Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Магнитогорский государственный технический университет
им. Г.И. Носова»

Филиппов Е.Г.
Королева В.В.
Лычагина Ю.К.

Применение методов линейного программирования для решения задач

учебное пособие
для студентов направления 230100 – Информатика и вычислительная техника

Магнитогорск
2013

УДК 51(075)

Рецензенты:

Доцент кафедры высшей математики
Магнитогорского государственного технического
университета, кандидат физ.-мат. наук

А.С. Файнштейн

Профессор кафедры информатики
Магнитогорского государственного университета,
кандидат педагогических наук

Г.Н. Лисьев

Филиппов Е.Г., Королева В.В., Лычагина Ю.К.
Применение методов линейного программирования для решения задач. – Магнитогорск: ГОУ ВПО «МГТУ им. Г.И. Носова», 2013

Разработанное учебное пособие содержит материалы для изучения курса «Методы оптимизации». Приведены задачи и примеры их выполнения. Для самостоятельной работы студентов в приложения вынесены задачи.

Учебное пособие предназначено для студентов технических специальностей.

УДК 51(075)

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Одной из основных задач сегодняшнего дня является создание единой системы оптимального планирования и управления на производстве, в народном хозяйстве на базе применения математических методов и электронно - вычислительной техники в экономике.

Решение экстремальных экономических задач можно разбить на три этапа:

1) построение экономико-математической модели;
2) нахождение оптимального плана одним из математических методов;
3) практическое внедрение.

Построение экономической модели состоит в создании упрощённой экономической модели. При этом особое внимание уделяется отражению в модели всех существенных особенностей задачи и учёту всех ограничивающих условий, которые могут повлиять на результат. Затем определяют цель решения, выбирают критерий оптимальности и дают математическую формулировку задачи.

Составными частями математического программирования являются линейное, нелинейное и динамическое программирование. Впервые постановка задачи в виде предложения составления оптимального плана перевозок, позволяющая минимизировать суммарный километраж, дана в работе русского экономиста А. Н. Толстого (1930 г.). Методам линейного программирования посвящено много работ зарубежных и прежде всего американских учёных. В 1941 г. Хичкок поставил транспортную задачу. Л.В. Канторович совместно с М.Л. Гавуриным в 1949 г. разработали метод потенциалов, который применяется при решении транспортных задач. Основной метод решения задач линейного программирования – симплексный метод – был опубликован в 1949г. Данцигом.

Одновременно с развитием линейного программирования большое внимание уделялось задачам нелинейного программирования, в которых либо целевая функция, либо ограничения, либо то и другое нелинейные. В ряде задач линейного и нелинейного программирования экономический процесс зависит от времени – нескольких периодов (этапов). При решении таких задач (они называются многоэтапными) необходимо учитывать поэтапное развитие. Метод решения задач такого рода составляет сущность динамического программирования.

1. ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

1.1 Графический метод решения задачи линейного программирования

Рассмотрим производственную задачу, условие которой представлено в табл.1.

Таблица 1. Исходные данные производственной задачи.

Сырьё	Нормы расхода сырья		Запасы сырья
	A	B	
1	4	3	480
2	3	4	444
3	2	6	546
Цена (за ед.)	2	4	

$$F = 2x_1 + 4x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \le 480 \\ 3x_1 + 4x_2 \le 444 \\ 2x_1 + 6x_2 \le 546 \\ x_1,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Найти оптимальный план выпуска продукции (x_1,x_2).

Любое из пяти ограничений, отображённое на координатной плоскости, представляет собой полуплоскость. Пересечение всех пяти полуплоскостей представляет собой множество планов и называется *многоугольником планов*. Этот многоугольник планов является выпуклым множеством (множество называется выпуклым, если вместе с любыми своими двумя точками оно содержит также и отрезок, соединяющий эти точки).

Линия уровня целевой функции –прямая линия. Будем двигать линию уровня параллельно самой себе в направлении вектора-нормали так, чтобы она всё время пересекалась с многоугольником планов. В направлении вектора-нормали значение целевой функции будет возрастать. Последняя точка выхода линии уровня из многоугольника планов и будет являться оптимальным планом.

При решении задачи линейного программирования графическим методом могут возникнуть следующие ситуации:

1. решение задачи – единственная точка X^* (рис.1);

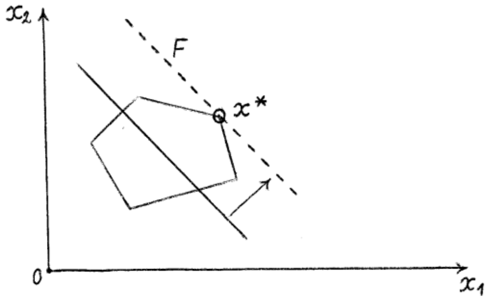


Рис.1.

2. задача имеет множество решений (любая точка отрезка АВ является оптимальным решением) (рис.2);

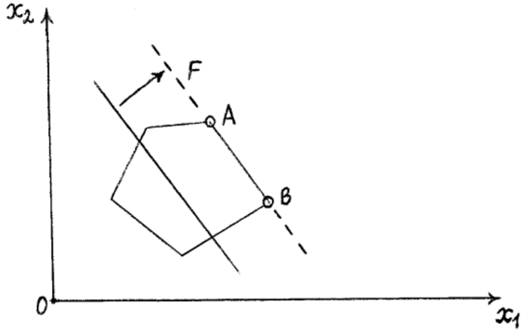


Рис.2.

3. задача не имеет решения, так как целевая функция не ограничена на множестве планов (рис.3);

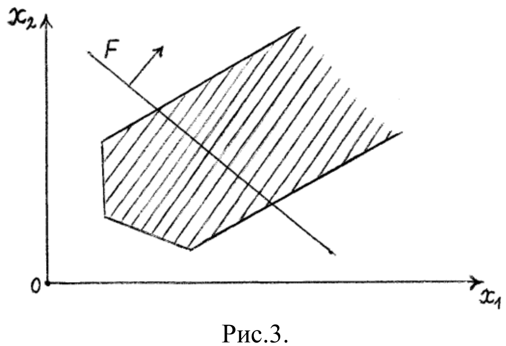


Рис.3.

4. Задача не имеет решения, так как множество планов пустое.

Замечание 1. В данном случае мы рассматриваем задачу на поиск максимума: $F \to \max$. Условие $F \to \min$ сводится к максимуму следующим образом: $-F \to \max$.

Замечание 2. В силу выпуклости задачи линейного программирования оптимальный план находится в угловой точке многоугольника планов. Казалось бы, что можно перебрать все угловые точки многоугольника планов и просчитать в них значения целевой функции. Однако на деле не всё так просто…

План задачи линейного программирования имеет вид:

$$X = (x_1,\ x_2,\ \dots\ ,\ x_n)$$

Если m – число ограничений, то в этом случае угловые точки многоугольника планов имеют не более, чем m ненулевых координат. Следовательно, количество угловых точек равно:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

По формуле Стирлинга $n! = (2\pi)^{1/2} n^{n+1/2} e^{-n} (1 + o(n))$ является очень быстро растущей функцией.

Число угловых точек в реальных задачах линейного программирования (с десятками переменных и ограничений) астрономически велико. Поэтому будем переходить от одной угловой точки к другой так, чтобы значение целевой функции не уменьшалось. Это основная идея *симплекс-метода.*

1.2 Симплекс-метод решения задачи линейного программирования

Рассмотрим задачу линейного программирования в общем виде:

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \to \max$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_1,\ x_2,\ \dots\ ,\ x_n \ge 0 \end{cases}$$

Замечание. Систему ограничений мы представили в виде равенств. Если в ограничениях присутствуют неравенства, то всегда можно добавить дополнительные *уравновешивающие переменные*, в результате чего мы получим равенство. Например, в рассматриваемой задаче каждому из трёх неравенств можно добавить для уравновешивания дополнительные положительные переменные $x_3,\ x_4,\ x_5$. Эти переменные в оптимальном плане будут означать остатки неиспользованных ресурсов 1, 2 и 3-го видов соответственно.

Запишем условие задачи в матричной форме:

$$F = CX \to \max$$

$$\begin{cases} AX = A_0 \\ X \ge 0 \end{cases}$$

$$C = (c_1,\ c_2,\ \dots,\ c_n) - \textit{стоимостные коэффициенты}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad A_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Систему ограничений перепишем в следующем виде:

$$x_1A_1 + x_2A_2 + \dots + x_nA_n = A_0 \qquad (*),$$

где вектора $A_1,\ A_2,\ \dots,\ A_n$ – столбцы матрицы A.

Соотношение (*) представляет собой разложение вектора A_0 по векторам $A_1,\ A_2,\ \dots,\ A_n$.

Будем полагать, что $m \le n$. $A_1,\ A_2,\ \dots,\ A_n \in R^m$. В пространстве R^m базис состоит из m векторов. Следовательно, в разложении (*) часть коэффициентов разложения x_i равна 0. Точнее, в разложении (*) не более, чем m ненулевых значений x_i. Таким образом, координаты x_i в разложении (*) являются координатами угловых точек многоугольника планов.

Предположим, мы имеем одну угловую точку многоугольника планов. Чтобы перейти к соседней угловой точке необходимо заменить один из векторов базиса на вектор, не принадлежащий базису (перейти к новому базису). Такую процедуру можно осуществить методом Гаусса. При этом в задаче линейного программирования должно выполняться следующее:

1. в следующей угловой точке значение целевой функции должно не убывать;
2. нужно опознать оптимальный план;
3. все координаты $x_i \geq 0$.

Для решения 1 и 2 проблем вычислим числа Δ_i:

$$\Delta_i = (c_б, A_i) - c_i \qquad (**),$$

где $(c_б, A_i)$ - скалярное произведение;

c_i – i-тый коэффициент целевой функции (стоимостной коэффициент);

вектор $c_б$ – вектор, состоящий из коэффициентов целевой функции, соответствующим векторам базиса;

числа Δ_i-тые называются *оценками плана* задачи линейного программирования.

Можно показать, что для векторов базиса $\Delta_i = 0$.

Если в полученном плане задачи линейного программирования при решении задачи на максимум все $\Delta_i \geq 0$, то такой план является оптимальным. Если существует j, для которого $\Delta_j < 0$, то вектор A_j мы будем включать в базис, заменив им какой-либо из векторов базиса. Такая процедура выбора вектора A_j для замены базиса обеспечивает не убывание целевой функции на следующем плане.

Вектор в базисе, подлежащий замене, следует выбирать так, чтобы коэффициенты разложения по базису оставались неотрицательными.

Рассмотрим алгоритм, являющийся *симплекс-методом* решения задачи линейного программирования. Для этого решим симплекс-методом производственную задачу, условие которой представлено в табл.1.

Таблица 1. Исходные данные производственной задачи.

Сырьё	Нормы расхода сырья		Запасы сырья
	A	B	
1	4	3	480

2	3	4	444
3	2	6	546
Цена (за ед.)	2	4	

$$F = 2x_1 + 4x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \le 480 \\ 3x_1 + 4x_2 \le 444 \\ 2x_1 + 6x_2 \le 546 \\ x_1,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Вводим уравновешивающие переменные:

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 480 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_4 = 444 \\ 2x_1 + 6x_2 + x_5 = 546 \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \ge 0 \end{cases}$$

Благодаря уравновешивающим переменным мы можем найти опорный план:

$$X_0 = (0,\ 0,\ 480,\ 444,\ 546)$$

Алгоритм симплекс-метода будем реализовывать в специальной *симплекс-таблице*:

Базис	$c_б$		2	4	0	0	0	
		A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	
A_3	0	480	4	3	1	0	0	480/3
A_4	0	444	3	4	0	1	0	444/4
A_5	0	546	2	6	0	0	1	546/6
Δ_i		0	-2	-4	0	0	0	

$$F(X_0) = 0$$

$$\theta = \min\left(\frac{A_0}{A_2}\right) = \min\left(\frac{480}{3}, \frac{444}{4}, \frac{546}{6}\right)$$

Базис	$c_б$		2	4	0	0	0	
		A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	
A_3	0	207	3	0	1	0	-1/2	69
A_4	0	80	1 2/3	0	0	1	-2/3	48
A_2	4	91	1/3	1	0	0	1/6	273
Δ_i		364	-2/3	0	0	0	2/3	

Базис	$c_б$		2	4	0	0	0	
		A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	
A_3	0	63	0	0	1	-1 4/5	7/10	
A_1	2	48	1	0	0	3/5	-2/5	
A_2	4	75	0	1	0	-1/5	3/10	
Δ_i		396	0	0	0	2/5	2/5	

Как видим, в последней симплекс-таблице все $\Delta_i \geq 0$. Следовательно, план является оптимальным. Согласно этому плану, необходимо выпустить 48 изделий первого вида и 75 изделий второго вида. При этом прибыль составит 396 единиц и 63 единицы сырья первого вида остались неиспользованными.

Замечание.

В симплекс-методе при решении задачи на максимум правильный выбор разрешающего столбца обеспечивает не убывание целевой функции и правильный выбор разрешающей строки – положительность компонент плана (столбец A_0) на последующей итерации.

1.3 Задача линейного программирования с изменяющимися условиями

Задачи линейного программирования возникают во многих практических ситуациях. Коэффициенты, входящие в математическую формулировку задачи, часто имеют экономический смысл в практических задачах. Коэффициенты целевой функции могут выражать прибыль при коммерческих операциях. Значение, входящие в правые части ограничений могут выражать ограниченность доступных ресурсов. Можно ожидать, что в подобных случаях эти значения будут меняться, что, в свою очередь, приведет к изменению формулировок математических задач. Например, благодаря повышению производительности труда может увеличиться доступное производительное время станков; пожар на складе может снизить поставки сырья; трудности, связанные с плохой погодой, могут привести к увеличению прибыли от продажи некоторых наименований товаров. Как действовать в подобных ситуациях?

Один из самых примитивных способов состоит в том, чтобы учесть возникающие физические изменения, поставить новую математическую задачу и решить ее с начала. Однако этот способ может быть весьма неэффективен; он не учитывает полезную работу, проведенную при решении задачи до изменений

При решении задачи линейного программирования симплекс-методом в симплекс-таблице всегда присутствует единичная матрица (матрица, состоящая из единичных столбцов). При переходе от одной симплекс-таблицы к следующей с помощью метода Гаусса единичная матрица преобразуется в другую матрицу. Следовательно, все остальные столбцы преобразуются в обратную матрицу.

Обозначим матрицу, стоящую рядом с единичной через D. Обратную к ней матрицу обозначим D^{-1}. Матрица D находится в первой симплекс-таблице и состоит из столбцов, номера которых взяты в качестве векторов базиса в последней симплекс-таблице. Матрица D^{-1} состоит из столбцов последней симплекс-таблицы. Номера этих столбцов являются номерами векторов базиса в первой симплекс-таблице.

Пусть X - матрица вида $(A_0, A_1, \dots, A_n)$ – матрица первой симплекс-таблицы. Пусть $X' = (A'_0, A'_1, \dots, A'_n)$ - матрица последней симплекс-таблицы. Тогда справедливо соотношение:

$$D^{-1} \cdot X = X'$$

1. Предположим, что в первой симплекс-таблице поменялся столбец A_0 (изменились запасы сырья). Тогда в последней симплекс-таблице $A_0' = D^{-1} \cdot A_0$. План останется оптимальным, если выполнено условие: $A_0' = D^{-1} \cdot A_0 \geq 0$. В частности, в столбце A_0 добавим единицу первого ресурса:

$$A_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} \qquad A_0 = \begin{pmatrix} b_1 + 1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

и, если выполнится условие $A_0' = D^{-1} \cdot A_0 \geq 0$, пересчитаем значение целевой функции. Значение целевой функции изменится на величину $\Delta F = y_1$. Величина y_1 - это та величина прибыли, которую мы получим за счёт закупки единицы сырья первого вида. Следовательно, y_1 - это максимальная стоимость единицы сырья первого вида.

Аналогичным образом мы можем получить оценки единицы сырья любого другого вида. Причём, если в последней симплекс-таблице окажутся остатки сырья, то оптимальная цена этого вида сырья равна 0.

Таким образом можно сформулировать *третью теорему двойственности:*

$$\partial F^* / \partial b_i = y_i^*$$

Замечание. Величины $y_i = y^*{}_i$ являются переменными для задачи оптимизации, связанной с исходной. Такая задача называется *двойственной задачей* к задаче линейного программирования и:

$$Y^* = C_б^* \cdot D^{-1}$$

2. Предположим, в симплекс-таблице изменился вектор A_i $(i = 1,\, 2,\, \dots ,\, n)$ (то есть изменились затраты сырья на i - тый продукт). В последней симплекс-таблице этот вектор будет иметь вид $A_i' = D^{-1} \cdot A_i$. Изменение условий производства не скажется

на оптимальном плане, если выполнится условие: $\Delta_i' \geq 0$. Если же $\Delta_i' < 0$, то это значит, что в последней симплекс-таблице план не оптимален и вектор A_i' нужно включить в базис, то есть в результате изменения условий производства поменяется оптимальный план (появится новый продукт или изменятся условия использования запасов сырья).

В частности, применительно к рассмотренному примеру, предположим, мы решили выпустить новый вид продукции C с вектором затрат A_6 и ценой за единицу c. Вектор A_6 добавляем в первую симплекс-таблицу. В последней симплекс-таблице он примет вид: $A_6' = D^{-1} \cdot A_6$. В случае $\Delta_6' \geq 0$ выпуск продукции C нецелесообразен (он не увеличит целевую функцию). В случае $\Delta_6' < 0$ придётся дорешивать последнюю симплекс-таблицу и включать вектор A_6 в базис, что означает включение продукта C в план производства.

3. Предположим, изменили цену первого продукта на величину δ: $c_1 + \delta$. Рассматривая первую и последнюю симплекс-таблицы, убеждаемся, что изменения в последней симплекс-таблице могут произойти только в строке оценок. Следовательно, условия сохранения оптимальности плана выразятся в виде системы неравенств:

$$\begin{cases} \Delta_1' \geq 0 \\ \Delta_2' \geq 0 \\ \ldots \\ \Delta_{n-m}' \geq 0 \end{cases}$$

Решая эти неравенства, находим δ. Величина δ показывает, насколько мы можем изменить цену первого продукта так, чтобы не изменился ассортимент продукции производства.

4. Предположим, появилось новое дополнительное ограничение в задаче (дополнительная строка в симплекс-таблице). С помощью матрицы D^{-1} нужно отследить поведение этой строки и продолжить решение задачи симплекс-методом.

Замечание. Поведение дополнительного условия удобнее отслеживать на двойственной задаче.

1.4 Теория двойственности в линейном программировании

Как уже указывалось, каждой задаче линейного программирования соответствует другая задача, двойственная к исходной. Между парой задач существует тесная связь, которую мы выразим с помощью 3-х теорем двойственности (о 3-й теореме двойственности уже говорилось).
Исходная задача в матричной форме:

$$P:\ F = CX \to \max$$

$$\begin{cases} AX \le A_0 \\ X \ge 0 \end{cases}$$

Двойственная задача

$$D:\quad Z = YA_0 \to \min$$

$$\begin{cases} Y * A \ge C \\ Y \ge 0 \end{cases}$$

В рассмотренных примерах исходная задача (P) – поиск оптимального плана при ограничениях на запасы сырья. Тогда двойственная задача (D) – поиск оптимальных цен на сырье.

1-я теорема двойственности

Если одна из взаимно двойственных задач имеет оптимальное решение, то и вторая задача также имеет оптимальное решение и

$$F(X^*) = Z(Y^*)$$

Если целевая функция одной задачи не ограничена на многоугольнике планов, то многоугольник планов другой задачи пустое множество.

Пусть даны две взаимно двойственные задачи (P) и (D). Систему ограничений для первой задачи запишем в координатном виде:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad i = 1,2,...,m$$

Введем m уравновешивающих неотрицательных переменных $x_{n+1,} x_{n+2,...} x_{n+m}$ и неравенства превратятся в равенства:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i \qquad i = 1,2,...,m$$

Для второй задачи (D):

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j \qquad j = 1,2,...,n$$

Введем уравновешивающие неотрицательные переменные

$y_{m+1,} y_{m+2,...} y_{m+n}$, тогда,

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i - y_{m+j} = c_j \qquad j = 1,2,...,n$$

Установим между всеми переменными соответствие

x_1	x_2…	x_j…	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}…	x_{n+i}…	x_{n+m}
y_{m+1}	y_{m+2}…	y_{m+j}…	y_{m+n}	y_1	y_2…	y_j…	y_m

2-я теорема двойственности
Для того, чтобы X и Y* ,были решениями задач (P) и (D), необходимо и достаточно выполнения следующих соотношений*

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m} x_{n+i}^{*} y_i^{*} = 0, y_k^{*} \geq 0, k = 1,2,...m+n \\ \sum_{j=1}^{m} x_j^{*} y_{m+j}^{*} = 0, x_l^{*} \geq 0, l = 1,2,...m+n \end{cases}$$

Эта теорема устанавливает соответствие между первоначальными переменными одной из двойственных задач и дополнительными переменными другой задачи.

3-я теорема двойственности:

Пусть Y^* -оптимальный план (P) задачи, тогда

$$\partial F^* / \partial b_i = y_i^*$$

Рассмотрим следующий примеры [2].

