом Лагранжа для нахождения экстремума функции  $n$  переменных  $F(x, y, \dots, t)$ , которые связаны между собой  $k < n$  дополнительными условиями  $\varphi(x, y, \dots, t) = 0$ ,  $\psi(x, y, \dots, t) = 0, \dots, \chi(x, y, \dots, t) = 0$ . Введём в рассмотрение  $k$  неопределённых множителей  $\lambda, \mu, \dots, \nu$  и запишем следующую функцию  $(n + k)$  переменных:

$$\begin{aligned} \Phi(x, y, \dots, t, \lambda, \mu, \dots, \nu) = & F(x, y, \dots, t) + \\ & + \lambda \varphi(x, y, \dots, t) + \mu \psi(x, y, \dots, t) + \dots + \nu \chi(x, y, \dots, t). \end{aligned} \quad (10.5)$$

Необходимые условия максимума или минимума функции  $\Phi$  дают систему  $(n + k)$  уравнений с неизвестными  $x, y, \dots, t, \lambda, \mu, \dots, \nu$

$$\varphi = 0, \psi = 0, \dots, \chi = 0, \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0, \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0, \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0. \quad (10.6)$$

В нашем случае функцией  $F$  является функция  $\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p$  девяти переменных  $\sigma_{ij}$ , которые связаны между собой одним дополнительным условием пластичности  $f_s(\sigma_{ij}) = 0$ . Введя в рассмотрение неопределённый множитель  $(-d\lambda)$ , запишем аналогично (10.5) функцию десяти переменных  $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \dots, -d\lambda$ :

$$\Phi(\sigma_{ij}, -d\lambda) = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p - d\lambda f_s(\sigma_{ij}). \quad (10.7)$$

Тогда система уравнений (10.6) примет вид

$$f_s(\sigma_{ij}) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \sigma_{ij}} (\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p - d\lambda f_s) = 0. \quad (10.8)$$

Из второго уравнения (10.8) и получим *ассоциированный* (с уравнением  $f_s = 0$  поверхности нагружения  $\Sigma_s$ ) *закон течения*

$$\boxed{d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial f_s}{\partial \sigma_{ij}}}, \quad (10.9)$$

где функция  $f_s = f_s(\sigma_{ij})$  называется *пластическим потенциалом*.

Рассмотрим геометрический смысл уравнения (10.9). Вектор  $\overrightarrow{AF}$ , изображающий приращения пластических деформаций  $d\varepsilon_{ij}^p$  (рис. 10.2), направлен по нормали  $\vec{n}$  к поверхности нагружения  $f_s(\sigma_{ij}) = 0$ . Поэтому  $\overrightarrow{AF} = d\lambda \cdot \vec{n}$ . Компонентами вектора  $\overrightarrow{AF}$  являются величины  $d\varepsilon_{ij}^p$ . Компоненты нормали  $\vec{n}$  (её направляющие косинусы) с точностью до общего постоянного множителя равны производным  $\partial f_s / \partial \sigma_{ij}$ . Следовательно, векторное равенство  $\overrightarrow{AF} = d\lambda \cdot \vec{n}$  в скалярной форме имеет вид (10.9). Таким образом, ассоциированный закон течения (10.9) отражает тот факт, являющийся следствием постулата Друкера, что вектор  $d\varepsilon_{ij}^p$  направлен

по нормали к поверхности нагружения  $\Sigma_s$ , уравнение которой имеет вид

$$f_s(\sigma_{ij}) = 0. \quad (10.10)$$

Мы рассмотрели случай, когда поверхности текучести и нагружения являются гладкими (регулярными), т.е. производные  $\partial f_s / \partial \sigma_{ij}$  являются непрерывными.

Рассмотрим теперь течение на ребре призмы Треска–Сен-Венана (рис. 9.3). Поверхность нагружения в этом случае не является гладкой, регулярной, т.е. является сингулярной.

Пусть рассматриваемое ребро является линией пересечения граней  $f_1(\sigma_{ij}) = 0$  и  $f_2(\sigma_{ij}) = 0$ . Нормали к этим граням обозначим соответственно  $\vec{n}_1$  и  $\vec{n}_2$  (рис. 10.3). Для точек, лежащих на рассматриваемом ребре, условия (10.8) максимума функции приращения работы пластических деформаций  $\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^P$  имеют вид

$$\left. \begin{aligned} f_1(\sigma_{ij}) = 0, f_2(\sigma_{ij}) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \sigma_{ij}} (\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^P - d\lambda_1 f_1 - d\lambda_2 f_2) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (10.11)$$

откуда получим, что

$$d\varepsilon_{ij}^P = d\lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_{ij}} + d\lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial \sigma_{ij}}. \quad (10.12)$$

Видно, что в рассматриваемом случае течения на ребре призмы Треска–Сен-Венана вектор приращений пластических деформаций  $d\varepsilon_{ij}^P$  лежит внутри угла в  $\pi/3$ , образованного нормальными  $\vec{n}_1$  и  $\vec{n}_2$  к пересекающимся граням призмы.

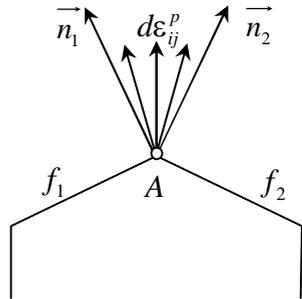


Рис. 10.3. Течение на ребре призмы Треска–Сен-Венана

## Контрольные вопросы

Почему невозможно в общем случае установить связь между напряжениями и конечными пластическими деформациями, которая была бы справедлива для любого нагружения? Можно ли установить такую связь для вполне определённого закона нагружения?

Сформулируйте постулат Друкера для упрочняющейся и неупрочняющейся пластической среды в случае линейного и объемного напряженного состояний.

Относительно чего функция приращения работы пластической деформации  $da_p = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p$  имеет максимум?

Докажите выпуклость поверхностей текучести и нагружения.

Сформулируйте ассоциированный закон течения в случае регулярной и сингулярной поверхностей нагружения.

## 10.2. Теория пластического течения (ТПТ)

### 10.2.1. Основные предпосылки (гипотезы ТПТ)

В основе уравнений состояния пластически деформируемой сплошной среды лежат условия пластичности, условия упрочнения и ассоциированный закон течения. В *теории пластического течения* устанавливается связь между приращениями деформаций  $d\varepsilon_{ij}$ , приращениями напряжения  $d\sigma_{ij}$  и напряжениями  $\sigma_{ij}$ . Примем следующие допущения (предпосылки, гипотезы) при построении ТПТ.

1) Упрочнение является изотропным.

2) Приращения деформаций  $d\varepsilon_{ij}$  складываются из приращений упругих  $d\varepsilon_{ij}^e$  и пластических  $d\varepsilon_{ij}^p$  деформаций, т.е.

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p. \quad (10.13)$$

3) Относительное изменение объёма  $\theta$  и среднее напряжение  $\sigma$  связаны между собой такой же зависимостью, как и при упругой деформации, а именно

$$\theta = \sigma / K, \text{ или } d\theta = d\sigma / K, \quad (10.14)$$

где  $K = E/[3(1 - 2\mu)]$  - объёмный модуль упругости.

4) Приращения напряжений  $\sigma_{ij}$  и упругих деформаций  $d\varepsilon_{ij}^e$  связаны между собой законом Гука

$$d\varepsilon_{xx}^e = \frac{1}{E} [d\sigma_{xx} - \mu(d\sigma_{yy} + d\sigma_{zz})], \dots, d\varepsilon_{zx}^e = \frac{d\sigma_{zx}}{2G}, \quad (10.15)$$

или в краткой индексной записи

$$d\varepsilon_{ij}^e = \frac{1}{E} [d\sigma_{ij} - \mu(3d\sigma \delta_{ij} - d\sigma_{ij})] \quad (10.16)$$

В соответствии с (10.13) приращение объёмной деформации равно

$$d\theta = d\varepsilon_{xx} + d\varepsilon_{yy} + d\varepsilon_{zz} = (d\varepsilon_{xx}^e + d\varepsilon_{yy}^e + d\varepsilon_{zz}^e) + (d\varepsilon_{xx}^p + d\varepsilon_{yy}^p + d\varepsilon_{zz}^p) = d\theta^e + d\theta^p, \quad (10.17)$$

где  $d\theta^e$  - приращение упругой объёмной деформации,  $d\theta^p$  - приращение пластической объёмной деформации. Заменим в (10.17)

$$d\varepsilon_{xx}^e, d\varepsilon_{yy}^e, d\varepsilon_{zz}^e \text{ по формулам (10.15). Получим } d\theta = d\theta^e + d\theta^p = d\sigma / K + d\theta^p. \text{ Сравнивая с формулой (10.14), находим, что}$$

$$d\theta^p = d\varepsilon_{xx}^p + d\varepsilon_{yy}^p + d\varepsilon_{zz}^p = 3d\varepsilon^p = 0, \quad (10.18)$$

т.е. приращение пластической объёмной деформации равно нулю. Следовательно, девиатор приращений пластических деформаций

$D_{d\varepsilon}^p = (d\varepsilon_{ij}^p - d\varepsilon^p \delta_{ij}) \vec{e}_i \vec{e}_j$  и тензор приращений пластических деформаций  $T_{d\varepsilon}^p = d\varepsilon_{ij}^p \vec{e}_i \vec{e}_j$  совпадают.

5) Условия пластичности и упрочнения. В качестве условия пластичности  $f_s(\sigma_{ij}) = 0$  примем энергетическое условие пластичности, по которому наступление пластического состояния определяется только вторым инвариантом девиатора напряжений:

$$\sigma_u = \sqrt{3|I_2(D_\sigma)|} = \sigma_T.$$

Если рассматривать упрочняющуюся среду, то

$$\sigma_u = \sqrt{3|I_2(D_\sigma)|} = \Phi(q),$$

или

$$f_s(\sigma_{ij}) = 3|I_2(D_\sigma)| - [\Phi(q)]^2 = \sigma_u^2 - [\Phi(q)]^2 = 0. \quad (10.19)$$

В качестве параметра упрочнения  $q$  выберем параметр Удквиста (9.43), тогда

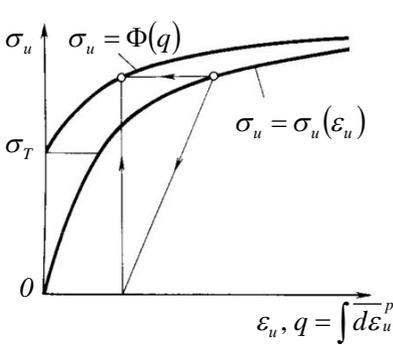


Рис. 10.4. Построение с помощью диаграммы деформирования  $\sigma_u = \sigma_u(\epsilon_u)$  зависимости интенсивности напряжений  $\sigma_u$  от параметра упрочнения Удквиста  $q$

$$\sigma_u = \Phi(q) = \Phi\left(\int d\epsilon_u^p\right), \quad (10.20)$$

т.е. интенсивность напряжений  $\sigma_u$  является функцией параметра Удквиста, не зависящей от вида напряжённого состояния. Поэтому функцию  $\Phi$  можно определить из опытов на одноосное растяжение. Если построена диаграмма деформирования  $\sigma_u = \sigma_u(\epsilon_u)$ , то «единую» кривую  $\sigma_u = \Phi(q)$  легко построить, как показано на рис. 10.4.

### 10.2.2. Связь между приращениями пластических деформаций и напряжениями

Заменим в (10.19) интенсивность напряжений  $\sigma_u$  по известной формуле

$$\sigma_u = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2)}$$

Получим выражение пластического потенциала через напряжения в прямоугольной декартовой системе координат

$$f_s(\sigma_{ij}) = \frac{1}{2} [(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\sigma_{xy}\sigma_{yx} + \sigma_{yz}\sigma_{zy} + \sigma_{zx}\sigma_{xz})] - [\Phi(q)]^2. \quad (10.21)$$

Тогда согласно (10.9) найдём, учитывая, что среднее напряжение равно  $\sigma = (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})/3$

$$d\varepsilon_{xx}^p = d\lambda \frac{df_s}{d\sigma_{xx}} = 3d\lambda(\sigma_{xx} - \sigma), \dots, d\varepsilon_{zx}^p = d\lambda \frac{df_s}{d\sigma_{zx}} = 3d\lambda\sigma_{zx}. \quad (10.22)$$

Действительно, имеем, например,

$$\begin{aligned} d\varepsilon_{xx}^p &= d\lambda \frac{df_s}{d\sigma_{xx}} = d\lambda \frac{1}{2} [2(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) + 2(\sigma_{xx} - \sigma_{zz})] = \\ &= d\lambda(2\sigma_{xx} - \sigma_{yy} - \sigma_{zz}) = d\lambda(3\sigma_{xx} - \sigma_{xx} - \sigma_{yy} - \sigma_{zz}) = \\ &= d\lambda(3\sigma_{xx} - 3\sigma) = 3d\lambda(\sigma_{xx} - \sigma). \end{aligned}$$

В левых частях равенств (10.22) стоят компоненты девиатора приращений пластических деформаций  $D_{d\varepsilon}^p$ , а в правых – умноженные на  $3d\lambda$  компоненты девиатора напряжений  $D_\sigma$ . Следовательно, девиатор приращений пластических деформаций пропорционален девиатору напряжений. Обозначая коэффициент пропорциональности через  $d\lambda$ , получим

$$D_{d\varepsilon}^p = d\lambda \cdot D_\sigma, \quad (10.23)$$

или в координатной форме в прямоугольной декартовой системе координат

$$d\varepsilon_{xx}^p = d\lambda(\sigma_{xx} - \sigma), \dots, d\varepsilon_{zx}^p = d\lambda\sigma_{zx}, \quad (10.24)$$

или в краткой индексной записи

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda(\sigma_{ij} - \sigma g_{ij}). \quad (10.25)$$

Найдем величину  $d\lambda$ . Запишем формулу для интенсивности приращений пластических деформаций  $\overline{d\varepsilon}_u^p$  в прямоугольной декартовой системе координат. С этой целью в (2.82) заменим  $\varepsilon_{ij}$  на  $d\varepsilon_{ij}^p$ . Получим

$$\overline{d\varepsilon}_u^p = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(d\varepsilon_{xx}^p - d\varepsilon_{yy}^p)^2 + (d\varepsilon_{yy}^p - d\varepsilon_{zz}^p)^2 + \dots}$$

$$\dots + (d\varepsilon_{zz}^p - d\varepsilon_{xx}^p)^2 + 6(d\varepsilon_{xy}^p)^2 + 6(d\varepsilon_{yz}^p)^2 + 6(d\varepsilon_{zx}^p)^2. \quad (10.26)$$

Подставим сюда выражения  $d\varepsilon_{ij}^p$  по формулам (10.24). Учитывая формулу для интенсивности напряжений  $\sigma_u$ , получим  $\overline{d\varepsilon}_u^p = \frac{2}{3} d\lambda \cdot \sigma_u$ , откуда

$$d\lambda = \frac{3}{2} \frac{\overline{d\varepsilon}_u^p}{\sigma_u}. \quad (10.27)$$

### 10.2.3. Уравнения Прандтля–Рейсса

Подставим в (10.13) выражения  $d\varepsilon_{ij}^e$  по формулам (10.15) и выражения  $d\varepsilon_{ij}^p$  по формулам (10.24), заменив  $d\lambda$  по формуле (10.27). Получим искомые уравнения состояния Прандтля–Рейсса пластически деформируемой среды по теории течения

$$\left. \begin{aligned} d\varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E} [d\sigma_{xx} - \mu(d\sigma_{yy} + d\sigma_{zz})] + \frac{3}{2} \frac{\overline{d\varepsilon}_u^p}{\sigma_u} (\sigma_{xx} - \sigma), \dots, \\ d\varepsilon_{zx} &= \frac{d\sigma_{zx}}{2G} + \frac{3}{2} \frac{\overline{d\varepsilon}_u^p}{\sigma_u} \sigma_{zx}, \end{aligned} \right\} \quad (10.28)$$

или в краткой индексной записи, учитывая (10.16) и (10.25)

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E} [d\sigma_{ij} - \mu(3d\sigma_{ij} - d\sigma_{ij})] + \frac{3}{2} \frac{\overline{d\varepsilon}_u^p}{\sigma_u} (\sigma_{ij} - \sigma g_{ij}). \quad (10.29)$$

### 10.2.4. Уравнения Сен-Венана–Леву–Мизеса

В процессах обработки металлов давлением упругие деформации обычно невелики, т.е.  $d\varepsilon_{ij}^p \gg d\varepsilon_{ij}^e$ . В связи с этим приращениями упругих деформаций  $d\varepsilon_{ij}^e$  можно пренебречь. Тогда, поделив обе части (10.29) на приращение времени  $dt$ , за которое произошли приращения деформаций  $d\varepsilon_{ij}$ , получим, учитывая

(3.3), зависимость скоростей деформаций от напряжений, или уравнения состояния Сен-Венана–Леви–Мизеса

$$\xi_{ij} = \frac{3}{2} \frac{\xi_u}{\sigma_u} (\sigma_{ij} - \sigma g_{ij}), \quad (10.30)$$

или подробно в прямоугольных декартовых координатах

$$\xi_{xx} = \frac{3}{2} \frac{\xi_u}{\sigma_u} (\sigma_{xx} - \sigma), \dots, \xi_{zx} = \frac{3}{2} \frac{\xi_u}{\sigma_u} \sigma_{zx}, \quad (10.31)$$

где  $\xi_u = \overline{d\varepsilon_u} / dt$  - интенсивность скоростей деформаций [формула (3.58)].

