



Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова»

В.В. Дубровский
Ю.А. Извеков
А.А. Родчиков

**МАТЕМАТИКА. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ:
УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС**

*Утверждено Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия*

Магнитогорск
2013

Рецензенты:

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа,
ФГБОУ ВПО «Магнитогорский государственный университет»

Т.К. Плышевская

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики
ФГБОУ ВПО «Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова»

А.С. Файнштейн

Дубровский В.В., Извеков Ю.А., Родчиков А.А.

Математика. Введение в математический анализ: учебно-методический комплекс [Электронный ресурс] : учебное пособие / Владислав Владимирович Дубровский, Юрий Анатольевич Извеков, Родчиков Александр Александрович; ФГБОУ ВПО «Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова». – Электрон. текстовые дан. (0,9 Мб). – Магнитогорск : ФГБОУ ВПО «МГТУ», 2013. – 1 электрон. опт. диск (CD-R). – Систем. требования : IBM PC, любой, более 1 GHz ; 512 Мб RAM ; 10 Мб HDD ; MS Windows XP и выше ; Adobe Reader 8.0 и выше ; CD/DVD-ROM дисковод ; мышь. – Загл. с титул. экрана.

Электронное учебное пособие «Введение в математический анализ» предназначено для студентов технических специальностей очной формы обучения всех профилей, изучающих разделы высшей математики «Дифференциальное исчисление», «Интегральное исчисление».

Данное пособие включает разделы дифференциального и интегрального исчисления, необходимые для дальнейшего освоения студентами основной образовательной программы, как по математике, так и по смежным и специальным дисциплинам (понятие предела, производной, интеграла, дифференциальных уравнений, их основные приложения в физике, геометрии, механике).

Теоретический материал сопровождается примерами решения типовых задач и применения теории при решении практико-ориентированных задач; предлагаются вопросы для самопроверки, задачи для самостоятельной работы студентов, а также набор задач, позволяющих студентам осуществить самопроверку.

УДК 517

- © Дубровский В.В., Извеков Ю.А.,
Родчиков А.А., 2013
- © ФГБОУ ВПО «Магнитогорский
государственный технический
университет им. Г.И. Носова», 2013

Содержание

ВВЕДЕНИЕ	4
1. ПРОГРАММА, ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ДИСЦИПЛИНЫ, СФЕРА ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ИСПОЛЬЗОВАНИЯ.....	5
2. КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ.....	7
3. РУКОВОДСТВО К САМОСТОЯТЕЛЬНОМУ ИЗУЧЕНИЮ ТЕМ КУРСА.....	85
4. ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ ВОПРОСЫ.....	114
5. ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ	118
6. СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ	121

ВВЕДЕНИЕ

Электронный Учебно-методический комплекс дисциплины (ЭУМКД) математика «Введение в математический анализ» содержит:

- программу, цели и задачи курса;
- конспект лекций по основным темам;
- руководство к самостоятельному изучению тем курса;
- задания для контрольных работ;
- экзаменационные вопросы;
- варианты контрольных заданий;
- список используемой литературы.

Программа и содержание курса лекций определено государственным образовательным стандартом 2009 года.

В ЭУМКД представлены основные разделы дисциплины «Математика», необходимые для успешного изучения дисциплины, теории вероятности и математической статистики, а также общетеоретических и специальных дисциплин в области химико-металлургического производства.

Знания, полученные студентами, необходимы для усвоения общетеоретических и специальных дисциплин в области химико-металлургического производства.

Содержание ЭУМКД посвящено двум большим разделам высшей математики – "Дифференциальному исчислению" и "Интегральному исчислению". Приводятся основные сведения из теории пределов, дифференциального исчисления функции одной и нескольких переменных, интегрального исчисления, разбираются подробно методы решения дифференциальных уравнений и их систем.

Настоящее учебное пособие предназначено для студентов первого курса химико-металлургического факультета.

Пособие написано на основе курса лекций, который авторы читают в первом и втором семестре, оно рассчитано как для самостоятельной работы студентов, так и для обучения в аудитории.

Задачи контрольных заданий необходимо выполнить перед сдачей экзамена. Данный электронный учебно-методический комплекс содержит контрольные работы, которые необходимо выполнить, чтобы получить допуск к экзамену. В данном пособии приведены решения типовых задач контрольных работ. Защита контрольных работ осуществляется в письменной форме или в виде собеседования (по решению преподавателя) во время семестра и перед экзаменационной сессией.

1. ПРОГРАММА, ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ДИСЦИПЛИНЫ, СФЕРА ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ИСПОЛЬЗОВАНИЯ

Цель дисциплины состоит в получении студентами прочных теоретических знаний и твердых практических навыков в области математики. Такая подготовка необходима для успешного усвоения многих специальных дисциплин. Внедрение электронных вычислительных машин, персональных компьютеров привело к широкой «математизации» наук. Исследование многих процессов в промышленной технологии, металлургии связано с разработкой соответствующих математических моделей, для успешного овладения которыми будущий специалист должен получить достаточно серьёзную математическую подготовку.

Задачей дисциплины является изучение и усвоение современных математических методов, которые составят основу математических знаний студента и позволят будущему специалисту решать в своей повседневной деятельности актуальные практические задачи, понимать полученные на современном научном уровне результаты других исследований и тем самым совершенствовать свои профессиональные навыки и компетенции.

Данный курс базируется на школьном курсе математики. Он обеспечивает все математические курсы, в частности, такие как «Теория вероятностей», «Математическая статистика», «Физическая химия» и другие.

1.1. Программа «Введение в математический анализ»

Общая трудоемкость дисциплины составляет 9 зачетных единиц - 324 часа.

Таблица 1

Программа дисциплины

Раздел дисциплины	Семестр	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в часах)*					Формы текущего контроля успеваемости (по неделям семестра). Форма промежуточной аттестации (по семестрам)
		лекции	лаборат. занятия	практич. занятия	самост. раб.	и т.д.	
1	2	3	4	5	6	7	8
1. Введение в анализ	1	14		8/4 И (интерактивное занятие)	18		КР**(контрольная работа)
2. Дифференциальное исчисление функции одной переменной	1	20		18/4 И	18		КР**, ТР*(типовой расчет)
1	2	3	4	5	6	7	8
3. Дифференциальное исчисление	1	20		10/4 И	18		КР**, ТР*

функции нескольких переменных							
Итого:		54		36/12 И	54		зачет
4. Интегральное исчисление функции одной переменной	2	10		14/4 И	14		КР**, ТР*
5. Интегральное исчисление функции нескольких переменных	2	8		12/4 И	12		КР**, ТР*
6. Дифференциальны е уравнения и системы	2	12		20/4 И	20		КР**, ТР*
7. Численные методы	2	6		8/4 И	8		ТР*
Итого:		36		54/16 И	54		экзамен
Всего:		90		90/28 И	108		экзамен

2. КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

2.1. Аксиоматика вещественных чисел

2.1.1. Алгебраические свойства вещественных чисел

а. На множестве вещественных чисел определена операция сложения, удовлетворяющая следующим аксиомам:

a.1. $\forall a, b \in R, a + b \in R$

a.2. $a + b = b + a$

a.3. $a + (b + c) = (a + b) + c$

a.4. $\exists 0: \forall a \in R, a + 0 = a$

a.5. $\exists (-a): \forall a \in R, a + (-a) = 0$

б. Операция умножения:

b.1. $\forall a, b \in R, a \cdot b \in R$

b.2. $a \cdot b = b \cdot a$

b.3. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

b.4. $\exists 0: \forall a \in R, a \cdot 0 = 0$

b.5. $\exists \left(\frac{1}{a}\right): \forall a \in R, a \cdot \frac{1}{a} = 1, a \cdot a^{-1} = 1$

с. Дистрибутивность. Распределительный закон.

c.1. $a(c + b) = ac + ab$

Множество, элементы которого удовлетворяют а, б, с – числовое поле.

Примеры: множество вещественных и рациональных чисел.

2.1.2. Отношение порядка

1. На множестве вещественных чисел вводится отношение порядка ($\leq$), т.е. $(a \leq b) \Leftrightarrow (a = b) \cup (a < b)$, которое удовлетворяет следующим аксиомам:

2. $\forall a, b$ выполняется $(a \leq b) \cup (b \geq a)$

$a \leq a$

3. $(a \leq b) \cap (b \leq a) \Leftrightarrow (a = b)$

4. $(a \leq b) \cap (b \leq c) \Rightarrow (a \leq c)$

5. $\forall c \in R, (a \leq b) \Rightarrow a + c \leq b + c$

6. $(a \geq 0) \cap (b \geq 0) \Rightarrow ab \geq 0$

Из этих аксиом следует, что для любого a и $b \in R$, выполняются три случая:

$a < b$

$(a = b)$

$b < a$

7. Множество, на котором вводится отношение порядка, удовлетворяющее аксиомам 1-6, называется линейной упорядоченностью. И множество вещественных чисел, и множество рациональных чисел – линейно упорядоченное поле.

2.1.3. Аксиома непрерывности вещественных чисел

Пусть $(X \subset R) \cap (Y \subset R)$, причем $\forall x \in X$ и $\forall y \in Y: x \leq y$, тогда $\exists c \in R: x \leq c \leq y$

Множеством вещественных чисел называется линейно упорядоченное непрерывное числовое поле.

Замечание: Аксиома непрерывности гарантирует, что каждому вещественному числу соответствует единственный тип числовой прямой и, наоборот, каждой числовой прямой соответствует единственное вещественное число.

Свойство числового множества (следует из свойства упорядоченности).

Множество $X \in R$ - ограничено сверху, если $\exists M \in R: \forall x \in X, x \leq M$.

Число M – верхняя граница множества X .

Любое число $M_1 > M$ - точка верхней границы, т.к. $x \leq M \Rightarrow x \leq M_1$

Итак, верхних границ бесконечно много.

Наименьшая из всех верхних границ – верхняя грань множества X ($\sup X$)

$$(a = \sup X) \Leftrightarrow (\forall x \in X: x \leq a) \cap (\forall \varepsilon > 0 \exists x_1 \in X, x_1 > a - \varepsilon)$$

Множество $X \in R$ - ограничено снизу, если $\exists B \in R: \forall x \in X, x \geq B$.

Число B – нижняя граница множества X .

Любое число $B_1 < B$ - точка нижней границы, т.к. $x \geq B \Rightarrow x \geq B_1$

Наибольшая из всех нижних границ – нижняя грань множества X ($\inf X$).

$$(a = \inf X) \Leftrightarrow (\forall x \in X: x \geq a) \cap (\forall \varepsilon > 0 \exists x_1 \in X, x_1 \leq a + \varepsilon).$$

Множество $X \in R$ называется ограниченным, если оно ограничено и снизу и сверху.

$$X \subset R \exists a, b \in R: \forall x \in X, a \leq x \leq b$$

Теорема: Любое непустое, ограниченное сверху (снизу) множество, имеет верхнюю (нижнюю) грань.

2.1.4. Понятие абсолютной величины вещественного числа

На упорядоченном числовом множестве введем понятие модуля (абсолютной величины) вещественного числа:

$$\left[\begin{array}{l} |a| = a, a \geq 0; \\ \\ \end{array} \right.$$

$$|a| = -a, a < 0$$

Свойства:

1. $\forall x, |x| \geq 0$
2. $\forall x, x \leq |x|$
3. $-|x| \leq x \leq |x|$
4. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
5. $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$
6. $|x + y| \leq |x| + |y|$

$$7. \quad |x - y| \geq ||x| - |y||$$

Решение простейших неравенств с модулем.

Эквивалентность неравенств:

$$1. \quad |x| \leq a \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq a \\ x \geq -a \end{cases} \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$$

$$2. \quad |x| \geq a \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq a \\ x \leq -a \end{cases}$$

геометрический смысл:

$$1. \quad |x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a \Leftrightarrow x \in [-a; a]$$

$$|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a \Leftrightarrow x \in (-a; a)$$

$$2. \quad |x| \geq a \Leftrightarrow x \in (-\infty; -a] \cup [a; +\infty)$$

$$|x| > a \Leftrightarrow x \in (-\infty; -a) \cup (a; +\infty)$$

$$3. \quad |x - x_0| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x - x_0 \leq a \Leftrightarrow x_0 - a \leq x \leq x_0 + a \Leftrightarrow x \in [x_0 - a; x_0 + a]$$

2.1.5. Понятие ε окрестности в точке x_0

ε окрестности в точке x_0 ($U_\varepsilon(x_0)$) – симметричный интервал радиуса ε с центром в точке x_0

$$U_\varepsilon(x_0) = \{x \mid x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon\}.$$

Проколотой ε окрестности в точке x_0 называется ε окрестности этой точки без самой x_0

$$U_\varepsilon^0(x_0) = \{x \mid 0 < |x - x_0| < \varepsilon\}.$$

Множество $X \in \mathbb{R}$ - называется открытым, если для любой точки этого множества найдется такая $U_\varepsilon(x_0)$, которая целиком содержится в этом множестве.

$(X - \text{открыто}) \Leftrightarrow (\forall x \in X, \exists U_\varepsilon(x_0) \subset X)$, точки, обладающие этими свойствами, называются внутренними точками.

(a, b) – открытое множество:

Точка $x \in X$ В любой окружности содержит – граничной точки множества X .

Точки a и b – граничные $[a; b]$ или $(a; b)$. Граничные точки могут и принадлежать, и не принадлежать множеству отрицательных чисел. Множество своих границ не содержит.

Точка x называется предельной точкой X , если любое ε - окружности содержит хотя бы ℓ точек X .

$$(x\text{-предельная для } X) \Leftrightarrow (\forall U_\varepsilon(x) (\exists x, \in x) \lambda (x, \in U_\beta(x)))$$

точки a, b являются предельными как для отрезка, так и для интервала $([a; b]$ и $(a; b))$

$a, b \in \text{отрезку } x$

$a, b \notin X$.

Точка изолирована – если найдётся $U_\varepsilon^0(x)$, которая $\notin X$.

Совокупность предельных и изолированных точек – называется точками соприкосновения множества X .

Множество X замкнутое, если оно содержит все свои точки прикосновения. Замкнутым множеством является сегмент $[a; b]$. Открытость и замкнутость – не альтернативные понятия. Существуют множества, не являющиеся ни открытыми, ни замкнутыми.

Например, $[a; b)$ или $(a; b]$.

Или одновременно открытые и замкнутые ($\emptyset$).

2.1.6. Принципы существования предельной точки (Вейерштрасс)

Всякое ограниченное бесконечное множество определяет хотя бы одну предельную точку. Для неограниченных бесконечных множеств это утверждение неверно. (Множество целых чисел предельных точек не имеет, так как состоит из одних изолированных точек).

Для распространения принципа Вейерштрасса на неограниченное множество вводятся новые объекты: бесконечность, $-\infty, \infty$, которые числами не являются. Вводятся правила действия над ними.

$$+\infty + (+\infty) = +\infty$$

$$\infty \cdot \infty = \infty$$

$$A + \infty = +\infty$$

$$A - \infty = -\infty, A \neq 0$$

Бессмысленно, неопределенно: $(\frac{\infty}{\infty}); (0 \cdot \infty); 1^\infty$;

2.2. Понятие функции

Функция – закон, по которому элементу $x \in X$ ставится $y = f(x)$ в соответствие единственный элемент $y \in Y$.

Область определения функции $D(f) = X$ ($D[f]$).

Область значения функции $E(f) = E[f] \subset Y$, такое, что $\forall y \in E[f] \exists$

$$x \in D[f]: y = f(x).$$

Замечание 1: в определении не требуется, чтобы каждый элемент X имел прообраз в Y .

При этом говорят, что функция $y = f(x)$ отображает множество X во множество Y . Всегда $y = f(x)$ отображает множество X на множество E .

Не требуется, чтобы элементы E имели единственный прообраз во множестве X . $D[f] = X$.

Отображение, осуществляемое функцией $y = f(x)$, называется взаимно однозначным отображением множества X на Y , если каждый элемент Y имеет единственный прообраз множества X . $x \in X \sim y \in Y$.

Две функции равны, если:

$$D(f)_1 = D(f)_2. \text{ Совпадают законы соответствия.}$$

Пример: 1) Равны ли функции $y = \sqrt{x^2}$ и $y = (\sqrt{x})^2$.

Нет, так как: $D[y] = R \neq D[y] = [0; +\infty)$.

$$2) \begin{cases} y = \cos x \\ D[y] = R \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} y = \cos x \\ D[y] = [0; \pi]. \end{cases}$$

Не равны.

Две функции совпадают на множестве X_1 , с вкл. в пересечение областей определения функций $D[f_1] \cap D[f_2]$, если для любой $x \in X_1$, $f_1(x)$ совпадает с $f_2(x)$.

$$D(f_1) \cap D(f_2).$$

Пример: $y = |x+1| + |x-1|$ и $y = ex$ совпадают на множестве $x_1 = [1\frac{1}{3}; +\infty)$

Самостоятельно выписать определения чётных, нечётных, периодических функций; их свойства и свойства симметрии графиков.

2.2.1. Общие свойства функций

1) Ограниченность.

Сводится к ограниченности множества значений.

Функция ограничена, существует $M > 0$ $y = f(x)$, что для $\forall x \in D[f] : |f(x)| < M$.

($y = \frac{1}{x}$ $\forall x \in R : |\frac{1}{x}| < 2$) - огранич.

($y = \frac{1}{x}$ - неогранич.; $\forall M > 0, \left| \frac{1}{x} \right| > M$ при $x < \frac{1}{M} \in D[f]$).

2) Монотонность.

Функция $y = f(x)$ называется возрастающей на промежутке X , если для любого $x_1, x_2 \in$ промежутку; $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$. Убывающей, если $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Замечание: если неравенства нестрогие, то говорят о неубывании в 1 случае и невозрастании (либо неизм., убыв.) во 2 случае.

Невозрастающие и неубывающие функции – монотонные. При строгом неравенстве строго монотонные.

Пример: $y = \frac{1}{x}$; $D[f] = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Докажем, что она убывающая на любом промежутке.

Например: $(0; +\infty)$.

Пусть $x_1 > x_2 \in (0; +\infty)$; $x_2 > 0$. $f_2 - f_1$

$$f(x_1) = \frac{1}{x_1}; \quad f(x_2) = \frac{1}{x_2}.$$

$$\Delta = f(x_1) - f(x_2) = \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2}. \quad |x_2 - x_1 < 0 \Rightarrow \underline{f(x_1) < f(x_2)}.$$

2.2.2. Понятие сложной функции, (композиции функции)

Пусть даны отображения $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$, такие, что пересечения $E[f_1]$ и $D[\varphi_2]$ - непустое множество $\cap E[f] \cap D[\varphi] \neq \emptyset$.

Тогда вводится новое отображение, $D[f]$, которое включает $D(f)$ новой функции $(\gamma\varphi)$ $D[\gamma\varphi] \subset D[f]$ $E[\gamma\varphi] \subset D[\varphi]$ и закон соответствия получается по формуле:

$y = f[\varphi(x)]$ - отображающая сложная функция (композиция).

$$y = \ln x$$

$$y = \cos x$$

Пример: $y = \ln(\cos x)$.

$$\left. \begin{array}{l} E(\cos x) = [-1; 1] \\ D[\ln] = (0; +\infty) \end{array} \right| \Rightarrow \cap \text{ функций } = (0; 1].$$

$$D(\cos x) = R$$

$$D[\ln(\cos x)] = \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; +\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$$

$$\underline{E[\ln(\cos x)] = (-\infty; 0]}$$

$$E(\ln) = R$$

2.2.3. Обратная функция

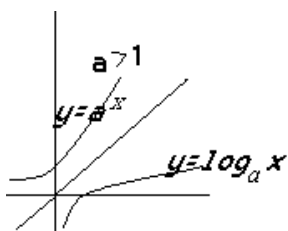
При взаимном и однозначном отображении X на Y с помощью функции $y = f(x)$ эти множества симметричны относительно этого отображения, т.е. наряду с функцией $y = f(x)$ существует обратная функция $x = y^{-1}(y)$ с $L(f) = X$; $E(f) = Y$.

$x = f^{-1}(y)$ называется обратной взаимно и однозначно функции $y = f(x)$, если каждому элементу $y \in Y$ ставят в соотв. $x \in X$ так, что $y = f(x)$.

Замечание: у взаимнообратных функций $D(f)$ и $E(f)$ меняются местами.

Замечание: если для обратных функций сделать замену переменных ($x \in y, y \in x$), чтобы $x = f^{-1}(y) \rightarrow y = f^{-1}(x)$, то графики функций $y = f(x)$ и $y = f^{-1}(x)$ будут симметричны относительно биссектрис 1 и 3 квадратов координатной плоскости.

Пример: $y = a^x$; обратная функция – $x = \log_a y$



$$D(a) = R$$

$$D(\log_a y) = (0; +\infty)$$

$$E(\log) = R$$

$$a > 1$$

Рис. 1

График $y = a^x$;

2.3. Элементы теории пределов

2.3.1. Определение предела в терминах окрестностей

Число A называется пределом $y = f(x)$ при $x \rightarrow a$, и обозначается $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, если для любой ε -окрестности числа A найдется проколота окрестность, такая, что для всех x из этой окрестности значения $y = f(x)$ будут принадлежать ε -окрестности числа A .

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A: \forall U_\varepsilon(A) \exists \overset{0}{U}_\delta(a) (\forall x \in \overset{0}{U}_\delta(a) \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A))$$

Конечный предел функции (A - вещественное число).

$$U_\varepsilon(A) = \{f(x) : |f(x) - A| < \varepsilon\}$$

Число A - конечный предел функции в точке a , если

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A: \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D \left[x \in \overset{0}{U}_\delta(a) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon \right]$$

Общие свойства конечного предела.

1. Если $y = f(x) - \text{const}$, то ее предел существует и равен этой же const.

$$f(x) = c, \text{ то } \lim_{x \rightarrow a} c = c.$$

2. Если конечный предел существует, то он единственный

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A_1 \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A_2 \end{array} \right\} \Rightarrow A_1 = A_2$$

3. Для $f(x)$, имеющей конечный предел в точке a , существует такая проколота окрестность этой точки, в которой функция ограничена.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \Rightarrow \exists \delta > 0 \exists M > 0 \forall x \in \overset{0}{U}_\delta(a) \Rightarrow |f(x)| < M.$$

4. Если функция имеет в точке a конечный предел, неравный нулю, то найдется такая $\overset{0}{U}$ в точке a , в которой $\frac{1}{f(x)}$ - ограниченная.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \\ A \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \exists \delta > 0, \exists a, \exists b \forall x \in \overset{0}{U}_\delta(a) \Rightarrow a < \frac{1}{f(x)} < b \Rightarrow \exists M > 0 \left| \frac{1}{f(x)} \right| < M$$

5. Если $f(x)$ имеет в точке a отрицательный конечный предел, то найдется такое значение этой точки, в котором функция - отрицательная.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow a} f(x) \\ A < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \exists \delta > 0, \exists a, \exists b \forall x \in \overset{0}{U}_\delta(a) \Rightarrow a < \frac{1}{f(x)} < b \Rightarrow \exists M > 0 \left| \frac{1}{f(x)} \right| < M.$$

2.3.2. Бесконечно малые функции и их свойства

Определение: $y = f(x)$ - бесконечно малая при $x \rightarrow a$, если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D \left[x \in \overset{0}{U}_\delta(a) \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon \right]$$

Свойства:

Пусть $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$ являются бесконечно малыми при $x \rightarrow a$, а $y = g(x)$ - ограничена, то бесконечно малыми является алгебраическая сумма функций $f(x)$ и $\varphi(x)$, произведения их и произведения функций на ограниченную функцию.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) \pm \varphi(x) \\ f(x) \cdot \varphi(x) \\ f(x) \cdot g(x) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{беск. малые}$$

$$\begin{aligned} f(x) - \text{б.м.} &\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0, \text{ что } \forall x \in D \left[x \in \bigcup_{\delta}^0(a) \Rightarrow |f(x)| < \frac{\varepsilon}{M}, \text{ где } M > 0 \right] \Rightarrow \\ g(x) - \text{огр.} &\Rightarrow \exists M > 0 \forall x \in D |g(x)| < M \\ &\Rightarrow \forall \delta > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D \left[x \in \bigcup_{\delta}^0(a) \Rightarrow |f(x) \cdot g(x)| \right] \end{aligned}$$

Представление функции, имеющей конечный предел.

Теорема: Для того чтобы функция $y = f(x)$ имела конечный предел A в точке $x=a$, необходимо и достаточно, чтобы $y = f(x) = A + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ - бесконечно малая при $x \rightarrow a$.

$$\left(\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \right) \Leftrightarrow \left(f(x) = A + \alpha(x), \text{ где } \lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0 \right)$$

Доказательство:

$$\begin{aligned} \left(\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \right) &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D \left[x \in \bigcup_{\delta}^0(a) \Leftrightarrow |f(x) - A| < \varepsilon \right] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow |\alpha(x)| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0 \end{aligned}$$

Алгебраические свойства функций, имеющих конечный предел в точке a .

$$\begin{aligned} &\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \\ \text{Пусть } &\exists \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = B, \text{ тогда:} \end{aligned}$$

1. Существует предел алгебраической суммы (разности) этих функций, равный алгебраической сумме (разности) этих пределов.

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm \varphi(x)) = A \pm B = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x).$$

2. Существует предел произведения функций $\Rightarrow$ произведение пределов

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot \varphi(x)) = A \cdot B = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x)$$

3. Если предел знаменателя не равен 0 и B не равно 0, то

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{A}{B} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x)}$$

Следствие: из 1 и 2 следует, что константы можно выносить за знак предела

$$\lim_{x \rightarrow a} c \cdot f(x) = \lim_{x \rightarrow a} c \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) = c \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

2.3.3. Бесконечно большие и их свойства

Функция $y = f(x)$ называется бесконечно большой в точке a , если ее предел в этой точке равен бесконечности.

$$(f(x) - \text{беск. большая}) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$$

Свойства:

Пусть $y = f(x)$ и $y = g(x)$ - бесконечно большие функции в точке a .

Функция $\varphi(x)$ имеет предел в точке a , отличный от 0. Ф-ия $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые. Тогда справедливы следующие утверждения:

1. Произведение двух бесконечно больших функций – бесконечно большая функция.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \infty$$

2. Произведение бесконечно больших на функцию, имеющую отличный от нуля предел - бесконечно большая.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)\varphi(x) = \infty$$

3. Функция, обратная величине бесконечно большой – есть бесконечно малая, и наоборот.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\alpha(x)} = \infty$$

Доказательство:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty &\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0, x \in D \left[x \in \bigcup_{\delta}^0(a) \Rightarrow |f(x)| > \frac{2\varepsilon}{|A|} \right] \\ \left(\lim_{x \rightarrow a} g(x) = A \neq 0 \right) &\Rightarrow \varepsilon \exists \delta_2 > 0 x \in D \left[x \in \bigcup_{\delta_2}^0(a) \Rightarrow |g(x) - A| < \varepsilon \right] \Rightarrow |g(x)| - |A| < \varepsilon \Rightarrow \\ &\Rightarrow |g(x)| < \varepsilon + |A| \end{aligned}$$

$$\delta = \min(\delta_1, \delta_2) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D \left[\begin{aligned} &x \in \bigcup_{\delta}^0(a) \Rightarrow |f(x) \cdot g(x)| = |f(x)| \cdot \\ &\cdot |g(x)| > \frac{2\varepsilon}{|A|} \cdot \frac{|A|}{2} = \varepsilon \end{aligned} \right]$$

$$\begin{aligned}
& \left(\lim_{x \rightarrow a} g(x) = A \neq 0 \right) \Rightarrow g(x) = A + \alpha(x), \lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0 \Rightarrow \varepsilon = \frac{|A|}{2} \exists \delta > 0 \\
& x \in D \left[x \in \bigcup_{\delta_2}^0(a) \Rightarrow |\alpha(x)| = \frac{|A|}{2} \right] \Rightarrow \\
& \Rightarrow |g(x)| = |A + \alpha(x)| \geq |A| - |\alpha(x)| \Rightarrow |g(x)| > \frac{|A|}{2}
\end{aligned}$$

Доказательство:

$$\begin{aligned}
& \left(\lim_{x \rightarrow a} g(x) = A \neq 0 \right) \Rightarrow \varepsilon \exists \delta_2 > 0 \ x \in D \left[x \in \bigcup_{\delta_2}^0(a) \Rightarrow |g(x) - A| < \varepsilon \right] \Rightarrow |g(x)| - |A| < \varepsilon \Rightarrow \\
& \Rightarrow |g(x)| < \varepsilon + |A| \\
& \lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0, x \in D \left[x \in \bigcup_{\delta_1}^0(a) \Rightarrow |\alpha(x)| < \frac{1}{\varepsilon} \right] \Rightarrow \frac{1}{|\alpha(x)|} > \varepsilon \Rightarrow \\
& \Rightarrow \left| \frac{1}{\alpha(x)} \right| > \varepsilon \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\alpha(x)} = \infty
\end{aligned}$$

2.3.4. Односторонние пределы в конечной точке и их связь с пределом в этой точке

В определении предела окрестности точки a – симметричный интервал с центром в этой точке, т.е. требуется существование значений функций как справа от точки a , так и слева от нее.

Когда a – граничная точка $D(f)$, – такая ситуация невозможна. В этом, случае вводится понятие одностороннего предела, в определении которого фигурирует левые и правые полуокрестности точки a

$$0 < |x - a| < \delta$$

$$A = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ - левосторонний предел, если } \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall x \in \text{левой } \delta$$

полуокрестности точки A , значения функции лежат в ε -окрестности точки A .

Аналогично дается определение правостороннего предела.

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = A: \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \ x \in D[a < x < a + \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon]$$

Теорема: Для того, чтобы в точке a существовал предел функции, необходимо и достаточно существование и равенство левостороннего и правостороннего пределов

Доказательство:

1. Необходимость:

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \ x \in D \left[\begin{cases} a - \delta < x < a + \delta \\ x \neq a \end{cases} \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon \right] \Rightarrow \\
& \Rightarrow \begin{cases} a < x < a + \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon \\ a - \delta < x < a \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \exists \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = A \\ \exists \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = A \end{cases}
\end{aligned}$$

2. Достаточность:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = A \\ \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = A \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D [a < x < a + \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon] \\ \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D [a - \delta < x < a \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon] \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a - \delta < x < a + \delta \\ x = a \end{array} \right\} \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$$

2.3.5. Числовые последовательности

Соответствие каждому N числу единственного вещественного числа называется числовой последовательностью.

Числовая последовательность – функция натурального аргумента.

Обозначается:

$$y_n = f(n)$$

$$\{y_n\}_{n=1}^{+\infty}$$

$$\{y_n\}$$

Последовательность, множество значений которой состоит из одного числа – стационарная.

Так как числовая последовательность – не симметричное множество, то для него не существует понятия четности, нечетности, периодичности. Зато сохраняются свойства, связанные с упорядоченностью.

Свойства:

- 1) Ограниченность.
 - a) последовательность $\{x_n\}$ ограничена сверху, если $\forall n \exists C : x_n \leq C$
 - b) последовательность $\{x_n\}$ – ограничена снизу, если $\forall n \exists C : x_n \geq C$
 - c) последовательность $\{x_n\}$ – ограничена, если $\exists C > 0 \forall n |x_n| \leq C$
 $\exists a < b \forall n a \leq x_n \leq b$
- 2) Монотонность.
 - a) последовательность $\{x_n\}$ возрастает, если $\forall m > n \Rightarrow x_m > x_n$
 - b) последовательность $\{x_n\}$ убывает, если $\forall m < n \Rightarrow x_m < x_n$
 - c) последовательность $\{x_n\}$ не убывает, если $\forall m > n \Rightarrow x_m \geq x_n$
 - d) последовательность $\{x_n\}$ не возрастает, если $\forall m > n \Rightarrow x_m \leq x_n$

Для числовой последовательности существует $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = A$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = A := \forall \varepsilon > 0 \exists M \in N [\forall n > M \Rightarrow |y_n - A| < \varepsilon]$$

Замечания:

1. A может быть конечным или бесконечным.

Если последовательность имеет конечный предел, то она называется сходящейся, а если нет – расходящейся.

2. Общие свойства сходящихся последовательностей аналогичны свойствам функций, имеющих конечный предел.

3. Арифметические свойства сходящихся последовательностей аналогичны свойствам функций, имеющих конечный предел.

4. Переход к пределам в неравенствах для сходящихся последовательностей аналогичен функциям, имеющим конечный предел.

5. Определение бесконечно малых и бесконечно больших последовательностей и их свойства аналогичны соответствующим определениям и свойствам функции непрерывного аргумента.

Для последовательности существуют пределы, удовлетворяющие следующим критериям:

1. Критерий Коши (произведения последовательностей).

Для существования предела последовательностей $\{x_n\}$ необходимо и достаточно, чтобы для любой..... $\forall n, m > M \quad |x(n) - x(m)| < \varepsilon$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M \in \mathbb{N} [\forall m, n > M \Rightarrow |x(n) - x(m)| < \varepsilon]$$

Последовательность, для которой выполняется признак Коши – фундаментальная.

2. Критерий Вейерштрасса (монотонность последовательности).

а) неубывающие последовательности, ограниченные сверху, имеют предел.

$$\left. \begin{array}{l} \forall m > n \quad X_n \geq X_m \\ \exists C \quad \forall n \quad X_n \leq C \end{array} \right\} \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} X$$

б) не возрастающие последовательности, ограниченные снизу, имеют предел.

Доказательство:

$$\left. \begin{array}{l} \exists C \quad \forall n, X_n \leq C \Rightarrow \exists S = \sup\{X_n\} \Rightarrow \exists M \in \mathbb{N} \quad n > M, m = M \quad X_m > S - \varepsilon \\ \forall n > m, X_n \geq X_m \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall n > M \Rightarrow X_n > S - \varepsilon$$

$$\forall n \quad X_n \leq S \Rightarrow X_n > S + \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M \in \mathbb{N} [n > M \quad S - \varepsilon < X_n < S + \varepsilon] \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} X_n = S = \sup fX_n$$

Переход к пределу в неравенстве.

Теорема: Пусть $f(x)$ и $\varphi(x)$ имеют конечные пределы в точке $y=a$, тогда справедливо:

$$1. \quad \varphi(x) > f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) \geq \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

$$2. \quad \varphi(x) \geq f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) \geq \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

$$3. \quad \varphi(x) > A \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) \geq A$$

$$4. \quad \varphi(x) \geq A \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) \geq A$$

Доказательство:

$$1. \quad \text{Пусть } \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) < \lim_{x \rightarrow a} f(x), \text{ тогда по общему свойству}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (\varphi(x) - f(x)) < 0 \Rightarrow \exists \bigcup_{\delta} (a) : \varphi(x) - f(x) < 0 \Rightarrow \varphi(x) < f(x),$$

а это противоречит 1.

Замечание:

1. Из утверждения 3 следует, что предел неотрицательной функции является неотрицательным.

Теорема (о двух милиционерах): пусть в некоторой области D выполняется система неравенств $\varphi(x) \leq f(x) \leq \Psi(x)$ и a – предел точки.

$$\text{Пусть существуют равные пределы } \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow a} \Psi(x) = C,$$

тогда существует $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = C$.

Доказательство:

$$\begin{aligned} \exists \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = C, \text{ то } \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 > 0 \forall x \in D \left(x \in \bigcup_{\delta_1}^0(a) \Rightarrow |\varphi(x) - C| < \varepsilon \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow C - \varepsilon < \varphi(x) < C + \varepsilon \end{aligned}$$

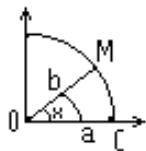
$$\begin{aligned} \exists \lim_{x \rightarrow a} \Psi(x) = C, \text{ то } \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_2 > 0 \forall x \in D \left(x \in \bigcup_{\delta_2}^0(a) \Rightarrow |\Psi(x) - C| < \varepsilon \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow C - \varepsilon < \Psi(x) < C + \varepsilon \end{aligned}$$

Первый замечательный предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Доказательство: докажем для $|x| < \frac{\pi}{2}$ справедливо неравенство $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$

В силу четности входящих в неравенство функций докажем это неравенство на промежутке $0 < x < \frac{\pi}{2}$.



