

Министерство образования и науки Российской Федерации
Магнитогорский государственный технический университет
им. Г.И. Носова

А.А. Николаев

ТЕОРИЯ ФИЗИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ

Часть 1

*Утверждено Редакционно-издательским советом
университета в качестве учебного пособия*

Магнитогорск
2015

УДК 537(075.8)
ББК 22.33я7
Н 632

Рецензенты:

*Начальник лаборатории неразрушающего контроля
ЗАО МНТЦ «Диагностика»
С.В. Дурасов*

*Начальник лаборатории дефектоскопии и радиационной безопасности
НТЦ ОАО «ММК»
О.Ю. Шефер*

Николаев, А.А.
Н 632 **Теория физических полей:** учеб. пособие. Часть 1 /
А.А. Николаев. Магнитогорск: Изд-во Магнитогорск. гос. техн.
ун-та им. Г.И. Носова, 2014. 94 с.

Курс «Теория физических полей» является базовым курсом для спецкурсов по каждому виду неразрушающего контроля, для курсов электроники, микропроцессорной техники, расчета и конструирования приборов контроля качества. В пособии рассмотрен материал по электростатике и электрическим полям, магнитостатике, переменному электромагнитному полю и электромагнитным волнам.

Учебное пособие предназначено для обучающихся по направлению «Приборостроение», может быть полезным аспирантам и инженерам, специализирующимся в области разработки приборов неразрушающего контроля и диагностики.

УДК 537(075.8)
ББК 22.33я7

© Магнитогорский государственный
технический университет
им. Г.И. Носова, 2015
© Николаев А.А., 2015

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
1. ФИЗИЧЕСКИЕ ПОЛЯ В НЕРАЗРУШАЮЩЕМ КОНТРОЛЕ.....	6
2. ПОНЯТИЕ ФИЗИЧЕСКОГО ПОЛЯ	11
3. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ	14
3.1. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЗАРЯДОВ.....	15
3.2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ.....	15
3.3. ТЕОРЕМА ГАУССА	17
3.4. ЭЛЕКТРОСТАТИКА ДИЭЛЕКТРИКОВ	19
3.4.1. Свободные и связанные заряды	19
3.4.2. Поляризация вещества	19
3.4.3. Теорема Гаусса для $\mathbf{D}$	21
3.4.4. Поведение вектора поля на границе раздела.....	22
3.4.5. Преломление векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{D}$ на границе двух сред.....	23
3.4.6. Поведение проводников в постоянном электрическом поле	23
3.4.7. Электростатическая экранировка	24
3.4.8. Электрическая емкость	24
4. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ ПОСТОЯННОГО ТОКА В ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЕ.....	25
4.1. ОБОБЩЕННЫЙ ЗАКОН ОМА В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ФОРМЕ	25
4.2. ПЕРВЫЙ ЗАКОН КИРХГОФА В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ФОРМЕ.	26
4.3. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ ВЕКТОРА ПЛОТНОСТИ ТОКА	26
5. МАГНИТОСТАТИКА	27
5.1. ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ ПОСТОЯННОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ	31
5.2. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВЕЩЕСТВЕ.....	33
5.3. СКАЛЯРНЫЙ И ВЕКТОРНЫЙ ПОТЕНЦИАЛЫ МАГНИТНОГО ПОЛЯ	39
5.4. ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ВЕКТОРНОГО ПОТЕНЦИАЛА.....	41
5.4.1. Обобщенный импульс.....	41
5.4.2. Вектор-потенциал и магнитный поток	42
5.5. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ ВЕКТОРОВ $\mathbf{B}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{A}$	42
5.6. МАГНИТНЫЕ ЦЕПИ	45
5.7. ЯВЛЕНИЕ САМОИНДУКЦИИ. ИНДУКТИВНОСТЬ	46
5.8. ЭНЕРГИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ (НА ПРИМЕРЕ УЕДИНЁННОЙ КАТУШКИ).....	47
6. СТАЦИОНАРНОЕ ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ.....	48
6.1. ОСНОВНЫЕ ПАРАМЕТРЫ И ПОНЯТИЯ ТЕПЛОВОГО ПОЛЯ	49
6.1.1. Градиент температуры.....	49
6.1.2. Закон Фурье.....	50
6.1.3. Дифференциальное уравнение теплопроводности.....	50
7. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕМЕННОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ	52

7.1. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА	53
7.2. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА С МАГНИТНЫМИ ТОКАМИ И ЗАРЯДАМИ.....	57
7.3. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА С УЧЕТОМ СТОРОННИХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И МАГНИТНЫХ ТОКОВ И ЗАРЯДОВ.....	58
8. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА В КОМПЛЕКСНЫХ АМПЛИТУДАХ.....	59
8.1. ОБЩИЕ СВОЙСТВА УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА.....	61
8.2. КЛАССИФИКАЦИЯ СРЕД НА ДИЭЛЕКТРИКИ И ПОЛУПРОВОДНИКИ.....	61
8.3. ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ	62
8.3.1. <i>Диэлектрические потери.</i>	69
8.3.2. <i>Переменное электромагнитное поле в однородной изотропной проводящей среде.....</i>	70
8.3.3. <i>Определение плоской волны</i>	71
8.3.4. <i>Распространение электромагнитной волны в однородной, изотропной диэлектрической среде</i>	75
8.3.5. <i>Распространение ЭМ волны в однородных изотропных полупроводящих средах.....</i>	77
8.3.6. <i>Волновые явления на границе раздела двух сред.....</i>	80
9. ЗАПАЗДЫВАЮЩИЕ ПОТЕНЦИАЛЫ ПЕРЕМЕННОГО ЭМ-ПОЛЯ. ИЗЛУЧЕНИЕ ЭМ-ЭНЕРГИИ	84
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	94

ВВЕДЕНИЕ

В основу данного пособия положен рукописный вариант курса лекций по теории физических полей (ТФП), автором которого является доктор физико-математических наук, профессор И.И. Мильман (Екатеринбург, УГТУ-УПИ).

На первом этапе весь материал рукописного курса лекций был распределён между студентами группы АД-09 для создания электронного варианта. Ожидалось, что необходимая редакторская работа сведётся к незначительной правке, исправлению ошибок и т.д. Оказалось, что даже простое приведение материала к виду, удобному для прочтения, требует значительного времени и пристального внимания специалиста. Кроме того, с моей точки зрения, как редактора и такого специалиста, потребовалось включение дополнительного материала к некоторым разделам курса. Из-за недостатка времени удалось подготовить к изданию только первую часть курса, необходимую для начала работы с новым потоком студентов. Вторая часть и дополнительная доводка курса планируются на следующий учебный год (2015–2016).

Учебное пособие предназначено для студентов физических, приборостроительных и машиностроительных специальностей вузов и может быть полезным аспирантам и инженерам, специализирующимся в области разработки приборов неразрушающего контроля и диагностики.

От автора – кандидат физико-математических наук,
доцент **А.А. Николаев**

1. ФИЗИЧЕСКИЕ ПОЛЯ В НЕРАЗРУШАЮЩЕМ КОНТРОЛЕ

Качество и надежность изделия закладывается на стадии его разработки, проектирования и контроля. Поэтому необходимо знать смысл слова «качество».

Качество – способность изделия удовлетворять ряду предъявляемых требований предъявителем для нормальной эксплуатации.

Из физических соображений можно сделать вывод: объект, обладающий *качеством* должен удовлетворять одновременно нескольким физическим требованиям:

- 1) должен иметь постоянный, независящий от времени, химический состав;
- 2) иметь постоянство магнитных и электрических характеристик;
- 3) иметь неизменность геометрических размеров;
- 4) Объект не должен подвергаться коррозии и деформации.

Отсюда видно, какие свойства нужно контролировать (исходя из п. 1–4).

Надежность – способность изделия, объекта, системы сохранять во времени в установленных пределах значения всех параметров, которые характеризуют данный объект. При этом в теории надежности есть понятие «отказ» – отклонение одного из параметров изделия за установленные пределы (рис. 1). Отказ, если ушел хотя бы один параметр.

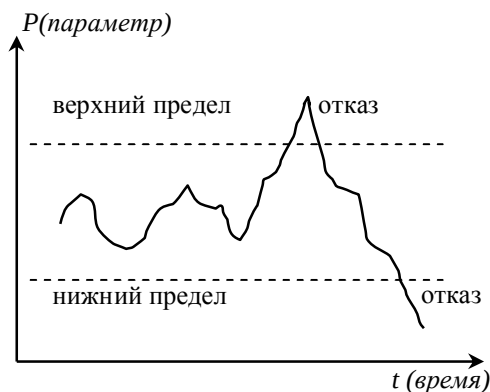


Рис. 1

Кривая отказов получена на основании исследования отказов сложных систем (рис. 2).

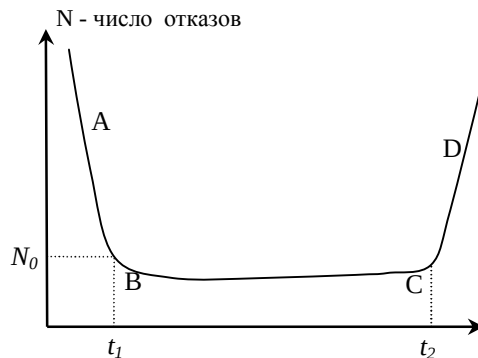


Рис. 2

Максимальное число отказов приходится на начальный этап эксплуатации изделия независимо от его сложности (например, детская заболеваемость).