Рассмотренная теория не изменится, если в качестве меры упрочнения  $q$  принять удельную работу пластической деформации

$$a = \int \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p.$$

Уравнения Прандтля–Рейсса (10.28), (10.29) связывают напряжения с бесконечно малыми приращениями деформаций и напряжений, т.е. не являются конечными соотношениями. Они, вообще говоря, не интегрируются, т.е. не сводятся к конечным соотношениям между напряжениями и деформациями для произвольного нагружения или пути деформирования. Этот факт отражает зависимость деформаций от пути нагружения и напряжений от пути деформирования. Например, если из точки  $O$  ( $\sigma_{ij} = 0$ , рис. 10.1) двигаться в точку  $N$  двумя различными путями нагружения 1 и 2, то по уравнениям теории течения деформации в точке  $N$  будут различными. Если есть упрочнение, то при каждом заданном пути нагружения  $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(t)$  ( $t$  – некоторый параметр, например, время) можно вычислить деформации. Можно также найти напряжения, если задан путь деформирования  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(t)$ . В этом случае материал может быть неупрочняющимся (см. задачу 10.1).

Уравнения Сен-Венана–Леви–Мизеса (10.30), (10.31) значительно проще уравнений Прандтля–Рейсса и представляют собой конечные зависимости между напряжениями и скоростями деформаций. Внешне эти уравнения аналогичны уравнениям течения вязкой жидкости. Эта аналогия в некоторой степени оправдывает название «теория течения». Однако уравнения (10.30) и (10.31)

принципиально отличны от уравнений вязкого течения. В них, в отличие от последних, всегда можно отбросить  $dt$  и вернуться к уравнениям Прандтля-Рейсса, не содержащим времени.

**Задача 10.1. Расчёт напряжённого состояния тонкостенной трубы по теории пластического течения**

Рассчитать напряжённое состояние тонкостенной трубы в  $(P + M)$ -опытах при заданных путях деформирования (рис. 10.5) по теории течения.

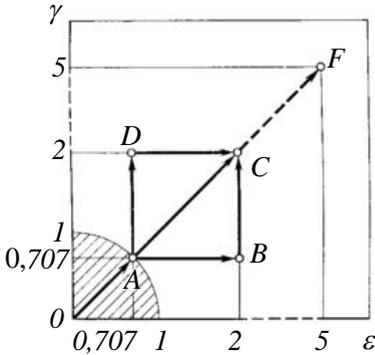


Рис. 10.5. Различные пути деформирования трубы (к задаче 10.1). Заштрихована упругая область

Решение.

1) Тонкостенная труба, средний диаметр которой равен  $d$ , а толщина стенки равна  $h$ , подвергается совместному действию осевой силы  $P$  и крутящего момента  $M$ . Тогда

$$\sigma_{zz} = \frac{P}{\pi d \cdot h},$$

$$\sigma_{\alpha z} = \sigma_{z\alpha} = \frac{2M}{\pi d^2 h}, \quad (10.32)$$

а остальные напряжения равны нулю

2) Интенсивность напряжений найдем по формуле (4.42) в которой индексы  $x, y, z$  заменим соответственно на  $r, \alpha, z$ . Получим

$$\sigma_u = \sqrt{\sigma_{zz}^2 + 3\sigma_{\alpha z}^2}. \quad (10.33)$$

Принимаем, что материал трубы не упрочняется, тогда (рис. 10.4)

$$\sigma_u = \sqrt{\sigma_{zz}^2 + 3\sigma_{\alpha z}^2} = \sigma_T. \quad (10.34)$$

3) Интенсивность приращений пластических деформаций найдем по формуле (10.26), заменяя в ней индексы  $x, y, z$  соответственно на  $r, \alpha, z$ . Из (10.18) найдём, что в нашей задаче  $d\varepsilon_{rr}^P = d\varepsilon_{\alpha\alpha}^P = -d\varepsilon_{zz}^P / 2$ . Кроме того,  $d\varepsilon_{r\alpha}^P = d\varepsilon_{zr}^P = 0$  вследствие

осевой симметрии. Тогда интенсивность приращений пластических деформаций равна

$$\overline{d\varepsilon_u^p} = \sqrt{\left(d\varepsilon_{zz}^p\right)^2 + \frac{4}{3}\left(d\varepsilon_{\alpha z}^p\right)^2}. \quad (10.35)$$

4) Учитывая, что в нашей задаче среднее напряжение равно  $\sigma = \sigma_{zz} / 3$ , а  $\sigma_u = \sigma_T$ , уравнения Прандтля–Рейсса (10.28) преобразуются к виду

$$d\varepsilon_{zz} = \frac{d\sigma_{zz}}{E} + \frac{\overline{d\varepsilon_u^p}}{\sigma_T} \sigma_{zz}, \quad d\varepsilon_{\alpha z} = \frac{d\sigma_{\alpha z}}{2G} + \frac{3}{2} \frac{\overline{d\varepsilon_u^p}}{\sigma_T} \sigma_{\alpha z}. \quad (10.36)$$

5) Примем условие несжимаемости. Тогда  $\mu = 0,5$ , а  $E = 3G$ . Введём в рассмотрение относительные напряжения и деформации

$$\sigma = \frac{\sigma_{zz}}{\sigma_T}, \quad \tau = \frac{\sigma_{\alpha z}}{\tau_T}, \quad \varepsilon = \frac{\varepsilon_{zz}}{\varepsilon_T}, \quad \gamma = \frac{2\varepsilon_{\alpha z}}{\gamma_T}, \quad (10.37)$$

причём  $\sigma_T = E\varepsilon_T$ ,  $\tau_T = G\gamma_T$ . Здесь  $\varepsilon_T$  и  $\gamma_T$  - деформационные пределы текучести. Принимая по энергетическому условию пластичности  $\sigma_T = \sqrt{3}\tau_T$ , получим  $\sigma_T = E\varepsilon_T = \sqrt{3}\tau_T = \sqrt{3}G\gamma_T = \sqrt{3}E\gamma_T / 3$ , откуда получим связь между деформационными пределами текучести при линейном напряжённом состоянии и на сдвиг

$$\gamma_T = \sqrt{3}\varepsilon_T. \quad (10.38)$$

Тогда (10.34) и (10.36) примут вид

$$\sigma^2 + \tau^2 = 1, \quad (10.39)$$

$$d\varepsilon = d\sigma + \sigma E \frac{\overline{d\varepsilon_u^p}}{\sigma_T}, \quad d\gamma = d\tau + \tau E \frac{\overline{d\varepsilon_u^p}}{\sigma_T}. \quad (10.40)$$

Дифференцируя условие пластичности (10.39), получим

$$\sigma d\sigma + \tau d\tau = 0. \quad (10.41)$$

Умножим первое уравнение (10.40) на  $\sigma$ , а второе на  $\tau$  и сложим их. Учитывая (10.41) и (10.39), получим

$$\sigma d\varepsilon + \tau d\gamma = E \overline{d\varepsilon}_u^p / \sigma_T. \quad (10.42)$$

Подставляя это выражение  $E \overline{d\varepsilon}_u^p / \sigma_T$  в уравнения (10.40), получим окончательно связь между напряжениями и деформациями

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \sqrt{1-\sigma^2} \left( \sqrt{1-\sigma^2} - \sigma \frac{d\gamma}{d\varepsilon} \right), \quad (10.43)$$

$$\frac{d\tau}{d\gamma} = \sqrt{1-\tau^2} \left( \sqrt{1-\tau^2} - \tau \frac{d\varepsilon}{d\gamma} \right). \quad (10.44)$$

Итак, зависимости напряжений от деформаций по теории течения определяются интегралами этих уравнений, в которых путь деформирования отражается производными  $d\gamma/d\varepsilon$  и  $d\varepsilon/d\gamma$ . Для произвольной функции деформирования  $\gamma = \gamma(\varepsilon)$  уравнения (10.43), (10.44) не интегрируются в квадратурах, т.е. нахождение решения не может быть сведено к конечному числу последовательных интегрирований. Рассмотрим частные решения.

6) Допустим, что труба только растягивается, тогда  $d\gamma = 0$  (пути деформирования  $AB$  и  $DC$ , рис. 10.5). Уравнение (10.43) принимает вид  $d\varepsilon = d\sigma / (1 - \sigma^2)$ . Интегрируя его в пределах от  $\sigma_0$  до  $\sigma$  и от  $\varepsilon_0$  до  $\varepsilon$ , получим

$$X = X_0 \exp[2(\varepsilon - \varepsilon_0)], \quad (10.45)$$

где

$$X_0 = \frac{1 + \sigma_0}{1 - \sigma_0}, \quad X = \frac{1 + \sigma}{1 - \sigma}, \quad \sigma = \frac{X - 1}{X + 1}. \quad (10.46)$$

7) Пусть труба только закручивается. Тогда  $d\varepsilon = 0$  (пути деформирования  $AD$  и  $BC$ , см. рис. 10.5). Уравнение (10.44) принимает вид  $d\gamma = d\tau / (1 - \tau^2)$ . Интегрируя его в пределах от  $\tau_0$  до  $\tau$  и от  $\gamma_0$  до  $\gamma$ , получим

$$Y = Y_0 \exp[2(\gamma - \gamma_0)], \quad (10.47)$$

где

$$Y_0 = \frac{1 + \tau_0}{1 - \tau_0}, Y = \frac{1 + \tau}{1 - \tau}, \tau = \frac{Y - 1}{Y + 1}. \quad (10.48)$$

8) Пусть  $d\gamma = d\varepsilon$  (пропорциональный путь деформирования  $OACF$ ). С помощью подстановок

$$\sigma = \sin v, \quad w = tg(v/2) \quad (10.49)$$

уравнение (10.43) можно привести к виду

$$\frac{dw}{d\varepsilon} = -\frac{1}{2} \left( w^2 + 2w \frac{d\gamma}{d\varepsilon} - 1 \right). \quad (10.50)$$

Покажем, что это действительно так. Заменим в уравнении (10.43) согласно (10.49)  $\sigma = \sin v$ . Получим

$$\frac{dv}{d\varepsilon} = \cos v - \sin v \frac{d\gamma}{d\varepsilon}. \quad (10.51)$$

Заменим теперь в уравнении (10.50) согласно (10.49)  $w = tg(v/2)$ . Получим после дифференцирования и тригонометрических преобразований снова уравнение (10.51), что и доказывает справедливость уравнения (10.50).

Уравнение (10.50) это дифференциальное уравнение первого порядка Риккати. Оно также не интегрируется для произвольного пути деформирования  $\gamma = \gamma(\varepsilon)$ . Но если  $d\gamma = d\varepsilon$ , то уравнение (10.50) примет вид  $d\varepsilon = -2dw / (w^2 + 2w - 1)$ . Интегрируя его в пределах от  $w_0$  до  $w$  и от  $\varepsilon_0$  до  $\varepsilon$ , получим

$$Z = Z_0 \exp \left[ -\sqrt{2}(\varepsilon - \varepsilon_0) \right], \quad (10.52)$$

где

$$Z_0 = \frac{1 + w_0 - \sqrt{2}}{1 + w_0 + \sqrt{2}}, \quad Z = \frac{1 + w - \sqrt{2}}{1 + w + \sqrt{2}}, \quad w = \frac{(1 + \sqrt{2})Z - 1 + \sqrt{2}}{1 - Z}. \quad (10.53)$$

9) При упругой деформации  $\overline{d\varepsilon_u^p} = 0$ . Тогда уравнения (10.40) примут вид  $d\varepsilon = d\sigma$ ,  $d\gamma = d\tau$ . Интегрируя эти уравнения в пределах от нуля до  $\varepsilon, \sigma, \gamma, \tau$ , получим, что для упругой деформации

$$\sigma = \varepsilon, \quad \tau = \gamma. \quad (10.54)$$

Тогда условие пластичности (10.39) примет вид

$$\varepsilon^2 + \gamma^2 = 1. \quad (10.55)$$

Это уравнение окружности единичного радиуса, которая на плоскости  $\varepsilon O \gamma$  ограничивает область упругой деформации (заштрихована на рис. 10.5).

10) Результаты расчёта напряжённого состояния по выведенным формулам для различных путей деформирования приведены в таблице 10.1, из которой видно, что в случае пропорционального пути деформирования  $OACF$ , т.е. при простом деформировании, напряжения во всех точках этой прямой ( $A, C, F$ ) при пластической деформации одинаковы, если металл не упрочняется.

Таблица 10.1.

Результаты расчёта напряжённого состояния  
в  $(P - M)$  - опытах (рис. 10.5)

Точка	Путь деформирования	Деформации		Напряжения по теории течения		Напряжения по деформационной теории	
		$\varepsilon$	$\gamma$	$\sigma$	$\tau$	$\sigma$	$\tau$
A	OA	0,707	0,707	0,707	0,707	0,707	0,707
B	OAB	2,000	0,707	0,975	0,224	0,943	0,333
D	OAD	0,707	2,000	0,224	0,975	0,333	0,943
C	OAC	2,000	2,000	0,707	0,707	0,707	0,707
	OABC	2,000	2,000	0,417	0,909	0,707	0,707
	OADC	2,000	2,000	0,909	0,417	0,707	0,707
F	$\left. \begin{array}{l} OACF \\ OABCF \\ OADCF \end{array} \right\}$	5,000	5,000	0,707	0,707	0,707	0,707

В случае ступенчатого пути деформирования ( $OABC, OADC$ ) напряжения в конце пути, т.е. в точке  $C$ , оказываются различными и отличающимися от напряжений в точке  $C$  в результате пропорционального пути деформирования  $OAC$ . Таким образом, напряжённое состояние по теории течения зависит не только от конечных деформаций (при любом пути деформирования в точке  $C$   $\varepsilon = \gamma = 2$ ), но и от пути деформирования.

Напряжения в точке  $F$  ( $\varepsilon = \gamma = 5$ ), достаточно удалённой от точки  $C$ , практически (в пределах точности расчёта) не зависят от пути деформирования от точки  $O$  до точки  $C$ . В этом случае говорят, что деформация развивается в направлении  $OF$ .

### **Контрольные вопросы**

1. Между какими величинами устанавливается связь в теории пластического течения (ТПТ)?
2. Назовите основные предпосылки теории пластического течения. Дайте подробный вывод формулы (10.18).
3. На основании чего выводится связь между напряжённым и деформированным состояниями в теории пластического течения?
4. Выведите связь между приращениями пластических деформаций и напряжений.
5. Как получаются уравнения состояния Прандтля–Рейсса?
6. Выведите уравнения состояния Сен-Венана–Леви–Мизеса из уравнений состояния Прандтля–Рейсса.
7. Почему по теории пластического течения напряжения зависят от пути деформирования, а деформации – от пути нагружения, т.е. нет однозначной связи между напряжениями и деформациями?
8. Выведите уравнения (10.36).
9. Выведите уравнения (10.39), (10.40).
10. Выведите уравнения (10.42), (10.43), (10.44).
11. Подробно рассмотрите три частных случая деформирования трубы: растяжение, кручение и совместное растяжение и кручение, когда  $d\varepsilon = d\gamma$  с выводом формул (10.45), (10.47), (10.52).
12. Покажите, что с помощью подстановок (10.49) уравнение (10.43) приводится к виду (10.50).
13. Какова связь между напряжениями и деформациями при упругой деформации тонкостенной трубы в  $(P + M)$  - опытах?
14. Получите числовые значения, занесённые в таблицу 10.1.