Из рисунка видно, что площадь кругового сектора $S_{0ab} < S_{0CM} < S_{0CM}$

Рис. 2 Площадь кругового сектора

$$\frac{x \cos^2 x}{2} < \frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2}, \text{ так как } x > 0, \text{ то } \cos^2 x < \frac{\sin x}{x} < 1,$$

следовательно, что $\forall x |\sin x| \leq |x|$

$$\left. \begin{aligned} |x| < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \left| \frac{\sin x}{x} \right| < 1 \Rightarrow |\sin x| < |x| \\ x = 0; \sin x = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow |\sin x| \leq |x|$$

$$\left. \begin{aligned} \forall x |\sin x| < 1 \\ |x| < \frac{\pi}{2} > 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow |x| \geq \frac{\pi}{2} \quad |\sin x| < |x|$$

Покажем, что $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq |\sin x| \leq |x| \\ \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow 0} |\sin x| = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} -|\sin x| \leq \sin x < |\sin x| \\ \lim_{x \rightarrow 0} |\sin x| = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow 0} |\sin x| = 0$$

Докажем, что $\exists \lim_{x \rightarrow 0} \cos^2 x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos^2 x = \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin^2 x) = 1 - \lim_{x \rightarrow 0} \sin^2 x = 1$$

2. Последнее утверждение:

$$\left. \begin{array}{l} \cos^2 x < \frac{\sin x}{x} < 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \cos^2 x = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Бесконечные пределы функции.

Если в общем определении предела через окрестности предположить в качестве A бесконечно удаленную точку, то получим определение бесконечного предела.

Так как различают три вида бесконечно удаленных точек, то существуют три определения:

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty := \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D \left(x \in \bigcup_{\delta}^0(a) \Rightarrow f(x) \leq \bigcup_{\varepsilon}(\infty) \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty := \forall \varepsilon > 0 \forall x \in D \left(x \in \bigcup_{\delta}^0(a) \Rightarrow |f(x)| > \varepsilon \right)$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty := \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D \left(x \in \bigcup_{\delta}^0(a) \Rightarrow f(x) \leq \bigcup_{\varepsilon}(+\infty) \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty := \forall \varepsilon > 0 \forall x \in D \left(x \in \bigcup_{\delta}^0(a) \Rightarrow f(x) > \varepsilon \right)$$

$$3. \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty := \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D \left(x \in \bigcup_{\delta}^0(a) \Rightarrow f(x) \leq \bigcup_{\varepsilon}(-\infty) \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty := \forall \varepsilon > 0 \forall x \in D \left(x \in \bigcup_{\delta}^0(a) \Rightarrow f(x) < -\varepsilon \right)$$

2.4. Понятие непрерывности функции

Непрерывность – такое свойство функции, как отсутствие точек разрыва у графиков этой функции, т.е. строится единственной непрерывной линией.



Рис. 3 График непрерывной функции.

Рис.4 График разрывной функции.

1. Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0 , если предел $y = f(x)$ в данной точке совпадает со значением функции в этой же точке $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.
2. Разность $(\Delta x = x - x_0)$ -приращение аргумента в точке x_0 .
3. Разность $(\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0))$ - приращение функции в точке x_0 вызывает приращение аргумента Δx .
4. Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0 , если бесконечно малому аргументу соответствует бесконечно малое значение функции в точке x_0 .

2.4.1. Общие свойства функции, непрерывной в точке

Представим функцию с помощью бесконечно малых

$$1. \left. \begin{array}{l} \exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \Rightarrow f(x) = f(x_0) + \alpha(\Delta x) \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(x_0); \text{ или } \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) \end{array} \right\} y = 0 \Rightarrow \exists \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y$$

2. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0 и ее значение в этой точке отлично от нуля, то существует целая окрестность x_0 , в которой функция не равна нулю и сохраняет знак $f(x_0)$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) - \text{непрерывна в т. } x_0 \\ f(x) \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \exists \bigcup_{\delta}(x_0) \forall x \in \bigcup_{\delta}(x_0) \Rightarrow \begin{cases} f(x) \neq 0 \\ \text{sign } f(x) = \text{sign } f(x_0) \end{cases}$$

$$\text{sign}(x) (\text{сигнум}) \begin{cases} 1, x > 0 \\ 0, x = 0 \\ -1, x < 0 \end{cases}.$$

Доказательство:

$$a) (f(x) - \text{непрерывна в т. } x_0) \Rightarrow f(x) = f(x_0) + \alpha(\Delta x) \Rightarrow |f(x)| \geq |f(x_0)| - |\alpha(\Delta x)|$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) = 0 \Rightarrow \varepsilon \frac{|f(x_0)|}{2} \exists \delta > 0 \left| \Delta x \right| < \delta \Rightarrow |\alpha(\Delta x)| < \frac{|f(x_0)|}{2} \Rightarrow$$

$$b) \Rightarrow \left[x \in \bigcup_{\delta}(x_0) \Rightarrow |\alpha(\Delta x)| < \frac{|f(x_0)|}{2} \right]$$

Непрерывность сложной функции.

Пусть:

1. Функция $z = f(y)$ - непрерывна в т. y_0 .	$\left \begin{array}{l} \Rightarrow \text{тогда} \quad \text{сложная} \quad \text{функция} \quad z = f(\varphi(x)) - \\ \text{непрерывна в т. } x_0. \end{array} \right.$
2. Функция $y = \varphi(x)$ - непрерывна в т. x_0 .	
3. $y_0 = \varphi(x_0)$	

Доказательство:

$$A). z = f(y) - \text{непр} - \text{на в т. } x_0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 > 0 y \in D[f] (|y - y_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(y) - f(y_0)| < \varepsilon)$$

Б).

$$y = f(x) - \text{неп} - \text{на в т. } x_0 \Rightarrow \forall \varepsilon_1 = \delta_2 \exists \delta > 0 y \in D[f] \left(|x - x_0| = \delta_1 \Rightarrow |\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \delta_1 \right) \Bigg\} \Rightarrow$$

$$y_0 = \varphi(x_0)$$

$$\Rightarrow |y - y_0| < \delta_1$$

из А) и Б) следует:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D[f] \left[|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(\varphi(x)) - f(\varphi(x_0))| < \varepsilon \right]$$

$$\text{Sl. } \lim_{x \rightarrow x_0} f(\varphi(x)) = f(\varphi(x_0)) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(\varphi(x)) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x_0))$$

Непрерывность функции на множестве.

Функция непрерывна на множестве X , если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Непрерывность обратной функции.

Пусть $y = f(x)$ - непрерывна и строго монотонна на промежутке X , тогда справедливы следующие утверждения:

1. На промежутке Y существует непрерывная обратная функция $x = f^{-1}(Y)$.
2. Характер монотонности обратной функции такой же как и прямой.

Непрерывность элементарной функции.

1. Доказательство непрерывности элементарных функций tg и ctg следует из свойств непрерывности элементарных функций.
2. Непрерывность log , $arcsin$, $arccos$, $arctg$ следует из определения непрерывности обратной функции.

Характеристика точек разрыва функции.

1. Точка устранимого разрыва.

$D(f)$ т. x_0 называется точкой устранимого разрыва функции $y = f(x)$, если она не определена в этой точке, но имеет конечный предел.

Функцию можно сделать непрерывной в этой точке, доопределив ей значение в этой точке равным пределом.

$$y = \begin{cases} f(x), x \neq x_0 \\ A; x = x_0 \end{cases} \quad y = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, x \neq 0 \\ 1, x = 0 \end{cases}$$

2. Точка разрыва первого рода.

$D(f)$ x_0 - точка разрыва первого рода, если существует конечный левосторонний и правосторонний предел не равные между собой.

$$\begin{cases} \exists \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = A \\ \exists \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = B \end{cases} \quad A \neq B$$

Разницу $(b-a)$ называют скачком функции в точке x_0 .

3. Точка разрыва второго рода.

1. Если в $D(f)$ непрерывности предел заменить односторонним пределом, то получим определение односторонней непрерывности функции.

2. Функция называется непрерывной в точке x_0 справа, если правосторонний предел совпадает со значением функции.

3. Функция называется непрерывной в точке x_0 слева, если левосторонний предел совпадает со значением функции.

Например:

$y = |x|$ - исследуем предел функции справа и слева:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0-0} |x| &= \lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0+0} |x| &= \lim_{x \rightarrow 0} x = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{функция непрерывна в точке } x=0.$$

Для непрерывности в точке x_0 необходимо и достаточно, чтобы она была непрерывна слева и справа в этой точке.

2.5. Дифференциальное исчисление функции одной переменной

2.5.1. Задачи, приводящие к понятию производной

Задача о вычислении скорости точки, движущейся вдоль прямой.

Пусть точка движется вдоль прямой x , $\vec{l}$ -единичный вектор, задающий направление вдоль прямой.

$$S = S(t)$$

$$\Delta t = t - t_0$$

$$\Delta R = [S(t_0 + \Delta t) - S(t_0)] \cdot \vec{l} = \Delta S \cdot \vec{l}$$

$$\vec{v}_{cp.} = \frac{\Delta S}{\Delta t} \cdot \vec{l} \quad \boxed{\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{v}_{cp.} = \vec{l} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}}$$

Построение касательной к кривой с уравнением $y = f(x)$ в т. x_0 .

$$\operatorname{tg} \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \varphi = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Задачи, различные по смыслу, из разных областей науки, свелись к вычислению одного и того же предела. В таких случаях в математике абстрагируются от конкретных задач и изучают отдельно предел функции.

2.5.2. Определение производной функции в точке

Обозначение: $f'(x), y', \frac{dy}{dx}$.

Производной функции $y = f(x)$ в точке x называют предел отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента при стремлении последнего к нулю.

$$\boxed{f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

Пример: $y = \sin x$; $y' = ?$

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin(x) = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x$$

$\cos(x)$ - непрерывная.

$$\sin' x = \cos x$$

Степень функции с вещественным показателем.

$$\text{Справка: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha.$$

$$y = x^\alpha, x > 0$$

$$\Delta y = (x + \Delta x)^\alpha - x^\alpha = x^\alpha \left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^\alpha - 1 \right]$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(1 + \frac{\Delta x}{x})^\alpha - 1}{\frac{\Delta x}{x}} = x^{\alpha-1} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(1 + \frac{\Delta x}{x})^\alpha - 1}{\frac{\Delta x}{x}} = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$$

Геометрический смысл производной.

Из второй задачи следует, что производная функции $y = f(x)$ в точке x_0 равна тангенсу угла наклона касательной, проведенной к графику функции в этой точке.

Уравнение касательной к кривой. Его можно написать, зная точку, через которую она проходит, и угловой коэффициент $k = f'(x_0)$

$$y = f(x_0) = f'(x_0) - (x - x_0), \text{ где } x \text{ и } y - \text{координаты точки на касательной.}$$

Уравнение нормали. Его можно написать, зная точку, через которую она проходит и угловой коэффициент $k = -\frac{1}{f'(x_0)}$

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0), \text{ } x \text{ и } y - \text{точки на нормали.}$$

Производная суммы, произведения, частного.

Пусть функция $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$ дифференцируемы в точке x_0 , тогда в этой точке дифференцируемы их сумма, произведение и частное, причем выполняются формулы:

1. $(f(x) + \varphi(x))' = f'(x) + \varphi'(x)$
2. $(f(x) \cdot \varphi(x))' = f'(x) \cdot \varphi(x) + f(x) \cdot \varphi'(x)$
3. $\left(\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot \varphi(x) - f(x) \cdot \varphi'(x)}{\varphi^2(x)}$, если $\varphi(x) \neq 0$

Функция, дифференцируемая в точке x_0 , непрерывна в этой точке.

$$y = f(x) - \text{дифференцируема в точке } x_0 \Rightarrow \Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x) \Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$$

обратное утверждение неверно!!!

Производная от const функции равна 0.

Если $f(x) = c \Rightarrow f'(x) = 0$

Доказательство:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = 0$$

При вычислении производной, константу можно выносить за знак производной.

$$(c \cdot f(x))' = c' \cdot f(x) + c \cdot f'(x) = c \cdot f'(x)$$

Все приведенные выше формулы можно рассматривать на большее число слагаемых и сомножителей.

Производная от обратной функции.

Пусть $y = f(x)$ в точке x_0 имеет:

1. $f'(x) \neq 0$
2. на промежутке, содержащем x_0 , обратную функцию $y = f^{-1}(x) = \varphi(y)$
3. $y_0 = f(x_0)$

тогда в точке x_0 существует $f'(\varphi) \neq 0$, равная $\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

Доказательство:

1. Пусть $x = \varphi(y)$ и двум различным значениям x соответствует 2 различных значений y

$$x \neq x_0 \rightarrow y \neq y_0 \Rightarrow \Delta x \neq 0 \rightarrow \Delta y \neq 0 \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

3. Пусть $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0 , тогда

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0 \Rightarrow \Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta y \rightarrow 0$$

$$\exists f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{\varphi'(y_0)}$$

$$\text{так как } f'(x_0) \neq 0 \Rightarrow \varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

2.5.3. Производная от сложной функции

Пусть:

1. $z = f(y)$ - дифференцируема в точке y_0 .
2. $y = \varphi(x)$ - дифференцируема в точке x_0 .
3. $y_0 = \varphi(x_0)$

тогда сложная функция $z = f(\varphi(x))$ - дифференцируема в точке x_0 и справедлива формула:

$$\begin{aligned} z'_x &= z'_y \cdot y'_x = f'(y) \cdot \varphi'(x) \\ \frac{dz}{dx} &= \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \end{aligned}$$

Доказательство:

1. $z = f(y)$ - дифференцируема в точке $y_0 \Rightarrow \Delta z = f'(y_0)\Delta y + \alpha(\Delta y)$

2. $y = \varphi(x)$ - дифференцируема в точке $x_0 \Rightarrow \Delta y = \varphi'(x_0)\Delta x + \beta(\Delta x)$

$$\Delta z = f'(y_0)\varphi'(x_0)\Delta x + f'(y_0)\beta(\Delta x) + \alpha(\Delta y)$$

3. $y = \varphi(x)$ - дифференцируема в точке x_0 , а значит, непрерывна в этой точке $\Rightarrow (\Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta y \rightarrow 0)$.

$$\gamma(\Delta x) = f'(x_0)\beta(\Delta x) + \alpha(\Delta y) \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \gamma \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\gamma(\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[f'(x_0) \cdot \frac{\beta(\Delta x)}{\Delta x} + \frac{\alpha(\Delta y)}{\Delta x} \right] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha(\Delta y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha(\Delta y)}{\Delta y} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \varphi'(x_0) \cdot$$

$$\Delta(f(\varphi(x))) = (f'(y_0)\varphi'(x_0))\Delta x + \gamma(\Delta x), \text{ где } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\gamma(\Delta x)}{\Delta x} = 0 \Rightarrow (f(\varphi(x)))'_x = z'_x = f'(y_0) \cdot \varphi'(x_0)$$

2.5.4. Производная от параметрически заданной функции

Функция $y = f(x)$ называется заданной параметрически, если ее аналитическое выражение может быть представлено в виде:

$$\begin{cases} y = \psi(t) \\ x = \varphi(t) \end{cases} \quad t\text{- параметр.}$$

Пусть функция задана параметрически, где $\psi(t)$ и $\varphi(t)$ дифференцируемы в точке x_0 , тогда

$$\exists y' = f'(x_0) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \text{ при } \varphi'(t) \neq 0 \text{ и } x_0 = \varphi(t_0)$$

Доказательство: Предположим, что $x = \varphi(t)$ имеет обратную функцию $t = \varphi^{-1}(x)$, тогда $y = \varphi(\varphi^{-1}(x))$ - сложная функция от x и по определению сложной функции имеет:

$$y'(x_0) = \frac{d\psi}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \left|_{\text{но}} \frac{dt}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1}{\varphi'(t_0)} \right| = \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}$$

2.5.5. Производные высших порядков

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на X , то есть дифференцируема в каждой точке X .

Каждому значению X соответствует единственное значение $f'(x)$, т.е. получаем $y = f'(x)$, как функцию, заданную на X .

Если она окажется дифференцируемой на X , то мы можем вычислить следующую $f'(x)$, которая будет называться второй и т.д.

$$x \in X \quad y = f'(x) \Rightarrow (f'(x))' \Rightarrow f''(x) = \frac{d^2 y}{dx^2} = y''(x)$$

Производной n -го порядка от функции $y = f(x)$ называется первая производная от производной $n-1$ порядка.

$$\frac{d^n f}{dx^n} = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}} \right)$$

Пример:

$$y = \cos x$$

$$y' = -\sin x \quad y'' = -\cos x \quad y''' = \sin(x) \quad y^{(n)} = \cos(x + n \frac{\pi}{2})$$

2.5.6. Теоремы о дифференцируемых функциях

Теорема Ферма: Пусть $y = f(x)$ дифференцируема на (a, b) и наибольшее или наименьшее ее значение в точке x_0 , тогда производная в этой точке равна нулю.

Доказательство:

Пусть $f(x_0)$ - наибольшее на $(a, b) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \forall x \in (a, b) \Delta f = f(x) - f(x_0) \geq 0 \Rightarrow \forall x \in (a, b) \quad x > x_0 \Rightarrow x < 0 \Rightarrow \frac{\Delta f}{\Delta x} \leq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0-0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \leq 0 \Rightarrow f'(x_0 - 0) \leq 0$$

$$\forall x \in (a, b) \quad x < 0 \Rightarrow \Delta x > 0 \Rightarrow \frac{\Delta f}{\Delta x} \geq 0 \Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0+0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \geq 0 \Rightarrow f'(x_0 + 0) \geq 0$$

Но из дифференцируемости $y = f(x)$ в точке x_0
 $\Rightarrow \exists f'(x_0) \Rightarrow f'(x_0 + 0) = f'(x_0 - 0) \Rightarrow f'(x_0) = 0$

Из доказательства теоремы Ферма следует: пусть $y = f(x)$ непрерывна на промежутке и внутренних точках этого промежутка принимает наибольшее и наименьшее значение, тогда, если в этой точке функция дифференцируема, то $f'(x) = 0$.

Теорема Ролля: Пусть функция $y = f(x)$:

1. непрерывна на $[a, b]$
2. дифференцируема на (a, b)
3. Принимает на концах этого отрезка одинаковые значения.

Тогда на (a, b) существует точка x_0 , в которой $f'(x) = 0$.

Доказательство:

Из непрерывности функции на отрезке следует, что она имеет на этом отрезке свои наименьшее(m) и наибольшее(M) значения.

Возьмем два случая:

1. $m=M$; наименьшее значение совпадает с x_0 следовательно:
 $f(x) = \text{const} \Rightarrow f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b)$
2. $m \neq M$; из (3) следует: $f(a) = f(b)$.

Между двумя корнями функции есть точка производной.

Теорема Лагранжа: Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на промежутке $[a, b]$, дифференцируема на (a, b) , тогда на (a, b) существует такая x_0 , что верна формула:

$$f(b) - f(a) = f'(x_0)(b - a)$$

$$\text{Если ее переписать в виде } f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \text{ то } f'(x) = \text{tg } \alpha$$

Доказательство:

Рассмотрим вспомогательную функцию $F(x) = f(b) - f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - x)$.

1. Она непрерывна на $[a, b]$ как сумма непрерывных функций.
2. $F(x)$ – дифференцируема на (a, b) как сумма дифференцируемых на интервале функций.

$$3. \quad F(a) = 0; F(b) = 0 \Rightarrow F(a) = F(b) \Rightarrow \text{ном. Ролля} \forall x_0 \in (a, b): F'(x_0) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow -f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (-1) = 0 \Rightarrow f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на (a, b) , тогда для любой внутренней точки интервала справедлива формула Лагранжа:

$$x_1, x_2 \in (a, b) \\ f(x_2) - f(x_1) = f'(x_0)(x_2 - x_1) \quad x_0 \text{ между } x_1, x_2$$

Действительно из дифференцируемости функции на (a, b) следует ее непрерывность на (a, b) .

$$\Delta f = f'(x_0) \Delta x$$

Теорема Коши: Пусть $y = \varphi(x)$ и $y = f(x)$:

1. Непрерывны на $[a, b]$.
2. Дифференцируемы на (a, b) .

Тогда на (a, b) существует точка x_0 , для которой справедлива формула Коши:

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(x_0)}{\varphi'(x_0)}$$

Доказывается как теорема Лагранжа.

$$F(x) = f(b) - f(x) - \frac{f(b) - f(x)}{\varphi(b) - \varphi(x)}(\varphi(b) - \varphi(x))$$

2.6. Приложение производной к исследованию функций

1. Исследование на монотонность.

Пусть $y = f(x)$ дифференцируема на $[a, b]$, тогда справедливо:

- Функция возрастает на $(a, b) \Rightarrow f'(x) > 0$ на (a, b) .
- Функция не убывает на $(a, b) \Rightarrow f'(x) \geq 0$ на (a, b) .
- Функция постоянна на $(a, b) \Rightarrow f'(x) = 0$ на (a, b) .
- Функция не возрастает на $(a, b) \Rightarrow f'(x) \leq 0$ на (a, b) .
- Функция убывает на $(a, b) \Rightarrow f'(x) < 0$ на (a, b) .

2. Исследование на экстремум.

Точка x_0 называется точкой локального минимума, если функция непрерывна в этой точке и существует такая окрестность x_0 , что для любого x $f(x_0) \leq f(x)$

3. Исследование функции на выпуклость графика.

График функции $y = f(x)$ на (a, b) направлен выпуклостью вниз (вогнутый), если он расположен выше касательной, проведенной в любой точке (a, b) , а график функции $y = f(x)$ – выпуклый, если он расположен ниже касательной, проведенной в любой точке (a, b) .

Точка x_0 , в которой $y = f(x)$ непрерывна, называется точкой перегиба, если она отделяет интервал выпуклости от интервала вогнутости.

Достаточные условия выпуклости функции на интервале.

Пусть функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема на (a, b) и $f''(x)$ сохраняет на нем свой знак, то:

1. $f''(x) > 0$, то график на (a, b) - вогнутый.

2. $f''(x) < 0$, то график на (a, b) - выпуклый.

4. Асимптоты графика функции.

В некоторых случаях, когда график функции имеет бесконечные ветви, оказывается, что при удалении точки вдоль ветви к бесконечности она неограниченно стремится к некоторой прямой. Такие прямые называют асимптотами.

Вертикальные асимптоты – прямая $x = b$ называется вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$ в точке b , если хотя бы один из разносторонних пределов равен бесконечности.

Если функция задана дробно-рациональным выражением, то вертикальная асимптота появляется в тех точках, когда знаменатель равен нулю, а числитель не равен нулю.

Наклонная асимптота – прямая $y = k \cdot x + b$ наклонная асимптота функции $y = f(x)$, если эта функция представлена в виде $f(x) = k \cdot x + b + \alpha(x)$, при $\lim_{x \rightarrow \infty} \alpha(x) = 0$.

Необходимый и достаточный признак существования наклонной асимптоты:

Для существования наклонной асимптоты $y = k \cdot x + b$ к графику функции $y = f(x)$ необходимо и достаточно существование конечных пределов:

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - k \cdot x]$$

Доказательство:

Пусть

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= k \cdot x + b + \alpha(x) \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \alpha(x) &= 0 \end{aligned} \right| \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[k + \frac{b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x} \right] = k + 0 + 0 = k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - k \cdot x] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [b + \alpha(x)] = b + 0 = b$$

Пусть

$$\left. \begin{aligned} \exists k &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \\ \exists b &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - k \cdot x] \end{aligned} \right| \Rightarrow f(x) - k \cdot x = b + \alpha(x), \text{ где } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \alpha(x) = 0$$

Следовательно, существует асимптота.

5. Общая схема исследования функций.

По функции определить:

5.1. $D(f)$

5.2. $E(f)$

5.3. Непрерывность в области определения

5.4. Четность, нечетность.

5.5. Периодичность

5.6. Асимптоты

По первой производной функции:

5.7. Экстремумы

5.8. Интервалы монотонности

По второй производной функции:

- 5.9. Интервалы выпуклостей
- 5.10. Точки перегиба
6. Построить график функции.

2.7. Приложение производной к вычислению пределов

(Правило Лопиталя).

Пусть:

1. Функции $y = \varphi(x)$ и $y = f(x)$ дифференцируемы в проколотой окрестности точки x_0

$$2. \quad \exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = 0 (= +\infty = -\infty = \infty)$$

$$3. \quad \exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A$$

то справедливо:

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A$$

Доказательство:

1. Доопределим функции $y = \varphi(x)$ и $y = f(x)$ в точке x_0 так, чтобы они стали непрерывными, т.е. $f(x_0) = \varphi(x_0) = 0 \Rightarrow$ функция непрерывна на всей окрестности $\bigcup_{\delta}(x_0)$.

2. $\forall x \in \bigcup_{\delta}(x_0)$ применим теорему Коши на интервале $[x_1, x_0]$ или $[x_0, x_1]$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{\varphi(x) - \varphi(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}, \text{ где } \xi \text{ лежит между } x \text{ и } x_0 \text{ следовательно}$$

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f(\xi)}{\varphi(\xi)} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)} = \lim_{\xi \rightarrow x_0} \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)} = A$$

Если производная функции удовлетворяет правилу Лопиталя, то можно вычислять последнюю несколько раз (2,3,4...), пока она удовлетворяет условию. Правило Лопиталя применимо, когда x_0 – бесконечно удаленная точка.

2.8. Дифференциал функции

Из Df дифференцируемости следует, что приращение дифференциала функции $y = f(x)$ можно представить в виде $\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)$, где $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)}{\Delta x} = 0$

Из равенства нулю предела следует, что $\alpha(\Delta x)$ - б.м. более высшего порядка малости, чем Δx , и $\alpha(\Delta x) = \Delta y - f'(x)\Delta x$

Поскольку $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x)\Delta x}{\Delta x} = f'(x) \neq 0$, то $f'(x)\Delta x$ и Δx - б.м. одного порядка малости.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) \Rightarrow \Delta y \text{ и } \Delta x - \text{б.м. одного порядка малости} \Rightarrow \Delta y \text{ и } f'(\Delta x) - \text{б.м.}$$

эквивалентные, т.е. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{f'(x)\Delta x} = 1$

Пусть $\Delta x = c_1 x_1 + c_2 x_2$, то $f'(x)(\Delta x_1 c_1 + \Delta x_2 c_2) = c_1 f'(x) \Delta x_1 + c_2 f'(x) \Delta x_2$
 $dy = f'(x) \Delta x$

$$\Delta y = dy + \alpha(\Delta x), \text{ где } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha(\Delta x)}{\Delta x} = 0$$

Δx и x – независимые переменные, т.е. $\frac{d\Delta x}{d} = 0$ и $\frac{dx}{d\Delta x} = 0$

$y = x$ $dy = dx = 1 \cdot \Delta x \Rightarrow \Delta x = d\Delta y$ для независимых переменных.

$$\boxed{dy = f'(x) dx}$$

Свойства дифференциала:

$$1. \quad d(u + v) = du + dv.$$

$$2. \quad d(uv) = u \cdot dv + v \cdot du$$

$$3. \quad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \cdot du - u \cdot dv}{v^2}$$

$$(uv) = u'v + uv'$$

$$(uv)' dx = v u' dx + u v' dx$$

2.9. Неопределенный интеграл и его свойства

Определение 1: Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на некотором отрезке $[a, b]$, если для всех из этого отрезка выполняется равенство:

$$F'(x) = f(x).$$

Пример: $F(x) = \cos(x) + C$; $f(x) = \sin(x)$;

Теорема 1. Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ какие-либо первообразные для функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, то выполняется соотношение:

$$F_1(x) - F_2(x) = C;$$

Доказательство:

Так как $F_1(x)$ первообразная для функции $f(x)$, то $F_1'(x) = f(x)$.

Так как $F_2(x)$ первообразная для функции $f(x)$, то $F_2'(x) = f(x)$.

Вычтем из первого равенства второе:

$$F_1'(x) - F_2'(x) = 0,$$

$$(F_1(x) - F_2(x))' = 0;$$

Обозначим $F_1(x) - F_2(x) = \varphi(x)$, тогда $\varphi'(x) = 0$;

Покажем, что $\varphi(x)$ принимает постоянные значения.

Применим $\varphi(x)$ на отрезке $[a, x]$ теорему Лагранжа.

$$\varphi(x) - \varphi(a) = \varphi'(\xi)(x-a), \quad a < \xi < x,$$

так как $\varphi'(\xi) = 0$, то $\varphi(x) - \varphi(a) = 0$, то есть $\varphi(x) = \varphi(a)$.

$$\varphi(a) = C, \quad \varphi(x) = C;$$

$$F_1(x) - F_2(x) = C;$$

Замечание: из теоремы следует, что, если $F(x)$ первообразная для $f(x)$, то $(F(x) + C)$ тоже первообразная.

Определение 2: Совокупность первообразных, т.е. $(F(x) + C)$, для $f(x)$ на $[a, b]$ называется неопределенным интегралом от $f(x)$ и обозначается:

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \quad \text{причем } F'(x) = f(x),$$

$f(x)$ – называется подынтегральной функцией;

$f(x)dx$ – называется подынтегральным выражением;

Свойства неопределенного интеграла:

1. $(\int f(x)dx)' = f(x);$

Доказательство:

$(\int f(x)dx)' = (F(x)+C)' = F'(x) = f(x);$

2. $d \int f(x)dx = f(x)dx;$

Доказательство:

$d \int f(x)dx = (\int f(x)dx)' \cdot dx = | \text{ по свойству 1} | = f(x)dx;$

3. $\int d F(x) = F(x) + C;$

Доказательство:

Возьмем дифференциал от левой части:

$d \int dF(x) = dF(x)$ (по свойству 2)

найдем дифференциал от правой части:

$d (F(x) + C) = dF(x) + dC = dF(x)$

Получили, что обе части равны.

4. $\int (f_1(x) + f_2(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx.$

Найдем производную от левой и от правой частей:

$(\int (f_1(x) + f_2(x))dx)' = | \text{ по св-ву 1} | = f_1(x) + f_2(x)$

$(\int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx)' = (\int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx)' = f_1(x) + f_2(x).$

5. $\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx,$ где k – постоянный множитель.

Доказательство:

$(\int k \cdot f(x)dx)' = k \cdot f(x);$

$(k \cdot \int f(x)dx)' = k \cdot (\int f(x)dx)' = k \cdot f(x);$

6. Формулы интегрирования не меняет свой вид при подстановке вместо независимой переменной x некоторой функции $u(x)$, т.е. если $\int f(x)dx = F(x) + C;$

$\int f(u)du = F(u) + C;$

Доказательство.

Имеем: $\int f(x)dx = F(x) + C;$

$F'(x) = f(x),$

Так как дифференциал первого порядка обладает свойством инвариантности, т.е. форма его не зависит от того является ли x независимой переменной или некоторой функцией

от x , то дифференциал

$dF(u) = F'(u)du = f(u)du$

$F'(u) = f(u)$

$\int f(u)du = \int dF(u) = | \text{ по свойству 3} | = F(u) + C.$

Таблица 1 - Таблица основных интегралов

1. $\int x^\alpha dx = x^{\alpha+1}/(\alpha+1) + C$ $\alpha \neq -1$	1. $\int u^\alpha du = u^{\alpha+1}/(\alpha+1) + C$ $\alpha \neq -1$
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$	2. $\int \frac{du}{u} = \ln u + C$
3. $\int e^x = e^x + C$	3. $\int e^u = e^u + C$
4. $\int a^x dx = a^x/\ln a + C$	4. $\int a^u du = a^u/\ln a + C$
5. $\int \sin(x)dx = -\cos(x) + C$	5. $\int \sin(u)du = -\cos(u) + C$

6. $\int \cos(x) dx = \sin(x) + C$	6. $\int \cos(u) du = \sin(u) + C$
7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}(x) + C$	7. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg}(u) + C$
8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg}(x) + C$	8. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg}(u) + C$
9. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C$	9. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\left(\frac{u}{a}\right) + C$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln x + \sqrt{x^2 \pm a} + C$	10. $\int \frac{dx}{\sqrt{u^2 \pm a}} = \ln u + \sqrt{u^2 \pm a} + C$
11. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right) + C$	11. $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg}\left(\frac{u}{a}\right) + C$
12. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{x-a}{x+a} \right + C$	12. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{u-a}{u+a} \right + C$
13. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{x+a}{x-a} \right + C$	13. $\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{u+a}{u-a} \right + C$
14. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) \right + C$	14. $\int \frac{du}{\sin u} = \ln \left \operatorname{tg}\left(\frac{u}{2}\right) \right + C$
15. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right + C$	15. $\int \frac{du}{\cos u} = \ln \left \operatorname{tg}\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right + C$
16. $\int \operatorname{tg}(x) dx = -\ln \cos(x) + C$	16. $\int \operatorname{tg}(u) du = -\ln \cos(u) + C$
17. $\int \operatorname{ctg}(x) dx = \ln \sin(x) + C$	17. $\int \operatorname{ctg}(u) du = \ln \sin(u) + C$

Проверим формулу 9:

$$(\arcsin \frac{x}{a})' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} \cdot \frac{1}{a} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}};$$

Проверим формулу 11:

$$\left(\frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}\right)' = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x^2}{a^2}} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a^2 + x^2}.$$

Пример:

$$\begin{aligned} 1. \int \sqrt[5]{(8-3x)^6} dx &= \int (8-3x)^{6/5} dx = |d(8-3x) = -3dx| = -\frac{1}{3} \int (8-3x)^{6/5} (-3dx) = \\ &= -\frac{1}{3} \int (8-3x)^{6/5} d(8-3x) = -\frac{5}{3} (8-3x)^{11/5} + C. \end{aligned}$$

$$2. \int x \sqrt{4+x^2} dx = \int (4+x^2)^{1/2} x dx = |d(4+x^2) = 2x dx| = 1/2 \cdot \int (4+x^2)^{1/2} 2x dx =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \int (4+x^2)^{1/2} d(4+x^2) = \frac{1}{2} \frac{(4+x^2)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{(4+x^2)^3}}{3} + C.$$

2.10. Замена переменной в неопределенном интеграле (метод подстановки)

Теорема: Пусть функция $x = \varphi(t)$ – строго монотонная и непрерывно дифференцируемая на некотором интервале функции $\varphi(t)$. Если функция $f(x)$ интегрируема на соответствующем интервале изменений x , то имеет место равенство:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt$$

Доказательство:

Определение 1: Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то существует неопределенный интеграл $\int f(x)dx$, а функция $f(x)$ в этом случае называется *интегрируемой*.

По определению 1 неопределенного интеграла

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \text{ причем } F'(x) = f(x)$$

Покажем, что функция $F(\varphi(t))$ является первообразной для функции: $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$.

Для этого найдем $(F(\varphi(t)))' =$ |по правилу дифференцирования сложной функции| = $F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$;

Но $F'(\varphi(t)) = f(\varphi(t))$, тогда

$$(F(\varphi(t)))' = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$$

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = F(\varphi(t)) + C = F(x) + C = \int f(x) dx.$$

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt.$$

Пример:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^x + 1}} = | e^x + 1 = t^2; \sqrt{e^x + 1} = t; e^x = t^2 - 1; x = \ln(t^2 - 1); dx = \frac{2t}{t^2 - 1} dt | =$$

$$= \int \frac{2t}{(t^2 - 1)t} dt = 2 \int \frac{2dt}{(t^2 - 1)} = 2 \cdot \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| = \ln \left| \frac{\sqrt{e^x + 1} - 1}{\sqrt{e^x + 1} + 1} \right| + C.$$

2.11. Интегрирование по частям

Пусть $U(x)$ и $V(x)$ дифференцируемые функции на некотором интервале, известно, что $d(UV) = U \cdot dV + V \cdot dU$.

Проинтегрируем это равенство:

$$\int d(UV) = \int U \cdot dV + \int V \cdot dU;$$

$$UV = \int U \cdot dV + \int V \cdot dU;$$

$$\int U \cdot dV = UV - \int V \cdot dU - \text{формула интегрирования по частям.}$$

Пример: вычислить $\int x \cdot \sin(x) dx$

I способ.

$$\int x \cdot \sin(x) dx = | U=x; dU=dx; dV=\sin(x) dx; \int dV = \int \sin(x) dx; V = -\cos(x) | = -x \cdot \cos(x) - \int (-\cos(x)) dx = -x \cdot \cos(x) + \sin(x) + C;$$

II способ.

$$\int x \cdot \sin(x) dx = | U = \sin(x); dU = \cos(x) dx; dV = x dx; V = \int x dx = \frac{x^2}{2}; | = \frac{x^2}{2} \cdot \sin(x) -$$

$$\int \frac{x^2}{2} \cdot \cos(x) dx.$$

Замечание: классы функций, интегрируемых по частям.