Участок AB был плохо проконтролирован на стадии разработки (скрытые дефекты).

BC – участок нормального функционирования изделия (после устранения дефектов – AB).

CD – участок, физически связанный со «старением» системы, – участок катастрофических отказов (например, высыхание изоляции, емкостей, обеднения примесей и т.д.).

В кривой отказов плохо то, что участок AB – крутой. Задача – снизить крутизну AB , уровня N_0 , расширение (t_1-t_2) , снижение наклона CD . Все зависит от контроля изделия.

Контроль бывает разрушающий (РК) и неразрушающий (НК). Здесь есть сильные и слабые стороны:

- РК – изделие разрушает (-), но можно применить весь арсенал средств для изучения изделия (+);

- НК – изделие после контроля может функционировать по назначению (+), но контролируется 1-3 параметра этого изделия (-). Когда-то была установлена связь параметра с качеством и, проверяя 1-3 параметра, можно говорить о пригодности изделия.

Предпочтение отдаётся НК, при этом понимая соотношение сильных и слабых сторон в НК и РК.

Пусть изделие понимается как «черный ящик» (модельная ситуация) и необходимо его проконтролировать.

Существует 3 способа контроля:

- 1) Разломать и посмотреть – РК (разрушающий контроль).

2) Поместить «черный ящик» (модельная ситуация) в какое-либо физическое поле и по результатам взаимодействия «черного ящика» с правильно выбранным физическим полем сделать заключение о структуре «черного ящика».

Пример. Допустим, в «черном ящике» существует один трансформатор (рис. 3). Можно подать напряжение U на вход 1, 2 и снять U на выходе 3, 4, и сделать выводы о том, что там находится трансформатор с какими-то соответствующими параметрами.

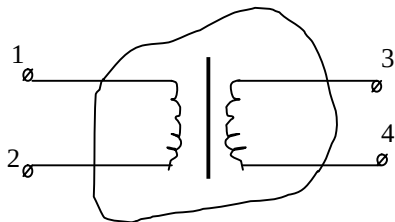


Рис. 3

3) Посмотреть, не является ли «черный ящик» сам объектом какого-либо поля (например, кардиограмма: человек – источник сигнала). Существуют системы – тепловизоры – приборы, позволяющие разделить в пространстве две точки, температуры которых различаются на $0,2^{\circ}\text{C}$. (Изображение по типу телевизионного, но в тепловом контрасте, удобно просматривать точки перегрева в схемах и т.п.).

Чаще всего реализуют (необходимо) способ НК по 2-му типу (взаимодействие поля с объектом).

ГОСТ 18353-73 выделяет десять методов НК, по названию которых можно определить используемое физическое поле:

1. **Акустический вид** неразрушающего контроля основан на регистрации параметров упругих волн, возникающих или возбуждаемых в объекте. Чаще всего используют упругие волны ультразвукового диапазона (с частотой колебаний выше 20 кГц), этот метод называют *ультразвуковым*. В отличие от всех ранее рассмотренных методов здесь применяют и регистрируют не электромагнитные, а упругие волны, параметры которых тесно связаны с такими свойствами материалов, как упругость, плотность, анизотропия (неравномерность свойств по различным направлениям) и др.

Акустические свойства твердых материалов и воздуха настолько сильно отличаются, что акустические волны отражаются от тончайших зазоров (трещин, непроваров) шириной 10^{-6} – 10^{-4} мм. Этот вид контроля применим ко всем материалам, достаточно хорошо проводящим акустические волны: металлам, пластмассам, керамике, бетону и т.д.

По характеру взаимодействия с объектом различают *пассивный* и *активный* методы. Пассивный акустический метод предусматривает регистрацию упругих волн, возникающих в самом объекте. Шумы работающего механизма (особенно, если обеспечить регистрацию таких информативных параметров, как место их возникновения и амплитудно-частотная характеристика) позволяют судить о исправности или неисправности механизма и даже о характере неисправности. Этот пассивный метод акустического контроля называют *шумовибрационным*. Многие машины снабжают датчиками, регистрирующими уровень вибрации определенных узлов и прогнозирующими их работоспособность. Это *вибрационный* метод m-контроля или диагностики.

2. Капиллярные методы основаны на капиллярном проникновении в полость дефекта индикаторной жидкости (керосина, скипидара), хорошо смачивающей материал изделия. Их применяют для обнаружения слабо видимых невооруженным глазом поверхностных дефектов.

3. Магнитный вид неразрушающего контроля основан на анализе взаимодействия магнитного поля с контролируемым объектом. Его, как правило, применяют для контроля объектов из ферромагнитных материалов. По характеру взаимодействия физического поля с объектом этот вид контроля не дифференцируют: во всех случаях используют намагничивание объекта и измеряют параметры, используемые при контроле магнитными методами.

4. Оптический вид неразрушающего контроля основан на наблюдении или регистрации параметров оптического излучения, взаимодействующего с контролируемым объектом. По характеру взаимодействия различают методы *прошедшего, отраженного, рассеянного* и *индуцированного* излучения. Последним термином определяют оптическое излучение объекта под действием внешнего воздействия, например люминесценцию. Первичными информативными параметрами являются амплитуда, фаза, степень поляризации, частота или частотный спектр, время прохождения света через объект, геометрия преломления и отражения лучей.

5. Радиационный вид неразрушающего контроля основан на регистрации и анализе проникающего ионизирующего излучения после взаимодействия его с контролируемым объектом. В зависимости от природы ионизирующего излучения вид контроля подразделяют на подвиды: *рентгеновский, гамма-, бета-* (поток электронов) и *нейтронный* методы контроля. В последнее время находят применение даже потоки позитронов, по степени поглощения которых определяют участки объекта, обедненные или обогащенные электронами.

Наиболее широко используют для контроля рентгеновское и гамма-излучение. Их можно использовать для контроля изделий из самых

различных материалов, подбирая благоприятный частотный диапазон. Напомним, что эти виды излучения являются электромагнитными волнами.

6. Радиоволновой вид неразрушающего контроля основан на регистрации изменений параметров электромагнитных волн радиодиапазона, взаимодействующих с контролируемым объектом. Обычно применяют волны сверхвысокочастотного (СВЧ) диапазона длиной 1–100 мм и контролируют изделия из материалов, где радиоволны не очень сильно затухают: диэлектрики (пластмассы, керамика, стекловолокно), магнитодиэлектрики (ферриты), полупроводники, тонкостенные металлические объекты.

7. Тепловой вид неразрушающего контроля основан на регистрации изменений тепловых или температурных полей контролируемых объектов. Он применим к объектам из любых материалов. По характеру взаимодействия поля с контролируемым объектом различают методы: *пассивный* или *собственного* излучения (на объект не воздействуют внешним источником энергии) и *активный* (объект нагревают или охлаждают от внешнего источника). Измеряемым информативным параметром является температура либо тепловой поток.

8. Электрический вид неразрушающего контроля основан на регистрации параметров электрического поля, взаимодействующего с контролируемым объектом (*собственно электрический* метод), или поля, возникающего в контролируемом объекте в результате внешнего воздействия (*термоэлектрический* и *трибоэлектрический* методы). Первичными информативными параметрами являются электрические емкость или потенциал. **Термоэлектрический метод** применяют для контроля химического состава материалов. Например, нагретый до постоянной температуры медный электрод прижимают к поверхности изделия и по возникающей контактной разности потенциалов определяют марку стали, титана, алюминия или другого материала, из которого сделано изделие.

Существует также ряд других электрических методов: экзoeлектронной эмиссии (эмиссия ионов с поверхности изделия под влиянием внутренних напряжений), электроискровой (измерения характеристик среды по параметрам электрического пробоя в ней), электростатического порошка (определение дефектов в диэлектриках с использованием в качестве индикатора наэлектризованного порошка).

9. Вихретоковый вид неразрушающего контроля основан на анализе взаимодействия электромагнитного поля вихрегового преобразователя с электромагнитным полем вихревых токов, наводимых в контролируемом объекте. Его применяют только для контроля изделий из электропроводящих материалов.

Контроль вихревыми токами выполняют без непосредственного контакта преобразователей с объектом, что позволяет вести его при взаим-

ном перемещении преобразователя и объекта с большой скоростью, облегчая тем самым автоматизацию контроля.

10. **Методы течеискания** используют для выявления только сквозных дефектов в перегородках. В полость дефекта пробное вещество проникает либо под действием разности давлений, либо под действием капиллярных сил, однако в последнем случае нанесение в индикацию пробных веществ выполняют по разные стороны перегородки.

2. ПОНЯТИЕ ФИЗИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Физическое поле – особая форма материи, существующей в каждой точке окружающего пространства. Проявляет себя в каком-либо (в силовом) воздействии на частицу или тело, помещаемое в область пространства существования поля. В самом широком смысле любую физическую величину, плавно меняющуюся в пространстве и однозначно определенную во всех его точках, можно рассматривать как физическое поле или просто поле физической величины.