<u>*Пример 1*</u>

Рассмотрим пример

Фирма производит две модели А и В сборных книжных полок. Их производство ограничено наличием сырья высококачественных досок и временем машинной обработки. Для каждого изделия модели А требуется 3м^2 досок, а для изделия модели В-4м^2. Фирма может получить от своих поставщиков до 1700 м^2 досок в неделю. На каждое изделие модели А требуется 12 мин машинного времени, а на изделие модели В-30 мин. В неделю можно использовать 160ч машинного времени. Если каждое изделие модели А приносит 2 дол. прибыли, а изделие модели В-4 дол. прибыли, сколько изделий каждой модели фирме необходимо выпускать в неделю?

Если план выпуска изделий модели А – x_1 единиц, а модели В – x_2 единиц, то задача линейного программирования состоит в том, чтобы найти такие x_1, $x_2 \geq 0$, что

$$3x_1 + 4x_2 \leq 1700,$$

$$\frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \leq 1600,$$

т.е.

$$3x_1 + 4x_2 \le 1700,$$
$$2x_1 + 5x_2 \ge 1600,$$

при которых максимизируется функция $2x_1 + 4x_2 = F$.
Первая и последняя (оптимальная) таблицы имеют соответственно следующий вид:

Итерация	Базис	Значение	A_1	A_2	A_3	A_4
	A_3 A_4	1700 1600	3 2	4 5	1 .	. 1
	F	0	2	4	.	.

Итерация	Базис	Значение	A_1	A_2	A_3	A_4
	A_1 A_2	300 200	1 .	. .	$\frac{5}{7}$ $-\frac{2}{7}$	$-\frac{4}{7}$ $\frac{3}{7}$
	F	1400	.	.	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$

Матрица D^{-1} имеет вид $\begin{pmatrix} \frac{5}{7} & -\frac{4}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}$; двойственные переменные равны 2/7, 4/7.

А). Предположим, что появилась возможность приобрести дополнительное сырье у второго поставщика. Сколько ему можно заплатить за 1 м2?

Допустим, что в первом ограничении 1700 было заменено на 1701. Вектор b заменяется на новый вектор .

$$\begin{pmatrix} 1701 \\ 1600 \end{pmatrix}$$

Новыми значениями базисных переменных будут

$$\begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/7 & -4/7 \\ -2/7 & 3/7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1701 \\ 1600 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300 \\ 200 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5/7 & -4/7 \\ -2/7 & 3/7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 300 + \frac{5}{7} \\ 200 - \frac{2}{7} \end{pmatrix}$$

что допустимо.

Оптимальное значение функции F меняется на $\sum b_i y_i$, данном случае (2/7*1701+4/7*1600)= 1400+2/7.

Таким образом, прибыль возрастает на 2/7 дол., и это – максимальная цена, которую следует заплатить за дополнительный 1 м2 доски. Нет смысла приобретать дополнительное сырье. Максимальная цена равна y_1.

В). Предположим, что имеется возможность получения дополнительного машинного времени. Выгодно ли это, если 1 ч машинного времени стоит 7 дол.?

В этом случае в математической задаче вектор b заменяется на вектор $\begin{pmatrix} 1701 \\ 1610 \end{pmatrix}$. Новыми значениями базисных переменных будут

$$\begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/7 & -4/7 \\ -2/7 & 3/7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1700 \\ 1610 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300 - & 40/7 \\ 200 + & 30/7 \end{pmatrix}$$

что недопустимо.

Оптимальное значение для функции F заменяется на значение, – (2/7*1700+4/7*1610)= 1400+40/7.

Прибыль увеличивается на 40/7 дол. Поскольку дополнительный 1 ч машинного времени стоит 7 дол.- это невыгодно.

Легко видеть, что решение этой задачи с начала приведет к тем же результатам. Но нет никакой необходимости начинать с начала. В больших по объему задачах это неэффективно.

Заметьте, что в пункте А). новое значение для функции F равно - 2(300+5/7)+4(200-2/7), а в пункте В). – равно 2(300-40/7)+4(200+30/7).

Изменения в c_j

Пример 2

Пусть в примере 1 прибыль от одной модели А составляет Р1 дол., а от одной модели В – Р2 дол. Для каких значений Р1 и Р2 полученное решение является оптимальным?

Целевая функция в первой таблице задается формулой – $P1x_1$ - $P2x_2$=F+0. Поскольку в симплекс-таблице изменяется только строка с ценами, каноническая форма ограничений в том же базисе останется прежней, т.е.

$$x_1 + \frac{5}{7}x_3 - \frac{4}{7}x_4 = 300$$

$$x_2 - \frac{2}{7}x_3 + \frac{3}{7}x_4 = 200$$

Решение будет оптимальным, если оценки Δ_i при внебазисных переменных положительны.

$5/7P1-2/7P2 \geq 0$ и $-4/7P1+3/7P2 \geq 0$, т.е.

$P1/P2 \geq 2/5$ и $P1/P2 \leq 3/4$.

Включение дополнительных переменных

Пример 3

Пусть оказалось возможным изготовить полки типа С и пусть для изготовления одной полки этого типа необходимо 4 м2 материала и требуется 20 мин машинного времени. Если прибыль от одного изделия составляет Р дол., стоит ли браться за его изготовление?

$$3x_1 + 4x_2 + x_3 + \quad +4x_5 = 1700,$$

$$\frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_4 + \frac{1}{3}x_5 = 1600,$$

$$-2x_1 - 4x_2 \quad -Px_5 = F$$

и максимизировать функцию

т.е. $3x_1 + 4x_2 + x_3 + \quad +4x_5 = 1700,$

$$2x_1 + 5x_2 + x_4 + \frac{10}{3}x5 = 1600,$$

$2x_1 + 4x_2 \quad +Px_5 = F$ – максимальна

В конечной таблице первые два элемента столбца, соответствующего x_5, будут согласно уравнению иметь следующий вид

$$D^{-1}\begin{pmatrix}4\\10/3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5/7 & -4/7\\-2/7 & 3/7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\10/3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}20/21\\6/21\end{pmatrix}$$

оценка Δ_5 при x_5

$-P+2/7X4+4/7X10/3=-P+64/21$.

Конечная таблица примет следующий вид (изменения произошли только в столбце x_5)

Итерация	Базис	Значение	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
2	A_1 A_2	300 200	1 .	. 1	$\frac{5}{7}$ $-\frac{2}{7}$	$-\frac{4}{7}$ $\frac{3}{7}$	$\frac{20}{21}$ $\frac{6}{21}$
	F	1400	.		$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$-P+\frac{64}{21}$

Если $-P+64/21\geq 0$, то решение, приведенное в таблице оптимально; x_5 остается небазисной переменной, и не надо составлять новую модель.
Если $-P+64/21<0$, т.е. $P>64/21$, то необходимо включить x_5 в базис. С этого момента можно продолжить вычисления симплекс-методом.

Включение дополнительных ограничений

Пример 4
Предположим, что в период экономического кризиса торговые агенты сообщают, что рынок принимает не более 550 полок в неделю. Как это отразится на производстве? Указанное ограничение на объем продажи равносильно ограничению $x1 + x2\leq 550$.
Это дополнительное ограничение должно быть включено в математическую постановку задачи. Однако в данном случае оно никак не влияет на оптимальное решение. В этом решении $x1 = 300$ и $x2 = 200$, так что $x1 + x2 = 500$ удовлетворяет дополнительному ограничению.
Если бы экономический кризис был серьезнее, с ограничением рынка до 450 полок в неделю, ситуация была бы иной.

*Двойственный симплекс-метод***.**
Пример 5
Предположим, что недельная продажа ограничена 450 полками.

Тогда должно быть включено дополнительное ограничение

$$x_1 + x_2 \leq 450.$$

В виде уравнения оно записывается как

$$x_1 + x_2 + x_5 = 450,$$

где $x_5 \geq 0$ – дополнительная переменная.

Это ограничение нарушается оптимальным решением исходной задачи. Необходимо ли решать эту задачу с самого начала с новым включением? Если так поступить и повторить проведенные вычисления, то дополнительное ограничение выразится через небазисные переменные, которые можно получить из текущей канонической формы

$$x_1 + 5/7x_3 - 4/7x_4 = 300,$$
$$x_2 - 2/7x_3 + 3/7x_4 = 200.$$

Поэтому уравнение

$$x_1 + x_2 + x_5 = 450$$

после исключения x_1 и x_2 принимает вид

$$-3/7x_3 + 1/7\, x_4 + x_5 = -50$$

Последняя таблица будет иметь следующий вид (изменения – только вид дополнительного ограничения):

Итерация	Базис	Значение	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
2	A_1	300	1	.	$\frac{5}{7}$	$-\frac{4}{7}$	.
	A_2	200	.	1	$-\frac{2}{7}$	$\frac{3}{7}$	.
	A_5	-50	.	.	$-\frac{3}{7}$	$\frac{1}{7}$	1
	A	1400	.	.	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	.

Здесь возникают определенные трудности. В этой канонической форме для базиса x_1, x_2, x_3 целевая функция имеет такой же вид как оптимальная, однако базис не допустим. Переменная x_5 отрицательна. Существует ли, несмотря на это, способ сохранить результаты проделанной к этому моменту полезной работы? Да, и соответствующая процедура носит название *двойственного симплекс-метода.*

Симплекс-метод можно определить как процедуру, начинающуюся с положительных значений базисных переменных и преобразующую задачу (сохраняя этой свойство) к канонической форме (возможно, в нескольких стадий), в которой все оценки плана неотрицательны. В двойственном симплекс-методе все наоборот; при его использовании не требуется, чтобы все базисные переменные были положительны с самого начала, но для задачи максимизации необходимо чтобы все оценки плана были неотрицательны. Сохраняя последнее свойство, ограничения с помощью двойственного симплекс-метода преобразуются до тех пор, пока не будет получен положительный базис, и в этот момент достигается максимум (при этом оценки плана сохраняются неотрицательными).

В нашей задаче базисная переменная x_5 отрицательна и является кандидатом на удаление из базиса. Какая переменная должна ее заменить? В строке x_5 таблицы ищется отрицательный ведущий элемент, такой, что при следующих преобразованиях (которые снова примут вид уравнений) оценки плана будут оставаться положительными. Перед формализацией этих правил посмотрим, как они выполняются в нашей задаче. В строке x_5 имеется только один отрицательный коэффициент – коэффициент при x_3, равный – 3/7. Если мы разделим уравнение на – 3/7, чтобы включить в базисные переменные переменную x_3 (с коэффициентом 1), то получим уравнение

$$x_3 -1/3x_4 -7/3x_5 = 350/3,$$

т.е. значение x_3 станет положительным. Следующим шагом мы должны исключить переменную x_3 из остальных ограничений. Это достигается простыми симплексными вычислениями; результаты, как показано ниже, могут быть сведены в таблицу. Ведущий элемент (отрицательное значение – 3/7) отмечен звездочкой.

Итерация	Базис	Значение	A_1	A_2	A_3	A_5	A_6
	A_1	300	1	.	$\frac{5}{7}$	$-\frac{4}{7}$	.
	A_2	200	.	1	$-\frac{2}{7}$	$\frac{3}{7}$	.
	A_5	-50	.	.	$-\frac{3}{7}$*	$\frac{1}{7}$	1
	F	1400	.	.	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	.
2	A_1	$\frac{650}{3}$	1	.	.	$-\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$
	A_2	$\frac{700}{3}$	.	1	.	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
	A_3	$\frac{350}{3}$	.	.	1	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{7}{3}$
	F	$\frac{4100}{3}$	.	.	.	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$

В конечной таблице приведено оптимальное решение новой задачи:

$x_1 = 650/3$, $x_2 = 700/3$, причем $F = 4100/3$.

Поскольку в этом решении x_3 – базисная переменная, имеется избыток сырья и в результате количество заказанных досок может быть сокращено.

Описанная процедура может быть обобщена. Если все оценки плана положительны, то процедура будет иметь следующие шаги:

1. Найти отрицательную базисную переменную. Если ее нет, то оптимальное решение найдено; если их более чем одна, надо взять из них самую отрицательную. Пусть эта переменная – базисная в r-м ограничении. Она является переменной для исключения из базиса.
2. В r-й строке найти отрицательный коэффициент a'_{rj}. Если его нет, то, очевидно, не существует допустимого решения задачи. Для отрицательных коэффициентов в этой строке найти

$$\min_j \left| c'_j \,/\, a'_{rj} \right|$$

Если этот минимум найден в s-м столбце, переменная s должна быть включена в базис.

3. Провести обычные симплекс-преобразования, выбрав в качестве ведущего элемента a'_{rs}, для следующей итерации имеем

$$c_j^+ = c'_j - c'_j a'_{rj} / a'_{rs},$$

и, поскольку все a'_{rs} отрицательны, а c'_j положительны, эта величина положительна, так как s выделено из соотношения

$$\min_j \left| \frac{c'_j}{a'_{rj}} \right| = \left| \frac{c'_s}{a'_{rs}} \right|$$

Следовательно, двойственный симплекс-метод отличается от симплекс-метода только выбором переменной для исключения и включения в базис.

Чтобы убедиться в том, что в двойственном симплекс-методе можно начинать поиск минимума вне допустимой области, мы предлагаем читателю проверить пример 5 этого раздела геометрически. Этим методом, в конце концов, можно найти допустимую точку, которая также и оптимальна.

1.5. Задача о «расшивке узких мест производства».

Результат решения задачи из параграфа 1.2 показывает, что 63 единицы сырья первого вида остались неиспользованными сырье второго и третьего видов израсходовано полностью. Если докупить израсходованное сырье (ликвидировать узкое место производства), то можно продолжить производство продукции и получить дополнительную прибыль.

1. *Математическая модель задачи:*

найти план производства (x_1, x_2, x_3, x_4) <u>*максимизирующий*</u> выручку

$$Z = 59x_1 + 27x_2 + 20x_3 + 35x_4 \qquad (1)$$

при ограничениях по ресурсам

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 \le 102 \\ 3x_1 + 2x_2 + \quad + 3x_4 \le 204 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \le 188 \end{cases} \qquad (2)$$

где $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0$ (3)

Базисное решение

$$x_1 = 40; x_2 = 0; x_3 = 0; x_4 = 28; x_5 = 6; x_6 = 0; x_7 = 0$$

(4)

В последней строке симплекс-таблицы все оценки $\Delta j \ge 0$, то есть выполняется критерий оптимальности для максимизируемой целевой функции.

План $x_1 = 40; x_2 = 0; x_3 = 0; x_4 = 28$ является оптимальным и обеспечивает предприятию возможную наибольшую прибыль Z max = 3340.

При этом второй и третий ресурсы будут использованы полностью x_6, $x_7 = 0$, а первый ресурс будет иметь остаток x_5 = 6.

Матрица $D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{7}{9} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{4}{9} & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{9} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

2. *Двойственная задача линейного программирования*. Найдем оценку единицы каждого вида ресурса.

Задача: найти вектор двойственных оценок (y_1, y_2, y_3), <u>*минимизирующий*</u> общую оценку всех ресурсов

$$f = 102y_1 + 204y_2 + 188y_3 \quad (5)$$

при условии, что по каждому виду продукции суммарная оценка всех ресурсов, затрачиваемых на производство единицы продукции, не меньше прибыли, получаемой от реализации единицы этой продукции

$$\begin{cases} y_1 + 3y_2 + 4y_3 \geq 59 \\ 3y_1 + 2y_2 + 2y_3 \geq 27 \\ 2y_1 + 3y_3 \geq 20 \\ 2y_1 + 3y_2 + y_3 \geq 35 \end{cases} \quad (6)$$

причем оценки ресурсов $y_1 \geq 0; y_2 \geq 0; y_3 \geq 0.$ (7)

Решение задачи получим с помощью второй основной теоремы двойственности: для оптимальных решений $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ и $\overline{y} = (y_1, y_2, y_3)$ пары двойственных задач, необходимо и достаточно выполнения условий

$$\begin{cases} x_1(y_1 + 3y_2 + 4y_3 - 59) = 0 \\ x_2(3y_1 + 2y_2 + 2y_3 - 27) = 0 \\ x_3(2y_1 + 3y_3 - 20) = 0 \\ x_4(2y_1 + 3y_2 + y_3 - 35) = 0 \end{cases} \text{и}$$

$$\begin{cases} y_1(x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 102) = 0 \\ y_2(3x_1 + 2x_2 + 3x_4 - 204) = 0 \\ y_3(4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 - 188) = 0 \end{cases}$$

Было найдено, что в решении исходной задачи $x_1 > 0$ и $x_4 > 0$

Поэтому $\begin{cases} y_1 + 3y_2 + 4y_3 - 59 = 0 \\ 2y_1 + 3y_2 + y_3 - 35 = 0 \end{cases}$

Учитывая, что первый ресурс был избыточным, согласно той же теореме двойственности, ее двойственная оценка равна нулю, то есть y_1=0. Приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} 3y_2 + 4y_3 - 59 = 0 \\ 3y_2 + y_3 - 35 = 0 \end{cases}$$

Решая систему, получаем, y_2 = 9; y_3 = 8.

Получили двойственные оценки ресурсов

y_1 = 0; y_2 = 9; y_3 = 8, (8)

причем общая оценка всех ресурсов равна 3340.

Решение (8) содержалось в последней строке симплекс-таблицы задачи (1), (2), (3).

Например, двойственная оценка ресурса y_3 = 8 показывает, что добавление одной единицы третьего ресурса обеспечит прирост прибыли в 8 единиц, а оценка третьей технологии Δ_3 = 4 показывает, что если произвести одну единицу продукции третьего вида (она не входит в производственный оптимальный план), то прибыль уменьшается на 4 единицы.

3. *Задача о «расшивке узких мест производства».*

При выполнении оптимальной производственной программы второй и третий ресурсы используются полностью, то есть образуют «узкие места производства». Будем заказывать их дополнительно. Используем найденные двойственные оценки ресурсов. Должно выполняться условие $D^{-1} A_o + D^{-1} \cdot T \geq 0$.

Задача: найти вектор $T = (0,\ t_2,\ t_3)$, максимизирующий суммарный прирост прибыли

$W = 9 \cdot t_2 + 8 \cdot t_3$, (9)

при условии сохранения двойственных оценок ресурсов (и, следовательно, структуры плана производства),

$$\begin{pmatrix}6\\28\\40\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & -\frac{7}{9} & \frac{1}{3}\\ 0 & \frac{4}{9} & -\frac{1}{3}\\ 0 & -\frac{1}{9} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\t_2\\t_3\end{pmatrix}\geq\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \qquad (10)$$

и предполагая, что можно надеяться получить дополнительно не более 1/3 первоначального ресурса каждого вида

$$\begin{pmatrix}0\\t_2\\t_3\end{pmatrix}\leq\frac{1}{3}\begin{pmatrix}102\\204\\188\end{pmatrix} \qquad (11)$$

причем $t_2 \geq 0,\ t_3 \geq 0$ (12)

Неравенства (10) и (11) перепишем в виде:

$$\begin{cases}6 & -\frac{7}{9}t_2 & +\frac{1}{3}t_3 \geq 0\\ 28 & +\frac{4}{9}t_2 & -\frac{1}{3}t_3 \geq 0\\ 40 & -\frac{1}{9}t_2 & +\frac{1}{3}t_3 \geq 0\end{cases} \qquad (13)$$

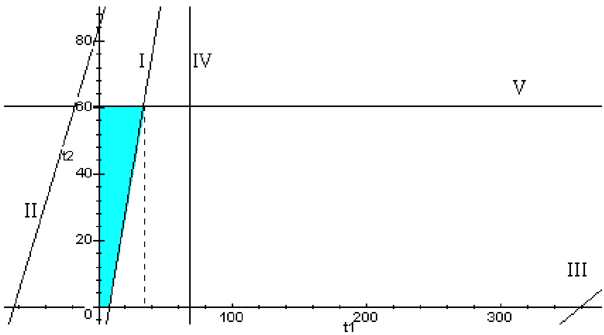
$$\begin{cases}\frac{7}{9}t_2 & -\frac{1}{3}t_3 \leq 6\\ -\frac{4}{9}t_2 & +\frac{1}{3}t_3 \leq 28\\ \frac{1}{9}t_2 & -\frac{1}{3}t_3 \leq 40\end{cases} \quad (14) \qquad \begin{cases}t_2 \leq \frac{204}{3} = 68\\ t_3 \leq \frac{188}{3}\end{cases} \quad (15)$$

Получим задачу линейного программирования :
максимизировать $W = 9 \cdot t_2 + 8 \cdot t_3$, (16)
при условиях

$$\begin{cases} \frac{7}{9}t_2 \quad -\frac{1}{3}t_3 \le 6 & I \\ -\frac{4}{9}t_2 + \frac{1}{3}t_3 \le 28 & II \\ \frac{1}{9}t_2 \quad -\frac{1}{3}t_3 \le 40 & III \end{cases} \quad (17), \qquad \begin{cases} t_2 \le \frac{204}{3} = 6 & IV \\ t_3 \le \frac{188}{3} & V \end{cases} \quad (18),$$

$t_2 \ge 0,\ t_3 \ge 0.$ (19)

Решим задачу графически



План «расшивки» имеет вид:

$$t_2 = 34 \cdot \frac{4}{7} = \frac{242}{7}; \quad t_1 = 0; \ t_3 = 62 \cdot \frac{2}{3} = \frac{188}{3}$$

и прирост прибыли составит $W = 9 \cdot \frac{242}{7} + 8 \cdot \frac{188}{3} = 812\frac{10}{21}$.