I класс – это интегралы вида:

$$\int P_n(x) \cdot e^{ax} dx;$$

$\int P_n(x) \cdot \sin(ax) dx$;
 $\int P_n(x) \cdot \cos(ax) dx$, где $P_n(x)$ – это многочлен первой степени, в этом случае $U = P_n(x)$;

II класс – это интегралы вида:

1. $\int P_n(x) \cdot \ln(ax) dx$;
2. $\int P_n(x) \cdot \arcsin(x) dx$;
3. $\int P_n(x) \cdot \arctg(x) dx$, где в качестве 1. $U = \ln(ax)$; 2. $U = \arcsin(x)$; 3. $U = \arctg(x)$;

Пример:

$$\int x^2 \cdot \ln(1+x) dx ;$$

$$\int x^2 \cdot \ln(1+x) dx = | U = \ln(1+x); dU = \frac{dx}{1+x}; dV = x^2 dx; V = \frac{x^3}{3}; | = \ln(1+x) \cdot \frac{x^3}{3} -$$

$$\frac{1}{3} \cdot \int \frac{x^3}{1+x} dx = | \text{выделим целую часть:}$$

$$\begin{array}{r} x^3 \\ - x^3 + x^2 \\ \hline x^2 \\ - x^2 + x \\ \hline x \\ - x + 1 \\ \hline 1 \end{array}$$

$$\text{значит, } \frac{x^3}{x+1} = x^2 - x + 1 + \frac{-1}{x+1}; | =$$

$$= \frac{x^3}{3} \cdot \ln(1+x) - \frac{1}{3} \int (x^2 - x + 1 - \frac{1}{x+1}) dx = \frac{x^3}{3} \cdot \ln(1+x) - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{6} - \frac{x}{3} + \frac{1}{3} \cdot \int \frac{d(x+1)}{x+1} =$$

$$= \frac{x^3}{3} \cdot \ln(1+x) - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{6} - \frac{x}{3} + \frac{1}{3} \cdot \ln(x+1) + C;$$

Пример2: интеграл вида:

$$\int e^x \cdot \sin(x) dx = | U = e^x; dU = e^x dx; dV = \sin(x) dx; V = \int \sin(x) dx = -\cos(x); | = -e^x \cdot \cos(x) + e^x \cdot \sin(x) - \int e^x \cdot \sin(x) dx;$$

$$\int e^x \cdot \sin(x) dx = -e^x \cdot \cos(x) + e^x \cdot \sin(x) - \int e^x \cdot \sin(x) dx;$$

получили уравнение относительно интеграла, неизвестным является интеграл.

$$2 \int e^x \cdot \sin(x) dx = e^x \cdot (\sin(x) - \cos(x));$$

$$\int e^x \cdot \sin(x) dx = \frac{1}{2} \cdot e^x \cdot (\sin(x) - \cos(x)) + C;$$

2.12. Интегрирование элементарных дробей

Определение1: дроби вида:

$$\text{I. } \frac{A}{ax+b}; \text{ II. } \frac{A}{(ax+b)^n}; \text{ III. } \frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)}; \text{ IV. } \frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^m},$$

где m, n – натуральные, причем $m, n \geq 2$, и квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ не имеют действительных корней, т.е. $b^2 - 4ac < 0$ ($D < 0$) – называются *элементарными*.

Разберем дроби.

$$I. \int \frac{A dx}{ax+b} = A \cdot \int \frac{a dx}{a(ax+b)} = \int d(ax+b) = a dx; \int \frac{A}{a} \cdot \frac{d(ax+b)}{ax+b} = \frac{A}{a} \cdot \ln |ax+b| + C.$$

$$II. \int \frac{A dx}{(ax+b)^n} = \frac{A}{a} \cdot \int (ax+b)^{-n} d(ax+b) = \frac{A}{a} \cdot \frac{(ax+b)^{-n+1}}{(1-n)} = \frac{A}{a \cdot (1-n) \cdot (ax+b)^{n-1}} + C;$$

$$III. \int \frac{Mx + N}{ax^2 + bx + c} dx;$$

$$\text{Рассмотрим сначала } Y = \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}} = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}} =$$

$$= \frac{1}{a} \int \frac{dx}{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{(4ac - b^2)}{4a^2}} = \left| \text{т.к. } b^2 - 4ac < 0 \text{ (по условию), то } 4ac - b^2 > 0, \text{ тогда} \right.$$

$$\frac{(4ac - b^2)}{4a^2} > 0; \text{ обозначим } \frac{(4ac - b^2)}{4a^2} = k^2; \left| = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + k^2} = \right.$$

$$= \left| \text{Пусть } x + \frac{b}{2a} = t, dx = dt; \right| = \frac{1}{a} \int \frac{dt}{t^2 + k^2} = \frac{1}{a} \arctg\left(\frac{t}{k}\right) = \frac{1}{ak} \cdot \arctg\left(\frac{x + \frac{b}{2a}}{k}\right) + C;$$

$$Y = \frac{1}{a} \int \frac{dt}{t^2 + k^2}$$

Рассмотрим искомый интеграл:

$$\begin{aligned} \int \frac{Mx + N}{(ax^2 + bx + c)} dx &= \int \frac{(2ax + b) \frac{M}{2a} + (N - \frac{bM}{2a})}{(ax^2 + bx + c)} dx = \frac{M}{2a} \int \frac{(2ax + b) dx}{(ax^2 + bx + c)} + \\ &+ \left(N - \frac{bM}{2a}\right) \underbrace{\int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)}}_Y = \frac{M}{2a} \int (ax^2 + bx + c)^{-m} d(ax^2 + bx + c) + \left(N - \frac{bM}{2a}\right) \cdot Y = \\ &= \frac{M}{2a} \cdot \ln |ax^2 + bx + c| + \left(N - \frac{bM}{2a}\right) \frac{1}{ak} \arctg\left(\frac{x + \frac{b}{2a}}{k}\right) + C. \end{aligned}$$

Пример:

$$\begin{aligned} \int \frac{7x - 2}{3x^2 - 5x + 4} dx &= \int \frac{(6x - 5) \cdot 7/6 - 2 + 35/6}{3x^2 - 5x + 4} dx = 7/6 \cdot \int \frac{(6x - 5) dx}{3x^2 - 5x + 4} + \int \frac{35/6 - 2}{3x^2 - 5x + 4} dx = \\ &= 7/6 \cdot \int \frac{d(3x^2 - 5x + 4)}{3x^2 - 5x + 4} + 23/18 \cdot \int \frac{dx}{x^2 - 5/3 \cdot x + 4/3} = 7/6 \ln |3x^2 - 5x + 4| + 23/18 \cdot \int \frac{d(x - 5/6)}{(x - 5/6)^2 + 23/36} = \end{aligned}$$

$$= 7/6 \ln |3x^2 - 5x + 4| + 23/18 \cdot 1/(\sqrt{23}/6) \cdot \operatorname{arctg} \frac{(x-5/6)}{\sqrt{23}/6} + C = 7/6 \ln |3x^2 - 5x + 4| + \sqrt{23}/3 \cdot \operatorname{arctg} \frac{(6x-5)}{\sqrt{23}} + C.$$

$$\begin{aligned} \text{IV. } \int \frac{Mx + N}{(ax^2 + bx + c)^m} dx &= \int \frac{(2ax + b) \frac{M}{2a} + (N - \frac{bM}{2a})}{(ax^2 + bx + c)^m} = \frac{M}{2a} \int \frac{(2ax + b) dx}{(ax^2 + bx + c)^m} + \\ &+ \left(N - \frac{bM}{2a} \right) \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^m} = -\frac{M}{2a} \int (ax^2 + bx + c)^{-m} d(ax^2 + bx + c) + \left(N - \frac{bM}{2a} \right) \cdot \\ &\cdot \frac{1}{a^m} \int \frac{dx}{\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right)^m} = \frac{M}{2a} \frac{(ax^2 + bx + c)^{1-m}}{1-m} + \left(N - \frac{bM}{2a} \right) \underbrace{\frac{1}{a^m} \int \frac{dt}{(t^2 + k^2)^m}}_{Y_m} = \text{см. пример 3} \\ &= \frac{M}{2a(1-m)(ax^2 + bx + c)^m} + \left(N - \frac{bM}{2a} \right) \frac{1}{a^m} Y_m. \end{aligned}$$

Отдельно вычислим Y_m .

$$\begin{aligned} Y_m &= \int \frac{dt}{(t^2 + k^2)^m} = \frac{1}{k^2} \cdot \int \frac{(t^2 + k^2) - t^2}{(t^2 + k^2)^m} dt = \frac{1}{k^2} \cdot \int \frac{dt}{\underbrace{(t^2 + k^2)^{m-1}}_{Y_{m-1}}} - \frac{1}{k^2} \cdot \int \frac{t^2}{(t^2 + k^2)^m} dt = \frac{1}{k^2} \cdot Y_{m-1} - \\ &- \frac{1}{k^2} \cdot \int \frac{t^2}{(t^2 + k^2)^m} dt = | U=t, dU=dt; dV = \frac{t}{(t^2 + k^2)^m} dt; V = 1/2 \cdot \int (t^2 + k^2)^{-m} d(t^2 + k^2) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(t^2 + k^2)^{-m+1}}{-m+1}; |; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_m &= \frac{1}{k^2} \cdot Y_{m-1} - \frac{1}{k^2} \cdot \left(\frac{t}{2(1-m)(t^2 + k^2)^{m-1}} - \int \frac{dt}{2(1-m)(t^2 + k^2)^{m-1}} \right) = \frac{1}{k^2} \cdot Y_{m-1} - \\ &- \frac{t}{2k^2(1-m)(t^2 + k^2)^{m-1}} + \underbrace{\frac{1}{2k^2(1-m)(t^2 + k^2)^{m-1}}}_{Y_{m-1}}; \\ Y_m &= \frac{t}{2k^2(m-1)(t^2 + k^2)^{m-1}} + \frac{1}{k^2} \cdot Y_{m-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{2(1-m)} \right) = \frac{t}{2k^2(m-1)(t^2 + k^2)^{m-1}} + \frac{1}{k^2} Y_{m-1} \cdot \\ &\cdot \frac{3-2m}{2(1-m)}; \end{aligned}$$

Получили: $Y_m = \frac{t}{2k^2(m-1)(t^2 + k^2)^{m-1}} + \frac{1}{k^2} \cdot \frac{3-2m}{2(1-m)} \cdot Y_{m-1}.$

Пример:

$$\int \frac{2x-4}{(x^2 + 2x + 5)^2} dx = \int \frac{(2x+2)-6}{(x^2 + 2x + 5)^2} dx = \int (x^2 + 2x + 5)^{-2} \cdot (2x+2) dx - 6 \cdot \int \frac{dx}{((x+1)^2 + 4)^2} =$$

$$\begin{aligned}
&= |x+1=t;| = \int (x^2 + 2x + 5)^{-2} d(x^2 + 2x + 5) - 6 \cdot \int \frac{dt}{(t^2 + 4)^2} = \frac{(x^2 + 2x + 5)^{-1}}{-1} - \frac{6}{4} \cdot \int \frac{(4+t^2) - t^2}{(t^2 + 4)^2} dt = \\
&= -\frac{1}{x^2 + 2x + 5} - \frac{3}{4} \int \frac{dt}{t^2 + 4} + \frac{3}{2} \int \frac{t^2 dt}{(t^2 + 4)^2} = | U = t; dU=dt; dV = \frac{t dt}{(t^2 + 4)^2}; \\
V &= 1/2 \cdot \int (t^2 + 4)^{-2} d(t^2 + 4) = -1/2 (t^2 + 4)^{-1} = -1/2 - \frac{1}{t^2 + 4}; | = -\frac{1}{x^2 + 2x + 5} - \frac{3}{2} \cdot Y_1 + \\
&+ \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{t}{-2(t^2 + 4)} - \int \frac{dt}{2(t^2 + 4)} \right) = -\frac{1}{x^2 + 2x + 5} - \frac{3}{2} \cdot Y_1 - \frac{3t}{4(t^2 + 4)} + \frac{3}{4} \cdot Y_1 = -\frac{1}{x^2 + 2x + 5} - \\
&- \frac{3t}{4(t^2 + 4)} + \frac{3}{4} Y_1 = -\frac{1}{x^2 + 2x + 5} - \frac{3(x+1)}{4(x^2 + 2x + 5)} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \arctg \left(\frac{x+1}{2} \right) + C.
\end{aligned}$$

2.13. Разложение многочлена на множители

Определение: функция $f(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_{n-1} x + A_n$ называется целой рациональной функцией от x или многочленом n -ой степени, или полиномом n -ой степени. Уравнение $f(x) = 0$ или $A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_{n-1} x + A_n = 0$ называется *алгебраическим*.

Теорема 1. Остаток от деления многочлена $f(x)$ на $(x-a)$ равен $f(a)$.

Обозначим через $f_1(x)$ частное от деления $f(x)$ на $(x-a)$, а R -остаток от деления, тогда

$$f(x) = f_1(x) (x-a) + R \quad (*)$$

при $x=a$ деление невозможно, поэтому $x \neq a$, последнем равенстве $(*)$ перейдем к пределу при $x \rightarrow a$.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) (x-a) + \lim_{x \rightarrow a} R$$

$$f(a) = 0 + R,$$

$$R = f(a);$$

Следствие: если a является корнем уравнения $f(x) = 0$, то $f(a) = 0$, т.е. $R = f(a) = 0$;

Основная теорема алгебры:

Всякая целая рациональная функция (многочлен) имеет по крайней мере один корень действительный или комплексный (без доказательств).

Теорема 2. Всякая целая рациональная функция может быть разложена в произведении n двучленов вида $(x-a)$ и множества A_0 .

Доказательство:

По основной теореме алгебры $f(x)$ имеет по крайней мере один корень действительный или комплексный. Обозначим через a_1 , тогда по следствию теоремы 1, $f(x) = f_1(x) (x-a)$, где $f_1(x)$ - это многочлен $n-1$ -ой степени.

Аналогично по основной теореме алгебры многочлен $f_1(x)$ имеет по крайней мере один корень a_2 - действительный или комплексный.

По следствию теоремы можно записать:

$$f_1(x) = f_2(x) (x-a_2), \text{ где } f_2(x) \text{ - это многочлен } n-2\text{-ой степени.}$$

Продолжая указанный процесс приходи к:

$$f_{n-1}(x) = f_n (x-a_n), \text{ где } f_n \text{ - это постоянное число, причем } f_n = A_0.$$

Собирая всё в обратном порядке, получаем:

$$f(x) = A_0(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\dots(x-a_n);$$

Замечание: среди этих членов могут быть и равные, объединяя равные сомножители получаем разложение:

$$f(x) = A_0(x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2} \dots (x-a_r)^{k_r}, \text{ где } k_1 + k_2 + \dots + k_r = n;$$

Теорема 3: Если комплексное число $a+bi$ является корнем многочлена

$f(x)=A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_{n-1} x + A_n$, то сопряженное число $a-bi$ также является корнем многочлена.

Доказательство:

Так как $a+bi$ – корень многочлена, то

$$f(a+bi) = 0 \text{ или}$$

$$A_0 (a+bi)^n + A_1 (a+bi)^{n-1} + \dots + A_{n-1} (a+bi) + A_n = 0,$$

раскроем скобки и, объединяя слагаемые, содержащие i и не содержащие i отдельно, получаем в левой части $M+Ni=0$, тогда $M=0$, $N=0$;

Найдем $f(a-bi) = A_0 (a-bi)^n + A_1 (a-bi)^{n-1} + \dots + A_{n-1} (a-bi) + A_n = 0$ | если раскрыть скобки и поступить как и в предыдущем случае, то получаем $M+Ni = 0$, т.к. $M=0$ и $N=0$ |

$$f(a-bi)=0, \text{ т.е.}$$

$a-bi$ – корень многочлена $f(x)$.

Замечание: в разложении многочлена на множители

$f(x) = A_0(x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2} \dots (x-a_r)^{k_r} (*)$, где $k_1 + k_2 + \dots + k_r = n$; в этом разложении выделим два сомножителя с комплексно сопряженными корнями:

$$[x-(a+bi)] \cdot [x-(a-bi)] = ((x-a)-bi) \cdot ((x-a)+bi) = (x-a)^2 - (bi)^2 = x^2 - 2ax + a^2 - b^2 =$$

$$| \text{обозначим } -2a=p, a^2 + b^2 = q | = x^2 + px + q;$$

квадратный трехчлен не имеет действительных корней, тогда в соотношении $(*)$

сопряженные корни запишутся в виде:

$$f(x) = A_0(x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2} \dots (x-a_e)^{k_e} (x^2 + p_1x + q_1)^{t_1}(x^2 + p_2x + q_2)^{t_2} \dots (x^2 + p_sx + q_s)^{t_s},$$

$$\text{где } k_1 + k_2 + \dots + k_e + 2t_1 + 2t_2 + \dots + 2t_s = n;$$

Вывод: всякий многочлен может быть представлен в виде произведения линейных двучленов и квадратных трехчленов, не имеющих действительных корней.

2.14. Интегрирование рациональных дробей

Дробь вида: $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_{n-1} x + A_n}{B_0 x^m + B_1 x^{m-1} + \dots + B_{m-1} x + B_m}$ называется *рациональной*

дробью или дробно-рациональной функцией.

Если степень числителя меньше степени знаменателя ($n < m$), то дробь называется *правильной*, в противном случае ($n \geq m$) называется *неправильной*.

В случае не правильной дроби, ее можно представить в виде суммы некоторого многочлена и правильной рациональной дроби.

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = M_k(x) + \frac{T_k(x)}{Q_m(x)}$$

Целая
Часть правильная дробь

Пример: Представить дробь в указанном выше виде.

$$\frac{x^5 + 4x}{x^2 + 2x + 3};$$

$$\frac{x^5 + 4x}{x^2 + 2x + 3} = \frac{x^3 + 2x + 3}{x^3 - 2x^2 + x + 4}$$

$$\begin{array}{r}
 -2x^4+4x^3-3x^2 \\
 \underline{-2x^4+4x^3-6x^2} \\
 x^3+6x^2+4x \\
 \underline{x^3+2x^2+3x} \\
 4x^2+x \\
 \underline{4x^2+8x+12} \\
 -7x-12
 \end{array}$$

$$\frac{x^5 + 4x}{x^2 + 2x + 3} = (x^3 - 2x^2 + x + 4) + \frac{-7x - 12}{x^2 + 2x + 3};$$

Теорема 1: Если в правильной рациональной дроби знаменатель разложен в виде произведения линейных двучленов и квадратных трехчленов, не имеющих действительных корней:

$$Q(x) = A_0(x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2} \dots (x-a_e)^{k_e} (x^2 + p_1x + q_1)^{t_1}(x^2 + p_2x + q_2)^{t_2} \dots (x^2 + p_sx + q_s)^{t_s}, \text{ то}$$

правильная рациональная дробь разлагается на элементарные дроби по следующей схеме.

$$\begin{aligned}
 \frac{P(x)}{Q(x)} = & \frac{B_1}{(x-a_1)^2} + \frac{B_2}{(x-a_1)^{k_1}} + \frac{C_1}{x-a_2} + \frac{C_2}{(x-a_2)^2} + \dots + \frac{C_{k_2}}{(x-a_2)^{k_2}} + \frac{D_1}{x-a_e} + \frac{D_2}{(x-a_e)^2} + \dots + \frac{D_{k_e}}{(x-a_e)^{k_e}} + \\
 & + \frac{E_1x + F_1}{x^2 + p_1x + q_1} + \frac{E_2x + F_2}{(x^2 + p_1x + q_1)^2} + \dots + \frac{E_{t_1}x + F_{t_1}}{(x^2 + p_1x + q_1)^{t_1}} + \frac{M_1x + N_1}{x^2 + p_sx + q_s} + \dots + \frac{M_{t_s}x + N_{t_s}}{(x^2 + p_sx + q_s)^{t_s}};
 \end{aligned}$$

Пример: разложить на элементарные дроби следующую дробь:

$$\frac{x^2 + x - 1}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}; \text{ где } A, B, C - \text{неопределенные коэффициенты.}$$

$$x^2 + x - 1 = A(x+1)^2 + Bx(x+1) + Cx;$$

I способ.

$$\begin{array}{l|l}
 x = -1 & -1 = -C; \quad C=1; \quad 1 = -4 + 2B + 1; \\
 x = 0 & A = -1; \\
 x = 1 & 1 = 4A + 2B + C; \quad B=2;
 \end{array}$$

$$\frac{x^2 + x - 1}{x(x+1)^2} = \frac{-1}{x} + \frac{2}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2};$$

II способ.

$$\begin{aligned}
 x^2 + x - 1 &= A(x+1)^2 + Bx(x+1) + Cx; \\
 x^2 + x - 1 &= x^2(A+B) + x(2A+B+C) + A;
 \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} A+B = 1; & B=2; \\ 2A+B+C = 1; & C=1; \end{array} \right.$$

$$A = -1;$$

Правило интегрирования рациональных дробей:

1. Если дробь неправильная, то надо выделить целую часть, то есть представить дробь в виде:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \underbrace{\frac{N(x)}{Q(x)}}_{\text{целая часть}} + \underbrace{\frac{T(x)}{Q(x)}}_{\text{правильная дробь.}}$$

2. Знаменатель дроби разложить на множители, то есть представить в виде двучленов первой степени и квадратных трехчленов, не имеющих действительных корней. И разложить правильную дробь на элементарные дроби по указанной выше схеме.

3. Интеграл от рациональной дроби взять как сумму интегралов от целой части и от элементарных дробей.

Пример: Найти интеграл.

$$\int \frac{2x^5 + 7x^4 + 5x^3 - 2x^2 - 7x + 7}{x^4 + x^3 - x - 1} dx =$$

$$\begin{array}{r} -2x^5 + 7x^4 + 5x^3 - 2x^2 - 7x + 7 \quad | \quad x^4 + x^3 - x - 1 \\ \underline{2x^5 + 2x^4 - 2x^2 - 2x} \\ -5x^4 + 5x^3 - 5x + 7 \\ \underline{5x^4 + 5x^3 - 5x - 5} \\ 12 \end{array}$$

$$\int (2x + 5 + \frac{12}{x^4 + x^3 - x - 1}) dx = x^2 + 5x + 12 \int \frac{dx}{(x+1)(x-1)(x^2+x+1)} =$$

$$\begin{array}{l} = \frac{1}{(x+1)(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1} = \\ 1 = A(x-1)(x^2+x+1) + B(x+1)(x^2+x+1) + (Cx+D)(x^2-1) \\ x=1: \quad 1=6B; \quad B=1/6; \\ x=-1: \quad 1=-2A; \quad A=-1/2; \\ x=0: \quad 0=A+B+C \quad D=2/3; \quad c=-1/3; \end{array}$$

$$= x^2 + 5x + 12 \left(\int \frac{-\frac{1}{2} dx}{x+1} + \frac{1}{6} \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{-\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}}{x^2+x+1} dx \right) = x^2 + 5x - 6\ln|x+1| + 2\ln|x-1| +$$

$$2 \int \frac{2x-2}{x^2+x+1} dx = x^2 + 5x - 6\ln|x+1| + 2\ln|x-1| + 2 \int \frac{2x+1-3}{x^2+x+1} dx = x^2 + 5x - 6\ln|x+1| + 2\ln|x-$$

$$1| + 2 \int \frac{(2x+1)dx}{x^2+x+1} - 6 \int \frac{dx}{x^2+x+1} = x^2 + 5x - 6\ln|x+1| + 2\ln|x-1| + 2\ln|x^2+x+1| -$$

$$- 6 \int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} = x^2 + 5x - 6\ln|x+1| + 2\ln|x-1| + 2\ln|x^2+x+1| - \frac{12}{\sqrt{3}} \cdot \arctg\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C.$$

2.15. Интегрирование иррациональных функций

I. Интеграл вида $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$, где $R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$ - рациональная функция

относительно x и $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, подстановкой $\frac{ax+b}{cx+d} = t^n$ сводится к интегралу от рациональной функции относительно t .

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^n, \quad ax+b = t^n cx + dt^n,$$

$$x = \frac{b - dt^n}{ct^n - a}.$$

$$dx = -\frac{dnt^{n-1}(ct^n - a) - (b - dt^n)cnt^{n-1}}{(ct^n - a)^2} dt = \frac{and t^{n-1} - bcnt^{n-1}}{(ct^n - a)^2} dt = \frac{nt^{n-1}(ad - bc)}{(ct^n - a)^2} dt,$$

$$\text{т.к. } \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t, \text{ тогда}$$

$$\underbrace{\int R\left(\frac{b - dt^n}{ct^n - a}; t\right) \frac{nt^{n-1}(ad - bc)}{(ct^n - a)^2} dt}_{r(t)} = \int r(t) dt;$$

получаем, что $\int r(t) dt$, где $r(t)$ - рациональная функция от t .

Замечание:

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx \text{ в этом случае заменой}$$

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^s, \text{ где } s\text{-наименьшее общее кратное чисел } m \text{ и } n.$$

Пример: Вычислить интеграл.

$$\int \frac{\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[4]{x-1}}{(x-1)(1+\sqrt[6]{x-1})} dx = \left. \begin{array}{l} x-1 = t^{12}, \\ \sqrt[3]{x-1} = t^4; \\ \sqrt[4]{x-1} = t^3; \end{array} \right| \quad dx = 12t^{11} dt; \quad = \int \frac{(t^4 + t^3)}{t^{12}(1+t^2)} \cdot 12t^{11} dt =$$

$$= 12 \int \frac{t^3 + t^2}{t^2 + 1} dt = \left. \begin{array}{l} \frac{t^3 + t^2}{t^2 + 1} \cdot \frac{t^2 + 1}{t^2 + 1} \\ - \frac{t^3 + t}{t^2 + 1} \\ - \frac{t^2 - t}{t^2 + 1} \\ \frac{t^2 + 1}{-t-1} \end{array} \right| \quad = 12 \int \left(t + 1 - \frac{t+1}{t^2+1} \right) dt = 12 \int t dt + 12 \int dt - 12 \int \frac{tdt}{t^2+1} =$$

$$= 6t^2 + 12t - 6 \int (t^2+1)^{-1} d(t^2+1) - 12 \operatorname{arctg}(t) = 6t^2 + 12t - 6 \ln|t^2+1| - 12 \operatorname{arctg}(t) =$$

$$= |x-1| = t^{12}, \quad t = \sqrt[12]{x-1} \quad | = 6\sqrt[6]{x-1} + 12\sqrt[12]{x-1} - 6\ln|\sqrt[6]{x-1}+1| - 12 \operatorname{arctg}(\sqrt[12]{x-1}) + C;$$

II. Интегралы от дифференцированных биномов (биномиальный дифференциал).

Определение : $x^m(a + bx^n)^P dx$ – называется дифференциальным биномом.

Академик Чебышев доказал, что $\int x^m(a + bx^n)^P dx$ выражается через элементарные функции в трех случаях:

1) если P -целое, то следует сделать подстановку

$$\sqrt[\lambda]{x} = t, \text{ где } \lambda - \text{общий знаменатель чисел } m \text{ и } n.$$

2) P – не целое, $\frac{m+1}{n}$ – целое, тогда вводим $a + bx^n = t^s$, где s – знаменатель P .

3) $P + \frac{m+1}{n}$ – целое, тогда замена такая:

$$ax^{-n} + b = t^s, \text{ где } s - \text{знаменатель } P.$$

В остальных случаях интеграл не берется.

Пример: вычислить интеграл.

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{(1+x^2)^3}} = \int x^{-2} (1+x^2)^{-3/2} dx \quad \left| \begin{array}{l} m=-2; n=2; P=-3/2; \frac{m+1}{n} = -\frac{1}{2} - \text{не целое;} \\ P + \frac{m+1}{n} = -1 - \text{целое;} \end{array} \right. =$$

$$\begin{aligned} & \left| \begin{array}{l} = x^{-2} + 1 = t^2; \quad x^{-2} = t^2 - 1; \quad x = (t^2 - 1)^{-1/2}; \\ dx = -1/2 (t^2 - 1)^{-3/2} 2t dt = -t (t^2 - 1)^{-3/2} dt; \\ x^2 = (t^2 - 1)^{-1} = \frac{1}{t^2 - 1}; \quad 1 + x^2 = 1 + \frac{1}{t^2 - 1} = \frac{t^2}{t^2 - 1} \end{array} \right| = - \int (t^2 - 1) \left(\frac{t^2}{t^2 - 1} \right)^{-3/2} t (t^2 - 1)^{-1} dt = \\ & = - \int (t^2 - 1) t^{-2} dt = - \int dt + \int t^{-2} dt = -t - t^{-1} = -t - \frac{1}{t} + C = -\sqrt{x^{-2} + 1} - \frac{1}{\sqrt{x^{-2} + 1}} + C = \\ & = -\frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} + C; \end{aligned}$$

III. Тригонометрические подстановки.

а) Интеграл вида $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx$ подстановкой $x = a \cdot \sin(t)$ сводится к интегралу от рациональной функции относительно $\sin(t)$ и $\cos(t)$.

$$\begin{aligned} \int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx &= \left| \begin{array}{l} x = a \cdot \sin(t); \quad dx = a \cos(t) dt \\ \sqrt{a^2 - x^2} = a \cos(t); \end{array} \right| = \int R(a \sin(t); a \cos(t)) a \cos(t) dt = \\ & \underbrace{\int r(\sin(t); \cos(t)) dt}_{\text{рациональная функция относительно } \sin(t) \text{ и } \cos(t)}; \end{aligned}$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \left| x = a \cdot \sin(t); dx = a \cos(t) \right| = \int a \cos(t) \cdot a \cos(t) dt = a^2 \int \cos^2(t) dt =$$

$$= a^2 \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = a^2/2 \int dt + a^2/4 \int 2\cos(2t) dt = a^2/2 t + a^2/4 \int \cos(2t) d(2t) = a^2/2 t + a^2/4 \sin(2t) +$$

C =

$$\begin{aligned} &= x = a \cdot \sin(t); \quad t = \arcsin(x/a); \\ &\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t) = 2 \sin(\arcsin(x/a)) \cos(\arcsin(x/a)) = 2 \frac{x}{a} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \\ &= \frac{a^2}{2} \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{ax}{2} \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{a^2}} = \frac{a^2}{2} \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{2} \sqrt{1 - x^2} + C; \end{aligned}$$

б) интеграл вида $\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx =$

$$\begin{aligned} &= x = a \cdot \sec(t) = a/\cos(t); \quad dx = \frac{a \sin(t)}{\cos^2 t}; \\ &\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{\frac{a^2}{\cos^2 t} - a^2} = \frac{a}{\cos(t)} \cdot \sin(t) = \operatorname{tg}(t) \cdot a = a \frac{\sin(t)}{\cos(t)} \quad \Bigg| \quad = \\ &= \int \underbrace{R\left(\frac{a}{\cos(t)}; a \frac{\sin(t)}{\cos(t)}\right)}_{r(\sin(t), \cos(t))} a \frac{\sin(t)}{\cos(t)} dt = \int r(\sin(t), \cos(t)) dt. \end{aligned}$$

$\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx$ подстановкой $x = a \cdot \sec(t)$ сводится к интегралу от рациональной функции относительно $\sin(t)$ и $\cos(t)$.

в) интеграл вида $\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2}) dx =$

$$\begin{aligned} &= x = a \cdot \operatorname{tg}(t) = a \frac{\sin(t)}{\cos(t)}; \quad \sqrt{a^2 + x^2} = \sqrt{a^2 + a^2 \operatorname{tg}^2(t)} = a \frac{1}{\cos(t)} \quad = \quad = \\ &\int \underbrace{\left(a \frac{\sin(t)}{\cos(t)}; \frac{a}{\cos(t)} \right)}_{r(\sin(t), \cos(t))} \frac{a}{\cos^2(t)} dt = \int r(\sin(t), \cos(t)) dt. \end{aligned}$$

Этот интеграл $\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2}) dx$ подстановкой $x = a \cdot \operatorname{tg}(t)$ сводится к интегралу от рациональной функции относительно $\sin(t)$ и $\cos(t)$.

Замечание:

Рассмотрим $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$ преобразуем в выражение

$$ax^2 + bx + c = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} \right) = a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right);$$

если обозначить $x + \frac{b}{2a} = t$; $\frac{4ac - b^2}{4a^2} = \pm m^2$; тогда

$$ax^2 + bx + c = a(t^2 \pm m^2);$$

$$x = t - \frac{b}{2a}; \quad dx = dt;$$

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx = \int R\left(t - \frac{b}{2a}, \sqrt{a(t^2 \pm m^2)}\right) dt.$$

2.16. Интегрирование тригонометрических функций

I. Интеграл вида $\int R(\sin(x); \cos(x)) dx$, где $R(\sin(x), \cos(x))$ – это рациональная функция относительно $\sin(x)$ и $\cos(x)$ подстановкой $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ сводится к интегралу от рациональной функции относительно t .

Действительно найдем.

$$\frac{x}{2} = \operatorname{arctg}(t);$$

$$x = 2 \operatorname{arctg}(t); \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2};$$

$$\sin(x) = \sin 2 \frac{x}{2} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}};$$

разделим числитель и знаменатель на $\cos^2 \frac{x}{2}$; $|\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t|$

$$\sin(x) = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2};$$

$$\cos(x) = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}}, \text{ делим на } \cos^2 \frac{x}{2};$$

$$\cos(x) = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}; \text{ тогда}$$

$$\int R(\sin(x); \cos(x)) dx = \underbrace{\int R\left(\frac{2t}{1+t^2}; \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) dt}_{r(t)} = \int r(t) dt, \text{ где } r(t) - \text{рациональная функция относительно } t.$$

Пример: Вычислить.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{4 \sin(x) + 5 \cos(x) + 4} &= \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t \right| = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{4 \frac{2t}{1+t^2} + 5 \frac{1-t^2}{1+t^2} + 4} = \int \frac{2dt}{(1+t^2)\left(\frac{8t-t^2+9}{1+t^2}\right)} = \\ &= 2 \int \frac{dt}{-t^2 + 8t + 9} = -2 \int \frac{dt}{t^2 - 8t - 9} = -2 \int \frac{d(t-4)}{(t-4)^2 - 25} = -\frac{1}{5} \ln \left| \frac{t-9}{t+1} \right| + C; \end{aligned}$$

Такая подстановка называется *универсальной*, т.е. она пригодна для вычислений интеграла $\sin(x)$ и $\cos(x)$.

Замечание 1: часто применение универсальной подстановки приводит к громоздким вычислениям. Некоторые интегралы могут быть решены другим способом.

$$\text{а) } \int R(\sin(x))\cos(x) dx = \left| \sin(x)=t; \cos(x)dx=dt \right| = \int R(t) dt.$$

$\int R(t) dt$ – интеграл от рациональной функции относительно t .

$$\text{б) } \int R(\cos(x))\sin(x) dx = - \int R(t) dt;$$

$$\text{в) } \int R(\operatorname{tg}(x)) dx = \left| \operatorname{tg}(x)=t; x=\operatorname{arctg}(t); dx = \underbrace{dt/(1+t^2)}_{r(t)} \right| = \int \frac{R(t)}{1+t^2} dt = \int r(t) dt,$$

где $r(t)$ - рациональная функция относительно t .

Пример: вычислить интеграл.

