Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова»

Н.А.Денисюк
Е.Б. Скурихина
Т.В.Токарева

ОТДЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ ПО НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ И ИНЖЕНЕРНОЙ ГРАФИКЕ

Утверждено Редакционно-издательским советом университета в качестве учебного пособия

Магнитогорск
2014

УДК514.18(075)
ББК 22.151.3,7
Д 332

Рецензенты:

Кандидат педагогических наук,
доцент кафедры начертательной геометрии и графики,
ФГБОУ ВПО «Магнитогорский государственный университет»
Ю.И. Мишуковская

Кандидат технических наук,
доцент кафедры Технология машиностроения
МГТУ им. Г.И.Носова
Ю.Д.Залётов

Денисюк Н.А. Скурихина Е.Б. Токарева Т.В.
Отдельные главы по начертательной геометрии и инженерной графике [Электронный ресурс] : учебное пособие / Нина Александровна Денисюк, Елена Борисовна Скурихина, Татьяна Владимировна Токарева ; ФГБОУ ВПО «Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова». – Электрон. текстовые дан. (1,52 Мб). – Магнитогорск : ФГБОУ ВПО «МГТУ», 2014. – 1 электрон. опт. диск (CD-R). – Систем. требования : IBM PC, любой, более l GHz ; 512 Мб RAM ; 10 Мб HDD ; MS Windows XP и выше ; Adobe Reader 8.0 и выше ; CD/DVD-ROM дисковод ; мышь. – Загл. с титул. экрана.

Пособие содержит теоретические основы и определения по начертательной геометрии и инженерной графике. Предназначено для студентов, обучающихся по всем направлениям очной и заочной форм обучения. В пособии рассматриваются методы проецирования, проекции точки, прямой линии, плоскости и поверхности. Рассматриваются вопросы: о взаимном положении геометрических образов, методы преобразования чертежа, изображение поверхностей (многогранных и вращения); построение линий: сечения тел вращения проецирующей плоскостью, пересечения поверхностей вращения; построение разверток; закономерности, алгоритмы и методы решения позиционных и метрических задач.

Пособие позволит студентам овладеть методами и приёмами начертательной геометрии и инженерной графики, которые будут им необходимы в их дальнейшей учебе и практической профессиональной деятельности.

УДК514.18(075)
ББК 22.151.3,7
Д 332

ВВЕДЕНИЕ

Любое инженерное сооружение и его отдельные конструкции, архитектурные объекты, всевозможные механизмы и их детали выполняются на чертежах.

Изображения на чертежах выполняются по правилам начертательной геометрии, поэтому её изучение имеет большое значение в подготовке и творческом развитии будущего высококвалифицированного инженера любой специальности.

Основной задачей начертательной геометрии является изучение методов изображения пространственных форм на плоскости. Так как все предметы представляют собой совокупность отдельных элементов – точек, прямых, плоскостей, различных поверхностей и геометрических тел, находящихся в определенной взаимосвязи, то построение изображений геометрических элементов рассматриваются в каждом методе последовательно (от простого к сложному)

Начертательная геометрия помимо изучения методов изображения, рассматривает также приёмы решения графическими способами различного рода задач, встречающихся в практике проектирования и конструирования, связанных как с измерением (метрические задачи), так и с определением взаимного расположения отдельных элементов проектируемого объекта (позиционные задачи).

В настоящее время выделяется небольшое количество часов для прохождения курса начертательной геометрии, поэтому в методических указаниях дается теоретический материал, необходимый для изучения студентами в дальнейшем машиностроительного черчения.

Данное пособие разработано в строгом соответствии с программой по начертательной геометрии, большое внимание уделено вопросам, связанным с приложением начертательной геометрии к практическим задачам.

ГЛАВА 1. ТОЧКА, ПРЯМАЯ

1.1. Понятия об основных методах проецирования

Изображения, построенные по известным правилам, дают возможность определять как пространственные формы и истинные размеры отдельных деталей, так и их взаимное расположение. Такие изображения носят название чертёж.

Чертёж является незаменимым средством для выражения той или иной технической идеи. Как говорил один из создателей начертательной геометрии французский ученый и геометр Гаспар Монж (1746-1818), это - «язык техники». В основу построения чертежей положен метод проекций, излагаемый в начертательной геометрии. Этот метод является основным в начертательной геометрии. И этим своим, единственно ей присущим, методом начертательная геометрия отличается от всех остальных ветвей геометрии.

Сущность метода проецирования можно рассмотреть на следующем примере (рис.1.1). Пусть имеем в пространстве плоскость $П_1$, которая называется плоскостью проекции. Чтобы спроецировать точку А на плоскость $П_1$, проводим через данную точку А прямую. Такая прямая носит название проецирующей прямой. Точка пересечения проецирующей прямой с плоскостью проекции является проекцией точки (A_1 - проекция точки А).

Через точку А можно провести лучи любого направления и получить таким образом на плоскости $П_1$ множество проекций точки А.

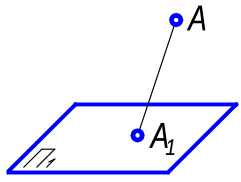


Рис.1.1

В зависимости от способа проведения проецирующих лучей проекции делятся на *центральные и параллельные*.

Центральное проецирование называют также перспективой. В методе центрального проецирования все проецирующие лучи проходят через общую точку S (рис.1.2)

Выберем точку S, не лежащую на плоскости. Эта точка называется центром проецирования. Чтобы спроецировать точки A, B и C на плоскость $П_1$, проводим через точку S и точки A, B и C прямые до пересечения с плоскостью проекций. Точки A_1, B_1 и C_1 – проекции соответствующих точек. SA_1, SB_1 и SC_1 – проецирующие лучи.

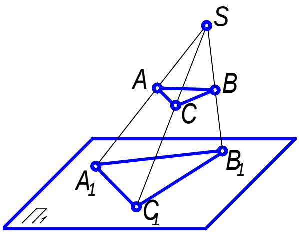


Рис.1.2

В методе параллельного проецирования все проецирующие лучи параллельны между собой. Этот метод можно рассматривать как частный случай центрального проецирования (точка S отнесена в бесконечность) При параллельном проецировании (рис.1.3) задается направление проецирования, которое в частном случае может быть перпендикулярным к плоскости проекции.

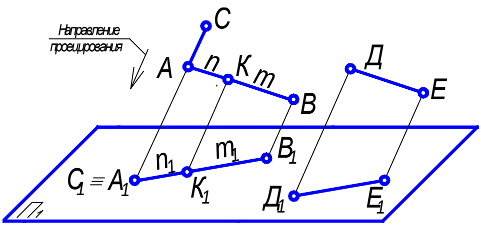


Рис.1.3

Свойства параллельного проецирования:

1. Проекцией точки является точка.
2. Проекцией прямой является прямая или точка (A_1B_1 - проекция AB, $A_1 \equiv C_1$ - проекция AC).
3. Если прямые параллельны, то их проекции параллельны. (AB//ДЕ, следовательно A_1B_1 //$Д_1E_1$).
4. Каждой точке, принадлежащей какой-либо линии, соответствует проекция этой точки на проекции данной линии (K_1 – проекция

точки К).

5. Если точка делит отрезок в каком-то отношении, то и проекция отрезка делится в том же отношении ($n/m = n_1/m_1$).

Метод параллельного проецирования положен в основу построения аксонометрических проекций, а также проекций с числовыми отметками.

В начертательной геометрии применяется метод прямоугольного параллельного проецирования.

Суть прямоугольного проецирования заключается в следующем: любая точка может быть спроецирована на плоскость проекций, при условии перпендикулярности проецирующего луча на плоскость (рис.1.4).

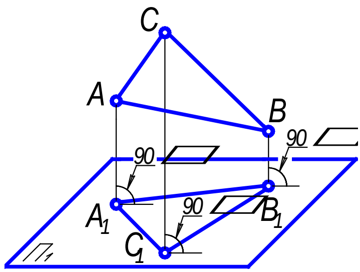


Рис.1.4

1.2. Комплексный чертеж точки

Возьмем три взаимно перпендикулярные плоскости (рис.1.5). Одну расположим горизонтально (горизонтальная плоскость проекций - $П_1$), а две других – вертикально (фронтальная – $П_2$ и профильная - $П_3$ плоскости проекции). Плоскости пересекаются по линиям, которые называются осью проекций. Плоскость $П_1$ пересекается с плоскостью $П_2$ по оси «x», плоскость $П_2$ пересекается с плоскостью $П_3$ по оси «z», плоскость $П_3$ пересекается с плоскостью $П_1$ по оси «y».

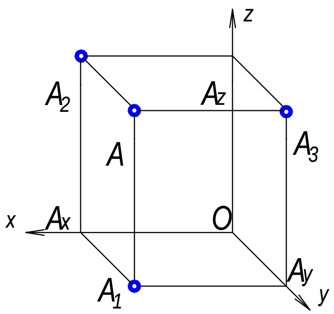


Рис.1.5

Возьмем точку А в пространстве и спроецируем ее на эти плоскости, т. е опустим перпендикуляры.

Проекцией точки называется точка пересечения перпендикуляра, опущенного из точки, с плоскостью проекций. Проекция точки на плоскость $П_1$ – $А_1$ – горизонтальная проекция точки, на $П_2$ – $А_2$ - фронтальная проекция точки, на $П_3$ – $А_3$ – профильная проекция точки.

Совмещая плоскости $П_1$ и $П_2$ поворотом вокруг оси «x» и $П_2$ и $П_3$ поворотом вокруг оси «z» вместе с изображениями на них проекций точки (рис.1.6а), получим чертеж точки А на плоском чертеже. Получим так называемый *эпюр* (в переводе с французского epure – чертеж) – геометрический чертеж, на котором проекции точки даны на совмещенных плоскостях (рис.1.6б). По чертежу легко представить себе положение точки в пространстве. Чертеж плоскостей проекций представляется положением осей проекций. Ось «у» имеет два положения. При создании чертежей оси проекций обычно не проводят. Это вызвано тем, что на чертеже важно отразить взаимное расположение элементов или их соединение, а не определять положение элементов по отношению к плоскостям проекций. В последующем все чертежи будут представлены на безосном эпюре (рис.1.7б).

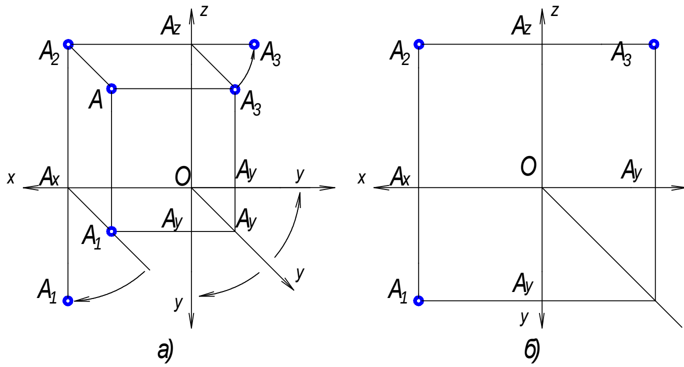


Рис.1.6

Линии чертежа, соединяющие проекции точки и параллельные осям x, y , z называются линиями проекционной связи – на чертеже всегда тонкая линия.

Закономерности эпюра:

1. Горизонтальная и фронтальная проекции точки всегда находятся на одной вертикальной линии связи.

2. Фронтальная и профильная проекции точки расположены на одной горизонтальной линии связи.

3. Горизонтальная и профильная проекции точки находятся на горизонтально – вертикальной линии связи. Вершина угла лежит на *постоянной прямой чертежа* (ППЧ).

ППЧ представляет собой биссектрису угла, образованного пересечением горизонтальной и вертикальной линий связи.

OAx – координата «x» точки A (широта) – расстояние от плоскости $П_3$. OAy – координата «y» точки A (глубина) – расстояние от плоскости $П_2$. OAz – координата «z» точки A (высота) – расстояние от плоскости $П_1$.

«x», «y», «z» - абсолютные координаты точки A.

Абсолютными координатами точки называются числа, выражающие расстояния от точки до плоскостей проекций, измеренные вдоль координатных осей.

Положение каждой проекции точки определяется двумя координатами:

- горизонтальной – координатами «x» и «y»
- фронтальной – координатами «x» и «z»
- профильной – координатами «y» и «z».

Из чертежа видно, что две проекции точки определяют положение точки в пространстве.

Вывод: любых двух проекций достаточно для определения положения самой точки в пространстве.

Положительная координата «x» откладывется на эпюре влево, отрицательная вправо. Положительная координата «z» откладывется вверх, отрицательная вниз. Положительная координата »y» на $П_1$ откладывется вниз, на $П_3$ – вправо, отрицательная на $П_1$ откладывется вверх, на $П_3$ – влево.

Возьмем точку В (рис.1.7а). Bx, By, Bz – расстояния от точки В до соответствующих плоскостей проекций (абсолютные координаты точки В). Однако мы можем рассматривать положение точки В и относительно точки А (и наоборот: положение точки А относительно точки В). Разность координат данных точек - относительные координаты точек (Δx, Δy, Δz). Запись координат точки В относительно точки А выглядит следующим образом: А;В(Δx, Δy, Δz).

Относительные координаты – это числа, выражающие смещение одной точки относительно другой.

По координате z определяется, какая точка выше, какая ниже, по координате x – какая точка левее, какая правее, по координате y – какая точка ближе, какая дальше.

Если относительная координата имеет знак «+», точка смещена по направлению оси координат, если знак «-» - точка смещена в направлении противоположном направлению оси.

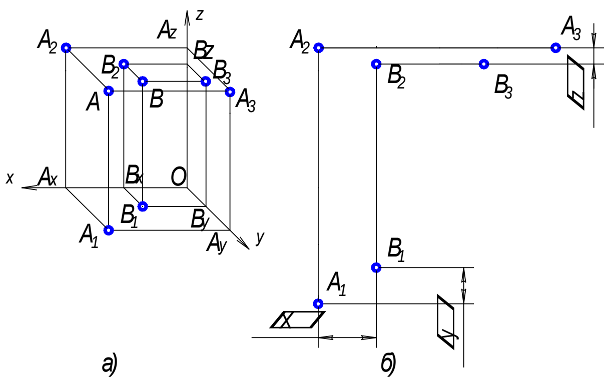


Рис.1.7

1.3. Прямая

Всякую линию можно рассматривать как образовавшуюся от движения точки, т. е. состоящую из бесчисленного множества точек, а поэтому проецируя каждую точку линии на плоскость проекций, получим проекцию линии. Прямую можно определить двумя точками, следовательно, прямая определяется проекциями своих двух точек. В системе плоскостей проекций прямая занимает некоторое положение.

Рассмотрим различные случаи положения прямой по отношению к плоскостям проекций:

1. Прямая общего положения - не параллельна и не перпендикулярна ни одной из плоскостей проекций.

2. Прямая частного положения – параллельна или перпендикулярна одной из плоскостей проекций.

1.3.1. Прямая общего положения

На рис.1.8 представлена модель плоскостей проекций и прямой общего положения.

Прямая АВ – *прямая общего положения.* Построены проекции прямой АВ на три плоскости проекции. A_1B_1 – проекция на плоскости $П_1$, – A_2B_2 проекция на $П_2$, A_3B_3 – проекция на $П_3$. На чертеже отмечены разности расстояний от концов отрезка до плоскостей проекций. Разность расстояний от концов отрезка до плоскости $П_1$ определяется величиной $Z_A - Z_B$, равной разности аппликат точек А и В отрезка АВ. Разность удалений концов отрезка от фронтальной плоскости проекций определяются величиной $У_B - У_A$, равной разности ординат точек А и В, отрезка АВ.

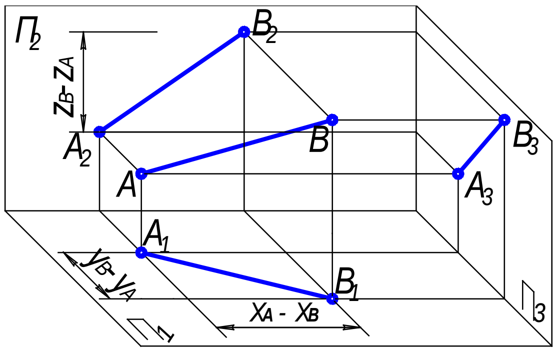


Рис. 1.8

Разность удалений концов отрезка от профильной плоскости проекций определяются величиной $X_A - X_B$, равной разности абсцисс точек A и B. Для прямой линии AB общего положения

$Z_A - Z_B \neq 0$, $\quad У_B - У_A \neq 0$, $\quad X_A - X_B \neq 0$.

Безосный чертеж будет выглядеть следующим образом:

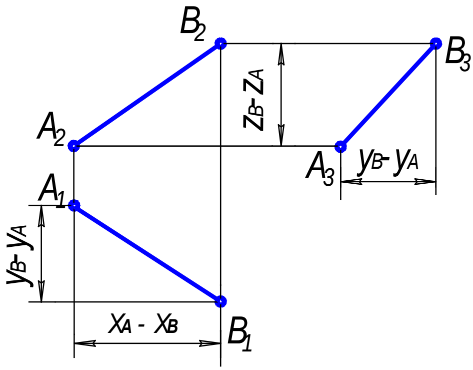


Рис.1.9

Прямая общего положения может занимать два положения. Прямая может быть восходящей и нисходящей. Восходящей считается прямая, которая поднимается по мере удаления от наблюдателя, нисходящей – которая опускается по мере удаления от наблюдателя. На комплексном чертеже проекции восходящей прямой наклонены к линиям связи в одну и ту же сторону, а проекции нисходящей прямой в разные стороны.

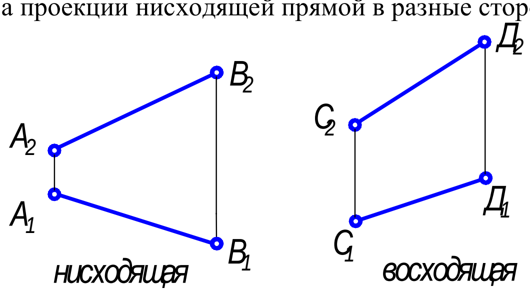


Рис.1.10

1.3.2. Прямые уровня

Прямые линии, параллельные плоскостям проекций, называют соответственно *горизонтальной, фронтальной и профильной* прямыми. Их также называют линиями уровня.

Прямая СД (рис.1.11) – параллельна горизонтальной плоскости проекций – *горизонтальная прямая*. Для этой прямой $Z_C - Z_Д = 0$. Фронтальная проекция параллельна направлению оси X, профильная проекция параллельна оси У, горизонтальная проекция определяет натуральную величину отрезка прямой СД (на чертеже натуральная величина обозначается - н.в.). Прямая СД образует некоторые углы с плоскостью $П_2$ (угол –β) и $П_3$ (угол γ)

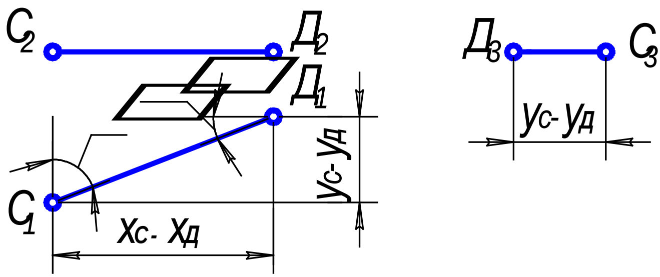


Рис.1.11

Прямая EF (рис.1.12) параллельна фронтальной плоскости проекций – *фронтальная прямая*. Для этой прямой $У_F - У_E = 0$. Горизонтальная проекция параллельна оси X профильная проекция параллельна оси Z,

фронтальная проекция определяет натуральную величину прямой EF. Прямая образует некоторые углы с плоскостями $П_1$ (угол ά) и $П_3$ (угол γ).

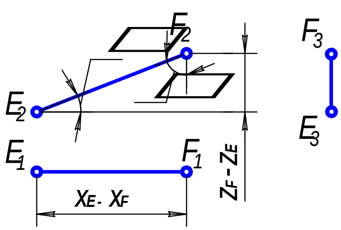


Рис.1.12

Прямая КМ (рис.1.13) параллельна профильной плоскости проекций – *профильная прямая*. Она проецируется без искажения на профильную плоскость проекций. Для этой прямой $X_К – X_М = 0$.