## **10.3. Теория упруго-пластических деформаций (ТУ ПД)**

### **10.3.1. Основные предпосылки (гипотезы) ТУПД**

В деформационной теории пластичности устанавливается непосредственная связь между деформациями и напряжениями.

Ранее было показано, что уравнения пластического состояния по теории течения можно интегрировать лишь для вполне определённого способа нагружения или деформирования. Но можно указать нагружения, для которых эти уравнения интегрируются. Это *простые нагружения*. Критерий простого нагружения примем в виде (см. п. 9.3.3)

$$s_{ij} = \varphi s_{ij}^0, \quad (10.56)$$

где  $s_{ij}$  - компоненты девиатора напряжений,  $\varphi$  - переменный скалярный параметр,  $s_{ij}^0$  - постоянный девиатор. Простое нагружение возможно лишь при небольших деформациях. При больших конечных деформациях простое нагружение в общем случае неосуществимо, поэтому деформационную теорию пластичности называют *теорией (малых) упруго-пластических деформаций*. В связи с этим воспользуемся формулами теории (бесконечно) малых деформаций.

1) Допустим, что упрочнение является изотропным.

2) Деформации  $\varepsilon_{ij}$  складываются из упругих  $\varepsilon_{ij}^e$  и пластических  $\varepsilon_{ij}^p$  деформаций, т.е.

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p. \quad (10.57)$$

3) Примем далее, что относительное изменение объема  $\theta = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = 3\varepsilon$  и среднее напряжение  $\sigma$  связаны между собой такой же зависимостью, как и при упругой деформации [формула (8.45)], т.е

$$\theta = \sigma / K, \quad \varepsilon = \sigma / 3K. \quad (10.58)$$

4) Пусть, наконец, напряжения  $\sigma_{ij}$  и упругие деформации  $\varepsilon_{ij}^e$  связаны между собой законом Гука (8.41)

$$\varepsilon_{ij}^e = \frac{1}{E} [\sigma_{ij} - \mu(3\sigma g_{ij} - \sigma_{ij})], \quad (10.59)$$

или подробно в прямоугольной декартовой системе координат согласно (8.40)

$$\varepsilon_{xx}^e = \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \mu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})], \dots, \varepsilon_{zx}^e = \frac{\sigma_{zx}}{2G}. \quad (10.60)$$

5) В соответствии с (10.57) объёмная деформация равна

$$\begin{aligned} \theta &= \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = (\varepsilon_{xx}^e + \varepsilon_{yy}^e + \varepsilon_{zz}^e) + \\ &+ (\varepsilon_{xx}^p + \varepsilon_{yy}^p + \varepsilon_{zz}^p) = \theta^e + \theta^p, \end{aligned} \quad (10.61)$$

где  $\theta^e$  - упругая объёмная деформация,  $\theta^p$  - пластическая объёмная деформация. Заменяем в (10.61)  $\varepsilon_{xx}^e$ ,  $\varepsilon_{yy}^e$ ,  $\varepsilon_{zz}^e$  по формулам

(10.60). Получим  $\theta = \theta^e + \theta^p = \frac{\sigma}{K} + \theta^p$ . Сравнивая с (10.58), находим, что

$$\theta^p = \varepsilon_{xx}^p + \varepsilon_{yy}^p + \varepsilon_{zz}^p = 3\varepsilon^p = 0, \quad (10.62)$$

т.е. пластическая объёмная деформация равна нулю. Следовательно, дивергенция пластических деформаций  $D_\varepsilon^p = e_{ij}^p \bar{e}_i \bar{e}_j = (\varepsilon_{ij}^p - \varepsilon^p g_{ij}) \bar{e}_i \bar{e}_j$  и тензор пластических деформаций  $T_\varepsilon^p = \varepsilon_{ij}^p \bar{e}_i \bar{e}_j$  совпадают. Поэтому компоненты дивергенции пластических деформаций равны компонентам тензора пластических деформаций, т.е.

$$e_{ij}^p = \varepsilon_{ij}^p. \quad (10.63)$$

6) Примем энергетическое условие пластичности Губера-Мизеса.

7) В качестве меры упрочнения примем интенсивность деформаций  $\varepsilon_u$ . Тогда справедлива гипотеза «единой кривой»  $\sigma_u = E'(\varepsilon_u) \varepsilon_u$  (рис. 9.10).

### 10.3.2. *Связь пластических деформаций с напряжениями*

Согласно (10.25) приращения пластических деформаций пропорциональны компонентам дивергенции напряжений, т.е.  $d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda s_{ij}$ . Заменяя  $d\lambda$  по формуле (10.27), получим

$d\varepsilon_{ij}^p = \frac{3}{2} \frac{\overline{d\varepsilon_u^p}}{\sigma_u} s_{ij}$ . Если в формуле (4.42) компоненты тензора напряжений выразить через компоненты дивергенции напряжений

( $\sigma_{xx} = s_{xx} + \sigma, \dots, \sigma_{zx} = s_{zx}$ ), получим выражение интенсивности напряжений через компоненты девiatorа напряжений

$$\sigma_u = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(s_{xx} - s_{yy})^2 + (s_{yy} - s_{zz})^2 + (s_{zz} - s_{xx})^2 + \dots} + \dots \sqrt{6(s_{xy}^2 + s_{yz}^2 + s_{zx}^2)}. \quad (10.64)$$

Заменяя при простом нагружении  $s_{ij} = \varphi s_{ij}^0$ , получим  $\sigma_u = \varphi \sigma_u^0$ , где  $\sigma_u^0$  выражается по формуле (10.64) через  $s_{ij}^0$ . Тогда приращения пластических деформаций равны

$$d\varepsilon_{ij}^p = \frac{3}{2} \frac{s_{ij}}{\sigma_u} \overline{d\varepsilon_u^p} = \frac{3}{2} \frac{s_{ij}^0}{\sigma_u^0} \overline{d\varepsilon_u^p}. \quad (10.65)$$

Интегрируя, найдём пластические деформации в виде

$$\varepsilon_{ij}^p = \frac{3}{2} \frac{s_{ij}^0}{\sigma_u^0} \int \overline{d\varepsilon_u^p} = \frac{3}{2} \frac{s_{ij}}{\sigma_u} \int \overline{d\varepsilon_u^p} \quad (10.66)$$

Запишем формулу для интенсивности пластических деформаций  $\varepsilon_u^p$ , которую получим из (2.62), заменяя в ней  $\varepsilon_{ij}$  на  $\varepsilon_{ij}^p$ :

$$\varepsilon_u^p = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_{xx}^p - \varepsilon_{yy}^p)^2 + (\varepsilon_{yy}^p - \varepsilon_{zz}^p)^2 + (\varepsilon_{zz}^p - \varepsilon_{xx}^p)^2 + \dots} + \dots \sqrt{6[(\varepsilon_{xy}^p)^2 + (\varepsilon_{yz}^p)^2 + (\varepsilon_{zx}^p)^2]}. \quad (10.67)$$

Подставим в формулу (10.67) выражения пластических деформаций по формуле (10.66). Учитывая (10.64), найдём, что

$$\varepsilon_u^p = \int \overline{d\varepsilon_u^p} \quad (10.68)$$

Тогда формула (10.66), выражающая связь между пластическими деформациями и напряжениями по деформационной теории пластичности, примет вид

$$\varepsilon_{ij}^p = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_u^p}{\sigma_u} s_{ij} = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_u^p}{\sigma_u} (\sigma_{ij} - \sigma g_{ij}) \quad (10.69)$$

### 10.3.3. Связь между деформациями и напряжениями по ТУПД

Выразим деформации в (10.57) через компоненты соответствующих девиаторов, получим  $e_{ij} + \varepsilon g_{ij} = e_{ij}^e + \varepsilon^e g_{ij} + e_{ij}^p + \varepsilon^p g_{ij}$ . По формуле (10.62)  $\varepsilon^p = 0$ , при этом на основании (10.61) получим  $\varepsilon = \varepsilon^e$ . Тогда

$$e_{ij} = e_{ij}^e + e_{ij}^p. \quad (10.70)$$

Заменим согласно (8.53)  $e_{ij}^e = s_{ij} / 2G$ . Компоненты девиатора пластических деформаций  $e_{ij}^p$  заменим согласно (10.69). Получим

$$e_{ij} = \frac{s_{ij}}{2G} + \frac{3 \varepsilon_u^p}{2 \sigma_u} s_{ij}. \quad (10.71)$$

Заменим далее согласно (8.49)  $G = \sigma_u / 3\varepsilon_u^e$ . Получим

$$e_{ij} = \frac{3 \varepsilon_u^e}{2 \sigma_u} s_{ij} + \frac{3 \varepsilon_u^p}{2 \sigma_u} s_{ij} = \frac{3 \varepsilon_u^e + \varepsilon_u^p}{2 \sigma_u} s_{ij}. \quad (10.72)$$

Интенсивность деформаций  $\varepsilon_u$  (2.82) выразим через компоненты девиатора деформаций:

$$\varepsilon_u^p = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(e_{xx} - e_{yy})^2 + (e_{yy} - e_{zz})^2 + (e_{zz} - e_{xx})^2 + 6(e_{xy}^2 + e_{yz}^2 + e_{zx}^2)}. \quad (10.73)$$

Заменяя  $e_{ij}$  по формулам (10.72), получим, учитывая (10.64), что

$$\varepsilon_u = \varepsilon_u^e + \varepsilon_u^p, \quad (10.74)$$

т.е. интенсивность деформаций равна сумме интенсивностей упругих и пластических деформаций.

Заменяя в (10.72)  $(\varepsilon_u^e + \varepsilon_u^p)$  в соответствии с (10.74), получим

$$\varepsilon_{ij} - \varepsilon g_{ij} = \frac{3 \varepsilon_u}{2 \sigma_u} (\sigma_{ij} - \sigma g_{ij}). \quad (10.75)$$

Выразим среднюю деформацию по формуле (10.58). Получим уравнения состояния теории упруго-пластических деформаций, называемые соотношениями Г. Хенки

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\sigma}{3K} g_{ij} + \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_u}{\sigma_u} (\sigma_{ij} - \sigma g_{ij}), \quad (10.76)$$

или подробно

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma}{3K} + \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_u}{\sigma_u} (\sigma_{xx} - \sigma), \dots, \varepsilon_{zx} = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_u}{\sigma_u} \sigma_{zx}. \quad (10.77)$$

Заменим согласно (8.46)  $K = E/3(1 - 2\mu)$ , а  $\sigma = (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})/3$ . После простых алгебраических преобразований получим соотношения Хенки-Ильюшина

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \left( \frac{\varepsilon_u}{\sigma_u} + \frac{1-2\mu}{3E} \right) \sigma_{xx} - \left( \frac{\varepsilon_u}{2\sigma_u} - \frac{1-2\mu}{3E} \right) (\sigma_{yy} + \sigma_{zz}), \dots \\ \varepsilon_{zx} &= \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_u}{\sigma_u} \sigma_{zx} \end{aligned} \right\} (10.78)$$

По внешнему виду эти уравнения похожи на уравнения обобщённого закона Гука (8.40). Но, в отличие от последних, они являются нелинейными. Можно показать, что уравнения деформационной теории по существу являются уравнениями нелинейно-упругой среды, у которой связь между  $\sigma_u$  и  $\varepsilon_u$  такая же, как у пластической среды при непрерывном нагружении.

Из (10.75) следует пропорциональность девиаторов деформаций и напряжений, т.е

$$D_\varepsilon = \psi D_\sigma, \quad \psi = 3\varepsilon_u / 2\sigma_u. \quad (10.79)$$

Поэтому:

1) главные оси девиатора деформаций  $D_\varepsilon$  и девиатора напряжений  $D_\sigma$ , а следовательно, и главные оси тензоров деформаций  $T_\varepsilon$  и напряжений  $T_\sigma$  совпадают;

2) диаграммы Мора для напряжений и деформаций подобны, коэффициент подобия равен  $\psi$ ;

3) углы вида напряжённого состояния  $\psi_\sigma$  [формула (4.45)] и деформированного состояния  $\psi_\varepsilon$  [формула (3.60)] равны;

4) коэффициенты Надаи-Лоде для напряжений [формула (9.26)] и деформаций равны, т.е.

$$v_\sigma = \frac{(\sigma_2 - \sigma_3) - (\sigma_1 - \sigma_2)}{\sigma_1 - \sigma_3} = v_\varepsilon = \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_3) - (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}. \quad (10.80)$$

### **Задача 10.2. Расчёт напряжённого состояния тонкостенной трубы по деформационной теории пластичности**

Рассчитать напряжённое состояние тонкостенной трубы в  $(P + M)$ -опытах в точках  $A, B, D, C, F$  (см. рис. 10.5) по деформационной теории пластичности (ТУПД). Как и в задаче 10.1, металл считаем неупрочняющимся и несжимаемым.

Решение. Для неупрочняющегося ( $\sigma_u = \sigma_T$ ) и несжимаемого ( $\varepsilon = \sigma / 3K = 0$ ) материала уравнения состояния деформационной теории пластичности (10.76) примут вид

$$\varepsilon_{ij} = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_u}{\sigma_T} (\sigma_{ij} - \sigma g_{ij}). \quad (10.81)$$

В нашей задаче  $\sigma = \sigma_{zz} / 3$ , а интенсивность деформаций по аналогии с (10.35) равна

$$\varepsilon_u = \sqrt{\varepsilon_{zz}^2 + \frac{4}{3} \varepsilon_{\alpha z}^2}. \quad (10.82)$$

Тогда

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{zz} &= \frac{3}{2\sigma_T} \sqrt{\varepsilon_{zz}^2 + \frac{4}{3} \varepsilon_{\alpha z}^2} \left( \sigma_{zz} - \frac{\sigma_{zz}}{3} \right) = \frac{\sigma_{zz}}{\sigma_T} \sqrt{\varepsilon_{zz}^2 + \frac{4}{3} \varepsilon_{\alpha z}^2}, \\ \varepsilon_{\alpha z} &= \frac{3\sigma_{\alpha z}}{2\sigma_T} \sqrt{\varepsilon_{zz}^2 + \frac{4}{3} \varepsilon_{\alpha z}^2}. \end{aligned} \right\}$$

Переходя к относительным безразмерным напряжениям и деформациям по формулам (10.37) и (10.38), получим

$$\sigma = \varepsilon / \sqrt{\varepsilon^2 + \gamma^2}, \quad \tau = \gamma / \sqrt{\varepsilon^2 + \gamma^2}. \quad (10.83)$$

По этим формулам и рассчитаны напряжения в трубе в точках  $A, B, D, C, F$ , координаты которых  $\varepsilon$  и  $\gamma$  указаны на рис. 10.5. Результаты расчёта представлены в табл. 10.1.

#### **10.3.4. Сравнение теории пластического течения и теории упруго-пластических деформаций**

Это сравнение удобно сделать по результатам расчёта напряжённого состояния тонкостенной трубы в  $(P + M)$ -опытах (см. задачи 10.1, 10.2, табл. 10.1, рис. 10.5).

Из рис. 10.5 и табл. 10.1 видно, что результаты расчёта напряжений по деформационной теории (в отличие от результатов расчёта по теории пластического течения) не зависят от пути деформирования. Напряжения определяются только деформациями и величиной предела текучести  $\sigma_T$ .

Расчёты по обеим теориям совпадают при простом (пропорциональном) деформировании (прямая  $OACF$ ).

Если деформация развивается в определённом направлении ( $OF$ ), то по мере движения в этом направлении результаты расчётов по обеим теориям постепенно сближаются, независимо от пути деформирования в начале нагружения.

Из предыдущего также ясно, что обе теории совпадают и в случае простого нагружения.

#### **10.3.5. Экспериментальная проверка теорий пластичности**

Опыты проводились главным образом на тонкостенных трубах из различных металлов – чёрных и цветных и других материалов, которые нагружались осевой силой, крутящим моментом и внутренним давлением [ $(P + M)$  - опыты,  $(P + p)$ - опыты и др.]. Проверялись также условия пластичности и упрочнения, которые кладутся в основу теорий пластичности (см. главу 9), основные предпосылки теорий пластичности и связь между нарыжёнными и деформированными состояниями.