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos^3 x}{2+\sin(x)} dx &= \int \frac{1-\sin^2 x}{2+\sin(x)} \cos(x) dx = \left| \sin(x)=t; \cos(x)dx=dt \right| = \int \frac{1-t^2}{2+t} dt = \\ &= \int \frac{-t^2+1}{t+2} dt = \int (2-t-3/(t+2)) dt = 2t - t^2/2 - 3 \ln|t+2| = 2 \sin(x) - 1/2 \sin^2 x - \\ &3 \ln|\sin(x)+2| + C \end{aligned}$$

Замечание 2: если подынтегральная функция содержит $\sin(x)$ и $\cos(x)$ в четной степени и произведение $\sin(x)\cos(x)$, то целесообразней применять подстановку $\operatorname{tg}(x)=t$, тогда

$$x = \operatorname{arctg}(t), \quad dx = \frac{dt}{1+t^2};$$

$$\sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2};$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1+t^2};$$

$$\sin(x)\cos(x) = \frac{t}{1+t^2};$$

В результате получается рациональная функция относительно t .

$$\text{Пример: } \int \frac{dx}{\sin^2 x + 6 \sin(x) \cos(x) - 16 \cos^2(x)} = \left| \operatorname{tg}(x)=t; dx = \frac{dt}{1+t^2} \right| =$$

$$\begin{aligned} &= \int \frac{dt}{(1+t^2) \left(\frac{t^2}{1+t^2} + 6 \frac{t}{1+t^2} - 16 \frac{1}{1+t^2} \right)} = \int \frac{dt}{t^2 + 6t - t} = \int \frac{dt}{(t+3)^2 - 25} = \frac{1}{10} \ln \left| \frac{t+3-5}{t+3+5} \right| = \\ &= \frac{1}{10} \ln \left| \frac{t-2}{t+8} \right| = \frac{1}{10} \ln \left| \frac{\operatorname{tg}(x)-2}{\operatorname{tg}(x)+8} \right| + C. \end{aligned}$$

II. Интеграл вида $\int \sin^m(x) \cos^n(x) dx$

а)

I случай. m и n – положительные, одно из них нечетное.

$$\text{Пусть } m=2p+1, \text{ тогда } \int \sin^{2p+1}(x) \cos^n(x) \sin(x) dx = - \int (\sin^2 x)^p \cos^n(x) d(\cos(x)) = \\ = - \int (1 - \cos^2 x)^p \cos^n(x) d(\cos(x)).$$

II.случай. m и n – целые, положительные, четные.

Пусть $m=2p, n=2q$, тогда

$$\int \sin^m(x) \cos^n(x) dx = \int \sin^{2p}(x) \cos^{2q}(x) dx = \int (\sin^2 x)^p (\cos^2 x)^q dx = \\ \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^p \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^q dx;$$

Возводя скобки в соответствующие степени и разбивая интеграл на сумму интегралов, в результате получаем интегралы либо типа а), либо типа б).

III.случай. $m + n = -2k$; $\operatorname{tg}(x)=t$; $\operatorname{ctg}(x)=t$;

Пример1:

$$\text{I.случай. } \int \sin^5(x) \cos^2(x) dx = \int \sin^4(x) \cos^2(x) \sin(x) dx = - \int (\sin^2 x)^2 \cos^2(x) d(\cos(x)) = \\ = - \int (1 - \cos^2 x)^2 \cos^2(x) d(\cos(x)) = - \int (\cos^2 x - 2 \cos^4 x + \cos^6 x) d(\cos(x)) = - \int \cos^2(x) d(\cos(x)) \\ + \\ + 2 \int \cos^4(x) d(\cos(x)) - \int \cos^6(x) d(\cos(x)) = - \cos^3(x)/3 + 2 \cos^5(x)/5 - \cos^7(x)/7 + C.$$

2.17. Интегралы, не выражающиеся через элементарные функции (не берующиеся)

1. $\int R(x, \sqrt{P_n(x)}) dx$, где $P_n(x)$ – многочлен n -ой степени; не берется, если n выше 2-ой степени; при $n = 2, 3, 4..$ – интеграл эллиптического типа.

2. $\int e^{-x^2} dx$ - интеграл Пуассона.

3. $\int \sin(x^2) dx$; $\int \cos(x^2) dx$ - интегралы Френеля.

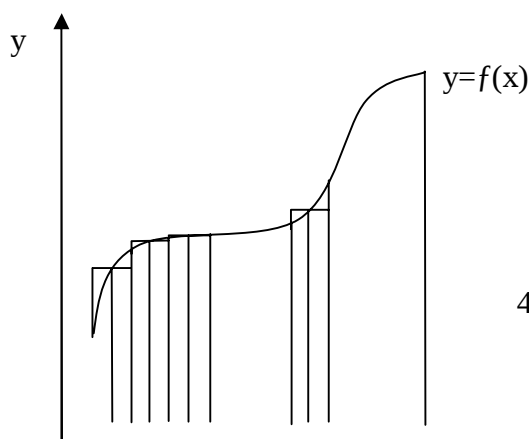
4. $\int \frac{dx}{\ln x}$ и сводящийся к нему $\int \frac{e^x}{x} dx$ - интегральный логарифм.

5. $\int \frac{\sin(x)}{x} dx$; $\int \frac{\cos(x)}{x} dx$; - интегральный синус, интегральный косинус.

2.18. Определенный интеграл

Задача нахождения площади криволинейной трапеции.

Дано: $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$



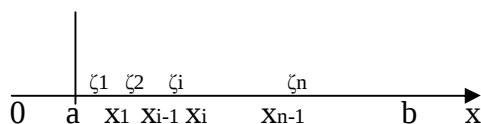


Рис. 5. Криволинейная трапеция

Фигура, ограниченная кривой $y=f(x)$ прямыми $x=a$ и $y=b$ и осью Ox называется криволинейной трапецией.

Найдем площадь:

- 1) разобьем отрезок $[a,b]$ на n частей точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$.
- 2) через точки деления проведем прямые параллельные оси Oy . В каждом частичном отрезке $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{i-1}, x_i], \dots, [x_{n-1}, x_n]$ выберем произвольные точки

$$\zeta_1 \quad \zeta_2 \quad \zeta_i \quad \zeta_n$$

Найдем значения функции в этих точках $f(\zeta_1), f(\zeta_2), f(\zeta_i), f(\zeta_n)$, и найдем сумму площадей прямоугольников с основанием $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, i=1, n$.

Сумма площадей прямоугольников равна:

$S_n = \sum_{i=1}^n f(\zeta_i) \Delta x_i$, за площадь криволинейной трапеции принимается предел, к которому стремится эта сумма:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\zeta_i) \Delta x_i.$$

1. Разобьем отрезок $[a,b]$ на n частей точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$.
2. В каждом частичном отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ длиной Δx_i выберем произвольные точки $f(\zeta_i)$ ($i=1, n$)
3. Найдем значение функции в этих точках $f(\zeta_i)$.
4. Найдем сумму $\sum_{i=1}^n f(\zeta_i) \Delta x_i$ - интегральная сумма.

Каждая сумма зависит от выбора точки и от способа разбиения отрезка на части. Разбивая произвольные образом отрезок на части и выбирая различные точки, получаем последовательность интегральных сумм.

Определение 1: Если существует предел последовательности интегральных сумм, независящей от выбора точки и от способа разбиения отрезка на части, то он называется определенным интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ и обозначается

$$\int_a^b f(x) dx, \text{ итак по определению 1: } \int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\zeta_i) \Delta x_i, \text{ тогда площадь криволинейной}$$

$$\text{трапеции: } \text{Скр.тр.} = \int_a^b f(x) dx.$$

Определение 2: Функция называется интегрируемой на отрезке $[a,b]$, если существует определенный интеграл от этой функции на этом отрезке.

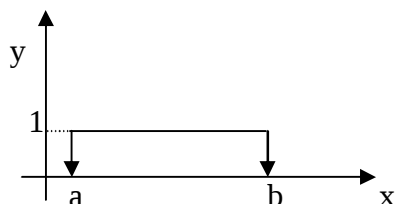
Если функция непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она интегрируема на этом отрезке.

Замечание: Геометрический смысл интеграла есть площадь криволинейной трапеции.

$$\text{Скр.тр.} = \int_a^b f(x) dx.$$

Свойства определенного интеграла.

$$1. \int_a^b dx = b - a.$$



$$2. \int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx.$$

3. Рассмотрим: коэффициент выносится за знак интеграла.

$$\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx.$$

Доказательство:

$$\int_a^b kf(x)dx = \lim_{x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n kf(\zeta_i)\Delta x_i = k \lim_{x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\zeta_i)\Delta x_i = k \int_a^b f(x)dx;$$

$$4. \int_a^b (f_1(x) + f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx.$$

Доказательство:

$$\begin{aligned} \int_a^b (f_1(x) + f_2(x))dx &= | \quad \text{по определению} \quad | = \lim_{x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (f_1(\zeta_i) + f_2(\zeta_i))\Delta x_i = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\sum_{i=1}^n (f_1(\zeta_i))\Delta x_i + \sum_{i=1}^n (f_2(\zeta_i))\Delta x_i \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (f_1(\zeta_i))\Delta x_i + \lim_{x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (f_2(\zeta_i))\Delta x_i = \int_a^b f_1(x)dx + \\ &+ \int_a^b f_2(x)dx. \end{aligned}$$

5. Если $[a, b]$ точкой c делится на 2 отрезок $[a, c]$ и $[c, b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Доказательство:

Рассмотрим 1 случай: c между a и b .

Так как определенный интеграл – предел последовательности

интеграла суммы, не зависящего от способа разбиения отрезка на части, то разобьем отрезок на части так, чтобы точка c совпала с точкой разбиения.

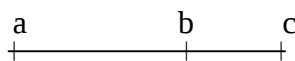
$$\text{Тогда } \sum_a^b f(\zeta_i)\Delta x_i = \sum_a^c f(\zeta_i)\Delta x_i + \sum_c^b f(\zeta_i)\Delta x_i.$$

Перейдем в этом равенстве к пределу при $x \rightarrow 0$, получим:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \sum_a^b f(\zeta_i)\Delta x_i &= \lim_{x \rightarrow 0} \sum_a^c f(\zeta_i)\Delta x_i + \lim_{x \rightarrow 0} \sum_c^b f(\zeta_i)\Delta x_i; \\ \int_a^b f(x)dx &= \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \end{aligned}$$

2 случай: Пусть c лежит вне отрезка $[a, b]$

Тогда по показанному в 1 случае,



$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx;$$

$$\text{Но } \int_b^c f(x)dx = - \int_c^b f(x)dx;$$

$$\text{Тогда } \int_b^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx - \int_c^b f(x)dx;$$

$$\text{Отсюда: } \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

6. Если на отрезке $[a,b]$ $f(x) \geq 0$, то $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

Доказательство:

По условию $f(\xi_i) \geq 0$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} > 0$;

$$\text{Тогда } \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \geq 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \geq 0, \text{ таким образом, } \int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

7. Если на отрезке $[a,b]$ $f_1(x) \geq f_2(x)$, то $\int_a^b f_1(x)dx \geq \int_a^b f_2(x)dx$.

$$8. \left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx;$$

Доказательство:

Известно, что $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$.

По свойству 7

$$- \int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx, \text{ по свойству абсолютной величины}$$

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx;$$

9. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

Оценка интеграла.

Доказательство:

Так как функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то по свойству непрерывной на отрезке функции, она достигает на этом отрезке своего наименьшего значения m и наибольшего значения M .

Тогда $m \leq f(x) \leq M$

$$\text{По свойству 7: } \int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M dx;$$

По свойству 3: $m \int_a^b dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq M \int_a^b dx$;

По свойству 1: $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$.

Теорема о среднем.

Если функция непрерывна на $[a, b]$, то внутри отрезка найдется по крайней мере одна точка ζ , в которой имеет место равенство:

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(\zeta) \quad \text{или}$$

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) f(\zeta);$$

Доказательство:

Так как функция непрерывна на отрезке по свойству 9 имеем:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a);$$

разделим на $(b-a)$:

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M;$$

обозначим $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ через μ , тогда:

$$m \leq \mu \leq M;$$

Так как функция непрерывна на отрезке $[a, b]$, то по свойству функции, непрерывной на отрезке, она принимает любое значение, по крайней мере в одной точке, данного между m и M .

Значит, найдется такая точка $\zeta \in [a, b]$, в которой функция принимает значение равное μ .

Т.е. $f(\zeta) = \mu$;

Таким образом $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(\zeta)$;

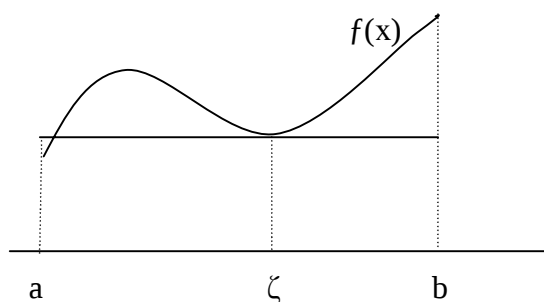


Рис. 6. Геометрический смысл теоремы о среднем

$$\int_a^b f(x) dx = f(\zeta)(b-a);$$

Площадь криволинейной трапеции равна площади прямоугольника с основанием $b-a$ и высотой, равной значению функции в некоторой «средней» точке ζ .

2.18.1. Интеграл с переменным верхним пределом

Функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, $x \in [a, b]$;

Рассмотрим интеграл $\int_a^b f(t)dt$ - интеграл зависит от x , т.е. является функцией от x .

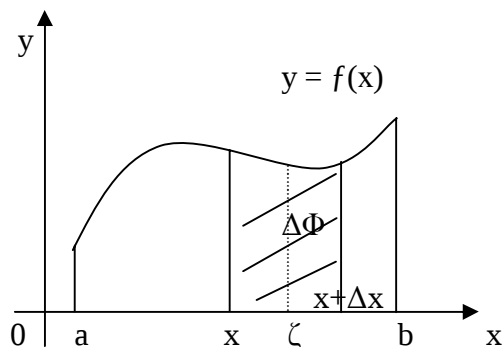


Рис. 7. Интеграл с переменным верхним пределом

Обозначим интеграл $\Phi(x)$. Переменную интегрируемую обозначаем через t , чтобы не спутать с верхним пределом x .

Теорема: Производная от интеграла с переменным верхним пределом от непрерывной функции по верхнему пределу равна подынтегральной функции, с заменой переменной, интегрируемой на верхнем пределе, т.е.

$$\left(\int_a^b f(t)dt \right)'_x = f(x);$$

Доказательство:

Дадим x приращение Δx , тогда $\Phi(x)$, получим приращение $\Delta \Phi = \Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) =$

$$= \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \text{ по свойству 4 } = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \{ \text{ по теореме о}$$

среднем } = f(\zeta)(x + \Delta x - x) = f(\zeta)\Delta x.

Итак, получили, что $\Delta \Phi = f(\zeta)\Delta x$.

Разделим обе части на Δx , получим:

$$\frac{\Delta \Phi}{\Delta x} = f(\zeta), \text{ где } \zeta \text{ лежит между } x \text{ и } x + \Delta x.$$

Перейдем к пределу.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta \Phi}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\zeta);$$

при $\Delta x \rightarrow 0$ $(x + \Delta x) \rightarrow x$, а $\zeta \rightarrow x$;

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta \Phi}{\Delta x} \right) = f(x). \text{ Но этот предел есть производная от } \Phi'(x)$$

$$\Phi'(x) = f(x);$$

$$\left(\int_a^b f(t) dt \right)'_x = f(x);$$

Замечание 1: из доказательства видно, что функция $\Phi(x)$ является первообразной для функции $f(x)$, а значит попутно доказали теорему.

Замечание 2:

Если функция непрерывна на $[a, b]$, то на этом отрезке существует первообразная функции. Интеграл с переменным верхним пределом и неопределенный интеграл связаны следующим соотношением:

$$\int_a^b f(x) dx = \Phi(x) + C = \int_a^x f(t) dt + C.$$

2.18.2. Формула Ньютона-Лейбница

Имеем:

$$\int_a^x f(x) dx = \Phi(x), \text{ где } \Phi(x) - \text{ первообразная для функции } f(x).$$

Пусть $F(x)$ - другая первообразная этой функции, тогда $\Phi(x) = F(x) + C$,

$$\int_a^x f(t) dt = F(x) + C,$$

предположим, в этом равенстве $x=a$, получим:

$$\int_a^a f(t) dt = F(a) + C; \text{ но } \int_a^a f(t) dt = 0,$$

тогда $F(a) + C = 0$, т.е. $C = -F(a)$;

подставим в исходное значение

$$\int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a), \text{ предположим } x=b, \text{ тогда}$$

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a), \text{ заменим } t \text{ на } x$$

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b;$$

Пример: $\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctg(x) \Big|_{-1}^1 = \arctg 1 - \arctg(-1) = 2\arctg 1 = 2\pi/4 = \pi/2.$

2.18.3. Замена переменной в определенном интеграле

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, а значит существует

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \text{ где } F(x) \text{ первообразная для функции } f(x) \text{ и пусть } x = \varphi(t), \text{ где } t \in [\alpha, \beta].$$

Теорема: Если:

- 1) $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b.$

2) функции $\varphi(t)$ и $\varphi'(t)$ непрерывны на отрезке $[\alpha, \beta]$

3) функция $f(\varphi(t))$ непрерывна на отрезке $[\alpha, \beta]$,

$$\text{то } \int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt.$$

Доказательство.

В параграфе о замене переменной в неопределенном интеграле было доказано, что функция $F(\varphi(t))$ является первообразной для функции $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$, поэтому

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) \Big|_{\alpha}^{\beta} = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx,$$

что и требовалось доказать.

Пример: Вычислить интеграл:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx &= | x = \sin(t), \sqrt{1-x^2} = \cos(t), dx = \cos(t)dt, \text{ при } x=0, t=0; \text{ при } x=1, t = \pi/2 | = \\ &= \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \left(\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} + 0 - 0 = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

2.19. Интегрирование по частям

$$\int U dV = UV - \int V dU;$$

$$\int_a^b U dV = UV \Big|_a^b - \int_a^b V dU;$$

$$\text{Пример: } \int_0^{\pi/2} x \sin x dx = | U=x; dU=dx; dV = \sin(x) dx; V = -\cos(x) | = -x \cos(x) \Big|_0^{\pi/2} + +$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos(x) dx = \sin(x) \Big|_0^{\pi/2} = 1.$$

2.20. Несобственные интегралы

Несобственными интегралами называют:

- 1) интегралы с бесконечно верхними или нижними пределами интегрирования.
- 2) Интегралы от неограниченных функций на отрезке $[a, b]$ или интегралы от разрывных функций на отрезке $[a, b]$.

Рассмотрим 1:

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a, +\infty)$. Если существует $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x)dx$, то он

называется **несобственным интегралом** с бесконечным верхним пределом и обозначается

$$\int_a^{\infty} f(x)dx.$$

Итак, по определению:

$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x)dx$, если этот предел существует, то интеграл называется **сходящимся**, в противном случае **расходящимся**.

Аналогично

$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x)dx$, если этот предел существует, то интеграл называется **сходящимся**, в противном случае **расходящимся**.

Интеграл вида: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ = |по свойству 5 определенного интеграла| $= \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x)dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_c^b f(x)dx$ - интеграл сходится.

Пример: Вычислить $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$;

Тогда, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$;

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a \rightarrow -\infty} \arctg(x) \Big|_a^0 + \lim_{b \rightarrow +\infty} \arctg(x) \Big|_0^b = \lim_{a \rightarrow -\infty} (0 - \arctg(a)) + \lim_{b \rightarrow +\infty} (\arctg(b) - 0) = -(-\frac{\pi}{2}) + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Рассмотрим 2: несобственные интегралы от разрывных функций.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, c)$.

Если существует $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx$, то

он называется **несобственным интегралом** от неограниченной функции в точке c и

обозначается $\int_a^c f(x)dx$.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $(c, b]$.

$$\int_c^b f(x)dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{c+\delta}^b f(x)dx.$$

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, кроме точки c , $a < c < b$, тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{c+\delta}^b f(x)dx.$$

Если оба эти предела существуют, то несобственный интеграл называется **сходящимся**, а если один из пределов не существует, то **расходящимся**.

Пример: $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$;

$x = 0$ - точка разрыва; $f(x) = \frac{1}{x^2}$;

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2} + \int_0^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x^2} + \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\delta}^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{x}\right) \Big|_{-1}^{-\varepsilon} + \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{x}\right) \Big|_{\delta}^1 =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{\varepsilon} - 1\right) + \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(-1 + \frac{1}{\delta}\right) = \infty + \infty = \infty, \text{ значит интеграл расходится.}$$

2.21. Приложения определенного интеграла

Площадь плоской фигуры.

Ранее было установлено, что площадь криволинейной трапеции есть :

$$S = \int_a^b f(x)dx, \text{ из свойства определенного интеграла видно, что } f(x) \geq 0, \text{ то } \int_a^b f(x)dx \geq 0,$$

т.е. $S \geq 0$; если $f(x) \leq 0$, то $\int_a^b f(x)dx \leq 0$, то $S = \left| \int_a^b f(x)dx \right|$;

$$S = S_1 + |S_2| + S_3.$$

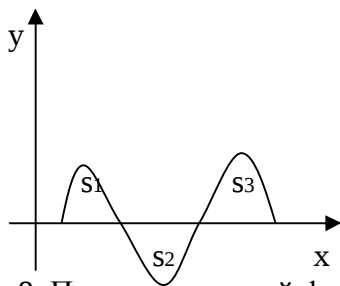


Рис. 8. Площадь плоской фигуры

Пример: найти площадь фигуры, ограниченной осью Ox и кривой $y=\cos(x)$, где $x \in [0, \pi]$.

$$S_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)dx = \sin(x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1; \quad S_2 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(x)dx = \sin(x) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = -1;$$

$$S = S_1 + |S_2| = 1 + 1 = 2.$$

Площадь криволинейной трапеции, если функция задана параметрически.

Пусть кривая задана параметрически уравнениями:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), & t \in [\alpha, \beta] \\ y = \psi(t), \end{cases}$$

где $\varphi(t)$, $\varphi'(t)$ и $\psi(t)$ непрерывны на отрезке $[\alpha, \beta]$.

$$S = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b ydx = |\text{сделаем замену переменной}| = |x = \varphi(t), dx = \varphi'(t)dt|;$$

$$S = \int_a^b ydx = |\varphi(\alpha) = a; \varphi(\beta) = b| = \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \cdot \varphi'(t)dt.$$

$$S = \int_a^b ydx = \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \cdot \varphi'(t)dt.$$

Пример: Найти площадь фигуры, ограниченной осью Ox и одной аркой циклоиды.

$$\begin{cases} x = a(t - \sin(t)); \\ y = a(1 - \cos(t)); \end{cases}$$

y ↑

при $t = 0$; $x=0$; $y=0$;
 $t = \pi$; $x=a\pi$; $y=2a$;
 $t = 2\pi$; $x=2a\pi$; $y=0$;
 $\varphi'(t) = a - a\cos(t) = a(1 - \cos(t))$;

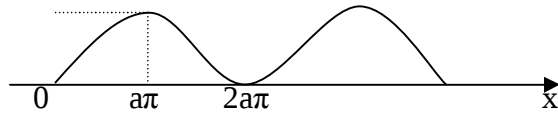


Рис. 9. Площадь фигуры, заданной параметрически

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(t) \cdot \varphi'(t) dt = \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t)(1 - \cos t) a dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t) dt =$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \frac{1 + \cos 2t}{2}) dt = a^2 \left(\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{\sin 2t}{4} \right) \Big|_0^{2\pi} = 3\pi a^2.$$

Длина дуги кривой в декартовых координатах.

Дана функция $y = f(x)$, непрерывная на отрезке $[a, b]$, вместе с $f'(x)$.

Определение: за длину дуги кривой принимается предел, к которому стремится длина вписанной ломаной линии, когда число звеньев этой ломаной неограниченно увеличивается.

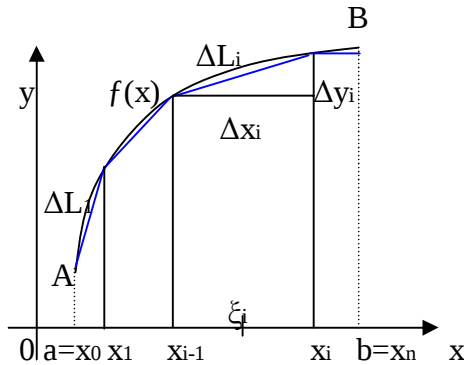


Рис. 10. Длина дуги в декартовых координатах

Разобьем отрезок $[a, b]$ на частей точками $a_0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$;

Проведем ординаты через точки деления и соединим хордами их концы. Длины звеньев ломанных обозначим: $\Delta L_1, \Delta L_2, \dots, \Delta L_i, \dots, \Delta L_n$.

Проведем прямую параллельную Ox .

$$\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1}).$$

Длина ломаной линии L_n :

$$L_n = \sum_{i=1}^n \Delta L_i, \text{ а длина кривой по определению: } L = \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta L_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \Delta L_i;$$

Найдем ΔL_i .

$$\Delta L_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} \right)^2} \cdot \Delta x_i;$$

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(\xi_i); \text{ (по теореме Лагранжа)}$$

так поступаем с каждым звеном, тогда $\Delta L_i = \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \cdot \Delta x_i$, так как по условию $f(x)$ и $f'(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$, то функция $\sqrt{1 + (f'(x))^2}$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, а

значит существует определенный интеграл: $\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$.

$$\text{Итак, } L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \cdot \Delta x = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx.$$

Пример: найти длину окружности.

$$x^2 + y^2 = a^2;$$

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}; \text{ значит } L = 4 \int_0^a \sqrt{1 + (y')^2} dx;$$

$$y' = \frac{-2x}{2\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}};$$

$$4 \int_0^a \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}} dx = 4 \int_0^a \sqrt{\frac{a^2}{a^2 - x^2}} dx = 4a \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 4a \arcsin \frac{x}{a} \Big|_0^a = 4a (\pi/2) = 2\pi a.$$

Длина кривой заданной параметрически.

$$\begin{cases} x = \varphi(t), & t \in [\alpha, \beta]; \\ y = \psi(t), \end{cases}$$

Функции $\psi(t)$, $\varphi(t)$, $\varphi'(t)$ непрерывны на отрезке $[\alpha, \beta]$, причем $\varphi'(t) \neq 0$.

Используем формулу:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx, \text{ ранее было установлено, что } y'_x = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \text{ (для параметрической функции), и пусть } \varphi(\alpha) = a; \varphi(\beta) = b, \text{ найдем } dx = \varphi'(t)dt, \text{ тогда сделаем замену в интервале}$$

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx = \int_\alpha^\beta \sqrt{1 + \left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)^2} \varphi'(t)dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt$$

$$\text{или } L = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt.$$

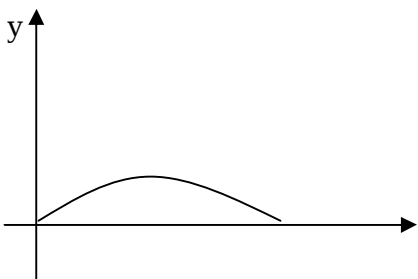
Пример: найти длину одной арки циклоиды.

$$\begin{cases} x = a(t - \sin(t)), \\ y = a(1 - \cos(t)), \quad t \in [0, 2\pi]; \end{cases}$$

$$x'_t = a(1 - \cos(t)); \quad y'_t = a \sin(t);$$

$$\sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} = \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} = a\sqrt{1 + \cos^2 t + \sin^2 t - 2\cos t} = a\sqrt{2(1 - \cos t)} =$$

$$= a\sqrt{2 \cdot 2 \sin^2 \frac{t}{2}} = 2a \sin \frac{t}{2};$$



0 $2\pi a$ x
 Рис. 11. Длина одной арки циклоиды.

$$L = \int_0^{2\pi} 2a \sin \frac{t}{2} dt = 4a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} d\left(\frac{t}{2}\right) = -4a \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} = -4a (-1-1) = 8a;$$

$$L = 2 \int_0^{\pi} 2a \sin \frac{t}{2} dt = 8a \int_0^{\pi} \sin \frac{t}{2} d\left(\frac{t}{2}\right) = -8a \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{\pi} = 8a;$$

Длина дуги в полярных координатах.

Пусть кривая задана в полярной системе координат $\rho=f(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$, используем формулу:

$$x = \rho \cos(\varphi) = f(\varphi) \cos(\varphi);$$

$$y = \rho \sin(\varphi) = f(\varphi) \sin(\varphi);$$

последнюю запись можно рассмотреть как параметрическое задание функции, где параметром является φ .

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'_{\varphi})^2 + (y'_{\varphi})^2} d\varphi;$$

$$x'_{\varphi} = f'(\varphi)\cos(\varphi) - f(\varphi)\sin(\varphi);$$

$$y'_{\varphi} = f'(\varphi)\sin(\varphi) + f(\varphi)\cos(\varphi);$$

$$(x'_{\varphi})^2 = (f'(\varphi))^2 \cos^2(\varphi) - 2f'(\varphi)f(\varphi)\cos(\varphi)\sin(\varphi) + (f(\varphi))^2 \sin^2(\varphi);$$

$$(y'_{\varphi})^2 = (f'(\varphi))^2 \sin^2(\varphi) + 2f'(\varphi)f(\varphi)\cos(\varphi)\sin(\varphi) + (f(\varphi))^2 \cos^2(\varphi);$$

$$(x'_{\varphi})^2 + (y'_{\varphi})^2 = (f'(\varphi))^2 + (f(\varphi))^2, \text{ тогда получаем}$$

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\varphi;$$

Пример: найти длину кривой $\rho=a(1-\cos(\varphi))$;

$$\varphi = 0; \quad \rho = 0;$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \quad \rho = a;$$

$$\varphi = \pi; \quad \rho = 2a;$$

$$\varphi = \frac{3\pi}{2}; \quad \rho = a;$$

$$\varphi = 2\pi; \quad \rho = 0;$$

$$\rho' = a \sin \varphi;$$

$$L = 2 \int_0^{\pi} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\varphi = 2 \int_0^{\pi} \sqrt{a^2(1-\cos \varphi)^2 + a^2 \sin^2 \varphi} d\varphi =$$

$$= 2a \int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi - 2\cos \varphi} d\varphi = 2a \int_0^{\pi} \sqrt{2(1-\cos \varphi)} d\varphi = 2a \int_0^{\pi} \sqrt{2 \cdot 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}} d\varphi =$$

$$= -8a \cos \frac{\varphi}{2} \Big|_0^{\pi} = 8a (1-0) = 8a.$$

Вычисление объема тела по площади параллельных сечений.

Дано тело, ограниченное замкнутой поверхностью. В каждой точке $x \in [a, b]$. Известна площадь сечения этого тела плоскостью перпендикулярной оси Ox . Эта площадь зависит от x , является функцией от x .

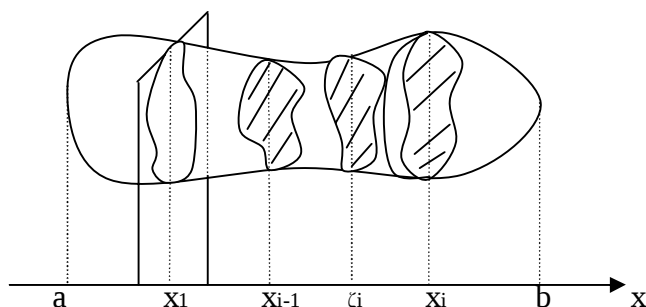


Рис. 12. Объем тела

Обозначим эту функцию, $Q(x)$ – непрерывна на отрезке $[a, b]$.

Разобьем отрезок $[a, b]$ на n частей точками: $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$;

Проведем через эти точки плоскости перпендикулярные оси Ox , которые разбивают тело на слои.

Выберем в каждой части отрезка $[x_{i-1}, x_i]$ произвольные точки ζ_i ($i = 1, n$) и найдем значение функции в этой точке, т.е. $Q(\zeta_i)$.

Каждый слой заменим цилиндром с основанием равным $Q(\zeta_i)$ и высотой Δx_i .

Так поступим с каждым слоем, в результате получили некоторое «ступенчатое тело». Объем такого цилиндра равен $Q(\zeta_i) \Delta x_i = \Delta V_i$.

Тогда объем «ступенчатого тела»:

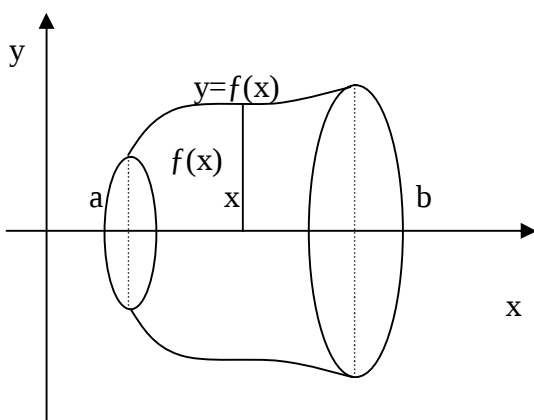
$$\Delta V = \sum_{i=1}^n \Delta V_i = \sum_{i=1}^n Q(\zeta_i) \Delta x_i.$$

За объем данного тела принимается предел, к которому стремится объем «ступенчатого тела», когда число точек деления неограниченно увеличивается:

$$\Delta V = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n Q(\zeta_i) \cdot \Delta x = \int_a^b Q(x) dx.$$

Объем тела вращения.

Дана криволинейная трапеция, ограниченная прямыми $x = a$, $x = b$, осью Ox и кривой $y = f(x)$. Эта трапеция вращается вокруг оси Ox . В результате получили тело.



Сечение этого тела в каждой точке есть круг с радиусом $f(x)$.

Значит площадь такого сечения

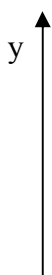
$$Q(x) = \pi y^2 = \pi f^2(x).$$

Объем этого тела равен:

$$V_{ox} = \int_a^b \pi y^2 dx = \pi \int_a^b y^2 dx.$$

Рис. 13. Объем тела вращения

Аналогично находится площадь фигуры с осью Oy .



Фигура ограничена линиями c и d , осью Oy и $x = f(y)$.

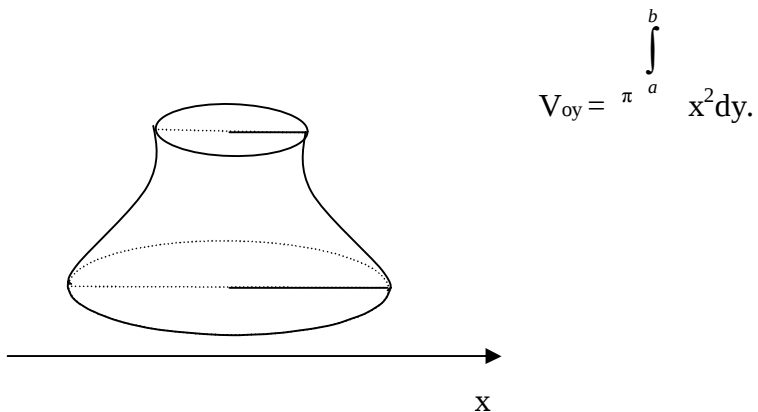


Рис. 14. Объем тела вращения

Пример: найти объем тела, полученного вращением эллипса вокруг оси Oх.

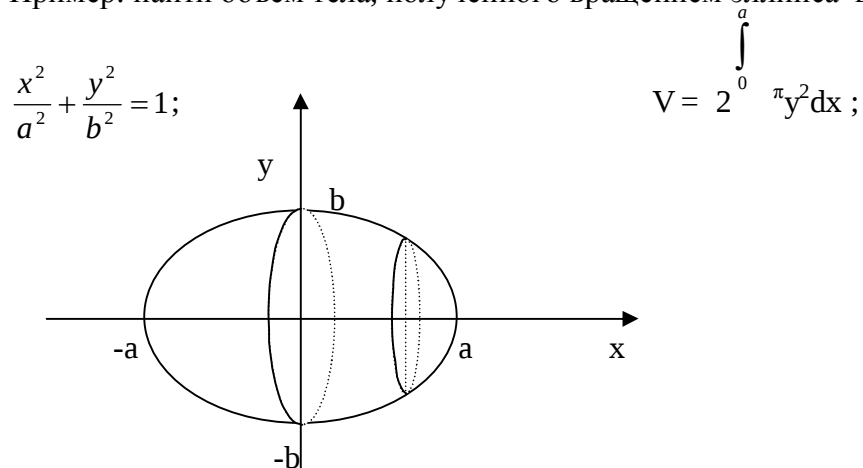


Рис. 15. Объем тела вращения

$$y^2 = b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) ; \quad V = 2\pi \int_0^a b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = 2\pi b^2 \left(x \Big|_0^a - \frac{x^3}{3a^2} \Big|_0^a\right) = 2\pi b^2 \left(a - \frac{a}{3}\right) = \frac{4\pi b^2 a}{3} .$$

Применение определенного интеграла для решения некоторых физических задач.