2. ТРАНСПОРТНЫЕ ЗАДАЧИ

Рассмотрим транспортную задачу линейного программирования, которая получила распространение в теоретических разработках и практическом применении на транспорте и в промышленности. Особенно важное значение она имеет в деле рационализации поставок важнейших видов промышленной и с/х продукции, а также оптимального планирования грузопотоков и работы разных видов транспорта.

Транспортная задача в матричной форме состоит в следующем. Пусть m поставщиков располагают $A_1, A_2, \ldots, A_m$ единицами некоторого однородного продукта (груза) и этот продукт должен быть распределён между n потребителям в количестве $B_1, B_2, \ldots, B_n$ единиц. Предполагается, что $A_i > 0$ ($i = 1,2,\ldots,m$), $B_j > 0$ ($j = 1,2,\ldots,n$). Известны тарифы C_{ij} ($i = 1,2,\ldots,m$; $j = 1,2,\ldots,n$) -стоимости перевозки единицы груза от i – го поставщика j – му потребителю ($C_{il} >= 0$). Следует определить план перевозок, т.е. указать количество груза, которое каждый поставщик должен доставить каждому потребителю, так чтобы суммарные затраты были наименьшими.

Модель транспортной задачи называется закрытой, если

$$\sum_{i=1}^{m} A_i = \sum_{j=1}^{n} B_j$$

и открытой, если

$$\sum_{i=1}^{m} A_i \neq \sum_{j=1}^{n} B_j .$$

В случае открытой модели, если

$$\sum_{i=1}^{m} A_i > \sum_{j=1}^{n} B_j ,$$

то потребители обеспечиваются полностью, а излишки остаются у поставщиков; если же

$$\sum_{i=1}^{m} A_i < \sum_{j=1}^{n} B_j ,$$

то весь груз, имеющийся у поставщиков, вывозится, а потребители обеспечиваются не полностью.

Рассмотрим только задачи открытого типа с ограничениями по перевозкам. При некоторых реальных условиях перевозки груза из определённого пункта отправления A_i в пункт назначения B_j не могут быть осуществлены. Для определения оптимального плана такого рода задач предполагают, что тариф перевозки единицы груза из A_i в B_j является сколь угодно большой величиной, и при этом условии находят решение новой транспортной задачи известными методами. При таком предположении исключается возможность при оптимальном плане транспортной задачи перевозки из A_i в B_j. Такой подход к нахождению решения транспортной задачи называют запрещением перевозок или блокированием соответствующей клетки таблицы данных задачи.

Иногда требуется найти решение заданной задачи, при котором из пункта отправления A_i в пункт назначения B_j должно быть завезено не менее заданного количества груза a_{ij}. Для определения оптимального плана такой задачи считают, что запасы пункта A_i и потребности пункта B_j меньше фактических на a_{ij} единиц. После этого находят оптимальный план транспортной задачи, на основании которого и определяется решение исходной задачи.

В некоторых транспортных задачах требуется найти оптимальный план перевозок при условии, что из A_i в B_j перевозится не более, чем a_{ij} единиц груза. Для этого в данной таблице задаче предусматривают дополнительный столбец, т.е. вводят дополнительный пункт назначения. В данном столбце записывают те же тарифы, что и в столбце B_j, за исключением тарифа i –ой в строке. В дополнительном столбце в этой строке тариф считают сколь угодно большой величиной М. При этом потребности пункта B_j считают равными a_{ij}, а потребности вновь введённого пункта назначения полагают равными b_j- a_{ij}. Решение полученной транспортной задачи может быть найдено методом потенциалов, и тем самым будет определён оптимальный план или установлена неразрешимость исходной задачи. Заметим, что исходная транспортная задача разрешима лишь в случае, когда для неё существует хотя бы один опорный план.Задача. Имеется 4 пункта потребления однородного груза. Потребности каждого из этих пунктов соответственно равны

$$b_1 = 70, \; b_2 = 120, \; b_3 = 105, \; b_4 = 105.$$

Каждому из четырёх потребителей груз может подвозиться от 3 поставщиков, запасы на складах которых равны

$$a_1 = 90,\ a_2 = 180,\ a_3 = 130.$$

Стоимость перевозки единицы груза определяется с помощью тарифов, которые заданы матрицей:

$$C = \begin{pmatrix} 12 & 6 & 15 & 3 \\ 19 & 8 & 5 & 9 \\ 1 & 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}, \text{ где}$$

$c_{23} = 5$ означает, что стоимость перевозки единицы груза от второго поставщика к третьему потребителю составляет 5 условных единиц.

Исходные данные задачи представим в табл.1.

Таблица 1. Исходные данные транспортной задачи.

	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы
A_1	12	6	15	3	90
A_2	19	8	5	9	180
A_3	1	3	6	2	130
Потребности	70	120	105	105	

Вопрос задачи. Найти такой план перевозок, чтобы суммарная стоимость всех перевозок была минимальной.

Пусть

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \end{pmatrix} \text{ – план перевозок } (X \geq 0).$$

Тогда $S = \sum_{i,j} x_{ij} \cdot c_{ij} \to \min$ - целевая функция.

Ограничениями будут служить условия удовлетворения всех потребностей:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} = 70 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 120 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 105 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 105 \end{cases}$$

и вывоз всех запасов от поставщиков:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 90 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 180 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 130 \end{cases}$$

Таким образом, система ограничений содержит 7 условий и 12 переменных. Транспортная задача является частным случаем задачи линейного программирования и она может быть решена симплекс-методом. Для этого выписывается матрица A, которая имеет размер (7×12) (табл.2).

Таблица 2. Исходная симплекс-таблица для решения транспортной задачи

			12	6	15	3	19	8	5	9	1	3	6	2
Базис	$C_б$	A_0	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}
x_{22}	8	70	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0
x_{23}	5	120	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
x_{24}	9	105	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0
x_{31}	1	105	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1
x_{32}	3	90	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
x_{33}	6	180	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
x_{34}	2	130	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1
Δ_i			-1	2	-3	1	-5	3	10	-2	9	4	5	1

В данной задаче сумма запасов равна сумме потребностей. Значит, наша задача является *замкнутой*. Если транспортная задача *незамкнута* и запасов (потребностей) больше, то вводится *фиктивный потребитель* (поставщик) с нулевыми тарифами перевозок и с потребностями (запасами), равными разности между потребностями и запасами.

Для решения транспортной задачи нужно первоначально составить *первоначальный план перевозок*. После составления такого плана транспортная задача решается *методом потенциалов.*

Рассмотрим методы составления первоначального плана перевозок для транспортной задачи, условие которой представлено в табл.1.

Таблица 1. Исходные данные транспортной задачи.

	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы
A_1	12	6	15	3	90
A_2	19	8	5	9	180
A_3	1	3	6	2	130
Потребности	70	120	105	105	

Составление первоначального плана перевозок методом <u>северо-западного угла</u>

	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы
A_1	70	20	0	0	90
A_2	0	100	80	0	180
A_3	0	0	25	105	130
Потребности	70	120	105	105	

$$X_0 = \begin{pmatrix} 70 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 80 & 0 \\ 0 & 0 & 25 & 105 \end{pmatrix} \qquad S(X_0) = 2520$$

Составление первоначального плана перевозок методом *минимального тарифа*

	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы
A_1	0	45	0	45	90
A_2	0	75	105	0	180
A_3	70	0	0	60	130
Потребности	70	120	105	105	

Будем заполнять в первую очередь клетки с минимальными тарифами.

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 45 & 0 & 45 \\ 0 & 75 & 105 & 0 \\ 70 & 0 & 0 & 60 \end{pmatrix} \qquad S(X_1) = 1720$$

Замечание. Совсем не обязательно, чтобы $S(X_1) < S(X_0)$, так как каждый из планов пока не является оптимальным.

2.1 Метод потенциалов решения транспортной задачи

Рассмотрим транспортную задачу, условие которой представлено в табл.1. Здесь в круглых скобках указывается тариф перевозки. Первоначальный план перевозки составлен методом *северо-западного угла.*

Таблица 1. Исходные данные транспортной задачи.

	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы
A_1	(1) 120	(7) 0	(9) 0	(5) 0	120
A_2	(4) 10	(2) 220	(6) 50	(8) 0	280
A_3	(3) 0	(8) 0	(1) 90	(2) 70	160
Потребности	130	220	140	70	

$$X_1 = \begin{pmatrix} 120 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 220 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 90 & 70 \end{pmatrix} \qquad S(X_1) = 1130$$

Переход к новому плану. Цикл пересчёта.

Определение. *Циклом пересчёта* называется замкнутая ломаная, звенья которой параллельны либо строчкам, либо столбцам таблицы. Одна вершина находится в пустой клетке, все остальные – в занятых. Можно доказать, что если число занятых клеток в транспортной таблице равно $n+m-1$ (число столбцов

+ число строк – 1), то такой цикл существует и всегда единственный.

Замечание. Если число занятых клеток меньше $n+m-1$, то в любую свободную клетку записывается 0 и она считается занятой.

Выделим цикл пересчёта из табл.1:

10 (–)	50 (+)
0 (+)	90 (–)

$\Rightarrow$

0	60
10	80

$x_0 = 10$ – значение (величина) цикла пересчёта.

В результате такого пересчёта получим новый план перевозок:

$$X_2 = \begin{pmatrix} 120 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 220 & 60 & 0 \\ 10 & 0 & 80 & 70 \end{pmatrix}$$

Каждое звено цикла пересчёта лежит на строке или на столбце. Концы этого звена имеют противоположные знаки. Вычитая x_0 из одного края, мы прибавляем его к другому краю. Следовательно, сумма по строкам и столбцам остаётся неизменной, что удовлетворяет системе ограничений.

Обозначим через γ сумму тарифов по циклу пересчёта с учётом знаков. В нашем случае: $\gamma = 3-4+6-1=4$. Тогда $S(X_2) = S(X_1) + \gamma \cdot x_0 = 1130 + 4 \cdot 10$.

Таким образом, зная какой-нибудь план транспортной задачи (полученный например методом северо-западного угла), с помощью цикла пересчёта можно получить множество планов транспортной задачи.

Наша задача так переходить к новому плану, чтобы его стоимость не увеличивалась.

Метод потенциалов для определения оптимальности плана транспортной задачи.

Пусть имеется план транспортной задачи. Для каждой занятой клетки i-той строки j-того столбца определим числа u_i, v_j, которые назовём *потенциалами*. Для каждой занятой клетки сумма потенциалов должна быть равна тарифу:

$$u_i + v_j = c_{ij} \qquad (*)$$

Соотношение (*) представляет собой систему линейных уравнений относительн6о переменных u_i, v_j.

Число занятых клеток $(m+n-1)$ равно числу уравнений. Число неизвестных равно $m+n$, что на 1 больше числа уравнений. В этом случае полагаем одну переменную свободной (и равной нулю) и находим остальные.

Критерий оптимальности плана транспортной задачи: если для каждой свободной клетки *сумма потенциалов минус тариф* есть отрицательная величина, то такой план является оптимальным:

$$u_i + v_j - c_{ij} \le 0 \qquad (**)$$

Проверим оптимальность первоначального плана нашей транспортной задачи:

		$v_1 = 4$	$v_2 = 2$	$v_3 = 6$	$v_4 = 7$	
		B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы
$u_1 = -3$	A_1	(1) 120	(7) –	(9) –	(5) –	120
$u_2 = 0$	A_2	(4) 10	(2) 220	(6) 50	(8) –	280
$u_3 = -5$	A_3	(3) –	(8) –	(1) 90	(2) 70	160
	Потребности	130	220	140	70	

Как видим, изначально наш план был оптимальным. Однако мы изменили его с помощью цикла пересчёта, и в результате его стоимость не уменьшилась, а, наоборот, возросла. Но если бы мы получили какую-либо клетку с положительным значением $u_i + v_j - c_{ij}$, то это говорило бы о том, что наш план не оптимальный, и нам следовало бы перейти к новому плану по циклу пересчёта с вершиной в этой клетке. Эти действия следовало бы повторять до тех пор, пока не получится оптимальный план.

Потенциалы u_i, v_j на самом деле являются *двойственными переменными* в транспортной задаче (матрица системы ограничений транспортной задачи содержит в каждом столбце ровно две единицы, а все остальные – нули).

Матрица системы ограничений (*) представляет собой транспонированную матрицу системы ограничений транспортной задачи. Соотношение (**) есть ни что иное как выражение для Δ_i-го (оценки плана в *симплекс-таблице*). Только здесь для оптимальности плана берётся условие $\Delta_i \le 0$, так как решается задача на минимум.

Таким образом, метод потенциалов представляет собой компактную запись решения транспортной задачи *симплексным методом* (такая модификация симплекс-метода с учётом двойственных переменных называется *двойственным симплекс-методом*).

Метод потенциалов не является единственным методом решения транспортной задачи. Среди других методов решения транспортной задачи выделяются:

– *дельта-метод*;

– *венгерский метод*;

– *метод дифференциальных лент*.

Как мы отмечали, транспортная задача является частным случаем задачи линейного программирования (так как матрица этой задачи содержит единицы и нули). Правая часть системы ограничений содержит a_i – количество запасов, b_j – количество потребностей. Если в транспортной задаче положить $a_i = 1$ и $b_j = 1$, то получим частный случай транспортной задачи, так называемую *распределительную задачу*.

К классу распределительных задач относится *задача теории расписания*.

Замечание. Следуя теории двойственности, совместно с решением задачи линейного программирования решается двойственная задача.

Учитывая этот факт, можно поступать следующим образом: вместо прямой задачи решать двойственную или решать одновременно прямую и двойственную задачи (двойственный симплекс-метод), причём можно соответствующим образом спроектировать симплекс-таблицу, разбив её на блоки.

Существует класс задач линейного программирования, которые называются *блочными задачами линейного программирования*. При перемножении матриц и нахождении обратных матриц действует блочный принцип: матрицу можно разбить на блоки и каждый блок будет подчиняться тем же законам, что и отдельный элемент матрицы.

3.1 Дополнение. Задача об одномерном раскрое

В процессе производства при изменении объема какого-либо ресурса, используемого в производстве, соответственно изменяется план производства и прибыль предприятия, получаемая от реализации готовой продукции.

Если какой-либо ресурс используется полностью, то уменьшение объема этого ресурса, может повлиять на всю структуру плана производства и прибыль предприятия. Следовательно, такой ресурс, образует «узкое место производства», которое желательно иметь с некоторым запасом.

В данной статье рассматривается применение задачи о расшивке узких мест при одномерном раскрое рулонного металла.

Задача оптимального раскроя материалов является одной из важнейших в ресурсосберегающих технологиях для заготовительного производства, поскольку напрямую ведет к экономии материалов за счет снижения отходов.

Среди задач одномерного раскроя можно выделить следующие:

- задача минимизации отходов;
- задача максимизации числа комплектов;
- обратная задача раскроя.

Задача оптимального одномерного раскроя с минимизацией отходов формулируется следующим образом. Необходимо из кусков материала длиной $L1$, $L2$, …, Lm выкроить заготовки длиной *l1, l2, ..., ln* в заданном количестве pi (I = 1, 2, …, n). Требуется рассчитать оптимальную карту раскроя, т.е. получить минимальные отходы с учетом выполнения условий комплектности заготовок.

Одна из таких математических моделей задачи оптимального одномерного раскроя с минимизацией отходов имеет вид [2]:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{v_j} o_{jk}x_{jk} \to \min \\ \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{v_j} z_{ijk}x_{jk} = p_i; i = 1, 2, ..., n, \\ x_{jk} \ge 0; j = 1, 2, ..., m; k = 1, 2, ..., v_j \end{cases}$$

где xjk – число поставляемого куска материала j-го типа в k-ом варианте раскроя; ojk – длина отхода от материала j-го типа в k-ом варианте раскроя; pi – заданное число заготовок i-го типа; vj – число вариантов раскроя куска материала j-го типа; $zijk$ – число заготовок i-го типа в k-ом варианте раскроя j-го куска материала.

Показателем, определяющим экономичность раскроя, является коэффициент раскроя:

$$k_p = \frac{\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{v_j} o_{jk} x_{jk}}{\sum_{j=1}^{m} L_j \sum_{k=1}^{v_j} x_{jk}},$$

где m – число поставляемых кусков материала; Lj– длина поставляемого куска материала j-го типа; ojk – длина отхода от материала j-го типа в k-ом варианте раскроя; xjk – число поставляемого куска материала j-го типа в k-ом варианте раскроя; vj – число вариантов раскроя куска материала j-го типа.

Для улучшения коэффициента раскроя можно максимально «удлинить» заказываемые размеры таким образом, чтобы суммарная длина отходов уменьшилась. Для этого применим двойственную задачу, математическая модель которой имеет вид:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} p_i y_i \to \max \\ \sum_{i=1}^{n} z_{ijk} y_i \le o_{jk};\ j = 1, 2, \ldots, m;\ k = 1, 2, \ldots, v_j, \\ y_i \ge 0;\ i = 1, 2, \ldots, n \end{cases}$$

где yi – величина возможного удлинения заготовки i-го типа; ojk – длина остатка от материала j-го типа в k-ом варианте раскроя; pi – заданное число заготовок i-го типа; vj – число вариантов раскроя куска материала j-го типа; $zijk$ – число заготовок i-го типа в j-ом варианте раскроя k-го куска материала.

Наверное, покажется нелогичным «удлинение» заказываемых размеров, но такая задача может возникнуть при группировке заказов (появлении нового срочного заказа), при предварительном раскрое (двухступенчатый раскрой).

С одной стороны можно уменьшить полученный коэффициент раскроя за счет изменения длин заготовок, а с другой, за счет заказа материалов нужных длин и количества, и для этого необходимо решить задачу обратного раскроя, со следующей математической моделью:

$$\begin{cases} L_p \sum_{k=1}^{v_i} x_k \to \min \\ \sum_{k=1}^{v_i} y_{ik} x_k = p_i ; i = 1, 2, ..., n, \\ \sum_{i=1}^{n} l_i y_{ik} < L_p ; k = 1, 2, ..., v_i \end{cases}$$

где yik – число заготовок i-го типа в k-ом варианте раскроя; xk – число рассматриваемых кусков материалов в k-ом варианте раскроя; Lp – неизвестная длина кусков материалов; pi – заданное число заготовок i-го типа; li – длина i-ой заготовки; vi – число вариантов раскроя куска материала i-го типа.

При решении обратной задачи, также решается задача поиска способов раскроя – задача размена. Таким образом, помимо определения рациональной длины и количества поставляемых кусков материалов была найдена оптимальная карта способов раскроя.

На данный момент ведутся работы по применению задачи о расшивке к задачам оптимального раскроя. Применение такого подхода должно позволить сэкономить материалы и снизить количество отходов.

В общем случае решение задачи о «расшивке узких мест» заключается в поиске объемов приобретения дополнительных ресурсов, удовлетворяющих указанным условиям, и в вычислении дополнительной возможной прибыли.

ПРИЛОЖЕНИЕ №1

Задачи для самостоятельного решения по линейному программированию с дополнительными ограничениями.

При решении задач линейного программирования очень важным для реальных практических задач является вопрос: как изменится решение при изменениях в условиях задачи. Например, в задаче об оптимальном плане производства могут меняться цены на продукцию, запасы сырья, быть введены новые ограничения, новые виды продукции. Решение задачи симплекс-методом позволяет по первой и последней симплекс-таблицам отследить все такие изменения. В общем случае такие задачи относятся к задачам параметрического линейного программирования.

Общей задачей линейного программирования называется задача, которая состоит в определении максимального (минимального) значения функции:

$$\mathrm{F} = \sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{c}_{\mathrm{j}} \cdot x_{\mathrm{j}} \quad (1)$$

при условиях:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j = b_i \quad \text{(i=1, …, m)} \qquad (2)$$

$$x_j \geq 0 \qquad \text{(j=1, …, m)} \ (3)$$

<u>Замечание:</u>

В системе ограничений могут присутствовать и неравенства, переход от неравенств к равенствам осуществляется добавлением новых неотрицательных переменных.

Если ввести обозначения

$$\overline{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_n \end{pmatrix}; \qquad \overline{C} = (c_1, \quad c_2, \quad ..., \quad c_n);$$

$$\overline{A}_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_m \end{pmatrix};$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{pmatrix}$$, то в матричном виде задача линейного программирования запишется в следующем виде:

$$F = \overline{C} \cdot \overline{X} \to \max;$$
$$A \cdot \overline{X} = \overline{A}_0;$$
$$\overline{X} \geq 0.$$

Столбцы матрицы А обозначим через $\overline{A}_j$, где j=1,…,n.

Рассмотрим пример:

Для изготовления различных изделий А, В и С предприятие использует три различных вида сырья. Нормы расхода сырья, цены и запасы приведены в таблице.

Таблица 1.

Вид сырья	Нормы затрат сырья (кг) на одно изделие			Общее кол-во сырья (кг)
	А	В	С	
I	18	15	12	360
II	6	4	8	192
III	5	3	3	180
Цена одного изделия (руб)	9	10	14	

Изделия А, В, С могут производиться в любых соотношениях (сбыт обеспечен), но производство ограничено запасами сырья. Составить план производства изделий, при котором общая стоимость всей произведенной предприятиями продукции является максимальной.