Например, связь между напряжениями и деформациями по деформационной теории пластичности приводит к равенству коэффициентов Надаи-Лоде для напряжений  $v_\sigma$  и деформаций  $v_\varepsilon$  [формула (10.80)]. На рис. 10.6 приведены результаты опытов В. Лоде. Тонкостенные железные, медные и никелевые трубы под-

вергались одновременно осевому растяжению и внутреннему давлению [(P + p)- опыты].

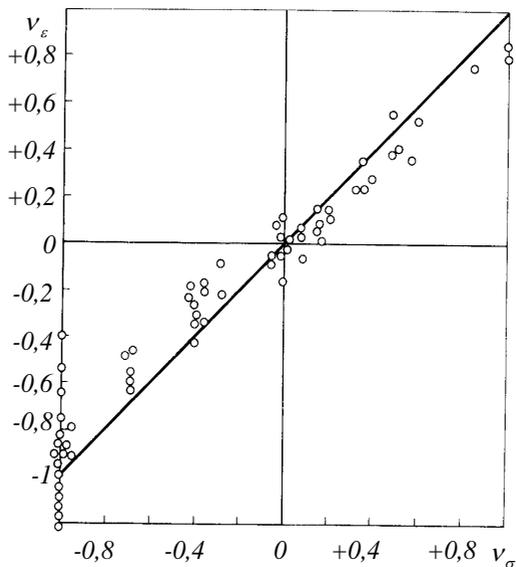


Рис. 10.6. Результаты опытов В. Лодэ по проверке деформационной теории пластичности

Напряжение в трубе подсчитывались по формулам:

$$\left. \begin{aligned} &\text{— осевое напряжение } \sigma_{zz} = \sigma_1 = P / \pi dh, \\ &\text{— окружное напряжение } \sigma_{\alpha\alpha} = \sigma_2 = pd / 2h, \\ &\text{— радиальное напряжение } \sigma_{rr} = \sigma_3 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (10.84)$$

Относительные деформации определяли по следующим формулам:

$$\left. \begin{aligned} &\text{— в осевом направлении } \varepsilon_{zz} = \varepsilon_1 = \Delta l / l_0, \\ &\text{— в окружном направлении } \varepsilon_{\alpha\alpha} = \varepsilon_2 = \Delta d / d_0, \\ &\text{— в радиальном направлении } \varepsilon_{rr} = \varepsilon_3 = \Delta h / h. \end{aligned} \right\} \quad (10.85)$$

Опытные точки довольно кучно ложатся вблизи прямой  $v_\varepsilon = v_\sigma$ , что служит подтверждением деформационной теории пластичности (ТУПД).

В теории пластического течения (ТПТ) было установлено, что девиатор приращений пластических деформаций  $D_{d\varepsilon}^p$  пропорционален девиатору напряжений  $D_\sigma$  [формула (10.23)]. Отсюда, аналогично (10.80), следует равенство коэффициентов Надаи-Лоде для напряжений  $v_\sigma$  и приращений пластических деформаций  $v_{d\varepsilon}^p$ . Коэффициент Надаи-Лоде  $v_{d\varepsilon}^p$  вычисляется через главные компоненты  $d\varepsilon_i^p$  тензора приращений пластических деформаций  $T_{d\varepsilon}^p$  по формуле, аналогичной формулам (10.80).

На рис. 10.7 приведены результаты опытов Т.Тейлора и Г. Квинни. Совместному действию осевой растягивающей силы и крутящего момента  $[(P+M) -$  опыты] подвергались тонкостенные трубы из алюминия, меди, свинца, кадмия, мягкой стали, обезуглероженной мягкой стали и стекла (последние в нагретом состоянии). В процессе испытания отношение растягивающей силы  $P$  к крутящему моменту  $M$  не было постоянным. Таким образом, нагружение в этих опытах являлось сложным.

Во время опыта внутренняя полость трубы, заполненная водой, сообщалась с капиллярной трубкой. Объем полости трубы, пластически деформируемой путем осевого растяжения и кручения, должен быть неизменным. Поэтому по передвижению столбика воды в капиллярной трубке определялось отклонение от условия  $v_{d\varepsilon}^p = v_\sigma$ .

Результаты опытов свидетельствуют о незначительных систематических нарушениях линейного тензорного уравнения (10.23). Для кадмия и свинца согласование результатов теории и экспери-

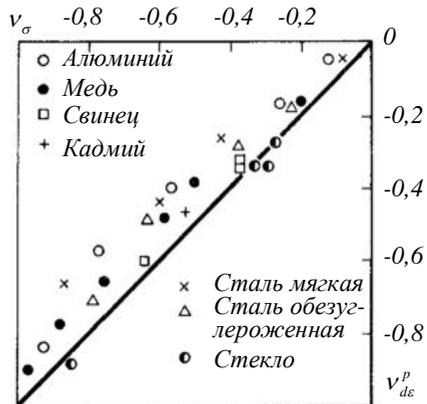


Рис. 10.7. Результаты опытов Т. Тэйлора и Г. Квинни по проверке теории пластического течения

мента оказались лучшим, чем для алюминия, меди и стали. Для стали экспериментально полученные точки также близки к прямой.

Можно добиться лучшего согласия с экспериментальными данными на основе нелинейного тензорного соотношения, но это существенно усложнило бы теорию.

На основании опытных проверок теорий пластичности можно сделать вывод о том, что в случае простого нагружения обе теории – теория пластического течения (ТПТ) и деформационная теория пластичности (ТУПД) хорошо подтверждаются опытами и совпадают. Результаты экспериментального изучения сложного нагружения лучше согласуются с теорией пластического течения, чем с теорией малых упруго-пластических деформаций.

### **Задача 10.3. Расчёт напряжённо-деформированного состояния толстостенной трубы под действием внутреннего и наружного давлений по ТУПД**

Рассчитать напряжённо-деформированное состояние трубы (рис. 10.8) при упруго-пластической деформации в условиях плоского деформированного состояния.

Решение. Известны многочисленные решения этой задачи - в условиях плоского деформированного состояния, для трубы с доньями, при свободных концах трубы в условиях действия осевой силы; для сжимаемого и несжимаемого материала трубы; когда материал трубы упрочняется и не упрочняется; по теории пластического течения и по деформационной теории пластичности.

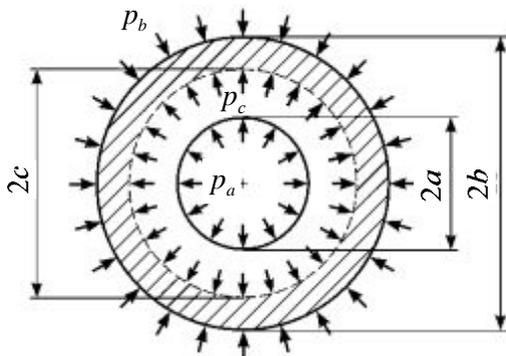


Рис. 10.8. Толстостенная труба под действием внутреннего  $p_a$  и наружного  $p_b$  давлений (заштрихована упругая область)

Рассмотрим решение этой задачи для случая плоской деформации ( $u_z = 0, \varepsilon_{zz} = 0$ ), когда материал трубы несжимаем ( $\mu = \mu' = 0,5$ ) и не упрочняется (тогда по энергетической теории пластичности  $\sigma_u = \sqrt{3}T = \sqrt{3}\tau_T$ ).

Напряжённо-деформированное состояние при упругой деформации трубы рассмотрено в задаче 8.1, а условие возникновения пластических деформаций в трубе рассмотрено в задаче 9.1. Пластические деформации вначале возникают на внутренней поверхности трубы, когда разность внутреннего  $p_a$  и наружного  $p_b$  давлений достигает величины  $p_{кр1}$  [формула (9.40)]. При дальнейшем увеличении разности давлений ( $p_a - p_b$ ) пластическая деформация распространяется от внутренней поверхности трубы к наружной и при некоторой разности давлений достигает её наружной поверхности, так что вся труба оказывается охваченной пластической деформацией. В пластической области остаются справедливыми дифференциальные уравнения равновесия (8.62) и соотношения между деформациями и перемещениями (8.63). Поскольку  $\sigma_1 = \sigma_{\alpha\alpha}$ ,  $\sigma_2 = \sigma_{zz}$ ,  $\sigma_3 = \sigma_{rr}$ , энергетическое условие пластичности (9.10) принимает вид

$$(\sigma_{\alpha\alpha} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{rr})^2 + (\sigma_{rr} - \sigma_{\alpha\alpha})^2 = 2\sigma_T^2 = 6\tau_T^2.$$

Если  $\varepsilon_{zz} = 0$ , то согласно (8.40)  $\sigma_{zz} = \mu(\sigma_{\alpha\alpha} + \sigma_{rr})$ , а в условиях несжимаемости  $\sigma_{zz} = (\sigma_{\alpha\alpha} + \sigma_{rr})/2$ . Тогда условие пластичности примет вид  $\sigma_{\alpha\alpha} - \sigma_{rr} = \sigma_1 - \sigma_3 = 2\tau_T$ .

1) Найдём напряжения при пластической деформации трубы. Подставим разность  $\sigma_{rr} - \sigma_{\alpha\alpha} = -2\tau_T$  в дифференциальное уравнение равновесия (8.62). Получим  $d\sigma_{rr} = 2\tau_T dr / r$ , а после интегрирования  $\sigma_{rr} = 2\tau_T \ln r + C_1$ . Постоянную интегрирования найдём из граничного условия: при  $r = a$   $\sigma_{rr} = -p_a$ . Тогда  $-p_a = 2\tau_T \ln a + C_1$ , откуда  $C_1 = -p_a - 2\tau_T \ln a$ . Окончательно, учитывая условие пластичности, напряжения при пластической деформации трубы равны

$$\sigma_{rr} = -p_a + 2\tau_T \ln \frac{r}{a}, \quad \sigma_{\alpha\alpha} = 2\tau_T + \sigma_{rr}. \quad (10.86)$$

На наружной поверхности трубы ( $r = b$ )  $\sigma_{rr} = -p_b$ , так что первая формула (10.86) принимает вид  $-p_b = -p_a + 2\tau_T \ln(b/a)$  откуда получим разность давлений, при которой вся труба оказывается охваченной пластической деформацией

$$p_a - p_b = 2\tau_T \ln(b/a) = p_{кр2}. \quad (10.87)$$

Если  $p_a - p_b > p_{кр2}$ , может начаться разрушение трубы под действием растягивающих напряжений  $\sigma_{\alpha\alpha}$ , которые достигают максимальной величины на наружной поверхности трубы. Поэтому разрушение трубы начинается с её наружной поверхности, на которой появляются трещины, направленные по образующим наружной цилиндрической поверхности трубы.

2) Найдём теперь деформации. В условиях несжимаемости, когда  $\sigma_2 = (\sigma_1 + \sigma_3)/2$  коэффициент Надаи-Лоде для напряжений по формуле (9.26) равен  $\nu_\sigma = 0$ . Поскольку  $\nu_\sigma$  постоянная величина, нагружение трубы является простым, и можно воспользоваться формулами (10.77) деформационной теории пластичности, которые примут вид при условии несжимаемости  $\varepsilon = \sigma/3K = 0$

$$\varepsilon_{rr} = \psi(\sigma_{rr} - \sigma), \quad \varepsilon_{\alpha\alpha} = \psi(\sigma_{\alpha\alpha} - \sigma). \quad (10.88)$$

Подставляя выражение для среднего напряжения  $\sigma = (\sigma_{rr} + \sigma_{\alpha\alpha})/2$ , получим, учитывая условие пластичности,

$$\varepsilon_{rr} = -\psi\tau_T, \quad \varepsilon_{\alpha\alpha} = \psi\tau_T. \quad (10.89)$$

Действительно, при этом условие несжимаемости соблюдается:  $\theta = 3\varepsilon = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\alpha\alpha} + \varepsilon_{zz} = 0$ . Найдём величину  $\psi = 3\varepsilon_u/2\sigma_u = 3\varepsilon_u/2\sigma_T$ , см. (10.79). Вначале получим уравнение совместности деформаций. Продифференцируем второе уравнение (8.63) по  $r$ . Получим

$$\frac{d\varepsilon_{\alpha\alpha}}{dr} = \frac{1}{r} \frac{du_r}{dr} - \frac{u_r}{r^2}.$$

Заменяя  $du_r/dr = \varepsilon_{rr}$  и  $u_r = \varepsilon_{\alpha\alpha} r$ , найдём искомое уравнение совместности деформаций

$$\frac{d\varepsilon_{\alpha\alpha}}{dr} + \frac{\varepsilon_{\alpha\alpha} - \varepsilon_{rr}}{r} = 0. \quad (10.90)$$

Заменяя здесь деформации выражениями (10.89), получим дифференциальное уравнение для нахождения  $\psi$

$$\frac{d\psi}{dr} + \frac{2\psi}{r} = 0,$$

откуда  $\psi = C_2/r^2$ .

3) Рассмотрим упруго-пластическое равновесие трубы, когда пластическая деформация распространяется до цилиндрической поверхности  $r = c$  (см. рис. 10.8). При этом пластическая область примыкает к внутренней поверхности трубы ( $c \geq r \geq a$ ), а упругая область примыкает к наружной поверхности трубы ( $b \geq r \geq c$ ). Такой случай имеет место при  $p_{kp2} > (p_a - p_b) > p_{kp1}$ . Цилиндрическая поверхность  $r = c$  является границей пластической и упругой областей. Поэтому на ней

$$\psi = C_2/c^2 = 3\varepsilon_u/2\sigma_T = 3/2E = 3/[2 \cdot 2G(1 + \mu)] = 1/2G,$$

откуда  $C_2 = c^2/2G$ . Тогда  $\psi = C_2/r^2 = c^2/2Gr^2$ , а деформации согласно (10.89) равны

$$\varepsilon_{\alpha\alpha} = -\varepsilon_{rr} = \frac{\tau_T}{2G} \frac{c^2}{r^2}. \quad (10.91)$$

Радиальные перемещения точек трубы равны согласно (8.63)

$$u_r = \varepsilon_{\alpha\alpha} \cdot r = \frac{\tau_T}{2G} \frac{c^2}{r}. \quad (10.92)$$

Итак, в пластической области ( $c \geq r \geq a$ ) напряжения находятся по формулам (10.86), деформации – по формулам (10.91), а радиальное перемещение – по формуле (10.92). радиальное давление  $p_c$  на границе упругой и пластической областей найдем по формуле (10.86) при  $r = c$

$$p_c = -\sigma_{rr}|_{r=c} = p_a - 2\tau_T \ln \frac{c}{a}. \quad (10.93)$$

4) Часть трубы, находящуюся в упругом состоянии ( $b \geq r \geq c$ ), можно рассматривать как трубу с внутренним радиусом  $r = c$  и наружным радиусом  $r = b$ , на которую действуют внутреннее  $p_c$  и наружное  $p_b$  давления. Тогда напряжения в упругой области найдём по формулам (8.69), заменив в них  $a$  на  $c$ , а  $p_a$  на  $p_c$ :

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\alpha\alpha} \end{array} \right\} = \frac{p_c c^2 - p_b b^2}{b^2 - c^2} \mp \frac{p_c - p_b}{b^2 - c^2} \frac{c^2 b^2}{r^2}. \quad (10.94)$$

Для этой же части трубы формула (9.40) примет вид

$$p_c - p_b = \tau_T \frac{b^2 - c^2}{b^2}. \quad (10.95)$$

Заменим здесь  $p_c$  по формуле (10.93). Получим трансцендентное уравнение для определения радиуса  $c$

$$2 \ln \frac{c}{a} - \frac{c^2}{b^2} = \frac{p_a - p_b}{\tau_T} - 1. \quad (10.96)$$

5) Осталось найти деформации и перемещения в упругой области. При решении задачи 8.1 была получена следующая формула для радиального перемещения

$$u_r = \frac{1}{2(G + \lambda)} \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2} r + \frac{1}{2G} \frac{a^2 b^2 (p_a - p_b)}{b^2 - a^2} \frac{1}{r}. \quad (10.97)$$

В условиях несжимаемости ( $\mu = 0,5$ ) постоянная Ламе  $\lambda = 2\mu G / (1 - 2\mu) \rightarrow \infty$ , поэтому первое слагаемое в правой части (10.97) обращается в нуль. Во втором слагаемом необходимо заменить  $a$  на  $c$ , а  $p_a$  на  $p_c$ . Тогда в упругой области, учитывая (10.95), получим

$$u_r = \frac{1}{2G} \frac{c^2 b^2 (p_c - p_b)}{b^2 - c^2} \frac{1}{r} = \frac{\tau_T}{2G} \frac{c^2}{r}. \quad (10.98)$$

Таким образом, радиальное перемещение и в пластической, и в упругой области определяется по одной и той же формуле. деформации согласно (8.63) и условию несжимаемости равны  $\varepsilon_{\alpha\alpha} = -\varepsilon_{rr} = u_r \cdot r$ . На рис. 10.9 показаны эпюры напряжений и радиального перемещения при упруго-пластическом равновесии трубы, построенные по выведенным формулам.