1) Вычислить работу, необходимую для выкачивания из цилиндрического резервуара высотой $h=6$ и радиусом основания $R=2$, если его ось имеет горизонтальное направление. $\Delta = 0.9$;

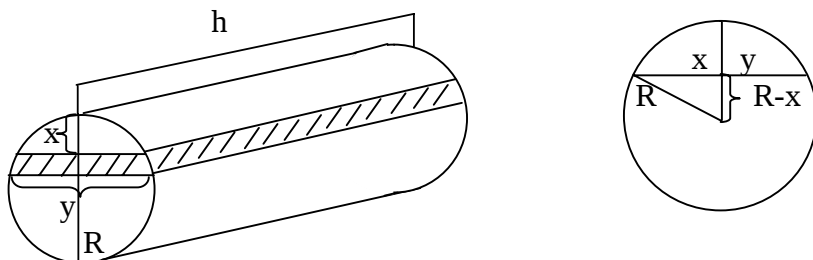


Рис.16. Цилиндрический резервуар

Вырежем слой толщиной dx .

$$dA = dp \cdot x;$$

$$dp = \delta y H \cdot dx; \quad dA = \delta x \cdot y H \cdot dx;$$

$$A = \int_0^{2R} \delta H \cdot xy dx; \quad \frac{y}{2} = \sqrt{R^2 - (R-x)^2}; \quad y = 2\sqrt{R^2 - (R-x)^2};$$

$$A = 2 \delta H \int_0^{2R} x \sqrt{R^2 - (R-x)^2} dx = \left| \begin{array}{l} R = x = R \sin(t); \quad x = R(1 - \sin(t)); \quad dx = -R \cos(t) dt; \end{array} \right.$$

$$\sqrt{R^2 - (R-x)^2} = R \cos(t); \quad \text{при } x = 0; t = \frac{\pi}{2}; \quad \text{при } x = 2R; t = -\frac{\pi}{2} \left| = -2\delta H \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} R(1 - \sin(t)) \cdot \right.$$

$$\cdot R^2 \cdot \cos^2(t) dt = 2\delta H R^3 \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} (\cos^2(t) - \cos^2(t) \sin(t)) dt = 2\delta H R^3 \left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt + \frac{\cos^3 t}{3} \right) \Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \delta H R^3 \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} = \pi \delta H R^3 = \pi \cdot 6 \cdot 0.9 \cdot 8.$$

2.22. Дифференциальные уравнения

Определение 1. *Дифференциальные уравнения (ДУ)* – это уравнения, содержащие искомую функцию, производные этой функции любых порядков, а также независимые переменные.

Определение 2. Если искомая функция зависит только от одного аргумента $y = f(x)$, то такое дифференциальное уравнение называется обыкновенным **дифференциальным уравнением (ОДУ)**.

Например, уравнение $y'' - y' + 2y + 4 = 0$ является ОДУ.

В противном случае, когда искомая функция зависит от нескольких аргументов $u = f(x, y, z, \dots)$, такое уравнение называется **дифференциальным уравнением в частных производных (ДУЧП)**.

Например, уравнение $u''_{xx} + 2u''_{xy} + u'_y = 0$ является ДУЧП.

В дальнейшем мы будем рассматривать только обыкновенные дифференциальные уравнения, поэтому под дифференциальным уравнением будем понимать обыкновенное дифференциальное уравнение, а также слово обыкновенные употреблять не будем.

Определение 3. Если в дифференциальное уравнение входит лишь первая производная (производная первого порядка), то такое уравнение называется **дифференциальным уравнением первого порядка**.

Например, уравнение $y' - y + 2x + 1 = 0$ является ДУ первого порядка.

Определение 4. Если же в дифференциальное уравнение входят производные различных порядков (выше первого), то порядок дифференциального уравнения определяется порядком старшей производной. Такое уравнение называют **дифференциальным уравнением n -го порядка**, где n – порядок старшей производной ($n \in \mathbb{N}$, $n > 1$).

Например, уравнение $y' - y''' + 2y'' + x - y = 0$ является ДУ третьего порядка.

Вообще говоря, любая функция, при подстановке которой в ДУ получается верное тождество, является решением этого ДУ.

Пример 1. Доказать, что функция $y = -\frac{x^2}{2}$, является решением ДУ $y' = -x$.

Решение. Найдем первую производную от исходной функции $y' = \left(-\frac{x^2}{2}\right)' = -\frac{2x}{2} = -x$ и подставим её вместо y' в исходное уравнение. Получим $-x = -x$ – верное тождество, значит, согласно определению 3, функция $y = -\frac{x^2}{2}$ является решением заданного уравнения.

Замечание 1. Функция $y = -\frac{x^2}{2}$ из примера 1 не является единственным решением уравнения $y' = -x$, поскольку можно взять и другие функции, производная от которых равна $-x$. Например можно взять такую функцию $\bar{y} = -\frac{x^2}{2} + 3$, тогда $\bar{y}' = -x$. Поэтому решение данного ДУ записывают в следующем виде $y = -\frac{x^2}{2} + C$, где C называют *произвольной постоянной*.

Любое общее решение ДУ первого порядка записывают в виде

$$y = g(x) + C,$$

где функция $g(x)$ получается в результате интегрирования заданного ДУ.

Для записи решения ДУ n -го порядка используется n произвольных постоянных $C_1, C_2, \dots, C_n$, при этом оно имеет вид:

$$y = g(x) + C_1 h(x) + C_2 k(x) + \dots + C_n,$$

где $g(x), h(x), k(x), \dots$ – функции, появляющиеся в результате интегрирования заданного ДУ.

Например, решением ДУ третьего порядка $y''' = x^2$ является функция $y = \frac{x^5}{60} + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$, где C_1, C_2, C_3 – произвольные постоянные.

Вообще говоря, запись решения ДУ с помощью произвольных постоянных условно называют *общим решением ДУ*.

Определение 5. Если дифференциальное уравнение возникает в задачах естествознания, то на функцию, являющуюся решением этого уравнения налагают определенные условия, например, состояние изучаемого процесса в момент времени, принимаемый за начальный. Такие условия называют **начальными условиями**.

Впервые в науке понятие «начальные условия» ввел французский математик О. Л. Коши, поэтому начальные условия называют *условиями Коши*.

Обычно для ДУ первого порядка начальное условие записывается так:

$$y(x_0) = a_0 \quad (a_0 = \text{const}, a_0 \in R)$$

Для ДУ n -го порядка начальные условия имеют вид:

$$y(x_0) = a_0, y'(x_0) = a_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = a_{n-1} \quad (a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in R)$$

Определение 6. Дифференциальное уравнение вместе с начальными условиями или (6.4) (в зависимости от порядка уравнения) называется *задачей Коши*. **Решить задачу Коши** означает найти общее решение дифференциального уравнения, а также воспользовавшись условиями, найти соответствующее ему частное решение.

Определение 7. *Общим решением дифференциального уравнения первого порядка* называется его решение, зависящее от произвольной постоянной следующим образом: для любого числа a_0 можно однозначно найти постоянную C_1 , при которых решение удовлетворяет начальному условию. При этом решение, удовлетворяющее начальному условию, называется *частным решением дифференциального уравнения первого порядка*.

Определение 8. *Общим решением дифференциального уравнения n -го порядка* называется его решение, зависящее от n произвольных постоянных следующим образом: для любых чисел $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ можно однозначно найти постоянные $C_1, C_2, \dots, C_n$, при которых решение удовлетворяет начальным условиям. При этом решение, удовлетворяющее начальным условиям, называется *частным решением этого дифференциального уравнения*.

Замечание 2. Не всякое решение ДУ может быть записано в стандартном виде (в зависимости от порядка уравнения), т.е. переменная Y не может быть отделена от остального выражения. В этих случаях говорят, что результатом решения дифференциального уравнения является его *общий интеграл*.

Дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ геометрически представляет собой поле направлений касательных к интегральным кривым.

Общее решение геометрически представляет собой семейство интегральных кривых $y = \varphi(x, C)$, где параметр $C = \text{const}$ ($C \in (-\infty; +\infty)$), а частное решение является интегральной кривой $y = \varphi(x, C_0)$ семейства, проходящей через точку $(x_0, y_0) \in D$.

Перейдем к рассмотрению видов дифференциальных уравнений первого порядка и методов их решения.

2.23. Решение дифференциальных уравнений первого порядка

2.23.1. Решение дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенных относительно первой производной

Определение 9. Простейшим видом ДУ первого порядка является уравнение, в котором левая часть содержит только производную y' , а правая часть – только выражение, зависящее от x . Такие уравнения называют *уравнениями первого порядка, разрешенные относительно первой производной*, они имеют вид:

$$y' = f(x)$$

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0,$$

где $P^2(x, y) + Q^2(x, y) \neq 0$.

Уравнение называют *ДУ*, записанным в дифференциальной форме.

Замечание 3. Если $Q(x, y) \neq 0$, то $\frac{dy}{dx} = y' = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)} = f(x, y)$.

Поскольку $y' = \frac{dy}{dx}$, то уравнение решается путем интегрирования обеих его частей по переменной x . При этом нужно помнить $\int \frac{dy}{dx} dx = \int dy = y$.

Пример 2. Решить задачу Коши $y' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$.

Решение. Проинтегрируем исходное уравнение по переменной x : $\int y' dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx$.
Получим общее решение $y = tg x + C$.

Начальное условие $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$ означает, что $y = 2$ при $x = \frac{\pi}{4}$. Подставим $y = 2$ при $x = \frac{\pi}{4}$ в общее решение, получим: $2 = tg \frac{\pi}{4} + C$, тогда $C = 1$. Подставим найденное C в общее решение и получим $y = tg x + 1$ – частное решение. Задача Коши решена.

2.23.2. Решение уравнений с разделяющимися переменными

Определение 10. Дифференциальные уравнения первого порядка называются *уравнениями с разделяющимися переменными*, если они представимы в виде

$$y' = f_1(x) \cdot f_2(y)$$

или

$$p_1(x) \cdot p_2(y) dx + q_1(x) \cdot q_2(y) dy = 0$$

Эти уравнения решаются с помощью следующего алгоритма:

- 1) Заменить y' на $\frac{dy}{dx}$. В результате получится уравнение $\frac{dy}{dx} = f_1(x) \cdot f_2(y)$.
- 2) Умножить уравнение $\frac{dy}{dx} = f_1(x) \cdot f_2(y)$ на $\frac{dx}{f_2(y)}$. В результате получится уравнение $\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x) dx$.
- 3) Проинтегрировать левую часть полученного уравнения по y , а правую – по x .

После интегрирования получится либо общее решение вида $y = \varphi(x, C)$, либо общий интеграл.

Замечание 4. Для решения уравнения нужно воспользоваться преобразованиями
 $-p_1(x) \cdot p_2(y) dx = q_1(x) \cdot q_2(y) dy \Rightarrow \frac{q_2(y) dy}{p_2(y)} = -\frac{p_1(x) dx}{q_1(x)} \Rightarrow \int \frac{q_2(y) dy}{p_2(y)} = -\int \frac{p_1(x) dx}{q_1(x)} + C$.

Пример 3. Решить уравнение $(y - yx) dx + x^2 dy = 0$.

Решение. Приведем исходное уравнение к виду (6.8): $y(1-x)dx + x^2dy = 0$.

$$x^2dy = -y(1-x)dx \Rightarrow x^2dy = y(x-1)dx.$$

Разделим обе части уравнения на x^2y , получим уравнение с разделяющимися переменными $\frac{1}{y}dy = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)dx$. Проинтегрируем это уравнение и получим

$$\ln|y| = \ln|x| + \frac{1}{x} + \ln|C| - \text{общий интеграл исходного уравнения. Преобразуем его}$$
$$\ln|y| - \ln|Cx| = \frac{1}{x} \Rightarrow \ln\left|\frac{y}{Cx}\right| = \frac{1}{x}.$$

Потенцируя последнее равенство, получим $\frac{y}{Cx} = e^{\frac{1}{x}}$, или, $y = Cxe^{\frac{1}{x}}$ – общее решение уравнения.

2.23.3. Решение однородных дифференциальных уравнений

Определение 11. Функция двух переменных $f(x, y)$ называется **однородной функцией степени n относительно x и y** , если для любого $\lambda \in R$ выполняется равенство: $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$. При $\lambda = 0$ функция $f(x, y)$ называется **однородной функцией нулевого порядка**, и для нее имеет место равенство:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda f(x, y)$$

Определение 12. Дифференциальные уравнения вида $y' = f(x, y)$, правая часть которых является однородной функцией нулевого порядка, называются **однородными дифференциальными уравнениями (ОДУ)**.

Данные уравнения решаются с помощью следующего алгоритма:

- 1) Привести исходное ДУ к виду $y' = f(x, y)$.
- 2) Доказать, что функция $f(x, y)$ является однородной функцией нулевого порядка. Выполнить замену:

$$y = ux, \quad y' = u'x + u$$

где $u = u(x)$ – новая неизвестная функция. С помощью замены привести полученное уравнение к ДУ с разделяющимися переменными.

- 3) Решить полученное уравнение относительно переменной u с помощью алгоритма.
- 4) Выполнить обратную замену $u = \frac{y}{x}$ и записать общее решение (общий интеграл).

Пример 3. Решить уравнение $x^2y' + y^2 + xy + x^2 = 0$.

Решение. Разрешая это уравнение относительно y' , получим: $y' = -\frac{x^2 + y^2 + xy}{x^2}$.

Убедимся, что $f(x, y) = -\frac{x^2 + y^2 + xy}{x^2}$ – однородная функция нулевого порядка.

$$f(\lambda x, \lambda y) = -\frac{(\lambda x)^2 + (\lambda y)^2 + \lambda x \lambda y}{(\lambda x)^2} = -\frac{\lambda^2(x^2 + y^2 + xy)}{\lambda^2 x^2} = -\frac{x^2 + y^2 + xy}{x^2} = f(x, y). \quad \text{Равенство}$$

выполнено.

$$\text{Выполним замену, получим уравнение: } u'x + u = -\frac{x^2 + u^2 x^2 + xux}{x^2}.$$

$$u'x + u = -u^2 - u - 1 \Rightarrow u'x = -u^2 - 2u - 1 \Rightarrow u'x = -(u+1)^2$$

$x \frac{du}{dx} = -(u+1)^2$ – ДУ с разделяющимися переменными. Умножим его на $\frac{dx}{-x(u+1)^2}$ и проинтегрируем обе части преобразованного уравнения.

$$\text{Получим } \frac{1}{u+1} = \ln|x| + C \Rightarrow \frac{1}{u+1} = \ln|x| + \ln|C| \Rightarrow \frac{1}{u+1} = \ln|Cx|.$$

$$\text{Воспользовавшись обратной заменой, получим } \frac{1}{\frac{y}{x} + 1} = \ln|Cx| \Rightarrow \frac{y}{x} + 1 = \frac{1}{\ln|Cx|}.$$

Таким образом, $y = \frac{x}{\ln|Cx|} - x$ – общее решение.

Замечание 5. Если ДУ записано в следующей дифференциальной форме $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$, причем функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ – однородные функции одинакового порядка однородности относительно X и Y , то для решения этого уравнения, его сперва нужно привести к виду $\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$, а затем воспользоваться приведенным выше алгоритмом.

2.23.4. Решение линейных дифференциальных уравнений

Определение 13. Дифференциальное уравнение вида

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

называется **линейным неоднородным дифференциальным уравнением первого порядка относительно переменной Y (ЛНДУ)**, а уравнение

$$x' + P(y)x = Q(y)$$

называется **линейным неоднородным дифференциальным уравнением первого порядка относительно переменной X** .

При $Q(x) = 0$ уравнение

$$y' + P(x)y = 0$$

называется **линейным однородным дифференциальным уравнением первого порядка (ЛОДУ)**.

Разделив уравнение на переменную y и перенося выражение $P(x)$ в правую часть получим: $\frac{y'}{y} = -P(x)$ – уравнение с разделяющимися переменными/

Его общее решение имеет вид: $y = Ce^{g(x)}$, где $C = \text{const}$, $g(x) = -\int P(x)dx$.

Аналогичные рассуждения справедливы для уравнения $x' + P(y)x = Q(y)$.

Линейные дифференциальные уравнения (ЛДУ) первого порядка решаются *методом Бернулли*. Рассмотрим данный метод в следующем алгоритме решения ЛДУ:

- 1) Привести исходное ЛДУ к стандартному виду.
- 2) Найти какое-нибудь ненулевое частное решение $u(x)$ соответствующего ЛОДУ: $u' + P(x)u = 0$.

- 3) Выполнить замену:

$$y = uv, \quad y' = u'v + uv'$$

Найти общее решение в полученном уравнении, т.е. функцию $v(x)$.

- 4) Записать решение исходного ЛДУ в виде $y = u(x) \cdot v(x)$.

Замечание 6. Во всех ЛДУ искомая функция и её производная не перемножаются между собой.

Пример 4. Решить уравнение $y' - 2x - 2xy = 0$.

Решение. Приведем данное уравнение к стандартному виду: $y' - 2xy = 2x$.

Решим соответствующее этому уравнению ЛОДУ (т.е. ЛОДУ, у которого левая часть имеет такой же вид, что и ЛНДУ): $u' - 2xu = 0$ (*).

$$\frac{du}{dx} = 2xu \Leftrightarrow \frac{du}{u} = 2xdx \Rightarrow \int \frac{du}{u} = \int 2xdx \Rightarrow \ln|u| = x^2 + \ln C \Rightarrow u = e^{x^2 + \ln C}$$

Получим общее решение $u = Ce^{x^2}$ уравнения (*). Пусть $C=1$, тогда $u = e^{x^2}$ – его частное решение.

Выполнив замену, получим уравнение: $u'v + uv' - 2xuv = 2x$,

или $uv' + v(u' - 2xuv) = 2x$. Воспользовавшись уравнением (*), получим $uv' = 2x$.

А поскольку $u = e^{x^2}$, то $e^{x^2} v' = 2x$ или $v' = \frac{2x}{e^{x^2}}$. Далее имеем

$$u = \int 2xe^{x^2} dx = \left| -x^2 = t, -2xdx = dt, 2xdx = -dt \right| = -\int e^t dt = -e^t + C = -e^{-x^2} + C.$$

Поскольку была использована замена $y = uv$, то $y = e^{x^2}(-e^{-x^2} + C) = -1 + Ce^{x^2}$ – его общее решение исходного уравнения.

2.23.5. Решение дифференциальных уравнений Бернулли

Определение 14. Дифференциальное уравнение вида

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n,$$

где $n \in \mathbb{R}$, $n \neq 0$, $n \neq 1$, называется **уравнениями Бернулли**.

Замечание 7. Если в уравнении $n = 0$, то получим ЛНДУ вида $y' + P(x)y = Q(x)$.

Уравнение Бернулли можно решить 2 способами.

1 способ: Воспользоваться алгоритмом из 2.23.4.

2 способ: Воспользоваться следующим алгоритмом:

- 1) Определить значение степени n .
- 2) Разделить уравнение на y^n .
- 3) В полученном уравнении: $y^{-n}y' + P(x)y^{1-n} = Q(x)$, сделать замену:

$$z = y^{1-n}, \quad z' = (1-n)y^{-n}y'$$

После замены получится ЛНДУ, которое может быть решено с помощью алгоритма из 2.23.4.

Пример 5. Решить уравнение $y' - xy = x^3y^2$.

Решение. В данном уравнении $n = 2$. Разделим исходное уравнение на y^2 и получим $y^{-2}y' - xy^{1-2} = x^3$.

Сделаем замену: $z = y^{1-2} = y^{-1}$, $z' = (1-2)y^{-2}y'$. В результате получим:

$$\frac{z'}{-1} - xz = x^3 \Leftrightarrow z' + xz = -x^3 \quad (*) - \text{ЛНДУ относительно } z.$$

Решим соответствующее уравнению $(*)$ ЛОДУ: $u' + xu = 0 \quad (**)$ – ДУ с разделяющимися переменными.

$$\frac{du}{dx} = -xu \Rightarrow \int \frac{du}{u} = -\int x dx \Leftrightarrow \ln u = -\frac{x^2}{2} + C.$$

$$\text{Пусть } C=0, \text{ тогда } \ln u = -\frac{x^2}{2} \Rightarrow u = e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Сделаем замену $z = uv$, $z' = u'v + uv'$. Подставим найденные z и z' в уравнение $(*)$ и получим: $u'v + uv' + xuv = -x^3 \Rightarrow v(u' + xu) + uv' = -x^3$.

Воспользовавшись уравнением $(**)$, получим: $uv' = -x^3$.

Поскольку $u = e^{-\frac{x^2}{2}}$, то получим: $e^{-\frac{x^2}{2}}v' = -x^3 \Big| \times e^{\frac{x^2}{2}}$ или $\frac{dv}{dx} = -x^3 e^{\frac{x^2}{2}}$.

$$\text{Отсюда } v = \int -x^3 e^{x^2} dx = \left| \frac{x^2}{2} = t, \quad x dx = dt \right| = -2 \int t e^t dt =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \bar{u} = t \Rightarrow d\bar{u} = dt \\ d\bar{v} = e^t dt \Rightarrow \bar{v} = e^t \end{array} \right| = -2 \left(te^t - \int e^t dt \right) = -2te^t + 2e^t + C = -x^2 e^{\frac{x^2}{2}} + 2e^{\frac{x^2}{2}} + C.$$

Поскольку $z = uv$, то $z = uv = e^{-\frac{x^2}{2}} \left(-x^2 e^{\frac{x^2}{2}} + 2e^{\frac{x^2}{2}} + C \right) = -x^2 + 2 + Ce^{-\frac{x^2}{2}}.$

Так как $y = z^{-1}$, то $y = \frac{1}{-x^2 + 2 + Ce^{-\frac{x^2}{2}}}.$

2.23.6. Решение дифференциальных уравнений в полных дифференциалах

Определение 15. Уравнение вида

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

называется **уравнением в полных дифференциалах**, если его левая часть является полным дифференциалом некоторой неизвестной функции $U(x, y)$, т.е.

$$P(x, y) = \frac{\partial U}{\partial x}, Q(x, y) = \frac{\partial U}{\partial y}, \text{ а } P(x, y)dx + Q(x, y)dy = dU(x, y).$$

Для того, чтобы уравнение было уравнением в полных дифференциалах необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Для решения уравнения в полных дифференциалах решим эквивалентное ему уравнение $dU(x, y) = 0$.

Интегрирование этого уравнения приведет к общему решению $U(x, y) = C$, где C – произвольная постоянная.

Для нахождения функции $U(x, y)$ проинтегрируем, например, первое уравнение $P(x, y) = \frac{\partial U}{\partial x}$ по переменной x при фиксированном значении y .

Получим $U(x, y) = \int P(x, y)dx + C(y)$. Произвольная постоянная может зависеть от переменной y , так как при интегрировании по x переменная y рассматривается как постоянная.

Подставим во второе уравнение $Q(x, y) = \frac{\partial U}{\partial y}$ найденное U .

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\int P(x, y)dx + C(y) \right) = Q(x, y); \quad \frac{\partial}{\partial y} \int P(x, y)dx + \frac{\partial}{\partial y} C(y) = Q(x, y).$$

Далее проинтегрируем по переменной y при фиксированном x , найдем $C(y)$ и восстановим $U(x, y) = \int P(x, y)dx + C(y)$.

Функцию $U(x, y)$ можно также найти и интегрированием второго уравнения $Q(x, y) = \frac{\partial U}{\partial y}$ по переменной y при фиксированном значении x

$$U(x, y) = \int Q(x, y) dy + C(x),$$

а потом – первого уравнения по переменной x при фиксированном y .

Пример 6. Найти общий интеграл уравнения $\frac{y}{x} \cos \frac{y}{x} dx - \left(\frac{1}{x} \cos \frac{y}{x} + 2y \right) dy = 0$.

Решение. Преобразуем исходное уравнение $\frac{y}{x^2} \cos \frac{y}{x} dx + \left(-\frac{1}{x} \cos \frac{y}{x} - 2y \right) dy = 0$.

Пусть

$$P(x, y) = \frac{y}{x^2} \cos \frac{y}{x}$$

$$Q(x, y) = -\frac{1}{x} \cos \frac{y}{x} - 2y.$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \left(\frac{y}{x^2} \cos \frac{y}{x} \right)'_y = \frac{1}{x^2} \left(y \cos \frac{y}{x} \right)'_y = \frac{1}{x^2} \left(\cos \frac{y}{x} - \frac{y}{x} \sin \frac{y}{x} \right),$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \left(-\frac{1}{x} \cos \frac{y}{x} - 2y \right)'_x = \frac{1}{x^2} \cos \frac{y}{x} + \frac{1}{x} \sin \frac{y}{x} \left(-\frac{y}{x^2} \right) = \frac{1}{x^2} \left(\cos \frac{y}{x} - \frac{y}{x} \sin \frac{y}{x} \right).$$

Поскольку $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, то исходное уравнение является уравнением в полных дифференциалах.

Для нахождения общего интеграла $U(x, y) = C$ проинтегрируем уравнение $\frac{\partial U}{\partial x} = P(x, y)$ по переменной x при постоянном y .

$$U(x, y) = \int P(x, y) dx + C(y) = \int \frac{y}{x^2} \cos \frac{y}{x} dx + C(y) = \left| \frac{y}{x} = t \Rightarrow \frac{y}{x^2} dx = -dx \right| =$$

$$= \int \cos t dt + C(y) = -\sin t + C(y) = -\sin \frac{y}{x} + C(y).$$

Подставим полученное выражение $U = U(x, y)$ в уравнение $Q(x, y) = \frac{\partial U}{\partial y}$ и получим

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(-\sin \frac{y}{x} + C(y) \right) = -\frac{1}{x} \cos \frac{y}{x} - 2y.$$

Проинтегрируем полученное уравнение по переменной y при постоянном x :

$$\int \frac{\partial}{\partial y} \left(-\sin \frac{y}{x} \right) dy + \int \frac{\partial(C(y))}{\partial y} dy = \int \left(-\frac{1}{x} \cos \frac{y}{x} - 2y \right) dy.$$

$$-\sin \frac{y}{x} + C(y) = -\sin \frac{y}{x} - y^2 + C.$$

Тогда $C(y) = -y^2 + C$, где C – произвольная постоянная.

Таким образом, общий интеграл исходного уравнения имеет вид

$$-\sin \frac{y}{x} - y^2 = C \Leftrightarrow \sin \frac{y}{x} + y^2 = C.$$

2.23.7. Определение типа дифференциальных уравнений первого порядка по характерным признакам

Для выбора метода решения заданного дифференциальных уравнений первого порядка сперва нужно определить тип, к которому относится это уравнение. Для этого удобно воспользоваться следующей таблицей

Таблица № 2 – Характерные признаки дифференциальных уравнений первого порядка

Тип уравнения	Вид уравнения	Признаки уравнения	Указания к решению
1. ДУ с разделяющимися переменными	а) $y' = f(x, y)$ б) $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$	а) $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$ б) $P(x, y) = P_1(x)P_2(y)$ $Q(x, y) = Q_1(x)Q_2(y)$	а) Воспользоваться алгоритмом из пункта 6.2° б) Воспользоваться замечанием 4 из пункта 6.2°
2. Однородное уравнение	а) $y' = f(x, y)$ б) $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$	а) $f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$ б) $P(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k P(x, y)$ $Q(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k Q(x, y)$	а) Воспользоваться алгоритмом из пункта 6.3° б) Воспользоваться замечанием 5 из пункта 6.3°
3. Линейное уравнение	а) $y' = f(x, y)$ б) $x' = f(x, y)$	а) $f(x, y) = -P(x)y + Q(x)$ б) $f(x, y) = -P(y)x + Q(y)$	а) Воспользоваться алгоритмом из пункта 6.4° б) Воспользоваться алгоритмом из пункта 6.4°, при этом заменяя переменную x на y
4. Уравнение Бернулли	$y' = f(x, y)$	$f(x, y) = -P(x)y + Q(x)y^n$; $n \in R, n \neq 0, n \neq 1$	Воспользоваться алгоритмом из пункта 6.5°
5. Уравнение в полных дифференциалах.	$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$	1) Функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ не раскладываются на множители 2) Выполняется условие: $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$	Воспользоваться методом решения, приведенным в 6.6°

2.24. Решение дифференциальных уравнений высших порядков

2.24.1. Решение дифференциальных уравнений высших порядков

Определение 16. Обыкновенным дифференциальным уравнением n -ого порядка (ОДУ n -го порядка) называется уравнение, связывающее независимую переменную x , искомую функцию $y(x)$ и её производные $y'(x), y''(x), y'''(x), \dots, y^{(n)}(x)$ (до n -го порядка включительно) то есть уравнение следующего вида

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

или

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

ОДУ n -ых порядков часто называют ОДУ высших порядков.

Как и в первой части этого раздела, мы будем рассматривать только обыкновенные дифференциальные уравнения, поэтому под дифференциальным уравнением будем понимать обыкновенное дифференциальное уравнение, и, также как и ранее, слово «обыкновенный» употреблять не будем.

Определение 17. Решением дифференциального уравнения n -го порядка называется такая n раз дифференцируемая функция $y = \varphi(x)$, которая при подстановке её в уравнение обращает это уравнение в верное тождество.

Для дифференциальных уравнений высших порядков справедливы определения 6 – 8.

2.24.2. Решение дифференциальных уравнений высших порядков, разрешенных относительно старшей производной.

Определение 18. Дифференциальное уравнение вида

$$y^{(n)} = f(x)$$

называется *дифференциальным уравнением n -го порядка, разрешенным относительно старшей производной*.

Такие уравнения решаются с помощью процесса $n-1$ раз кратного интегрирования, называемого *понижением его порядка*.

Пример 7. Решить задачу Коши $y'' = x^2 - \cos 2x$, $y(0) = 2\frac{1}{4}$, $y'(0) = 1$.

Решение. Проинтегрируем исходное уравнение по x : $\int y'' dx = \int (x^2 - \cos 2x) dx$.

$$y' = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{2} \sin 2x + C_1 \quad (*)$$

Проинтегрируем уравнение $(*)$ по x : $\int y' dx = \int \left(\frac{x^3}{3} - \frac{1}{2} \sin 2x + C_1 \right) dx$.

$y = \int \frac{x^3}{3} dx - \int \frac{1}{2} \sin 2x dx + \int C_1 dx = \frac{x^4}{12} + \frac{1}{4} \cos 2x + C_1 x + C_2$ – общее решение исходного уравнения.

Найдем частное решение с помощью начальных условий $y(0) = 2\frac{1}{4}$, $y'(0) = 1$.

Подставим условие $y(0) = 2\frac{1}{4}$ в найденное общее решение, получим:
 $2\frac{1}{4} = 0 + \frac{1}{4} + C_1 \cdot 0 + C_2 \Rightarrow C_2 = 2$.

Подставим условие $y'(0) = 1$ в уравнение (*), получим: $1 = 0 - \frac{1}{2} \sin 0 + C_1 \Rightarrow C_1 = 1$.

Т. о. $y = \frac{x^4}{12} + \frac{1}{4} \cos 2x + x + 2$ – частное решение исходного ДУ.

2.24.3. Решение дифференциальных уравнений, допускающие понижение их порядка

а) Уравнения, не содержащие функцию y в явном виде и её первых частных производных до $k-1$ -ого порядка включительно

Определение 19. Дифференциальное уравнение вида

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0$$

называется **дифференциальным уравнением n -го порядка, не содержащим функцию y в явном виде и её первых частных производных до $k-1$ -ого порядка включительно.**

Данные уравнения решаются с помощью следующего алгоритма:

1) Определить значение n и k . Воспользоваться следующей заменой:

$$z = y^{(k)}, z' = y^{(k+1)}, z'' = y^{(k+2)}, \dots, z^{(n-k)} = y^{(n)},$$

где $z = z(x)$.

2) В результате получим уравнение $F(x, z', z'', \dots, z^{(n-k)}) = 0$. Найти общее решение этого уравнения и записать его в виде $z = f(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-k})$.

3) Вернуться к замене $z = y^{(k)}$ и решить следующее уравнение:
 $y^{(k)} = f(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-k})$ с помощью $k-1$ раз кратного интегрирования.

Пример 8. Решить уравнение $y'' = \frac{\sqrt{1-(y')^2}}{x}$.

Решение. В данном уравнении $n = 2$, $k = 1$.

Выполним замену по формулам: $y' = z$, $y'' = z'$, $(y')^2 = z^2$, получим уравнение с

разделяющимися переменными: $z' = \frac{\sqrt{1-z^2}}{x}$ (*)

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\sqrt{1-z^2}}{x} \Leftrightarrow \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{1}{x} dx \Rightarrow \int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \int \frac{1}{x} dx \Rightarrow \arcsin z = \ln|x| + C_1.$$

Тогда $z = \sin(\ln|x| + C_1)$ – общее решение ДУ (*).

Вернемся к замене $y' = z$, получим уравнение $y' = \sin(\ln|x| + C_1)$. Тогда $y = \int \sin(\ln|x| + C_1) dx = \frac{x}{2} (\cos((\ln|x| + C_1)) + \sin(\ln|x| + C_1)) + C_2$ – общее решение исходного ДУ.

б) Уравнения, не содержащие переменную x в явном виде

Определение 20. Дифференциальное уравнение вида

$$F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

называется *дифференциальным уравнением n -го порядка, не содержащим переменную x* .

ДУ решаются с помощью следующего алгоритма:

1) Воспользоваться следующей заменой:

$$y' = p, y'' = p', \dots, y^{(n)} = p^{(n-1)},$$

где $p = p(y)$.

2) В результате получим уравнение $F(y, p, p', \dots, p^{(n-1)}) = 0$. Найти общее решение этого уравнения и записать его в виде $p = f(y, C_1, C_2, \dots, C_{n-1})$.

3) Вернуться к замене $p = y'$ и решить следующее ДУ: $y' = f(y, C_1, C_2, \dots, C_{n-1})$.

Замечание 8. Для решения ДУ 3-го порядка и выше приведенный алгоритм нужно повторить до тех пор, пока порядок старшей производной уравнения $F(y, p, p', \dots, p^{(n-1)}) = 0$ не станет равным 1.

Пример 8. Решить уравнение $y' \cdot y''' = (y'')^2$.

Решение. Воспользоваться заменой: $y' = p, y'' = p', y''' = p''$, где $p = p(y)$, получим следующее ДУ $p \cdot p'' = (p')^2$, не содержащее переменную y .

Воспользоваться заменой: $p' = z, p'' = z'$, где $z = z(p)$, следующее ДУ $p \cdot z \cdot p' = z^2 \Leftrightarrow p \frac{dz}{dp} = z^2 \Leftrightarrow \frac{dz}{z} = \frac{dp}{p} \Leftrightarrow \int \frac{dz}{z} = \int \frac{dp}{p} \Rightarrow \ln|z| = \ln|p| + C_1 \Rightarrow \ln|z| = \ln|C_1 p| \Rightarrow z = C_1 p$.

Вернемся к замене $p' = z$, получим уравнение $p' = C_1 p$ или $\frac{dp}{dy} = C_1 p$.

$$\frac{dp}{C_1 p} = dy \Leftrightarrow C_1 \int \frac{dp}{p} = \int dy \Rightarrow C_1 \ln|p| = y + C_2 \Rightarrow p = e^{\frac{y+C_2}{C_1}} = \frac{C_2}{C_1} e^{\frac{y}{C_1}}$$

Вернемся к замене $y' = p$, получим уравнение $y' = \frac{C_2}{C_1} e^{\frac{y}{C_1}}$ или $\frac{dy}{dx} = \frac{C_2}{C_1} e^{\frac{y}{C_1}}$.

$$\frac{dy}{e^{\frac{y}{C_1}}} = \frac{C_2}{C_1} dx \Leftrightarrow \int \frac{dy}{e^{\frac{y}{C_1}}} = \frac{C_2}{C_1} \int dx \Rightarrow -\frac{C_1}{e^{\frac{y}{C_1}}} = \frac{C_2}{C_1} x + C_3 \Leftrightarrow e^{\frac{y}{C_1}} = \frac{-C_1^2}{C_1 C_3 + x}.$$

Прологарифмируем полученное уравнение по основанию e , получим

$$y = C_1 \ln \left| \frac{-C_1^2}{C_1 C_3 + x} \right| - \text{общее решение исходного ДУ.}$$

2.24.4. Решение линейных дифференциальных уравнений высших порядков

Определение 21. *Линейным неоднородным дифференциальным уравнением n -го порядка (ЛНДУ)* называется уравнение вида

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x)$$

где коэффициенты $a_0(x), a_1(x), a_2(x), \dots, a_n(x)$ и $f(x)$ являются функциями, заданными на некотором промежутке (a, b) .

Определение 22. Если в уравнении (6.26) функция $f(x) = 0$, то такое уравнение

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0$$

называется *линейным однородным дифференциальным уравнением (ЛОДУ) n -го порядка*. При этом однородное уравнение с той же левой частью, что и данное неоднородное, называется *соответствующим ему*.