Горизонтальная проекция параллельна оси У, фронтальная проекция - оси Z. С плоскостью $П_1$ прямая образует угол ά, с плоскостью $П_2$ – угол β.

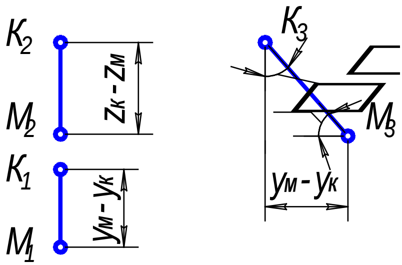


Рис.1.13

1.3.3. Проецирующие прямые

Прямая линия, параллельная направлению проецирования, называется проецирующей. При прямоугольном проецировании проецирующая прямая совпадает с направлением плоскости проекций и проецируется на эту плоскость в точку. Прямая линия, направление которой совпадает с направлением горизонтальной плоскости проекции, т. е. прямая линия перпендикулярна к горизонтальной плоскости проекций, называется *горизонтально-проецирующей*.

Прямая линия, перпендикулярная к фронтальной плоскости проекций, называется *фронтально-проецирующей*.

Прямая линия, перпендикулярная к профильной плоскости проекций, называется *профильно-проецирующей*.

Проецирующие прямые являются в то же время и прямыми дважды параллельными плоскостям проекций. Они перпендикулярны к одной плоскости проекций и параллельны двум другим плоскостям проекций.

Прямая СД перпендикулярна к горизонтальной плоскости проекций – *горизонтально-проецирующая* (рис.1.14). Для этой прямой

$У_С - У_Д = 0$; $X_С - X_Д = 0$.

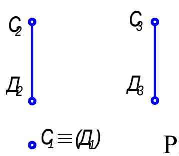


Рис.1.14

Здесь горизонтальная и фронтальная проекции располагаются на одной линии связи. Профильная и фронтальная проекции определяют натуральную величину отрезка, а горизонтальная проекция преобразуется в точку. Эта прямая одновременно является фронтальной и профильной прямой.

Для увеличения наглядности чертежа прибегают к некоторой условной видимости. Направление луча зрения совпадает с направлением проецирующих прямых. Если две точки лежат на одном проецирующем луче, то одна из них закрывается другой, причем точка, расположенная ближе к наблюдателю, будет видимой, а точка, расположенная дальше от наблюдателя, - невидимой. Невидимые точки на комплексном чертеже взяты в скобки. Аналогичные обозначения введены и на последующих чертежах.

Прямая EF перпендикулярна к фронтальной плоскости проекций – *фронтально-проецирующая* (рис.1.15). Для этой прямой $Z_E - Z_F = 0$; $X_E - X_F = 0$.

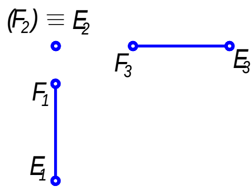


Рис.1.15

Здесь горизонтальная и фронтальная проекция прямой располагаются на одной линии связи. Горизонтальная и профильная проекции определяют натуральную величину отрезка, а фронтальная проекция преобразуется в точку. Эта прямая одновременно является горизонтальной и профильной прямой.

Прямая КМ перпендикулярна к профильной плоскости проекций – *профильно-проецирующая* (рис.1.16). Для этой прямой $Z_K - Z_M = 0$;

$У_K - У_M = 0$

Здесь горизонтальная и фронтальная проекция прямой совпадает с направлением оси проекции Х и каждая из них определяет натуральную величину отрезка. Эта прямая одновременно является горизонтальной и фронтальной прямой.

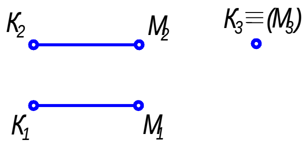


Рис.1.16

1.4. Взаимное положение прямых

Прямые линии в пространстве могут занимать различные положения: они могут быть взаимно параллельны, пересекаться и быть скрещивающимися.

1.4.1. Пересекающиеся прямые

Прямые линии, имеющие общую точку, называются пересекающимися (рис.1.17). Согласно свойству параллельного проецирования, одноименные проекции этих прямых пересекаются и точки их пересечения являются проекциями одной точки пространства – точки K. K_1 и K_2 принадлежат одной линии связи (рис.1.17а)

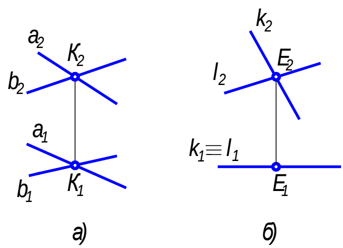


Рис.1.17

Если пересекаются прямые линии одного уровня, то проекции их пересекаются на одной из плоскостей проекций и совпадают на другой (рис.1.17б). Если одна из прямых является профильной, то взаимное положение такой линии с любой другой линией можно установить по их профильным проекциям

Условная запись пересекающихся прямых: $a \cap b$.

1.4.2. Параллельные прямые

Согласно свойству параллельного проецирования одноименные проекции двух параллельных прямых линий параллельны, находятся в таком же отношении, как и длины самих отрезков, и являются проекциями одного направления. Параллельные прямые представляют собой частный случай пересекающихся прямых, точка пересечения которых бесконечно удалена.

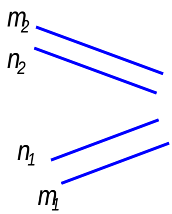


Рис.1.18

Если на чертеже одноименные проекции прямых параллельны, то в общем случае этого достаточно, чтобы установить параллельность прямых в пространстве. Исключением являются некоторые частные положения прямых линий. Так, по параллельности двух одноименных проекций двух профильных прямых нельзя утверждать, что прямые в пространстве параллельны.

Условная запись параллельных прямых m // n

1.4.3. Скрещивающиеся прямые

Если пересекающиеся и параллельные прямые лежат в одной плоскости, то скрещивающиеся прямые лежат в двух параллельных плоскостях. На чертеже точки пересечения проекций не лежат на одной линии связи.

Условная запись скрещивающихся прямых дана на рис.1.19.

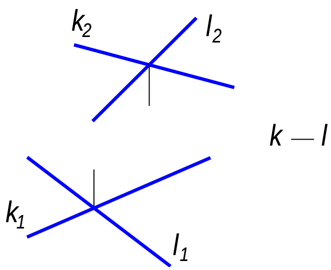


Рис.1.19

1.5. Взаимное положение точки и прямой. Конкурирующие точки

Точка может находиться на прямой и вне прямой. Если точка находится на прямой, то, согласно свойству параллельного проецирования, ее проекции должны лежать на одноименных проекциях прямой.

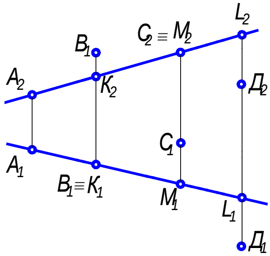


Рис.1.20

На рис.1.20 видно, что точка А, К, М, L находятся на прямой m, а точки В,С и Д вне прямой.

Рассмотрим точку В.Точка В лежит выше прямой, так как на $П_2$ проекция точки В - $В_2$ расположена выше точки $К_2$. Проекции точек В и К находятся на одной линии связи. На $П_1$ проекции точек совпадают, то есть они расположены *на одной горизонтально-проецирующей прямой* Точки В и К – *горизонтально конкурирующие точки.*

Конкурирующими называются точки, лежащие на одной проецирующей прямой.

Рассмотрим точку С. Точка С дальше от наблюдателя, находится за прямой, так как на $П_1$ точка $С_1$ расположена выше, чем точка $М_1$. На $П_2$ проекции точек совпадают, то есть *проекции точек лежат на одной фронтально-проецирующей* прямой. Точки С и М являются *фронтально-конкурирующими точками.*

Если сравнить положение точки Д с положением точки L, то можно сказать, что точка Д расположена ближе и ниже, чем точка L.

1.6. Деление отрезка прямой линии в заданном отношении

Решение задач на деление отрезка прямой линии в заданном отношении основывается на свойстве параллельного проецирования и вытекающей из этого свойства теоремы Фалеса, а также на определении принадлежности точки прямой.

Рассмотрим чертеж (рис.1.21). Из чертежа видно, что если точка «К» делит отрезок АВ в данном отношении, то проекции точки «К» делят одноименные проекции отрезка в том же отношении.

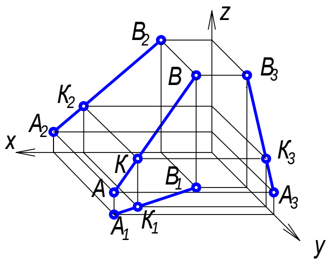


Рис.1.21

$$AK/KB=A_1K_1/K_1B_1=A_2K_2/K_2B_2=A_3K_3/K_3B_3$$

Из чертежа видно, что при делении отрезка АВ в заданном отношении, достаточно разделить одну из проекций в том же отношении, так как лучи, проецирующие точки А и В на соответствующие плоскости проекций параллельны друг другу.

Рассмотрим пример:

требуется разделить отрезок АВ прямой в отношении 2 : 3, то есть АК : КВ = 2 : 3. Отрезок задан проекциями A_1B_1 и A_2B_2 (рис.1.22).

Для решения из точки A_1 проводится в произвольном направлении вспомогательная прямая и на ней откладывается пять (2+3) равных масштабных отрезков любой длины.

Соединяя точки 5 и B_1 и проводя через точку 2 прямую параллельную линии 5 B_1, получаем проекцию искомой точки K_1, которая делит проекцию A_1B_1 в отношении 2 : 3.

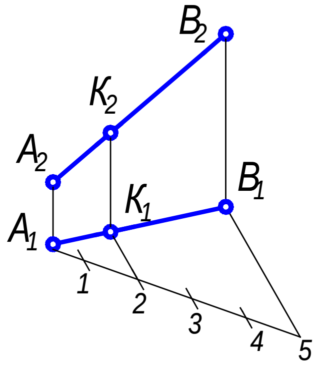


Рис.1.22

Отрезку A_1K_1 соответствуют два масштабных отрезка, а отрезку K_1B_1 – три таких отрезка. Точка K_2 строится по признаку принадлежности точки прямой.

Вывод: точка К делит отрезок АВ в отношении 2 : 3. При решении этой задачи, необходимо помнить, какая точка является началом отрезка, и какая - концом.

1.7. Определение натуральной величины отрезка общего положения и углов наклона к плоскости проекций

Любая проекция отрезка прямой общего положения всегда меньше длины самого отрезка. Основной метрической задачей в начертательной геометрии и является определение натуральной величины отрезка.

Рассмотрим способ определения натуральной величины методом прямоугольного треугольника (рис.1.23).

Дан отрезок общего положения АВ и его проекция на $П_1$ (рис.1.23а).

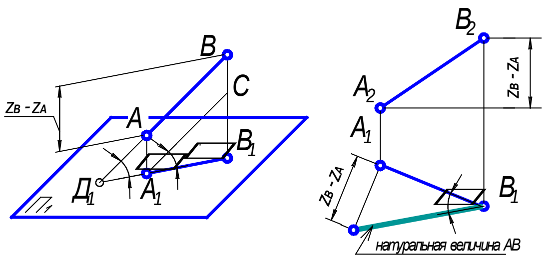


Рис.1.23

Проведем из точки A_1 прямую, параллельную АВ до пересечения ее с проецирующим лучом BB_1. В результате этого получим прямоугольный треугольник A_1B_1C, у которого гипотенуза A_1C по построению будет равна длине отрезка АВ. Катет A_1B_1 является проекцией отрезка АВ, а катет B_1C равен разности расстояний концов этого отрезка до плоскости $П_1$. Если отрезок АВ и его проекцию A_1B_1 продолжить до пересечения в точке $Д_1$, то угол ά будет являться углом наклона прямой АВ к плоскости $П_1$. В прямоугольном треугольнике A_1B_1C угол, заключенный между гипотенузой A_1C и катетом A_1B_1 также равен ά.

Таким образом, чтобы определить истинную длину отрезка прямой общего положения, необходимо в плоскости проекций построить прямоугольный треугольник, у которого одним катетом является проекция отрезка на данной плоскости, а второй катет равен алгебраической разнице расстояний концов отрезка до этой плоскости. Гипотенуза построенного треугольника равна истинной длине отрезка, а угол, заключенный между проекцией отрезка и гипотенузой, равен углу наклона прямой к данной плоскости проекции (рис.1.23б).

1.8. Проекции прямого угла

Пусть АВС – прямой угол, сторона которого (ВС), параллельна плоскости $П_1$. Через стороны АВ и ВС проведем плоскости Ψ и Ф, перпендикулярные к плоскости $П_1$ (рис.1.24а). Эти плоскости пересекут плоскость $П_1$ по прямым A_1B_1 и B_1C_1.

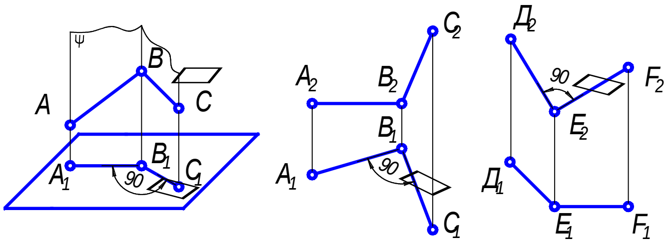


Рис.1.24

Угол $A_1B_1C_1$ является ортогональной проекцией угла АВС. Так как сторона ВС перпендикулярна к прямым АВ и BB_1 (к АВ по условию к BB_1 по построению), то и плоскость Ф, проведенная через сторону ВС, будет перпендикулярна к плоскости $П_1$. Отсюда следует, что проекции A_1B_1 и B_1C_1 сторон прямого угла также образуют между собой прямой угол. На рис.1.24б у прямого угла АВС сторона АВ//$П_1$ – горизонтальная прямая, следовательно на $П_1$ угол ABC проецируется в натуральную величину. У прямого угла ДEF сторона $EF//П_2$ - фронтальная прямая, следовательно на $П_2$ угол ДEF проецируется в натуральную величину.

Таким образом, если у прямого угла одна из его сторон параллельна плоскости проекций, а вторая - не перпендикулярна к ней, то прямой угол спроецируется на эту плоскость также в виде прямого угла.

1.9. Способы преобразования чертежа

Решение задач позиционного и, главным образом, метрического характера усложняются из-за того, что геометрические объекты располагаются произвольно относительно плоскостей проекций. Для боле простого решения задач прибегают к такому преобразованию чертежа, которое приводило бы геометрические объекты из общего в частное положение.

Преобразование может быть осуществлено двумя основными способами:

1. Способ замены плоскостей проекций.
2. Способ вращения.

Рассмотрим эти два способа на примерах определения натуральной величины отрезка прямой общего положения.

Способ замены плоскостей проекций

В этом способе геометрический элемент оставляют в неизменном положении, а заменяют одну из плоскостей проекций так, чтобы геометрический элемент занял частное положении по отношению к новой системе плоскостей проекций (рис.1.25).

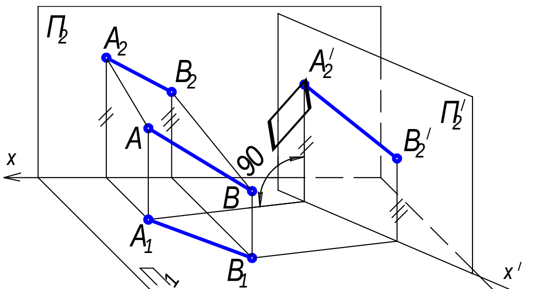


Рис.1.25

Имеем прямую общего положения AB. Преобразуем AB в прямую частного положения – фронтальную прямую. Для этого заменяем плоскость $П_2$ на $П_2'$, так, чтобы $П_2'$ располагалась параллельно AB. По место-положению плоскость $П_2'$ может быть в любом месте, но должно соблюдаться одно условие: $П_2'$ должна быть перпендикулярна $П_1$.

Проецируя прямую AB на плоскость $П_2'$ получим натуральную величину AB.

Рассмотрим эти преобразования на плоском чертеже в двух вариантах: преобразование прямой AB во фронтальную прямую, заменяя $П_2$ на $П_2'$ (рис.1.26а) и горизонтальную прямую, заменяя $П_1$ на $П_1'$ (рис.1.26б).

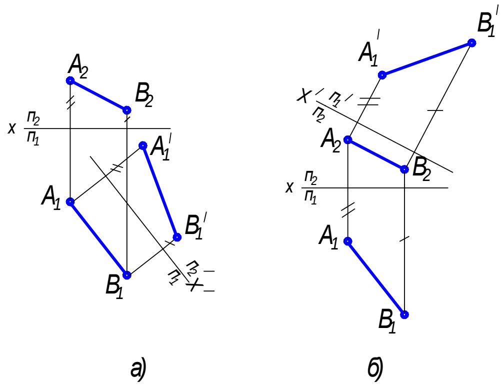


Рис.1.26

Прямая AB задана двумя проекциями: A_1B_1 и A_2B_2. Так как мы не определяем положение прямой по отношению к плоскостям проекций, то проводим произвольно ось x, обозначая плоскости $П_1$ и $П_2$ и x' параллельно A_1B_1 (рис.1.26а) Проводим новые линии связи из точек A_1 и B_1 к новой оси x' (по закономерности эпюра) под углом 90°. На этих линиях связи откладываем координату «z», т.е. расстояния от старой оси x до фронтальных проекций точек. Новая проекция - $A_2'B_2'$ – натуральная величина отрезка AB. Эту же задачу можно решить , заменяя плоскость $П_1$ на $П_1'$ (рис.1.26б). В этом случае ось новой плоскости проводим параллельно фронтальной проекции A_2B_2, а координаты «y» берем с горизонтальной плоскости проекции.

Способ вращения.

В этом способе положение плоскостей проекций остается неизменным, меняется положение геометрического элемента относительно плоскостей проекций путем вращения его вокруг некоторой оси.

Рассмотрим способ вращения на примере вращения точки А вокруг выбранной оси вращения i, перпендикулярной к $П_1$ (рис.1.27). При вращении точки А вокруг оси, точка А будет перемещаться в плоскости, перпендикулярной к оси вращения и параллельной плоскости $П_1$, по окружности радиусом r. Центр вращения, точка О, расположена на оси вращения и при проецировании на $П_1$ проекция точки О совпадает с проекцией оси вращения ($O_1 = i_1$). Окружность, описываемая точкой А, спроецируется на плоскость $П_1$ без искажения, а на плоскости $П_2$ в виде отрезка прямой, перпендикулярной проекции оси вращения i_2. При вращении точка А перемещается на некоторый угол μ.

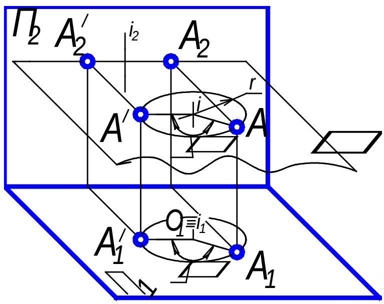


Рис.1.27

Если вращать прямую вокруг некоторой оси, то каждая точка прямой будет вращаться вокруг своего центра, расположенного на оси вращения. При повороте прямой на некоторый угол μ все точки прямой повернуться на один и тот же угол. Таким образом, задача на вращение прямой сводится к задаче на вращение отдельных ее точек.

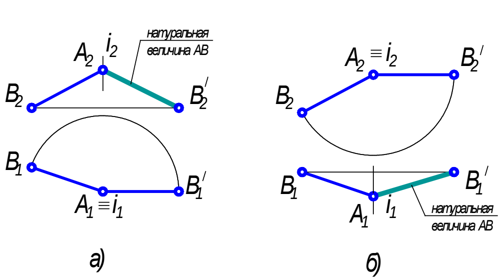


Рис.1.28

На рисунке представлен способ вращения для преобразования прямой АВ во фронтальную и горизонтальную прямую (рис. 28а и 28б). На рис.28а определение натуральной величины отрезка АВ производится путем преобразования АВ во фронтальную прямую. Ось вращения проведена через точку А перпендикулярно $П_1$. Прямую АВ поворачивают вокруг оси i до положения параллельного плоскости $П_2$. Тогда фронтальная проекция B_2 переместится в положение B_2'. Соединяя фронтальную проекцию A_2 с B_2', получим натуральную величину отрезка прямой АВ. Аналогичные преобразования производят во втором случае, выбрав ось вращения перпендикулярно $П_2$ и поворачивая прямую АВ до положения параллельного плоскости $П_1$.