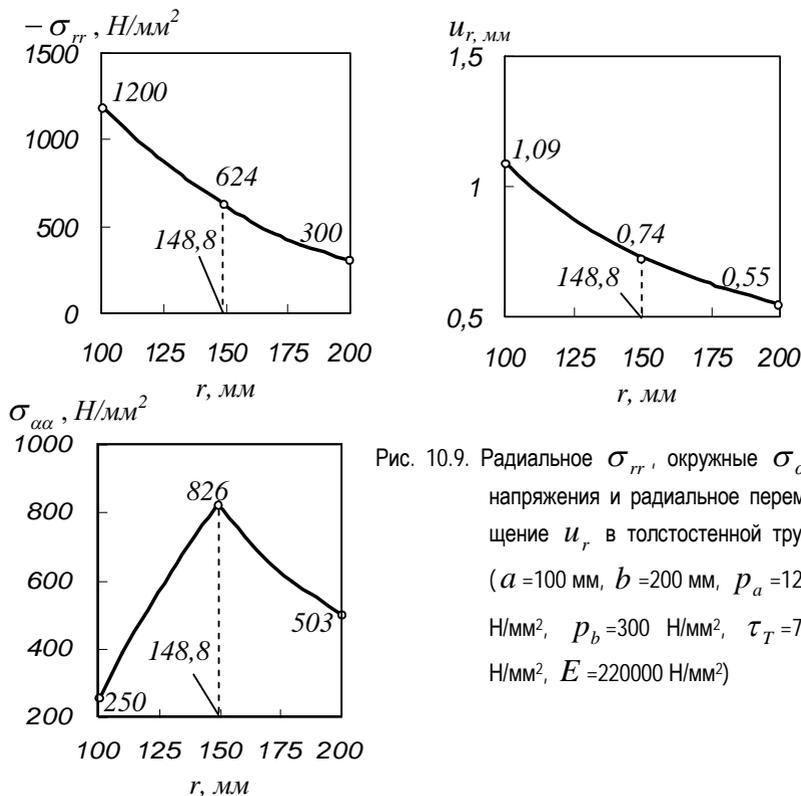


Рис. 10.9. Радиальное  $\sigma_{rr}$ , окружные  $\sigma_{\alpha\alpha}$  напряжения и радиальное перемещение  $u_r$  в толстостенной трубе ( $a=100$  мм,  $b=200$  мм,  $p_a=1200$   $\text{H}/\text{мм}^2$ ,  $p_b=300$   $\text{H}/\text{мм}^2$ ,  $\tau_T=725$   $\text{H}/\text{мм}^2$ ,  $E=220000$   $\text{H}/\text{мм}^2$ )

### 10.3.6. Уравнения термопластичности

С целью увеличения пластичности металла и снижения усилия его деформирования широко применяют тёплую (ниже температуры рекристаллизации) и горячую (выше температуры рекристаллизации) обработку металлов давлением. При нагреве меняются характеристики упругих и пластических свойств металла: коэффициент Пуассона увеличивается, а модули упругости  $G$ ,  $E$ ,  $K$

уменьшаются. Уменьшается и предел текучести. Начинают проявляться вязкие свойства металла, т. е. сопротивление деформации начинает зависеть от скорости деформации. Например, при одноосном сжатии

$$\sigma_s = |\sigma_{xx}| = \sigma_s(\varepsilon_{xx}, \xi_{xx}, T)$$

(рис. 6.5). Тогда энергетическое условие пластичности Губера–Мизеса в сочетании с гипотезой «единой кривой» примет вид

$$\sigma_u = \sigma_s(\varepsilon_u, \xi_u, T),$$

где  $\xi_u$  - интенсивность скоростей деформаций [формула (3.58)],  $T$  - температура.

Как и в изотермическом случае, в основе теории термопластичности лежит представление о поверхности нагружения  $\Sigma_s$ , которая в пространстве напряжений ограничивает область упругих деформаций  $D_e$  (см. рис. 10.1). Но в уравнение поверхности нагружения наряду с напряжениями и параметром упрочнения  $q$  входит и температура, т.е.  $f_s(\sigma_{ij}, q, T) = 0$ . Полагаются справедливыми постулат Друкера и ассоциированный закон течения. Основные предпосылки (гипотезы) теории пластического течения и деформационной теории пластичности сохраняются и в неизотермическом случае. Но связи между средним напряжением  $\sigma$  и объёмной деформацией  $\theta = 3\varepsilon$ , а также между упругими деформациями и напряжениями полагаются такими же, как в теории термоупругости, см. (8.54), (8.56), т.е.

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= K\theta - 3\alpha K(T - T_0), \\ \varepsilon_{ij}^e &= \frac{1}{E} [\sigma_{ij} - \mu(3\sigma g_{ij} - \sigma_{ij})] + \alpha(T - T_0)g_{ij}, \end{aligned} \right\} \quad (10.99)$$

где в случае прямоугольной декартовой системы координат  $g_{ij} = \delta_{ij}$  [формула (1.34)].

Тогда приращения среднего напряжения и упругих деформаций равны

$$d\sigma = Kd\theta - 3\alpha KdT, \quad (10.100)$$

$$d\varepsilon_{ij}^e = \frac{1}{E} [d\sigma_{ij} - \mu(3d\sigma g_{ij} - d\sigma_{ij})] + \alpha dTg_{ij}, \quad (10.101)$$

а уравнения Прандтля–Рейсса (10.29) примут вид

$$d\varepsilon_{ij}^e = \frac{1}{E} [d\sigma_{ij} - \mu(3d\sigma g_{ij} - d\sigma_{ij})] + \alpha dT g_{ij} + \frac{3}{2} \frac{\overline{d\varepsilon_u^p}}{\sigma_u} (\sigma_{ij} - \sigma g_{ij}). \quad (10.102)$$

Или подробно в прямоугольной декартовой системе координат

$$d\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} [d\sigma_{xx} - \mu(d\sigma_{yy} - d\sigma_{zz})] + \alpha dT + \frac{3}{2} \frac{\overline{d\varepsilon_u^p}}{\sigma_u} (\sigma_{xx} - \sigma), \dots, \\ d\varepsilon_{zx} = \frac{d\sigma_{zx}}{2G} + \frac{3}{2} \frac{\overline{d\varepsilon_u^p}}{\sigma_u} \sigma_{zx}. \quad (10.103)$$

Здесь интенсивность напряжений  $\sigma_u$  зависит не только от параметра деформационного упрочнения  $q = \int \overline{d\varepsilon_u^p}$ , но также от температуры и интенсивности скоростей деформаций  $\xi_u$ , т.е.  $\sigma_u = \sigma_u(q, \xi_u, T)$ .

Уравнения Сен-Венана–Леви-Мизеса (10.30) не меняются и могут быть представлены в виде

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma g_{ij} = \frac{2}{3} \frac{\sigma_u}{\xi_u} \xi_{ij}. \quad (10.104)$$

Или подробно в прямоугольной декартовой системе координат:

$$s_{xx} = \sigma_{xx} - \sigma = \frac{2}{3} \frac{\sigma_u}{\xi_u} \xi_{xx}, \dots, s_{zx} = \sigma_{zx} = \frac{2}{3} \frac{\sigma_u}{\xi_u} \xi_{zx}, \quad (10.105)$$

где  $s_{ij}$  - компоненты девиатора напряжений. Это *уравнения теории вязко-пластического течения*, выражающие зависимость напряжений от скоростей деформаций.

Наряду с теорией течения применяется и деформационная теория термопластичности. Уравнения состояния выражают связь между деформациями и напряжениями. Из первой формулы (10.99) найдём среднюю деформацию

$$\varepsilon = \frac{\theta}{3} = \frac{\sigma}{3K} + \alpha(T - T_0). \quad (10.106)$$

Заменяя в (10.76)  $\varepsilon = \sigma/3K$  по формуле (10.106), получим уравнения состояния деформационной теории термопластичности

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\sigma}{3K} g_{ij} + \alpha(T - T_0)g_{ij} + \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_u}{\sigma_u} (\sigma_{ij} - \sigma g_{ij}). \quad (10.107)$$

Или подробно в прямоугольной декартовой системе координат

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma}{3K} + \alpha(T - T_0) + \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_u}{\sigma_u} (\sigma_{xx} - \sigma), \dots, \varepsilon_{zx} = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_u}{\sigma_u} \sigma_{zx}, \quad (10.108)$$

где согласно гипотезе «единой кривой»  $\sigma_u = E'(\varepsilon_u, T)\varepsilon_u$ , т.е модуль пластичности  $E'$  зависит не только от интенсивности деформации  $\varepsilon_u$  (рис. 9.10), но также и от температуры. Поэтому согласно деформационной теории конечные изменения температуры приводят к однозначным пластическим деформациям. Действительно, согласно (10.107)

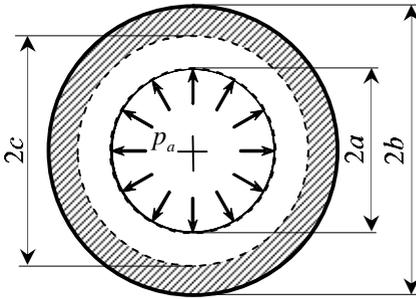
$$\varepsilon_{ij}^p = \frac{3}{2} \frac{1}{E'(\varepsilon_u, T)} (\sigma_{ij} - \sigma g_{ij}). \quad (10.109)$$

#### **Задача 10.4. Расчет напряжённо-деформированного состояния толстостенной трубы по теории пластического тения (ТПТ)**

Будем полагать, что действует только внутреннее давление (рис. 10.10).

1) Исходные уравнения. Дифференциальное уравнение равновесия:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\alpha\alpha}}{r} = 0. \quad (10.110)$$



Выражение деформаций через перемещения  $u$  точек трубы в радиальном направлении:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r}; \quad (10.111)$$

$$\varepsilon_{\alpha\alpha} = \frac{u}{r}. \quad (10.112)$$

Рис. 10.10. Толстостенная труба под действием внутреннего давления (заштрихована упругая область)

Физические уравнения состояния для упругой области:

$$\sigma_{rr} = 2G\varepsilon_{rr} + \lambda\theta; \quad (10.113)$$

$$\sigma_{\alpha\alpha} = 2G\varepsilon_{\alpha\alpha} + \lambda\theta; \quad (10.114)$$

$$\sigma_{zz} = 2G\varepsilon_{zz} + \lambda\theta. \quad (10.115)$$

Шесть уравнений (10.110-10.115), содержат 6 неизвестных:  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{\alpha\alpha}$ ,  $\sigma_{zz}$ ,  $\varepsilon_{rr}$ ,  $\varepsilon_{\alpha\alpha}$ ,  $u$ . Таким образом, система уравнений (10.110-10.115) является в упругой области замкнутой.

В формулах (10.113-10.115) постоянная Ламе  $\lambda$  и относительное изменение объема  $\theta$  равны

$$\lambda = \frac{2\mu G}{1 - 2\mu}; \quad (10.116)$$

$$\theta = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\alpha\alpha} + \varepsilon_{zz}. \quad (10.117)$$

В пластической области уравнения (10.110-10.112) справедливы. Здесь соблюдается условие пластичности

$$(\sigma_{rr} - \sigma_{\alpha\alpha})^2 + (\sigma_{\alpha\alpha} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{rr})^2 = 2\sigma_T^2. \quad (10.118)$$

Уравнения состояния Прандтля–Рейсса:

$$d\varepsilon_{rr} = \frac{1}{E} [d\sigma_{rr} - \mu(d\sigma_{\alpha\alpha} + d\sigma_{zz})] + d\lambda(\sigma_{rr} - \sigma); \quad (10.119)$$

$$d\varepsilon_{\alpha\alpha} = \frac{1}{E} [d\sigma_{\alpha\alpha} - \mu(d\sigma_{zz} + d\sigma_{rr})] + d\lambda(\sigma_{\alpha\alpha} - \sigma); \quad (10.120)$$

$$d\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E} [d\sigma_{zz} - \mu(d\sigma_{rr} + d\sigma_{\alpha\alpha})] + d\lambda(\sigma_{zz} - \sigma). \quad (10.121)$$

В этих уравнениях  $d\lambda$  определяется по формуле (10.27).

Семь уравнений (10.110-10.112) и (10.118-10.121) для пластической области содержат 7 неизвестных:  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{\alpha\alpha}$ ,  $\sigma_{zz}$ ,  $\varepsilon_{rr}$ ,  $\varepsilon_{\alpha\alpha}$ ,  $u$ ,  $d\lambda$  и также образуют замкнутую систему уравнений.

2) Некоторые дополнительные соотношения. Средняя деформация:

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\alpha\alpha} + \varepsilon_{zz}}{3} = \frac{\theta}{3}. \quad (10.122)$$

Среднее напряжение (гидростатическое давление):

$$\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_{rr} + \sigma_{\alpha\alpha} + \sigma_{zz}). \quad (10.123)$$

Связь между  $\sigma$  и  $\varepsilon$

$$\sigma = K\theta = 3K\varepsilon, \quad (10.124)$$

где объёмный модуль упругости

$$K = \frac{E}{3(1-2\mu)}. \quad (10.125)$$

Компоненты дивергента напряжений равны

$$s_{rr} = \sigma_{rr} - \sigma; \quad (10.126)$$

$$s_{\alpha\alpha} = \sigma_{\alpha\alpha} - \sigma; \quad (10.127)$$

$$s_{zz} = -(\sigma_{rr} + \sigma_{\alpha\alpha}), \quad (10.128)$$

т.к. первый инвариант дивергента напряжений равен нулю:

$$I_1(D_\sigma) = s_{rr} + s_{\alpha\alpha} + s_{zz} = 0. \quad (10.129)$$

Компоненты дивергента деформаций:

$$e_{rr} = \varepsilon_{rr} - \varepsilon; \quad (10.130)$$

$$e_{\alpha\alpha} = \varepsilon_{\alpha\alpha} - \varepsilon; \quad (10.131)$$

$$e_{zz} = \varepsilon_{zz} - \varepsilon. \quad (10.132)$$

3) Основные допущения. Деформация плоская, т.е.

$$\varepsilon_{zz} = 0. \quad (10.133)$$

Принимаем реологическую модель жёстко-пластической среды:

$$\sigma_u = \sigma_T = const. \quad (10.134)$$

Условие несжимаемости не используется. Материал трубы считается сжимаемым. Если принять условие несжимаемости ( $\varepsilon = 0$ ), то условие пластичности (10.118) значительно упрощается. Действительно, запишем одну из формул обобщённого закона Гука:

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \mu(\sigma_{rr} + \sigma_{\alpha\alpha})]. \quad (10.135)$$

Приравнявая  $\varepsilon_{zz}$  нулю на основании (10.133), получим

$$\sigma_{zz} = \mu(\sigma_{rr} + \sigma_{\alpha\alpha}). \quad (10.136)$$

В условиях несжимаемости  $\mu = 1/2$ , тогда

$$\sigma_{zz} = \frac{\sigma_{rr} + \sigma_{\alpha\alpha}}{2}. \quad (10.137)$$

Подставим это выражение  $\sigma_{zz}$  в уравнение (10.118). Получим условие пластичности с учётом несжимаемости:

$$\sigma_{\alpha\alpha} - \sigma_{rr} = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_T = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_T, \quad (10.138)$$

так как в трубе  $\sigma_{\alpha\alpha} > 0$ , а  $\sigma_{rr} < 0$ .