Решение:

Составим математическую модель задачи. Исходный выпуск изделий А, В и С обозначим соответственно через x_1, x_2 и x_3. Общая стоимость произведенной предприятием продукции составляет:

$$F = 9x_1 + 10x_2 + 16x_3.$$

Поскольку имеются ограничения на запасы сырья предприятия, переменные x_1, x_2, x_3 должны удовлетворять следующей системе неравенств:

$$\begin{cases} 18x_1 + 15x_2 + 12x_3 \le 360 \\ 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 \le 192 \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 \le 180 \end{cases}$$

и по своему экономическому содержанию:

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$$

Перейдем в системе ограничений от неравенств к равенствам, добавляя положительные переменные x_4, x_5, x_6:

$$\begin{cases} 18x_1 + 15x_2 + 12x_3 + \le 360 \\ 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 \le 192 \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 \le 180 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \ge 0.$$

Эти дополнительные переменные по экономическому смыслу означают неиспользуемое при данном плане производства количество сырья того или иного вида. Например, x_4 – это неиспользуемое количество сырья I вида.

Преобразованную систему ограничений можно записать в векторной форме:

$$x_1 \cdot \overline{A}_1 + x_2 \cdot \overline{A}_2 + x_3 \cdot \overline{A}_3 + x_4 \cdot \overline{A}_4 + x_5 \cdot \overline{A}_5 + x_6 \cdot \overline{A}_6 = \overline{A}_0, \quad (1)$$

где

$$\overline{A}_1 = \begin{pmatrix} 18 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}; \quad \overline{A}_2 = \begin{pmatrix} 15 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad \overline{A}_3 = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}; \overline{A}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$; \overline{A}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \overline{A}_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \overline{A}_0 = \begin{pmatrix} 360 \\ 192 \\ 180 \end{pmatrix}.$$

В матричной форме задача запишется в виде

$$\overline{C} \cdot \overline{X} \to \max;$$

$$A \cdot \overline{X} = \overline{A}_0;$$

$$\overline{X} \ge 0; \quad (2)$$

$$A = (\overline{A}_1; \overline{A}_2; \overline{A}_3; \overline{A}_4; \overline{A}_5; \overline{A}_6) = \begin{pmatrix} 18 & 15 & 12 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 8 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Вектор $\overline{C}$ имеет вид $\overline{C} = (9;\quad 10;\quad 16;\quad 0;\quad 0;\quad 0.)$

Составим симплекс – таблицу и решим и задачу.

Решение приведено в табл.2.

Таблица 2

			9	10	16	0	0	0
Базис	$C_б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_4	0	360	18	15	12	1	0	0
A_5	0	192	6	4	8	0	0	0
A_6	0	180	5	3	3	0	0	1
		0	-9	-10	-16	0	0	0
A_4	0	72	9	9	0	1	-3/2	0
A_3	16	24	3/4	1/2	1	0	1/8	0
A_6	0	108	11/4	3/2	0	0	-3/8	1
		384	3	-2	0	0	2	0
A_2	10	8	1	1	0	1/9	-1/6	0
A_3	16	20	1/4	0	1	-1/18	5/24	0
A_6	0	96	5/4	0	0	-1/6	-1/8	1
		400	5	0	0	2/9	5/3	0

Оптимальный план выпуска продукции:

$$\overline{X}^* = (0;\quad 8;\quad 20;\quad 0;\quad 0;\quad 96),$$

$\overline{F}^* = F(\overline{X}^*) = 400$– максимально возможная полученная предприятием прибыль; при данном плане полностью используется сырье I и II видов и остается не использованным 96 кг сырья III вида.

Рассмотрим матрицу $D = \left(\overline{A_2};\ \overline{A_3};\ \overline{A_6}\right)$.

$$D = \begin{pmatrix} 15 & 12 & 0 \\ 4 & 8 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Переход от первой симплекс таблицы к последней осуществляется преобразованием Гаусса.. Рядом с матрицей D стоит единичная матрица $\left(\overline{A_4};\ \overline{A_5};\ \overline{A_6}\right)$. Матрица D в последней симплекс таблице превратилась в единичную, в то время как матрица $\left(\overline{A_4};\ \overline{A_5};\ \overline{A_6}\right)$ преобразуется в обратную к D.

$D^{-1} = \left(\overline{A_4}';\overline{A_5}';\overline{A_6}'\right)$ (мы принимаем следующие обозначения все, что без знака «'» относится к первой симплекс таблице и все, что со знаком «'» относится к последней симплекс таблице).

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1/9 & -1/6 & 0 \\ -1/18 & 5/24 & 0 \\ -1/6 & -1/8 & 1 \end{pmatrix}$$

Матрица D^{-1} осуществляет связь первой и последней симплекс таблиц. Например, легко проверить, что $D^{-1} \cdot \overline{A_0} = \overline{A_0}'$;

$$\begin{pmatrix} 360 \\ 192 \\ 180 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 20 \\ 96 \end{pmatrix}$$

Тогда, меняя количество запасов (столбец $\overline{A}_0$), можно проследить изменение оптимального плана (столбец $\overline{A}_0'$), или изменение оптимального плана при введении новой переменной (x_7, например), что означает выпуск нового вида продукции. Связь между первой и последней симплекс таблицами можно представить в виде:

$$D^{-1} \cdot \left(\overline{A}_0;\ \overline{A}_1;\ \overline{A}_2;\ \overline{A}_3;\ \overline{A}_4;\ \overline{A}_5;\ \overline{A}_6\right) =$$
$$= \left(\overline{A}_0';\ \overline{A}_1';\ \overline{A}_2';\ \overline{A}_3';\ \overline{A}_4';\ \overline{A}_5';\ \overline{A}_6'\right)$$

Например, если запасы сырья $\overline{A}_0 = \begin{pmatrix} 360 \\ 192 \\ 86 \end{pmatrix}$, то получим оптимальный план $\overline{X}^* = \overline{A}_0' = D^{-1} \cdot \overline{A}_0 = \begin{pmatrix} 8 \\ 20 \\ 2 \end{pmatrix}$, т.е. уменьшение запасов сырья III на 10 кг не ведет к изменению плана выпуска изделий B и C (сырье III было использовано не полностью). Границы изменения запасов сырья при неизменном ассортименте выпуска продукции (изделия B и C) определяются соотношением:

$$D^{-1} \cdot (\overline{A}_0 + \Delta\overline{A}_0) \geq 0 \quad (3)$$

Если, например, ввести новый вид продукции E с нормами расхода сырья вида I, II и III соответственно 1, 2 и 4, $\overline{A}_7 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, то в последней симплекс-таблице получим:, $\overline{A}_7' = D^{-1}\overline{A}_7$ и при цене за единицу меньше, чем 3,5 руб., выпуск такого вида продукции нецелесообразен ($\Delta_7 \geq 0, (\Delta_7 = 3{,}56)$, где Δ_j – оценки плана - последняя строка симплекс таблицы). Если цена единицы продукта Е больше 3,5 руб., то в последней симплекс таблице $\Delta_7 < 0$ и задачу нужно до решать. Вектор $\overline{A}_7$ может быть введен в базис и тогда оптимальный план будет содержать в ассортименте продукт Е.

Пусть, например C_7=24, рассмотрим первую симплекс-таблицу с дополнительным столбцом $\overline{A}_7$:

			9	10	16	0	0	0	24
Базис	$C_б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
A_4	0	360	18	15	12	1	0	0	9
A_5	0	192	6	4	8	0	0	0	12
A_6	0	180	5	3	3	0	0	1	4
		0	-9	-10	-16	0	0	0	-24

В последней симплекс-таблице столбец $\overline{A}_7{}' = D^{-1}\cdot\overline{A}_7$, Δ_7=-2 план не оптимальный, тогда решаем задачу, составив новую симплекс-таблицу.

Базис	$C_б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
A_2	10	8	1	1	0	1/9	-1/6	0	-1
A_3	16	20	1/4	0	1	-1/18	5/24	0	2
A_6	0	96	5/4	0	0	-1/6	-1/8	1	1
		400	5	0	0	2/9	5/3	0	-2
A_2	10	18	9/8	1	1/2	1/12	-1/16	0	0
A_7	24	10	1/8	0	1/2	-1/36	5/48	0	1
A_6	0	86	9/8	0	-1/2	5/36	-11/48	1	0
		420	21/4	0	1	1/6	15/8	0	0

Оптимальный план $\overline{X}$ *=(0; 18; 0; 0; 0; 86; 10), F*=420.

При изменении цен на продукцию оптимальный план останется прежним, если в последней симплекс таблице

$$\Delta_j \geq 0 \text{ для всех } j \qquad (4)$$

В результате изменится общая прибыль предприятия F($\overline{X}$ *).

Задачи для самостоятельного решения

Задача №1

Фирма производит и продает на вес три разных сорта шоколада, которые отличаются друг от друга количеством сахара, какао и добавками: все это т расчета на одну тонну шоколада. Учитывая, что запасы этих трех веществ ограничены, а каждый сорт шоколада стоит по-разному, найдите, сколько и какого сорта шоколада фирма должна производить, чтобы получить максимальную прибыль.

Таблица исходных данных:

Сорт шоколада	Компоненты ц./т.			Прибыль
	сахар	какао	добавки	
A	3	4	1	10$
B	5	5	3	16$
C	6	3	3	11$
Запасы	20	12	40	

Ответ: Изделие A=0 кг. Изделие B=0.8 кг. Изделие C=2+2/3 кг. Прибыль 42.133$,

Дополнительные условия:

1) В результате сбоев поставок сырья, были серьёзно изменены запасы различных компонентов. На сахар наложено новое ограничение 10 кг, на какао - 10 кг, на добавки - 30 кг, Проверьте, изменится ли оптимальность плана, и если да, то найдите новый оптимальный план.

Ответ: X=(0, 2, 0) Z=32$

2) В результате изменений на рынке сбыта фирма изменила цены на свои товары. Теперь прибыль от краски A составляет 15$, от краски B -10$, от краски C - 10$. Проверьте, изменится ли оптимальность плана, и если да, то найдите новый оптимальный план. Условия, которые не изменились, следует брать из исходной задачи.

Ответ: X = (3, O, O) Z=45$

3) В результате финансового развития, фирма решила изготавливать новый вид шоколада - D, требующий каждого ингредиента по 3 ц./т. Прибыль от него составляет 9 $. Проверьте, изменится ли оптимальность плана, и если да, то найдите новый оптимальный план. Условия, которые не изменились, следует брать из исходной задачи.

Ответ: X=(0, 0.8, 2+2.3, 0) Z=42.133$. Т.е. оптимальность плана не нарушилась.

Задача № 2

Процесс обработки трёх промышленных изделий состоит в последующей обработке каждого из них на четырёх станках. Время использования каждого станка за одни сутки ограничено. Время обработки и прибыль от продажи одного изделия каждого вида приведены в таблице. Найдите оптимальные объемы производства изделий каждого вида (для получения максимальной прибыли).

Таблица исходных данных:

Изделие	Время обработки одного изделия, мин				Удельная прибыль
	станок 1	станок 2	станок 3	станок 4	
1	5	5	3	2	5$
2	3	6	3	3	8$
3	10	3	1	5	10$
Max. время работы,мин	200	150	100	75	

Ответ: X = (0, 25, 0)   Z=200 $

Дополнительные условия:

1) В результате перераспределения электроэнергии, было серьёзно изменены максимальное время работы каждого станка. На первый станок наложено новое ограничение по времени работы -111 мин, на второй -120, на третий -90, на четвёртый - 150. Проверьте, изменится ли оптимальность плана, и если да, то найдите новый оптимальный план.

Ответ: X = (0, 17, 6) Z = 196 $

2) В гонке за новыми технологиями, фирма заменила станок 4 на более совершенный. Теперь для обработки детали 1 затрачивается 2 мин, для обработки детали 2-2 мин, для обработки детали 3-3 мин. Проверьте, изменится ли оптимальность плана, и если да, то найдите новый оптимальный план. Условия, которые не изменились, следует брать из исходной задачи.

Ответ: X=(0, 18.75, 12.5) Z = 275 $

3) В результате изменений на рынке сбыта фирма изменила цены на свои товары. Теперь удельная прибыль изделия 1 составляет 3$, изделия 2 - 9$, изделия 3-11$. Проверьте, изменится ли

оптимальность плана, и если да, то найдите новый оптимальный план. Условия, которые не изменились, следует брать из исходной задачи.

Ответ: X - (0, 25, 0) Z= 225 $

Задача №3

Процесс обработки трёх промышленных изделий состоит в последующей обработке каждого из них на четырёх станках. Время использования каждого станка за одни сутки ограничено. Время обработки и прибыль от продажи одного изделия каждого вида приведены в таблице. Найдите оптимальные объемы производства изделий каждого вида (для получения максимальной прибыли).

Таблица исходных данных:

Изделие	Время обработки одного изделия, мин				Удельная прибыль
	станок 1	станок 2	Станок 3	станок 4	
1	10	7	11	10	10$
2	5	7	6	8	12$
3	15	10	12	8	15$
Max время Работы, мин	120	140	120	120	

Ответ: X = (0, 10.5, 4.5) Z = 193.5 $.

1) В результате перераспределения электроэнергии, было серьёзно изменены максимальное время работы каждого станка. На первый станок наложено новое ограничение по времени работы - 60 мин, на второй - 120, на третий -160, на четвёртый - 110. Проверьте, изменится ли оптимальность плана, и если да, то найдите новый оптимальный план.

Ответ: X = (0, 12, 0) Z=144 $

2) В гонке за новыми технологиями, фирма заменила станок 4 на более совершенный. Теперь для обработки любой детали затрачивается в 2 раза меньше времени. Проверьте, изменится ли оптимальность плана, и если да, то найдите новый оптимальный план. Условия, которые не изменились, следует брать из исходной задачи.

Ответ: X =(0, 12, 4) Z=204 $

3) В результате изменений на рынке сбыта фирма решила изменить цены на третье изделие. Его удельная прибыль стала равна (15 + δ). Найдите интервал, которому принадлежит 6 так, чтобы оптимальность решения не нарушилась. Условия, которые не изменились, следует брать из исходной задачи.

Ответ: $\delta \in [-3,\infty]$ т.е. удельная стоимость изделия 3 может изменяться от 12$ до ∞.

Задача № 4

Фирма производит три вида продукции (А.В.С), для выпуска каждого из которых требуется определенное время обработки на всех четырех устройствах 1,2,3,4.

Пусть время работы на устройствах соответственно 84,42,21 и 42 ч. Определите какую продукцию и в каких количествах следует производить. (Можно предположить, что рынок сбыта для каждого продукта неограничен временем, требуемым для переключения устройства в зависимости от вида продукции, можно пренебречь; рассмотрите только задачу максимизации прибыли.).

Таблица исходных данных:

Вид продукции	Время обработки одного продукта, мин				Прибыль
	1	2	3	4	
A	1	3	1	2	3$
B	6	1	3	3	6$
C	3	3	2	4	4$

Ответ: Изделий А -13.125; Изделий В - 2.625. Прибыль равна 55.125 ед.

Дополнительные условия:

1) В результате изменений на рынке сбыта изменилась прибыль у третьей продукции. Его прибыль стала равна (6 + δ). Найдите интервал, которому принадлежит δ так, чтобы оптимальность решения не нарушилась. Условия, которые не изменились, следует брать из исходной задачи.

Ответ: $\delta \in [-7/3,3]$ т.е. удельная прибыль изделия В может изменяться от 8/3 $ до 9 $.

2) В результате перераспределения электроэнергии, было серьёзно изменены максимальное время проведения операций. На первую обработку наложено новое ограничение по времени работы - 61 мин, на вторую - 30, на третью -40, на четвёртую - 60. Проверьте, изменится ли оптимальность плана, и если да, то найдите новый оптимальный план. Условия, которые не изменились, следует брать из исходной задачи.

Ответ: X=(7, 9, 0) Z = 75 $

3) В результате изменений на рынке сбыта фирма изменила цены на свои товары. Теперь прибыль от продукта А составляет 5$, от продукта В - 3 $, от продукта С - 4$. Проверьте, изменится ли оптимальность плана, и если да, то найдите новый оптимальный план. Условия, которые не изменились, следует брать из исходной задачи.

Ответ: X=(13.125, 2.625,0) Z=73.5$

Задача № 5

Процесс обработки трёх промышленных изделий состоит в последующей обработке каждого из них на трёх станках. Время использования каждого станка за одни сутки ограничено. Время обработки и прибыль от продажи одного изделия каждого вида приведены в таблице. Анализ рынка сбыта показал, что количество деталей второго вида не может быть более чем на 1 больше суммы деталей первого и третьего вида. Найдите оптимальные объемы производства изделий каждого вида (для получения максимальной прибыли).

Таблица исходных данных:

Изделие	Время обработки одного изделия, мин			Удельная прибыль
	станок 1	станок 2	станок 3	
1	8	12	10	30$
2	5	6	15	25$
3	12	14	10	20$
Max.время работы, мин	80	60	100	

Ответ: X = (3, 4, 0) Z=190 $.

1) Спустя некоторое время, фирма снова проанализировала ситуацию на рынке и получила, что количество деталей второго вида не может быть более чем на 2 больше суммы деталей первого

и третьего вида (вместо аналогичного предыдущего условия). Проверьте, изменится ли оптимальность плана, и если да, то найдите новый оптимальный план. Условия, которые не изменились, следует брать из исходной задачи.

Ответ: X = (8/3, 14/3, 0) Z = 196+2/3 $

2) Со временем фирма решила изготавливать новый вид изделия - изделие 4. Удельная прибыль на него составит, по предварительным расчётам, 25$. Обработка этого изделия на каждом станке занимает по 5 мин.

Проверьте, изменится ли оптимальность плана, и если да, то найдите новый оптимальный план. Условия, которые не изменились, следует брать из исходной задачи.

Ответ: X = (0, 0, 0, 12) Z = 300$.

3) В результате изменений на рынке сбыта фирма решила изменить цены на первое изделие. Его удельная прибыль стала равна (30 + δ). Найдите интервал, которому принадлежит δ так, чтобы оптимальность решения не нарушилась. Условия, которые не изменились, следует брать из исходной задачи.

Ответ: $\delta \in [-14.5; \infty]$ т.е. удельная стоимость изделия 1 может изменяться от 15.5$ до ∞.

Задача № 6

Процесс обработки трёх промышленных изделий состоит в последующей обработке каждого из них на четырёх станках. Время использования каждого станка за одни сутки ограничено. Время обработки и прибыль от продажи одного изделия каждого вида приведены в таблице. Найдите оптимальные объемы производства изделий каждого вида (для получения максимальной прибыли).

Таблица исходных данных:

Изделие	Время обработки одного изделия, мин				Удельная прибыль
	станок 1	станок 2	станок 3	станок 4	
1	8	12	10	12	25$
2	5	6	15	3	20$
3	12	14	10	12	18$
Max. время работы, мин	80	60	100	120	

Ответ: X = (2.5, 5, 0) Z=162.5 $.

1) В гонке за новыми технологиями, фирма заменила станок 1 на более совершенный. Теперь для обработки изделия 1 затрачивается 5 мин. Проверьте, изменится ли оптимальность плана, и если да, то найдите новый оптимальный план. Условия, которые не изменились, следует брать из исходной задачи.

Ответ: X = (2, 6, 0) Z=170$

2) В результате изменений на рынке сбыта фирма решила изменить цены на третье изделие. Его удельная прибыль стала равна (18 + δ). Найдите интервал, которому принадлежит δ так, чтобы оптимальность решения не нарушилась. Ответ округлить до целого значения. Условия, которые не изменились, следует брать из исходной задачи.

Ответ: $\delta\in[-18,10]$ т.е. удельная стоимость изделия 3 может изменяться от 0$ до 28 $ (точнее до 27.916$).

3) Со временем фирма решила изготавливать новый вид изделия - изделие 4. Удельная прибыль на него составит, по предварительным расчётам, 20 $. На станке 1 новое изделие будет обрабатываться 8 мин, на станке 2-10 мин, на станке 3-8 мин, на станке 4-6 мин. Проверьте, изменится ли оптимальность плана, и если да, то найдите новый оптимальный план. Условия, которые не изменились, следует брать из исходной задачи.

Ответ: X =(2.5,5,0) Z=162,5 $

Задача № 7

Процесс обработки трёх промышленных изделий состоит в последующей обработке каждого из них на трёх станках. Время использования каждого станка за одни сутки ограничено. Время обработки и прибыль от продажи одного изделия каждого вида приведены в таблице. Анализ рынка сбыта показал, что количество деталей первого вида не может быть более чем на 2 больше суммы деталей второго и третьего вида. Найдите оптимальные объемы производства изделий каждого вида (для получения максимальной прибыли).

Таблица исходных данных:

Изделие	Время обработки одного изделия, мин			Удельная прибыль
	станок 1	станок 2	станок 3	
1	5	10	10	4$
2	4	6	8	8$
3	5	9	4	6$

Max. время работы,мин	150	120	80	

Ответ: X= (0, 5, 10) Z = 100 $.

1) В результате перераспределения электроэнергии, было серьёзно изменены максимальное время работы каждого станка. На первый станок наложено новое ограничение по времени работы "100 мин, на второй - 60, на третий -120. Проверьте, изменится ли оптимальность плана, и если да, то найдите новый оптимальный план.

Ответ: X == (O, 10, 0) Z = 80 $

2) В гонке за новыми технологиями, фирма заменила станок 2 на более совершенный. Теперь для обработки изделия 1 затрачивается 5 мин, на обработку изделия 2-3 мин, на обработку изделия 3-4 мин. Проверьте, изменится ли оптимальность плана, и если да, то найдите новый оптимальный план. Условия, которые не изменились, следует брать из исходной задачи.