Определение 23. Уравнения, у которых коэффициенты $a_0, a_1, \dots, a_n$ являются действительными числами, называются *ЛНДУ и ЛОДУ n -го порядка с постоянными коэффициентами* соответственно.

Замечание 9. В дальнейшем мы будем рассматривать только линейные уравнения с постоянными коэффициентами, поэтому вместо понятия «линейное уравнение с постоянными коэффициентами» будем говорить кратко «линейное уравнение».

а) Решение линейных однородных дифференциальных уравнений

Вначале рассмотрим решение ЛОДУ.

Общее решение таких уравнений можно найти по их известным частным решениям.

Определение 24. Функции $y_1, y_2, \dots, y_n$ называются *линейно независимыми на промежутке (a, b)* если для них выполняется тождество $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_n y_n = 0$, которое справедливо только при условии $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$, где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in R$. В противном случае функции $y_1, y_2, \dots, y_n$ называются *линейно зависимыми на промежутке (a, b)* .

В случае двух функций это условие можно сформулировать и так: две функции y_1 и y_2 линейно независимы, если их отношение не является постоянной величиной: $\frac{y_1}{y_2} \neq \text{const.}$

Например:

1) $y_1 = x^{-1}$, $y_2 = x^2$ – линейно независимые функции;

2) $y_1 = \pi x$, $y_2 = 4x$ – линейно зависимы функции.

Теорема 1 (Теорема о структуре общего решения ЛОДУ) Если функции $y_1, y_2, \dots, y_n$ – линейно независимые частные решения уравнения (6.27), то $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$ есть общее решение этого уравнения ($C_1, C_2, \dots, C_n$ – произвольные постоянные).

Определение 25. Совокупность n решений ЛОДУ n -го порядка, определенных и линейно независимых в промежутке (a, b) , называется **фундаментальной системой решений (ФСР)** этого уравнения.

Для ЛОДУ второго порядка вида

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$$

ФСР состоит из двух линейно независимых функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$, а его общее решение находится по формуле:

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

Определение 26. *Характеристическим уравнением ЛОДУ* называют уравнение вида:

$$a_0 k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \dots + a_{n-1} k + a_n = 0,$$

которое получается из уравнения $a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$ заменой в нём производных искомой функции соответствующими степенями k , причем сама функция заменяется единицей. Уравнение является уравнением n -й степени и имеет n корней (действительных или комплексных, среди которых могут быть и равные).

Тогда общее решение ЛОДУ строится в зависимости от характера корней уравнения (6.30):

1) если все корни уравнения действительные и различные, то каждому простому корню k_i ($i = 1, \dots, n$) в общем решении соответствует слагаемое вида $C e^{k_i x}$;

2) если все корни уравнения действительные, но при этом среди этих корней есть равные (кратные корни), то каждому корню кратности m в общем решении соответствует слагаемое вида $(C_1 + C_2 x + \dots + C_m x^{m-1}) e^{k_i x}$;

3) если все корни уравнения комплексные и различные, то каждой паре комплексных сопряженных простых корней $k^{(1)} = \alpha + \beta \cdot i$ и $k^{(2)} = \alpha - \beta \cdot i$ в общем решении соответствует слагаемое вида $e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$;

4) если все корни уравнения комплексные, но при этом среди этих корней есть равные (кратные корни), то каждой паре комплексных сопряженных корней $k^{(1)} = \alpha + \beta \cdot i$ и $k^{(2)} = \alpha - \beta \cdot i$ кратности m в общем решении соответствует слагаемое вида $e^{\alpha x} [(C_1 + C_2 x + \dots + C_{m-1} x^{m-1}) \cos \beta x + e^{\alpha x} (\overline{C_1} + \overline{C_2} x + \dots + \overline{C_{m-1}} x^{m-1}) \sin \beta x]$.

Пример 10. Найти общее решение уравнения $y'' - 9y' + 8y = 0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение $k^2 - 9k + 8 = 0$. Его корнями являются $k_1 = 1$, $k_2 = 8$. Следовательно, e^x и e^{8x} – частные линейно независимые решения, а общее решение имеет вид $y = C_1 e^x + C_2 e^{8x}$.

Пример 11. Найти общее решение уравнения $y''' - 6y'' + 9y' = 0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение $k^3 - 6k^2 + 9k = 0$. Преобразуем его и получим $k(k-3)^2 = 0$, тогда $k_1 = 0$, $k_2 = k_3 = 3$ – корни характеристического уравнения. При этом $k_2 = k_3 = 0$ является двукратным корнем (корнем кратности 2), следовательно линейно независимыми частными решениями служат $1, e^{3x}, xe^{3x}$ (образуют ФСР). Общее решение имеет вид $y = C_1 + C_2 e^{3x} + C_3 x e^{3x}$.

Пример 12. Найти общее решение уравнения $y'' + 4y' + 3y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^2 + 4k + 3 = 0$ имеет корни $k_{1,2} = -2 \pm 3 \cdot i$.

Корни характеристического уравнения комплексные сопряженные, а потому им соответствуют частные решения $y = e^{-2x} \cos 3x$ и $y = e^{-2x} \sin 3x$. Следовательно, общее решение есть $y = e^{-2x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$.

Пример 13. Найти общее решение уравнения $y^{(6)} - 4y^{(5)} + 8y^{(4)} - 8y''' + 4y'' = 0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение $k^6 - 4k^5 + 8k^4 - 8k^3 + 4k^2 = 0 \Leftrightarrow k^2(k^4 - 4k^3 + 8k^2 - 8k + 4) = 0$. Оно имеет 6 корней, из которых 3 корня второй кратности: $k_{1,2} = 0$, $k_{3,4} = 1 + i$, $k_{5,6} = 1 - i$. Значит, фундаментальная система решений имеет вид $1, x, e^x \cos x, xe^x \cos x, e^x \sin x, xe^x \sin x$, следовательно, общее решение есть $y = C_1 + C_2 x + C_3 e^x \cos x + C_4 x e^x \cos x + C_5 e^x \sin x + C_6 x e^x \sin x$.

б) Решение линейных неоднородных дифференциальных уравнений

Структура общего решения линейного неоднородного уравнения:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x)$$

определяется следующей теоремой

Теорема 2. (Теорема о структуре общего решения ЛНДУ) Если функция $u = u(x)$ является частным решением линейного неоднородного уравнения, а функции $y_1, y_2, \dots, y_n$ образуют фундаментальную систему решений соответствующего ему однородного уравнения, то общее решение линейного неоднородного уравнения имеет вид

$$y = u + C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n.$$

Другими словами: общее решение неоднородного уравнения равно сумме любого его частного решения и общего решения соответствующего однородного уравнения.

Следовательно, для построения общего решения неоднородного уравнения требуется найти одно его частное решение (предполагая уже известным общее решение соответствующего однородного уравнения).

Рассмотрим 2 основных метода нахождения частного решения ЛНДУ.

Метод подбора частного решения (метод неопределенных коэффициентов)

Данный метод применим только к линейным уравнениям с постоянными коэффициентами и только в том случае, когда его правая часть имеет следующий вид:

$$f(x) = e^{\alpha x} (P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x),$$

где α и β – постоянные, $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ – многочлены от x соответственно n -й и m -й степеней (или является суммой функций такого вида).

Определение 27. ЛНДУ с правой частью называется *линейным неоднородным уравнением n -го порядка со специальной правой частью*.

Частное решение уравнения со специальной правой частью следует искать в виде

$$u(x) = x^r e^{\alpha x} (P_k(x) \cos \beta x + Q_k(x) \sin \beta x),$$

где число $k = \max\{n, m\}$, число r равно показателю кратности корня $\alpha \pm \beta i$ в характеристическом уравнении, (если же характеристическое уравнение такого корня не имеет, то следует положить $r = 0$),

$P_k(x), Q_k(x)$ — полные многочлены от x степени k с неопределенными коэффициентами.

$$P_k(x) = A_0 x^k + A_1 x^{k-1} + A_2 x^{k-2} + \dots + A_{k-1} x + A_k,$$

$$Q_k(x) = B_0 x^k + B_1 x^{k-1} + B_2 x^{k-2} + \dots + B_{k-1} x + B_k.$$

Замечание 10. Многочлены $P_k(x)$ и $Q_k(x)$ должны быть полными, то есть содержать все степени x от 0 до k с различными неопределенными коэффициентами при одних и тех же степенях x в обоих многочленах, и что при этом, если в выражение функции $f(x)$ входит хотя бы одна из функций $\cos \beta x$ или $\sin \beta x$, то в $u(x)$, надо всегда вводить обе функции.

Неопределенные коэффициенты можно найти из системы линейных алгебраических уравнений, получаемых с помощью приравнивания коэффициентов подобных членов в правой и левой частях исходного уравнения, после подстановки в него $u(x)$ вместо y .

Проверку правильности выбранной формы частного решения дает сопоставление всех членов правой части уравнения с подобными им членами левой части, появившимися в ней после подстановки $u(x)$.

Если правая часть исходного уравнения равна сумме нескольких различных функций рассматриваемой структуры, то для отыскания частного решения такого уравнения нужно использовать теорему наложения решений: надо найти частные решения, соответствующие отдельным слагаемым правой части, и взять их сумму, которая и является частным решением исходного уравнения.

Замечание 11. Частными случаями функции $f(x)$ рассматриваемой структуры (при наличии которых в правой части уравнения применим метод подбора частного решения) являются следующие функции:

1) $f(x) = A e^{\alpha x}$, где A – постоянная, $\{\alpha \pm \beta i = \alpha\}$.

2) $f(x) = A \cos \beta x + B \sin \beta x$, где A и B – постоянные, $\{\alpha \pm \beta i = \beta i\}$

3) $f(x) = P_n(x)$, (многочлен степени n), $\{\alpha \pm \beta i = 0\}$.

4) $f(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$, $\{\alpha \pm \beta i = \alpha\}$.

5) $f(x) = P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x$, $\{\alpha \pm \beta i = \beta i\}$.

6) $f(x) = e^{\alpha x} (A \cos \beta x + B \sin \beta x)$, где A и B – постоянные.

Пример 14. Найти общее решение уравнения $y'' + 2y' + y = xe^{-x}$.

Решение. ЛОДУ для данного уравнения имеет вид: $y'' + 2y' + y = 0$ (*).

Составим и решим характеристическое уравнение: $k^2 + 2k + 1 = 0$, его решением является один корень 2-й кратности $k_1 = k_2 = -1$.

Общее решение однородного уравнения (*) имеет вид $\bar{y} = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$ (функции e^{-x} , $x e^{-x}$ образуют ФСР).

Частное решение исходного ЛНДУ будем искать в виде функции $u = x^r e^{\alpha x} (P_k(x) \cos \beta x + Q_k(x) \sin \beta x)$. Поскольку корнями характеристического уравнения является единственный действительный корень 2-й кратности $k_1 = k_2 = -1$, то $\alpha = -1$, $\beta = 0$, $r = 2$ ($\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$).

Запишем правую часть исходного уравнения $f(x) = x e^{-x}$ и сравним её с функцией $P_k(x) e^{\alpha x}$, отсюда получим $P_k(x) = x$, $k = 1$. Тогда частное решение исходного ЛНДУ будет иметь вид: $u = x^2 e^{-x} (Ax + B)$ (**).

Найдем первую и вторую производную от выражения (**):

$$u' = (e^{-x} (Ax^3 + Bx^2))' = -e^{-x} (Ax^3 + Bx^2) + e^{-x} (3x^2 A + 2xB) = e^{-x} (-Ax^3 - Bx^2 + 3x^2 A + 2xB).$$

$$u'' = (e^{-x} (-Ax^3 - Bx^2 + 3x^2 A + 2xB))' = e^{-x} (Ax^3 + Bx^2 - 6Ax^2 - 4Bx + 6Ax + 2B).$$

Подставим в исходное уравнение найденные выражения для u , u' , u'' вместо y , y' , y'' , получим:

$$e^{-x} (Ax^3 + Bx^2 - 6Ax^2 - 4Bx + 6Ax + 2B) + 2e^{-x} (-Ax^3 - Bx^2 + 3x^2 A + 2xB) + e^{-x} (Ax^3 + Bx^2) = x e^{-x}$$

или

$$(6Ax + 2B) e^{-x} = x e^{-x}.$$

Найдем неизвестные коэффициенты A и B методом неопределенных коэффициентов. Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 6A = 1, \\ 2B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1/6, \\ B = 0. \end{cases}$$

Подставляя найденные коэффициенты A и B в выражение (**), получим $u = x^2 e^{-x} \frac{1}{6} x = \frac{1}{6} x^3 e^{-x}$ – частное решение исходного ЛНДУ.

Согласно теореме 2 общее решение заданного уравнения имеет вид:

$$y = \frac{1}{6}x^3e^{-x} + C_1e^{-x} + C_2xe^{-x}.$$

Метод вариации произвольных постоянных

Данный метод применяется для нахождения частного решения линейного неоднородного уравнения n -го порядка как с переменными, так и с постоянными коэффициентами, если известно общее решение соответствующего однородного уравнения.

Пусть известна фундаментальная система решений $y_1, y_2, \dots, y_n$ соответствующего однородного уравнения. Тогда общее решение неоднородного уравнения следует искать в виде

$$y(x) = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + \cdots + C_n(x)y_n,$$

где функции $C_1(x), C_2(x), \dots, C_n(x)$ определяются из следующей системы уравнений:

[illegible]

и функция $f(x)$ – правая часть данного уравнения.

Для уравнения второго порядка $a_0(x)y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=f(x)$ соответствующая система имеет вид:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0, \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x). \end{cases}$$

Решая систему относительно $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$, а затем, интегрируя $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$ по переменной x , получим решение исходного уравнения.

Пример 15. Найти частное решение уравнения $y'' + y = \frac{1}{\cos x}$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = y'(\pi) = 0$.

Решение. ЛОДУ для данного уравнения имеет вид: $y'' + y = 0$ (*).

Составим и решим характеристическое уравнение: $k^2 + 1 = 0$. Оно имеет 2 комплексных корня $k_{1,2} = \pm i$. Тогда функции $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$ образуют ФСР однородного уравнения (*).

Будем искать общее решение исходного неоднородного уравнения по формуле:
 $y = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x$.

Неизвестные функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ найдем с помощью системы уравнений:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0, \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = \frac{1}{\cos x}, \end{cases}$$

ИЛИ

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0 \\ -C_1'(x)\sin x + C_2'(x)\cos x = \frac{1}{\cos x}. \end{cases}$$

Решая записанную систему, получим:

$$\begin{cases} C_1'(x) = -\frac{\sin x}{\cos x}, \\ C_2'(x) = 1, \end{cases}$$

Проинтегрируем найденные функции:

$$\begin{cases} C_1(x) = -\int \frac{\sin x}{\cos x} dx + A = \ln |\cos x| + C_1, \\ C_2(x) = x + C_2. \end{cases}$$

Таким образом, общее решение исходного уравнения имеет вид:

$$y = (\ln |\cos x| + C_1) \cos x + (x + C_2) \sin x = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \cos x \ln |\cos x| + x \sin x, \quad (**)$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Найдем частное решение исходного уравнения. Для этого вначале найдем производную от общего решения (**):

$$\begin{aligned} y' &= -C_1 \sin x + C_2 \cos x - \sin x \ln |\cos x| - \sin x + \sin x + x \cos x = \\ &= -C_1 \sin x + C_2 \cos x - \sin x \ln |\cos x| + x \cos x. \end{aligned}$$

С помощью начальных условий составим и решим системе уравнений:

$$\begin{cases} C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 + \cos 0 \ln |\cos 0| + 0 \sin 0 = 0, \\ -C_1 \sin \pi + C_2 \cos \pi - \sin \pi \ln |\cos \pi| + \pi \cos \pi = 0. \end{cases}$$

Отсюда получим $C_1 = 0$, $C_2 = -\pi$, тогда частное решение исходного уравнения имеет вид: $y = -\pi \sin x + \cos x \ln |\cos x| + x \sin x$.

2.24.5. Решение систем дифференциальных уравнений

Нормальные системы дифференциальных уравнений

Определение 28. *Нормальной системой дифференциальных уравнений (НСДУ)* называется система вида:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = f_1(t, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \frac{dy_2}{dt} = f_2(t, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \dots\dots\dots \\ \frac{dy_n}{dt} = f_n(t, y_1, y_2, \dots, y_n). \end{cases}$$

где $y_1, y_2, \dots, y_n$ — неизвестные функции от независимой переменной t , функции $f_1, f_2, \dots, f_n$ непрерывны, ограничены и имеют ограниченные частные производные.

Определение 29. Если правые части НСДУ являются линейными функциями относительно $y_1, y_2, \dots, y_n$, то такая система называется **линейной нормальной системой дифференциальных уравнений**.

НСДУ имеет единственное решение, удовлетворяющее условиям:

$$y_1(x_0)=a_0, y_2(x_0)=a_1, \dots, y_n(x_0)=a_n \quad (a_0, a_1, \dots, a_n \in R).$$

Задача нахождения решения НСДУ при начальных условиях называется *задачей Коши для системы дифференциальных уравнений*. Поскольку числа $a_0, a_1, \dots, a_n$ могут быть выбраны произвольно, то общее решение системы зависит от n произвольных постоянных $C_1, C_2, \dots, C_n$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dy_1}{dt} = f_1(t, C_1, C_2, \dots, C_n), \\ \frac{dy_2}{dt} = f_2(t, C_1, C_2, \dots, C_n), \\ \dots\dots\dots \\ \frac{dy_n}{dt} = f_n(t, C_1, C_2, \dots, C_n). \end{array} \right.$$

Иногда НСДУ удается свести к одному уравнению n -го порядка, содержащему одну неизвестную функцию. Сведение нормальной системы к одному уравнению может быть достигнуто дифференцированием одного из уравнений системы и исключением всех неизвестных, кроме одного (так называемый *метод исключения*).

В некоторых случаях, комбинируя уравнения системы, после несложных преобразований удастся получить легко интегрируемые уравнения (так называемый *метод интегрируемых комбинаций*), что позволяет найти решение системы.

Пример 16. Решить систему дифференциальных уравнений
$$\begin{cases} x'_t = \frac{x^2}{y}, \\ y'_t = x. \end{cases}$$

Решение. Подставим $x = y'$ из второго уравнения в первое, получим: $y'' = \frac{(y')^2}{y}$ — ДУ 2-го порядка, не содержащее переменную t в явном виде. Воспользуемся подстановкой: $y' = p$, (где $p = p(y)$) $y'' = p'p$, получим ДУ 1-го порядка:

$$p'p = \frac{p^2}{y} \Leftrightarrow p' = \frac{p}{y} \Leftrightarrow \frac{dp}{p} = \frac{dy}{y} \Rightarrow \int \frac{dp}{p} = \int \frac{dy}{y} \Rightarrow \ln|p| = \ln|y| + C_1 \Rightarrow p = C_1 y.$$

Выполним обратную замену, имеем: $y' = C_1 y$.

$$\frac{dy}{dt} = C_1 y \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = C_1 dt \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int C_1 dt \Rightarrow y = C_1 C_2 e^{C_1 t}.$$

3. РУКОВОДСТВО К САМОСТОЯТЕЛЬНОМУ ИЗУЧЕНИЮ ТЕМ КУРСА

Предел функции

Предел функции $f(x)$ в точке a равен b , если для любой последовательности значений аргумента $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ ($x_n \neq a$), имеющей предел a , последовательность соответствующих значений функции $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots$ имеет предел равный b .

Обозначается: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ или $f(x) \rightarrow b$ при $x \rightarrow a$.

Предел функции $f(x)$ в точке a равен b , если для любого сколь угодно малого положительного числа ε найдется такое положительное число δ , зависящее от ε , что для всех $x \in D(f)$, не равных a и удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D(f) \quad (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon).$$

Число b называется **пределом функции** $f(x)$ при $x \rightarrow a$ *слева* ($x < a$), если для нее существует предел $f(a - 0) = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = b$.

Число b называется **пределом функции** $y = f(x)$ при $x \rightarrow a$ и $x > a$ *справа*, если для нее существует предел $f(a + 0) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b$.

Для **существования** обыкновенного **предела функции** $f(x)$ при $x \rightarrow a$ **необходимо и достаточно** существование каждого и равенство обоих пределов слева и справа: $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) =$

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b.$$

Если функция $f(x)$ имеет различные пределы при $x \rightarrow a - 0$ и при $x \rightarrow a + 0$, то говорят, что $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ не существует.

В зависимости от вида конкретных функций $f(x)$ и $g(x)$ предел может быть равен числу, $+\infty$, $-\infty$, ∞ , может не существовать.

Поэтому говорят, что в этих случаях мы имеем **неопределенности** вида:

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0 \cdot \infty, \quad \infty - \infty.$$

Кроме этих неопределенностей, связанных с арифметическими действиями над пределами, существуют **неопределенности вида**: ∞^0 , 0^∞ , 1^∞ , относящиеся к пределу вида

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)}.$$

Чтобы найти пределы при наличии неопределенности, надо эту неопределенность устранить (раскрыть). Это достигается, с одной стороны, применением алгебраических и тригонометрических преобразований, заменой переменной, использованием эквивалентных бесконечно малых и бесконечно больших, а с другой стороны, использованием так называемых **замечательных пределов**.

Раскрытие неопределенности различных видов

Раскрытие неопределенности вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ Рассмотрим $\lim_{x \rightarrow a} \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$. Если $P_m(x)$, $Q_n(x)$ целые многочлены и $P_m(a) \neq 0$ или $Q_n(a) \neq 0$, то предел рациональной дроби $\lim_{x \rightarrow a} \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ находится непосредственно.

Если же $x \rightarrow a$ $P_m(x) \rightarrow 0$, $Q_n(x) \rightarrow 0$, имеем неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. Для раскрытия неопределенности следует разложить числитель и знаменатель дроби на множители, выделив тем самым обнуляющий множитель $(x - a)$, а затем сократить дробь на $(x - a)$. Сокращение возможно, так как при $x \rightarrow a$ знаменатель лишь стремится к нулю, но не равен нулю.

Пример 1. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^2 - 13x + 20}{x - 4}$.

Решение: $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^2 - 13x + 20}{x - 4} = \left(\frac{0}{0}\right)$. Так как многочлен обращается в нуль при $x = 4$, то он делится без остатка на $(x - 4)$. Значит, можно выделить в числителе и в знаменателе обнуляющий множитель $(x - 4)$.

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^2 - 13x + 20}{x - 4} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 \cdot (x - 4) \cdot (2x - 5)}{x - 4} = 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 4} (2x - 5) = 2 \cdot 3 = 6.$$

Пример 2. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}{x^3 - 7x^2 + 16x - 12}$.

Решение: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}{x^3 - 7x^2 + 16x - 12} = \left(\frac{0}{0}\right)$, следовательно, в числителе и знаменателе можно выделить множитель $(x - 2)$. Проведем деление «уголком».

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 2x^2 - 4x + 8 & x - 2 \\ \underline{x^3 - 2x^2} & x^2 - 4 \\ & -4x + 8 \\ & \underline{-4x + 8} \\ & 0 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} x^3 - 7x^2 + 16x - 12 & x - 2 \\ \underline{x^3 - 2x^2} & x^2 - 5x + 6 \\ & -5x^2 + 16x - 12 \\ & \underline{-5x^2 + 10x} \\ & 6x - 12 \\ & \underline{6x - 12} \\ & 0 \end{array}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}{x^3 - 7x^2 + 16x - 12} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2) \cdot (x^2 - 4)}{(x-2) \cdot (x^2 - 5x + 6)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6}.$$

После сокращения на $(x-2)$ дробь упростилась, но неопределенность не ушла. Это означает, что в числителе и в знаменателе ещё раз можно выделить обнуляющий множитель $(x-2)$ и сократить на него:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x-3} = -4.$$

Выражения, содержащие иррациональности, приводятся к рациональному виду во многих случаях путем введения новой переменной.

Пример 3. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 16} \frac{2 - \sqrt[4]{x}}{4 - \sqrt{x}}$

Решение:

$$\lim_{x \rightarrow 16} \frac{2 - \sqrt[4]{x}}{4 - \sqrt{x}} = \left(\frac{0}{0} \right) = \left. \begin{array}{l} t = \sqrt[4]{x} \\ x \rightarrow 16 \\ t \rightarrow 2 \end{array} \right| = \lim_{t \rightarrow 2} \frac{2-t}{4-t^2} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{t \rightarrow 2} \frac{2-t}{(2-t)(2+t)} = \lim_{t \rightarrow 2} \frac{1}{2+t} = \frac{1}{4}.$$

Другим приёмом нахождения предела от иррационального выражения является перевод иррациональности из числителя в знаменатель или, наоборот, из знаменателя в числитель.

Пример 4. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x}-2}{x-1}$.

Решение: Заметим, что при $x \rightarrow 1$ и числитель, и знаменатель также стремятся к нулю. Переведем иррациональность из числителя в знаменатель, для этого умножим числитель и знаменатель на выражение, сопряженное числителю. Получим:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x}-2}{x-1} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{5-x}-2)(\sqrt{5-x}+2)}{(x-1)(\sqrt{5-x}+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x)}{(x-1)(\sqrt{5-x}+2)}.$$

В числителе и знаменателе выделился обнуляющий множитель $(x-1)$, сократим на него, тем самым избавимся от неопределенности:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x)}{(x-1)(\sqrt{5-x}+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{\sqrt{5-x}+2} = -\frac{1}{4}.$$

Пример 5. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{2-x}-1}$.

Решение: Подставим в выражение $x=1$ и убедимся, что имеем неопределенность вида $\left(\frac{0}{0} \right)$.

Иррациональность содержится и в числителе, и в знаменателе дроби. Умножим числитель и знаменатель на выражение, сопряженное числителю, а затем - на сопряженное знаменателю. Используя формулы сокращенного умножения, упростим выражение, выделим обнуляющий множитель $(x-1)$ и сократим на него:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{2-x}-1} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{5-x}-2)(\sqrt{5-x}+2)(\sqrt{2-x}+1)}{(\sqrt{2-x}-1)(\sqrt{2-x}+1)(\sqrt{5-x}+2)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x)(\sqrt{2-x}+1)}{(1-x)(\sqrt{5-x}+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2-x}+1}{\sqrt{5-x}+2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Раскрытие неопределенности вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

При отыскании предела отношения двух целых многочленов относительно x при $x \rightarrow \infty$ оба члена отношения полезно предварительно разделить на старшую степень x^n , где n - наивысшая степень этих многочленов.

Аналогичный приём во многих случаях можно применять и для дробей, содержащих иррациональности.

Пример 6. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 4x - 1}{5x^3 + 2x + 7}$.

Решение: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 4x - 1}{5x^3 + 2x + 7} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right).$

Разделим числитель и знаменатель на старшую степень x^3 , тогда

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 4x - 1}{5x^3 + 2x + 7} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2} - \frac{1}{x^3}}{5 + \frac{2}{x^2} + \frac{7}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - 0 + 0 - 0}{5 + 0 + 0} = \frac{1}{5}.$$

Пример 7. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 5x - 8}{x^4 - 2x^3 + 8x}$.

Решение: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 5x - 8}{x^4 - 2x^3 + 8x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Разделим числитель и знаменатель на x^4 , тогда

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 5x - 8}{x^4 - 2x^3 + 8x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{4}{x^2} + \frac{5}{x^3} - \frac{8}{x^4}}{1 - \frac{2}{x} + \frac{8}{x^3}} = \frac{0}{1} = 0.$$

Пример 8. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 + x^2 - 9x}{6x^3 - 3x^2 + 1}$.

Решение: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 + x^2 - 9x}{6x^3 - 3x^2 + 1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ Разделим числитель и знаменатель на x^5 , тогда

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 + x^2 - 9x}{6x^3 - 3x^2 + 1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{x^3} - \frac{9}{x^4}}{\frac{6}{x^2} - \frac{3}{x^3} + \frac{1}{x^5}} = \left(\frac{1}{0}\right) = \infty.$$

Пример 9. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt[3]{x^3+1}}{\sqrt[4]{x+1} - \sqrt[5]{x^5+1}}$.

Решение: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt[3]{x^3+1}}{\sqrt[4]{x+1} - \sqrt[5]{x^5+1}} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right).$

Разделим числитель и знаменатель на старшую степень – на X , тогда

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt[3]{x^3+1}}{\sqrt[4]{x+1} - \sqrt[5]{x^5+1}} &= \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt{x+1}}{x} - \frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{x}}{\frac{\sqrt[4]{x+1}}{x} - \frac{\sqrt[5]{x^5+1}}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{x}{x^2} + \frac{1}{x^2}} - \sqrt[3]{\frac{x^3}{x^3} + \frac{1}{x^3}}}{\sqrt[4]{\frac{x}{x^4} + \frac{1}{x^4}} - \sqrt[5]{\frac{x^5}{x^5} + \frac{1}{x^5}}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^3}}}{\sqrt[4]{\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4}} - \sqrt[5]{1 + \frac{1}{x^5}}} = \frac{-\sqrt[3]{1}}{-\sqrt[5]{1}} = 1. \end{aligned}$$

Нетрудно заметить, что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \dots + A_m}{B_0 x^n + B_1 x^{n-1} + \dots + B_n} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \begin{cases} \frac{A_0}{B_0}, & \text{если } m = n, \\ 0, & \text{если } m < n, \\ \infty, & \text{если } m > n. \end{cases}$$

Неопределенности вида $\left(\frac{0}{0} \right)$ может быть раскрыта при помощи первого замечательного предела и с использованием эквивалентности бесконечно малых.

Замечательные пределы

Первым замечательным пределом называется $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$

Пример 10. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{2x}.$

Решение: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cdot \sin 6x}{3 \cdot 2x} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{6x} = 3 \cdot 1 = 3.$

Пример 11. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}.$

Решение:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \left| 1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{2 \cdot \left(\frac{x}{2} \right)^2} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2} \right)^2} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

Второй замечательный предел

Вторым замечательным пределом называется $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

Второй замечательный предел используется на практике при вычислении пределов степенно-показательных функций в случае неопределенности (1^∞) .

Пример 12. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{5x}$.

$$\begin{aligned} \text{Решение: } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{5x} &= \left| \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right) = 1, \\ \lim_{x \rightarrow \infty} 5x = \infty \end{array} \right| = (1^\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}} \right]^{\frac{2}{x} \cdot 5x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \underbrace{\left[\left(1 + \frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}} \right]^{10}}_e = e^{10}. \end{aligned}$$

Пример 13. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 3x)^{\frac{2}{x}}$.

$$\begin{aligned} \text{Решение: } \lim_{x \rightarrow 0} (1 - 3x)^{\frac{2}{x}} &= \left| \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} (1 - 3x) = 1, \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x} = \infty \end{array} \right| = (1^\infty) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[(1 + (-3x))^{\frac{1}{-3x}} \right]^{-3x \cdot \frac{2}{x}} = \\ \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\left[(1 + (-3x))^{\frac{1}{-3x}} \right]^{-6}}_e &= e^{-6} = \frac{1}{e^6} \end{aligned}$$

Эквивалентные бесконечно малые

Бесконечно малые называются эквивалентными друг другу при $x \rightarrow a$, если

$$\lim_{x \rightarrow a(\infty)} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \left(\frac{0}{0} \right) = 1.$$

Приведем таблицу эквивалентных бесконечно малых функций при $x \rightarrow 0$.

при $x \rightarrow 0$	
$\sin x \sim x$	$e^x - 1 \sim x$
$\operatorname{tg} x \sim x$	$a^x - 1 \sim x \cdot \ln a$
$\arcsin x \sim x$	$\ln(1+x) \sim x$
$\operatorname{arctg} x \sim x$	$\log_a(1+x) \sim \frac{x}{\ln a}$
$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$	$(1+x)^{\frac{m}{n}} - 1 \sim x \cdot \frac{m}{n}$
$(1+x)^m - 1 \sim mx$	$\sqrt{1+x} - 1 \sim \frac{x}{2}$

Эквивалентность бесконечно малых можно использовать при вычислении пределов произведения (или дроби, так как любую дробь можно представить в виде произведения) бесконечно малые величины можно заменять эквивалентными.

Пример 14. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+5x)}{e^{3x}-1}$.

$$\text{Решение: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+5x)}{e^{3x}-1} = \left(\frac{0}{0} \right) = \left. \begin{array}{l} \text{при } x \rightarrow 0 \quad 5x \rightarrow 0 \quad \text{и} \quad 3x \rightarrow 0 \\ \ln(1+5x) \sim 5x \\ e^{3x}-1 \sim 3x \end{array} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{3x} = \frac{5}{3}.$$

уверенно делать эквивалентные замены можно именно в произведениях и очень осторожно в случае суммы или разности, так как в последнем случае могут получаться бесконечно малые более высокого порядка, чем слагаемые.

Пример 15. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$.

$$\begin{aligned} \text{Решение: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} &= \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{x^3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot (1 - \cos x)}{x^3 \cdot \cos x} = \left. \begin{array}{l} x \rightarrow 0 \\ 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2} \\ \sin x \sim x \end{array} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \frac{x^2}{2}}{x^3 \cdot \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2 \cos x} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Пример 16. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{\sin \frac{x}{2} \cdot \operatorname{tg} 4x}$.

Решение:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{\sin \frac{x}{2} \cdot \operatorname{tg} 4x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \left. \begin{array}{l} x \rightarrow 0 \\ 1 - \cos 2x \sim \frac{(2x)^2}{2} \\ \sin \frac{x}{2} \sim \frac{x}{2} \\ \operatorname{tg} 4x \sim 4x \end{array} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{(2x)^2}{2}}{\frac{x}{2} \cdot 4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

Пример 17. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{(1+5x)^2} - 1}{x^3}$.

$$\text{Решение: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{(1+5x)^2} - 1}{x^3} = \left(\frac{0}{0} \right) = \left. \begin{array}{l} x \rightarrow 0 \\ \sqrt[5]{(1+5x)^2} - 1 \sim \frac{2}{5} \cdot 5x \end{array} \right| =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{5} \cdot 5x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x^2} = \left(\frac{2}{0} \right) = \infty.$$

Пример 18. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3^{x+1} - 1}{\arctg(2x + 2)}$.

$$\text{Решение: } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3^{x+1} - 1}{\arctg(2x + 2)} = \left(\frac{0}{0} \right) = \left| \begin{array}{l} x+1 \rightarrow 0 \\ 3^{x+1} - 1 \sim (x+1) \cdot \ln 3 \\ \arctg(2x + 2) \sim 2x + 2 \end{array} \right| = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1) \cdot \ln 3}{2x + 2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1) \cdot \ln 3}{2(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\ln 3}{2} = \frac{\ln 3}{2}.$$

Пример 19. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow \infty} 3^{\frac{2x^2+7x-3}{x^2+2}}$.

Решение: В данном случае имеем предел отношения двух целых многочленов в показателе степени. В силу непрерывности показательной функции, перенесём знак предела в

показатель степени: $\lim_{x \rightarrow \infty} 3^{\frac{2x^2+7x-3}{x^2+2}} = 3^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+7x-3}{x^2+2}} = 3^2 = 9.$

Пример 20. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{4} \right)^{\frac{x^3-5x^2+9}{x-5}}$.

$$\text{Решение: } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{4} \right)^{\frac{x^3-5x^2+9}{x-5}} = \left(\frac{1}{4} \right)^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3-5x^2+9}{x-5}} = \left(\frac{1}{4} \right)^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-\frac{5}{x}+\frac{9}{x^3}}{\frac{1}{x^2}-\frac{5}{x^3}}} = \left(\frac{1}{4} \right)^{+\infty} = 0.$$

Раскрытие неопределенности вида $(0 \cdot \infty)$, $(\infty - \infty)$

Неопределенности вида $(0 \cdot \infty)$, $(\infty - \infty)$ чаще всего сводят к неопределенностям вида

$$\left(\frac{0}{0} \right) \text{ или } \left(\frac{\infty}{\infty} \right).$$

Пример 21. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{5x-2} - \frac{x^3}{x^2+2} \right)$.

$$\text{Решение: } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{5x-2} - \frac{x^3}{x^2+2} \right) = (\infty - \infty).$$

Чтобы раскрыть неопределенность, приведем дроби к общему знаменателю.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{5x-2} - \frac{x^3}{x^2+2} \right) = (\infty - \infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(x^2+2) - x^3(5x-1)}{(5x-2)(x^2+2)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4x^4 + x^3 + 2x^2}{5x^3 - 2x^2 + 10x - 4} = \infty.$$

Пример 22. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{2x+5} - \sqrt{2x-1})$.