4) Некоторые преобразования исходных уравнений. Из формул (10.126-10.128) получим

$$\sigma_{rr} = s_{rr} + \sigma; \quad \sigma_{\alpha\alpha} = s_{\alpha\alpha} + \sigma; \quad (10.139), (10.140)$$

$$\sigma_{zz} = s_{zz} + \sigma = -(s_{rr} + s_{\alpha\alpha}) + \sigma. \quad (10.141)$$

Заменим  $\sigma$  по формуле (10.124). Получим

$$\sigma_{rr} = s_{rr} + 3K\varepsilon; \quad \sigma_{\alpha\alpha} = s_{\alpha\alpha} + 3K\varepsilon; \quad (10.142), (10.143)$$

$$\sigma_{zz} = -(s_{rr} + s_{\alpha\alpha}) + 3K\varepsilon. \quad (10.144)$$

Подставим эти выражения напряжений в дифференциальное уравнение равновесия (10.110):

$$\frac{\partial s_{rr}}{\partial r} + \frac{(s_{rr} - s_{\alpha\alpha})}{r} + 3K \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} = 0. \quad (10.145)$$

5) Выведем уравнение совместности деформаций. В формулу (10.122) подставим выражения  $\varepsilon_{rr}$ ,  $\varepsilon_{\alpha\alpha}$ ,  $\varepsilon_{zz}$  соответственно по формулам (10.111), (10.112), (10.133). Получим выражение средней деформации через радиальное перемещение:

$$\varepsilon = \frac{1}{3} \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right). \quad (10.146)$$

Введём в рассмотрение вспомогательную переменную

$$\alpha = \frac{1}{3} \left( \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} \right). \quad (10.147)$$

Величины  $\varepsilon$  и  $\alpha$  примем за основные неизвестные. Выразим через них  $\varepsilon_{rr}$  и  $\varepsilon_{\alpha\alpha}$ , складывая (10.146) и (10.147) и вычитая (10.147) из (10.146):

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{3}{2}(\varepsilon + \alpha); \quad (10.148)$$

$$\varepsilon_{\alpha\alpha} = \frac{u}{r} = \frac{3}{2}(\varepsilon - \alpha). \quad (10.149)$$

Перемещение  $u$  также выразим через  $\varepsilon$  и  $\alpha$ :

$$u = \varepsilon_{\alpha\alpha} r = \frac{3}{2}r(\varepsilon - \alpha). \quad (10.150)$$

Продифференцируем (10.150) по  $r$  и приравняем полученный результат  $\varepsilon_{rr}$  по формуле (10.148):

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{3}{2}(\varepsilon - \alpha) + \frac{3}{2}r \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} - \frac{\partial \alpha}{\partial r} \right) = \varepsilon_{rr} = \frac{3}{2}(\varepsilon + \alpha),$$

откуда и получим условие совместности деформаций в виде

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial r} - \frac{\partial \alpha}{\partial r} = 2 \frac{\alpha}{r}. \quad (10.151)$$

Подставим выражения деформаций  $\varepsilon_{rr}$  и  $\varepsilon_{\alpha\alpha}$  по формулам (10.148) и (10.149) и  $\varepsilon_{zz}$  по формуле (10.133) в формулы (10.130-10.132):

$$e_{rr} = \frac{1}{2}(\varepsilon + 3\alpha); \quad (10.152)$$

$$e_{\alpha\alpha} = \frac{1}{2}(\varepsilon - 3\alpha); \quad (10.153)$$

$$e_{zz} = -\varepsilon. \quad (10.154)$$

Формулы с (10.139) по (10.154) справедливы и в упругой, и в пластической областях.

б) Напряжённо-деформированное состояние в упругой области. Эта область примыкает к наружной поверхности трубы ( $c \leq r \leq b$ ). Запишем физическое уравнение состояния (10.113)

$$\sigma_{rr} = 2G\varepsilon_{rr} + \lambda\theta.$$

Вычтем из правой и левой частей  $\sigma$  :

$$\sigma_{rr} - \sigma = 2G\varepsilon_{rr} + \lambda\theta - \sigma.$$

Левая часть равна  $s_{rr}$  [формула (10.126)]. Заменим в правой части  $\sigma$  по формуле (10.124),  $\lambda$  по формуле (10.116),  $K$  по формуле (10.125),  $\theta$  по формуле (10.117),  $E = 2G(1 + \mu)$ :

$$s_{rr} = 2G\varepsilon_{rr} + \underbrace{\frac{2\mu G}{1-2\mu}}_{\lambda} \cdot \underbrace{3\varepsilon}_{\theta} - 3 \cdot \underbrace{\frac{2G(1+\mu)}{3(1-2\mu)}}_K \varepsilon = 2G\varepsilon_{rr} - 2G\varepsilon.$$

Имея в виду формулу (10.130), получим:

$$s_{rr} = 2G e_{rr}. \quad (10.155)$$

Совершенно аналогично получим

$$s_{\alpha\alpha} = 2G e_{\alpha\alpha}; \quad (10.156)$$

$$s_{zz} = 2G e_{zz}. \quad (10.157)$$

Подставим в (10.155-10.157) выражения компонент девиатора деформаций  $e_{rr}$ ,  $e_{\alpha\alpha}$ ,  $e_{zz}$  по формулам (10.152-10.154):

$$s_{rr} = G(\varepsilon + 3\alpha); \quad (10.158)$$

$$s_{\alpha\alpha} = G(\varepsilon - 3\alpha); \quad (10.159)$$

$$s_{zz} = -2G\varepsilon. \quad (10.160)$$

Подставим эти выражения компонент девиатора напряжений в дифференциальное уравнение равновесия (10.145):

$$(G + 3K) \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} + 3G \frac{\partial \alpha}{\partial r} + 6G \frac{\alpha}{r} = 0. \quad (10.161)$$

Из формулы (10.151) найдём

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial r} = 2 \frac{\alpha}{r} + \frac{\partial \alpha}{\partial r}. \quad (10.162)$$

Подставим это выражение в уравнение (10.161):

$$\frac{\partial \alpha}{\partial r} + 2 \frac{\alpha}{r} = 0. \quad (10.163)$$

Решим это дифференциальное уравнение.

$$\frac{\partial \alpha}{\partial r} = -2 \frac{\alpha}{r}; \quad \frac{\partial \alpha}{\alpha} = -2 \frac{\partial r}{r}; \quad \ln \alpha = -2 \ln r + \ln A;$$

$$\alpha = \frac{A}{r^2}, \quad (10.164)$$

где  $A = A(c)$ . Напомним, что  $c$  – это радиус цилиндрической поверхности, до которой от внутренней поверхности трубы распространяется пластическая деформация (рис. 10.10).

Подставим это выражение  $\alpha$  в уравнение совместности деформаций (10.151). Получим

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial r} = 0, \quad (10.165)$$

откуда

$$\varepsilon = B = B(c). \quad (10.166)$$

Подставим выражения  $\alpha$  по формуле (10.164) и  $\varepsilon$  по формуле (10.166) в формулы для компонент девиатора напряжений (10.158-10.160):

$$s_{rr} = G \left( B + \frac{3A}{r^2} \right); \quad (10.167)$$

$$s_{\alpha\alpha} = G \left( B - \frac{3A}{r^2} \right); \quad (10.168)$$

$$s_{zz} = -2G \cdot B. \quad (10.169)$$

Подставим эти выражения компонент девиатора напряжений в формулы для напряжений (10.142-10.144). Получим, учитывая, что  $\varepsilon = B$  [формула (10.166)]:

$$\sigma_{rr} = (G + 3K)B + \frac{3GA}{r^2}; \quad (10.170)$$

$$\sigma_{\alpha\alpha} = (G + 3K)B - \frac{3GA}{r^2}; \quad (10.171)$$

$$\sigma_{zz} = (-2G + 3K)B. \quad (10.172)$$

Величины  $A$  и  $B$  найдём из граничных условий. Первое условие: при  $r = b$   $\sigma_{rr} = 0$ . Подставим эти значения  $r$  и  $\sigma_{rr}$  в (10.170). Получим уравнение:

$$(G + 3K)B + \frac{3GA}{b^2} = 0. \quad (10.173)$$

Если на трубу действует и наружное давление  $p_b$ , первое условие примет вид: при  $r = b$   $\sigma_{rr} = -p_b$ . Тогда получим уравнение

$$(G + 3K)B + \frac{3GA}{b^2} = -p_b. \quad (10.174)$$

Второе граничное условие для упругой области: при  $r = c$   $\sigma_u = \sigma_T$ . Запишем формулу для  $\sigma_u$ , учитывая, что  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{\alpha\alpha}$ ,  $\sigma_{zz}$  - главные нормальные напряжения [см. также формулу (10.118)].

$$\sigma_u = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{rr} - \sigma_{\alpha\alpha})^2 + (\sigma_{\alpha\alpha} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{rr})^2}. \quad (10.175)$$

Подставим сюда выражения напряжений по формулам (10.170-10.172) при  $r = c$ . Возведя обе части в квадрат, получим уравнение

$$(GB)^2 + 3 \frac{(GA)^2}{c^4} = \frac{\sigma_T^2}{9}. \quad (10.176)$$

Получили систему двух уравнений (10.173) и (10.176) для нахождения величин  $A$  и  $B$ . Выразим из (10.173)  $B$ :

$$B = - \frac{3GA}{(G + 3K)b^2}. \quad (10.177)$$

Подставим это выражение  $B$  в уравнение (10.176). Найдём величину  $A$ :

$$A = \pm \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}} \left[ \frac{3G^2}{(G + 3K)^2} + \left( \frac{b}{c} \right)^4 \right]^{-\frac{1}{2}} \frac{b^2}{3G}. \quad (10.178)$$

Какой знак выбрать для  $A$ ? Обратимся к формуле (10.170)

$$\sigma_{rr} = (G + 3K)B + \frac{3GA}{r^2}.$$

Поскольку  $\sigma_{rr}$  сжимающее напряжение, то  $\sigma_{rr} < 0$ .

Случай 1.  $B > 0$ . Тогда для того, чтобы  $\sigma_{rr} < 0$ , должно быть  $A < 0$ .

Случай 2.  $B < 0$ . Обратимся к формуле (10.171)

$$\sigma_{\alpha\alpha} = (G + 3K)B - \frac{3GA}{r^2}.$$

Для того, чтобы  $\sigma_{\alpha\alpha} > 0$ , должно быть  $A < 0$ . Итак, в формуле (10.178) следует взять знак «-». Окончательно формулы для  $A$  и  $B$  [см. формулы (10.177) и (10.178)] принимают вид

$$A = -p^* \frac{b^2}{3G}; \quad B = \frac{p^*}{G + 3K}; \quad (10.179), (10.180)$$

$$p^* = \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}} \left[ 3 \left( \frac{G}{G+3K} \right)^2 + \left( \frac{b}{c} \right)^4 \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (10.181)$$

Подставим выражения  $A$  и  $B$  по формулам (10.179), (10.180) в (10.170-10.172). Получим окончательно распределение напряжений в упругой области:

$$\sigma_{rr} = p^* \left( 1 - \frac{b^2}{r^2} \right); \quad (10.182)$$

$$\sigma_{\alpha\alpha} = p^* \left( 1 + \frac{b^2}{r^2} \right); \quad (10.183)$$

$$\sigma_{zz} = p^* \cdot \frac{3K - 2G}{3K + G} \quad (10.184)$$

Найдём теперь радиальное перемещение  $u$  в упругой области. В формуле (10.150) заменим  $\varepsilon$  по формуле (10.166), а  $\alpha$  по формуле (10.164):

$$u = \underbrace{\frac{3}{2} r (\varepsilon - \alpha)}_{\text{формула (10.150)}} = \frac{3}{2} r \left( B - \frac{A}{r^2} \right).$$

Подставляя выражения  $A$  и  $B$  по формулам (10.179), (10.180), получим окончательно формулу для вычисления радиального перемещения в упругой области

$$u = \frac{3}{2} p^* \left( \frac{r}{G+3K} + \frac{b^2}{3Gr} \right). \quad (10.185)$$

7) Напряжённо-деформированное состояние в пластической области. Преобразуем первые два уравнения Прандтля-Рейсса (10.119) и (10.120). Из левых частей вычтем по  $d\varepsilon$ , а из правых равную  $d\varepsilon$  величину [см. формулы (10.124) и (10.125)]  $\frac{1-2\mu}{E} d\sigma$ . Получим, учитывая формулы (10.130), (10.131),

(10.126), (10.127), (10.123), а также соотношение между модулями упругости  $E = 2G(1 + \mu)$ :

$$de_{rr} = \frac{ds_{rr}}{2G} + d\lambda \cdot s_{rr}; \quad (10.186)$$

$$de_{\alpha\alpha} = \frac{ds_{\alpha\alpha}}{2G} + d\lambda \cdot s_{\alpha\alpha}. \quad (10.187)$$

Эти выражения определяют приращения компонент девиатора деформаций  $de_{rr}$  и  $de_{\alpha\alpha}$ , возникшие за счёт приращений компонент девиатора напряжений  $ds_{rr}$  и  $ds_{\alpha\alpha}$ . При этом радиус  $c$  изменяется на  $dc$ . Поэтому из формул (10.186), (10.187) видно, что

$$\frac{\partial e_{rr}}{\partial c} = \frac{1}{2G} \frac{\partial s_{rr}}{\partial c} + s_{rr} \frac{\partial \lambda}{\partial c}; \quad (10.188)$$

$$\frac{\partial e_{\alpha\alpha}}{\partial c} = \frac{1}{2G} \frac{\partial s_{\alpha\alpha}}{\partial c} + s_{\alpha\alpha} \frac{\partial \lambda}{\partial c}. \quad (10.189)$$

Исключим из этих уравнений  $\frac{d\lambda}{dc}$ . Из (10.189) найдём

$$\frac{\partial \lambda}{\partial c} = \frac{1}{s_{\alpha\alpha}} \frac{\partial e_{\alpha\alpha}}{\partial c} - \frac{1}{2G} \frac{1}{s_{\alpha\alpha}} \frac{\partial s_{\alpha\alpha}}{\partial c}.$$

Подставим это выражение производной в формулу (10.188), получим

$$2G \left( s_{rr} \frac{\partial e_{\alpha\alpha}}{\partial c} - s_{\alpha\alpha} \frac{\partial e_{rr}}{\partial c} \right) - \left( s_{rr} \frac{\partial s_{\alpha\alpha}}{\partial c} - s_{\alpha\alpha} \frac{\partial s_{rr}}{\partial c} \right) = 0. \quad (10.190)$$

Поскольку материал трубы упрочнения не имеет, напряжения в пластической области должны удовлетворять условию пластичности (10.118), которое с помощью формул (10.126-10.128) может быть представлено в виде

$$s_{rr}^2 + s_{rr}s_{\alpha\alpha} + s_{\alpha\alpha}^2 = \frac{\sigma_T^2}{3}. \quad (10.191)$$

Решая это уравнение относительно  $s_{\alpha\alpha}$ , получим

$$s_{\alpha\alpha} = \frac{1}{2} \left( -s_{rr} \pm \sqrt{\frac{4}{3} \sigma_T^2 - 3s_{rr}^2} \right) = \frac{1}{2} (-s_{rr} \pm \gamma). \quad (10.192)$$

Какой знак следует взять? Найдём знак выражения  $2s_{\alpha\alpha} + s_{rr}$ . Выразим  $s_{\alpha\alpha}$  и  $s_{rr}$  по формулам (10.127) и (10.126):

$$2s_{\alpha\alpha} + s_{rr} = 2(\sigma_{\alpha\alpha} - \sigma) + (\sigma_{rr} - \sigma).$$

Заменим  $\sigma_{\alpha\alpha}$  и  $\sigma_{rr}$  по формулам (10.183) и (10.182), а  $\sigma$  по формуле (10.124), имея в виду, что  $\varepsilon = B = \frac{p^*}{G + 3K}$  [см. формулы (10.166) и (10.180)]. Получим

$$2s_{\alpha\alpha} + s_{rr} = p^* \left( \frac{3G}{G + 3K} + \frac{b^2}{r^2} \right) > 0.$$

Следовательно, в формуле (10.192) необходимо взять знак «+». Подставим выражение (10.192) в дифференциальное уравнение равновесия (10.145) и уравнение (10.190). Тогда в совокупности с уравнением (10.151) получим систему трёх уравнений для определения трёх неизвестных  $\varepsilon$ ,  $\alpha$  и  $s_{rr}$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} - \frac{\partial \alpha}{\partial r} &= \frac{2\alpha}{r}; \\ \frac{\partial s_{rr}}{\partial r} + 3K \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} &= \frac{1}{2r} (-3s_{rr} + \gamma); \\ \frac{\partial s_{rr}}{\partial c} - \frac{3G}{4\sigma_T^2} (\gamma^2 - 3s_{rr}\gamma) \frac{\partial \varepsilon}{\partial c} - \frac{9G}{4\sigma_T^2} (\gamma^2 + s_{rr}\gamma) \frac{\partial \alpha}{\partial c} &= 0, \end{aligned} \right\} (10.193)$$

где  $\gamma$  определяется из формулы (10.192). Здесь первое уравнение это уравнение совместности деформаций, а второе - дифференциальное уравнение равновесия. Эта система решается численными методами. Для этого систему дифференциальных уравнений (10.193) записываем в конечных разностях:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Delta \varepsilon}{-\delta} - \frac{\Delta \alpha}{-\delta} &= \frac{2\alpha}{r}; \\ \frac{\Delta s_{rr}}{-\delta} + 3K \frac{\Delta \varepsilon}{-\delta} &= \frac{1}{2r}(-3s_{rr} + \gamma); \\ \frac{\Delta s_{rr}}{\delta} - \frac{3G}{4\sigma_T^2}(\gamma^2 - 3s_{rr}\gamma) \frac{\Delta \varepsilon}{\delta} - \frac{9G}{4\sigma_T^2}(\gamma^2 + s_{rr}\gamma) \frac{\Delta \alpha}{\delta} &= 0. \end{aligned} \right\} (10.194)$$

Здесь  $\delta$  - малое приращение радиуса, если двигаться от внутренней поверхности трубы к цилиндрической поверхности  $r = c$ .