Ответ: X = (O, O, 20) Z=120$

3) В результате изменений на рынке сбыта фирма решила изменить цены на второе изделие. Его удельная прибыль стала равна (8 + δ). Найдите интервал, которому принадлежит δ так, чтобы оптимальность решения не нарушилась. Условия, которые не изменились, следует брать из исходной задачи.

Ответ: $\delta \in [-4, \infty]$ т.е. удельная стоимость изделия 2 может изменяться от 4$ до ∞

Задача № 8

Процесс обработки трёх промышленных изделий состоит в последующей обработке каждого из них на четырёх станках. Время использования каждого станка за одни сутки ограничено. Время обработки и прибыль от продажи одного изделия каждого вида приведены в таблице. Найдите оптимальные объемы производства изделий каждого вида (для получения максимальной прибыли).

Таблица исходных данных:

Изделие	Время обработки одного изделия, мин				Удельная прибыль
	станок 1	станок 2	станок 3	станок 4	
1	10	10	15	15	17$
2	6	8	6	6	11$

3	9	5	11	15	10$
Max. время работы, мин	90	80	150	160	

Ответ: X = (6.75 , 0, 2.5) Z=139.75 $.

1) В результате перераспределения электроэнергии, было серьёзно изменены максимальное время работы каждого станка. На первый станок наложено новое ограничение по времени работы - 60 мин, на второй - 120, на третий -105, на четвёртый - 120. Проверьте, изменится ли оптимальность плана, и если да, то найдите новый оптимальный план.

Ответ: X = (0, 10, 0) Z=110$

2) В гонке за новыми технологиями, фирма заменила станок 2 на более совершенный. Теперь для обработки детали 1 затрачивается 5 мин, для обработки детали 2-4 мин, для обработки детали 3-4 мин. Проверьте, изменится ли оптимальность плана, и если да, то найдите новый оптимальный план. Условия, которые не изменились, следует брать из исходной задачи.

Ответ: X=(O, 15, 0) Z = 165 $

3) В результате изменений на рынке сбыта фирма изменила цены на свои товары. Теперь удельная прибыль изделия 1 составляет 16$, изделия 2 - 10$, изделия 3 - 12$. Проверьте, изменится ли оптимальность плана, и если да, то найдите новый оптимальный план. Условия, которые не изменились, следует брать из исходной задачи.

Ответ: X = (6.75 , 0, 2.5) Z=138 $.

Задача № 9

Процесс обработки трёх промышленных изделий состоит в последующей обработке каждого из них на трёх станках. Время использования каждого станка за одни сутки ограничено. Время обработки и прибыль от продажи одного изделия каждого вида приведены в таблице. Анализ рынка сбыта показал, что сумма количеств деталей первого и второго вида не может быть более чем на 4 больше количества деталей третьего вида. Найдите оптимальные объемы производства изделий каждого вида (для получения максимальной прибыли).

Таблица исходных данных:

Изделие	Время обработки одного изделия, мин			Удельная прибыль
	станок 1	станок 2	станок 3	

1	10	7	11	10$
2	5	7	6	12$
3	15	10	12	15$
Max. время работы,мин	120	140	120	

Ответ: X = (0, 9, 5) Z = 183 $.

1) Со временем фирма решила изготавливать новый вид изделия - изделие 4. Удельная прибыль на него составит по предварительным расчётам 14 $. На станке 1 новое изделие будет обрабатываться 10 мин, на станке 2-11 мин, на станке 3-10 мин. Проверьте, изменится ли оптимальность плана, и если да, то найдите новый оптимальный план. Условия, которые не изменились, следует брать из исходной задачи.

Ответ: X = (0, 9, 5) Z=183$.

2) В гонке за новыми технологиями, фирма заменила станок 1 на более совершенный. Теперь для обработку изделия 1 затрачивается 3 мин, на обработку изделия 2-12 мин, на обработку изделия 3-4 мин. Проверьте, изменится ли оптимальность плана, и если да, то найдите новый оптимальный план. Условия, которые не изменились, следует брать из исходной задачи.

Ответ: X - (0, 8, 6) Z=I86$

3) В результате изменения экономической ситуации в стране фирма, проанализировав ситуацию на рынке, решила изменить свою финансовую политику и решила, что сумма количеств деталей первого и третьего вида не может быть более чем на 4 больше количества деталей второго вида (вместо аналогичного условия исходной задачи). Проверьте, изменится ли оптимальность плана, и если да, то найдите новый оптимальный план. Условия, которые не изменились, следует брать из исходной задачи.

Ответ: X = (0, 3, 7) Z = 141 $

Задача № 10

Процесс обработки трёх промышленных изделий состоит в последующей обработке каждого из них на трёх станках. Время использования каждого станка за одни сутки ограничено. Время обработки и прибыль от продажи одного изделия каждого вида приведены в таблице. Анализ рынка сбыта показал, что количество деталей первого вида не может быть более чем на 5 больше суммы деталей второго и третьего вида. Найдите оптимальные объемы производства изделий каждого вида (для получения максимальной прибыли).

Таблица исходных данных:

Изделие	Время обработки одного изделия, мин			Удельная прибыль
	станок 1	станок 2	станок 3	
1	5	5	3	5$
2	5	6	3	8$
3	10	3	1	10$
Max. время работы, мин	200	150	100	

Ответ: X =(0, 20, 10) Z=260 $.

1) В результате перераспределения электроэнергии, было серьезно изменены максимальное время работы каждого станка. На первый станок наложено новое ограничение по времени работы - 120 мин, на второй - 160, на третий -110. Проверьте, изменится ли оптимальность плана, и если да, то найдите новый оптимальный план.

Ответ: X = (0, 24, 0) Z =192 $

2) В гонке за новыми технологиями, фирма заменила станок 2 на более совершенный. Теперь для обработки любой детали затрачивается 2 мин. Проверьте, изменится ли оптимальность плана, и если да, то найдите новый оптимальный план. Условия, которые не изменились, следует брать из исходной задачи.

Ответ: X=(O, 32, 4) Z=296 $

3) В результате изменений на рынке сбыта фирма решила изменить цены на третье изделие. Его удельная прибыль стала равна (10 + δ), Найдите интервал, которому принадлежит δ так, чтобы оптимальность решения не нарушилась. Условия, которые не изменились, следует брать из исходной задачи.

Ответ: $\delta \in [-6, \infty]$ т.е. удельная стоимость изделия 3 может изменяться от 4$ до ∞.

Задача №11

Фирма имеет возможность рекламировать свою продукцию, используя местные радио, телевизионную сети, а также газеты и уличные рекламные стенды. Затраты на рекламу в бюджете ограничены величиной 5000 $ в месяц. Фирме хотелось бы использовать радио сеть, газеты и стенды вместе, по крайней мере, в 5 раза чаще, чем телевизионную сеть. Опыт прошлых лет показал, что объём сбыта (результативность), которую обеспечивает теле реклама в 10 раз больше радио рекламы, в 20 раз больше, чем размещение в газетах, и в 20 раз больше, чем на стендах.

Одна минута радио рекламы обходится в 5$, теле рекламы - 35$, размещение в газете - 4$, на стендах - 3$,

Определите размещение финансовых средств, ежемесячно отпускаемых на отдельные виды рекламы, с учётом максимальной результативности.

Ответ: X = (416+2/3, 0, 0, 83+1/3) Z = 2800.

(416+2/3 - радио и 83+1/3 - видео)

Дополнительные условия:

1) Со временем в городе изменились цены на рекламные услуги. Теперь реклама по радио стоит 6$, в газетах - 4$, на стендах - 4$, по телевидению -50$. Проверьте, изменится ли оптимальность плана, и если да, то найдите новый оптимальный план.

Ответ: X= (315.5, O, O, 62.5) Z-1875

2) Фирма решила продавать товар в соседнем городе, но там другое распределение эффективности рекламы. Реклама по телевидению в 20 раз эффективней радио рекламы, в 10 раз эффективнее рекламы в газетах, в 20 раз эффективнее рекламы на стендах. Проверьте, изменится ли оптимальность плана, и если да, то найдите новый оптимальный план. Условия, которые не изменились, следует брать из исходной задачи.

Ответ: X= (O, 5000/11, 0, 1000/11) Z=30000/11

3) Фирма решила изменить свою рекламную политику. Теперь ей хотелось бы использовать радио сеть, газеты и стенды вместе, по крайней мере, в 7 раза чаще, чем телевизионную сеть. Проверьте, изменится ли оптимальность плана, и если да, то найдите новый оптимальный план. Условия, которые не изменились, следует брать из исходной задачи.

Ответ: X= (500, 0, 0, 500/7) Z= 17000/7

Задача № 12

Фирма имеет возможность рекламировать свою продукцию, используя местные радио, телевизионную сети, а также газеты и уличные рекламные стенды. Затраты на рекламу в бюджете ограничены величиной 1000 $ в месяц. Фирме хотелось бы использовать радио сеть, газеты и стенды вместе, по крайней мере, в 4 раза чаще, чем телевизионную сеть. Опыт прошлых лет показал, что объём сбыта (результативность), которую обеспечивает теле реклама в 20 раз больше любого другого вида рекламы.

Одна минута радио рекламы обходится в 10$, теле рекламы - 60$, размещение в газете - 6$, на стендах - 5$.

Определите размещение финансовых средств, ежемесячно отпускаемых на отдельные виды рекламы, с учётом максимальной результативности.

Ответ: X = (0, 0, 50, 12.5) Z= 300. (50-на стендах и 12.5-видео)

Дополнительные условия:

1) Со временем в городе изменились цены на рекламные услуги. Теперь реклама по радио стоит 5$, в газетах - 6$, на стендах - 6$, по телевидению -100$. Проверьте, изменится ли оптимальность плана, и если да, то найдите новый оптимальный план.

Ответ: X= (33+1/3, 0, 0, 8+1/3) Z= 200

2) Фирма решила продавать товар в соседнем городе, но там другое распределение эффективности рекламы. Реклама по телевидению в 20 раз эффективней радио рекламы, в 10 раз эффективнее рекламы в газетах, в 20 раз эффективнее рекламы на стендах. Проверьте, изменится ли оптимальность плана, и если да, то найдите новый оптимальный план. Условия, которые не изменились, следует брать из исходной задачи.

Ответ: X = (0, 1000/21, 0, 250/21) Z = 1000/3

3) Фирма решила изменить свою рекламную политику. Теперь ей хотелось бы использовать радио сеть, газеты и стенды вместе, по крайней мере, в 8 раза чаще, чем телевизионную сеть. Проверьте, изменится ли оптимальность плана, и если да, то найдите новый оптимальный план. Условия, которые не изменились, следует брать из исходной задачи.

Ответ: X=(0, 0, 80, 10) Z=280

Задача № 13

Процесс обработки трёх промышленных изделий состоит в последующей обработке каждого из них на трёх станках. Время использования каждого станка за одни сутки ограничено. Время обработки и прибыль от продажи одного изделия каждого вида приведены в таблице. Анализ рынка сбыта показал, что сумма количеств деталей первого и третьего вида не может быть более чем на 5 больше количества деталей второго вида. Найдите оптимальные объемы производства изделий каждого вида (для получения максимальной прибыли).

Таблица исходных данных:

Изделие	Время обработки одного изделия, мин			Удельная прибыль
	станок 1	станок 2	станок 3	
1	10	10	15	22$
2	9	10	6	12$
3	б	5	15	11$
Max. время работы, мин	90	80	160	

Ответ: X = (6.5, 1.5, 0) Z = 161 $.

1) В результате перераспределения электроэнергии, было серьёзно изменены максимальное время работы каждого станка. На первый станок наложено новое ограничение по времени работы - 160 мин, на второй - 40, на третий -120. Проверьте, изменится ли оптимальность плана, и если да, то найдите новый оптимальный план.

Ответ: X = (0, 4, 0) Z = 48 $

2) В гонке за новыми технологиями, фирма заменила станок 2 на более совершенный. Теперь для обработки детали 1 затрачивается 5 мин, для обработки детали 2-4 мин, для обработки детали 3-4 мин. Проверьте, изменится ли оптимальность плана, и если да, то найдите новый оптимальный план. Условия, которые не изменились, следует брать из исходной задачи.

Ответ: X = (135/19, 40/19, 0) Z = 3450/19 $

3) В результате изменений на рынке сбыта фирма изменила цены на свои товары. Теперь удельная прибыль изделия 1 составляет 15$, изделия 2 - 16$, изделия 3-10$. Проверьте, изменится ли оптимальность плана, и если да, то найдите новый оптимальный план. Условия, которые не изменились, следует брать из исходной задачи.

Ответ: X = (0 , 3+2/3, 8+2/3) Z = 145+1/3 $.

Задача №14

Процесс обработки четырёх промышленных изделий состоит в последующей обработке каждого из них на трёх станках. Время использования каждого станка за одни сутки ограничено. Время обработки и прибыль от продажи одного изделия каждого вида приведены в таблице. Найдите оптимальные объемы производства изделий каждого вида (для получения максимальной прибыли).

Таблица исходных данных:

Изделие	Время обработки одного изделия, мин			Удельная прибыль
	станок 1	станок 2	станок 3	
1	10	6	4	12$
2	12	4	6	10$
3	2	2	4	8$
4	10	5	8	10$
Max. время работы, мин	160	120	120	

Ответ:X = (12.5, 0, 17.5, 0) Z = 290 $

1) В гонке за новыми технологиями, фирма заменила станок 3 на более совершенный. Теперь для обработки любой детали затрачивается в 2 раза меньше времени. Проверьте, изменится ли оптимальность плана, и если да, то найдите новый оптимальный план. Условия, которые не изменились, следует брать из исходной задачи.

Ответ: X = (10, 0, 30, 0) Z = 360 $

2) В результате изменений на рынке сбыта фирма решила изменить цены на первое изделие. Его удельная прибыль стала равна (12 + δ). Найдите интервал, которому принадлежит δ так, чтобы оптимальность решения не нарушилась. Условия, которые не изменились, следует брать из исходной задачи.

Ответ: $\delta \in$ [-4, ∞] т.е. удельная стоимость изделия 1 может изменяться от 8$ до ∞.

3) В результате изменений на рынке сбыта фирма изменила цены на свои товары. Теперь удельная прибыль изделия 1 составляет 9$, изделия 2 - 15$, изделия 3 - 8$, изделия 4 • 10$. Проверьте, изменится ли оптимальность плана, и если да, то найдите новый оптимальный план. Условия, которые не изменились, следует брать из исходной задачи.

Ответ: X = (0, 11+1/9, 13+1/3, 0) Z = 273+1/3 $

Задача № 15

Процесс обработки трёх промышленных изделий состоит в последующей обработке каждого из них на четырёх станках. Время использования каждого станка за одни сутки ограничено. Время обработки и прибыль от продажи одного изделия каждого вида приведены в таблице. Найдите оптимальные объемы производства изделий каждого вида (для получения максимальной прибыли).

Таблица исходных данных:

Изделие	Время обработки одного изделия, мин				Удельная прибыль
	станок 1	станок 2	станок 3	станок 4	
1	15	10	20	20	3$
2	10	7	12	16	6$
3	10	10	18	8	4$
Max. время работы, мин	115	150	120	80	

Ответ: X = (0,2.5 ,5) Z = 35 $.

1) В результате перераспределения электроэнергии, было серьёзно изменены максимальное время работы каждого станка. На первый станок наложено новое ограничение по времени работы - 140 мин, на второй - 130, на третий -160, на четвёртый - 160. Проверьте, изменится ли оптимальность плана, и если да, то найдите новый оптимальный план.

Ответ: X = (0, 10, 0) Z = 60

2) Со временем фирма решила изготавливать новый вид изделия - изделие 4. Удельная прибыль на него составит по предварительным расчётам 5 $. На станке 1 новое изделие будет обрабатываться 13 мин, на станке 2-11 мин, на станке 3-9 мин, на станке 4-14 мин. Проверьте, изменится ли оптимальность плана, и если да, то найдите новый оптимальный план. Условия, которые не изменились, следует брать из исходной задачи.

Ответ: X = (0, 2.5, 5, 0) Z = 35 $

3) В гонке за новыми технологиями, фирма заменила станок 3 на более совершенный. Теперь для обработки любой детали затрачивается в 2 раза меньше времени. Проверьте, изменится ли оптимальность плана, и если да, то найдите новый оптимальный план. Условия, которые не изменились, следует брать из исходной задачи,

Ответ: X = (0, 0, 10) Z = 40 $

Задача № 16

Процесс обработки четырёх промышленных изделий состоит в последующей обработке каждого из них на трёх станках. Время использования каждого станка за одни сутки ограничено. Время обработки и прибыль от продажи одного изделия каждого вида приведены в таблице. Найдите оптимальные объемы производства изделий каждого вида (для получения максимальной прибыли).

Таблица исходных данных:

Изделие	Время обработки одного изделия, мин			Удельная прибыль
	станок 1	станок 2	станок 3	
1	10	4	2	11$
2	5	8	3	15$
3	5	8	10	14$
4	3	10	8	7$
Max. время работы, мин	130	160	190	

Ответ:X = (4, 18, 0, 0) Z = 314$

1) В результате перераспределения электроэнергии, было серьёзно изменены максимальное время работы каждого станка. На первый станок наложено новое ограничение по времени работы - 100 мин, на второй - 180, на третий -140. Проверьте, изменится ли оптимальность плана, и если да, то найдите новый оптимальный план.

Ответ: X = (0, 20, 0, 0) Z = 300 $

2) В гонке за новыми технологиями, фирма заменила станок 1 на более совершенный. Теперь для обработки любой детали затрачивается по 4 мин. Проверьте, изменится ли оптимальность плана, и если да, то найдите новый оптимальный план. Условия, которые не изменились, следует брать из исходной задачи.

Ответ: X = (25, 7.5, 0, 0) Z = 387.5$

3) В результате изменений на рынке сбыта фирма решила изменить цены на второе изделие. Его удельная прибыль стала равна (15 + δ). Найдите интервал, которому принадлежит δ так, чтобы оптимальность решения не нарушилась. Условия, которые не изменились, следует брать из исходной задачи.

Ответ: $\delta \in [-1,7]$ т.е. удельная стоимость изделия 2 может изменяться от 14$ до 22$.

Задача № 17

Предприятие производит три вида красок. Для производства каждого требуется затратить три компонента, смешанных в различных пропорциях, Определить какой и сколько красок нужно производить, чтобы получить максимальную прибыль.

Таблица исходных данных:

Вид краски	Компоненты, кг.			Прибыль
	станок 1	станок 2	станок 3	
A	1	3	2	7$
B	3	2	5	11$
C	3	1	1	9$
Запасы, кг	30	25	17	

Ответ: Нужно производить краску А в кол-ве 8.6 кг и краску С 4.2 кг. Прибыль 106.8 $. Дополнительные условия:

1) В результате сбоев поставок сырья, были серьёзно изменены запасы различных компонентов. На первую компоненту наложено новое ограничение 20 кг, на вторую - 20 кг, на третью - 15 кг. Проверьте, изменится ли оптимальность плана, и если да, то найдите новый оптимальный план.

Ответ: $X = (5, 0, 5)$ $Z = 80$ $

2) В результате изменений на рынке сбыта фирма изменила цены на свои товары. Теперь прибыль от краски А составляет 14$, от краски В - 10$, от краски С - 8$. Проверьте, изменится ли оптимальность плана, и если да, то найдите новый оптимальный план. Условия, которые не изменились, следует брать из исходной задачи.

Ответ: $X = (8, 0, 1)$ $Z = 120$ $

3) В результате изменений на рынке сбыта изменилась цену третьей краски и, соответственно прибыль от нее. Её прибыль стала равна $(11 + \delta)$. Найдите интервал, которому принадлежит δ так, чтобы оптимальность решения не нарушилась. Условия, которые не изменились, следует брать из исходной задачи.

Ответ: $\delta \in [-11,7.6]$ Т.е. прибыль от краски 2 может изменяться от 0 до 18.6 $

Задача № 18

Фирма имеет возможность рекламировать свою продукцию, используя местные радио, телевизионную сети, а также газеты и уличные рекламные стенды. Затраты на рекламу в бюджете ограничены величиной 1000 $ в месяц. Фирме хотелось бы использовать радио сеть, газеты и стенды вместе, по крайней мере, в 2 раза чаще, чем телевизионную сеть. Опыт прошлых лет показал, что объём сбыта (результативность), которую обеспечивает теле реклама в 5 раз больше радио рекламы, в 10 раз больше, чем размещение в газетах, и в 20 раз больше, чем на стендах.

Одна минута радио рекламы обходится в 15$, теле рекламы - 70$, размещение в газете - 10$, на стендах - 8$.

Определите размещение финансовых средств, ежемесячно отпускаемых на отдельные виды рекламы, с учётом максимальной результативности.

Ответ: X = (200, 0, 0, 100) Z = 2800. (200-радио и 100-видео)

Дополнительные условия:

1) Фирма решила продавать товар в соседнем городе, но там другое распределение эффективности рекламы. Реклама по телевидению в 40 раз эффективней радио рекламы, в 10 раз эффективнее рекламы в газетах, в 10 раз эффективнее рекламы на стендах. Проверьте, изменится ли оптимальность плана, и если да, то найдите новый оптимальный план. Условия, которые не изменились, следует брать из исходной задачи.