1.10. Цилиндрическая винтовая линия

Из пространственных кривых линий в технике широко применяются цилиндрические винтовые линии и особенно цилиндрические винтовые линии одинакового уклона – гелисы.

Гелиса представляет собой траекторию точки, совершающей равномерное поступательное движение по образующей цилиндра вращения, которая в свою очередь равномерно вращается вокруг оси цилиндра, причем перемещение точки по образующей пропорционально угловому перемещению последней.

Осью гелисы называют ось цилиндра вращения (i), на котором она лежит.

Основными параметрами цилиндрической винтовой линии являются:

1.*Диаметр.* Диаметром цилиндрической винтовой линии является диаметр цилиндра вращения.

2.*Шаг.* Шагом цилиндрической винтовой линии называется величина перемещения точки в направлении оси, соответствующая одному полному обороту вокруг оси. Единичным шагом называют величину $S0 = S/2П$ – величина перемещения точки в направлении оси при повороте ее вокруг оси на угол, равный одному радиану.

3.*Направление хода.* Принято считать, что точка опускается по траектории к плоскости перпендикулярной к оси. Если стрелка совпадает с направлением часовой стрелки, то она цилиндрическая линия правого хода. Если стрелка указывает направление обратное ходу часовой стрелки, то цилиндрическая винтовая линия левого хода

Равномерное перемещение точки вдоль оси и равномерное перемещение ее вокруг оси могут быть использованы при построении чертежа.

На чертеже (рис.1.28) построены проекции цилиндрической винтовой линии с осью перпендикулярной к плоскости $П_1$ с шагом S и радиусом r. Вполне очевидно, что на горизонтальной плоскости проекций такая винтовая линия изображается в виде окружности радиуса r.

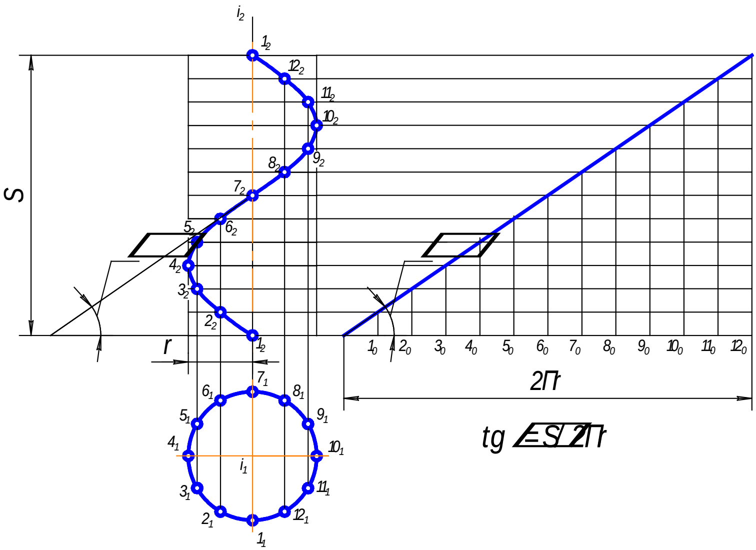


Рис.1.29

Для построения фронтальной проекции гелисы следует разделить горизонтальную проекцию гелисы на равное количество частей. В рассматриваемом примере окружность разделена на 12 частей. На это количество частей следует разделить и заданный шаг (S) винтовой линии. Построение винтовой линии на чертеже начато с точки $1 - 1_1$, расположенной на горизонтальной проекции. При повороте точки на 1/12 часть дуги окружности она соответственно переместится по высоте (вдоль оси винтовой линии) на 1/12 часть шага - точка $2 – 2_2$ на фронтальной плоскости проекции. При повороте точки на 2/12 дуги окружности точка переместится на 2/12 высоты шага и т.д.

Соединив фронтальные проекции точек плавной линией, получим фронтальную проекцию цилиндрической винтовой линии, представляющую собой синусоиду. При построении фронтальной проекции гелисы цилиндрическая поверхность принята прозрачной.

Гелиса является линией одинакового уклона, все касательные к которой наклонены к плоскости $П_1$ под углом ά. Угол ά – угол наклона гелисы.

Гелиса используется как базовая линия при задании винтовых поверхностей.

1.11 Вопросы для самопроверки

1. Основной метод начертательной геометрии. В чем его суть?
2. Виды проецирования. Суть параллельного ортогонального проецирования.
3. Что называется проекцией точки?
4. Как называются и обозначаются плоскости проекций?
5. Что такое комплексный чертеж (эпюр) Монжа точки, как его получают?
6. Основные закономерности эпюра. Осный и безосный эпюр.
7. Дать определение абсолютных и относительных координат.
8. Сколько проекций определяют положение точки в пространстве?
9. Какими координатами определяются проекции точки: горизонтально, фронтальной, профильной?
10. Какое положение в пространстве относительно плоскостей проекций занимают и как изображаются прямые общего положения?
11. Что значит прямые частного положения? Назовите их. Как они изображаются на комплексном чертеже?
12. Как по чертежу определить, принадлежит ли в пространстве точка прямой линии?
13. Как по чертежу определить положение двух прямых в пространстве (параллельных, пересекающихся, скрещивающихся)?
14. Что такое конкурирующие точки? Как при помощи их определить видимость геометрических образов на эпюре?
15. Для каких прямых (по положению в пространстве) определение натуральной величины отрезка требует дополнительного построения? По какому правилу определяется натуральная величина отрезка общего положения и угол наклона его к плоскости проекции?
16. Особенности проецирования прямого угла.
17. В чем суть метода вращения?
18. По какой линии перемещается точка и её проекции на $П_1$ и $П_2$ при вращении точки вокруг оси перпендикулярной $П_1$ и перпендикулярной $П_2$
19. В чем заключается суть метода замены плоскостей проекций?
20. Назовите кривые линии (плоские и пространственные)

21. Какая линия является винтовой?
22. Каковы основные параметры цилиндрической винтовой линии?

ГЛАВА 2. ПЛОСКОСТЬ

2.1. Плоскость.

Задание на чертеже

Вопросы, рассматриваемые в разделе «Плоскость», являются логическим продолжением материала, изложенного в предыдущих разделах: Точка, прямая.

Плоскостями ограничиваются различные предметы, следовательно, для того, чтобы научиться изображать их на чертежах , необходимо знать, как в прямоугольных проекциях изображаются грани – отсеки плоскостей

Плоскость – простейшая поверхность.

Плоскость обладает тем свойством, что любая прямая, соединяющая две ее точки, целиком принадлежит ей.

Плоскость принято считать непрозрачной и безграничной.

Задать плоскость на чертеже можно следующими элементами:

1) тремя точками, не лежащими на одной прямой;
2) прямой и точкой вне ее;
3) двумя пересекающимися прямыми;
4) двумя параллельными прямыми;
5) плоским геометрическим образом (треугольником, четырехугольником и т. д.)
6) вырожденной проекцией.

Можно всегда перейти от одного вида задания плоскости к другому .

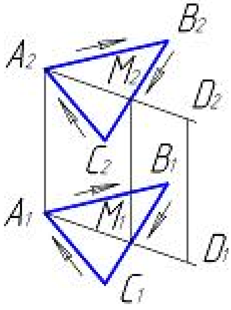
Плоскость на эпюре обозначается строчными буквами греческого алфавита φ, ω, σ, τ.

2. 2. Прямая и точка в плоскости

Построение прямой в плоскости основано на двух положениях, известных из геометрии.

1)*Прямая принадлежит плоскости, если она проходит через две точки, принадлежащие данной плоскости.*

2)*Прямая принадлежит плоскости, если она проходит через точку, принадлежащую данной плоскости, и параллельна прямой, находящейся в этой плоскости.*



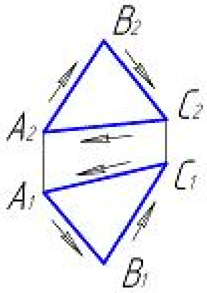
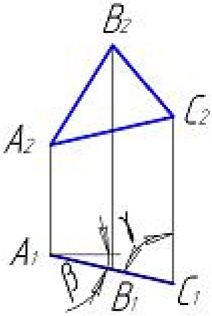


Рис. 2.1 Рис. 2.2



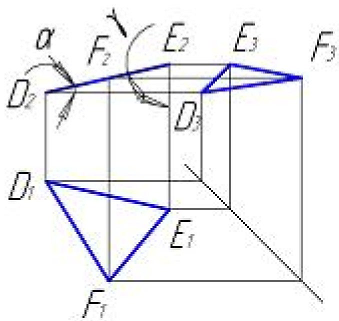


Рис. 2.3 Рис. 2.4

Точка принадлежит плоскости, если она принадлежит прямой , лежащей в этой плоскости. Т.е.для построения точки в плоскости, предварительно строим прямую, лежащую в плоскости, и на этой прямой достраиваем точку.

Например, требуется найти фронтальную проекцию точки D, если задана ее горизонтальная проекция и известно, что точка D должна лежать в плоскости треугольника ABC (рис. 2. 1).

Сначала строим горизонтальную проекцию некоторой прямой так, чтобы точка D находилась на этой прямой, а прямая была расположена в данной плоскости. Для этого проводим прямую через точки A и D и отмечаем точку M, в которой прямая AD пересекает отрезок BC. Построив фронтальную проекцию M на BC, получаем фронтальную проекцию прямой AM, расположенной в данной плоскости: эта прямая проходит через точки A и M, из которых первая заведомо принадлежит данной плоскости, а вторая в ней построена.

Искомая фронтальная проекция точки D (D_2) находится на фронтальной проекции прямой AM.

2.3. Плоскости общего и частного положения

Возможны следующие положения плоскости относительно плоскостей проекций 1) *плоскость не перпендикулярна и не параллельна ни одной из плоскостей проекций, 2)плоскость перпендикулярна лишь к одной из них, 3) плоскость перпендикулярна к двум плоскостям проекций и параллельна одной плоскости.*

1. Плоскость, не перпендикулярная и не параллельная ни одной из плоскостей проекций, является плоскостью общего положения. Такая плоскость проецируется с искажением на три плоскости проекций и может быть восходящей (Рис. 2.1) или нисходящей (Рис. 2.2).

2.Плоскость, перпендикулярная одной плоскости проекций называется проецирующей.

Такая плоскость отображается в виде прямой – вырожденной проекции на ту плоскость проекций, которой она перпендикулярна, а на две другие проецируется с искажением.

Для проецирующих плоскостей возможны три варианта:

а) *Плоскость перпендикулярна к горизонтальной плоскости проекций. Такие плоскости называются горизонтально – проецирующими.*

На рис. 2.3 плоскость задана проекциями треугольника ABC. Горизонтальная проекция представляет собой отрезок прямой линии. Угол β равен углу между заданной плоскостью и фронтальной плоскостью проекций, угол γ - определяет наклон плоскости к $П_3$.

Если в горизонтально – проецирующей плоскости расположена точка, то ее горизонтальная проекция должна быть на вырожденной горизонтальной проекции плоскости.

Это относится и к любой системе точек, расположенных в горизонтально – проецирующей плоскости, будь то прямые линии или плоский контур.

б) *Плоскость перпендикулярна к фронтальной плоскости проекций. Такие плоскости называются фронтально – проецирующими.*

На рис. 2.4 плоскость задана треугольником DEF. Фронтальная проекция представляет собой отрезок прямой линии. Угол α равен углу между DEF и пл. $П_1$.

Если во фронтально – проецирующей плоскости расположена точка, то ее фронтальная проекция должна быть на вырожденной проекции плоскости. Это относится и к любой системе точек и прямых.

в) *Плоскость перпендикулярна к профильной плоскости проекций. Такие плоскости называются профильно – проецирующими.*

На рис. 2.5 профильно – проецирующая плоскость задана пересекающимися прямыми a и b. Профильная проекция представляет собой отрезок прямой линии.

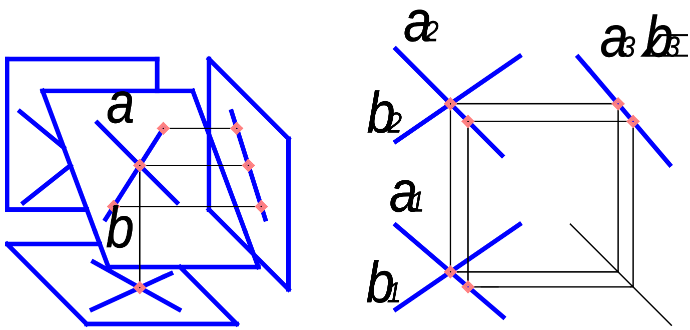


Рис.2.5

3. Если плоскость перпендикулярна двум плоскостям проекций и параллельна одной плоскости проекций, то также возможны три случая частных положений. Для таких плоскостей дано общее название «плоскости уровня». У плоскостей уровня одна проекция в натуральную величину, две другие – в виде прямых (вырожденные проекции) параллельные линиям проекционной связи.

а) *Плоскость перпендикулярна к плоскостям* Π_2, *и* Π_3 *параллельна горизонтальной плоскости проекций . Такие плоскости называются горизонтальными или горизонтального уровня (Рис.2. 6а).*

б)*Плоскость перпендикулярна к плоскостям* Π_1 *и* Π_3 *параллельна фронтальной плоскости проекций. Такие плоскости называются фронтальными или фронтального уровня (Рис.2. 6б).*

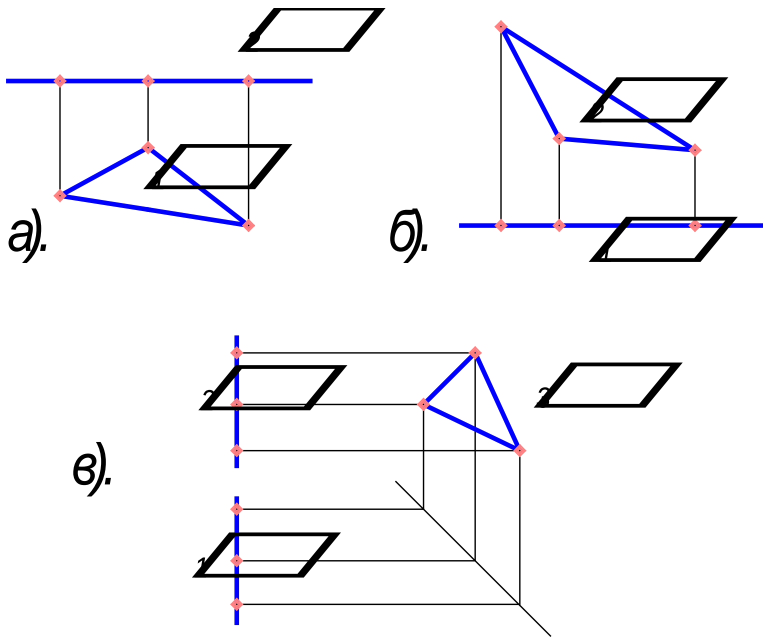


Рис.2.6

в) *Плоскость перпендикулярна к плоскостям* $П_1$ *и* $П_2$ *параллельна профильной плоскости проекций. Такие плоскости называются профильными или профильного уровня (Рис.2. 6в).*

2.4. Главные линии плоскости : горизонталь, фронталь, линии ската

К числу прямых, занимаемых особое положение в плоскости, относятся *горизонтали, фронтали и линии наибольшего наклона к плоскостям проекций – линии ската (Рис.2.7).*

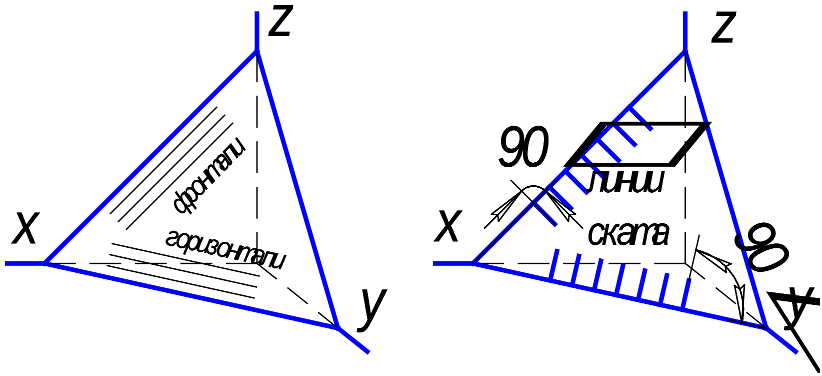


Рис.2.7

Горизонталями плоскости (g) называются прямые, лежащие в ней и параллельные горизонтальной плоскости проекций. Горизонталей в плоскости можно провести множество.

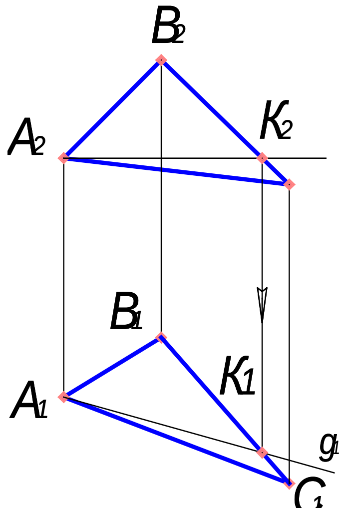


Рис.2.8

Построим горизонталь плоскости, заданной треугольником АВС. Пусть горизонталь проходит через точку А (Рис.2.8).Так как горизонталь плоскости есть прямая, параллельная пл. $П_1$, то фронтальную проекцию этой прямой получим, проведя A_2K_2 параллельно горизонтальной линии проекционной связи. Для построения горизонтальной проекции этой горизонтали строим проекцию K_1 и проводим прямую через точки А и К.

Построенная прямая АК действительно является горизонталью данной плоскости: эта прямая лежит в плоскости, так как проходит через две точки, заведомо ей принадлежащие, и параллельна плоскости проекций $П_1$.

Фронталями плоскости (f) называются прямые, лежащие в ней и параллельные фронтальной плоскости проекций (Рис.2.9).

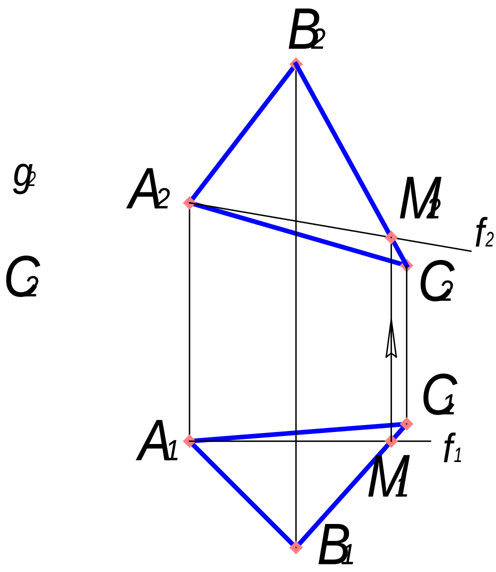


Рис.2.9

Пусть фронталь проходит через точку А. Начинаем построение с проведения горизонтальной проекции фронтали – прямой АМ, так как направление этой проекции известно: A_1M_1 параллельна горизонтальной линии проекционной связи. Затем строим фронтальную проекцию фронтали – прямую АМ.

Построенная прямая действительно является фронталью данной плоскости: эта прямая лежит в плоскости, так как проходит через две точки, заведомо ей принадлежащие, и параллельна плоскости Π_2.

Горизонтали и фронтали в плоскостях частного положения показаны на рис. 2.10.