Не должно быть скачков в значении физических величин в двух соседних точках, находящихся на сколь угодно малых расстояниях друг от друга. В плавном изменении физических величин при переходе от одной точки пространства к другой заключается главная особенность физического поля.

Математическое представление физических полей

Любая физическая величина может образовать физическое поле. Например, поле температур, скоростей, механических напряжений и т.д.



ВЕЩЕСТВО	ПОЛЕ
1. Состоит из отдельных частиц, молекул, атомов, протонов, нейтронов и электронов и т.д.	1. Поле можно рассматривать как поток дискретных частиц – квантов с энергией $h\nu$
2. Вещество характеризуется энергией, массой и импульсом. У вещества есть масса покоя	2. Характеризуется энергией, массой и импульсом, но не имеет массы покоя
3. Вещество испытывает воздействие гравитационных сил	3. Электромагнитное поле испытывает воздействие гравитационных сил (свет вблизи объемных масс испытывает отклонение от прямолинейного движения)
4. Представители вещества испытывают дифракцию и интерференцию	4. Электромагнитное поле испытывает дифракцию и интерференцию
5. Вещество (радиоактивное) может быть источником поля (например, γ -излучение)	5. Электромагнитное поле может существовать вдали от источников, создавших это поле
6. Вещество может превращаться в поле (электрон, взаимодействуя с позитроном, рождает γ -кванты).	6. Поле может превращаться в вещество (γ -излучение, взаимодействуя с веществом и при определенных условиях, когда $E_\gamma > 10 \text{ МэВ}$, испускает позитрон и электрон (рождение пара))

По современным представлениям физические процессы можно интерпретировать в терминах корпускул (вещество) либо в терминах волн (поле), и не в наших силах доказать, что в каком-то конкретном случае мы имеем дело именно с волной, а не с частицей, и наоборот.

Поэтому можно утверждать, что и к волновому и к корпускулярному описанию следует относиться как к равноправным и дополняющим друг друга способам описания одного и того же объективного процесса. В отдельных случаях допускается наглядная интерпретация либо для волн, либо для корпускул (причиной чего является несовершенство измерительных приборов и методов измерений).

Определим более наглядную ситуацию, с которой имеем дело. Здесь уже не «черный ящик», а конкретный объект контроля – изделие.

Пусть толщина изделия равна d , а толщина дефекта (аномальной области) равна x (рис. 4).

Помещаем объект в зондирующее поле с интенсивностью J_0 . Часть падающего излучения отражается от границы раздела «аа» (где происходит резкое изменение констант веществ).

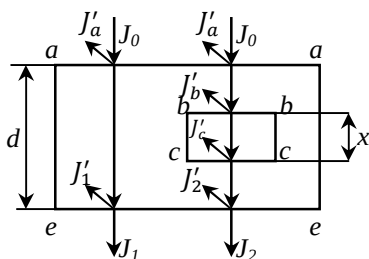


Рис. 4

Часть излучения проходит через объект контроля и становится равной J_1 , притом будет присутствовать составляющая J'_1 . В правой части картины имеем то же, плюс отражения от плоскостей « bb », « cc », « ee » и на выходе имеем уже J_2 .

Эффективность аномалии определяется различием величин J_1 и J_2 . Очень важно выбрать такое поле, чтобы величины J_1 и J_2 сильно отличались друг от друга.

Здесь не учитывается процесс поглощения зондирующего поля веществом. Поэтому вводим коэффициент поглощения излучения α . В аномальной области также существует коэффициент поглощения, но уже α_1 (область « bb cc »).

В простом случае поглощение соответствует экспоненциальному закону:

$$J_1 = J_0 e^{-\alpha d} ; \quad \dim \alpha \equiv [\alpha] = \frac{1}{m}.$$

Если учесть закон поглощения в нормальной и аномальной областях, будем иметь (учитывая отражения от плоскостей)

$$J_1 = J_0 e^{-\alpha d} (1 - K_{0a})(1 - K_{0e}),$$

где K_{0a} – коэффициент отражения от плоскости « aa »; K_{0e} – коэффициент отражения от плоскости « ee ».

$J_2 = J_0 e^{-\alpha(d-x)} (1 - K_{0a})(1 - K_{0e})(1 - K_{0b})(1 - K_{0c}) e^{-\alpha_1 x}$,
где K_{0b} и K_{0c} имеют соответствующий смысл.

Для правильно выбранного поля должно иметь максимальное значение отношение (чувствительность данного метода):

$$\mathcal{C} = \frac{J_1 - J_2}{J_1}.$$

Тогда $\mathcal{C} = 1 - (1 - K_{0b})(1 - K_{0c}) e^{(\alpha - \alpha_1)x}$ – чувствительность метода для данного выбора зондирующего поля.

Если коэффициенты K_{0b} и $K_{0c} \rightarrow 0$ (при $\alpha_1 \rightarrow \alpha$), то $\mathcal{C} \rightarrow 0$ и метод признается неэффективным.

Возможна другая ситуация, когда $K_{0b} = K_{0c} \approx 0$ и $X \rightarrow 0$, тогда метод также неэффективен.

И, наоборот, когда K_{0b} и $K_{0c} \neq 0$, то даже если $X \rightarrow 0$, метод становится эффективным (чувствительность высока).

Задача курса – изучить особенности поглощения и отражения. Основное внимание уделить полям с электромагнитной природой.

Диапазон рабочих частот:

Наименование волн	λ	ν
1. Сверхдлинные волны (СДВ)	>10000 м	< 30 кГц
2. Длинные волны (ДВ)	$(10000 \div 1000)$ м	30 кГц – 300 кГц
3. Средние волны (СВ)	$(1000 \div 100)$ м	300 кГц – 3 МГц
4. Короткие волны (КВ)	$(100 \div 10)$ м	3 МГц – 30 МГц
5. УКВ:		
метровые	$(10 \div 1)$ м	$(30 \div 300)$ МГц
дециметровые	1 м $\div$ 1 дм	$(300 \div 3000)$ МГц
сантиметровые	$(10 \div 1)$ см	$(3 \div 30)$ ГГц
миллиметровые	$(10 \div 1)$ мм	$(30 \div 300)$ ГГц
субмиллиметровые	$(1 \div 0,4)$ мм	$(300 \div 750)$ ГГц
Оптический диапазон:		
6. Инфракрасные (ИК)	$(0,4 \div 0,00076)$ мм	$(0,75 \div 395)$ ТГц
7. Видимый диапазон	$(760 \div 400)$ нм	$(395 \div 750)$ ТГц
8. Ультрафиолетовые (УФ)	400 нм $\div$ 20 Å	$(750 \div 10^5)$ ТГц
9. Рентгеновский диапазон	20 Å $\div$ $0,06$ Å	$(1,5 \cdot 10^5 \div 5 \cdot 10^7)$ ТГц
10. γ - излучение	$< 0,06$ Å	$> 5 \cdot 10^7$ ТГц

Звуковые волны: диапазон частот - $0,1 \div 10^9$ Гц.

В зависимости от типа волн приемники и передатчики электромагнитного поля конструктивно различны, техника разнообразна.

Изучение начинаем с электростатического поля, т.к. его частота колебаний равна нулю.

3. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

Электростатическое поле (постоянное электрическое поле) – частный вид общего переменного электромагнитного поля, создаваемое неподвижными по отношению к наблюдателю зарядами, с неизменными во времени значениями зарядов.

В природе основными носителями электрического заряда являются протон и позитрон (положительный заряд (условно «+»)), электрон (отрицательный заряд (условно «-»)). В реальной жизни электрические процессы обусловлены перераспределением электронов. Если имеется электрический заряд q , то область пространства вблизи него проявляет осо-

бые свойства: если вносить пробный электрический заряд, то организуется силовое взаимодействие, обусловленное полем (материей).

Детальный механизм образования поля (и взаимодействия между зарядами) неизвестен.

3.1. Распределение зарядов

Для упрощения математических расчетов пренебрегают дискретностью структуры заряда и предполагают, что заряд «размазан» в пространстве.

В таком случае вводят следующие понятия:

Объёмная плотность заряда

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{dq}{dV},$$

где dV – элемент объема.

Объем не может быть бесконечно малым (т.е. $\Delta V \rightarrow 0$ физически, иначе объём будет соизмерим с размерами элементарного носителя электрического заряда).

Поверхностная плотность заряда

$$\sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta S} = \frac{dq}{dS},$$

где dS – элемент площади.

Линейная плотность заряда

$$\tau = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta l} = \frac{dq}{dl},$$

где dl – элемент длины.

Если заряд распределен непрерывно по объему, то заряд объема dV

$$dq = \rho dV;$$

По площади : $dq = \sigma dS$; и по длине $dq = \tau dl$.

3.2. Основные уравнения электростатического поля

1. Сила, действующая на неподвижный пробный заряд

$$\vec{F} = q_n \vec{E},$$

где $\vec{E}$ – напряженность;

$$\vec{E} = \lim_{q_n \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{q_n};$$

q_n – пробный заряд.

2. Закон Кулона в вакууме:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2} \cdot \vec{e}_r,$$

где $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м – константа, связанная с выбором системы единиц измерения СИ.