Ответ: X = (0, 0, 10000/43, 5000/43) Z = 240000/43

2) Фирма решила изменить свою рекламную политику. Теперь ей хотелось бы использовать радио сеть, газеты и стенды вместе, по крайней мере, в 6 раза чаще, чем телевизионную сеть. Проверьте, изменится ли оптимальность плана, и если да, то найдите новый оптимальный план. Условия, которые не изменились, следует брать из исходной задачи.

Ответ: X = (375, 0, 0, 62.5) Z = 2750

3) Со временем изменились цены на рекламную продукцию. Теперь стоимость рекламы стала равна $(15 + \delta)$. Найдите интервал, которому принадлежит δ так, чтобы оптимальность решения не нарушилась. Условия, которые не изменились, следует брать из исходной задачи.

Ответ: $\delta \in [-30,5]$ т.е. стоимость рекламы по телевидению может изменяться от 40$ до 75.

Задача № 19

Небольшая фирма производит два типа подшипников А и В, каждый из которых должен быть обработан на трех станках, а именно на токарном, шлифовальном и сверлильном. Время, требуемое для каждой из стадий производственного процесса, приведено в таблице. Фирма хотела бы производить подшипники в количествах, максимизирующих прибыль. Рассчитайте, как это сделать.

Таблица исходных данных:

Тип подшипника	Время обработки одного подшипника, мин			Удельная прибыль, ед.
	токарный	шлифовальный	сверлильный	
A	0.1	0.2	0.4	80
B	0.2	0.1	0.1	125
Max. время работы, мин	160	120	150	

Ответ: Подшипников А - 2000, подшипников В - 7000. Прибыль равна 1035000 ед.

Дополнительные условия:

1) В результате перераспределения электроэнергии, было серьёзно изменены максимальное время работы каждого станка. На первый станок наложено новое ограничение по времени работы - 86 мин, на второй - 100, на третий -120. Проверьте, изменится ли оптимальность плана, и если да, то найдите новый оптимальный план.

Ответ: X = (2200, 3200) Z = 5760 ед.

2) В гонке за новыми технологиями, фирма заменила сверлильный станок на более совершенный. Теперь для обработки подшипника А затрачивается 0.03 мин, для обработки подшипника В - 0.005 мин. Проверьте, изменится ли оптимальность плана, и если да, то найдите новый оптимальный план. Условия, которые не изменились, следует брать из исходной задачи.

Ответ: X = (2000+2000/3, 6000+2000/3) Z = 1046666.66 ед.

3) В результате изменений на рынке сбыта фирма изменила цены на свои товары. Теперь удельная прибыль подшипника А составляет 100 ед., подшипника В - 50 ед. Проверьте, изменится ли оптимальность плана, и если да, то найдите новый оптимальный план. Условия, которые не изменились, следует брать из исходной задачи.

Ответ: Подшипников А - 2000, подшипников В – 7000. Прибыль равна 550000 ед.

Задача № 20

Фирма производит три вида готового сырья для получения фарфора при последующей обработке. Каждый сорт сырья для фарфора требует расхода четырех видов компонентов. Определите план производства, позволяющий наиболее выгодно продавать этой фирме свои изделия.

Таблица исходных данных:

Вид продукции	Компоненты, кг				Прибыль за 1 кг.
	Глина	каолин	шпат	кварц	
A	30	7	1	25	13$
B	30	7	20	20	20$
C	25	16	9	27	19$
Запасы сырья, кг	450	200	180	600	

Ответ: Изделие А - 2.545; Изделие В - 4.668; Изделие С - 9.344. Прибыль -190.716

Дополнительные условия:

1) В результате сбоев поставок сырья, были серьёзно изменены запасы различных компонентов. На глину наложено новое ограничение - 200 кг, на каолин - 300 кг, на шпат - 200 кг, на кварц - 400 кг. Проверьте, изменится ли оптимальность плана, и если да, то найдите новый оптимальный план.

Ответ: X = (0, 0, 8) Z = 152 $

2) В результате изменений на рынке сбыта фирма изменила цены на свои товары. Теперь прибыль от продукта А составляет 14$, от продукта В - 10$, от продукта С - 10$. Проверьте, изменится ли оптимальность плана, и если да, то найдите новый оптимальный план. Условия, которые не изменились, следует брать из исходной задачи.

Ответ: X = (15, 0,0) Z = 210 $

3) В результате изменений на рынке сбыта изменилась цену изделия В и, соответственно прибыль от неё. Прибыль стала равна (20 +δ). Найдите интервал, которому принадлежит δ так, чтобы оптимальность решения не нарушилась. Условия, которые не изменились, следует брать из исходной задачи.

Ответ: $\delta \in [-7,12]$ Т.е. прибыль от изделия В может изменяться от 11 до 32 $

Задача № 21

В фирму, производящую напитки поступило три вида сырья для производства газированной воды. Технология производства позволяет производить три сорта этого напитка, смешивая в различных пропорциях это сырье. Требуется рассчитать, сколько литров каждого напитка нужно произвести, желая получить максимальную прибыли.

Таблица исходных данных:

Сорт газ. Воды	Компоненты, л.			Прибыль
	1	2	3	
A	9	3	2	70$
B	6.5	5.7	5.4	65$
C	4.5	7	3.2	50$
Запасы	600	600	350	

Ответ: Производим А 21.364 В 22.29 С 58.41 Прибыль 5865 ед. Дополнительные условия:

1) В результате проверки сырья на складах выяснилось, что часть сырья оказалась некачественной. Выясните измениться ли базис и выясните на сколько изменится цена если сырья осталось соответственно 500 л, 580 л, 325 л.

Ответ: А = 10.321; В = 62.881 л; С=19.1 л. Прибыль: 5108 ед.

2) Фирма закупила качественно новое сырье вместо сырья 3. Теперь требуется затрачивать на производство газированной воды: А=1 л В=2.5л, С=3л. Запасы такие же, как и сырья 3. Определить изменится ли план производства и если измениться то как. Пересчитайте прибыль.

Ответ: А = 0 л; В=75.567 л; С=24.181л. Прибыль: 6121 ед.

3) В результате изменений на рынке сбыта фирма изменила цены на свои товары, а именно цена на изделие А стала равна (-1+d). Найти ограничение на d при условии, что план остался оптимальным.

Ответ: $d \in [27.935; 82.614]$.

Задача № 22

Для выращивания пшеницы применяется три вида удобрений: фосфорные, азотные, калийные.(см. таблицу). Вся посевная площадь разбита на 3 почвенно-климатические зоны каждая по 100 000, 150 000, 200 000 гектар.

Составить такой план распределения удобрений между посевными зонами, который обеспечивал бы максимальный суммарный прирост урожайности культуры.

Таблица исходных данных:

Зоны	Посевная площадь	Затраты удобрений на 1 га. В центнерах			Прирост урожайности на 1 га. в центнерах
		Фосфорные	Азотные	Калийные	
1	100 000	2	1	1	12$
2	150 000	1	2	5/4	14$
3	200 000	1	1/2	0	10$
Запасы		400 000	300 000	100 000	

Ответ: Обозначаем за x площадь i - той зоны, которую необходимо удобрить и учитываем, что x не может превышать с площадь самой зоны.

Оптимальный план X=(100 000; 0;200 000). Прирост 3 200 000 ц, т.е. необходимо для удобрения 1 зоны фосфорных удобрений 200 000 ц, азотных 100 000 ц, калийных 100 000 ц.; для 3 зоны фосфорных 200 000 ц, азотных 100 000 ц. При этом 100 000 ц азотных удобрений остается неизрасходованными.

Дополнительные условия:

1) Фирма нашла нового поставщика фосфорных удобрений, а часть азотных использовала для других целей. Изменится ли базис и выясните на сколько изменится цена если фосфорных удобрений стало 500 000 ц, азотных 280 000 ц.

Ответ: Ни цена, ни базис никак не изменится.

2) Фирма закупила новое удобрение вместо калийных. Его затраты на зоны соответственно .5, 1, 2. Определить выиграет ли фирма на замене этим уравнением калийных.

Ответ: X =(100 000; 0; 50 000); Прибыль: 1 900 000 ед. => фирма на этом проиграет.

3) В результате эрозии почвы изменился прирост урожайности на гектар для 1 зоны он стал составлять 11.3 ц. Проверьте оптимальность плана и найдите прирост урожайности.

Ответ: План прежний, прирост урожайности 3 130 000 ц.

Задача №23

На заводе производится четыре вида продукции. Для этого необходимо четыре вида сырья. Найти оптимальный план производства продукции и рассчитать предполагаемую прибыль.

Таблица исходных данных:

Вид продукции	Виды сырья, кг на 1 центнер продукции				Прибыль
	1	2	3	4	
A	14	30	5	20	3
B	15	25	8	15	2.8
C	19	22	12	25	2.5
D	10	27	25	11	1.8
Запасы	430	213	115	330	

Ответ: A=0 ц; B=20.968 ц; C=944.355 ц; D=0. Прибыль приблизительно 2 420 ед.

Ограничения:

1) В результате проверки сырья на складах выяснилось, что часть сырья оказалась некачественной. Выясните измениться ли базис и выясните на сколько изменится цена если сырья осталось соответственно 430 ц, 205 ц, 110 ц, 250 ц.

Ответ: A=0; B=32.258 ц; C=895.161 ц; D=0. Прибыль: 2 328 ед.

2) Фирма закупила качественно новое сырье вместо сырья 3 и 4, Теперь требуется затрачивать на производство продукции (A, B, C, D) нового сырья вместо третьего: 10 кг, 10 кг, 6 кг, 9 кг. Новое сырье вместо 4 нужно использовать в следующих пропорциях: 25 кг, 20 кг,10 кг, 15 кг. Запасы такие же, как и сырья 3 и 4.

Определить выгодно ли это и если да, то на сколько.

Ответ: A=0 ц; B = 0 ц; C = 968,82 ц; D = 0 ц. Прибыль: 2 400 ед. => Фирме это не выгодно.

3) В результате изменений на рынке товары, а именно цена на изделие C на d при условии, что план остался оптимальным.

Ответ: -2. 535<=d<=-2. 147

Задача 24

Фирма XYZ выпускает 3 вида продукции. В процессе производства используются 3 технологические операции. На рис. показана технологическая схема пр-ва изделий видов 1,2,3. В прямоугольниках указана длительность технологических операций при изготовлении одного изделия каждого вида.

Таблица исходных данных:

Сырье	Операция 1	Операция 2	Операция 3
Изделие 1	1мин/Изделие	3мин/Изделие	1мин/Изделие
Изделие 2	2мин/Изделие		4мин/Изделие
Изделие 3	1мин/Изделие	2мин/Изделие	

т. к. эти технологические операции используются фирмой и для др. производственных целей, то фонд рабочего времени для них ограничен. для первой операции - 430 мин для второй операции - 460 мин для третьей операции - 420 мин

Изучение рейтинга показало, что ожидаемая прибыль от продажи одного изделия видов:
1 будет получено 3 ед.
2 будет получено 2 ед.
3 будет получено 5 ед.

Каков наиболее выгодный суточный объем производства каждого вида продукции.

Ответ: Изделий 1 не производим; Изделий 2 – 100; Изделий 3 – 230
Прибыль 1350 ед.
Ограничения:
1) В результате перераспределения электроэнергии, было серьезно изменено время работы каждого станка. На первый станок наложено новое ограничение по времени работы - 200 мин, на второй - 300 мин, на третий - 180 мин. Проверьте, измениться ли оптимальность плана, если да, то найдите новый оптимальный план.

Ответ: Изделий 1 не производим; Изделий 2-25; Изделий 3 – 150.
Прибыль: 800 ед.
2) В гонке за новыми технологиями, фирма заменила станок 3 на более совершенный. Теперь для обработки любой детали затрачивается в два раза меньше времени. Проверьте, измениться ли оптимальность плана, и если да, те найдите новый оптимальный план. Остальные условия остались прежними.

Ответ: X(0,100,230). Прибыль:1350 ед.
3) В результате изменений на рынке сбыта фирма изменила цены на свои товары, а именно цена на изделие 2 стала равна (-3+d).

Найти ограничение на d при условии, что план остался оптимальным.

Ответ: 3<=d<=13

Задача №25

Имеется две почвенно-климатические зоны, площадь которых соответственно равна 0.8 и 0.6 млн. га. Определить засеиваемую площадь и количество озимых и яровых в центнерах, которые необходимо вырастить в каждой зоне для достижения максимальной прибыли. Урожайность культур по зонам и стоимость 1ц зерна приведены в таблице. Необходимо произвести озимых не более 20 млн. ц. и яровых не более 7 млн. ц,

Таблица исходных данных:

Наименование	Урожайность, ц/га		Прибыль с 1 га в руб.
	1 зона	2 зона	
Озимые	20	60	8
Яровые	25	15	7

Ответ: Оптимальный план имеет вид (100 000;300 000) га; Озимых в первой зоне 2 млн. ц. во второй зоне 18 млн. ц; Яровых в первой зоне 2.5 млн. ц. во второй зоне 4.5 млн. ц. Прибыль: 2 900 000 ед.

Ограничения:

1) В результате эрозии почвы площадь климатических зон сократилась, для первой зоны на 0.2 млн. га, второй на 0.1 млн. га. Проверьте, измениться ли оптимальность плана, если да, то найдите новый оптимальный план.

Ответ: X (100 000, 300 000). Прибыль: 2 900 000 ед.

2) С/х фирма предприняла ряд мер, которые позволили во второй зоне повысит урожайность озимых на 20 ц на га, яровых на 5 ц на га. Проверьте, изменит ли оптимальность плана, если да, то найдите новый оптимальный план.

Ответ: X(225 000,100 000). Прибыль 2 375 000 ед.

3) В результате изменений на рынке сбыта с/х фирма изменила цены на свою товары, цена на яровые стала равна (1+d). Найти ограничение на d при условии, что план остался оптимальным.

Ответ: 3.8<=d<=22.995

Задача №26

Для расшивки ткани применяется три вида нитей: красные, зеленые, синие. (см. таблицу), Ткань разрезана на 3 куска, каждый расшивается по своему их размеры равны соответственно 10 000, 15 000, 11 000 квадратных метров.

Какую площадь каждого куска необходимо расшить, чтобы обеспечивалась максимальную прибыль с учетом того, что каждый квадратный метр ткани приносит прибыль соответственно 30 ед., 45 ед., 35 ед.

Таблица исходных данных:

Куски	Площадь куска, $м^2$	Затраты нитей, м на $м^2$			Прибыль ед. на $м^2$
		Красных	Зеленых	Синих	
1	10000	3	4	2	30
2	15000	1	3	4	45
3	11000	2	3	3	35
Запасы, м		21 000	15 000	18 000	

Ответ: первый кусок 600 $м^2$; второй кусок 4200 $м^2$; третий кусок 0 $м^2$. Прибыль: 207 000 ед.

Ограничения:

1) Швейное предприятие закупило дополнительно красные нити. Продало, решив, что их избыточно много, осталось 19 000 м., зеленых стало 20 000 м, и как это повлияет на прибыль.

Стоило ли делать подобную торговую операцию?

Ответ: первый кусок 2 300 $м^2$; второй кусок 3 600 $м^2$; третий кусок 0 $м^2$. Прибыль: 231000 ед.

Торговая операция привела к получению большей прибыли

2) В результате модернизации швейных машин несколько сократился расход зеленых нитей на кв.м. Расход на первый кусок - 2, на второй - 1, на третий - 1.

Исследовать: изменился ли план.

Ответ: первый кусок 4750 $м^2$; второй кусок 2 375 $м^2$; третий кусок 0 $м^2$. Прибыль: 249 400 ед.

3) Предприятие решило изучить сколько минимально надо закупать красные нити, чтобы не менялся план производства.

Изучите эту проблему.

Ответ: >=10200 м

Задача №27

Сельскохозяйственная фирма выращивает три сорта картофеля (A,B,C), каждому сорту требуется определенное кол-во удобрений четырех сортов 1,2,3,4. Пусть запасы удобрений соответственно 30,21,26 и 21 кг. Определите: какой картофель и в каких количествах следует производить?

Таблица исходных данных:

Сорт картофеля	Удобрения кг/т				Прибыль (цена 1 т)
	1	2	3	4	
A	3	2	4	2	30
B	6	3	1	3	25
C	3	1	5	2	27

Ответ: Картофеля A – 6 т. Картофеля B-2 т. Прибыль равна 230 ед.

Ограничения:

1) Фирма не смогла достать требуемое число удобрений всех типов, а достало только 25 кг - 1 вида, 19 - второго, 25 - третьего и 21 -четвертого. Рассчитать план (если изменился) для новых условий.

Ответ: Картофель сорта A 5,952 т. Картофель сорта B 1.19 т. Прибыль: 208.333 ед.

2) Вместо удобрения 1 фирма закупила новое, более эффективное удобрение Его расход на все три вида картофеля составляет 1 кг на т. Изменится ли план выращивания картофеля, как изменится прибыль.

Ответ: Картофель сорта A 5.7 т. Картофель сорта B 3.2 т. Прибыль: 251 ед.

3) В результате изменений на рынке сбыта с/х фирма изменила цены на сорт B картофеля. Цена стала равна (-2+d). Найти ограничение на d при условии, что план остался оптимальным.

Ответ: 9.5<=d<=27

Задача №28

Чтобы при откорме животных весом 30-40 кг получить средний привес 300 400 г, по нормам в дневном рационе должны содержаться питательные вещества в следующем количестве: кормовых единиц не менее 1.6 г; перевариваемого протеина - не менее 200 г, каротина - не менее 10 мг. При откорме используют ячмень, бобы, и сенную муку. Содержание питательных веществ в 1 кг этих кормов и стоимости 1 кг корма приведем в таблице. Составить дневной рацион, удовлетворяющий данной питательности при минимальной стоимости.

Таблица исходных данных :

Наименование питательного вещества	Кол-во единиц питательного в-ва содержащихся в 1 кг корма.		
	Ячмень	Бобы	Сенная мука
Кормовые единицы, г	1.2	1.4	0.8
Перевариваемый протеин, г	80	280	240
Каротин, мг	10	5	4
Цена 1 кг корма, руб.	3	4	5

Ответ: Ячменя закупаем 1.852 кг. Бобы 0.185 кг. Затраты: 6.296 руб.

Ограничения:

1) Была поставлена цель, что средний привес должен быть около 200 гр., для чего норму всех питательных веществ сократили вдвое. А именно:

кормовых единиц не менее 0.8 г; перевариваемого протеина - не менее 100 г; каротина - не менее 5 мг. Найти новый план (если он изменился).

Ответ: Ячменя закупаем 0.926 кг. Бобы 0.441 кг. Затраты: 3.148 руб.

2) В результате изменений на рынке повысились цены на ячмень. Рассчитайте, при каких максимальных ценах на ячмень фирма может закупать его, не меняя рациона. Найти ограничение на d при условии, что план остался оптимальным.

Ответ: $1.142 <= d <= 5$

Задача №29

По нормам в дневном рационе должны содержаться питательные вещества в следующем количестве: кормовых единиц не менее 5 г; перевариваемого протеина - не менее 50 г, каротина - не менее 10 мг. При откорме используют ячмень, бобы, и сенную муку. Содержание питательных веществ в 1 кг этих кормов и стоимости 1 кг корма приведем в таблице.

Составить дневной рацион, удовлетворяющий данной питательности при минимальной стоимости.

Таблица исходных данных:

Наименование питательного вещества	Кол-во единиц питательного в-ва содержащихся в 1 кг корма.		
	Ячмень	Бобы	Сенная мука
Кормовые единицы, г	2	4	1
Перевариваемый протеин, г	10	70	60
Каротин, мг	5	4	3
Цена 1 кг корма, руб.	5	4	3

Ответ: Ячменя закупаем 1. 620 кг. Бобов 0.423 кг. Сенной муки 0.070. Затраты: 10 руб.

Ограничения:

1) Была поставлена цель, что средний привес должен быть около 200 гр., для чего норму всех питательных веществ сократили вдвое. А именно: кормовых единиц не менее 2.5 г; перевариваемого протеина - не менее 25 г; каротина - не менее 5 мг. Найти новый план (если он изменился).

Ответ: Ячменя закупаем 0,810 кг. Бобы 0.211 кг. Сенной муки 0.035 кг. Затраты: 5 руб.

2) В результате изменений на рынке повысились цены на бобы. Рассчитайте при каких максимальных ценах на бобы фирма может закупать их не меняя рациона. Найти ограничение, что план остался оптимальным.

Ответ: 3.999<=d<=10.455

Задача №30

По нормам в дневном рационе должны содержаться питательные вещества в следующем количестве: кормовых единиц не менее 50 г; перевариваемого протеина - не менее 300 г., каротина - не менее 100 мг. При откорме используют ячмень, бобы, и сенную муку. Содержание питательных веществ в 1 кг этих кормов и стоимости 1 кг корма приведенного в таблице.

Составить дневной рацион, удовлетворяющий данной питательности при минимальной стоимости.

Таблица исходных данных:

Наименование питательного вещества	Кол-во единиц питательного в-ва содержащихся в 1 кг корма.		
	Ячмень	Бобы	Сенная мука
Кормовые единицы, г	30	25	20
Перевариваемый протеин, г	135	120	200
Каротин, мг	30	45	40
Цена 1 кг корма, коп. :	50	35	40

Ответ: Бобов закупаем 1.905 кг. Сенной муки 0.357 кг. Затраты: 80,95 руб.