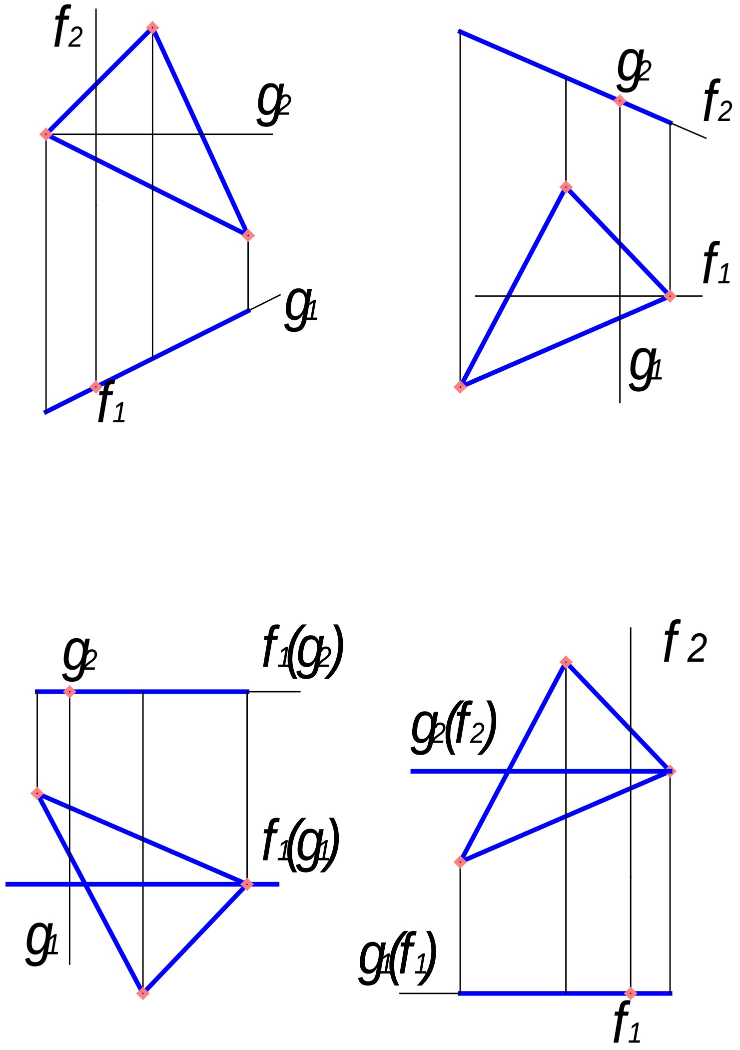


Рис. 2.10

Линиями наибольшего наклона плоскости к плоскостям проекций называются прямые, лежащие в ней и перпендикулярные или к горизонталям плоскости или к ее фронталям. В первом случае определяется наклон к горизонтальной плоскости проекций, во втором – к фронтальной плоскости проекций.

Линия наибольшего наклона плоскости к горизонтальной плоскости проекций называется *линией ската 1 рода S*.

Согласно правилам проецирования прямого угла горизонтальная проекция линии ската плоскости (S_1) перпендикулярна к горизонтальной проекции горизонтали (g_1) этой плоскости. Фронтальная проекция линии ската строится после горизонтальной и может занимать различные положения в зависимости от задания плоскости

(Рис. 2.11).

Аналогично линия наибольшего наклона плоскости к фронтальной плоскости проекций служит для определения угла между этой плоскостью и фронтальной плоскость

(Рис. 2. 12).

Линия наибольшего наклона плоскости определяет положение этой плоскости в пространстве. Например, на рис. 2.13 задана линия ската КВ. Проведя перпендикулярно к ней горизонтальную прямую AN мы вполне определяем для которой КВ является линией ската.

Рассмотренные нами главные линии плоскости, в основном горизонтали и фронтали, часто применяются в различных построениях и при решении задач. Это объясняется значительной простотой построения указанных прямых. Их удобно применять в качестве вспомогательных.

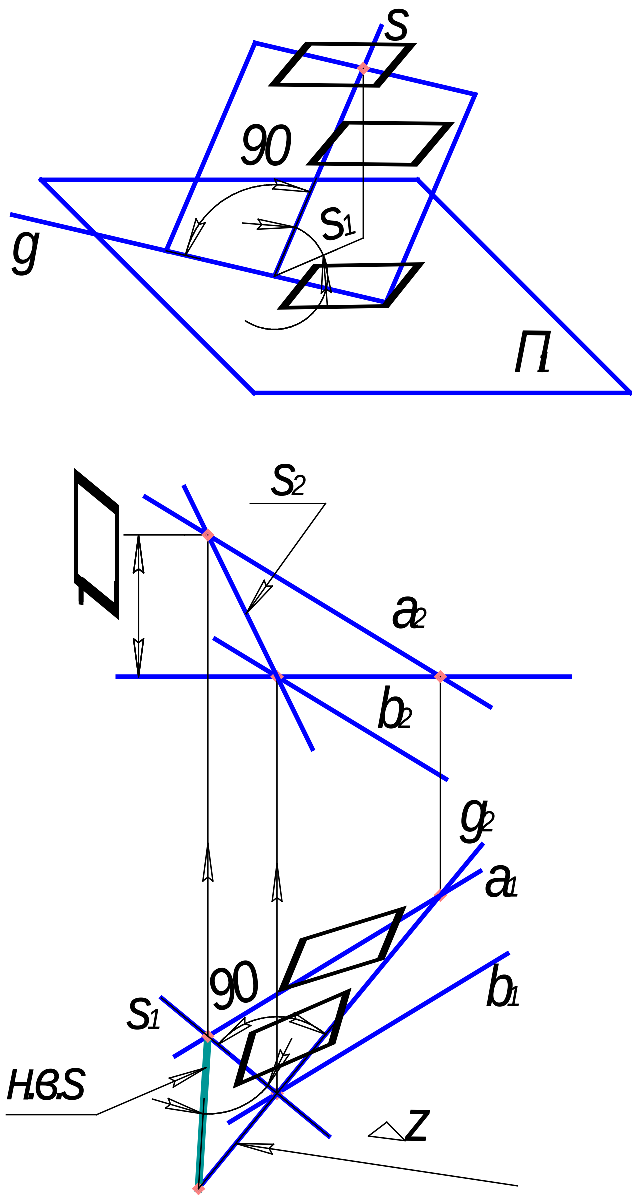


Рис. 2. 11

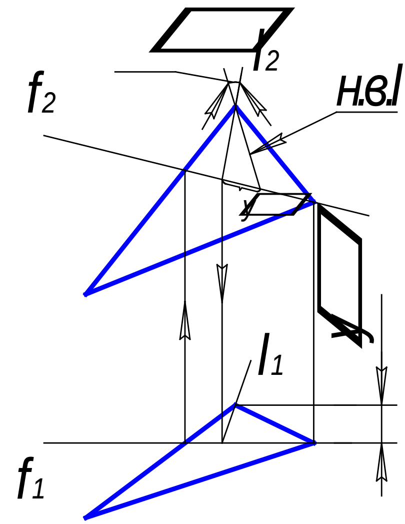


Рис. 2. 12

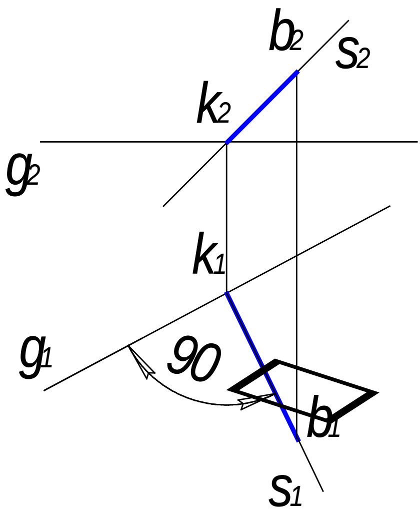


Рис. 2. 13

2.5. Положение прямой и плоскости

Прямая может принадлежать плоскости, пересекаться с плоскостью или быть ей параллельна (Рис. 2. 14). Это значит, что прямая l соответственно совпадает, пересекается или параллельна какой – либо прямой в заданной плоскости. Поэтому определение взаимного расположения прямой и плоскости, в общем случае, сводится к определению взаимного расположения двух прямых – данной и вспомогательной прямой, принадлежащей данной плоскости. Обычно в качестве вспомогательной прямой выбирают прямую, конкурирующую с данной прямой.

Пусть даны плоскость и прямая общего положения (Рис. 2.15), требуется найти точку, в которой прямая пересекает плоскость. Для этого проводим через прямую вспомогательную проецирующую плоскость. Затем находим линию, по которой пересекаются вспомогательная плоскость и заданная. Искомая точка является точкой пересечения прямых. Решение задачи на эпюре показано на рис. 2.16.

Задача построения точки пересечения прямой с плоскостью упрощается, если прямая или плоскость занимают частное положение. Если проецирующая прямая пересекается с плоскостью общего положения, то проекция точки пересечения совпадает с точкой, в которую проецируется сама прямая (Рис. 2.17). Если же проецирующая плоскость пересекается с прямой общего положения, то одна из проекций точки пересечения на вырожденной проекции плоскости (Рис. 2. 18).

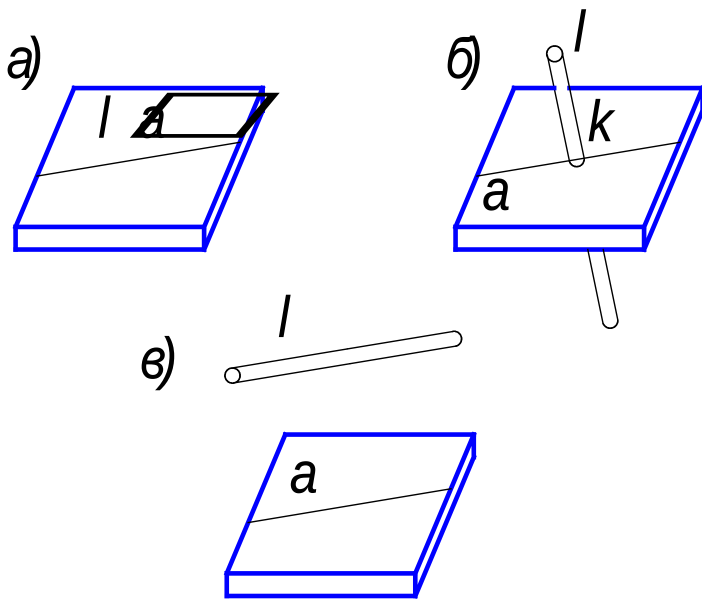


Рис. 2. 14

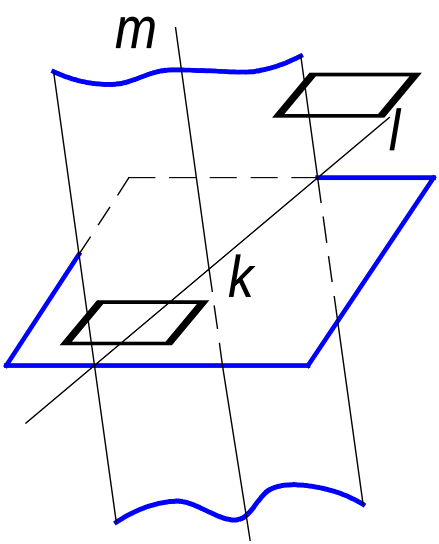


Рис. 2. 15

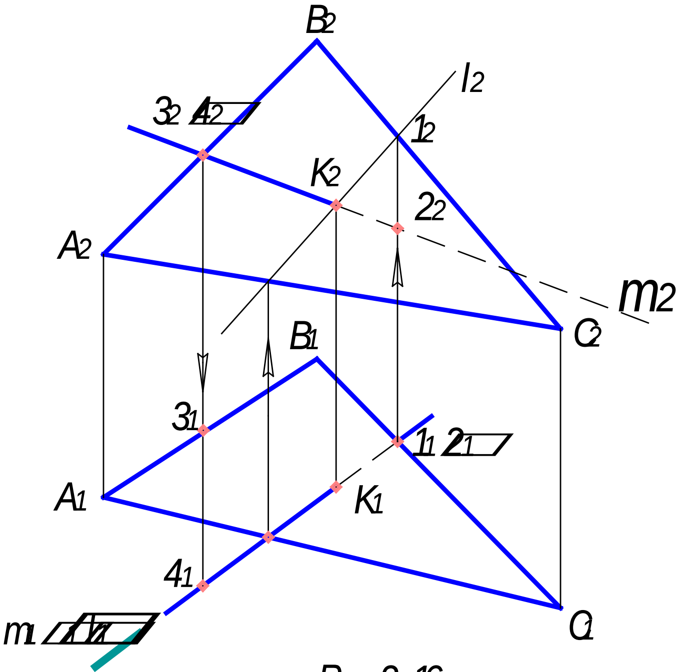


Рис. 2.16

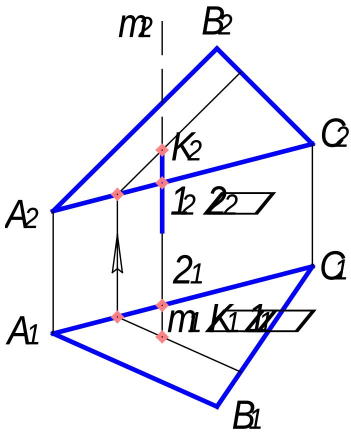


Рис. 2.17

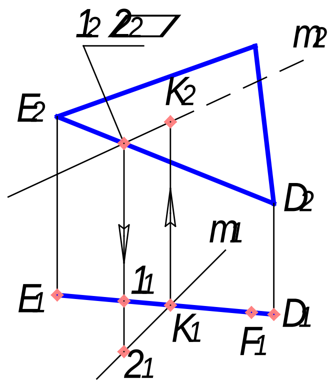


Рис. 2.18

2.6. Взаимное положение плоскостей

Две плоскости могут быть параллельными или пересекаться между собой.

Если плоскости параллельны, то две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости. Это служит основным признаком для определения , параллельны плоскости между собой или не параллельны.

Прямая линия, получаемая при взаимном пересечении двух плоскостей, вполне определяется двумя точками, из которых каждая принадлежит обеим плоскостям.

В общем случае для построения линии пересечения двух плоскостей надо найти какие – либо две точки, каждая из которых принадлежит обеим плоскостям; эти точки определяют линию пересечения плоскостей.

Задавая плоскость, мы предполагаем ее безграничность. На практике приходится иметь дело с плоскостями, ограниченными каким – либо контуром, т.е. плоскими фигурами.

Такие ограниченные фигуры могу и не пересекаться, если даже плоскости, в которых они лежат, пересекались между собой.

Для пересечения самих фигур необходимо, чтобы пересекались их контуры. При этом могут быть два основных случая, показанных на рис. 2.19. В первом случае две стороны треугольника пересекают плоскость четырехугольника, но ни одна из сторон четырехугольника не встречается с треугольником. Получается «полное» пересечение, или проницание одной фигуры сквозь другую. Во втором случае только одна сторона треугольника пересекает четырехугольник, но вместе с тем одна из сторон четырехугольника пересекает треугольник. В этом случае мы имеем частичное пересечение фигур, или врезание одной фигуры в другую

Из рис. 2.19 видно, что для построения линии пересечения KL или K_1L_1 достаточно найти две точки, в которых стороны одной фигуры встречают плоскость второй фигуры. Задача сводится к нахождению точки встречи прямой с плоскостью.

Если одна из плоскостей занимает частное положение, например, перпендикулярна горизонтальной плоскости проекций, то линия пересечения плоскостей представляет собой отрезок прямой на вырожденной горизонтальной проекции плоскости.

На рис. 2.20 показано решение задачи для случая, когда обе плоскости занимают общее положение в пространстве. Для построения искомой линии достаточно найти две точки, в которых стороны одной фигуры проницают плоскость другой фигуры. Поэтому возьмем одну из сторон треугольника, например AC, и найдем точку пересечения ее с плоскостью параллелограмма. Для построения точки K, в которой прямая AC пересекает плоскость параллелограмма, проводим через AC горизонтально – проецирующую плоскость ω; отмечаем точки пересечения этой плоскости со сторонами четырехугольника и находим проекции линии пересечения проведенной вспомогательной плоскости с четырехугольником. В пересечении l_2 со стороной треугольника A_2 C_2 находим первую точку линии пересечения K. Таким же образом, с помощью вспомогательной плоскости найдена точка L, в которой встречает четырехугольник сторона BC.

Соединив одноименные проекции найденных точек K и L, получаем проекции искомой линии пересечения. Далее, для придания большей наглядности эпюру следует определить видимость фигур с помощью конкурирующих точек.

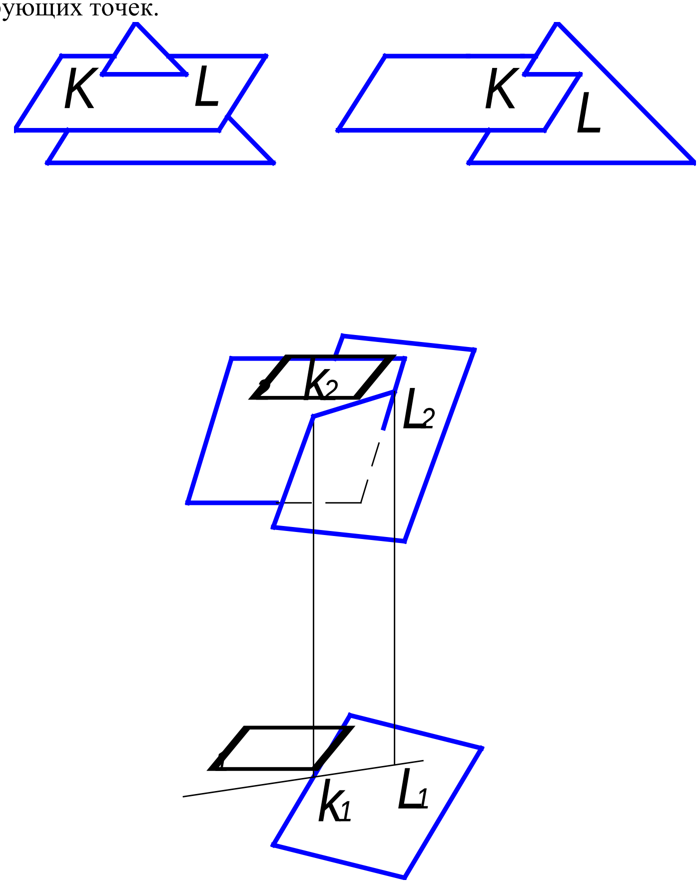


Рис. 2. 19

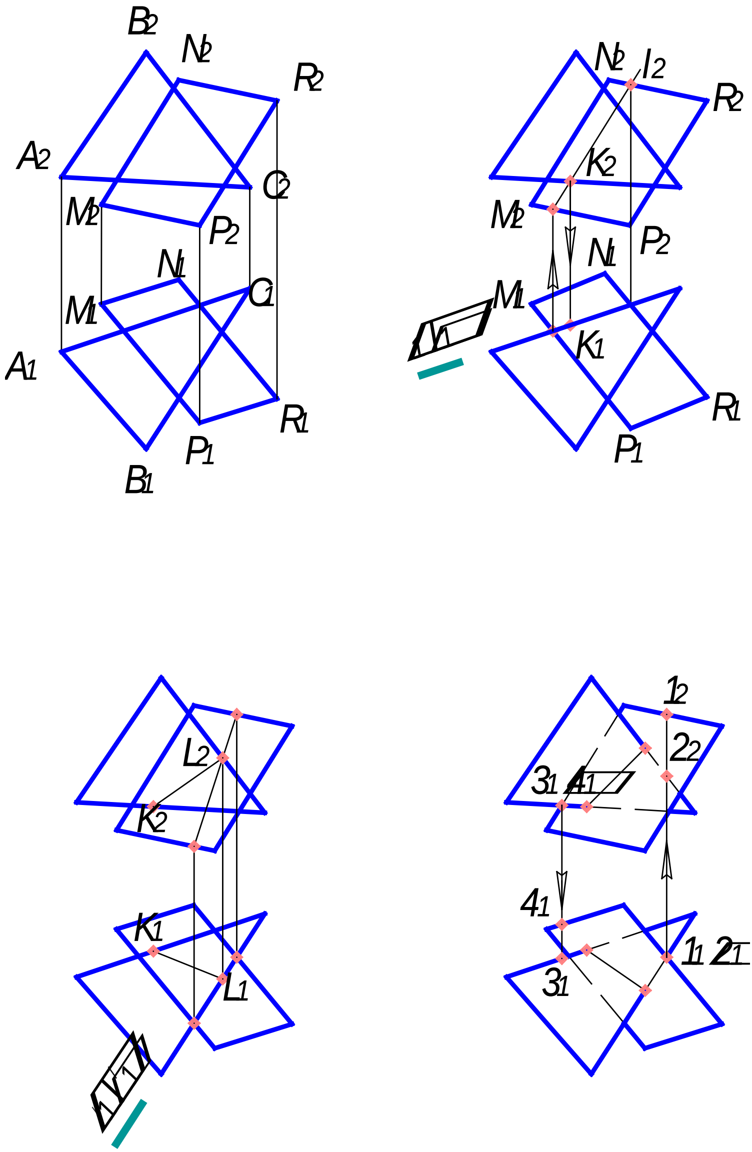


Рис. 2. 20

2.7. Перпендикуляр к плоскости

Частным случаем прямой, пересекающейся с плоскостью, □вляяется перпендикуляр к плоскости.