Видно, что при $r \rightarrow 0$ $F \rightarrow \infty$, здесь ошибка, т.к. закон действует лишь для точечных зарядов (каковых в природе не существует). Для не-точечных зарядов – сила не бесконечна.

3. Напряженность поля точечного заряда:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{R^2} \vec{e}_r,$$

где $\vec{e}_r$ – единичный вектор направления от заряда к искомой точке поля.

Принцип суперпозиции для дискретных зарядов

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{R_i^2} \vec{e}_{R_i},$$

где i – порядковый номер заряда, который создает поле.

Эта формула для нахождения поля, создаваемого суммой зарядов, где R_i – расстояние от i -го заряда до точки наблюдения.

Если заряды распределены непрерывно (по S , по V , по l), то знак суммы $\sum$ меняем на знак интеграла $\int$, например:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\rho dV}{R^2} \vec{e}_R; \quad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_S \frac{\sigma dS}{R^2} \vec{e}_R; \quad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_l \frac{\tau dl}{R^2} \vec{e}_R.$$

Ищем напряженность в точке наблюдения, удаленной на расстояние R от каждого из элементов заряда.

4. Потенциал электрического поля.

Пусть есть заряд q , создающий электрическое поле и точки 1 и 2 в этом поле; $\vec{E}$ – напряженность электрического поля в элементе $d\vec{l}$ (рис. 5). Тогда разность потенциалов между точками 1 и 2 равна по определению криволинейному интегралу по произвольному пути из 1 в 2:

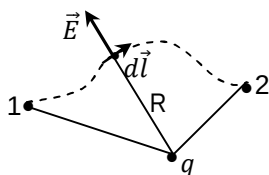


Рис. 5

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l},$$

и имеет смысл работы поля по перемещению единичного заряда из точки 1 в точку 2.

Потенциал в СИ выражается в вольтах (1 В = 1 Дж/К).

Величина

$$U = \oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0 \text{ (сумма работ равна нулю)}$$

выражает циркуляцию вектора $\vec{E}$ по данному контуру L (как только для какого-либо поля циркуляция равна нулю, то такое поле носит потенци-

альный характер (невихревой)). Гравитационное поле также потенциально.

Потенциал поля точечного заряда q равен:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R}.$$

Для потенциала выполняется принцип суперпозиции:

$$\varphi_{\Sigma} = \Sigma \varphi_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \Sigma_{i=1}^n \frac{q_i}{R_i}.$$

Потенциал – величина скалярная. Для потенциала непрерывного распределения зарядов знак суммы Σ меняем на интеграл $\int$.

Между $\vec{E}$ и φ существует строгая аналитическая связь:

$$\vec{E} = -grad \varphi \equiv -\vec{\nabla} \varphi.$$

В принципе, величина $\vec{E}$ полностью описывает все возможные случаи проявления постоянного электрического поля. Тогда для чего нужно было вводить φ ? Все делается для упрощения решения задач: величина $\vec{E}$ – векторная и в декартовой системе координат нужно знать три её составляющие E_x, E_y, E_z , а величина φ – скалярная, т.е. число уравнений в 3 раза меньше. Существует аналитическая связь перехода от φ к $\vec{E}$; величину φ обычно искать проще, чем искать $\vec{E}$ «в лоб». Преимущество введения φ особенно очевидно при наличии симметрии (шаровой, плоскостной и т.п.).

3.3. Теорема Гаусса

Поток вектора $\vec{E}$ через замкнутую поверхность S равен алгебраической сумме зарядов, расположенных в объёме, ограниченном поверхностью S , делённой на ϵ_0 :

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_{i(\text{внутри})}.$$

Теорема Гаусса – для облегчения анализа поля (речь идет здесь о дискретных зарядах).

Для распределенных зарядов: $\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV.$

Дифференциальная форма закона Гаусса

По определению, дивергенцией (расходимостью) векторного поля $\vec{F}$ называется предел отношения потока этого поля сквозь замкнутую поверхность S к объёму, заключённому в этой поверхности:

$$\operatorname{div} \vec{F} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{F} d\vec{S}}{V}. \quad (V \rightarrow 0 \text{ в физическом смысле}).$$

В математическом плане дивергенция представляет собой пространственную производную специального вида, представленную с помощью оператора Гамильтона (векторного оператора «набла» $\vec{\nabla}$):

$$\operatorname{div} \vec{F} \equiv \vec{\nabla} \vec{F}.$$

Вид оператора «набла» $\vec{\nabla}$ зависит от выбора системы координат. В декартовой системе координат это:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z.$$

В результате получим

$$\operatorname{div} \vec{F} \equiv \vec{\nabla} \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}.$$

Таким образом, операция «дивергенция» переводит векторное поле в скалярное.

От определения дивергенции можно перейти к теореме Остроградского – Гаусса, связывающей поток векторного поля через произвольную замкнутую поверхность с дивергенцией этого поля:

$$\oint_S \vec{F} d\vec{S} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{F} dV.$$

Применяя эту теорему к электростатическому полю $\vec{E}$, получим:

$$\text{с одной стороны, } \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V \rho dV,$$

$$\text{с другой – } \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{E} dV,$$

откуда приходим к выводу: $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$.

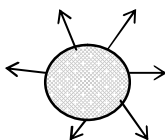
В дифференциальной форме теорема Гаусса является локальной теоремой: div поля в данной точке зависит только от плотности электрического заряда в этой точке, и более ни от чего.

Для разных областей пространства существуют две ситуации:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \begin{cases} 0, & \text{в точках пространства вне заряда;} \\ \rho/\varepsilon_0, & \text{в точках, где существует заряд.} \end{cases}$$

Возможные ситуации для 2-го случая:

а) Если $\operatorname{div} \vec{E} > 0$, то имеем дело с источником поля – положительным зарядом (рис. 6). Векторы $\vec{E}$ начинаются на положительных зарядах.



$$\rho > 0; \operatorname{div} \vec{E} > 0$$

Рис. 6

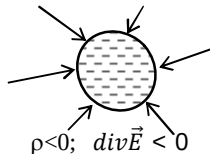


Рис. 7

б) Если $\operatorname{div} \vec{E} < 0$, то имеем дело со стоком поля – отрицательным зарядом (рис. 7). Силовые линии электрического поля $\vec{E}$ заканчиваются на отрицательных зарядах.

Если $\operatorname{div} \vec{E} = 0$, то через анализируемую точку пространства проходят силовые линии электрического поля $\vec{E}$, не начинаясь и не заканчиваясь в окрестности этой точки.

Потенциальные поля описываются одним и тем же уравнением:

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho \text{ — уравнение Пуассона.}$$

Уравнение Пуассона получается следующим образом:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}; \operatorname{div}(-\operatorname{grad} \varphi) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \rightarrow \nabla^2 \varphi = \Delta \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

$\Delta \varphi = 0$ — уравнение Лапласа — частный случай уравнения Пуассона для частей пространства, где отсутствуют заряды.

Это всё для вакуума.

3.4. Электростатика диэлектриков

Все среды делятся на два класса (по реакции помещения их в электрическое поле): диэлектрики (большая ширина запрещённой зоны) и проводники.

Проводники — такие материальные среды, в которых существуют свободные заряды, приходящие в направленное движение под действием электрического поля, т.е. в них возникает электрический ток проводимости. Проводники — это металлы, электролиты, плазма; в них свободно движутся частицы — носители заряда.

В диэлектриках нет свободных зарядов, поэтому нет и тока проводимости.

3.4.1. Свободные и связанные заряды

Свободные заряды — заряды, перемещающиеся по веществу под действием поля. Их движение не ограничивается межмолекулярными взаимодействиями.

Связанные заряды — электрические заряды, входящие в состав вещества, удерживаются в определенных положениях внутримолекулярными силами; такие заряды «связаны» с данным веществом.

Сторонние заряды — не входят в состав молекул диэлектрика, но могут находиться как вне диэлектрика, так и внутри него.

3.4.2. Поляризация вещества

Универсальной реакцией диэлектрика на помещение его во внешнее электрическое поле является поляризация — упорядоченное расположение зарядов в объёме диэлектрика.

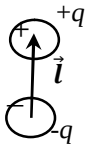


Рис. 8

Электрический диполь – система двух равных по величине и противоположных по знаку электрических зарядов с расстоянием l между ними. Характеризуется дипольным электрическим моментом $\vec{p} = q \cdot \vec{l}$ – вектором, направленным от «-» заряда к «+» заряду (рис. 8).

Пусть имеется объем диэлектрика, состоящий из диполей. В исходном состоянии диполи расположены хаотически (рис. 9).

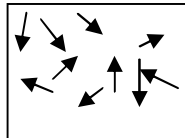


Рис. 9

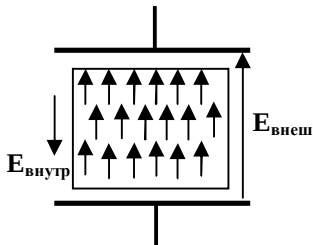


Рис. 10

Под действием электрического поля диполи ориентируются – диэлектрик поляризуется (рис. 10).