Решение: Для раскрытия неопределенности $(\infty - \infty)$ умножим и разделим стоящую под знаком предела функцию на сопряженную ей функцию $(\sqrt{2x+5} + \sqrt{2x-1})$, получим:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{2x+5} - \sqrt{2x-1}) = (\infty - \infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{2x+5} - \sqrt{2x-1}) \cdot (\sqrt{2x+5} + \sqrt{2x-1})}{\sqrt{2x+5} + \sqrt{2x-1}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x+5) - (2x-1)}{\sqrt{2x+5} + \sqrt{2x-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6}{\sqrt{2x+5} + \sqrt{2x-1}} = \frac{6}{\infty} = 0.$$

Пример 23. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \operatorname{tg} x$

$$\text{Решение: } \lim_{\substack{x \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ (x - \frac{\pi}{2} \rightarrow 0)}} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \operatorname{tg} x = (0 \cdot \infty) = \left| \begin{array}{l} t = x - \frac{\pi}{2} \\ x \rightarrow \frac{\pi}{2}, \quad t \rightarrow 0 \end{array} \right| = \lim_{t \rightarrow 0} (-t) \operatorname{tg} \left(t + \frac{\pi}{2} \right) =$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} (t \cdot \operatorname{ctg} t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\operatorname{tg} t} = \left(\frac{0}{0} \right) = 1.$$

Пример 24. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \left(2^{\frac{1}{x}} - 1 \right)$.

Решение:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \left(2^{\frac{1}{x}} - 1 \right) = (\infty \cdot 0) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{0}{0} \right) = \left| \begin{array}{l} \frac{1}{x} \rightarrow 0 \\ 2^{\frac{1}{x}} - 1 \sim \frac{1}{x} \cdot \ln 2 \end{array} \right| = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x} \cdot \ln 2}{\frac{1}{x}} = \ln 2.$$

Пример 25. Вычислить предел.

$$\text{Решение: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x+1} \right)^{x^2-1} = \left| \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x+1} \right) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 1) = +\infty \end{array} \right| = (1^\infty).$$

Выделим под пределом число e :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{x+1}\right)^{(x+1)}}_e^{\frac{1}{x+1} \cdot (x^2-1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{x^2-1}{x+1}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)(x-1)}{x+1}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1)} = e^{+\infty} = +\infty.$$

Задачи для самостоятельного решения

Найдите предел функции

Вариант 1

- 1) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1-x}{2x^2-3x+1},$
- 2) $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{3x}{x-6},$
- 3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4-2x^2+5x}{4x^4-3x^3+2},$
- 4) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3+x^2+2x+2}{x^3+x^2+3x+3},$
- 5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x+1}\right)^{x^2-1},$
- 6) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3}{1-x} - \frac{x}{x^2-1}\right),$
- 7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x}{\sqrt{4+3x} - \sqrt{4-3x}},$
- 8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-\sin x)}{e^{tgx} - 1},$
- 9) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{15x+4}{15x-1}\right)^{5x-1}$
- 10) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2x-1}{x}\right)^{1/(\sqrt[3]{x}-1)}.$

Вариант 2

- 1) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{5x+6}{x^2-3x-27},$
- 2) $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{2x}{9-x},$
- 3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4-2x^2+5x}{4x^2-2x+5},$
- 4) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x^2+2x-3)^2}{x^3+4x^2+3x},$
- 5) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-x^2+5x-5}{x^3-x^2+6x-6},$
- 6) $\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{5}{1+x} - \frac{4}{1-x^2}\right),$
- 7) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^2}{1-\sqrt{2x-1}},$
- 8) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3+1}{\sin(x+1)},$
- 9) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos \sqrt{x})^{\frac{1}{x}},$
- 10) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{7x}{7x+5}\right)^{14x+6}.$

Вариант 3

- 1) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3-x}{3x^2-x},$
- 2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x^2+1},$
- 3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+3x^2-3x}{3x^4+2x^2-2x},$
- 4) $\lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4},$
- 5) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-3x+2},$
- 6) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{7}{2-x} - \frac{3x}{4-x^2}\right),$
- 7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{16+x}-4}{x},$
- 8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x}-2}{3 \arctg x},$
- 9) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^2}{\sin \pi x},$
- 10) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-10}{x+10}\right)^{\frac{2x+5}{3}}.$

Вариант 4

- 1) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{9-x}{1-x^2},$
- 2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2-25},$
- 3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^4+3x^3-2x^2-1}{3x^4-3x^3+2},$
- 4) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x^2-2x-3},$
- 5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x+1}\right)^{x^2-1},$
- 6) $\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{4}{2+x} - \frac{9}{4-x^2}\right),$
- 7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{25+x}-5}{x},$
- 8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg(x+1)}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}},$
- 9) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{6x+2}{6x-5}\right)^{3x+15},$
- 10) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(1 - \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right)^{\frac{3}{2x-\pi}}.$

Вариант 5

- 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{9-x^2}{x^3-2x+18},$
- 2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x^2+1},$
- 3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3-3x^2+2x-7}{5x^5-3x^3+2x},$
- 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-3x)}{\sqrt{8x+4}-2},$
- 5) $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{x^2-7x-18}{x^2-10x+9},$
- 6) $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{2x-6} - \frac{x}{x^2-9}\right),$
- 7) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{7+x}-\sqrt{1-x}}{x^2+6x+9},$
- 8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg 3x}{e^{-6x}-1},$
- 9) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{\sin 3x}\right)^{x^2},$
- 10) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{11x-5}{11x-7}\right)^{22x+1}.$

Вариант 6

- 1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+2x}{x^3-2x^2+3},$
- 2) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x}{(x-1)(x+1)},$
- 3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+2x+1}{3x^2+2x+1},$
- 4) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{\ln x},$
- 5) $\lim_{x \rightarrow -9} \frac{x^2-8x-153}{x^2+11x+18},$
- 6) $\lim_{x \rightarrow -3} \left(\frac{10}{x+3} - \frac{5}{x^2-9}\right),$
- 7) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{5+x}-\sqrt{4x+8}}{x^2+2x+1},$
- 8) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{5^{x-2}-1}{\arcsin^2(x-2)},$
- 9) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2+2x+1}{3x^2-x-1}\right)^{\frac{x+1}{2}},$
- 10) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2-3}{x^2-4}\right)^{x^2+2}.$

Вариант 7

- 1) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{-4x^2+2}{x^3-2x^2+5},$
- 6) $\lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{1}{12-3x} - \frac{2x}{x^2-16}\right),$

$$2) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{3}{x^2 - 9},$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 1}{5x^2 - 2},$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{tgx - tg2}{\sin \ln(x-1)},$$

$$5) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - x - 6},$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x} - 1}{x^3 + x^2},$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin 4x)}{e^{tgx} - 1},$$

$$9) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x+2}{5x-3} \right)^{2x-1},$$

$$10) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{7x-2}{7x-3} \right)^{2x}.$$

Вариант 8

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x}{x^3 - 2x + 8},$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{5x}{x^2 - 9},$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 1}{x^7 + 3x^5 - x^4 + 2},$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7^{3x} - 3^{2x}}{tgx + x^3},$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 2x - 8}{x^2 - 3x - 4},$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 5} \left(\frac{1}{15-3x} - \frac{x}{x^2-25} \right),$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x-15}{\sqrt{2x-6}-2},$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{e^{3x} - 1},$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + tg^2 3x \right)^{\frac{1}{x^2}},$$

$$10) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+5}{x-6} \right)^{3+2x}.$$

Вариант 9

$$1) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{-x^2 - 6}{2x^3 - x - 6},$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x(x^2 - 9)},$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1},$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos \sqrt{x})^{\frac{1}{x}},$$

$$5) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 8x - 9}{x^3 + x^2 - 9x - 9},$$

$$6) \lim_{x \rightarrow -5} \left(\frac{1}{4x+20} - \frac{1}{x^2-25} \right),$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x-3} - \sqrt{x-1}}{x^2 - 4},$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{1+2x} - 1}{e^{4x} - 1},$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin x}{1 - \cos x},$$

$$10) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 2}{x^2 + 4} \right)^{\frac{3x^2 + x}{2}}.$$

Вариант 10

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + 2x + 1}{x^3 - 9x - 6},$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -4} \frac{5x}{16 - x^2},$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x + 1}{3x^3 + x^2 + 2x + 1},$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{4x} - \frac{1}{x^2 - x} \right),$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{\sqrt{3x-5} - \sqrt{2x-2}},$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_2(1+3x)}{\arcsin 9x},$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1},$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin^2 2x}{1 - \cos 3x},$$

$$5) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 5x + 6}{x^3 + 3x^2 + 2x + 6},$$

$$10) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+5} \right)^{7+4x}.$$

Непрерывность функции в точке

Понятие непрерывности функции, так же как и понятие предела, является одним из основных понятий математического анализа.

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, которая определена в окрестности точки x_0 .

Определение 1: Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0 , если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Функцию $f(x)$ следует считать *непрерывной в точке* $x = x_0$, если она:

- 1) определена в точке x_0 и в точках некоторой ее окрестности (т.е. существует $f(x_0)$),
- 2) имеет в этой точке конечные односторонние пределы, равные между собой,
- 3) значение односторонних пределов равно значению функции в точке x_0 , т.е. $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = f(x_0)$.

Пример 1. Исследовать непрерывность в точке x_0 функций, заданных графически.

Решение. а) В точке $x = x_0$ функция $y = f(x)$ (на рис. 1.а) не является непрерывной, так как нарушено первое условие непрерывности – существование $f(x_0)$ ($x_0 \notin D(f)$).

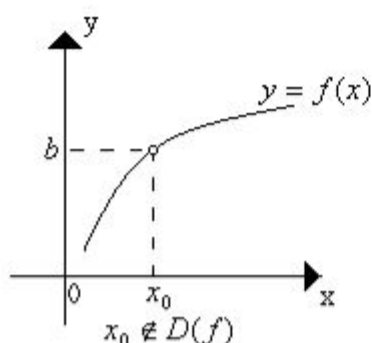
б) В точке $x = x_0$ функция $y = f(x)$ (на рис. 1.б) не является непрерывной. Первые два условия непрерывности выполнены, но нарушено третье условие: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

в) В точке $x = x_0$ (на рис. 1.в) первое условие непрерывности выполнено: $f(x_0)$ существует. Но нарушено второе условие – существуют односторонние пределы функции слева и справа в точке $x = x_0$, но они не равны между собой ($\lim_{x \rightarrow x_0=0} f(x) = f(x_0)$ и $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = b$), а, значит, не существует общий предел функции в точке $x = x_0$.

Следовательно, в точке $x = x_0$ функция $y = f(x)$ не является непрерывной.

г) В точке $x = x_0$ функция $y = f(x)$ (на рис. 1.г) непрерывна, так как выполнены все три условия непрерывности: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) = b$.

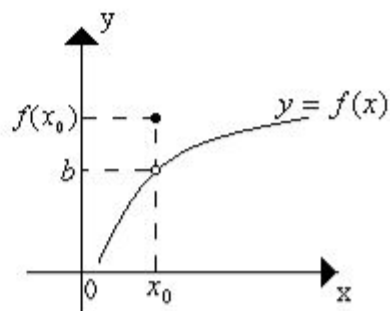
а)



существуют конечные
одно сторонние пределы, причем

$$\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$$

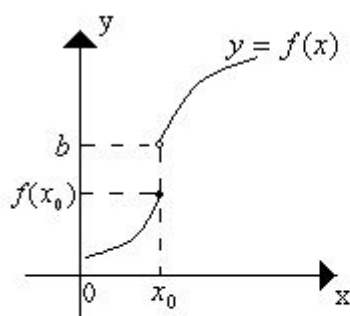
б)



существуют конечные
одно сторонние пределы, причем

$$\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) \neq f(x_0)$$

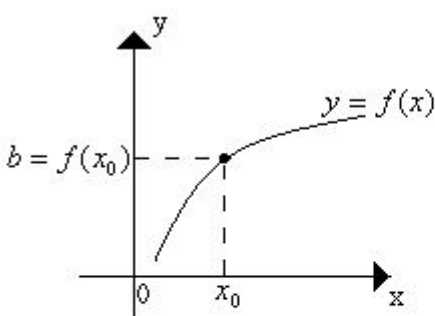
в)



существуют конечные
одно сторонние пределы, причем

$$\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$$

г)



существуют конечные
одно сторонние пределы, причем

$$\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = f(x_0)$$

Только в этом случае функция $f(x)$ непрерывна в т. x_0 .

рис. 1.

Если областью определения функции является промежуток числовой оси, то очевидно, что непрерывность функции в данной точке выражается непрерывностью её графика при прохождении данной точки (без отрыва карандаша от листа бумаги).

Дадим еще два определения непрерывности функции в точке, используя определения предела функции на языке окрестности и на языке " $\varepsilon - \delta$ ".

Определение 2. $f(x)$ непрерывна в точке x_0 , если для любой окрестности точки $f(x_0)$ найдётся такая окрестность точки x_0 , что для любой точки $x \in D(f)$ из найденной окрестности точки x_0 значение функции в этой точке непременно окажется в выбранной произвольно окрестности точки $f(x_0)$, т.е.

$$f(x) \text{ непрерывна в точке } x_0 \iff \forall V_{f(x_0)} \exists U_{x_0} \forall x_{x \in D(f)} (x \in U_{x_0} \Rightarrow f(x) \in V_{f(x_0)}).$$

На языке неравенств (на языке " ε - δ ") понятие непрерывности функции в точке выразится так:

Определение 3. $f(x)$ непрерывна в точке $x = x_0$, если каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, для него найдется такое число $\delta > 0$, что неравенство $|x - x_0| < \delta$ влечет за собой неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, т.е.

$$f(x) \text{ непрерывна в т. } x_0 \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x_{x \in D(f)} (|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon).$$

Пусть $f(x)$ непрерывна в точке x_0 .

В равенстве $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ перенесем $f(x_0)$ в левую часть равенства.

Тогда:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)],$$

Выражение " $x \rightarrow x_0$ " эквивалентно выражению " $x - x_0 \rightarrow 0$ ".

Обозначим разность $x - x_0 = \Delta x$ и назовём приращением аргумента,

а $f(x) - f(x_0) = \Delta y$ - соответствующим приращением функции.

Тогда $\Delta x = x - x_0$, $x = x_0 + \Delta x$, $\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Так как $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - f(x_0) = 0$, то $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$.

Это позволяет сформулировать еще одно определение непрерывности функции в точке:

$$\text{Определение 4. } y = f(x) \text{ непрерывна в точке } x = x_0 \iff \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0,$$

т.е. бесконечно малому приращению аргумента в точке $x = x_0$ соответствует бесконечно малое приращение функции Δy .

Пример 2. Используя определение непрерывности функции в точке, доказать, что функция $y = \sin x$ непрерывна в произвольной точке $x = x_0$.

Решение. Покажем, что при любом $x = x_0$ данная функция удовлетворяет определению и $\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0$. Для этого достаточно показать, что при $x \rightarrow x_0$ значения $\sin x$ отличаются от $\sin x_0$ на бесконечно малую величину.

$$\text{Рассмотрим } \sin x - \sin x_0 = 2 \sin \frac{x - x_0}{2} \cdot \cos \frac{x + x_0}{2}.$$

Напомним, что для любого x $|\sin x| \leq |x|$.

Так как $\left| \sin \frac{x - x_0}{2} \right| < \left| \frac{x - x_0}{2} \right| \rightarrow 0$ при $x \rightarrow x_0$, т.е. является бесконечно малой, а $\left| \cos \frac{x + x_0}{2} \right| \leq 1$ - ограниченной, то $2 \sin \frac{x - x_0}{2} \cdot \cos \frac{x + x_0}{2}$ - бесконечно малая величина при $x \rightarrow x_0$ как произведение бесконечно малой на ограниченную.

Тогда $\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0$.

Непрерывность основных элементарных функций

Выше, в примере 2, мы доказали непрерывность функции $y = \sin x$ в любой точке ее области определения. Аналогичным образом рассматривая каждую простейшую (основную) элементарную функцию, можно доказать следующую теорему:

Теорема 1. *Всякая простейшая элементарная функция непрерывна в каждой точке, в которой она определена (т.е. в каждой точке естественной области определения).*

Свойства функций, непрерывных в точке

1. Локальная ограниченность

Теорема 2. *Если функция $f(x)$ непрерывна в точке $x = x_0$, то она ограничена в некоторой окрестности этой точки.*

Доказательство: Так как функция $f(x)$ непрерывна в точке $x = x_0$, то

$$\text{для } \varepsilon = 1 \exists U_{x_0} \forall x (x \in U_{x_0} \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < 1).$$

Рассмотрим последнее неравенство: $|f(x) - f(x_0)| < 1$,

$$\text{откуда } f(x_0) - 1 < f(x) < f(x_0) + 1.$$

Имеем: $\forall x \in U_{x_0} f(x_0) - 1 < f(x) < f(x_0) + 1 \Rightarrow f(x)$ - ограничена в U_{x_0} .

2. Сохранение знака

Теорема 3. *Если функция $f(x)$ непрерывна в точке $x = x_0$ и $f(x_0) \neq 0$, то в некоторой окрестности точки $x = x_0$ функция сохраняет постоянный знак.*

Доказательство: Пусть $f(x_0) > 0$. Пусть $\varepsilon = f(x_0) > 0$. Так как $f(x)$ непрерывна в точке $x = x_0$, то найдется окрестность точки x_0 такая, что для всех x из этой окрестности выполнится неравенство $|f(x) - f(x_0)| < f(x_0)$. Решим это неравенство: $f(x_0) - f(x_0) < f(x) < f(x_0) + f(x_0)$. Получили, что $\forall x \in U_{x_0} f(x) > 0$.

Аналогично доказывается случай $f(x_0) < 0$.

3. Арифметические операции над непрерывными функциями

Теорема 4. *Если функции f и g непрерывны в точке $x = x_0$, то функции $c \cdot f$, где $c = \text{const}$, $f + g$, $f \cdot g$ тоже непрерывны в точке $x = x_0$. Если, кроме того, $g(x_0) \neq 0$, то и $\frac{f}{g}$ также непрерывна в точке $x = x_0$.*

Доказательство: Докажем непрерывность $\frac{f}{g}$ в точке $x = x_0$.

По условию, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0)$ и $g(x_0) \neq 0$.

Выполнены все условия теоремы о пределе частного:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \frac{f}{g}(x_0).$$

Это и означает, что функция $\frac{f}{g}$ непрерывна в точке $x = x_0$.

Мы предлагаем самостоятельно доказать непрерывность следующих функций: $c \cdot f$, где $c - \text{const}$, $f + g$, $f \cdot g$.

Определение непрерывности функции $f(x)$ в точке $x = x_0$ может быть записано так:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} x),$$

т.е. **для непрерывной функции возможна перестановка символов предела и функции.** (Это утверждение может быть доказано с помощью определения предела функции по Гейне). Для того чтобы найти предел непрерывной функции при $x \rightarrow x_0$, достаточно в выражение функции подставить вместо аргумента x его значение x_0 .

Пример 3. Найти предел функции $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x+7}{x+3}$.

Решение. Функция $f(x) = 2x + 7$ - линейная - определена, а значит, непрерывна, в точке $x = -2$. Аналогично можно утверждать, что и $g(x) = x + 3$ непрерывна, в точке $x = -2$. На основании непрерывности функции $\frac{f}{g}$ в точке $x = -2$ искомый предел равен

$$\text{значению функции в этой точке, т.е. } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x+7}{x+3} = \frac{2 \cdot (-2) + 7}{-2 + 3} = 3.$$

4. Непрерывность сложной функции

Теорема 5. Пусть $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$ и множество значений функции $u = \varphi(x)$ является областью определения функции $y = f(u)$.

Если функция $u = \varphi(x)$ непрерывна в точке x_0 , а функция $y = f(u)$ непрерывна в точке $u_0 = \varphi(x_0)$, то сложная функция $f[\varphi(x)]$ непрерывна в точке x_0 .

Доказательство: Зададим произвольное число $\varepsilon > 0$. Так как функция $f(u)$ непрерывна при $u = u_0$, то (по определению 3) для ε найдется такое число $\sigma > 0$, что из неравенства $|u - u_0| < \sigma$ следует неравенство $|f(u) - f(u_0)| < \varepsilon$.

С другой стороны, ввиду непрерывности $\varphi(x)$ при $x = x_0$ для числа σ найдется такое число $\delta > 0$, что из неравенства $|x - x_0| < \delta$ следует $|\varphi(x) - \varphi(x_0)| = |\varphi(x) - u_0| < \sigma$.

Учитывая выбор числа σ , можем утверждать, что

$$|f[\varphi(x)] - f[u_0]| = |f[\varphi(x)] - f[\varphi(x_0)]| < \varepsilon.$$

Таким образом, для произвольно выбранного числа $\varepsilon > 0$ нашлось такое число $\delta > 0$, что из $|x - x_0| < \delta$ следует $|f[\varphi(x)] - f[\varphi(x_0)]| < \varepsilon$.

Этим на языке " $\varepsilon - \delta$ " и доказана непрерывность функции $f[\varphi(x)]$ в точке x_0 .

Пример 4. Функцию $y = \sin x^3$ можно рассмотреть как сложную:

$$y = \sin u, \quad u = x^3.$$

Функция $u = x^3$ непрерывна для $\forall x \in \mathbb{R}$. Функция $y = \sin u$ непрерывна для $\forall u \in \mathbb{R}$.

Следовательно, $y = \sin x^3$ также непрерывна для $\forall x \in \mathbb{R}$, как сложная, составленная из непрерывных.

Свойство 4 может быть записано в виде $\lim_{x \rightarrow x_0} f[\varphi(x)] = f\left[\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)\right]$,

т.е. *под знаком непрерывной функции можно переходить к пределу.*

Пример 5. Доказать, что $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha} = 1$.

Доказательство: имеем $\frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \cdot \ln(1+\alpha) = \ln(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}},$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e.$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \ln(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \ln \lim_{\alpha \rightarrow 0} (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \ln e = 1.$$

Из теорем 1, 4 и 5 следует, что также *непрерывны в каждой точке своих областей определения все функции, полученные из простейших с помощью конечного числа арифметических операций и операции композиции.*

Односторонняя непрерывность

Определение 5. Если функция $y = f(x)$ определена в точке x_0 и в некоторой окрестности $(x_0 - \delta; x_0)$ слева от нее и $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = f(x_0)$, то говорят, что функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0 слева.

Определение 6. Если функция $y = f(x)$ определена в точке x_0 и в некоторой окрестности $(x_0; x_0 + \delta)$ справа от нее и $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = f(x_0)$, то говорят, что функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0 справа.

Непрерывность функции в точке x_0 равносильна ее непрерывности в этой точке одновременно и слева и справа в этой точке, т.е. когда
 $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = f(x_0).$

Точки разрыва

Определение 7. Пусть точка x_0 принадлежит области определения функции $y = f(x)$ или является предельной точкой этой области (x_0 не обязательно принадлежит области определения функции).

Если в точке x_0 для функции $y = f(x)$ не выполняется по крайней мере одно из условий непрерывности, то при $x = x_0$ функция $y = f(x)$ **разрывна**. Точка x_0 в этом случае называется **точкой разрыва** функции $y = f(x)$.

Для выяснения характера разрыва следует найти пределы функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow x_0$ слева и справа.

Точки разрыва подразделяются на точки разрыва 1-го рода и 2-го рода.

Определение 8. Если в точке x_0 существуют конечные односторонние пределы $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$, односторонние пределы равны между собой, а значение функции в этой точке не совпадает с односторонними пределами, то x_0 называется **точкой разрыва первого рода**.

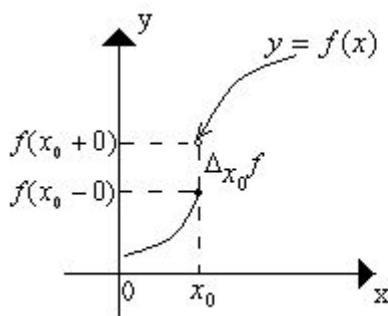
Точки разрыва первого рода подразделяют на точки устранимого и точки неустранимого разрыва.

Определение 9. Если в точке x_0 существуют конечные односторонние пределы $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$, односторонние пределы равны между собой, а значение функции в этой точке не совпадает с односторонними пределами, то x_0 называется **точкой устранимого разрыва**.

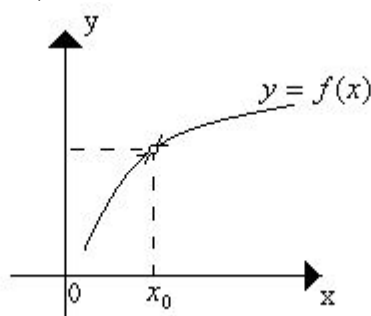
Определение 10. Если в точке x_0 существуют конечные односторонние пределы $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$, но они не равны между собой, то x_0 называется **точкой неустранимого разрыва**.

Определение 11. Разность $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0) = \Delta_{x_0} f$ называется **скачком функции** $f(x)$ в точке x_0 .

а)



б)



в)

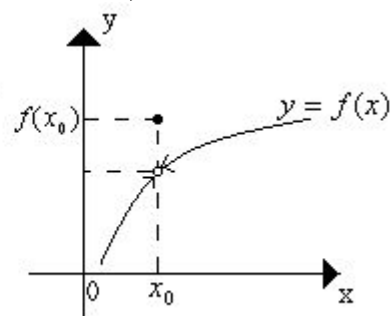


рис. 2.

На рис. 2.а) представлен скачок функции $f(x)$ в точке x_0 , x_0 - точка неустранимого разрыва.

На рис. 2.б), в) односторонние пределы функции в точке x_0 не только конечны, но и равны, т.е. $\Delta_{x_0} f = 0$ и $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) \neq f(x_0)$. Такие точки мы назвали точками устранимого разрыва, т.к. разрыв можно устранить либо доопределив функцию в точке x_0 (рис. 2.б), либо переопределив ее в точке x_0 (рис. 2.в).

Определение 12. Точка является **точкой разрыва второго рода** в случае, когда хотя бы один из односторонних пределов $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x)$ и (или) $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$ не существует или бесконечен.

Пример 6. Для заданных функций

$$\text{а) } y = \frac{x}{x-3}, \quad \text{б) } y = 3^{\frac{1}{x}}, \quad \text{в) } y = \frac{1}{1+5^{\frac{1}{x}}}$$

найти точки разрыва и исследовать их характер. Построить эскиз графика.

Решение. а) $y = \frac{x}{x-3}$. Функция является элементарной, определена, а, значит,

непрерывна при всех значениях x , кроме $x = 3$.

Найдем односторонние пределы при $x = 3$:

$$\lim_{x \rightarrow 3-0} \frac{x}{x-3} = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 3+0} \frac{x}{x-3} = +\infty.$$

Оба односторонних предела бесконечны, следовательно, $x = 3$ - точка разрыва 2-го рода.

Чтобы построить эскиз графика функции, оценим поведение функции на бесконечности, для этого найдем пределы функции при $x \rightarrow -\infty$ и $x \rightarrow +\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x-3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x-3} = 1,$$

$y = 1$ - горизонтальная асимптота.

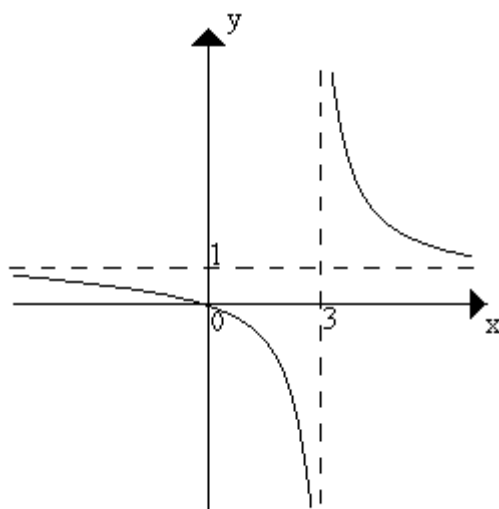


рис. 3.

б) $y = 3^{\frac{1}{x}}$. Функция является элементарной, определена, а, значит, непрерывна при всех значениях x , кроме $x = 0$. Найдем односторонние пределы в этой точке:

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} 3^{\frac{1}{x}} = 0; \quad \lim_{x \rightarrow 0+0} 3^{\frac{1}{x}} = +\infty.$$

Предел справа в точке $x = 0$ оказался бесконечным, следовательно, $x = 0$ - точка разрыва 2-го рода.

Чтобы построить эскиз графика функции, найдем пределы функции при $x \rightarrow -\infty$ и

$$x \rightarrow +\infty: \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} 3^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3^{\frac{1}{x}} = 1, \quad y = 1 \text{ - горизонтальная асимптота.}$$

Эскиз представлен на рис. 4.

в) $y = \frac{1}{1 + 5^{\frac{1}{x}}}$. Функция является элементарной, определена, а, значит, непрерывна

при всех значениях x , кроме $x = 0$. Найдем односторонние пределы:

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{1}{1 + 5^{\frac{1}{x}}} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{1}{1 + 5^{\frac{1}{x}}} = 0.$$

В точке $x = 0$ существуют конечные односторонние пределы, следовательно, $x = 0$ - точка разрыва 1-го рода. Но так как односторонние пределы не равны между собой, то $x = 0$ - точка скачка, скачок функции $f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0) = \Delta_{x_0} f = 1$.

Чтобы построить эскиз графика функции, найдем пределы функции на бесконечности:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1 + 5^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + 5^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{2}, \quad y = \frac{1}{2} \text{ - горизонтальная асимптота.}$$

Эскиз представлен на рис. 5.

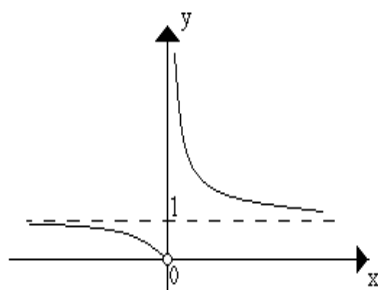


рис. 4.

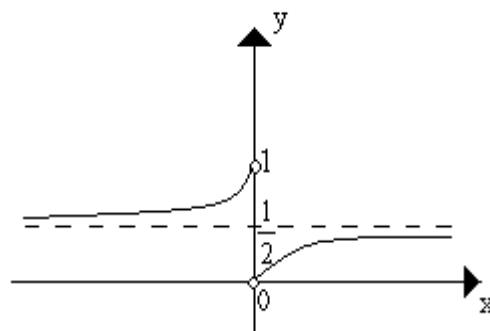


рис.

5.

Пример 7. Исследовать на непрерывность в точке $x = 1$ функции:

$$а) f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{при } x \leq 1; \\ x + 1, & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Решение. Функция в точке $x = 1$ определена, но задана по-разному слева и справа от нее. Вычислим односторонние пределы при $x \rightarrow 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} (x^2 + 1) = \lim_{x \rightarrow 1+0} (x + 1) = f(1) = 2 \Rightarrow f(x) \text{ - непрерывна в точке } x = 1.$$

Эскиз представлен на рис. 6.

$$б) f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{при } x \leq 1; \\ x - 1, & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Решение. Функция в точке $x = 1$ определена, но также задана по-разному слева и справа от нее. Вычислим односторонние пределы при $x \rightarrow 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} (x^2 + 1) = 2; \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} (x - 1) = 0 \Rightarrow f(x) \text{ в точке } x = 1 \text{ терпит разрыв 1-го}$$

рода со скачком, равным -2. Эскиз представлен на рис. 7.

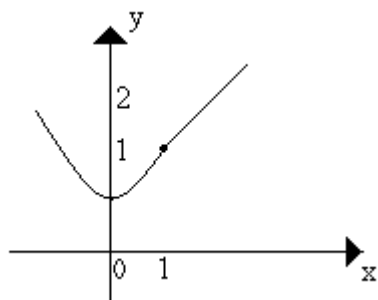


рис. 6.

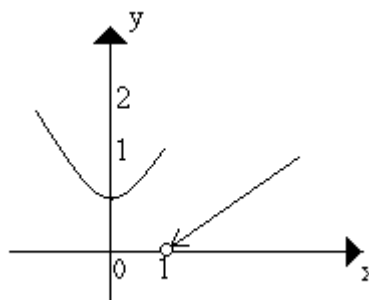


рис. 7.

$$\text{в) } f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{при } x \leq 1; \\ \frac{1}{x-1}, & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Решение. Функция в точке $x=1$ определена, но задана по-разному слева и справа от нее. Вычислим односторонние пределы при $x \rightarrow 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} (x^2 + 1) = 2; \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{1}{x-1} = +\infty \Rightarrow f(x) \text{ в т. } x=1 \text{ терпит разрыв 2-го рода.}$$

Эскиз представлен на рис. 8.

$$\text{г) } f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{при } x < 1; \\ x + 1, & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Решение. Функция в точке $x=1$ не определена. Вычислим односторонние пределы при $x \rightarrow 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} (x^2 + 1) = \lim_{x \rightarrow 1+0} (x + 1) = 2 \Rightarrow \text{функция } f(x) \text{ в точке } x=1 \text{ терпит разрыв 1-го}$$

рода. Точка $x=1$ является точкой устранимого разрыва. Для восстановления непрерывности в этой точке достаточно доопределить функцию: $f(1) = 2$.

Эскиз представлен на рис. 9.

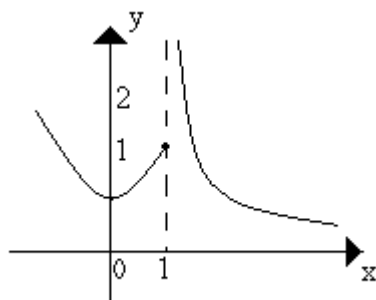


рис. 8.

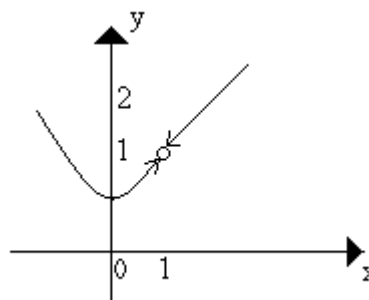


рис. 9.

Пример 8. Исследовать на непрерывность и построить график функции. Найти точки разрыва, исследовать их характер.

$$\text{а) } f(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x \leq 1, \\ x-1, & 1 < x < 3, \\ 4, & x \geq 3. \end{cases}$$

Решение. Функции $y = (x-1)^2$, $y = x-1$ и $y = 4$ непрерывны на всей числовой прямой, поэтому данная функция $f(x)$ может иметь разрывы только в точках, где меняется ее аналитическое выражение, то есть в точках $x = 1$ и $x = 3$.

Исследуем функцию на непрерывность в этих точках, для чего найдем соответствующие односторонние пределы и значения функции в указанных точках:

При $x \rightarrow 1$:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1-0} (x-1)^2 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1+0} (x-1) = 0 \\ f(1) &= (1-1)^2 = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{в точке } x = 1 \text{ функция непрерывна.}$$

Вычислим односторонние пределы при $x \rightarrow 3$.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3-0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3-0} (x-1) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 3+0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3+0} 4 = 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{в точке } x = 3 \text{ функция имеет}$$

разрыв первого рода и непрерывна справа.

Скачок функции $f(x)$ в точке $x = 3$ равен $\Delta f(3) = 2$.

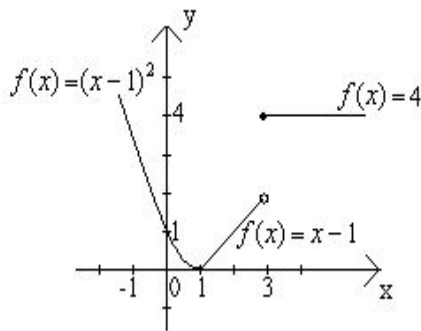


рис. 10

$$\text{б) } f(x) = \begin{cases} 1-x, & x \leq 0, \\ \ln x, & 0 < x < 1, \\ 2x-2, & x \geq 1. \end{cases}$$

Решение. Функции $y = 1-x$ и $y = 2x-2$ непрерывны на всей числовой прямой, а функция $y = \ln x$ непрерывна в любой точке интервала $(0; +\infty)$. Поэтому данная функция $f(x)$ может иметь разрывы только в точках, где меняется ее аналитическое выражение, то есть в точках $x = 0$ и $x = 1$.