Перпендикуляр к плоскости перпендикулярен к любой прямой, проведенной в этой плоскости. Но чтобы при этом проекция перпендикуляра к плоскости общего положения оказалась перпендикулярной к одноименной проекции какой – либо прямой этой плоскости, прямая должна быть горизонталью или фронталью. Поэтому, желая построить перпендикуляр к плоскости, следует взять в общем случае две такие прямые горизонталь и фронталь (Рис. 2.21). Эта перпендикулярность сохраняется для горизонтали в горизонтальной проекции, и для фронтали – во фронтальной проекции.

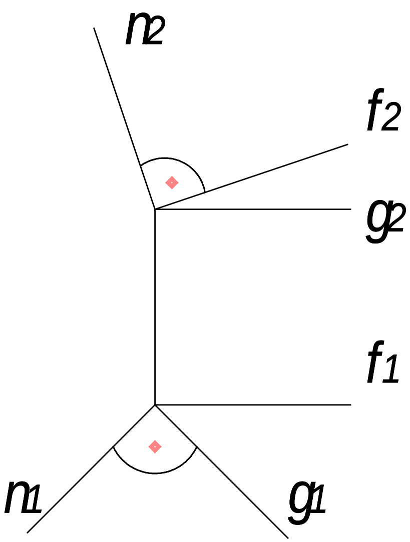


Рис.2.21

2.8. Способы преобразования плоскости

Способы преобразования плоскости также как и способы преобразования прямой используют для того, чтобы решить конкретную задачу, т.к. не всегда положение плоскости удобно для решения. Например, если на эпюре изображена плоскость общего положения, то без преобразований нельзя сказать, под каким углом наклонена эта плоскость к плоскости проекций. Между тем, если бы эта плоскость была проецирующей, то наклон ее вырожденной проекции к оси давал бы величину интересующего нас угла. Если заданные проекции неудовлетворительны в каком – либо отношении, например, не дают ясного представления о форме оригинала или затрудняют решение какой – либо частной задачи, прибегают к преобразованию проекционного чертежа.

2.8.1. Способ замены плоскостей проекций

Используя способ замены плоскостей проекций возможно решить следующие задачи: 1) преобразовать плоскость общего положения в проецирующую; 2) преобразовать плоскость проецирующую в плоскость уровня.

В последующем можно определить угол наклона плоскости к плоскостям проекций, расстояние от точки до плоскости, определить натуральную величину плоской фигуры.

Для решения первой задачи на рис.2.22 проводим ось x в системе плоскостей проекций $П_2 / П_1$, затем решаем вопрос о проведении новой оси $x^/$. Если провести в данной плоскости линию уровня, например, горизонталь, то, заменяя плоскость проекций $П_2$ на плоскость $П_2{}^/$, перпендикулярную к этой горизонтали, а значит, перпендикулярную и к незаменяемой плоскости проекций $П_1$, получим горизонталь и данную плоскость треугольника проецирующими относительно плоскости $П_2{}^/$.

Этапы выполнения этой замены: 1) на комплексном чертеже проводим ось x; 2) в плоскости общего положения проводим горизонталь (или фронталь); 3) перпендикулярно горизонтальной проекции горизонтали (или перпендикулярно фронтальной проекции фронтали) проводим новую ось. Далее проводим линии проекционной связи перпендикулярно новой оси и откладываем на этих линиях высоты точек, которые замеряем на старой (меняемой) фронтальной плоскости.

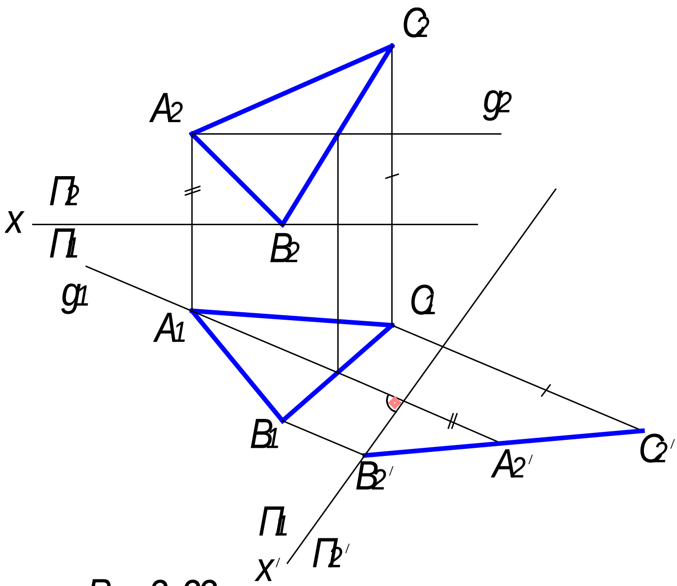


Рис. 2. 22

Используя проекции горизонтали, можно преобразовать плоскость общего положения во фронтально – проецирующую и определить угол наклона плоскости к горизонтальной плоскости проекций (Рис. 2.23).

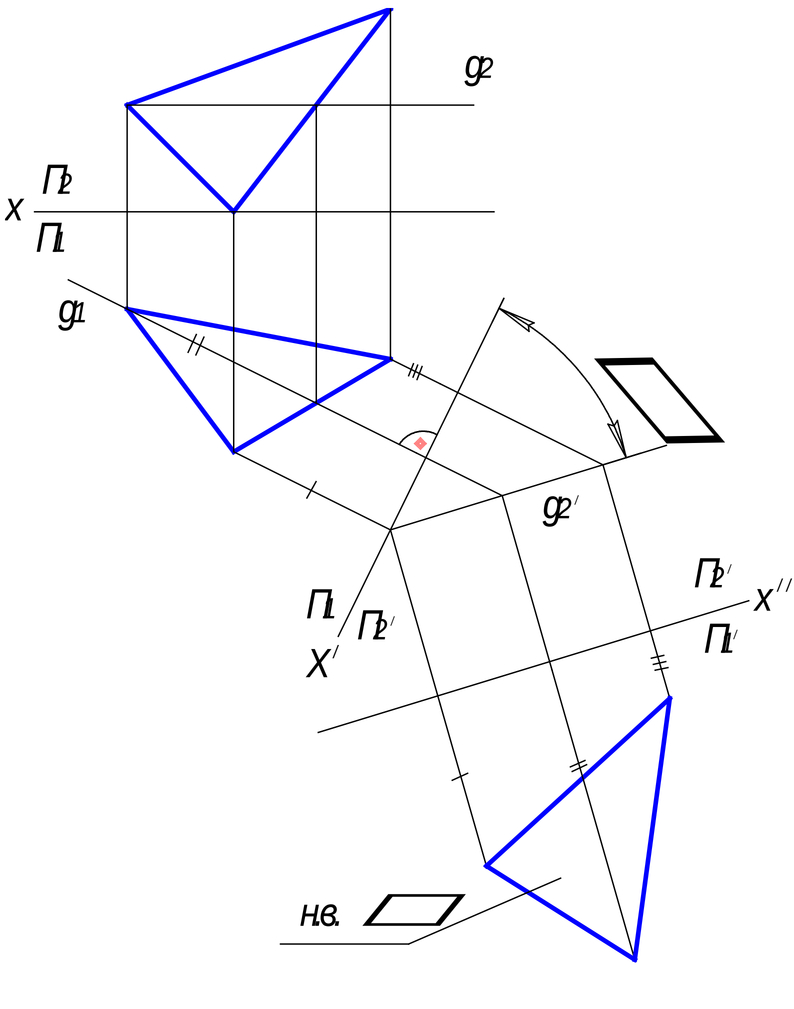


Рис.2.23

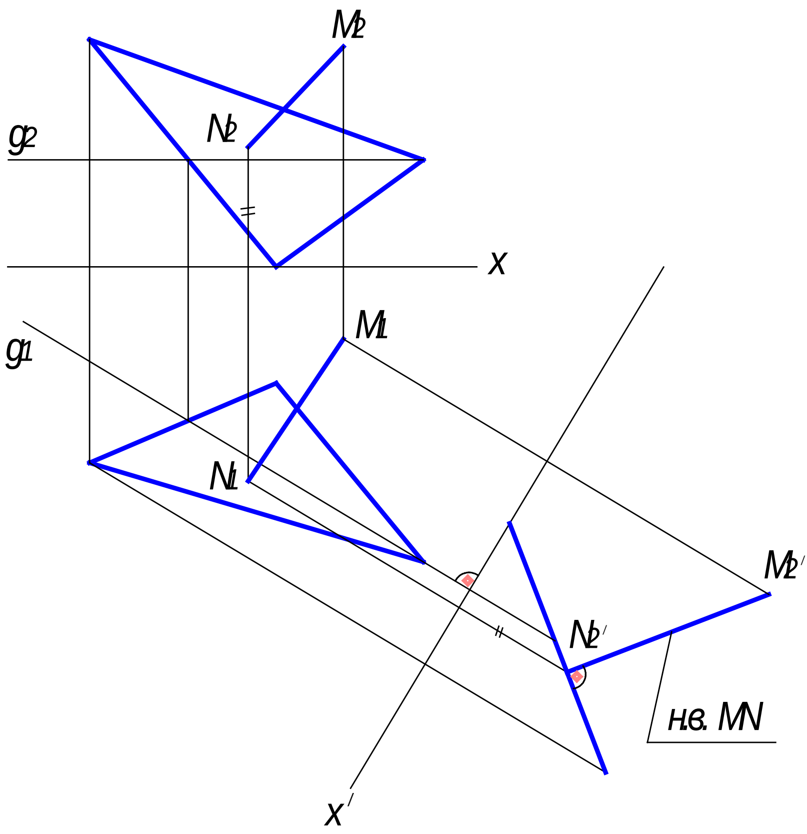


Рис. 2.24

Построение фронтали плоскости общего положения приведет к преобразованию плоскости общего положения в горизонтально – проецирующую и определения угла наклона заданной плоскости к фронтальной плоскости проекций .

Выполнив такие преобразования, возможно определить расстояние от точки до плоскости. Для этого операцию замены плоскостей проекций выполняем не только по отношению к плоскости, но и в отношении точки (Рис.2.24). Выполнив замену, опускаем перпендикуляр на вырожденную проекцию плоскости. В старой системе плоскостей проекций это расстояние будет отрезком уровня, т. Е. параллельно оси x. Чтобы построить проекцию отрезка на фронтальной плоскости, следует замерить высоту точки в новой системе плоскостей проекций и отложить это расстояние в старой системе плоскостей проекций.

Решение задач второго типа начинается опять таки с выбора расположения новой оси. Которую следует провести параллельно вырожденной проекции плоскости, т.к. в новой системе плоскостей проекций плоскость должна быть плоскостью уровня. После выбора оси, выполняются построения, аналогичные уже описанным построениям .

Довольно часто задача по преобразованию плоскости решается комплексно, т.е. выполняется двойная замена _ плоскость общего положения преобразуется в плоскость проецирующую, а затем в плоскость уровня (Рис. 2.25).

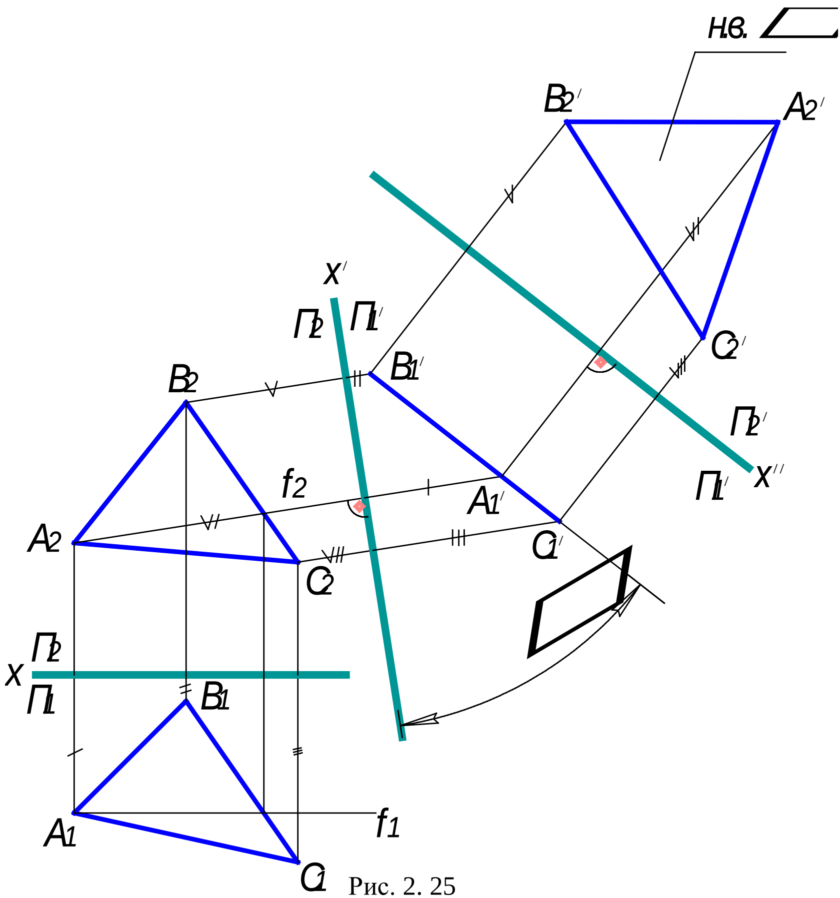


Рис. 2. 25

2.8.2. Способ вращения

Способ вращения по своей идее противоположен способу замены плоскостей проекций, т.е. плоскости проекций и направление проецирования при этом способе оставляют неизменными, положение же проецируемой фигуры изменяют посредством поворота ее вокруг некоторой оси.

Рассматриваем только один вариант способа вращения вокруг осей, перпендикулярных горизонтальной или фронтальной плоскости проекций. Так как основными элементами всякой фигуры являются точки, то вращение плоской фигуры сводится к вращению точек, составляющих эту фигуру.

При вращении точки вокруг оси, перпендикулярной фронтальной плоскости проекций, фронтальная проекция точки перемещается по окружности с центром на оси вращения, а горизонтальная – по прямой, перпендикулярной к оси вращения, т.е. параллельной оси x.

При вращении точки вокруг оси, перпендикулярной горизонтальной плоскости проекций, горизонтальная проекция точки перемещается по окружности с центром на оси вращения, а фронтальная – по прямой, перпендикулярной оси вращения (Рис. 2. 26).

Таким образом, расстояние между горизонтальными проекциями точек при их вращении на один и тот же угол вокруг горизонтально проецирующей прямой остается неизменным. Очевидно, что при вращении вокруг фронтально проецирующей прямой остается неизменным расстояние между фронтальными проекциями точек.

Повернем плоскость общего положения до положения фронтально проецирующей плоскости. Для этого ее нужно повернуть вокруг горизонтально проецирующей оси так, чтобы горизонталь плоскости стала фронтально проецирующей прямой. Так как при этом горизонтальная проекция горизонтали займе положение, параллельное линиям связи, то отсюда определяется угол поворота. Если теперь повернуть на этот угол вокруг оси I, проходящей через точку B, точки A и C, то новые положения этих точек совместно с неподвижной точкой B определят новое фронтально проецирующее положение данной плоскости. Фронтальные проекции точек плоскости в их новых положениях расположатся на одной прямой, которая и будет фронтальной проекцией плоскости.

Угол между проекцией плоскости и прямой, перпендикулярной линиям связи, дает угол наклона данной плоскости к горизонтальной плоскости проекций. Для поворота плоскости до горизонтально проецирующего положения нужно за ось вращения принять фронтально проецирующую прямую, проведенную через какую – либо точку плоскости. При этом поворот надо выполнить так, чтобы фронталь плоскости стала горизонтально – проецирующей прямой.

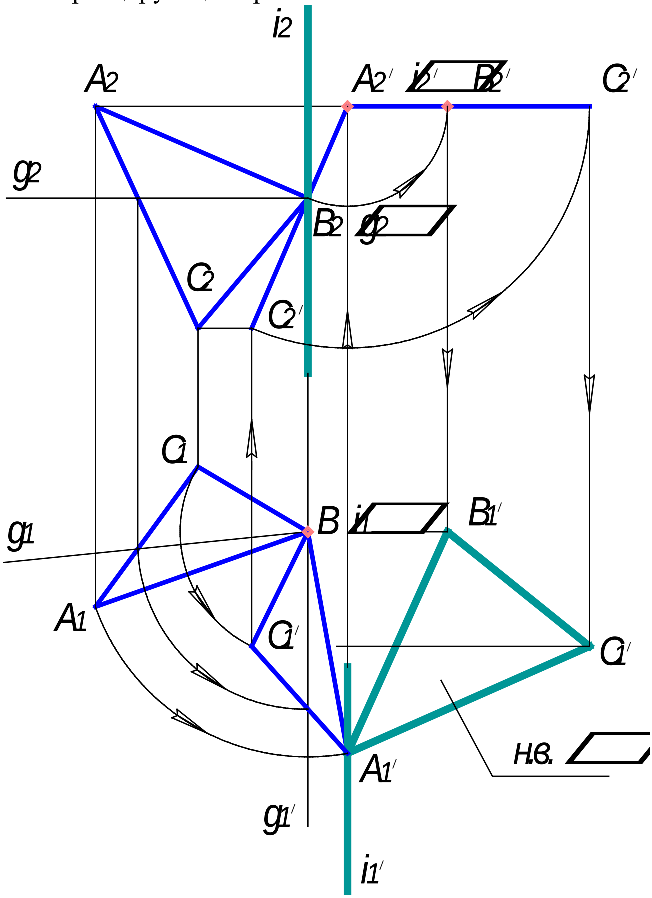


Рис. 2.26

2.9 Вопросы для самопроверки

1. Какими элементами задается плоскость на чертеже?
2. Какая плоскость называется плоскостью общего положения, каковы её проекции?
3. Как называются плоскости, перпендикулярные к одной из плоскостей проекций? Каковы их проекции?
4. Как называются плоскости, параллельные плоскостям проекций? Каковы их проекции?
5. Сколько плоскостей и каких можно провести через прямую общего положения, через проецирующую прямую, через прямую уровня?
6. Что такое горизонталь, плоскости, фронталь плоскости? Что называется линией ската плоскости?
7. Что является признаком фронтально-проецирующей, горизонтально-проецирующей, профильно-проецирующей плоскостей7
8. Как на чертеже определить принадлежность точки плоскости?
9. Как две плоскости могут взаимно располагаться?
10. Каково условие параллельности двух плоскостей в пространстве?
11. Сформулируйте условие принадлежности прямой линии плоскости.
12. Каков общий прием нахождения точки пересечения прямой линии с плоскостью?
13. Как построить на эпюре точку встречи прямой с плоскостью общего положения и с проецирующей плоскостью?
14. Если прямая перпендикулярна проецирующей плоскости, то какой прямой по отношению к плоскостям проекций она является?
15. Как на эпюре найти расстояние от точки до проецирующей плоскости?
16. Сформулируйте условие перпендикулярности прямой линии плоскости.
17. С помощью каких линий можно выполнить преобразование плоскости общего положения в проецирующую плоскость в способе замены плоскостей проекций?
18. Суть способа вращения плоскости.

ГЛАВА 3. ПОВЕРХНОСТИ

3.1. Образование поверхностей. Задание их на эпюре Монжа

1. Аналитический способ задания поверхностей

Поверхности можно рассматривать как геометрическое место точек или линий; координаты точек этого геометрического места удовлетворяют некоторому заданному уравнению вида F(x,y,z)=0.

Алгебраической поверхностью n – порядка называют поверхность, уравнение которой - алгебраическое уравнение степени n. Плоскость, как известно, выражается уравнением первой степени. Ее называют поверхностью первой порядка. Любая произвольная плоскость пересекает поверхность n –го порядка по кривой того же порядка. Аналитический способ задания поверхности находит широкое применение в практике, особенно если требуется исследовать свойства поверхности.

2. Задание поверхности каркасом.

Поверхности, к которым нельзя применить математические закономерности, обычно задают достаточно плотной сетью линий, принадлежащих этим поверхностям. Совокупность таких линий называют *дискретной (*состоящей из отдельных элементов) *сетью,* или *дискретным каркасом* поверхности.