Внутренние «+» и «-» заряды диполей компенсируют друг друга, но внешние «+» и «-» заряды в диэлектрике создают внутреннее поле, направленное против внешнего. В результате суммарное поле в диэлектрике уменьшается в ϵ раз.

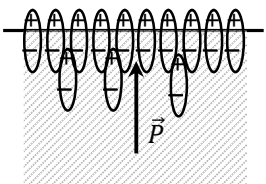
ϵ – относительная диэлектрическая проницаемость – показывает, во сколько раз суммарное поле в диэлектрике уменьшается по сравнению с внешним полем в отсутствии диэлектрика. ϵ – величина структурно-чувствительная (зависит от температуры, влажности, структуры, дефектов).

Поляризация – смещение связанных «+» и «-» зарядов в противоположные стороны под действием поля.

Практический интерес имеет некоторая усредненная характеристика вещества – **вектор поляризации**:

$$\vec{P} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\sum q \vec{l}}{V} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\sum \vec{p}}{V},$$

равный сумме дипольных моментов единицы объема вещества.



Рассмотрим поверхностный слой поляризованного диэлектрика толщиной l , равной смещению зарядов в диполе и некоторой небольшой площади S . При этом на поверхности диэлектрика, вследствие поляризации, появляется нескомпенсированный положительный заряд диполей (связанный заряд), равный

$$Q_{\text{связ}} = qnV = qn\vec{S}l = \vec{p}n\vec{S} = \vec{P}\vec{S},$$

откуда следует, что модуль вектора поляризации

$$P = \frac{Q_{\text{связ}}}{S} = \sigma_{\text{связ}} - \text{поверхностной плотности связанных зарядов.}$$

Далее рассмотрим следующую ситуацию. Внутри неполяризованного диэлектрика поместим положительный заряд, вокруг которого возникнет поле этого заряда. В результате возникнет поляризация диэлектрика, окружающего этот заряд. Выберем произвольную замкнутую поверхность, охватывающую заряд и часть диэлектрика, попавшую внутрь этой поверхности. Вследствие поляризации изнутри на эту поверхность выйдут положительные заряды $Q_{\text{связ}}$, внутри же останутся равные им по модулю отрицательные связанные заряды $-Q_{\text{связ}}$:

$$-Q_{\text{связ}} = -\iiint_V \rho_{\text{связ}} dV = -\oint_S \sigma_{\text{связ}} dS = \oint_S \vec{P} d\vec{S} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{P} dV,$$

откуда следует

$$\operatorname{div} \vec{P} = -\rho_{\text{связ}}.$$

Два последних выражения представляют собой теорему Гаусса для вектора поляризации в интегральной и дифференциальной форме.

Вообще источниками электрического поля могут быть как свободные (сторонние), так и связанные электрические заряды, т.е.

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} (\Sigma q_{\text{своб}} + \Sigma q_{\text{связ}}), \text{ но } \Sigma q_{\text{связ}} = -\oint_S \vec{P} d\vec{S},$$

тогда получим $\oint_S (\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) d\vec{S} = \Sigma q_{\text{своб}}.$

Величина $\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \vec{D}$ – вектор электрической индукции (электрическое смещение).

Поскольку $\vec{D}$ состоит из двух разных величин, то $\vec{D}$ не носит глубокого физического смысла; эта величина вводится для удобства расчетов поля.

3.4.3. Теорема Гаусса для $\vec{D}$

$\oint \vec{D} d\vec{S} = \Sigma q_{\text{своб}}$ – интегральная форма теоремы.

Дифференциальная форма: $\operatorname{div} \vec{D} = \rho_{\text{своб}}.$

Отсюда видно, что источником поля вектора $\vec{D}$ являются свободные заряды. Установим связь между $\vec{D}$ и $\vec{E}$.

Рассмотрим $\vec{P}$:

$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$ – для линейных диэлектриков (у которых наблюдается пропорциональный рост $\vec{P}$ в зависимости от изменения $\vec{E}$).

χ – абсолютная диэлектрическая восприимчивость – характеристика, структурно чувствительная для каждого диэлектрика, показывает, насколько восприимчив данный диэлектрик к поляризации.

В общем случае получаем

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \vec{E} (1 + \chi) = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E},$$

где $(1 + \chi) = \varepsilon$ – относительная диэлектрическая проницаемость.

Полученное выражение $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}$ – первое материальное уравнение, связывает параметры электрического поля с параметрами вещества в этом поле. Этот закон справедлив и для переменных полей. Величина ε здесь скалярная, но может быть и тензорной, и комплексной.

3.4.4. Поведение вектора поля на границе раздела

Анализируемая область пространства состоит из двух и более разнородных сред: параметры одной среды резко отличаются от параметров соседней среды – в этом случае говорим о границе раздела двух сред.

Дифференциальные уравнения на границе по идее становятся незаконными (если параметры сред изменяются скачком при переходе через границу, то производные становятся бесконечными).

На самом деле таких границ не бывает. Физические свойства при переходе из первой среды во вторую изменяются не бесконечно быстро. Можно считать, что существует некоторый переходный слой, в котором параметры сред изменяются непрерывным образом. Это позволяет применять дифференциальные и интегральные законы.

На границе раздела (при переходе через границу) полевые характеристики могут не изменяться или могут претерпевать разрыв.

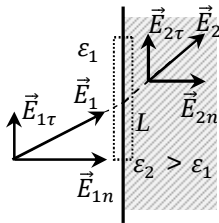


Рис. 11

На границе раздела двух диэлектриков будем оперировать двумя составляющими поля: E_n – нормальная, E_τ – тангенциальная составляющие вектора $\vec{E}$ – напряжённости электрического поля (рис. 11).

Из условия потенциальности поля $\vec{E}$, т.е. равенства нулю циркуляции этого поля вдоль узкого контура L , выбранного вдоль границы раздела

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0,$$

следует $E_{1\tau}L_1 - E_{2\tau}L_2 = 0$ или $E_{1\tau} = E_{2\tau}$ – равенство тангенциальных составляющих поля $\vec{E}$.

Как ведет себя на границе раздела двух сред вектор $\vec{D}$?

а) Его нормальная компонента D_n претерпевает разрыв, если на поверхности существует плотность стороннего электрического заряда $D_{2n} - D_{1n} = \sigma$, где σ – поверхностная плотность заряда на границе раздела второй и первой среды. Если на границе раздела нет сторонних за-

рядов ($\sigma = 0$), то нормальная компонента вектора $\vec{D}$ непрерывна: $D_{2n} = D_{1n}$. (Это следует из интегральной теоремы Гаусса для $\vec{D}$).

б) Используя выражение для $\vec{D} = \vec{D}_n + \vec{D}_\tau = \varepsilon_0 \varepsilon (\vec{E}_n + \vec{E}_\tau)$, получим связь между нормальными и тангенциальными составляющими полей $\vec{D}$ и $\vec{E}$ на границе раздела двух сред:

– из $D_{2n} = D_{1n}$ следует соотношение для нормальных компонент электрического поля

$$\varepsilon_0 \varepsilon_2 (\vec{E}_{2n}) = \varepsilon_0 \varepsilon_1 (\vec{E}_{1n}) \text{ или } \frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1};$$

– из $E_{1\tau} = E_{2\tau}$ следует соотношение для тангенциальных компонент вектора электрической индукции

$$\frac{D_{1\tau}}{\varepsilon_1} = \frac{D_{2\tau}}{\varepsilon_2} \text{ или } \frac{D_{1\tau}}{D_{2\tau}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}.$$

3.4.5. Преломление векторов $\vec{E}$ и $\vec{D}$ на границе двух сред

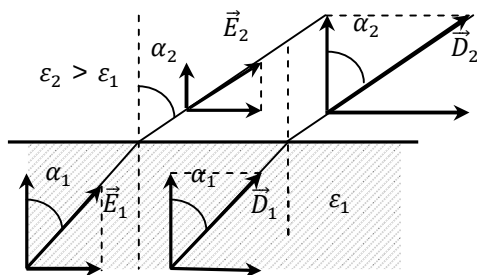


Рис. 12

Для вектора $\vec{E}$ (рис. 12):

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{E_{1\tau}}{E_{1n}}; \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{E_{2\tau}}{E_{2n}};$$

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{E_{2n}}{E_{1n}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}.$$

Для вектора $\vec{D}$:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{D_{1\tau}}{D_{1n}}; \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{D_{2\tau}}{D_{2n}};$$

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{D_{1\tau}}{D_{2\tau}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}.$$

(Магнитное поле ведет себя аналогично).

3.4.6. Поведение проводников в постоянном электрическом поле

Проводники отличаются от диэлектриков наличием свободных носителей зарядов. Под действием внешнего электрического поля эти заряды начинают перемещаться в проводнике до тех пор, пока не установится их равновесное распределение. При этом внутри проводника возникает собственное поле свободных зарядов, полностью компенсирующее внешнее. Результирующее поле внутри проводника становится равным нулю ($\vec{E} = 0$). Такое состояние в проводнике наступает тем быстрее, чем больше его проводимость.