При решении системы уравнений (10.193), (10.194) используются граничные условия:

- при  $r = a$   $\sigma_{rr} = -p_a$ ;

- при  $r = c$   $\sigma_{rr}$  и  $\sigma_{\alpha\alpha}$  должны быть равны напряжениям, определённым по формулам (10.182) и (10.183).

Определив  $\varepsilon, \alpha$  и  $s_{rr}$ , по формулам (10.192) и (10.142)-(10.144) вычисляют компоненты напряжений, а по формуле (10.150) – радиальное перемещение.

Расчёты показывают, что различие в результатах вычислений с учётом сжимаемости по теории пластического течения и по теории упруго-пластических деформаций очень мало. Если же материал трубы принять несжимаемым ( $\mu = 1/2, K \rightarrow \infty, \varepsilon = 0$ ), то решения задач расчёта НДС толстостенной трубы по обеим теориям совпадают. Следовательно, для трубы из несжимаемого материала нагружение является простым. Это уже отмечалось при решении задачи 10.3

В заключение отметим, что допущение несжимаемости существенно снижает точность расчёта напряжений  $\sigma_{rr}$  и  $\sigma_{\alpha\alpha}$ , но довольно существенно (до 30%) снижает точность расчёта радиальных перемещений  $u_r$ .

### **Контрольные вопросы**

1. Для каких нагружений справедлива деформационная теория пластичности? Каковы её основные предпосылки (гипотезы)?
2. Покажите, что тензор пластических деформаций является девиатором.

3. Как устанавливается связь между пластическими деформациями и напряжениями?
4. Покажите, что интенсивность деформаций  $\varepsilon_{II}$  равна сумме интенсивностей упругих  $\varepsilon_{II}^e$  и пластических  $\varepsilon_{II}^p$  деформаций.
5. Запишите связь между деформациями и напряжениями по деформационной теории пластичности.
6. Докажите равенство коэффициентов Надаи-Люде для напряжений и деформаций.
7. Выведете формулы (10.83).
8. В каких случаях расчёты напряжённо-деформированного состояния по обеим теориям пластичности совпадают?
9. Предложите опыты для проверки теорий пластичности.
10. Выведите уравнение совместности деформаций (10.90).
11. Решите дифференциальное уравнение для нахождения величины  $\psi$  в задаче 10.3.
12. Укажите способы решения трансцендентного уравнения (10.96).
13. Запишите уравнения состояния термопластичности по теории пластического течения и по деформационной теории.
14. В чём принципиальное отличие уравнений состояния вязкопластического течения (10.105) от уравнений Сен-Венана – Леви – Мизеса (10.31)?
15. Вывести формулы (10.138), (10.151), (10.155), (10.176), (10.178), (10.182)-(10.185), (10.190)-(10.192), (10.193).
16. Предложите способ решения системы уравнений (10.193), (10.194).
17. Как влияет учёт сжимаемости на точность расчёта напряжённо-деформированного состояния толстостенной трубы?

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Конечной целью является расчёт напряжённо-деформированного состояния (НДС) в процессах обработки металлов давлением (ОМД). Зная НДС, можно определить энергосиловые параметры процесса ОМД (силы, моменты, мощность), размеры и форму металлического изделия, неоднородность деформации, механические свойства (прочность, пластичность), рассчитать режимы обжатий, скоростей, обоснованно выбрать размеры исходной заготовки и др.

Для расчёта НДС нужно, во-первых, иметь замкнутую систему (множество) уравнений, описывающую упруго-пластическую деформацию, и, во-вторых, правильно сформулировать начальные и граничные условия, конкретизирующие процесс ОМД (прокатку, волочение, прессование, свободную ковку, объёмную штамповку, листовую штамповку и др.).

В замкнутой системе уравнений число уравнений равно числу неизвестных величин. В общем случае НДС характеризуют 29 величин:

- 6 компонент  $\sigma_{ij}$  тензора напряжений  $T_\sigma$ ;
- 6 компонент  $\varepsilon_{ij}$  тензоров деформаций  $\overset{\circ}{T}_\varepsilon$  или  $\widehat{T}_\varepsilon$  (или тензора бесконечно малых деформаций  $T_\varepsilon$ );
- 6 компонент  $\xi_{ij}$  тензора скоростей деформаций  $T_\xi$ ;
- 3 компоненты  $u_i$  вектора перемещения  $\vec{u}$ ;
- 3 компоненты  $v_i$  вектора скорости перемещения  $\vec{v}$ ;
- 3 компоненты  $a_i$  вектора ускорения  $\vec{a}$ ;
- плотность  $\rho$ ;
- температура  $T$ .

Следовательно, система уравнений, описывающих упруго-пластическую деформацию, должна состоять из 29 уравнений. В первой и второй частях учебного пособия все они получены. Перечислим их:

- 3 уравнения связи скоростей и перемещений [см. формулу (1.111)]

$$v_i = (\partial u_i / \partial t)_{\xi_i} ;$$

- 3 уравнения связи ускорений и скоростей (1.133)

$$a_i = \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} \right)_{\xi_i} = \frac{dv_i}{dt} = \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} \right)_{x_i} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k};$$

- 6 уравнений связи конечных деформаций и перемещений (2.57)

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right)$$

или 6 уравнений связи бесконечно малых деформаций и перемещений (2.72)

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right);$$

- 6 уравнений связи скоростей перемещений и скоростей деформаций (3.10)

$$\xi_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right);$$

- уравнение неразрывности (5.34)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_k \frac{\partial \rho}{\partial x_k} + \rho \frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0;$$

- 3 дифференциальные уравнения движения (5.51)

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \rho F_i = \rho a_i;$$

- уравнение теплопроводности (5.99)

$$c\rho \left( \frac{\partial T}{\partial t} + v_k \frac{\partial T}{\partial x_k} \right) = \sigma_{ij} \xi_{ij}^p + k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right);$$

- 6 уравнений состояния теории пластического течения (ТПТ) Прандтля - Рейсса (10.29)

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E} [d\sigma_{ij} - \mu(3d\sigma_{ij} - d\sigma_{ij})] + \frac{3}{2} \frac{\overline{d\varepsilon}_u^p}{\sigma_u} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^p)$$

или 6 уравнений состояния Сен-Венана – Леви – Мизеса (10.30)

$$\xi_{ij} = \frac{3}{2} \frac{\xi_u}{\sigma_u} (\sigma_{ij} - \sigma g_{ij})$$

или 6 уравнений состояния теории упруго-пластических деформаций (ТУПД) Г. Хенки (10.76)

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\sigma}{3K} g_{ij} + \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_u}{\sigma_u} (\sigma_{ij} - \sigma g_{ij}).$$

Должны соблюдаться также 6 уравнений совместности конечных деформаций (2.61)

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \varepsilon_{in}}{\partial \xi_j \partial \xi_m} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{jm}}{\partial \xi_i \partial \xi_n} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{jn}}{\partial \xi_i \partial \xi_m} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{im}}{\partial \xi_j \partial \xi_n} + \\ & + \hat{g}_{\alpha\beta} (\hat{\Gamma}_{\alpha in} \hat{\Gamma}_{\beta jm} - \hat{\Gamma}_{\alpha jn} \hat{\Gamma}_{\beta im}) - \\ & - \overset{\circ}{g}_{\alpha\beta} \left( \overset{\circ}{\Gamma}_{\alpha in} \overset{\circ}{\Gamma}_{\beta jm} - \overset{\circ}{\Gamma}_{\alpha jn} \overset{\circ}{\Gamma}_{\beta im} \right) = 0 \end{aligned}$$

или 6 уравнений совместности бесконечно малых деформаций (2.76)

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{in}}{\partial \xi_j \xi_m} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{jm}}{\partial \xi_i \xi_n} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{jn}}{\partial \xi_i \xi_m} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{im}}{\partial \xi_j \xi_n} = 0$$

и 6 уравнений совместности скоростей деформаций (3.15)

$$\frac{\partial^2 \xi_{in}}{\partial x_j \partial x_m} + \frac{\partial^2 \xi_{jm}}{\partial x_i \partial x_n} - \frac{\partial^2 \xi_{jn}}{\partial x_i \partial x_m} - \frac{\partial^2 \xi_{im}}{\partial x_j \partial x_n} = 0,$$

где свободные индексы  $i, j, m, n$  принимают значения 1, 2, 1, 2; 2, 3, 2, 3; 3, 1, 3, 1; 1, 2, 1, 3; 2, 3, 2, 1; 3, 1, 3, 2.

Мы рассмотрели систему (множество) дифференциальных уравнений механики сплошной среды. Однако можно использовать и систему интегральных уравнений. Сюда входят (по Л.И. Седову)

- уравнение неразрывности (5.23)

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho dV = 0;$$

- уравнение количества движения (уравнение импульсов) (5.38)

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho \vec{v} dV = \iint_{\Sigma} \vec{S}_n d\Sigma + \iiint_V \rho \vec{F} dV;$$

- уравнение моментов количества движения (уравнение моментов импульсов) (5.61)

$$\frac{d}{dt} \iiint_V (\vec{r} \times \vec{v}) \rho dV = \iint_{\Sigma} (\vec{r} \times \vec{S}_n) d\Sigma + \iiint_V (\vec{r} \times \vec{F}) \rho dV ;$$

- уравнение, изображающее закон сохранения энергии (5.91)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_V \left( u + \frac{v^2}{2} \right) \rho dV = & \iint_{\Sigma} \vec{S}_n \cdot \vec{v} d\Sigma + \\ & + \iiint_V \rho \vec{F} \cdot \vec{v} dV - \iint_{\Sigma} \vec{q} \cdot \vec{n} d\Sigma + \iiint_V \rho q_M dV . \end{aligned}$$

Замыкает систему интегральных уравнений уравнение для энтропии, вытекающее из второго закона термодинамики. Как отмечает акад. Л.И. Седов, при построении моделей пластических тел во многих случаях в качестве основной предпосылки принимается, что в процессе пластического деформирования приращения энтропии, внутренней энергии и напряжений связаны только с приращениями пластических деформаций и не зависят от скоростей, с которыми осуществляются эти приращения. В связи с этим процесс пластического деформирования можно рассматривать как необратимый термодинамический процесс, происходящий сколь угодно медленно, и, следовательно, как необратимый процесс, составленный из последовательности равновесных состояний.

Уравнение для энтропии, вытекающее из второго закона термодинамики, можно записать в виде

$$\frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_V s \rho dV = \iiint_V \frac{\rho}{T} \left( \frac{dq^e}{dt} + \frac{dq'}{dt} \right) dV, \quad \frac{dq'}{dt} \geq 0,$$

где  $S$  - энтропия конечного объёма сплошной среды  $V$  ;

$s$  - энтропия единицы массы;

$dq^e$  - тепло, поступающее извне к единице массы среды за время  $dt$  ;

$dq'$  - в случае необратимых процессов так называемое некомпенсированное тепло, отнесённое к единице массы.

В интегральных уравнениях непрерывность искомых функций, по существу, не подразумевается. Интегральная формулировка физических законов полностью эквивалентна дифференциальной для непрерывных процессов. Но для разрывных процессов интегральная формулировка обладает большей общностью. Дело в том, что пред-

положение о непрерывности задаваемых и искомым функций в области  $V$ , занимаемой средой, является очень сильным ограничением, неприемлемым в ряде важных приложений на практике. Кроме того, разрывные решения можно рассматривать в приближенных методах решения для упрощения задач и для получения эффективных решений и в том случае, когда непрерывные решения тоже существуют.

В третьей части учебного пособия будут рассмотрены: постановка краевых задач теории пластичности; начальные и граничные условия; типичные упрощения в постановках краевых задач, связанные с уменьшением числа независимых переменных, линеаризацией уравнений и задач механики сплошной среды; структура разрывов и условия на поверхностях сильных разрывов; методы решения краевых задач; примеры решения конкретных задач теории пластичности в области обработки металлов давлением.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

### *Векторный и тензорный анализ*

1. Акивис М.А., Гольдберг В.В. Тензорное исчисление. – М.: Наука, 1972. – 352 с.
2. Бачурин Г.Ф. Математическое введение в теорию пластичности. Алгебра тензоров: Учеб. пособие. – Свердловск: Изд-во УПИ, 1987. – 84 с.
3. Борисенко А.И., Тарапов И.Е. Векторный анализ и начала тензорного исчисления: Учеб. пособие для вузов. – 6-е изд. – Харьков: Изд-во ХГУ, 1986. – 216 с.
4. Векуа И.Н. Основы тензорного анализа и теория ковариантов. – М.: Наука, 1978. – 296 с.
5. Гольдфайн И.А. Векторный анализ и теория поля. – 2-е изд. – М.: Наука, 1968. – 128 с.
6. Димитриенко Ю.И. Тензорное исчисление: Учеб. пособие для вузов. – М.: Высш. шк., 2001. – 575 с.
7. Ефимов Н.В. Квадратичные формы и матрицы. – 6-е изд. – М.: Наука, 1975. – 160 с.
8. Коренев Г.В. Тензорное исчисление. – М.: Изд-во МФТИ, 1996.
9. Кочин Н.Е. Тензорное исчисление и начала тензорного исчисления. – 9-е изд. – М.: Наука, 1965. – 426 с.
10. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Векторный анализ. – М.: Наука, 1978. – 160 с.
11. Лаптев Г.Ф. Элементы векторного исчисления. – М.: Наука, 1975. – 336 с.
12. Мантуров О.В. Элементы тензорного исчисления. – М.: Просвещение, 1991. – 256 с.
13. Победря Б.Е. Лекции по тензорному анализу. – М.: Изд-во МГУ, 1986. – 286 с.
14. Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ. – М.: Наука, 1967. – 664 с.
15. Сокольников И. Тензорный анализ. Теория и применения в геометрии и в механике сплошной среды: Пер. с англ. – М.: Наука, 1971. – 374 с.

### *Механика сплошных сред*

16. Алдошкин Ю.Г. Введение в механику твердого тела: Основные понятия и общий метод составления уравнений движения/ С предисл. Белецкого В.В., Энеева Т.М. - М.: Мир, 2003. - 304 с.
17. Алоян Р.М. Динамические задачи механики конструкций и сплошных сред: Учеб. пособие. - М.: АСТ, 1990. - 255 с.