На рис. 3.1 показана модель каркаса поверхности, заданного двумя семействами линий. Модель представлена продольными и поперечными *стрингерами (*плоский криволинейный брус), имеющими пазы для их соединения при сборке. Обтягивая собранный каркас каким – либо листовым материалом, получим соответствующую этому каркасу поверхность.

Такой способ задания поверхности находит применение при изготовлении кузовов автомобилей, в самолето- и судостроении и т.п.

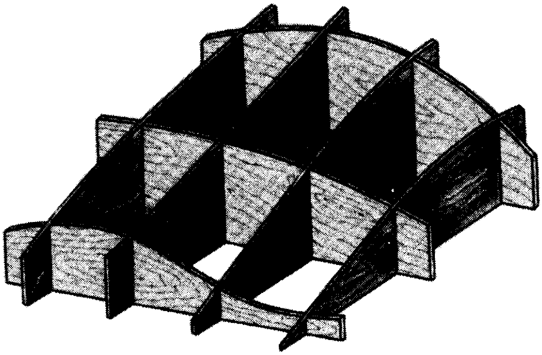


Рис.3.1

3. Кинематический способ задания поверхностей.

В начертательной геометрии поверхности можно рассматривать как *кинематические,* т.е. образованные непрерывным перемещением в пространстве какой-либо линии. Эти линии называют *образующими*.

Образующая кинематической поверхности перемещается в пространстве по определенному закону. Она может в процессе движения сохранять свою форму (вид) поверхности. Закон перемещения в пространстве образующей удобно задавать неподвижными кривыми, которые называют *направляющими* кинематической поверхности.

На любой кинематической поверхности можно выделить два семейства кривых линий: семейство образующих и семейство направляющих. Из этого семейства линий можно составить каркас кинематической поверхности.

Совокупность основных параметров поверхности, которые определяют ее задание, называют *определителем поверхности.* Например, определителем конуса вращения могут быть ось (i) и образующая (l) или вершина (S) и направляющая (m) (рис. 3.2)

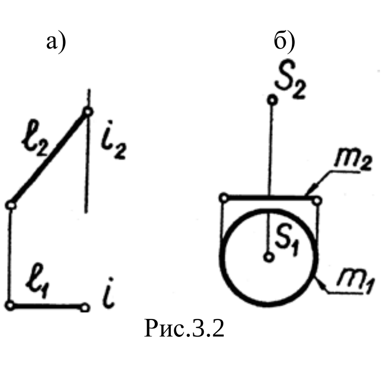


Рис.3.2

Определителем цилиндра вращения может быть ось и образующая (прямая или кривая) или ось и направляющая (окружность). Окружность может быть и направляющей линией цилиндра и его образующей.

Задание поверхности на чертеже проекциями ее определителя не дает наглядности изображения. Для большей наглядности изображения поверхности чаще всего используют очерки поверхности.

Очерком данной поверхности называют линию пересечения с плоскостью проекций проецирующей поверхности (цилиндрической), обертывающей данную поверхность.

Обертывающая проецирующая цилиндрическая поверхность касается данной поверхности по кривой линии, которую называют *контурной* линией. Очевидно, *очерк поверхности является проекцией контурной линии.*

Контурная линия отделяет видимую от невидимой для наблюдателя части геометрического тела.

Проекции контурных линий поверхности (очерки) называют также *границами видимости* на соответствующую плоскость проекций, так как они отделяют видимую часть поверхности невидимой на определенной плоскости проекций.

Различают: *горизонтальный, фронтальный* и *профильный* очерки поверхности; каждый их них задает поверхность на горизонтальной, фронтальной и профильной плоскости проекций соответственно.

Контур 1 или *горизонтальный контур* (рис. 3.3) – это граница видимости при проецировании поверхности на плоскость $\Pi_{1.}$ на горизонтальной проекции часть поверхности, находящаяся выше этой линии (точка A), будет видимой, а часть поверхности – ниже этой линии (точка G), будет невидимой. При проецировании на фронтальную плоскость границей видимости будет линия *фронтального контура* или контур 2. часть поверхности, находящаяся перед этой линией (точка C), будет видимой, а часть поверхности, находящаяся за этой линией (точка F), – невидимой.

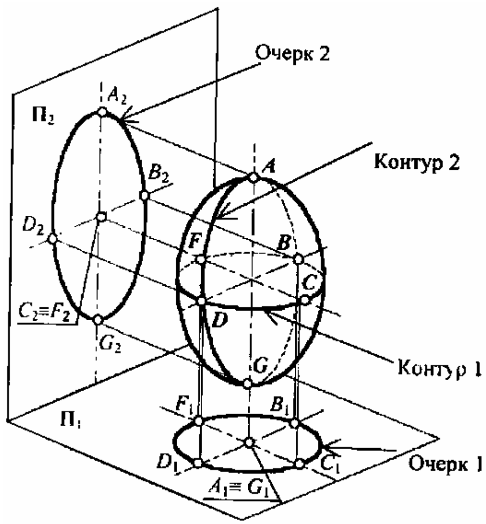


Рис. 3.3

Границей видимости на $П_3$ на чертеже будет проекция линии *профильного контура*, т.е. профильный очерк.

3.2. Поверхности вращения

Поверхность вращения образуется вращательным перемещением образующей линии вокруг неподвижной оси. При изучении таких поверхностей обычно за ось вращения принимается вертикальная прямая.

Каждая точка образующей при своем перемещении (вращении) образует окружность, которую называют *параллелью* поверхности вращения. Плоскости параллелей перпендикулярны к оси поверхности.

Таким образом, параллели без искажения (в виде окружности) проецируются на плоскость, перпендикулярную к оси поверхности.

Наибольшую из параллелей (окружностей) поверхности вращения называют *экватором* поверхности, а наименьшую – *горлом (шейкой)* поверхности.

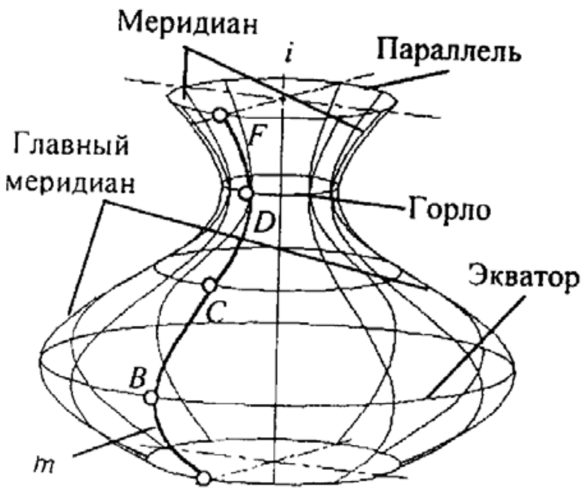


Рис.3.4

Плоскости, проходящие через ось поверхности вращения, называют *меридиональными, а линии,* по которым они пересекают поверхность – *меридианами* (рис. 3.4*)*.

Плоскость, проходящая через ось параллельно фронтальной плоскости проекций, называется плоскостью главного фронтального меридиана, а линия, полученная в сечении, - главным фронтальным меридианом. Аналогично, определяется главный профильный меридиан.

Каркас поверхности вращения можно представить параллелями и мери-

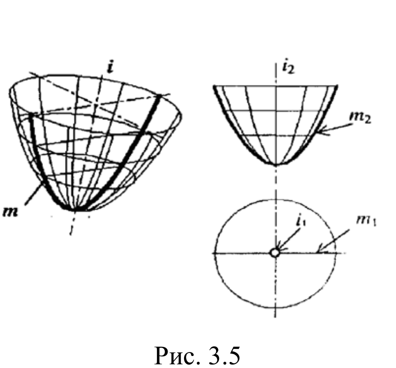


Рис. 3.5

дианами поверхности, а также сетью, состоящей из параллелей и меридианов.

Приведем несколько примеров поверхностей вращения.

Параболоид вращения – каркас образуется при вращении параболы (m) вокруг своей оси симметрии (i) (рис. 3.5).

Гиперболоид вращения - различают однополостной (рис. 3.6 а) и двуполостной (рис.3.6 б) гиперболоиды вращения. Каркас первого получается при вращении вокруг мнимой оси (i), а второго – вращением гиперболы вокруг действительной оси (i).

а) б)

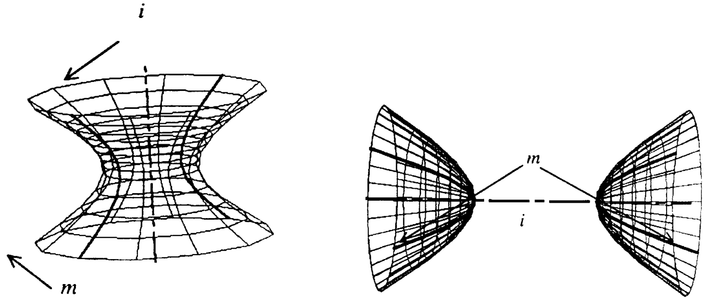


Рис. 3.6

Винтовая поверхность - это поверхность, каркас которой образован винтовым движением некоторой линии.

Если при своем движении образующая пересекает ось винтового движения, то поверхность называется *закрытой,* в противном случае – *открытой.* Если образующая – прямая линия, то винтовая поверхность называется *геликоидом.* Геликоид называют *прямым,* если образующая перпендикулярна оси винтовой линии, в противном случае – н*аклонным* или *косым.*

Рассмотрим простейшую винтовую поверхность (рис.3.7) – прямой закрытый геликоид.

Линейчатая поверхность – это поверхность, каркас которой образован движением прямой линии по заданному

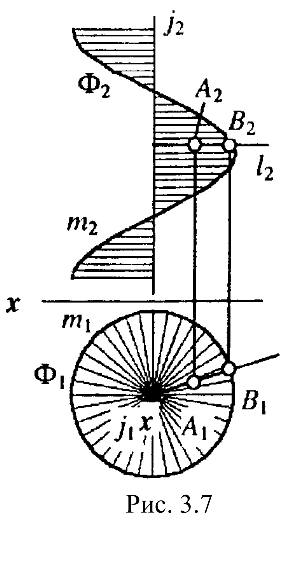


Рис. 3.7

закону. Примером таких поверхностей являются *цилиндрические* и *конические поверхности.*

Каркас *конической* поверхности общего вида образуется движением прямой (образующей), проходящей через фиксированную точку S (вершину) и пересекающей направляющую кривую a (рис. 3.8).

Коническая поверхность с несобственной вершиной (удаленной в бесконечность) называется *цилиндрической* (рис.3.9). Ее образующие пересекают направляющую a и параллельны направлению проецирования (s).

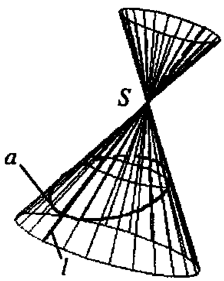


Рис. 3.8

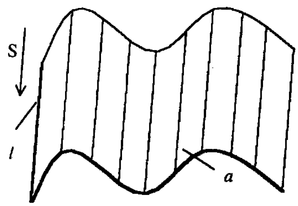


Рис.3.9

3.3. Принадлежность точки поверхности

Точка принадлежит поверхности, если она принадлежит линии этой поверхности. Чаще всего этой линией является параллель поверхности или меридиан ее.

Чтобы построить недостающую проекцию точки на поверхности надо:

построить проекцию параллели через заданную проекцию точки;

построить недостающие проекции этой параллели;

найти путем проецирования недостающие проекции заданной точки (по условию принадлежности).

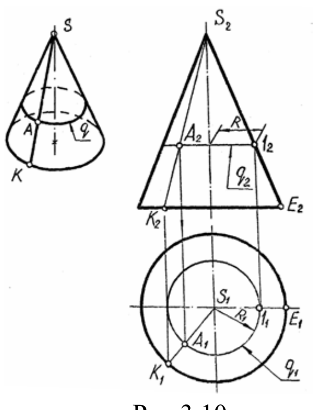


Рис.3.10

Рассмотрим примеры:

1) построение точек на конусе (рис.3.10);

2) построение точек на цилиндре (рис. 3.11);

3) построение линии на сфере (рис. 3.12).

По данной фронтальной проекции A_2 точки A построить горизонтальную проекцию A_1 (рис.3.10).

Условимся в этой и последующих задачах считать видимой точку на той плоскости проекций, где она задана. В данном случае точка A видна на $П_2$, то есть лежит на передней части конуса. Точка A_1 может быть построена с помощью параллели q или образующей SK.

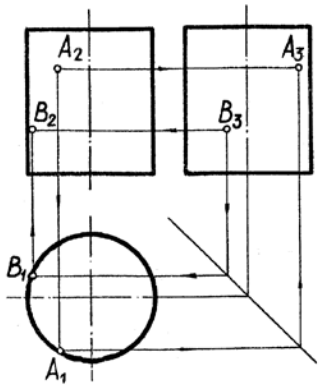


Рис.3.11

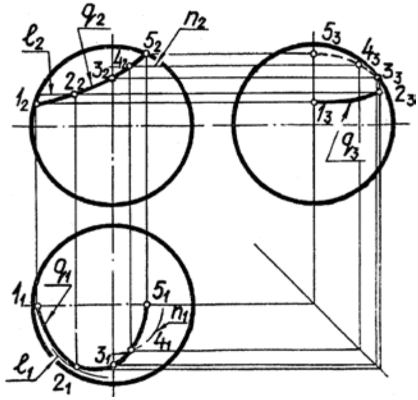


Рис.3.12

Поверхность изображенного цилиндра (рис. 3.11) является проецирующей по отношению к $П_1$. В данном случае горизонтальный очерк цилиндра является и горизонтальной проекцией его. Все точки, линии поверхности цилиндра проецируются на одну из плоскостей проекций на вырожденную проекцию цилиндра – на окружность. В данном случае точки A_1 и B_1 находятся на $П_1$ на окружности; проекции точек на $П_3$ находятся по закономерностям эпюра без вспомогательных построений.

Построение линии на поверхности сводится к построению ряда точек и последующему соединению их с учетом видимости. Рассмотрим задачу на примере сферы (рис. 3.12)

Линия q задана на поверхности сферы своей фронтальной проекцией.

Отмечаем ряд точек:

а) 1,3,5 – характерные, лежат на меридианах сферы;

б) 2,4 – промежуточные (рядовые).

Точки 1,3,5 на Π_1 и Π_3 строим без вспомогательных линий по принадлежности к соответствующим меридианам. Точки 2 и 4 построены при помощи параллелей l и n.

3.4. Пересечение поверхностей второго порядка плоскостью

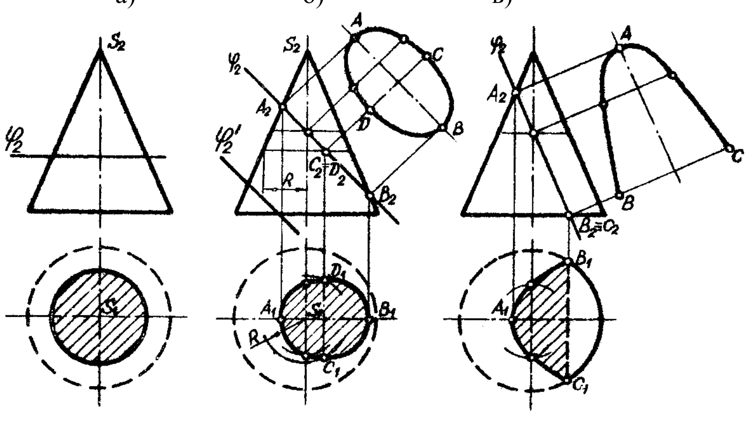
При пересечении кривой поверхности плоскостью в сечении получается плоская кривая, точки которой являются общими для данной поверхности и секущей плоскости. Чтобы построить эту линию на чертеже, находят проекции отдельных точек и, соединяя одноименные проекции точек плавными кривыми (по лекалу), получают проекции искомой линии.

В зависимости от положения плоскости по отношению к плоскостям проекций порой сложно бывает определить линию пересечения ее с поверхностью. Наиболее простым представляется случай, когда плоскость проецирующая. Рассмотрим решение задачи по определению линии пересечения поверхностей вращения проецирующими плоскостями и плоскостями уровня.

3.4.1. Сечения конуса плоскостью.

В зависимости от положения секущей плоскости линиями сечения поверхности прямого кругового конуса могут быть (рис.3.13): окружность (а), эллипс (б), парабола (в), гипербола (г), две прямые (д).

а) б) в)



г) д)

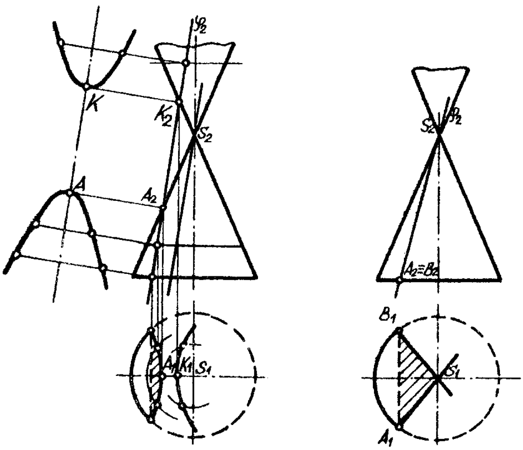


Рис.3.13

Если секущая плоскость перпендикулярна оси конуса, то сечением является *окружность* – рис. 3.13 *а*.

Если секущая плоскость пересекает все образующие конуса, то в сечении получится *эллипс* – рис. 3.13 *б*.

Если плоскость φ параллельна одной образующей поверхности конуса, то линией пересечения является *парабола* – рис. 3.13 *в.*

Если плоскость φ параллельна двум образующим конусам (в частном случае параллельна оси), то линией сечения является *гипербола* – рис. 3.13 *г*.

В случае прохождения плоскости через вершину поверхности конуса линией сечения являются сами образующие, т.е. *две пересекающиеся прямые* – рис. 3.13 *д*.

3.4.2. Сечения цилиндра плоскостью

В зависимости от положения секущей плоскости линиями сечения поверхности прямого кругового цилиндра могут быть (рис. 3.14): эллипс, окружность, две прямые.

Если секущая плоскость ω перпендикулярна оси вращения цилиндра, в сечении – *окружность* (рис. 3.14 а).

Если секущая плоскость ψ параллельна оси вращения цилиндра, в сечении – *две прямые* (или *прямоугольник*) (рис. 3.13 г).

Если секущая плоскость φ пересекает все образующие цилиндра, в сечении – *эллипс* (или *неполный эллипс*) (рис.3.14 б, в).

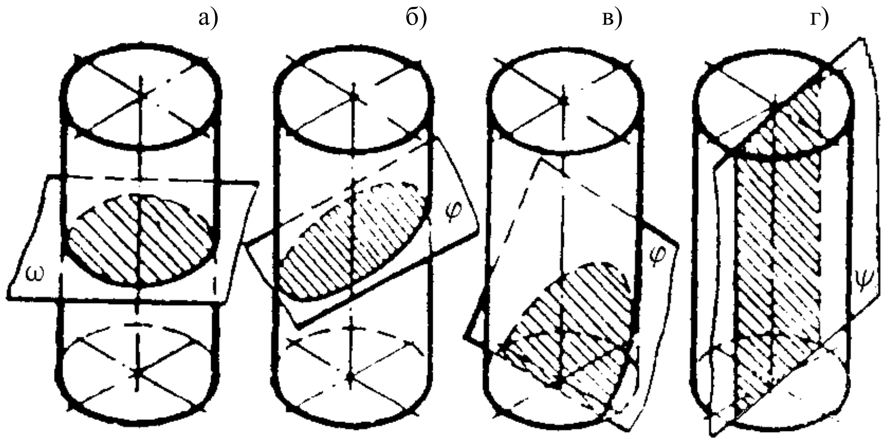


Рис. 3.14

3.4.3. Сечения сферы плоскостью

В сечении сферы плоскостью любого положения, всегда - *окружность*, которая проецируется (на чертеже) в виде отрезка прямой, эллипса или окружности (рис. 3.15).