На поверхности проводника в равновесии не может быть тангенциальной компоненты $\vec{E}_\tau$ электрического поля $\vec{E}$. В противном случае

вдоль поверхности проводника возникнет движение зарядов. Следовательно, результирующее электрическое поле $\vec{E}$ на поверхности проводника может иметь только нормальную компоненту $\vec{E}_n$. Силовые линии поля направлены нормально к поверхности проводника.

3.4.7. Электростатическая экранировка

Устройство, требующее защиты от внешних полей, помещают в металлический экран. Чем «ближе» экран к идеальному проводнику, тем эффективнее экранировка.

Для экранирования от магнитного поля делают ферромагнитный экран. Но целесообразнее делать двойной экран.

3.4.8. Электрическая ёмкость

Рассмотрим систему из двух проводников. На проводниках находятся заряды, равные по величине и противоположные по знаку. Первый проводник имеет потенциал ϕ_1 , второй – ϕ_2 , тогда $\phi_1 - \phi_2 = U$.

Величина заряда q и разность потенциалов U связаны между собой как $q = CU$, где C – электрическая ёмкость $C = \frac{q}{U}$.

Величина C зависит от геометрии, свойств среды и взаимного расположения проводников. Размерность ёмкости в системе СИ фарад ($\Phi = \text{Кл/В}$).

В частном случае такая пара проводников представляет собой конденсатор. И по мере накопления заряда поле конденсатора получает энергию, заключенную в объеме между обкладками конденсатора:

$$C \int_0^U U dU = \frac{CU^2}{2} = \frac{qU}{2} = W_{\text{эл}}.$$

Для плоского конденсатора $C = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{d}$, поле между пластинами однородное – $U = E \cdot d$, тогда

$$W_{\text{эл}} = \frac{CU^2}{2} = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{2d} (E \cdot d)^2 = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2d} S d^2 = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2} V.$$

Отсюда удельная энергия (энергия в единице объёма, плотность энергии электрического поля):

$$w_{\text{эл}} = \frac{dW}{dV} = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2} = \frac{\vec{D} \vec{E}}{2}.$$

4. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ ПОСТОЯННОГО ТОКА В ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЕ

Плотностью электрического тока $\vec{j}$ будем характеризовать электрический ток: величина векторная, напрямую совпадает с направлением поля $\vec{E}$. По определению $\vec{j}$ выражает количество зарядов, проходящих в единицу времени через сечение проводника единичной площади, перпендикулярное к направлению тока.

Размерность вектора плотности тока в системе СИ – Кл/с · м² = А/м².

I – величина тока, измеряемая в амперах (А), тогда $I = \int \vec{j} \cdot d\vec{S}$ (поток вектора плотности тока через поверхность $d\vec{S}$).

Влияние магнитного поля исключается. Нет явления индукции и нет влияния тока на поле.

Вводим погонную (удельную) проводимость γ , величину, обратную удельному сопротивлению $\gamma = \frac{1}{\rho}$. Размерность γ – 1/Ом·м.

Закон Ома в дифференциальной форме связывает плотность тока проводимости с напряженностью электрического поля через величину проводимости $\vec{j} = \gamma \vec{E}$.

4.1. Обобщенный закон Ома в дифференциальной форме

Для протекания электрического тока в цепи необходим подвод энергии извне (иначе получился бы вечный двигатель).

Внутри источника действует поле, обусловленное химическим (и не только) действием источника – стороннее поле (доставляет заряды на соответствующие обкладки источника).

Поле $\vec{E}$ в проводнике: $\vec{E} = \vec{E}_{\text{стат}} + \vec{E}_{\text{стор}}$.

Чтобы в цепи существовал ток, необходимо: $|\vec{E}_{\text{стор}}| > |\vec{E}_{\text{стат}}|$.

И теперь закон Ома для полной цепи имеет следующий вид:

$$I \cdot (R_i + R) = \mathcal{E},$$

где R_i – сопротивление источника; R – сопротивление внешнего участка цепи; $\mathcal{E}$ – ЭДС источника тока.

Плотность электрического тока $\vec{j} = \gamma (\vec{E}_{\text{стат}} + \vec{E}_{\text{стор}})$.

4.2. Первый закон Кирхгофа в дифференциальной форме.

Выберем проводящий объем, ограниченный замкнутой поверхностью S . Ток, втекающий в проводящий объем, равен току, вытекающему из данного объема. Если бы вытекало меньше, то в объеме накапливался бы заряд, что противоречит опыту.

Поток вектора плотности тока через замкнутую поверхность S , ограничивающую объем, равен нулю: $\oint_S \vec{j} d\vec{S} = 0$.

С другой стороны, по теореме Остроградского – Гаусса,

$$\oint_S \vec{j} d\vec{S} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{j} dV,$$

откуда следует $\operatorname{div} \vec{j} = 0$ – закон Кирхгофа в дифференциальной форме.

Линии вектора плотности тока всюду замкнуты сами на себя (в любой точке пространства нет ни стоков, ни истоков).

Закон Джоуля-Ленца – связывает потери электрической энергии на каком-либо участке цепи.

Энергия, выделяемая в единице объема

$$w_{\text{тепл}} = \gamma E^2.$$

Напряженность электрического поля также связана с потенциалом электрического поля в проводящей среде: $\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi$.

Если справедливы предыдущие выражения, то для проводящей среды также справедливо уравнение Лапласа:

$$\nabla^2 \varphi = \Delta \varphi = 0.$$

Если поле потенциально, то $\oint \vec{E} d\vec{l} = 0$ (критерий потенциальности).

4.3. Граничные условия для вектора плотности тока

Из закона сохранения электрического заряда $\oint_S \vec{j} d\vec{S} = 0$ следует непрерывность нормальной компоненты вектора плотности тока на границе раздела двух сред: $j_{1n} = j_{2n}$. Используя закон Ома в дифференциальной форме $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ и непрерывность тангенциальной компоненты поля $E_{1n} = E_{2n}$, получим граничное условие для тангенциальной компоненты вектора плотности тока:

$$\frac{j_{1\tau}}{j_{2\tau}} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2},$$

т.е. на границе раздела двух сред происходит преломление вектора плотности тока.

5. МАГНИТОСТАТИКА

Магнитное поле, как и электрическое, служит средством описания взаимодействия заряженных частиц друг с другом.

Статическое магнитное поле (поле, не изменяющееся во времени) является частным случаем электромагнитного поля.

В основе учения о магнетизме лежат два экспериментальных факта, установленных в XIX веке: 1) *магнитное поле действует на движущиеся заряды*; 2) *движущиеся заряды создают магнитное поле*.

1. Закон, определяющий силу $\vec{F}_m$, действующую на движущийся точечный заряд q со стороны магнитного поля, выражается формулой

$$\vec{F}_m = q[\vec{v}\vec{B}],$$

где вектор $\vec{B}$ не зависит от величины, знака и скорости движения заряда, а характеризует только магнитное поле, в котором движется заряд. Этот вектор, в силу исторических причин, получил название вектор индукции магнитного поля. Данная формула справедлива не только для постоянных, но и для переменных магнитных полей и при любых значениях скорости $\vec{v}$.

В электрическом поле $\vec{E}$ на частицу с зарядом q действует сила $\vec{F}_e = q\vec{E}$ независимо от действия магнитного поля $\vec{F}_m$. В этом случае возникает сила

$$\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_m = q(\vec{E} + [\vec{v}\vec{B}]).$$

Она называется *силой Лоренца*. Электрическое поле изменяет и траекторию, и кинетическую энергию, а магнитное поле изменяет только направление движения заряженных частиц. Это уравнение является основой для построения циклических ускорителей (рис. 13).

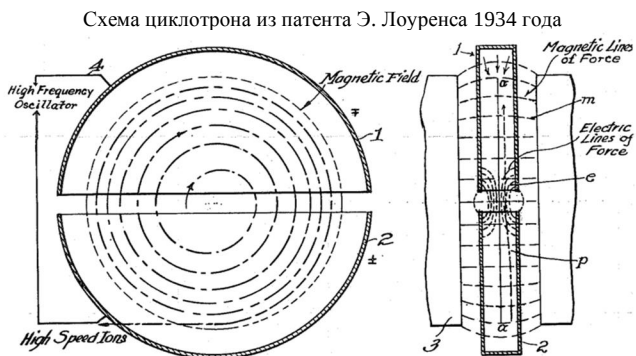


Рис. 13

В циклотроне тяжёлые ускоряемые частицы инжектируются в камеру вблизи её центра. После этого они движутся внутри полости двух чуть раздвинутых полуцилиндров (дуантов) 1, 2, помещённых в вакуумную камеру между полюсами 3 сильного электромагнита. Однородное магнитное поле этого электромагнита искривляет траекторию частиц. Ускорение движущихся частиц происходит в тот момент, когда они оказываются в зазоре между дуантами. В этом месте на них действует электрическое поле, создаваемое электрическим генератором 4 высокой частоты, которая совпадает с частотой обращения частиц внутри циклотрона (циклотронной частотой). При не слишком больших (нерелятивистских) скоростях эта частота не зависит от энергии частиц:

$$\omega = \frac{qB}{m},$$

так что в зазор между дуантами частицы попадают всегда через один и тот же промежуток времени. Получая каждый раз при этом некоторое приращение скорости, они продолжают своё движение дальше по окружности всё большего радиуса, и траектория их движения образует плоскую раскручивающуюся спираль. На последнем витке этой спирали включается дополнительно отклоняющее поле, и пучок ускоренных частиц выводится наружу. Поскольку задающее орбиту пучка магнитное поле неизменно и ускоряющее высокочастотное электрическое поле в процессе ускорения частиц также не меняет параметров, циклотрон может работать в непрерывном режиме: все витки спирали заполнены частицами пучка ионов.