Ограничения:

1) Была поставлена цель, что средний привес должен быть около 200 гр., для чего норму всех питательных веществ сократили вдвое. А именно:

кормовых единиц не менее 25 г; перевариваемого протеина - не менее 150 г; каротина - не менее 50 мг. Найти новый план (если он изменился).

Ответ: Ячменя закупаем 0 кг. Бобы 0.952 кг. Сенной муки 0. 179 кг. Затраты: 40.476 руб.

2) В результате изменений на рынке повысились цены на сенную муку. Рассчитайте, при каких максимальных ценах на сенную муку фирма может закупать ее, не меняя рациона. Найти ограничение при условии, что план остался оптимальным.

Ответ: 31.111<=d<=58.337

ПРИЛОЖЕНИЕ №2

Транспортные задачи с дополнительными ограничениями.

При практической реализации организации перевозок могут появиться дополнительные сложности например, закрывается один из маршрутов или появляются ограничения на грузопоток. Если в транспортной задаче таких ограничений не очень много, то применим *метод запирающих тарифов* – устанавливаем очень высокую цену за перевозку по одному из маршрутов, что при минимизации общей стоимости перевозок фактически закрывает маршрут. Здесь уместно вспомнить метод искусственного базиса поиска первоначального плана в симплекс методе. Метод запирающих тарифов может привести к увеличению размера транспортной таблицы, поэтому он эффективен при небольшом количестве дополнительных ограничений. Область применения метода может быть расширена, например для транспортных задач с промежуточными пунктами перевозок.

Рассмотрим примеры решения задач [1]

Пример1. Найти решение транспортной задачи, исходные данные которой приведены в таблице 1.1, при дополнительных условиях: из A_1 в B_2 и из A_2 в B_5 перевозки не могут быть осуществлены, а из A_2 в B_1 будет завезено 60 ед. груза.

Таблица 1.1

Пункты отправления	Пункты назначения					Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1						180
A_2						220
A_3						100
Потребности	120	80	160	90	50	500

Решение. Так как из A_1 в B_2 и из A_2 в B_5 перевозки не могут быть осуществлены, то в клетках A_1 B_2 и A_2 B_5 табл. тарифы считаем равными некоторому сколь угодному большому числу M. Полагаем равным этому же числу и тариф для клетки A_2 B_1. Одновременно в эту клетку помещаем число 60, поскольку, по условию, из A_2 в B_1 нужно завести 60 ед. груза. В дальнейшем клетку A_2 B_1 считаем свободной со сколь угодно большим тарифом M.

Таблица 1.2

Пункты отправления	Пункты назначения					Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	*1* **60**	*M* -M	*3* **30**	*1* **90**	*4* -5	180
A_2	*M* **60** 2-M	*3* **80**	*4* **30**	*5* 3	*M* **50**	220
A_3	*8* -9	*2* 2	*1* **100**	*9* 10	*3* M-6	100
Потребности	120	80	160	90	50	500

Для транспортной задачи, исходные данные которой записаны в табл.1. 2, методом минимального элемента находим опорный план. Этот план проверяем на оптимальность. Для каждого из пунктов отправления и назначения находим потенциалы, а для каждой из свободных клеток – числа $\alpha_{ij} = \beta_j - \alpha_i - c_{ij}$. Эти числа записываем подчеркнутые в соответствующих клетках табл. 1.2. Если среди данных чисел нет положительных, то найденный опорный план является оптимальным. В данном случае имеется два положительных числа, расположенных в клетках A_1 B_5 и A_3 B_5. Поэтому переходим к новому опорному плану. Строим для клетки A_1 B_5 цикл пересчета и производим сдвиг по циклу пересчета (табл.1.3).

Таблица 1.3

Пункты отправления	Пункты назначения					Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	*1* **60**	*M* 2-M+7	*3* -M+5	*1* **90**	*4* **30**	180
A_2	*M* **60** M-3	*3* **80**	*4* **60**	*5* M-8	*M* **20**	220
A_3	*8* M-9	*2* -2	*1* **100**	*9* -15	*3* M-6	100
Потребности	120	80	160	90	50	500

Полученный опорный план проверяем на оптимальность; так как он не оптимален, то переходим к новому опорному плану (табл.1.4).

Как видно из табл. 1.4, исходная транспортная задача имеет оптимальный план

$$X^* = \begin{pmatrix} 60 & 0 & 0 & 90 & 30 \\ 60 & 80 & 80 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 80 & 0 & 20 \end{pmatrix}$$

При этом общая стоимость перевозок является минимальной S=1330.

Таблица 1.4

Пункты отправления	Пункты назначения					Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	*1* **60**	*M* 1-M	*3* -1	*1* **90**	*4* **30**	180
A_2	*M* **60** 3-M	*3* **80**	*4* **80**	*5* -2	*M* 6-M	220
A_3	*8* -8	*2* -2	*1* **80**	*9* -9	*3* **20**	100
Потребности	120	80	160	90	50	500

Пример2. Найти решение транспортной задачи, исходные данные которой приведены в таблице 2.1, при дополнительных условиях: из A_1 в B_2 должно быть перевезено не менее 50 ед. груза, из A_3 в B_5 – не менее 60 ед. груза, а из A_2 в B_4 – не более 40 ед. груза.

Таблица 2.1

Пункты отправления	Пункты назначения					Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	5	3	2	4	8	160
A_2	7	6	5	3	1	90
A_3	8	9	4	5	2	140
Потребности	90	60	80	70	90	390

Решение. Так как из A_1 в B_2 и A_3 в B_5 необходимо завести не менее 50 и 60 ед. груза соответственно, то запасы этих пунктов отправления и потребности пунктов назначения считаем меньшими соответственно на 50 и 60 ед. (табл. 2.2). Корме того, поскольку из A_2 в B_4 необходимо завести не более 40 ед. груза, то рассмотрим дополнительный пункт назначения B_4^1 с потребностями, равными 70-40=30 ед., а потребности пункта B_4 считаем равными 40 ед. В столбце B_4^1 записываем тарифы, помещенные в клетках столбца B4 , за исключением клетки A_2 B_4.

В этой клетке тариф полагаем равным некоторому, сколь угодно большому числу М. В результате получаем транспортную задачу, исходные данные которой записаны в табл. 2.2

Таблица 2.2

Пункты отправления	Пункты назначения						Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_4^1	
A_1	*5*	*3* **30**	*2* **80**	*4*	*8*	*4*	110
A_2	*7* **20**	*6*	*5*	*3* **40**	*1* **30**	*M*	90
A_3	*8* **20**	*9* **30**	*4*	*5*	*2*	*5* **30**	80
Потребности	40	60	80	40	30	30	280

Таблица 2.3

Пункты отправления	Пункты назначения						Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_4^1	
A_1	*5* **20**	*3* **60**	*2* **30**	*4*	*8* -9	*4* -1	110
A_2	*7* **20**	*6* -1	*5* -1	*3* **40**	*1* **30**	*M* -M	90
A_3	*8* 1	*9* 4	*4* **50**	*5* -2	*2* -1	*5* **30**	80
Потребности	40	60	80	40	30	30	280

Данную задачу решаем методом потенциалов. Найденное решение приведено в табл. 2.3. Добавляем в план перевозок удаленные 50ед. в A_1B_2 и 60ед. в A_3B_5 , столбцы B_4^1 и B_4 объединяем. Оптимальное решение исходной задачи

$$X^* = \begin{pmatrix} 70 & 60 & 30 & 0 & 0 \\ 20 & 0 & 0 & 40 & 30 \\ 0 & 0 & 50 & 30 & 60 \end{pmatrix}$$

При таком плане перевозок общая стоимость перевозок является минимальной S=1350.

Задачи для самостоятельного решения

Задача №1

В индустриальном районе расположено три предприятия, выпускающих некоторую продукцию, соответственно в количестве 160, 400, 240 ед., которые удовлетворяют потребности четырёх потребителей в размере 160, 200, 150, 220 ед. продукции. Объёмы поставок с 3-го предприятия 2-му потребителю составляют не менее 150 ед., а с 1- го предприятия 1–му потребителю - более 100 ед. Со 2-го предприятия продукция вывозится полностью. Приведена следующая матрица тарифов:

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 7 & 11 \\ 14 & 3 & 1 & 8 \\ 9 & 5 & 16 & 7 \end{pmatrix}$$

Определить минимальный план перевозок.

Ответ:

без ограничений:

$$X = \begin{pmatrix} 160 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 200 & 150 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 220 \end{pmatrix}$$

$S(X)=3170$

с ограничениями:

$$Y = \begin{pmatrix} 150 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 150 & 150 \\ 10 & 100 & 0 & 70 \end{pmatrix}$$

$S(Y)=3180$,

с 1-го предприятия не вывезено 10ед. продукции, а с 3-го 60ед.

Задача №2

На строительном полигоне имеется три кирпичных завода, объём производства которых соответственно равен 100, 400 и 240 т. в сутки. Эти заводы удовлетворяют потребности четырёх строительных объектов соответственно в количестве 180, 200, 180 и 240 т. Причём, потребности 1-го строительного объекта удовлетворены полностью, со 2–го завода на 1-ый строительный объект перевозится не более 150 т., а с 3-го завода на 4-ый объект – не менее 150 т. Имеется следующая матрица тарифов:

$$C = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 5 & 3 \\ 11 & 5 & 8 & 9 \\ 7 & 12 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Определить минимальный план перевозок.

Ответ:

без ограничений: с ограничениями:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 100 \\ 120 & 200 & 80 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 140 \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 10 & 90 \\ 150 & 200 & 50 & 0 \\ 30 & 0 & 60 & 150 \end{pmatrix}$$

S(X)=3840 S(Y)=4060,

на 3-й строительный объект не завезено 60т. кирпича.

Задача №3

На трёх складах оптовой базы сосредоточена крупа в количествах, равных соответственно 120, 200, 180 т. Эту крупу необходимо завезти в четыре магазина, каждый из которых должен получить соответственно 100, 120, 80 и 150 т. Со 2-го склада во 2-ой магазин должно быть завезено не менее 110 т. крупы, а в 1-ый магазин с 1-го склада не превышает 10 т. крупы, кроме того, с 3-го склада крупа вывезена вся. Дана следующая матрица тарифов:

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 10 & 15 \\ 3 & 3 & 18 & 7 \\ 13 & 12 & 21 & 7 \end{pmatrix}$$

Определить оптимальный план доставки крупы.

Ответ:

без ограничений: с ограничениями:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 40 & 80 & 0 \\ 100 & 80 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 150 \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 80 & 0 \\ 70 & 110 & 0 & 0 \\ 30 & 0 & 0 & 150 \end{pmatrix}$$

S(X)=2470 S(Y)=2800,

с 1-го склада не вывезено 30т., а на 2-ом складе осталось 20т.

Задача №4

В соответствии с планом автомобильных перевозок в 1 смену необходимо с трёх предприятий вывести некоторый груз, 80, 150 и 120 ед. соответственно, и доставить его четырём потребителям в объёме 70, 120, 100 и 110 ед. Известно, что 2 –ой потребитель получил всю заказанную продукцию; с 1-го предприятия 3-му потребителю доставляется не менее 50 ед. груза, а 2-ой потребитель получает со 2-го предприятия не более 20ед. Стоимость перевозки 1 ед. груза приведена в виде следующей матрицы:

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 3 & 11 \\ 10 & 21 & 5 & 8 \\ 8 & 14 & 17 & 5 \end{pmatrix}$$

Необходимо составить план работы автомобилей, позволяющий вывезти в течение смены запланированные грузы, затратив минимум средств.

Ответ:

без ограничений:

$$X = \begin{pmatrix} 10 & 70 & 0 & 0 \\ 50 & 0 & 100 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & 110 \end{pmatrix}$$

S(X)=2160

с ограничениями:

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 30 & 50 & 0 \\ 20 & 70 & 50 & 10 \\ 0 & 20 & 0 & 100 \end{pmatrix}$$

S(Y)=3060,

1-й потребитель не дополучил 50 ед. груза.

Задача №5

На пяти заводах имеется 150, 100, 100, 140 и 150 т. шихты соответственно, которую необходимо загрузить в три имеющиеся доменные печи в количестве 300, 150 и 250 т.

Необходимо, чтобы 3-я печь была загружена полностью, 2-ой завод доставил для 2-ой печи не менее 100 т. шихты, а шихта с 5-ого завода не должна загружаться в 1-ю доменную печь. Имеется следующая матрица тарифов:

$$C = \begin{pmatrix} 20 & 14 & 25 \\ 3 & 3 & 11 \\ 9 & 12 & 16 \\ 15 & 20 & 19 \\ 35 & 46 & 48 \end{pmatrix}$$

Определить оптимальный план доставки шихты к печам.

Ответ:

без ограничений: с ограничениями:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 150 & 0 \\ 100 & 0 & 0 \\ 50 & 0 & 50 \\ 0 & 0 & 140 \\ 150 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} 100 & 50 & 0 \\ 0 & 100 & 0 \\ 100 & 0 & 0 \\ 40 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 150 \end{pmatrix}$$

S(X)=11560 S(Y)=13150,

в 1-ую печь не загружено 60 т. шихты.

Задача №6

На 4 –х животноводческих фермах содержится крупный рогатый скот. Поголовье скота для продажи на каждой из ферм составляет 180, 200, 180 и 240. Необходимо доставить скот трём заказчикам в количестве 100, 400 и 240 голов. Причём, заранее оговорено, что с 1-ой фермы скот будет вывезен весь, а 3-я ферма доставит 2-му заказчику 50 голов скота, 3- й же заказчик требует с 4- ой фермы не менее 200 голов. Имеется следующая матрица тарифов по перевозке крупного рогатого скота с животноводческих ферм:

$$C = \begin{pmatrix} 10 & 11 & 7 \\ 4 & 5 & 12 \\ 5 & 8 & 3 \\ 3 & 9 & 2 \end{pmatrix}$$

Определить оптимальный план перевозок, чтобы затраты по доставке были минимальны.

Ответ:

без ограничений: с ограничениями:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 120 & 0 \\ 0 & 200 & 0 \\ 0 & 80 & 100 \\ 100 & 0 & 140 \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} 0 & 150 & 30 \\ 0 & 200 & 0 \\ 60 & 50 & 10 \\ 40 & 0 & 200 \end{pmatrix}$$

$$S(X)=2940 \qquad\qquad S(Y)=4140,$$

с 3-й фермы не вывезено голов скота.

Задача №7

На трёх железнодорожных станциях скопилось 250, 350 и 300 незагруженных вагонов. Эти вагоны необходимо перегнать в четыре цеха. В каждом из этих цехов потребность в вагонах соответственно равна 180, 220, 200 и 250. Учитывая, что с 3-ей железнодорожной станции в 4-ый цех необходимо перегнать не более 150 вагонов, а с 1-ой железнодорожной станции во 2-ой цех предоставляется возможным перегнать не менее 100 вагонов и на 3-ей станции вообще не осталось поездов, составить такой план перегонок вагонов, чтобы общая стоимость была минимальной. Тарифы перегонки одного вагона определяются матрицей:

$$C=\begin{pmatrix} 8 & 3 & 11 & 4 \\ 18 & 4 & 6 & 7 \\ 20 & 9 & 12 & 9 \end{pmatrix}.$$

Ответ:

без ограничений: с ограничениями:

$$X=\begin{pmatrix} 180 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 150 & 200 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 250 \end{pmatrix} \qquad Y=\begin{pmatrix} 150 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 200 & 100 \\ 30 & 120 & 0 & 150 \end{pmatrix}$$

$$S(X)=5700 \qquad\qquad S(Y)=7630,$$

во 2-ой цех не перегнали 50 вагонов.

Задача №8

Три предприятия, находящиеся в разных городах, располагают компьютерным оборудованием в количестве 80, 150 и 120 ед. На это оборудование поступил заказ от четырёх фирм: 70, 120, 105 и 105 ед. С заказчиками оговорено, что 3-ие предприятие поставляет 1-ой фирме не менее 50 ед. оборудования, 1-ое предприятие предоставляет 4-ой фирме не более 50 ед., и, кроме того, запрос 2-ой фирмы на оборудование должен быть удовлетворён полностью. Стоимость доставки 1ед. компьютерного оборудования дана в виде матрицы тарифов:

$$C = \begin{pmatrix} 13 & 8 & 15 & 5 \\ 20 & 10 & 7 & 1 \\ 3 & 5 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

Составить план доставки оборудования так, чтобы стоимость была минимальной.

Ответ:

без ограничений:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 80 \\ 0 & 45 & 105 & 0 \\ 70 & 25 & 0 & 25 \end{pmatrix}$$

S(X)=2020

с ограничениями:

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 30 & 0 & 50 \\ 0 & 45 & 105 & 0 \\ 70 & 45 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

S(Y)=2130,

4-ая фирма осталась без 50 ед. оборудования.

Задача №9

На 4-ёх аэродромах имеется 100, 120, 80 и 150 истребителей. Необходимо переправить их на три военные базы в количестве 120, 200 и 180. Необходимо, чтобы запрос 3-ей базы был удовлетворён полностью, причём, на эту базу должно быть переправлено не более 100 истребителей с 4-го аэродрома, а со 2-го аэродрома на 2-ую базу истребители переправлять запрещено. Время переправки одного истребителя преведено в виде матрицы:

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 13 \\ 2 & 3 & 12 \\ 10 & 18 & 21 \\ 15 & 7 & 7 \end{pmatrix}.$$

Составить план переправки истребителей так, чтобы время переправки было минимальным.

Ответ:

без ограничений:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 100 & 0 \\ 40 & 80 & 0 \\ 80 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 150 \end{pmatrix}$$

S(X)=2470

с ограничениями:

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 100 & 0 \\ 40 & 0 & 80 \\ 80 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 100 \end{pmatrix}$$

S(Y)=3190,

на 2-ую базу не переправлено 50 истребителей.

Задача №10

В трёх магазинах в продаже имеется краска в количестве 100, 400 и 200 банок соответственно. От четырёх строительных компаний поступили заказы на поставку этого вида товара в количестве 140, 200, 180 и 240 банок. Заказ 1-ой строительной компании должен быть удовлетворён полностью, 1-ый магазин поставляет 2-ой компании не менее 50 банок краски, а 2-ой поставляет 1-му не более 100 банок. Стоимость перевозок представлена матрицей тарифов:

$$C = \begin{pmatrix} 12 & 6 & 7 & 5 \\ 13 & 7 & 10 & 11 \\ 9 & 14 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Составить план доставки продукции, чтобы стоимость была минимальной.

Ответ:

без ограничений:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 100 \\ 80 & 200 & 120 & 0 \\ 0 & 0 & 60 & 140 \end{pmatrix}$$

$S(X)=5000$

с ограничениями:

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 50 & 0 & 50 \\ 100 & 150 & 150 & 0 \\ 40 & 0 & 0 & 160 \end{pmatrix}$$

$S(Y)=7020$,

3-ей и 4-ой компаниям не доставлено по 30 банок краски.

Задача №11

В четырёх портах стоит на приколе 70, 120, 100 и 110 кораблей соответственно, которые необходимо переправить в три дока для ремонта. Каждый из трёх доков может принять сразу 80, 150 и 120 кораблей соответственно.

Из 2-го порта все корабли необходимо перегнать, из 3-го порта во 2-ой док возможно перегнать всего 20 кораблей, а 1-ый док может принимать не менее 50 кораблей из 1-го порта. Стоимость переправки одного корабля дана в виде матрицы:

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 10 & 8 \\ 7 & 21 & 14 \\ 3 & 5 & 17 \\ 11 & 8 & 5 \end{pmatrix}.$$

Определить план переправки судов, при условии, что стоимость переправки минимальна.

Ответ:

без ограничений:

$$X = \begin{pmatrix} 10 & 50 & 10 \\ 70 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 110 \end{pmatrix}$$

S(X)=2160

с ограничениями:

$$Y = \begin{pmatrix} 50 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 120 \\ 30 & 20 & 0 \\ 0 & 110 & 0 \end{pmatrix}$$

S(Y)=3150,

в 3-ем порту оста лось 50 кораблей.

Задача №12

На трёх заводах фирмы “BMV” имеется 300, 150 и 250 машин готовых к продаже. Необходимо перегнать их на пять авторынков в количестве 150, 100,100,140 и 150 машин соответственно. С 3-го завода необходимо перегнать все машины, с 1-го завода на 5-ый рынок должно быть доставлено не более 100 машин, а с 3-го завода на 2-ой рынок – не менее 50. Матрица стоимости переправки 1 машины следующая:

$$C = \begin{pmatrix} 20 & 3 & 9 & 15 & 35 \\ 14 & 3 & 12 & 20 & 46 \\ 25 & 11 & 16 & 19 & 48 \end{pmatrix}.$$

Определить оптимальный план перегонки машин.

Ответ:

без ограничений:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 100 & 50 & 0 & 150 \\ 150 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 50 & 140 & 0 \end{pmatrix}$$

с ограничениями:

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 50 & 90 & 0 & 100 \\ 150 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 10 & 140 & 50 \end{pmatrix}$$

$S(X)=11560$ $\qquad\qquad$ $S(Y)=12330$,
на 1-ом заводе оста лось 60 машин.