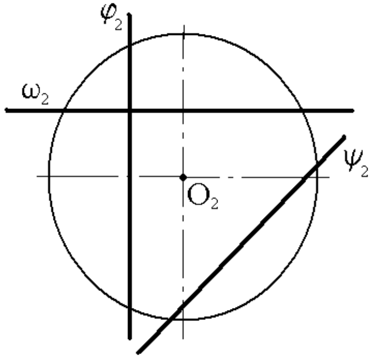


Рис.3.15

3.4.4. Алгоритм решения задач по теме: «Сечение поверхности плоскостью» или «Тело с вырезом»

1.Выясняем, сколько плоскостей и какого положения образуют вырез.

2. Устанавливаем характер линии сечения, получаемого от каждой плоскости выреза и вид фигуры, в которую оно проецируется на две другие плоскости проекций.

3. Отмечаем точки на линии выреза:

а) характерные – точки, лежащие на контурных линиях поверхности;

б) крайние точки выреза (в пересечении плоскостей выреза);

в) промежуточные точки из соображения необходимой плотности точек на искомом контуре сечения.

4. Достраивают две другие проекции отмеченных точек из условия принадлежности их поверхности, используя параллели и меридианы ее.

5. Соединяем точки в той же последовательности, что и на плоскостях выреза, с учетом видимости контуров выреза и очерков тел.

Задача 1.Построить три проекции *шара* с вырезом (рис. 3.16)

1.Вырез образован тремя плоскостями: φ – горизонтальная, ψ и ω - обе фронтально-проецирующие.

2.Поскольку в любом сечении сферы плоскостью может быть только окружность, то определяем, что окружность, лежащая в плоскости φ, будет проецироваться на $П_1$ в виде дуги окружности без искажения, на $П_3$ - в виде отрезка прямой; окружности, лежащие в плоскостях ψ и ω, проецируются на $П_1$ и $П_3$ в эллипсы.

3.Отмечаем точки:

а) характерные:1, 9 – точки фронтального очерка; 2, 7 – точки горизонтального очерка; 5 – точки профильного очерка. Их строим по условию принадлежности к линиям.

б) крайние точки:4, 8 – в пересечении плоскостей выреза. Их строим с помощью проведенных параллелей через искомые точки (на чертеже указан буквой R радиус параллели для точки 8). Точки 3 и 6 взяты как концы больших осей эллипсов, точки О – центры эллипсов. Точки строим с помощью параллелей.

г) промежуточные точки: 10 – они позволяют точнее построить дуги эллипсов между точками 1 и 2 на $П_1$ и $П_3$.

4.Достраиваем недостающие проекции отмеченных точек.

5.Соединяем точки и устанавливаем видимость.

Контур выреза на $П_1$ из видимого, расположенного выше экватора шара, переходит в невидимый в точках 2 и 7. Части горизонтального очерка шара (экватора) между точками 2 и 7 принадлежат вырезанной части шара и показаны тонкой линией.

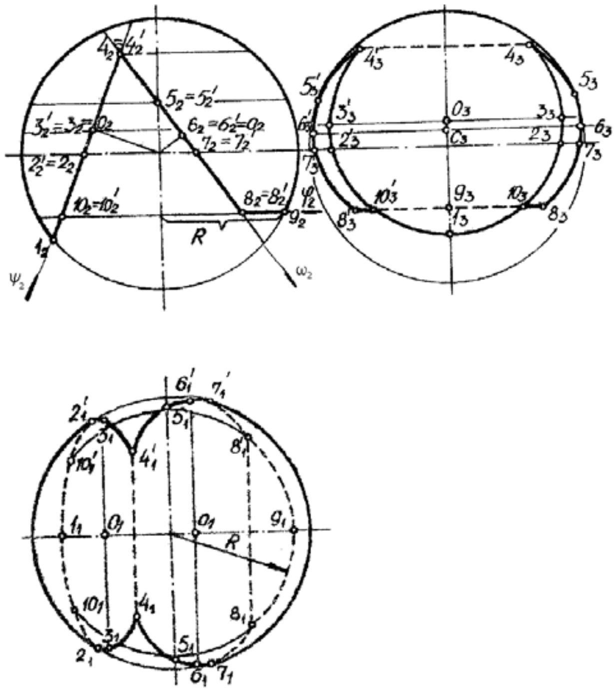


Рис.3.16

Очерк шара на $П_3$ сохранился лишь выше точек 5. Остальная его часть (см. $П_2$ ниже точек 5) попала в область выреза. Участок контура выреза 5,6,7,8 за профильным меридианом для наблюдателя, смотрящего в направлении $П_3$, виден, т. к. любая точка этого контура расположена ближе к профильному меридиану (на чертеже к профильному очерку), чем соответствующая ей точка на той же параллели, но на контуре 1,10,2,3,4. Участок линии между точками 10 на $П_3$ закрыт частью шара, ограниченного окружностью, проходящей через точку 1 и проецирующейся на $П_3$ в эллипс.

Задача 2. Построить три проекции *цилиндра* с вырезом (рис. 3.17).

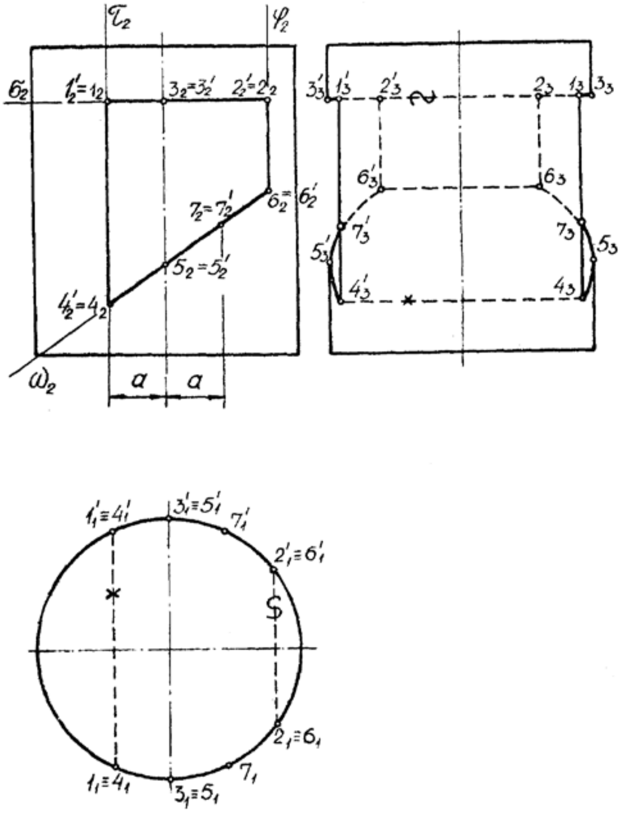


Рис.3.17

1.Вырез образован четырьмя плоскостями: τ и φ - профильные, σ - горизонтальная, ω - фронтально-проецирующая.

2.Устанавливаем, что в плоскостях τ и φ - получатся прямоугольники (или пары прямых – образующих); в плоскости σ - будет окружность, в сечении плоскости ω - будет эллипс.

3. Отмечаем точки:

а) характерные: 3,5 – точки на профильном очерке цилиндра.

б) крайние точки: 1,2,6,4 – точки в пересечении плоскостей выреза.

в) промежуточные точки: 7.

4. Достраиваем недостающие проекции отмеченных точек.

Так как все точки искомых сечений на $П_1$ совпадают с окружностью цилиндра – вырожденной его проекцией, то задача сводится к построению профильных проекций этих точек по двум заданным.

5. Соединяем точки и устанавливаем видимость. В данном случае это относится лишь к $П_3$.

Очерк цилиндра сохранился выше точек 3 и ниже точек 5.Участок линий 3-2-6-7-5 будет невидимым, поскольку он находится за границей видимости (за профильными образующими и за линией выреза 1-4. Участок 5-7 – будет видимым.

<u>*Задача 3*</u>. Построить три проекции *конуса* с вырезом (рис. 3.18)

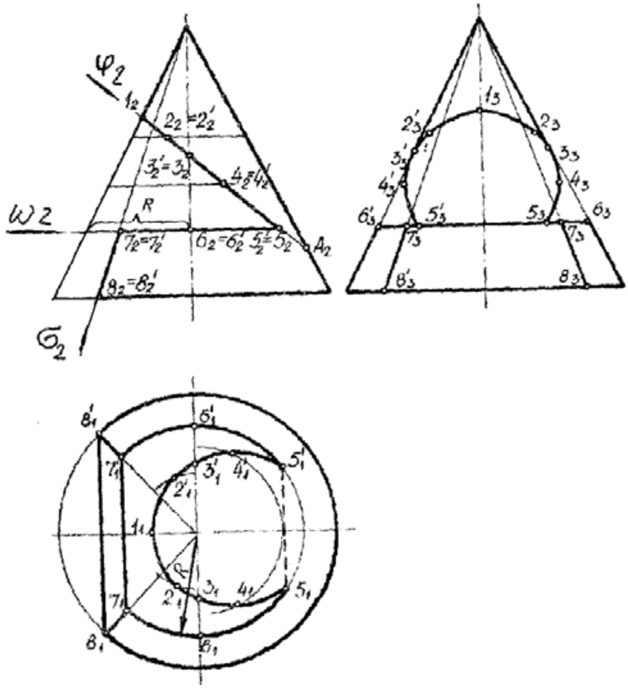


Рис. 3.18

1. Вырез выполнен тремя плоскостями: φ и σ -фронтально-проецирующими, ω - горизонтальной.
2. Устанавливаем, что в сечении плоскости φ - треугольник или две образующие, проекции представляют собой отрезки. В сечении плоскости ω -окружность, проецирующаяся на $П_1$ без искажения, а на $П_3$ – в горизонтальные отрезки. В сечении

плоскостью σ - эллипс (неполный), проекции которого на $П_1$ и $П_3$ также эллипсы.

3. Отмечаем точки:

а) характерные: 1 – точка фронтального очерка; 3,6 – точки профильного очерка; 8 – точки горизонтального очерка.

б) крайние точки: 5,7 – точки пересечения плоскостей выреза; 4 – концы малой оси эллипса.

в) промежуточные точки: 2 – для более точного построения линии эллипса.

4. Достраиваем недостающие проекции отмеченных точек с помощью параллелей (точки 2,4) и меридианов (точки 7). Характерные точки строим по принадлежности к очерковым линиям (без дополнительных построений).

5. Соединяем полученные точки и устанавливаем видимость.

На $П_1$: соединяем точки, учитывая, что они все видны. Очерк (экватор) конуса слева от точек 8 срезан (показываем тонкой линией).

На $П_3$:хотя участок контура выреза 3-4-5-6 лежит за профильным меридианом, он виден, так как вырез обращен к наблюдателю, смотрящему в направлении $П_3$. Участки очерковых образующих между точками 3 и 6 отсутствуют, так как принадлежат вырезанной части конуса.

3.5. Многогранники

Несколько плоскостей, пересекаясь между собой по прямым линиям, образуют поверхность, называемую *многогранной.* Если же плоскости при этом замыкают пространство со всех сторон, то они образуют *многогранник.*

Будем рассматривать только выпуклые многогранники, т.е. такие, которые можно расположить по одну сторону от плоскости любой его грани.

При вычерчивании многогранника часто вызывает затруднение определение видимости его ребер. Следует руководствоваться следующими правилами:

1). Внешний контур проекций многогранника является всегда видимым.

2). Из двух пересекающихся внутри контура ребер одно всегда видимое, другое – невидимое. Видимость таких ребер определяется при помощи конкурирующих точек.

3). Из любой вершины, находящейся внутри контура, выходят или три видимых, или три невидимых ребра.

Например (рис. 3.19):

1). Ребра внешнего контура всегда видны.

2). На $П_2$ из двух ребер BC и SA ребро BC видимо, так как оно лежит перед ребром SA (см. конкурирующие точки 1 и 2).

На $П_1$ видимость скрещивающихся ребер AD и SB определена с помощью конкурирующих точек 3 и 4.

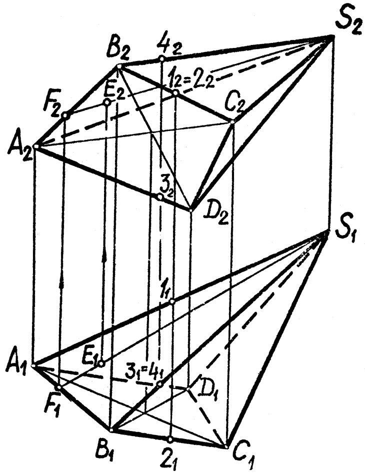


Рис.3.19

Пересечение многогранника плоскостью

При пересечении какой – либо поверхности плоскостью получается некоторого вида плоская фигура, называемая *сечением*.

Сечением многогранника является многоугольник (рис. 3.20).

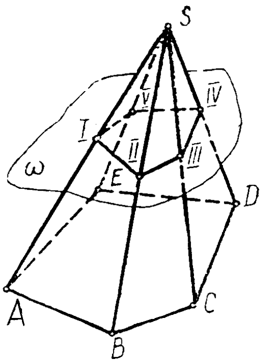


Рис.3.20

Существует два способа построения сечения многогранника:

а) отыскиваются вершины многоугольника сечения – способ ребер; при этом находятся точки встречи ребер многогранника с заданной секущей плоскостью;

б) отыскиваются стороны многоугольника сечения – способ граней; в этом случае находятся линии пересечения граней многогранника с секущей плоскостью.

3.6. Развертка поверхности

Разверткой поверхности называется совмещенная с плоскостью чертежа поверхность тела. На развертке: 1) изображены в истинную величину все линии и углы между ними; 2) не должно быть разрывов и складок; 3) каждой точке или прямой на поверхности должна соответствовать вполне определенная точка или прямая на развертке.

3.6.1. Развертка многогранной поверхности.

Развертка многогранной поверхности представляет собой плоскую фигуру, которая составлена из граней поверхности, совмещенных с одной плоскостью путем последовательного вращения около ребер. При этом все грани на развертке изображаются в натуральную величину. Последовательность в расположении граней на развертке может быть различна, но ее нужно стараться делать такой, чтобы оптимальнее использовать площадь листа, на котором вычерчивается развертка. На рис.3.21 показано построение развертки наклонной пирамиды SABC. Развертка данной пирамиды представляет четыре треугольника, примыкающих друг к другу (три боковые грани и основание). На чертеже только плоскость основания ABC имеется в натуральную величину ($A_1B_1C_1$). Для построения натуральных величин боковых граней следует найти натуральные величины боковых ребер. Они найдены методом вращения вокруг оси i, проходящей через вершину S и перпендикулярную $П_1$: $SA = S_2A_2^I$ $SB = S_2B_2^I$ $SC = S_2C_2^I$.

Теперь строим развертку пирамиды. Грань SAB строится по трем сторонам: SA, SB, AB. К грани SAB пристраиваем грани SDC и SCA, а затем основание ABC.

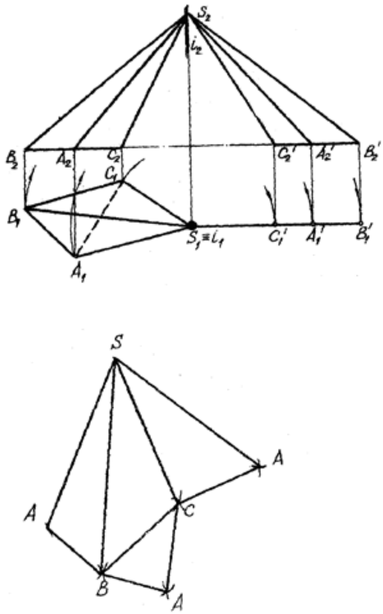


Рис.3.21

3.6.2. Развертка поверхностей вращения.

а). Боковая поверхность *цилиндра* в развёрнутом виде представляет собой прямоугольник, одна сторона которого равна длине окружности основания цилиндра, а другая – длине образующей цилиндра (или высоте) цилиндра (рис. 3. 22).

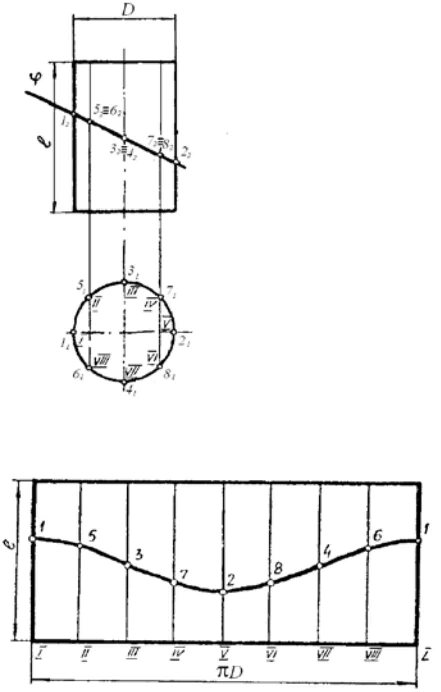


Рис. 3.22

Развертку боковой поверхности построим приближенно, для чего разделим окружность основания на n равных частей. Затем вычертим прямоугольник, у которого высота равна высоте цилиндра l, а длина равна отрезку прямой, на которую следует отложить отмеченные равные части на окружности основания.

Пусть n=8, тогда окружность основания цилиндра делим на 8 равных частей. На произвольной прямой отложить 8 отрезков, равных хорде $^1/_8$ длины окружности основания цилиндра.

б). Развертка боковой поверхности *прямого кругового конуса* представляет собой сектор круга, радиус которого равен образующей конуса, а длина дуги равна длине окружности основания конуса (рис 3.23).

Развертку боковой поверхности конуса можно построить приближенно. Для этого окружность основания конуса делят на произвольное число равных частей. В данном случае окружность разделена на 12 частей. Проводят дугу окружности радиуса равного натуральной длине образующей и на ней 12 раз откладывают сторону правильного двенадцатиугольника.

Через данную точку А на поверхности конуса проводим образующую SK параллель m. Построим их на развертке. Образующая SK строится из равенства: $5К = 5_1К_1$. Параллель m развернется в дугу окружности радиуса R. В пересечении SK и m определяем точку А.

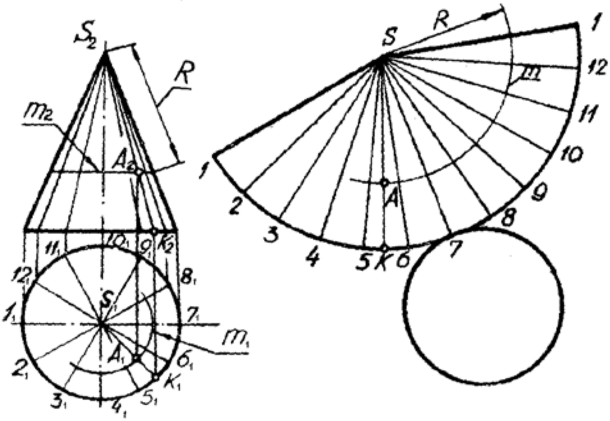


Рис.3.23

3.7. Пересечение поверхностей вращения

Технические формы (детали) представляют собой в общем случае сочетание различных поверхностей: вращения и многогранных. Границами этих поверхностей являются линии пересечения.

При взаимном пересечении различают случаи:

а) проницание (рис. 3.24 а) – две линии пересечения, m и l;

б) врезка (рис. 3.24 б) – одна линия пересечения t.

а) б)

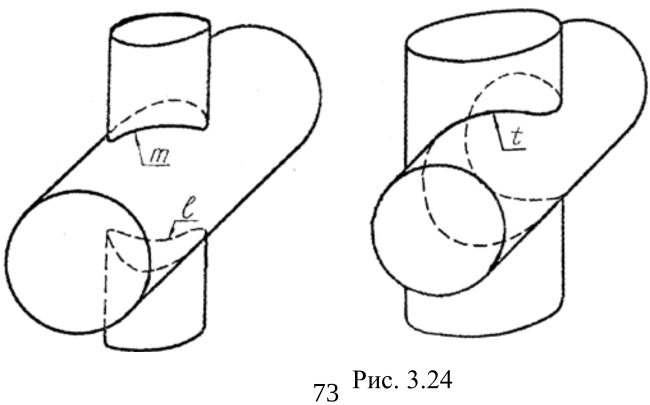


Рис. 3.24

Проекции линии пересечения всегда лежит в пределах наложения очерков поверхностей.

Линию пересечения строят по совокупности точек, общих для данных поверхностей способом вспомогательных секущих плоскостей - посредников.