Действие магнитного поля оказывается и на электрические токи, представляющие собой потоки заряженных частиц. Например, рассмотрим ток, созданный движением одинаковых частиц с зарядом q_0 и концентрацией n . Тогда плотность тока $\vec{j} = q_0 n < \vec{v} >$. Число частиц в объёме dV будет $dN = n dV$, а сила, действующая на элемент объёма тела с током $\vec{j}$ со стороны магнитного поля:

$$d\vec{F}_\Sigma = q_0 [\vec{v}\vec{B}] dN = q_0 n [\vec{v}\vec{B}] dV = [\vec{j}\vec{B}] dV.$$

Вектор $\vec{j} dV$, называемый *объёмным элементом тока*, в случае протекания тока вдоль бесконечно тонкого провода с площадью поперечного сечения $\vec{S}$ допускает преобразование $\vec{j} dV = \vec{j} \vec{S} d\vec{l} = I d\vec{l}$, где вектор $d\vec{l}$ совпадает с направлением тока. Вектор $I d\vec{l}$ называют *линейным элементом тока*. Сила, действующая на линейный элемент тока в магнитном поле

$$d\vec{F}_A = [I d\vec{l} \vec{B}],$$

носит название *закона Ампера*.

Сила, действующая на провод конечной длины, находится интегрированием по всей длине провода:

$$\vec{F}_A = \int I [d\vec{l} \vec{B}].$$

2. Точечный заряд q , движущийся равномерно со скоростью $\mathbf{v}$, создаёт в окружающем пространстве магнитное поле:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q[\vec{v}\vec{R}]}{R^3},$$

где $\vec{R}$ – радиус-вектор, проведённый от заряда к точке, в которой наблюдается поле $\vec{B}$. Постоянная $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$ (аналог ϵ_0 в электростатике) вводится для согласования единиц измерения величин, входящих в данную формулу, в международной системе единиц СИ. При этом единица измерения индукции магнитного поля называется *тесла* (Тл).

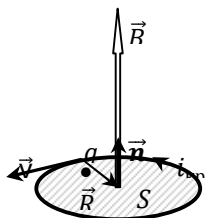


Рис. 14

Определим поле $\vec{B}$ в центре окружности, вдоль которой движется заряженная частица с постоянной по модулю скоростью v (рис. 14):

а) направление вектора $\vec{B}$ определяется векторным произведением $[\vec{v}\vec{R}]$, т.е. совпадает с направлением единичного вектора $\vec{n}$, перпендикулярного плоскости данной окружности;

б) его модуль будет равен

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qvR}{R^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qR}{R^3} \frac{2\pi R}{T} = \frac{\mu_0}{2} \frac{qV}{R} = \frac{\mu_0}{2} \frac{i_{\text{кр}}}{R},$$

где через $i_{\text{кр}}$ обозначен круговой ток, равный произведению qV -заряда частицы на частоту обращения, следовательно, магнитное поле $\vec{B}$ в центре кругового тока равно:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2} \frac{i_{\text{кр}}}{R} \vec{n}.$$

Внешне полное магнитное поле кругового тока похоже на поле электрического диполя, т.е. представляет собой магнитный диполь.

Как следует из опытных фактов, магнитные поля, возбуждаемые отдельными движущимися зарядами, подчиняются *принципу суперпозиции*. Рассматривая совокупное движение зарядов $\Delta Q = \rho dV$ с общей скоростью $< \vec{v} >$ как элемент объёмного тока

$$\Delta Q < \vec{v} > = \rho < \vec{v} > dV = \vec{j} dV$$

и используя принцип суперпозиции, приходим к следующему выражению для магнитного поля объёмного элемента тока:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[\vec{j}\vec{R}]}{R^3} dV.$$

Вектор $\vec{j}dV$, в случае протекания тока вдоль бесконечно тонкого провода с площадью поперечного сечения $\vec{S}$, допускает преобразование $\vec{j}dV = \vec{j}\vec{S}d\vec{l} = I d\vec{l}$, где вектор $d\vec{l}$ совпадает с направлением тока. Вектор $I d\vec{l}$ называют *линейным элементом тока*. Для магнитного поля линейного элемента тока получаем:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[I d\vec{l} \vec{R}]}{R^3}.$$

Эти формулы выражают *закон Био – Савара – Лапласа*. Полное поле найдётся интегрированием по всем токам, т.е.

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{[\vec{j} \vec{R}]}{R^3} dV \text{ или } \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{[I d\vec{l} \vec{R}]}{R^3}.$$

3. Можно показать, что на рамку с током, помещённую в магнитное поле, со стороны магнитного поля действует механический момент сил Ампера, стремящийся развернуть рамку так, чтобы её плоскость установилась перпендикулярно силовым линиям магнитного поля.

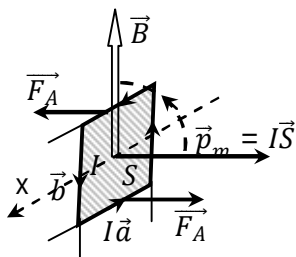


Рис. 15

На рис. 15 показано исходное положение рамки. При этом на сторонах рамки, параллельных полю $\vec{B}$, амперовы силы равны нулю, а на двух других – силы Ампера образуют пару сил с моментом, равным

$$\vec{M} = [\vec{F}_A \vec{b}] = [[(I \vec{a}) \vec{B}] \vec{b}] = (I \vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{B} - (\vec{B} \vec{b}) I \vec{a} = 0 + (IS) B \vec{e}_x,$$

направленным вдоль оси x и стремящимся повернуть рамку вокруг оси x *против часовой стрелки*. Вектор $\vec{M}$ момента амперовых сил можно представить иначе, если ввести вектор магнитного момента $\vec{p}_m = I \vec{S}$, где $\vec{S}$ - вектор площади рамки с током, направленный перпендикулярно плоскости рамки так, что из конца этого вектора направление тока вдоль контура рамки было видно против часовой стрелки. При этом момент $\vec{M}$ примет следующий вид:

$$\vec{M} = [\vec{F}_A \vec{b}] = [\vec{p}_m \vec{B}].$$

Данное выражение справедливо и в общем случае для рамки произвольной формы, в том числе и для кругового тока, т.е. круговые токи в теле образца под действием магнитного поля стремятся ориентировать свои магнитные моменты вдоль поля $\vec{B}$. Аналогично ведут себя электри-

ческие дипольные моменты в диэлектриках под действием электрического поля.

Об относительности деления электромагнитного процесса на его магнитную и электрическую составляющие

Пример. Пусть заряженная частица движется со скоростью V относительно некоторой неподвижной системы координат. Наблюдатель, находящийся в этой системе координат, обнаружит экспериментально наличие и электрической, и магнитной составляющих электромагнитного поля, созданного этой частицей. Другой наблюдатель, движущийся вместе с этой частицей, т.е. неподвижный относительно неё, обнаружит только электрическую составляющую поля.

Таким образом, результаты измерения характеристик электромагнитного поля зависят от относительного движения наблюдателя и заряженных частиц. При переходе из одной системы отсчёта в другую необходимо учитывать законы преобразования полей.

5.1. Основные законы постоянного магнитного поля

Интерпретация законов аналогична электростатике:

1) Теорема Гаусса для потока вектора $\vec{B}$:

Поток вектора магнитной индукции $\vec{B}$ сквозь произвольную замкнутую поверхность S равен нулю (экспериментальный факт):

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0 \text{ – интегральная форма.}$$

Физический смысл:

а) Магнитный поток, вошедший внутрь объёма, ограниченного произвольной замкнутой поверхностью S , всегда равен магнитному потоку, вышедшему из этого объёма, и сумма всех потоков равна нулю.

б) Это математическая запись НЕПРЕРЫВНОСТИ магнитного потока.

в) В природе нет магнитных зарядов, на которых начинались бы или заканчивались линии индукции магнитного поля, т.е. линии магнитного поля $\vec{B}$ – замкнуты сами на себя.

Дифференциальная форма теоремы Гаусса: из определения дивергенции следует, что дивергенция магнитного поля $\vec{B}$ должна быть равна нулю:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0.$$

С понятием дивергенции произвольного векторного поля $\vec{A}$ связана теорема Остроградского–Гаусса, выражающая поток произвольного векторного поля сквозь замкнутую поверхность S через дивергенцию этого поля:

$$\oint_S \vec{A} d\vec{S} = \iiint_V \text{div} \vec{A} dV.$$

2) Теорема о циркуляции вектора $\vec{B}$ (в системе СИ).

Циркуляция вектора индукции $\vec{B}$ магнитного поля вдоль произвольного замкнутого контура L равна умноженному на μ_0 суммарному току, пронизывающему плоскость этого контура (экспериментальный факт):

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum_k I_k,$$

где L – замкнутый контур; I_k – токи, которые пересекают поверхность, ограниченную замкнутым контуром L .