Задача №13

Четыре птицефермы держат 180, 220, 200 и 250 кур, которых нужно развести по трём разным магазинам в количестве 250, 350 и 300 штук. Заказ 3-го магазина должен быть удовлетворён полностью и с 4-ой птицефермы сюда должно быть завезено не более 150 кур, а со 2-ой птицефермы во 2-ой магазин куры не поставляются. Матрица тарифов по перевозке птицы имеет вид:

$$C = \begin{pmatrix} 8 & 18 & 20 \\ 3 & 4 & 9 \\ 11 & 6 & 12 \\ 4 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

Определить оптимальный план доставки кур.

Ответ:

без ограничений: $\qquad\qquad$ с ограничениями:

$$X = \begin{pmatrix} 180 & 0 & 0 \\ 70 & 150 & 0 \\ 0 & 200 & 0 \\ 0 & 0 & 250 \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} 180 & 0 & 0 \\ 70 & 0 & 150 \\ 0 & 200 & 0 \\ 0 & 100 & 150 \end{pmatrix}$$

$S(X)=5700$ $\qquad\qquad$ $S(Y)=6250$,

во 2-ой магазин не за везено 50 кур.

Задача №14

На трёх цементных заводах имеется 100, 150 и 150 мешков цемента, который необходимо доставить на четыре строительные площадки: 100, 160, 90 и 80 мешков соответственно. Со 2-го завода на1-ую строительную площадку доставляется не менее 100 мешков цемента, с 3-го завода на 4-ую площадку – не более 50 мешков, и, кроме того, потребности 1-ой и 4-ой строительных площадок должны быть удовлетворены полностью. Стоимость перевозки 1 мешка с цементом сведена в следующую матрицу:

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 9 & 15 \\ 3 & 10 & 12 & 20 \\ 15 & 11 & 6 & 12 \end{pmatrix}.$$

Определить оптимальный план доставки цемента на стройплощадки.

Ответ:

без ограничений: с ограничениями:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 100 & 0 & 0 \\ 100 & 50 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 90 & 50 \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} 0 & 100 & 0 & 0 \\ 100 & 20 & 0 & 30 \\ 0 & 10 & 90 & 50 \end{pmatrix}$$

S(X)=2350 S(Y)=2650,

на 2-ую стройплощадку не доставлено 30 мешков.

Задача №15

На четырёх предприятиях фирмы "IBM" имеется 160, 20, 150 и 220 мониторов, которые необходимо перевести в три разных города в количестве 160, 400 и 240 мониторов соответственно. Известно, что во 2-ой город нужно доставить всё необходимое количество мониторов, с 1-го предприятия в 1-ый город надо завести не более 140 мониторов, а с 4-го предприятия во 2-ой город можно доставить лишь 20 мониторов. Матрица тарифов по стоимости перевозок имеет вид:

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 14 & 9 \\ 8 & 3 & 5 \\ 7 & 1 & 16 \\ 11 & 8 & 7 \end{pmatrix}.$$

Определить план доставки мониторов, чтобы общая стоимость доставки была минимальной.

Ответ:

без ограничений: с ограничениями:

$$X = \begin{pmatrix} 160 & 0 & 0 \\ 0 & 200 & 0 \\ 0 & 150 & 0 \\ 0 & 0 & 220 \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} 130 & 30 & 0 \\ 0 & 200 & 0 \\ 0 & 150 & 0 \\ 0 & 20 & 200 \end{pmatrix}$$

S(X)=2770 S(Y)=3120,

в 1-ый город не доставлено 30 мониторов, а в 3-ий- 40.

Задача № 16

В трёх цветочных салонах имеется 250, 140 и 250 одинаковых букетов, которые должны быть доставлены в четыре банкетных зала: 120, 230, 190 и 160 букетов соответственно. Во 2-ой и 4-ый банкетный залы необходимо доставить все букеты, из 3-го салона в 3-ий банкетный зал будет завезено не более 100 букетов, а во 2-ой зал должно быть доставлено не менее 150 букетов из 1-го салона. Матрица тарифов по доставке цветов имеет вид:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 11 & 5 \\ 8 & 7 & 13 & 7 \\ 14 & 10 & 5 & 8 \end{pmatrix}.$$

Определить оптимальный план доставки букетов.

Ответ:

без ограничений:

$$X = \begin{pmatrix} 120 & 130 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 190 & 60 \end{pmatrix}$$

S(X)=3170

с ограничениями:

$$Y = \begin{pmatrix} 100 & 150 & 0 & 0 \\ 20 & 80 & 30 & 10 \\ 0 & 0 & 100 & 150 \end{pmatrix}$$

S(Y)=3680,

в 3-й банкетный Зал не доставлено 60 букетов.

Задача №17

В 4-х салонах модной одежды имеется 140, 200, 180 и 240 костюмов. Поступил заказ от 3-х клиентов. Костюмы заказаны в количестве 100, 400 и 200 штук. Из 1-го салона должны быть вывезены все костюмы, из 2-го салона 1-му клиенту необходимо доставить не менее 100 костюмов, а из 1-го салона 2-му клиенту доставка товара запрещена. Имеется матрица тарифов по доставке костюмов:

$$C = \begin{pmatrix} 12 & 13 & 9 \\ 6 & 7 & 14 \\ 7 & 10 & 5 \\ 5 & 11 & 4 \end{pmatrix}.$$

Определить оптимальный план доставок.

Ответ:

без ограничений: с ограничениями:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 80 & 0 \\ 0 & 200 & 0 \\ 0 & 120 & 60 \\ 100 & 0 & 140 \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 140 \\ 100 & 100 & 0 \\ 0 & 180 & 0 \\ 0 & 120 & 60 \end{pmatrix}$$

S(X)=5000 S(Y)=5920,

в 4-ом салоне осталось 60 букетов.

Задача №18

На 3-ёх складах фирмы “Sony” находится некоторая техника, которую необходимо доставить в четыре магазина в количестве 300, 280, 330 и 290 ед. Во 2-ой магазин должна быть завезена вся техника, со 2-го склада в 3-ий магазин поставка товара не превышает 250 ед., а с 3-го склада 1-му магазину поставляется не менее 150 ед. оборудования. Затраты по доставке оборудования сведены в матрицу тарифов:

$$C = \begin{pmatrix} 18 & 16 & 12 & 3 \\ 7 & 11 & 9 & 5 \\ 4 & 8 & 15 & 6 \end{pmatrix}.$$

Определить оптимальны план доставки оборудования.

Ответ:

без ограничений: с ограничениями:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 10 & 290 \\ 130 & 0 & 320 & 0 \\ 170 & 230 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 30 & 270 \\ 150 & 30 & 250 & 20 \\ 150 & 250 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

S(X)=7180 S(Y)=8000,

в 3-ий магазин не доставлено 30 ед. оборудования.

Задача №19

На 4-ёх оружейных складах имеется 70, 120, 105 и 105 автоматов, которые должны быть доставлены в три “ горячие точки” в количестве 80, 150 и 120 ед. Со 2-го склада вывозится всё имеющееся оружие, с 4-го склада в 3-тью “ горячую точку” должно быть доставлено не более 50 автоматов, а доставка оружия со 2-го склада во 2-ую “ горячую точку” неосуществима. Стоимость доставки одного орудия преведена в следующей матрице:

$$C = \begin{pmatrix} 13 & 20 & 3 \\ 8 & 10 & 5 \\ 15 & 7 & 8 \\ 5 & 11 & 4 \end{pmatrix}.$$

Определить оптимальный план доставки оружия в “ горячие точки”.

Ответ:

без ограничений:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 70 \\ 0 & 45 & 25 \\ 0 & 105 & 0 \\ 80 & 0 & 25 \end{pmatrix}$$

S(X)=2020

с ограничениями:

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 20 \\ 70 & 0 & 50 \\ 0 & 105 & 0 \\ 10 & 45 & 50 \end{pmatrix}$$

S(Y)=2350,

на 1-ом складе осталось 50 ед. оружия.

Задача №20

На 4-ёх золотых приисках имеется золото в количестве 100, 160, 90 и 80 кг. соответственно. Его необходимо доставить в три разные лаборатории на анализ: 100, 150 и 150 кг. соответственно. С 3-го прииска во 2-ую лабораторию возможно перевести лишь 20 кг. золота, со 2-го прииска в 1-ую лабораторию можно доставить не более 90 кг., кроме того, с 4-го прииска золото должно быть вывезено целиком. Имеется матрица тарифов:

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 15 \\ 3 & 10 & 11 \\ 9 & 12 & 6 \\ 15 & 20 & 12 \end{pmatrix}.$$

Составить минимальный план перевозки золота.

Ответ:

без ограничений: с ограничениями:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 100 & 0 \\ 100 & 50 & 10 \\ 0 & 0 & 90 \\ 0 & 0 & 50 \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} 10 & 90 & 0 \\ 90 & 40 & 0 \\ 0 & 20 & 70 \\ 0 & 0 & 80 \end{pmatrix}$$

$S(X)=2350 \qquad S(Y)=2630,$

на 2-ом прииске осталось 30 кг. золота.

Задача №21

На трёх горнодобывающих предприятиях сосредоточены запасы руды в размере 105, 165 и 180 т. От четырёх заводов поступили заказы на руду: 90, 120, 100 и 110 т. соответственно. Причём было заранее оговорено, что со 2-го предприятия на 4-ый завод будет доставлено не менее 50 т. руды, с 1-ое предприятие доставит 3-ему заводу ен более 90 т. руды, необходимо, чтобы с 1-го и 3-го предприятий руда была вывезена полностью.
Матрица тарифов следующая:

$$C = \begin{pmatrix} 12 & 9 & 7 & 11 \\ 4 & 3 & 12 & 2 \\ 5 & 17 & 9 & 4 \end{pmatrix}.$$

Определить минимальный по стоимости план доставки руды на заводы.

Ответ:

без ограничений: с ограничениями:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 120 & 0 & 45 \\ 90 & 0 & 0 & 65 \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} 0 & 35 & 70 & 0 \\ 0 & 85 & 0 & 50 \\ 90 & 0 & 30 & 60 \end{pmatrix}$$

$S(X)=1860 \qquad S(Y)=2120,$

на 3-м предприятии осталось 30 т. руды.

Задача №22

В трёх магазинах детских игрушек имеется 180, 100 и 200 велосипедов, которые необходимо доставить в четыре детских садика в количестве 100, 160, 110 и 80 штук соответственно. Из 3-го магазина должны быть вывезены все велосипеды, в 3-ий садик из 3-го магазина поставляется не более 90 велосипедов, а во 2-ой детский сад из 1-го магазина будет завезено не менее 100. Стоимость доставки 1 велосипеда приведена в матрице тарифов:

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 14 & 10 \\ 8 & 4 & 6 & 14 \\ 11 & 11 & 7 & 15 \end{pmatrix}.$$

Определить оптимальный план доставки велосипедов.
Ответ:

без ограничений: с ограничениями:

$$X = \begin{pmatrix} 100 & 60 & 0 & 20 \\ 0 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 110 & 60 \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} 70 & 110 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 20 & 0 \\ 30 & 0 & 90 & 80 \end{pmatrix}$$

S(X)=3010 S(Y)=3270,

во 2-м магазине 30 велосипедов остались невостребованными.

Задача №23

На четырёх складах оптовой базы сосредоточена мука в количествах, равных соответственно 120, 230, 190 и 160 т. Эту муку необходимо завезти в три хлебопекарни , каждая из которых должна получить соответственно 250, 140 и 250 т. С 1-го склада в 1-ую хлебопекарню должно быть завезено не менее 80 т. муки, а во 2-ую хлебопекарню с 3-го склада перевозка запрещена, кроме того, со 2-го и 4-го складов мука вывезена вся.

Дана следующая матрица тарифов:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 14 \\ 4 & 7 & 10 \\ 11 & 13 & 5 \\ 5 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Определить оптимальный план доставки муки.

Ответ:

без ограничений: с ограничениями:

$$X = \begin{pmatrix} 120 & 0 & 0 \\ 130 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & 190 \\ 0 & 100 & 60 \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} 80 & 0 & 0 \\ 40 & 170 & 60 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 170 & 20 \end{pmatrix}$$

S(X)=3170 S(Y)=3310,

на 1-ом складе осталось 40 т. муки, а на 3-ем –20т.

Задача №24

В трёх автопарках скопилось 130, 200 и 190 незагруженных самосвалов. Эти самосвалы необходимо перегнать в четыре цеха . В каждом из этих цехов потребность в камазах соответственно равна 100, 90, 160 и 150. Учитывая, что из 2-го автопарка во 2-ой цех необходимо перегнать не более 50 камазов, а из 1-го в 3-ий цех предоставляется возможным перегнать не менее 20 камазов, и в 3-ем автопарке вообще не остаётся камазов, составить такой план перегонок камазов, чтобы общая стоимость была минимальной. Тарифы перегонки одного камаза определяются матрицей:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 15 & 14 \\ 3 & 7 & 12 & 3 \\ 21 & 18 & 6 & 13 \end{pmatrix}$$

Ответ:

без ограничений: с ограничениями:

$$X = \begin{pmatrix} 100 & 30 & 0 & 0 \\ 0 & 60 & 0 & 140 \\ 0 & 0 & 160 & 10 \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} 100 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 50 & 0 & 140 \\ 0 & 40 & 140 & 10 \end{pmatrix}$$

S(X)=2430 S(Y)=2960,

в 1-ом и 2-ом автопарках осталось по 10 камазов.

Задача №25

В индустриальном районе расположено четыре мебельных фабрики, выпускающих мягкие уголки, соответственно в количестве 300, 280, 330 и 290 штук., которые удовлетворяют потребности трёх потребителей в размере 300, 450, 400 штук. Объёмы поставок с 1-ой мебельной фабрики 2-му потребителю составляют не более 100 штук, а с 3-ей фабрики 1–му потребителю поставка мягких уголков запрещена. Со 2-ой мебельной фабрики продукция вывозится полностью. Приведена следующая матрица тарифов:

$$C = \begin{pmatrix} 16 & 7 & 4 \\ 16 & 11 & 8 \\ 12 & 9 & 15 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Определить минимальный план перевозок.

Ответ:

без ограничений:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 300 \\ 0 & 130 & 100 \\ 10 & 320 & 0 \\ 290 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

S(X)=7300

с ограничениями:

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 100 & 200 \\ 10 & 70 & 200 \\ 0 & 280 & 0 \\ 290 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

S(Y)=7420,

на 3-й мебельной фабрике осталось 50 мягких уголков.

Задача №26

В 3-ёх обувных магазинах имеется 100, 200 и 180 пар женской обуви. Поступил заказ от 4-ёх клиентов. Обувь заказана в количестве 100, 90, 160 и 150 пар. Из 3-го обувного магазина должна быть вывезена вся обувь, из 2-го магазина 2-му клиенту необходимо доставить не менее 20 пар обуви, а из 3-го обувного магазина 1-му клиенту доставляется не более 50 пар обуви. Имеется матрица тарифов по доставке товара:

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 14 & 6 \\ 11 & 11 & 15 & 7 \\ 4 & 5 & 10 & 14 \end{pmatrix}.$$

Определить оптимальный план доставок.

Ответ:

без ограничений:

$$X = \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 60 & 110 \\ 60 & 100 & 20 & 0 \end{pmatrix}$$

S(X)=2830

с ограничениями:

$$Y = \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 20 & 60 & 110 \\ 50 & 80 & 20 & 0 \end{pmatrix}$$

S(Y)=3200,

в 3-ем обувном магазине осталось 30 пар обуви.

Задача №27

Четыре предприятия, находящиеся в разных городах, имеют некоторый вид бытовой техники в количестве 90, 120, 100 и 110 партий. На эту бытовую технику поступил заказ от трёх фирм: 105, 165 и 180 партий. С заказчиками оговорено, что 1-ое предприятие поставляет 2-ой фирме не менее 50 партий техники, 2-ое предприятие не поставляет 1-ой фирме технику вообще, и, кроме того, запрос 3-ей фирмы на бытовую технику должен быть удовлетворён полностью. Стоимость доставки 1 партии дана в виде матрицы тарифов:

$$C = \begin{pmatrix} 12 & 4 & 5 \\ 9 & 3 & 17 \\ 7 & 12 & 9 \\ 11 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Составить план доставки бытовой техники так, чтобы стоимость была минимальной

Ответ:

без ограничений:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 90 \\ 0 & 120 & 0 \\ 100 & 0 & 0 \\ 0 & 45 & 65 \end{pmatrix}$$

S(X)=1860

с ограничениями:

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 50 & 40 \\ 75 & 45 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \\ 0 & 70 & 40 \end{pmatrix}$$

S(Y)=2410,

в 1-ую фирму не завезено 30 партий бытовой техники.

Задача №28

В четырёх магазинах в продаже имеются стеклопакеты в количестве 100, 160, 110 и 80 единиц соответственно. От трёх строительных компаний поступили заказы на поставку этого вида товара в количестве 180, 100 и 200 единиц стеклопакетов. Заказ 3-ей строительной компании должен быть удовлетворён полностью, 1-ый магазин поставляет 2-ой компании не менее 20 единиц стеклопакетов, а 2-ой поставляет 1-му ровно 50 единиц этого вида продукции. Стоимость перевозок представлена матрицей тарифов:

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 11 \\ 4 & 4 & 11 \\ 19 & 6 & 7 \\ 10 & 14 & 15 \end{pmatrix}.$$

Определить оптимальный план поставок стеклопакетов.

Ответ:

без ограничений:

$$X = \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 60 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 110 \\ 20 & 0 & 60 \end{pmatrix}$$

S(X)=2610

с ограничениями:

$$Y = \begin{pmatrix} 80 & 20 & 0 \\ 50 & 80 & 30 \\ 0 & 0 & 110 \\ 20 & 0 & 60 \end{pmatrix}$$

S(Y)=3280,

1-ая компания не получила 30 единиц стеклопакетов.

Задача №29

Из четырёх типографий различных городов почтовыми самолётами развозится 100, 90, 160 и 150 партий книг, которые необходимо доставить в библиотеки трёх других городов в количестве 130, 200 и 190 партий. Необходимо, чтобы в библиотеку 3-го города поступило всё требуемое количество книг, из типографии 1-го города во 2-ую библиотеку доставляют не менее 20 партий книг, а из типографии 2-го города не должны поставляться книги в библиотеку 1-гогорода. Имеется следующая матрица тарифов:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 21 \\ 10 & 7 & 18 \\ 15 & 12 & 6 \\ 14 & 3 & 13 \end{pmatrix}.$$

Определить оптимальный план перевозок.

Ответ:

без ограничений: с ограничениями:

$$X = \begin{pmatrix} 30 & 60 & 0 \\ 0 & 0 & 160 \\ 0 & 140 & 10 \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} 0 & 90 & 0 \\ 0 & 0 & 160 \\ 30 & 90 & 30 \end{pmatrix}$$

S(X)=2430 S(Y)=2890,

в библиотеку 2-ого города не доставлено 20 партий книг.

Задача №30

На четырёх заводах фирмы "Opel" имеется 160, 100, 80 и 110 автомобилей готовых к продаже. Необходимо перегнать их на три авторынка в количестве 100, 200 и 180 соответственно. Со 2-го завода необходимо перегнать на 1-ый авторынок не более 50 автомобилей, с 1-го завода на 1-ый рынок перегнать автомобили не имеется возможности, а на 2-ой авторынок необходимо доставить все требуемые автомобили. Матрица стоимости переправки 1 автомобиля

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 11 & 4 \\ 8 & 11 & 5 \\ 14 & 15 & 10 \\ 6 & 7 & 14 \end{pmatrix}.$$

Определить оптимальный план перегонки автомобилей.

Ответ:

без ограничений: с ограничениями:

$$X = \begin{pmatrix} 100 & 0 & 60 \\ 0 & 0 & 100 \\ 0 & 60 & 20 \\ 0 & 110 & 0 \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 160 \\ 50 & 30 & 20 \\ 20 & 60 & 0 \\ 0 & 110 & 0 \end{pmatrix}$$

S(X)=3010 S(Y)=3420,

на 1-ый авторынок не перегнали 30 автомобилей.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Акулич И.Л.. Математическое программирование в примерах и задачах. М., «Высшая школа», 1986.
2. Б. Банди. Основы линейного программирования. М. «Радио и связь»,1989.
3. Юдин Д.Б., Гольштейн Е.Г.. Задачи и методы линейного программирования., «Советское радио», 1964.
4. Юдин Д.Б., Гольштейн Е.Г.. Новые направления в линейном программировании. «Советское радио», 1966.
5. Ю.Н. Кузнецов, В.И. Кузубов, А.Б. Волощенко. " Математическое программирование". Учеб. пособие для вузов. М., " Высшая школа".
6. Исследование операций в экономике. Под. ред. проф. Н.Ш.Кремера., «ЮНИТИ», 1997.
7. Таха Хэмди А. Введение в исследование операций, - М.: Издательский дом «Вильямс», 2001.- 912с.
8. Мальцев Ю.А. Экономико-математические методы проектирования транспортных сооружений: учебник – М.: Издательский центр «Академия», 2010. – 320с.
9. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Математические методы и модели для магистрантов экономики: Уч.пособие. – СПб.: «Питер», 2006. – 798с.
10. Экономико – математическое моделирование: учебник / под. Общ. И.Н. Дрогобыцкого. – М. : «Эзамен», 2006. – 798с.
11. Баранков В.В., Филиппов Е.Г.Кластерный симплекс метод решения задачи одномерного раскроя. Создание и внедрение корпоративных информационных систем (КИС) на промышленных предприятиях РФ. Сб.трудов Международной

научно-технической конференции. Вып.2 ,с.205-211, Магнитогорск 2007