Суть способа вспомогательных секущих плоскостей заключается в следующем:

а) рассекают обе поверхности Ф (конус) и Σ (шар) плоскостью-посредником ω (рис. 3.25) такой, чтобы обе поверхности рассекались по графически простым линиям: окружностям или прямым. Плоскость чаще всего является плоскостью уровня;

б) строят линии l и m пересечения плоскости ω с каждой поверхностью: l = ω Ф; m = ω Σ

в) отмечают точки A и B пересечения линии l и m - общие точки двух поверхностей, принадлежащие искомой линии пересечения;

г) выполняют это построение несколько раз и точки соединяют плавной кривой с учетом видимости.

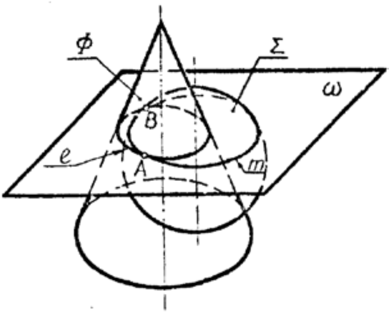


Рис.3.25

3.7.1.Алгоритм решения задач по теме: «Пересечение поверхностей»

1. Выясняем, какие поверхности пересекаются:

а) если в пересечении поверхностей одна из поверхностей прямой круговой цилиндр, поверхность которого является проецирующей (имеет вырожденную проекцию в виде линии – окружности), то на чертеже будет одна *готовая проекция* линии пересечения, которая совпадает с вырожденной проекцией цилиндра – с окружностью. Две другие проекции линии пересечения строятся по точкам, принадлежащим другой поверхности (используется условие принадлежности точки поверхности);

б) если цилиндра нет, то задача будет решена с помощью способа вспомогательных плоскостей.

2. Строим точки линии пересечения выбранным способом.

3. Показываем видимость существующих очерков поверхностей и видимость линии пересечения поверхностей с учетом пересекающихся поверхностей.

4. При выполнении контрольных заданий, как правило, записываются характерные точки линии пересечения (точки на очерках, точки границы видимости линии на соответствующую плоскость проекций и крайние точки).

Задача. Построить три проекции линии пересечения *конуса и шара* (рис 3.26).

1. В результате рассмотрения условия задачи: в пересечении нет прямого кругового цилиндра, следовательно, линию пересечения будем строить способом вспомогательных секущих плоскостей.
2. Строим точки линии пересечения.

Шар пересекается любой плоскостью уровня по окружности, не искажающейся на $П_1$,$П_2$,$П_3$. Конус же – лишь горизонтальными плоскостями. Их и выбираем в качестве посредников.

В первую очередь отмечаем характерные точки 1 и 2.

Точки 1 и 2 – лежат в пересечении фронтальных очерков тел. Фронтальные меридианы этих поверхностей лежат в общей плоскости $\tau(\tau_1)//П_2$. Профильные меридианы тел не пересекаются, так как лежат в параллельных плоскостях $\sigma(\sigma_2)$ и $\delta(\delta_2)$. Основание конуса в пересечении с шаром не участвует, то есть у контуров тел на $П_1$ также нет общих точек.

Проводим сначала вспомогательную горизонтальную плоскость $\varphi(\varphi_2)$, которая рассекает шар по экватору, а конус по произвольной параллели, получаем точки 3 и 4.

Точки 5,6,7,8 найдены с помощью плоскости $\sigma(\sigma_2)$; она пересекает конус по профильному очерку, а шар по параллели радиуса $R^{///}$, в их пересечении получены точки сначала на $П_3$, а затем на $П_1$ и $П_2$.

Точки 9,10 получены с помощью плоскости $\omega(\omega_2)$, которая рассекла конус по параллели радиуса $R^{/}$, а шар – по параллели радиуса $R^{//}$; эти параллели, пересекаясь на плоскости $П_1$, получили точки: сначала 9_1,10_1, а затем 9_2,10_2 (по линиям проекционной связи подняты в плоскость $\omega(\omega_2)$).

Точки 13 и 14 на профильном очерке шара отмечены после того, как кривая на $П_2$ определилась по ранее построенным точкам.

Построенные точки последовательно соединяем в линии.

3.Показываем видимость.

При определении видимости участков линии пересечения исходят их следующих положений:

а) видимость определяется раздельно для каждой проекции;

б) участок искомой линии пересечения виден на проекции, если лежит на видимых частях обоих тел;

в) в точках границы видимости меняет свою видимость не только искомая кривая, но и очерк того тела, которому они принадлежат.

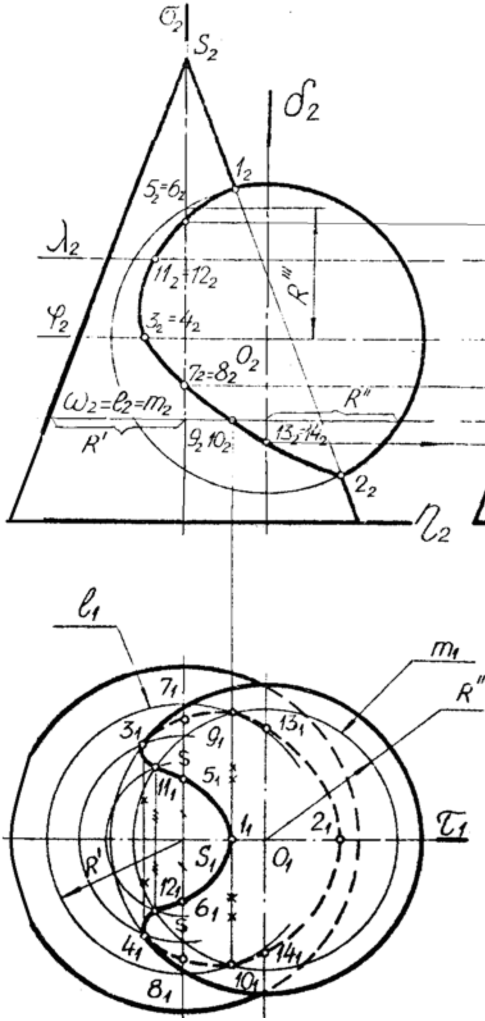


Рис.3.26

Характерные точки:
1,2- точки пересечения фронтальных очерков конуса и шара

3,4- точки на горизонтальном очерке шара, граница видимости на $П_1$

5,6,7,8- точки на профильном очерке конуса, граница видимости на $П_3$

13,14-точки на профильном очерке шара

Условимся считать: два пересекающихся тела за монолит, тогда на чертеже контур одного тела внутри другого, как несуществующий, следует показывать тонкими сплошными линиями.

На $П_1$ очерк шара левее точек 3 и 4 не существует (поглощен конусом).

На $П_2$ между точками 1 и 2 не существуют очерки конуса и шара (левая часть).

На $П_3$ между точками 5,7 и 6,8 исчезает очерк конуса, а между точками 13 и 14 (снизу) – очерк шара.

Видимость линии пересечения на $П_1$: меняется в точках горизонтального очерка шара 3и4; участок линии 1-5-11-3 и 1-6-12-4 – видимый, остальная часть – невидимая, так как располагается ниже экватора шара (экватор шара – горизонтальный очерк шара - расположен выше экватора конуса – основание его: по условию задачи).

Видимость линии пересечения на $П_2$: вся линия видимая, так как линия симметрична плоскости $\tau(\tau_1)$.

Видимость линии пересечения на $П_3$: меняется в точках профильного очерка конуса 5,6 и 7,8; участки линии 5-11-3-7 и 6-12-4-8 – видимые, остальные части – невидимые, так как находится правее профильного очерка конуса (профильный очерк конуса левее, чем профильный меридиан шара: по условию задачи).

Задача. Построить три проекции линии пересечения двух тел (рис. 3.27), *одно из которых прямой круговой цилиндр*.

В пересечении участвуют цилиндр и восьмая часть шара (из всех поверхностей вращения только шар имеет три криволинейных очерка одного и того же радиуса).

Горизонтальная проекция искомой линии совпадает с вырожденной проекцией цилиндра. Отметим на ней характерные точки 1,10,5,4,7 и рядовые 2,3,6,8,9.

Количество рядовых точек выбираем из соображения достаточной плотности их на кривой.

Фронтальные и профильные проекции отмеченных точек найдены из условия принадлежности точек поверхности шара с помощью параллелей, поведенных через эти точки.

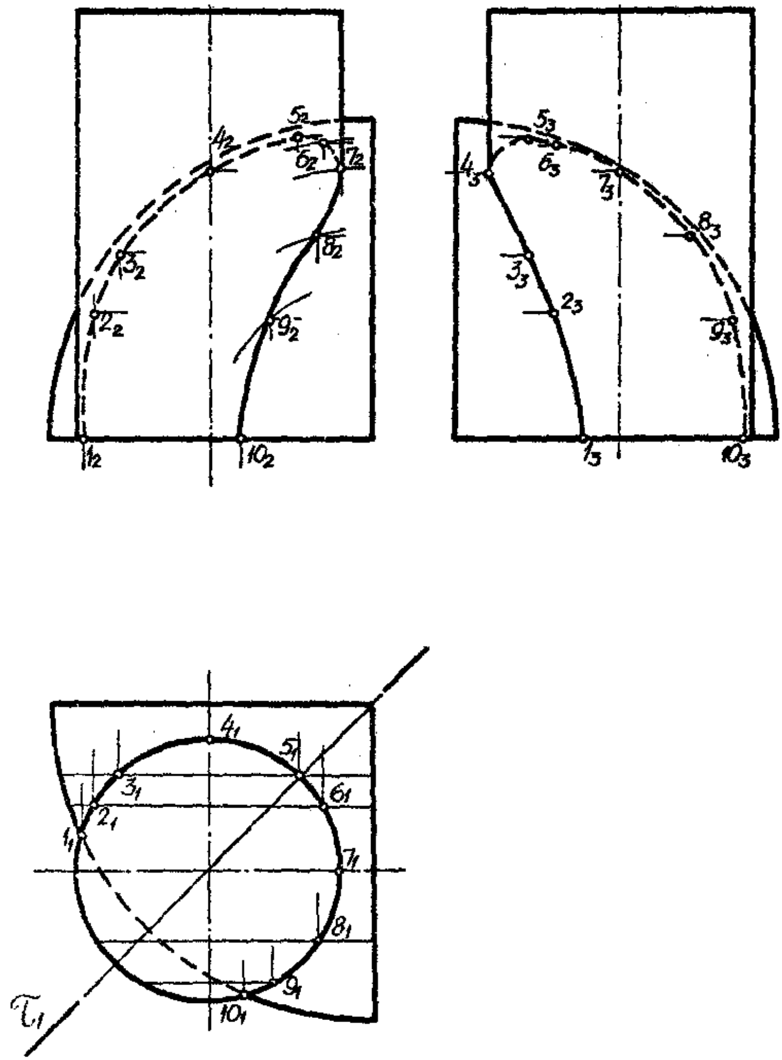


Рис. 3.27

Характерные точки:

1,10 –точки горизонтального очерка сферы

4 - точки профильного очерка цилиндра, граница видимости на Π_3

7 - точки на фронтальном очерке цилиндра, граница видимости на Π_2

3.8. Частные случаи пересечения поверхностей вращения

3.8.1. Пересечение соосных поверхностей вращения.

Если оси поверхностей вращения совпадают, то есть поверхности соосные, то линиями их пересечения могут быть только окружности.

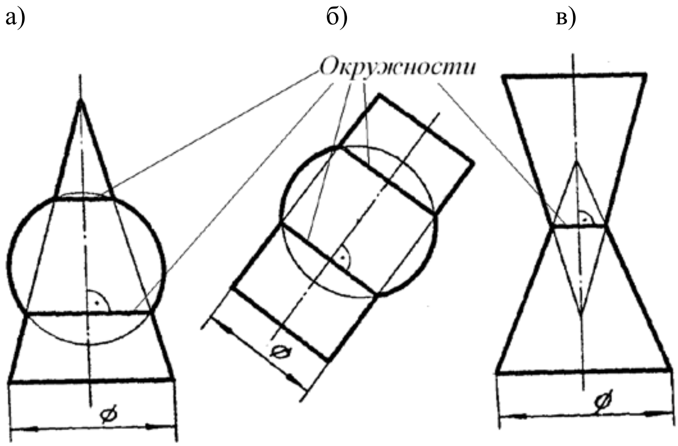


Рис.3.28

На рис.3.28 пересечение конуса и цилиндра со сферой – а) и б), а в случае в) – пересечение двух конусов. Во всех случаях оси пересекающихся поверхностей совпадают, это пары *соосных* поверхностей, пересечение которых проходит по *окружностям*.

3.8.2. Пересечение поверхностей вращения по теореме Монжа

В общем случае две поверхности второго порядка (поверхности, определяемые алгебраическим уравнением второй степени: все тела вращения) пересекаются по пространственной кривой четвертого порядка (порядок кривой пересечения равен произведению порядков пересекающихся поверхностей). Но в некоторых случаях поверхности второго порядка могут пересекаться по плоским кривым, то есть может иметь место распадение пространственной кривой пересечения на две плоские кривые.

Укажем только на часто встречаемый в практике случай, который описывается теоремой Монжа: «*Если две поверхности второго порядка могут быть вписаны в третью поверхность второго порядка (или описаны вокруг неё), то линия их взаимного пересечения распадается на две плоские кривые*» и теоремой о двойном касании: «*Две поверхности второго порядка, имеющие в двух общих точках общие касательные плоскости, пересекаются между собой по двум кривым линиям второго порядка, плоскости которых проходят через прямую, соединяющую точки касания*».

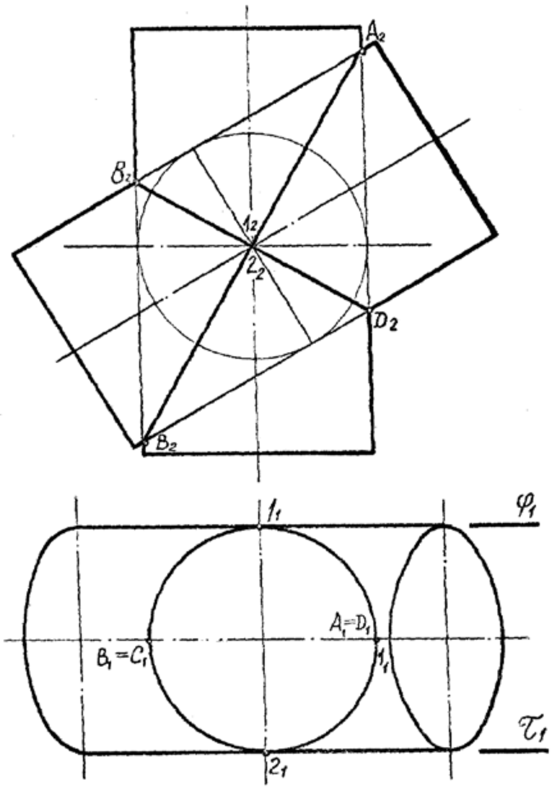


Рис.3.29

На рис. 3.29 два цилиндра одинакового диаметра. Оба цилиндра описаны вокруг третьей поверхности – сферы.

В точках 1и2 пересекаются попарно очерковые образующие тел, через которые можно провести две касательные плоскости φ и τ. Поэтому имеем две плоские кривые, проходящие через точки А, В, С, D (в пересечении очерков тел) и точки касания 1 и 2. Это два эллипса с большими осями АВ и СD и малой осью, равной диаметру цилиндров.

На Π_1 оба эллипса совпадают с окружностью цилиндра.

Точки типа 1и 2 называют *точками двойного касания.*

3.9. Пересечение многогранной поверхности с поверхностью вращения

Поверхность многогранника, пересекаясь с кривой поверхностью, образует в общем случае пространственную кривую линию.

Каждое звено этой *ломаной кривой* линии получается пересечением одной из граней многогранника (плоскости) с кривой поверхностью. Концевые точки звеньев образуются пересечением ребер (прямых линий) многогранника с кривой поверхностью. Эти точки являются опорными и определяются в первую очередь.

<u>Задача.</u> Построить линию пересечения поверхности прямой призмы и конуса вращения (рис. 3.30).

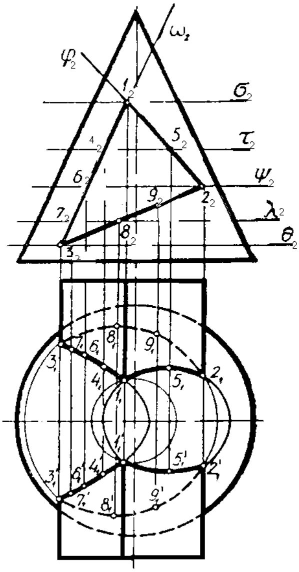


Рис.3.30

Из чертежа видно, что боковая поверхность призмы состоит из трех фронтально-проецирующих плоскостей и полностью пересекается с поверхностью конуса. Призма проницает конус и в результате пересечения их поверхностей получаются две замкнутые ломаные линии. Фронтальные проекции обеих кривых пересечения сливаются (совпадают) с фронтальной проекцией призмы. Следовательно, задача сводится к построению горизонтальных проекций точек линии пересечения заданных тел.

В первую очередь, при помощи горизонтальных плоскостей $\sigma(\sigma_2)$, $\psi(\psi_2)$ и $\theta(\theta_2)$ определяем точки пересечения боковых ребер призмы с поверхностью конуса (точки 1,2,3).

Затем, применив вспомогательные плоскости τ и λ, находим промежуточные точки в плоскостях граней призмы (5 – 9). Через горизонтальные проекции найденных точек проводим (с учетом видимости) горизонтальные проекции обеих кривых линий пересечения. Точки 3,7,6,4,1 – образуют часть параболы (сечение конуса плоскостью φ). Точки 1,5,2 – принадлежат части эллипса (сечение конуса плоскостью ω). Точки 3,8, 9,2 – дают в сечении также часть эллипса. Точки 1,2,3 – можно рассматривать как точки пересечения плоских кривых сечений, расположенных в каждой грани призмы.

3.10 Вопросы для самопроверки

1. Что такое многогранная поверхность?
2. Как строятся точки и линии на поверхностях многогранников?
3. Что такое кривые поверхности?
4. Как образуется поверхность, называемая кинематической?
5. Что такое «образующая» поверхности, «направляющая» поверхности?
6. Что такое поверхность вращения? Как она образуется?
7. Дайте определение следующим понятиям: параллели меридианы, экватор, горло?
8. Что такое линия видимого контура?
9. Что такое очерк поверхности?
10. Как строится точка на комплексном чертеже поверхности?
11. Как строится линия на комплексном чертеже поверхности и как определяется видимость линии?
12. Какая фигура получится в сечении многогранника плоскостью?
13. Что такое линия пересечения поверхности вращения плоскостью?
14. Какие линии могут получиться при пересечении цилиндра плоскостью?
15. Какие линии могут получиться при пересечении конической поверхности плоскостью?
16. Какие линии могут получиться при пересечении сферы плоскостью?
17. Какими геометрическими образами могут быть линии пересечения сферы плоскостью?
18. Что называется разверткой многогранной поверхности?
19. Что представляет собой развертка поверхности цилиндра вращения?
20. Какой геометрической фигурой является развертка поверхности прямого кругового конуса?
21. Как нанести точку и линию на развертку поверхности?
22. Что представляет собой в общем случае линия пересечения двух поверхностей?

23. В каком случае для построения линии пересечения поверхностей рационально применить вспомогательные секущие плоскости?
24. Что значит характерные точки линии пересечения поверхностей?
25. Одна из заданных поверхностей является проецирующей. Каковы особенности проекции линии пересечения поверхностей?
26. Что такое соосные поверхности?
27. Сформулируйте теорему Монжа.

Содержание

Учебное текстовое электронное издание

Нина Александровна Денисюк
Елена Борисовна Скурихина
Татьяна Владимировна Токарева

ОТДЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ ПО НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ И ИНЖЕНЕРНОЙ ГРАФИКЕ

Учебное пособие

Издается полностью в авторской редакции
1,52 Мб
1 электрон. опт. диск

г. Магнитогорск, 2014 год
ФГБОУ ВПО «МГТУ»
Адрес: 455000, Россия, Челябинская область, г. Магнитогорск,
пр. Ленина 38

ФГБОУ ВПО «Магнитогорский государственный
технический университет им. Г.И. Носова»
Кафедра проектирования и эксплуатации металлургических машин и оборудования
Центр электронных образовательных ресурсов и
дистанционных образовательных технологий
e-mail: ceor_dot@mail.ru