18. Бердичевский В.Л. Вариационные принципы механики сплошной среды. – М.: Наука, 1983. – 448 с.
19. Введение в механику сплошных сред: Учеб. пособие/ Черных К.Ф., Алешков Ю.З., Понятовский В.В., Шамина В.А. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1984. – 280 с.
20. Годунов С.К. Элементы механики сплошной среды. – М.: Наука, 1978. – 303 с.
21. Горшков А.Г., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В. Основы тензорного анализа и механика сплошной среды. – М.: Наука, 2000.
22. Грин А., Адкинс Дж. Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. – М.: Мир, 1965. – 455 с.
23. Дорогобид В.Г., Румянцев М.И. Механика сплошной среды. Часть 2: Учеб. пособие. – Магнитогорск: ГОУ ВПО «МГТУ», 2007. – 179 с.
24. Жермен П. Курс механики сплошных сред: Пер. с фр. – М.: Высш. шк., 1983. – 400 с.
25. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. – М.: Изд-во МГУ, 1971. – 247 с.
26. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды: Учебник. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Изд-во МГУ, 1990. – 310 с.
27. Ильюшин А.А., Ломакин В.А., Шамаков А.П. Задачи и упражнения по механике сплошной среды. – 2-е изд. – М.: Изд-во МГУ, 1979. – 200 с.
28. Ионов В.Н., Огибалов П.М. Прочность пространственных элементов конструкций. Ч. 1. Основы механики сплошной среды: Учеб. пособ. для вузов. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Высшая школа, 1979. – 384 с.
29. Казакевич Г.С., Рудской А.И. Механика сплошных сред. Теория упругости и пластичности. – СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2003. – 264 с.
30. Кутилин Д.И. Теория конечных деформаций. – М.- Л.: Гостехиздат, 1949.
31. Кучеряев Б.В. Механика сплошных сред. Теоретические основы обработки давлением композитных металлов: Учебник. – М.: МИСиС, 1999. – 320 с.
32. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика сплошных сред. – М.: Гостехиздат, 1954. – 796 с.
33. Мейз Дж. Теория и задачи механики сплошных сред. – М.: Мир, 1974. – 319 с.
34. Механика сплошной среды в примерах из задач: Учеб. пособ./ В.П. Прокопьев, В.С. Нустров, Г.Л. Гасилов. – Свердловск: УПИ им. С.М. Кирова, 1979. – 107 с.

35. Морозов Н.Ф. Лекции по избранным вопросам механики сплошных сред. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1975. – 89 с.
36. Прагер В. Введение в механику сплошных сред: Пер. с англ. – М.: ИЛ, 1963. – 312 с.
37. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твёрдого тела. – М.: Наука, 1979. – 744 с.
38. Седов Л.И. Механика сплошной среды: Учебник: В 2 т. – 4-е изд. – М.: Наука, 1983. Т. 1. – 528 с.
39. Седов Л.И. Механика сплошной среды: Учебник: В 2 т. – 4-е изд. – М.: Наука, 1984. Т. 2. – 560 с.
40. Толоконников Л.А. Механика деформируемого твёрдого тела: Учеб. пособие для вузов. – М.: Высш. шк., 1979. – 318 с.
41. Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. – М.: Мир, 1975. – 592 с.

#### ***Теория упругости***

42. Амензаде Ю.А. Теория упругости: Учебник. – 3-е изд. – М.: Высш. шк., 1976. – 272 с.
43. Блох В.И. Теория упругости. – Харьков: Изд-во ХГУ, 1964. – 484 с.
44. Лурье А.И. Теория упругости. – М.: Наука, 1970. – 940 с.
45. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – 5-е изд. – М.: Наука, 1966. – 708 с.
46. Новацкий В. Теория упругости: Пер. с польск. – М.: Мир, 1975. – 872 с.

#### ***Теория пластичности***

47. Аркулис Г.Э., Дорогобид В.Г. Теория пластичности: Учеб. пособие для вузов. – М.: Металлургия, 1987. – 352 с.
48. Ивлев Д.Д. Теория идеальной пластичности. – М.: Наука, 1966. – 232 с.
49. Ильюшин А.А. Пластичность. Часть 1. Упруго-пластические деформации. – М.- Л.: Гостехиздат, 1948. – 376 с.
50. Илюкович Б.М. Введение в теорию пластичности: Учеб. пособие. – Киев: Вища школа, 1983. – 160 с.
51. Качанов Л.М. Основы теории пластичности: Учеб. пособие для вузов. – 2-е изд. – М.: Наука, 1969. – 420 с.
52. Ключников В.Д. Математическая теория пластичности: Учеб. пособие для вузов. – М.: Изд-во МГУ, 1979. – 208 с.
53. Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел: Пер. с англ. – М.: ИЛ. Т. I, 1954. – 647 с.; Т. II, 1969. – 863 с.
54. Надаи А. Пластичность: Пер с англ. – М.-Л.: ОНТИ НКТП, 1936. – 280 с.

55. Прагер В., Ходж Ф. Теория идеально пластических тел: Пер. с англ. – М.: ИЛ, 1956. – 311 с.
56. Соколовский В.В. Теория пластичности. – 3-е изд. – М.: Высш. шк., 1969. – 608 с.
57. Суяров Д.И. Механика пластической среды. – Красноярск: Красноярское книжное изд-во, 1976. – 190 с.
58. Темам Р. Математические задачи теории пластичности: Пер. с фр. – М.: Наука, 1991. – 288 с.
59. Теория пластических деформаций металлов/ Под ред. Е.П. Унксова, А.Г. Овчинникова. – М.: Машиностроение, 1983. – 606 с.
60. Теория пластичности: Пер с англ., франц., нем./ Под ред. Ю.Н. Работнова. – М.: ИЛ, 1948. – 452 с.
61. Томленов А.Д. Теория пластического деформирования металлов. – М.: Металлургия, 1972. – 408 с.
62. Хилл Р. Математическая теория пластичности: Пер. с англ. – М.: Гостехиздат, 1956. – 408 с.

#### ***Теория упругости и пластичности***

63. Александров А.В., Потапов В.Д. Основы теории упругости и пластичности: Учебник для вузов. – М.: Высш. шк., 1990. – 398 с.
64. Безухов Н.И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести: Учебник для вузов. – 2-е изд. – М.: Высш. шк., 1986. – 512 с.
65. Григорьев А.К. Теория упругости и пластичности: Конспект лекций. – Л.: Изд-во ЛПИ им. М.И. Калинина, 1975. – 158 с.
66. Зубчанинов В.Г. Основы теории упругости и пластичности: Учебник для вузов. – М.: Высш. шк., 1990. – 368 с.
67. Победря Б.Е. Численные методы в теории упругости и пластичности. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1981. – 344 с.
68. Самуль В.И. Основы теории упругости и пластичности: Учебник для вузов. – М.: Высш. шк., 1982. – 264 с.

#### ***Прикладная теория пластичности***

69. Аркулис Г.Э. Линии скольжения и метод характеристик: Конспект лекций. – Свердловск: УПИ им. С.М. Кирова, 1978. – 54 с.
70. Безухов Н.И., Лужин О.В. Приложение методов теории упругости и пластичности к решению инженерных задач: Учебное пособие. – М.: Высшая школа, 1974. – 200 с.
71. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Метод граничных элементов в прикладных науках: Пер. с англ. – М.: Мир, 1984. – 494 с.

72. Бреббия К., Уокер С. Применение метода граничных элементов в технике: Пер. с англ. – М.: Мир, 1982. – 248 с.
73. Бриджмен П. Исследование больших пластических деформаций и разрыва: Пер. с англ. – М.: Машгиз, 1955. – 444 с.
74. Бровман М.Я. Применение теории пластичности в прокатке. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Metallurgia, 1991. – 265 с.
75. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы: Пер. с англ. – М.: Мир, 1984. – 428 с.
76. Гелеи Ш. Расчет усилий и энергии при пластической деформации металлов: Пер. с нем. – М.: Metallurgizdat, 1958. – 419 с.
77. Громов Н.П. Теория обработки металлов давлением: Учебник для вузов. – М.: Metallurgia, 1978. – 360 с.
78. Губкин С.И. Пластическая деформация металлов. – М.: Metallurgizdat, 1961. – 425 с.
79. Гун Г.Я. Математическое моделирование процессов обработки металлов давлением: Учеб. пособие. – М.: Metallurgia, 1983. – 352 с.
80. Гун Г.Я. Теоретические основы обработки металлов давлением (теория пластичности): Учебник для вузов. – М.: Metallurgia, 1980. – 456 с.
81. Гун Г.Я., Полухин П.И., Полухин В.П., Прудковский Б.А.. Пластическое формоизменение металлов. – М.: Metallurgia, 1968. – 416 с.
82. Джонсон У., Меллор П. Теория пластичности для инженеров: Пер. с англ. – М.: Машиностроение, 1979. – 568 с.
83. Дзугутов М.Я. Напряжения и разрывы при обработке металлов давлением: Учебник для вузов. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Metallurgia. 1994. – 288 с.
84. Дорогобид В.Г., Корчунов А.Г. Расчет напряженно-деформированного состояния методом характеристик: Учеб. пособие. – Магнитогорск: ГОУ ВПО «МГТУ», 2010. – 103 с.
85. Друянов Б.А., Непершин Р.И. Теория технологической пластичности. – М.: Машиностроение, 1990. – 271 с.
86. Заверюха В.Н., Салганик В.М., Румянцев М.И. Решение задач теории пластичности методом тонких сечений и методом конечных элементов: Учебное пособие. – Свердловск.: Изд. УПИ им. С.М. Кирова, 1986. – 58 с.
87. Ильюшин А.А., Огibalов П.М. Упруго-пластические деформации полых цилиндров. – М.: Изд-во МГУ, 1960. – 227 с.
88. Илюкович Б.М., Огурцов А.П., Нехаев М.Е., Ершов С.В. Теоретические основы обработки металлов давлением: Моногра-

- фия: В 2 т. – Днепропетровск: РВА «Дніпро – ВАЛ», 2001. – Т. 1. – 518 с.
89. Илюкович Б.М., Огурцов А.П., Нехаев М.Е., Ершов С.В. Теоретические основы обработки металлов давлением: Монография: В 2 т. – Днепропетровск: РВА «Дніпро – ВАЛ», 2002. – Т. 2. – 485 с.
  90. Инженерная теория пластичности/ Макушок Е.М., Бельш А.В., Дмитрович Д.И. и др. – Минск: Наука и техника, 1985. – 287 с.
  91. Колмогоров В.Л. Механика обработки металлов давлением: Учебник для вузов. – 2-е изд., перераб. и доп. – Екатеринбург: УГТУ-УПИ, 2001. – 836 с.
  92. Колмогоров В.Л. Напряжения, деформации, разрушение. – М.: Metallurgy, 1970. – 231 с.
  93. Колтунов М.А., Кравчук А.С., Майборода В.П. Прикладная механика твёрдого тела. – М.: Высш. шк., 1983. – 352 с.
  94. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести: Учебник для вузов. – М.: Машиностроение, 1986. – 400 с.
  95. Малинин Н.Н., Романов К.И., Ширшов А.А. Сборник задач по прикладной теории пластичности и ползучести: Учебное пособие. – М.: Высшая школа, 1984. – 231 с.
  96. Мастеров В.А., Берковский В.С. Теория пластической деформации и обработки металлов давлением: Учебник. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Metallurgy, 1989. – 399 с.
  97. Норри Д., де Фриз Ж. Введение в метод конечных элементов: Пер. с англ. – М.: Мир, 1981. – 304 с.
  98. Обработка металлов давлением / Ю.Ф. Шевакин, В.Н. Чернышев, Р.Л. Шаталов, М.А. Мочалов. – М.: Интернет Инжиниринг, 2005. – 496 с.
  99. Сегал В.М. Технологические задачи теории пластичности. – Минск: Наука и техника, 1977. – 256 с.
  100. Смирнов–Аляев Г.А. Сопrotивление материалов пластическому деформированию. – 3-е изд., перераб. и доп. – Л.: Машиностроение, 1978. – 368 с.
  101. Сторожев М.В., Попов Е.А. Теория обработки металлов давлением: Учебник для вузов. – 4-е изд., перераб. и доп. – М.: Машиностроение, 1977. – 424 с.
  102. Томленов А.Д. Механика процессов обработки металлов давлением. – М.: Машгиз, 1963. – 235 с.
  103. Томсен Э., Янг Ч., Кобаяши Ш. Механика пластических деформаций при обработке металлов: Пер. с англ. – М.: Машиностроение, 1969. – 504 с.

104. Тюрин В.А., Мохов А.И. Теория обработки металлов давлением: Учебник для вузов / Под ред. проф. В.А. Тюрин. - Волгоград: РПК «Политехник», 2000.
105. Унков Е.П. Инженерная теория пластичности. – 2-е изд. – М.: Машгиз, 1959. – 328 с.
106. Шевченко К.Н. Основы математических методов в теории обработки металлов давлением. – М.: Высш. шк., 1970. – 352 с.

#### ***Методы конечных и граничных элементов***

107. Бреббия К., Уокер С. Применение граничных элементов в технике. – М.: Мир, 1982.
108. Зенкевич О.К. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 541 с.
109. Крауч С., Старфилд А. Метод граничных элементов в механике твердого тела: Пер. с англ. – М.: Мир, 1987. – 328 с.
110. Метод граничных интегральных уравнений: Вычислительные аспекты и приложения в механике / Под ред. Т. Крауза, Ф. Риццо. – М.: Мир, 1978.
111. Сегерлинд Л.Д. Применение метода конечных элементов. – М.: Мир, 1979. – 240 с.
112. Сидоров А. Настоящее и будущее моделирования процессов обработки металлов давлением / САПР и графика. 10, 2007. Copyright © КомпьютерПресс, 2009. [webmaster@compress.ru](mailto:webmaster@compress.ru).
113. Харламов А., Уваров А. DEFORM – программный комплекс для моделирования процессов обработки металлов давлением / САПР и графика. 6, 2003. Copyright © КомпьютерПресс, 2009. [webmaster@compress.ru](mailto:webmaster@compress.ru).
114. Чукин М.В., Полякова М.А. Моделирование процессов обработки металлов давлением с использованием программного комплекса DEFORM – 3D: учеб. пособие. – Магнитогорск: Изд-во Магнитогорск. гос. техн. ун-та им. Г.И. Носова, 2011. – 113 с.

**Список задач с решениями**

***К главе 6***

- Задача 6.1. Площадь поперечного сечения образца при растяжении .....
- Задача 6.2. Коэффициент поперечной деформации .....
- Задача 6.3. Потеря устойчивости при растяжении .....
- Задача 6.4. Напряжённое состояние шейки .....
- Задача 6.5. Аппроксимация диаграммы деформирования .....
- Задача 6.6. Аппроксимация кривой упрочнения первого рода степенной зависимостью .....

***К главе 8***

- Задача 8.1. Упругая деформация толстостенной трубы под действием внутреннего и наружного давлений .....
- Задача 8.2. Влияние толщины стенки трубы на её прочность .....
- Задача 8.3. Напряжённое состояние консоли .....
- Задача 8.4. Температурные напряжения в толстостенной трубе .....

***К главе 9***

- Задача 9.1. Условие появления пластической деформации в толстостенной трубе .....
- Задача 9.2. Пластическое кручение .....

***К главе 10***

- Задача 10.1. Расчёт напряжённого состояния тонкостенной трубы по теории пластического течения .....
- Задача 10.2. Расчёт напряжённого состояния тонкостенной трубы по деформационной теории пластичности .....
- Задача 10.3. Расчет напряжённо-деформированного состояния толстостенной трубы под действием внутреннего и наружного давлений по ТУПД .....
- Задача 10.4. Расчет напряжённо-деформированного состояния толстостенной трубы по теории пластического течения (ТПТ) .....

Учебное текстовое электронное издание

**Дорогобид Виктор Григорьевич  
Румянцев Михаил Игоревич  
Пивоварова Ксения Григорьевна**

**МЕХАНИКА СПЛОШНОЙ СРЕДЫ**

**Часть 2**

Учебное пособие

Издается полностью в авторской редакции

1,38 Мб

1 электрон. опт. диск

г. Магнитогорск, 2012 год

ФГБОУ ВПО «МГТУ»

Адрес: 455000, Россия, Челябинская область, г. Магнитогорск,  
пр. Ленина 38

ФГБОУ ВПО «Магнитогорский государственный  
технический университет им. Г.И. Носова»

Кафедра машиностроительных и металлургических технологий

Центр электронных образовательных ресурсов и

дистанционных образовательных технологий

e-mail: ceor\_dot@mail.ru