Исследуем функцию на непрерывность в этих точках, для чего найдем соответствующие односторонние пределы и значения функции в указанных точках:

Вычислим односторонние пределы при $x \rightarrow 0$.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0-0} (1-x) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0+0} \ln x = -\infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{в точке } x = 0 \text{ функция терпит разрыв 2-го рода}$$

и непрерывна слева.

Вычислим односторонние пределы при $x \rightarrow 1$.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1-0} \ln x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1+0} (2x - 2) = 0 \\ f(1) &= (2 \cdot 1 - 2) = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{в точке } x = 1 \text{ функция}$$

непрерывна.

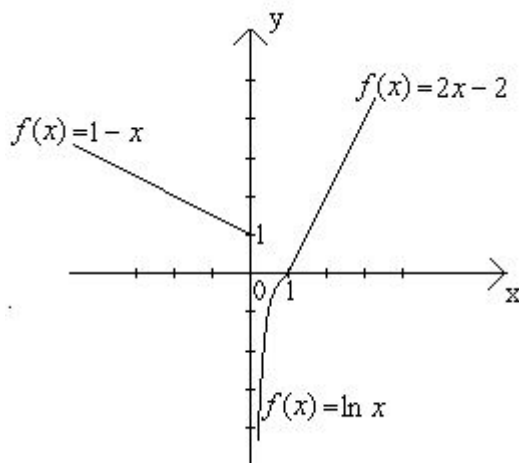


рис. 11

$$\text{в) } f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x}, & x < 0, \\ -1, & 0 \leq x < 1, \\ 3 - x, & 1 \leq x < 3, \\ \sqrt{x - 3}, & x \geq 3 \end{cases}$$

Решение. Функция $f(x)$ составлена из элементарных функций, каждая из которых непрерывна на своей области задания. Функция $f(x)$ в точках $x = 0$, $x = 1$ и $x = 3$ определена, но задана по-разному слева и справа от этих точек.

Исследуем функцию на непрерывность в этих точках, для чего найдем соответствующие односторонние пределы и значения функции в указанных точках:

Вычислим односторонние пределы при $x \rightarrow 0$.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0-0} \left(-\frac{1}{x} \right) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0+0} (-1) = -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{в точке } x = 0 \text{ функция терпит разрыва 2-го}$$

рода. В точке $x = 0$ функция $f(x)$ непрерывна справа.

Вычислим односторонние пределы при $x \rightarrow 1$.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1-0} (-1) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1+0} (3 - x) = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{в точке } x = 1 \text{ функция терпит разрыв 1-го}$$

рода.

В точке $x = 1$ функция $f(x)$ непрерывна справа; скачок функции $\Delta f(1) = 3$.

Вычислим односторонние пределы при $x \rightarrow 3$.

$$\begin{array}{l}
 \lim_{x \rightarrow 3-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3-0} (3-x) = 0 \\
 \lim_{x \rightarrow 3+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3+0} \sqrt{x-3} = 0 \\
 f(3) = \sqrt{3-3} = 0
 \end{array}
 \quad \left| \Rightarrow \text{в точке } x = 3 \text{ функция непрерывна.} \right.$$

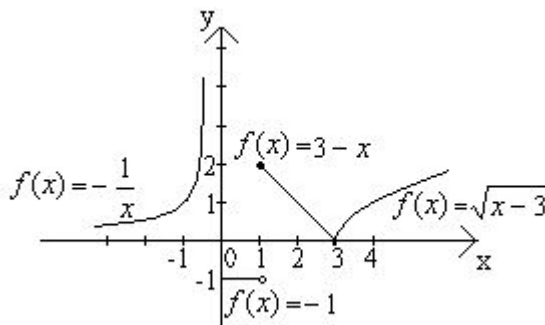


рис. 12

Непрерывность функции на отрезке

Определение 13. Функция $y = f(x)$ называется непрерывной на $[a; b]$, если она непрерывна в каждой точке $(a; b)$ и непрерывна справа в точке a и непрерывна слева в точке b .

Свойства функций, непрерывных на отрезке

1. Ограниченность функции, непрерывной на отрезке

Теорема 6. (первая теорема Вейерштрасса). Если функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a; b]$, то она ограничена на этом отрезке $[a; b]$.

Доказательство: Докажем методом от противного.

Допустим, $y = f(x)$ не ограничена на отрезке $[a; b]$.

Отрезок $[a; b]$ разделим пополам. Хотя бы на одном из полученных отрезков функция не ограничена. Возьмем такой отрезок и обозначим его $[a_1; b_1]$.

Разделим $[a_1; b_1]$ пополам, выберем аналогично $[a_2; b_2]$.

Этот процесс деления и выбора продолжим неограниченно. В результате получим бесконечную последовательность отрезков со следующими свойствами:

1. каждый последующий содержится в предыдущем;
2. длины отрезков стремятся к нулю;
3. на каждом из отрезков функция не ограничена.

Из свойств 1 и 2, на основании принципа стягивающих отрезков, следует, что существует единственная точка C , принадлежащая всем отрезкам. А это значит, что $C \in [a; b]$. Так как функция непрерывна на $[a; b]$, то, следовательно, функция непрерывна и в точке $C \in [a; b]$.

Из непрерывности функции в точке C следует существование окрестности U_C , в которой функция ограничена (см. теорема 2).

Точка C принадлежит всем отрезкам и их длины стремятся к нулю, значит, обязательно найдется отрезок, целиком лежащий в указанной окрестности: $[a_k; b_k] \subset U_C$.

Имеем: функция $f(x)$ ограничена в U_C , следовательно, $f(x)$ ограничена и на $[a_k; b_k]$, но это противоречит свойству 3 отрезков.

Полученное противоречие говорит о том, что предположение о неограниченности функции на $[a; b]$ неверно.

Следовательно, функция $f(x)$ ограничена на $[a; b]$.

Замечание: для функций, непрерывных в интервале, полуинтервале теорема неверна.

Примером может служить функция $y = \frac{1}{x}$.

2. Достижение непрерывной на отрезке функцией наибольшего и наименьшего значений

Теорема 7. (вторая теорема Вейерштрасса). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то она достигает на этом отрезке наименьшего значения m и наибольшего значения M .

3. Теорема о корне функции

Теорема 8. (Теорема Больцано-Коши). Пусть $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a; b]$ и на концах этого отрезка принимает значения разных знаков. Тогда на отрезке $[a; b]$ существует точка c , в которой функция обращается в нуль: $f(c) = 0$ ($a < c < b$).

Доказательство: Отрезок $[a; b]$ разделим пополам точкой c_1 .

Если $f(c_1) = 0$, то теорема доказана ($c = c_1$).

Если $f(c_1) \neq 0$, то в концах одного из полученных отрезков функция принимает значения разных знаков.

Возьмем этот отрезок и обозначим его $[a_1; b_1]$. Разделим его пополам точкой c_2 .

Если $f(c_2) = 0$, то теорема доказана.

Если $f(c_2) \neq 0$, то выберем отрезок $[a_2; b_2]$.

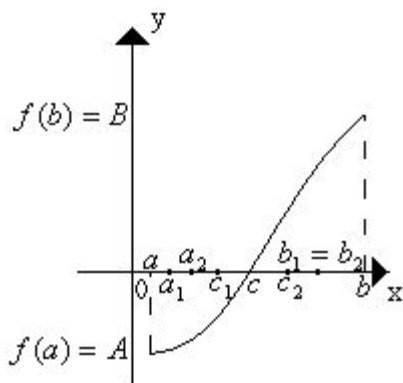


рис. 13.

Продолжим этот процесс деления. Возможны два случая:

1) на каком-то этапе получим точку деления c_k , такую, что $f(c_k) = 0$, тогда теорема доказана.

2) Ни на одном из этапов не получим точки деления, в которой $f(x) = 0$.

В этом случае получаем бесконечную последовательность отрезков со свойствами:

- 1) каждый последующий лежит в предыдущем;
- 2) их длины стремятся к нулю;
- 3) на концах каждого из отрезков функция имеет разные знаки

$$\forall n \quad f(a_n) \cdot f(b_n) < 0.$$

Из свойств 1 и 2 следует, что существует единственная точка c , принадлежащая всем отрезкам.

Докажем, что $f(c) = 0$ методом от противного.

Допустим $f(c) \neq 0$. Т.к. функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то она непрерывна и в т. $c \in [a; b]$.

Из непрерывности функции в т. c следует, что существует U_c , в которой функция сохраняет постоянный знак.

Так как точка c принадлежит всем отрезкам, и длины их стремятся к нулю, то обязательно найдется $[a_k; b_k] \subset U_c$.

Во всех точках U_c функция имеет значения одного и того же знака следовательно, $f(a_n) \cdot f(b_n) > 0$, что противоречит 3-му свойству отрезков.

Определение 14. Точка, в которой функция обращается в нуль, называется корнем функции, c - корень функции.

Геометрический смысл теоремы: непрерывная кривая при переходе из одной полуплоскости относительно OX в другую обязательно пересекает ось OX .

4. Теорема о промежуточных значениях функции

Теорема 9. (Теорема Больцано-Коши). Пусть $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и на концах этого отрезка принимает неравные значения $f(a) = A$, $f(b) = B$. Тогда, каково бы ни было число C , заключенное между A и B , найдется заключенная между a и b такая точка c , что $f(c) = C$.

Следствие

Если функция непрерывна в промежутке, то множеством ее значений также является промежуток.

В частности, если функция непрерывна на отрезке, то множеством ее значений является отрезок.

Задачи для самостоятельного решения

Найдите точки разрыва функции. Исследуйте их характер. Сделайте чертеж.

Вариант 1

$$1) f(x) = \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}};$$

$$2) f(x) = 1 - 3^{\frac{1}{x}};$$

$$3) f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & x \leq 0, \\ \sin x, & 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ x - \frac{\pi}{2}, & x \geq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

$$4) f(x) = \begin{cases} 1, & x \leq -2, \\ \frac{2}{x}, & -2 < x < 0, \\ x, & x \geq 0. \end{cases}$$

Вариант 2

$$1) f(x) = 2 + 5^{\frac{1}{1-x}};$$

$$2) f(x) = 6^{\frac{1}{2x-4}};$$

$$3) f(x) = \begin{cases} 3x+1, & x \leq 0, \\ x^2+1, & 0 < x \leq 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

$$4) f(x) = \begin{cases} 2-x, & x \leq 0, \\ 2 \cos x, & 0 < x \leq \frac{\pi}{2}, \\ x-\pi, & x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Вариант 3

$$1) f(x) = 7^{\frac{1}{2+x}};$$

$$2) f(x) = 3^{\frac{1}{4-x}} + 2;$$

$$3) f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0, \\ tgx, & 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ 2, & x \geq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

$$4) f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1, \\ 2-x^2, & 1 < x < 2, \\ -3, & x \geq 2. \end{cases}$$

Вариант 4

$$1) f(x) = 1 + 2^{\frac{1}{x-3}};$$

$$2) f(x) = 5^{\frac{1}{1-x}};$$

$$3) f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x \leq 1, \\ 3-x, & 1 < x < 3, \\ 1, & x \geq 3. \end{cases}$$

$$4) f(x) = \begin{cases} x^2+2, & x \leq 0, \\ \cos x, & 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ x-\frac{\pi}{2}, & x \geq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Вариант 5

$$1) f(x) = 11^{\frac{1}{x+6}};$$

$$2) f(x) = 1 + 3^{\frac{1}{x+5}};$$

$$3) f(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0, \\ 2^x, & 0 < x < 2, \\ 8-x, & x \geq 2. \end{cases}$$

$$4) f(x) = \begin{cases} 2-x, & x \leq 0, \\ 2 \cos x, & 0 < x \leq \frac{\pi}{2}, \\ x-\pi, & x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Вариант 6

$$1) f(x) = 3 + 5^{\frac{2}{x}};$$

$$2) f(x) = \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}};$$

$$3) f(x) = \begin{cases} -2x, & x \leq 0, \\ \frac{1}{x}, & 0 < x < 1, \\ 2x-1, & x \geq 1. \end{cases}$$

$$4) f(x) = \begin{cases} \sin x, & x < 0, \\ x, & 0 \leq x \leq 4, \\ \frac{1}{x-4}, & x > 4. \end{cases}$$

Вариант 7

$$1) f(x) = 5^{\frac{1}{6-2x}};$$

$$2) f(x) = 1 - 3^{\frac{1}{x}};$$

$$3) f(x) = \begin{cases} x+2, & x \leq -1, \\ x^2+1, & -1 < x \leq 1, \\ -x+3, & x > 1. \end{cases}$$

$$4) f(x) = \begin{cases} x + \frac{\pi}{2}, & x < -\frac{\pi}{2}, \\ \cos x, & -\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0, \\ 2, & x > 0. \end{cases}$$

Вариант 8

$$1) f(x) = 10^{\frac{1}{x-2}} - 1;$$

$$2) f(x) = 5^{\frac{1}{x-1}} - 1;$$

$$3) f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x \leq 0, \\ 1, & 0 < x \leq 2, \\ x-2, & x > 2. \end{cases}$$

$$4) f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \leq 0, \\ 1-x, & 0 < x \leq 1, \\ x, & x > 1. \end{cases}$$

Вариант 9

$$1) f(x) = \frac{1}{1+4^{\frac{1}{x}}};$$

$$2) f(x) = 4^{\frac{1}{3x-6}};$$

$$3) f(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0, \\ \frac{3}{x}, & 0 < x < 1, \\ 4x-1, & x \geq 1. \end{cases}$$

$$4) f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & x \leq 0, \\ \sin x, & 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ x - \frac{\pi}{2}, & x \geq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Вариант 10

$$1) f(x) = 1 + 4^{\frac{1}{x-3}};$$

$$2) f(x) = 2^{\frac{1}{9-3x}};$$

$$3) f(x) = \begin{cases} -x-1, & x < -1, \\ (x+1)^2, & -1 \leq x \leq 2, \\ -\frac{1}{x-2}, & x > 2. \end{cases} \quad 4) f(x) = \begin{cases} -2, & x \leq -\frac{\pi}{2}, \\ \operatorname{tg} x, & -\frac{\pi}{2} < x < 0, \\ x, & x \geq 0. \end{cases}$$

4. ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ ВОПРОСЫ

СЕМЕСТР I

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ: ПРЕДЕЛЫ

1. Понятие числовой последовательности, виды, примеры. Определение предела последовательности, геометрическая интерпретация. Теорема о единственности предела. Теорема об ограниченности сходящейся. Сходимость монотонной ограниченной последовательности. Свойства сходящихся последовательностей. Число ϵ .
2. Определения пределов и односторонних пределов функции в точке (теорема о связи между ними), геометрическая интерпретация. Определение функции, непрерывной в точке, непрерывность элементарных функций. Определение предела функции на бесконечности, геометрическая интерпретация.
3. Ограниченные функции, примеры. Ограниченность функции, имеющей предел.
4. Теорема о единственности предела функции. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Свойства б/м, б/б функций и связь между ними. Определения бесконечных пределов, их геометрические интерпретации.
5. Понятие сложной функции. Теорема о переходе к пределу под знаком сложной функции. Теорема о связи между функцией и ее пределом. Свойства пределов.
6. Замечательные пределы. Раскрытие неопределенности.

7. Сравнение б/м и б/б: что значит, алгоритм. Таблица эквивалентных б/м. Теорема о замене б/м эквивалентными, применение. Теорема о сумме (разности) неэквивалентных б/б. Раскрытие неопределенности ∞/∞ .
8. Точки разрыва. Классификация точек разрыва. Исследование на непрерывность.
9. Правило Лопиталю, применение для раскрытия неопределенностей $0/0$ и ∞/∞ .
10. Способы раскрытия неопределенностей $0/0, \infty/\infty, \infty-\infty, 0\cdot\infty, 0^0, 1^\infty, \infty^0$.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

1. Определение производной и его геометрический смысл. Касательная и нормаль к графику: определения, вывод уравнений. Левая и правая производная. Вертикальные касательные. Угловая точка. Непрерывность дифференцируемой функции.
2. Определения дифференцируемой функции, дифференциал. Условие, равносильное дифференцируемости функции, формула для вычисления дифференциала. Приближенные вычисления с помощью дифференциала.
3. Дифференцирование сложной функции, логарифмическое дифференцирование. Явно и неявно заданные функции, дифференцирование неявно заданных функций.
4. Понятие обратной функции, условия существования обратной к данной, производная обратной функции. Понятие параметрически заданной функции, производная.
5. Производные и дифференциалы высших порядков. Вывод формулы для производной второго порядка параметрически заданной функции.
6. Теорема Лагранжа о конечных приращениях, геометрический смысл. Дифференциальное среднее.

Математический анализ: исследование функций

1. Функция: понятие, способы задания, область определения, область значений, промежутки знакопостоянства, график. Четные-нечетные функции, периодические функции. Основные элементарные функции и их графики.
2. Асимптоты графика функции: определение, виды. Условия существования вертикальной асимптоты. Необходимое и достаточное условие существования наклонной асимптоты. Исследование функции на асимптоты графика, алгоритм.
3. Монотонность функции на отрезке: определение, необходимое и достаточное условие. Исследование на монотонность, алгоритм. Монотонность в точке: определение, достаточное условие.
4. Точки экстремумов и экстремумы функции: определение, необходимое условие (понятие критической точки), первое достаточное условие. Исследование на экстремумы по первой производной, алгоритм.
5. Точки локальных экстремумов и локальные экстремумы функции: определение, необходимое условие (понятие стационарной точки), второе достаточное условие, третье достаточное условие. Исследование на экстремумы с помощью производных высших порядков, алгоритм.
6. Выпуклость, вогнутость графика функции на интервале: определение, достаточное условие и его геометрический смысл. Точки перегиба функции, точки перегиба графика функции: определение, необходимое условие (критические точки второго рода), достаточное условие. Исследование на выпуклость и перегибы графика, алгоритм.
7. Глобальный экстремум функции на отрезке: понятие, существование для непрерывной на отрезке функции (теорема Вейерштрасса), необходимое условие для существования в точке глобального экстремума функции. Исследование непрерывной функции на наибольшее и наименьшее значение на отрезке, алгоритм.

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Неопределенный, определенный интегралы.

1. Понятие первообразной. Понятие неопределенного интеграла, интегрируемость непрерывных функций, примеры функций, интегралы от которых не представляются элементарными функциями. Свойства неопределенного интеграла.
2. Методы интегрирования: непосредственное и заменой переменной, интегрирование по частям.
3. Об интегрировании некоторых классов функций: рациональных дробей, тригонометрических и иррациональных выражений.
4. Определение определенного интеграла. Криволинейная трапеция, ее площадь. Геометрический смысл определенного интеграла.
5. Свойства определенного интеграла, их геометрический смысл.
6. Теорема об оценке определенного интеграла, её геометрический смысл.
7. Теорема об интегральном среднем, её геометрическая интерпретация. Среднее значение функции на отрезке.
8. Теорема о производной интеграла с переменным верхним пределом. Формула Ньютона-Лейбница.
9. Замена переменной в определенном интеграле, формула интегрирования по частям в определенном интеграле
10. Понятие объема тела вращения и вычисление его с помощью определенного интеграла.
11. Определения несобственных интегралов с бесконечными пределами интегрирования и несобственных интегралов от неограниченных функций. Сходящиеся интегралы.

СЕМЕСТР II

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Функция нескольких переменных

1. Понятие функции нескольких переменных, область определения, график функции. Предел и непрерывность функции нескольких переменных.
2. Определение частной производной. Геометрический смысл частной производной в точке функции двух переменных. Производные высших порядков: понятие, свойство смешанных производных.
3. Понятие поля, поверхности уровня, линии уровня
4. Производная по направлению, градиент. Геометрический и физический смыслы градиента. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.
5. Понятие неявной функции одной и нескольких переменных, дифференцирование. Понятие сложной функции, дифференцирование.
6. Определение дифференцируемой функции двух переменных и дифференциала. Теорема о существовании частных производных дифференцируемой функции двух переменных, формула для вычисления полного дифференциала. Приближенные вычисления с помощью дифференциала.
7. Определения точек экстремумов и экстремумов функции нескольких переменных. Необходимые и достаточные условия локального экстремума функции двух переменных. Алгоритм исследования на локальный экстремум.

8. Понятие замкнутой области и ограниченного множества. Теорема о непрерывной функции в ограниченной замкнутой области. Глобальный экстремум функции двух переменных, алгоритм исследования.
9. Определение точек условного экстремума и условного экстремума функции двух переменных. Методы нахождения.

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Интегралы по фигуре.

1. Повторные интегралы.
2. Определение двойного интеграла. Геометрический смысл. В т.ч. понятие цилиндрического тела, определение объема цилиндрического тела, вычисление.
3. Сведение двойного интеграла к повторному, геометрическая интерпретация действия.
4. Физический смысл двойного интеграла. Свойства двойного интеграла, их геометрический и физический смысл.
5. Замена переменной в двойном интеграле. Вычисление двойного интеграла в полярной системе координат.
6. Определение тройного интеграла. Физический смысл. Свойства тройного интеграла и их физический смысл.
7. Вычисление тройного интеграла: сведение тройного интеграла к повторному.
8. Криволинейный интеграл первого рода: определение, геометрический смысл, физический смысл, свойства, вычисление. В т.ч. понятие длины дуги кривой, вычисление.
9. Поверхностный интеграл первого рода: определение, физический смысл, свойства, вычисление.
10. Вычисление площадей поверхностей.
11. Приложения интегралов по фигуре в механике: координаты центра тяжести, применение таблицы формул для приложений.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Дифференциальные уравнения. Системы дифференциальных уравнений.

1. Определение ДУ, порядок ДУ, общее решение, его геометрическая интерпретация, задача Коши, теорема о существовании и единственности решения.
2. Некоторые виды ДУ 1 порядка: уравнения с разделяющимися переменными, однородные, линейные, уравнения Бернулли.
3. Задача Коши для ДУ высших порядков. ДУ высших порядков, допускающие понижение порядка.
4. Линейные ДУ n -ного порядка. Свойство решений ЛОДУ. Линейно зависимые и независимые системы функций: определение, необходимое условие линейной зависимости системы функций, необходимое условие линейной независимости решений ЛОДУ с непрерывными коэффициентами.
5. Структура общего решения ЛОДУ. Фундаментальная система решений ЛОДУ с постоянными коэффициентами.
6. Интегрирование ЛНДУ методом Лагранжа.
7. Теорема о структуре общего решения ЛНДУ. Теорема о наложении. Частное решение ЛНДУ со специальной правой частью.
8. Системы ДУ: канонические, нормальные, сведение к нормальным. Определение общего решения. Геометрическая интерпретация решений. Интегрирование методом исключения.

5. ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ: ПРЕДЕЛЫ

Задание 1. Найдите пределы функций

$$\begin{aligned} 1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(3n+2)}{(n^2+1)(4n^3+3)}; \quad & 2. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2+21n-7}{2n^2+18n+9} \right)^{3n}; \quad & 3. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-3x^2+4}{x^3+2x^2-6x}; \\ 4. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^2}{\sqrt{9+2x^3}-5}; \quad & 5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}^3 2x}{(e^{\sin 4x}-1)^3}; \end{aligned}$$

Задание 2. Исследуйте функцию на непрерывность. Найдите точки разрыва функции, если они существуют, и определите типы разрывов. Постройте график функции.

$$\text{а) } f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x}, & 0 \leq x \leq 1, \\ 4-2x, & 1 < x < 2.5, \\ 2x-7, & x \geq 2.5. \end{cases} \quad \text{б) } y = \frac{4+x}{x^2}.$$

Задание 3. Задано комплексное число $z = \frac{2}{1+i} + \frac{5i}{2-i}$.

- а) Запишите данное число в алгебраической, тригонометрической и показательной формах.
б) Найдите все корни уравнения $w^2 - z = 0$.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Задание 1. В какой точке касательная к кривой $y = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 8x + 4$ параллельна прямой $2x + 2y - 5 = 0$? Напишите уравнение этой касательной.

Задание 2. Найдите производные данных функций.

а) $y = \frac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}},$

б) $y^2 = e^{-x} \cdot x^3 + 3x^2 + 6x + 6,$

в) $y = (1+x^2)^{\arccos x}.$

Задание 3. Найдите $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}.$

а) $\begin{cases} x = 3 \ln t, \\ y = \sqrt{t-t^2}. \end{cases}$ б) $x^3 + xy^2 + 6x^2 + y^2 = 0.$

Задание 4. Вычислите приближенно с применением производной значение функции $y = x^4 - 2x + 4$ при $x = 3,002$.

Задание 5. Вычислите предел, используя правило Лопиталя.

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{\sin x - x^2}.$

Задание 6. Исследуйте функцию и постройте график.

а) $y = x \cdot e^{-2x},$ б) $y = \frac{2x}{1-x^2}$

Задание 7. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $f(x) = x^4 - 8x^2 - 9$ на отрезке $[0;3]$.

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Найти неопределенные интегралы

$\int \frac{1-\sqrt{x^2-1}}{2\sqrt{x^2-1}} dx, \int \frac{5dx}{\sqrt{3-5x-x^2}}, \int \sqrt{x^2+2x+2} dx, \int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}} dx, \int \frac{dx}{9x^3-6x^2+x}, \int x \cdot \operatorname{arctg} x dx$

1. Используя свойства определенного интеграла, вычислить

$\int_{-3}^3 \frac{x^2 \sin 2x}{x^2+1} dx.$

2. Вычислить определенные интегралы

а) $\int_{1/2}^1 \frac{dx}{\operatorname{arctg} 2x \cdot (1+4x^2)};$ б) $\int_0^{\pi/2} x \cos 2x dx.$

3. Исследовать на сходимость несобственные интегралы:

а) $\int_3^{\infty} \frac{dx}{x \ln x};$ б) $\int_{-3}^{-1} \frac{dx}{x^2+6x+9}.$

4. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $x = 4 - y^2, x = y^2 - 2y;$

$$б) \begin{cases} x = 9 \cos t, \\ y = 4 \sin t; \end{cases} \quad y=2(y \geq 2).$$

5. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением:

$$\rho = 1 - \cos \phi.$$

6. Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной графиками функций:

$$y = x^3, \quad y = \frac{4}{x}, \quad x = 0, \quad y = 4; \text{ ось вращения } - OY.$$

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Задание 1. Продифференцировать сложную функцию $s = tg(uv)$, где $u = e^{2t}$, $v = t^3$. $\frac{ds}{dt} = ?$

Задание 2. Для неявно заданной функции $3x^2z + 4xy + 5yz - 2x + 2z - 5 = 0$ найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Задание 3. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2 + y^2 - z = 10$ в точке $(1; 1; -8)$. Сделать чертеж поверхности.

Задание 4. Дано: скалярное поле $U(x, y, z)$, точка M , направление $\vec{l}$:
 $u = \ln(3x^2 + 4y^2) + 5xz$; $M(1; 1; 1)$; $\vec{l} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$

Найти:

- 1) производную скалярного поля $U(x, y, z)$ в точке M в направлении $\vec{l}$;
- 2) градиент поля $U(x, y, z)$ в точке M .

Задание 5. Найти экстремум функции $z = \sqrt{xy} - y^2 - x + 6y$.

Задание 6. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$; $D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$ в замкнутой области D .

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Задание 1. Изменить порядок интегрирования $\int_0^2 dx \int_{\sqrt{4-x}}^{4-x} f(x, y) dy$.

Задание 2. Вычислить двойной интеграл $\iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $D: x \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, x \geq 0$ по области D , ограниченной линиями.

Задание 3. Вычислить тройной интеграл $\iiint_R (x^2 + 3y^2) dx dy dz$; $R: 0 \leq z \leq 3x, x + y \leq 1, y \geq 0$ по фигуре R , ограниченной поверхностями.

Задание 4. Вычислить криволинейный интеграл $\int_L \left(tg \frac{\varphi}{2} + 1 \right) dl$; $L: \rho = 1 + \cos \varphi, 0 \leq \varphi \leq \pi$.

Задание 5. Найти центр масс однородного тела ($\gamma = 1$), ограниченного поверхностями $y^2 + z^2 \leq x \leq 2$.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Задание 1. Решите дифференциальные уравнения первого порядка:

а) $y' \sin x - y \cos x = 1$; $y_0 = 0, x_0 = \frac{\pi}{2}$.

б) $(x^2 - y^2)y' = 2xy$

в) $e^x dx - (1 + e^x)y \cdot dy = 0$

Задание 2. Решите дифференциальное уравнение второго порядка:

$$y''x \ln x = y'; \quad y(e) = e - 1, \quad y'(e) = 1.$$

Задание 3. Решите линейные дифференциальные уравнения:

а) $y'' - 5y' + 6y = 2 \cos x; \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = \frac{1}{2}.$

б) $y'' - 4y = \frac{1}{\cos^2 x}$

Задание 4. Решите систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} y' = 2x - 5y + e^t \\ x' = y - 6x + e^{-2t} \end{cases}$$

6. СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

а) основная литература

1. Вдовин А.Ю. Высшая математика. Стандартные задачи с основами теории: Учебное пособие / А. Ю. Вдовин, Л.В. Михалёва, В. М. Мухина и др. - СПб.: Издательство «Лань», 2009. – 192 с.
2. Вержбицкий, В.М. Основы численных методов. Линейные уравнения и нелинейные уравнения: Учебное пособие для вузов / В.М. Вержбицкий.- М.: Высшая школа, 2005. - 840 с.
3. Вержбицкий, В.М. Численные методы. Математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения / В.М. Вержбицкий.- М.: Высшая школа, 2005.- 382 с.
4. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. (В 2-х частях) [Текст] / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. - М.: Высшая школа, 2009.
5. Журбенко, Л.Н. Математика : Учебное пособие для вузов / Журбенко Л.Н., Никонова Г.А. и др. - М.: Инфра-М, 2009.
6. Краснов, М.Л. Вся высшая математика / М.Л. Краснов, А.И.Киселёв, Г.И.Макаренко и др. - Т. 1- 6. - М.: Эдиториал УРСС, 2001, 2004.
7. Кузнецов, Л.А. Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты) / Л.А. Кузнецов. — СПб: Издательство «Лань», 2005.- 240 с.
8. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления : Учебное пособие для вузов / Н.С. Пискунов. - В 2-х томах.- М.: Издательство "Интеграл-Пресс", 2007.

9. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике : В 2-х частях / Д.Т. Письменный. — М.: Айрис-пресс, 2005-2010.
10. Сборник задач по математике для втузов. В 4 частях : Учебное пособие для втузов / Под общ. ред. А.В.Ефимова, А.С.Поспелова. - М.: Физматлит, 2001-2003; Ч.1 - 288с., Ч.2 - 432., Ч.3 - 576с., Ч.4 - 432с.

б) дополнительная литература

1. Бахвалов, Н.С. Численные методы: Учеб. пособие / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. – М.: Издательство «Бином. Лаборатория знаний», 2003.
2. Бронштейн, И.Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов / И.Н. Бронштейн.- СПб.: Издательство "Лань", 2009.
3. Бутузов, В.Ф. Математический анализ в вопросах и задачах: Уч. Пособие / В.Ф. Бутузов. – М.: Физматлит, 2001.
4. Демидович, Б.П. Задачи и упражнения по математическому анализу: Учебное пособие / Б.П. Демидович. – СПб.: Лань, 2008.
5. Изосова, Л.А. Дифференциальные уравнения: Учеб. пособие / Л.А. Изосова. - Магнитогорск: ГОУ ВПО «МГТУ им. Г.И. Носова», 2010.
6. Изосов, А.В. Основы математического анализа. Часть 1. Дифференциальное исчисление функций одной переменной: Учеб. пособие / А.В. Изосов, Л.А. Изосова. - Магнитогорск: ГОУ ВПО «МГТУ им. Г.И. Носова», 2008. - 97 с.
7. Изосов, А.В. Основы математического анализа. Часть 2. Интегральное исчисление функций одной и нескольких переменных: Учеб. пособие / А.В. Изосов, Л.А. Изосова. - Магнитогорск: ГОУ ВПО «МГТУ им. Г.И. Носова», 2008. - 112 с.

в) учебно-методические материалы по дисциплине

1. Абрамова И.М., Пузанкова Е.А. Определенный и несобственные интегралы. Практикум.- Магнитогорск: ГОУ ВПО «МГТУ им. Г.И. Носова», 2009.
2. Абрамова И.М., Пузанкова Е.А. Кратные интегралы. Практикум.- Магнитогорск: ГОУ ВПО «МГТУ им. Г.И. Носова», 2009.
3. Акманова З.С., Коротецкая В.А. Метод хорд и касательных: Лабораторная работа для студентов всех специальностей дневной формы обучения. – МГТУ, 2007 г.
4. Акманова З.С. Неопределенный интеграл: Тетрадь-конспект – МГТУ, 2008 г.
5. Акманова З.С., Маяченко Е.П. Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений и их систем (методы Эйлера, Рунге-Кутта, Хойна. Методические указания к лабораторной работе по методам вычислений для студентов дневной формы обучения спец. 110800, 110600. – МГТУ, 2004 г.
6. Акуленко И.В., Горячева Н.А., Коротецкая В.А., Рожнова Е.В. Дифференциальные уравнения 1 порядка. Практикум.- Магнитогорск: ГОУ ВПО «МГТУ им. Г.И. Носова», 2009.

г) программное обеспечение и Интернет-ресурсы

1) электронные (мультимедийные) учебные пособия:

1. Бондаренко, Т.А. Основы непрерывной математической подготовки студентов заочного факультета технических специальностей. Модуль 4. Числовые множества и числовые функции: учеб. пособ. для студентов всех технических направл. [Электронный ресурс] / Т.А. Бондаренко, Е.Ю. Хамутских, Н.В. Чурсина и др. - М.: ФГУП НТЦ «Информрегистр», 2011. – № 0321103062.
2. Бондаренко, Т.А. Основы непрерывной математической подготовки студентов заочного факультета технических специальностей. Модуль 5. Предел функции: учеб. пособ. для

студентов всех технических направлений. [Электронный ресурс] / Т.А. Бондаренко, Е.Ю. Хамутских, М.В. Быкова и др. - М.: ФГУП НТЦ «Информрегистр», 2011. – № 0321102069.

3. Быкова, М.В. Основы непрерывной математической подготовки студентов заочного факультета технических специальностей. Модуль 1. Элементы линейной алгебры: учеб. пособ. для студентов всех технических направл. [Электронный ресурс] / М.В. Быкова, Е.В. Кобелькова, Н.А. Лосева и др. - М.: ФГУП НТЦ «Информрегистр», 2011. – № 0321101804.
4. Быкова, М.В. Линии второго порядка: учеб. пособ. для студентов всех направл. [Электронный ресурс] / М.В. Быкова, Е.В. Кобелькова, Н.А. Лосева и др. - М.: ФГУП НТЦ «Информрегистр», 2011. – № 0321101801.
5. Гугина, Е.М. Векторная алгебра: учебное пособие для студентов всех специальностей технического университета [Электронный ресурс] / Е.М. Гугина. - М.: ФГУП НТЦ «Информрегистр», 2009. – №0320901964. – 208 Мб.
6. Гугина, Е.М. Основы непрерывной математической подготовки студентов заочного факультета технических специальностей. Модуль 2. Элементы векторной алгебры: учеб. пособ. для студентов всех технических направл. [Электронный ресурс] / Е.М. Гугина, З.С. Акманова и др. - М.: ФГУП НТЦ «Информрегистр», 2011. – № 0321101803.
7. Гугина, Е.М. Основы непрерывной математической подготовки студентов заочного факультета технических специальностей. Модуль 3. Элементы аналитической геометрии: учеб. пособ. для студентов всех технических направл. [Электронный ресурс] / Е.М. Гугина, З.С. Акманова, М.В. Быкова и др. - М.: ФГУП НТЦ «Информрегистр», 2011. – № 0321101802.

Учебное текстовое электронное издание

Дубровский Владислав Владимирович
Извеков Юрий Анатольевич
Родчиков Александр Александрович

**МАТЕМАТИКА. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ:
УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС**

Учебное пособие

Издается полностью в авторской редакции
0,9 Мб
1 электрон. опт. диск

г. Магнитогорск, 2013 год
ФГБОУ ВПО «МГТУ»
Адрес: 455000, Россия, Челябинская область, г. Магнитогорск,
пр. Ленина 38

ФГБОУ ВПО «Магнитогорский государственный
технический университет им. Г.И. Носова»
Кафедра математики
Центр электронных образовательных ресурсов и
дистанционных образовательных технологий
e-mail: ceor_dot@mail.ru