Направление обхода контура L и знаки токов I_k в алгебраической сумме $\sum_k I_k$ согласуются правилом «буравчика»: токи считаются положительными, если со стороны линий тока в точке пересечения ими плоскости контура направление обхода контура видно против часовой стрелки, в противном случае токи считаются отрицательными. В примере, показанном на рис. 16, токи I_1 и I_2 – положительные, I_3 – отрицательный.

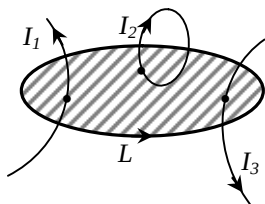


Рис. 16

Возможны ситуации:

$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = 0$, тогда поле потенциально.

$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum_k I_k$ – поле не потенциально (в областях, занятых током, поле носит вихревой характер).

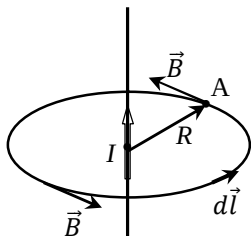


Рис. 17

Задача. Рассчитать в точке А магнитное поле уединённого проводника с током I (рис. 17).

Задача обладает симметрией.

В плоскости, перпендикулярной проводнику, проводят окружность, проходящую через точку А. В любой точке окружности модуль вектора $\vec{B}$ одинаков.

Составляем уравнение: $\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \oint_L B dl \cos(\vec{B} d\vec{l}) = \mu_0 I$.

На основании симметрии B выносим из под знака интеграла:

$$B \oint_L dl = B(2\pi R) = \mu_0 I, \text{ откуда получаем } B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}.$$

Дифференциальная форма теоремы о циркуляции $\vec{B}$

Дифференциальная форма теоремы о циркуляции $\vec{B}$ связана с понятием о роторе векторного поля. По определению

$$\text{rot } \vec{B} = \lim_{\vec{S} \rightarrow 0} \frac{\oint_L \vec{B} d\vec{l}}{\vec{S}} -$$

дифференциальная операция, представляющая собой вектор, направленный по нормали к контуру L (вдоль вектора площади $\vec{S}$, ограниченной контуром L), выбранному так, чтобы циркуляция вдоль него имела максимальное значение.

С другой стороны, поскольку циркуляция вектора индукции магнитного поля равна $\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I$, то для ротора $\vec{B}$ получим:

$$\text{rot } \vec{B} = \lim_{\vec{S} \rightarrow 0} \frac{\oint_L \vec{B} d\vec{l}}{\vec{S}} = \lim_{\vec{S} \rightarrow 0} \frac{\mu_0 I}{\vec{S}} = \mu_0 \vec{j},$$

где $\vec{j}$ – локальный вектор плотности тока.

С понятием ротора произвольного векторного поля $\vec{A}$ связана теорема Стокса, выражающая циркуляцию произвольного векторного поля через ротор этого поля:

$$\oint_L \vec{A} d\vec{l} = \iint_S \text{rot } \vec{A} d\vec{S}.$$

Замечание. К имеющемуся критерию* потенциальности поля можно добавить ещё один:

$$\text{rot } \vec{B} = \begin{cases} 0 & (\text{в областях, не занятых линиями тока}) \\ \mu_0 \cdot \vec{j} & (\text{в областях, занятых линиями тока}) \end{cases}$$

* $\text{rot } \vec{E} = 0$ (в потенциальном поле).

5.2. Магнитное поле в веществе

Всякое вещество является **магнетиком**, т.е. оно способно под действием магнитного поля приобретать магнитный момент (намагничиваться). Для понимания механизма этого явления необходимо рассмотреть действие магнитного поля на движущиеся в атоме электроны.

Ради простоты предположим, что электрон в атоме движется по круговой орбите (рис. 18). Если орбита электрона ориентирована относительно вектора $\vec{B}$ произвольным образом, составляя с ним угол α , то

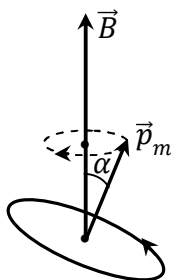


Рис. 18

можно доказать, что она приходит в такое движение вокруг $\mathbf{B}$, при котором вектор магнитного момента $\mathbf{p}_m$, сохраняя постоянным угол α , вращается вокруг вектора $\mathbf{B}$ с некоторой угловой скоростью. Такое движение в механике называется **прецессией**.

Прецессию вокруг вертикальной оси, проходящей через точку опоры, совершает, например, диск волчка при замедлении движения.

Таким образом, электронные орбиты атома под действием внешнего магнитного поля совершают прецессионное движение, которое эквивалентно круговому току. Так как этот микроток индуцирован внешним магнитным полем, то, согласно правилу Ленца, у атома появляется составляющая магнитного поля $\mathbf{B}'$, направленная противоположно внешнему полю. Наведенные составляющие магнитных полей атомов (молекул) складываются и образуют собственное магнитное поле вещества, ослабляющее внешнее магнитное поле. Этот эффект получил название **диамагнитного эффекта**, а вещества, намагничивающиеся во внешнем магнитном поле против направления поля, называются **диамагнетиками**.

В отсутствие внешнего магнитного поля диамагнетик немагнитен, поскольку в данном случае магнитные моменты электронов взаимно компенсируются, и суммарный магнитный момент атома (он равен векторной сумме магнитных моментов (орбитальных и спиновых), входящих в состав атома электронов) равен нулю. К диамагнетикам относятся многие металлы (например, Bi, Ag, Au, Cu), диэлектрики (например, NaCl), большинство органических соединений, смолы, углерод и т. д., а в классе аморфных твёрдых тел – SiO_2 .

Удлиненный образец диамагнетика в однородном магнитном поле ориентируется перпендикулярно силовым линиям магнитного поля. Из неоднородного магнитного поля он выталкивается в направлении уменьшения напряжённости поля.

Реакция диамагнетиков на помещение в магнитное поле очень слабая.

Так как диамагнитный эффект обусловлен действием внешнего магнитного поля на электроны атомов вещества, то диамагнетизм свойственен всем веществам. Однако наряду с диамагнитными веществами существуют и **парамагнитные** – вещества, намагничивающиеся во внешнем магнитном поле по направлению поля.

У парамагнитных веществ при отсутствии внешнего магнитного поля магнитные моменты электронов не компенсируют друг друга, и атомы (молекулы) парамагнетиков всегда обладают магнитным моментом. Однако вследствие теплового движения молекул их магнитные мо-

менты ориентированы беспорядочно, поэтому парамагнитные вещества в отсутствие внешнего магнитного поля не намагничиваются. При внесении парамагнетика во внешнее магнитное поле устанавливается *преимущественная* ориентация магнитных моментов атомов по *полю* (полной ориентации препятствует тепловое движение атомов). Таким образом, парамагнетик намагничивается, создавая собственное магнитное поле, совпадающее по направлению с внешним полем и усиливающее его. Этот эффект называется **парамагнитным**. При ослаблении внешнего магнитного поля до нуля ориентация магнитных моментов вследствие теплового движения разрушается и парамагнетик размагничивается. К парамагнетикам относятся редкоземельные элементы, а также Pt, Al и т.д. Диамагнитный эффект наблюдается и в парамагнетиках, но он значительно слабее парамагнитного, поэтому остается незаметным.

Из рассмотрения явления парамагнетизма следует, что его объяснение совпадает с объяснением ориентационной (дипольной) поляризации диэлектриков с полярными молекулами, только электрический момент атомов в случае поляризации надо заменить магнитным моментом атомов в случае намагничивания.

Подводя итог качественному рассмотрению диамагнетизма и парамагнетизма, еще раз отметим, что атомы всех веществ являются носителями диамагнитных свойств. Если магнитный момент атомов велик, то парамагнитные свойства преобладают над диамагнитными и вещество является парамагнетиком; если магнитный момент атомов мал, то преобладают диамагнитные свойства и вещество является диамагнетиком.

Ферромагнетизм – магнитоупорядоченное состояние вещества, в котором большинство атомных магнитных моментов параллельны друг другу, так что вещество обладает самопроизвольной (спонтанной) намагниченностью. Ферромагнетизм устанавливается при температуре ниже точки Кюри T_C в отсутствие внешнего магнитного поля B_0 .

Вещества, в которых возникает ферромагнитное упорядочение магнитных моментов, называют **ферромагнетиками**. К их числу относятся как твёрдые кристаллические вещества (см., например, Магнитные диэлектрики, Магнитные полупроводники, Редкоземельные магнетики), так и некоторые аморфные магнетики и металлические стёкла, а также магнитные жидкости. Ответственным за ферромагнетизм является обменное взаимодействие, стремящееся установить спины (а следовательно, и магнитные моменты) соседних атомов или ионов параллельно друг другу; в этом случае обменный интеграл имеет положительное значение.

Именно это явление происходит в железе. Между магнитными моментами различных атомов железа действуют эффективные (обменные) силы, которые во много-много раз больше *прямого магнитного* взаимодействия. Это косвенный эффект, который можно объяснить только с

помощью квантовой механики. Он примерно в десять тысяч раз сильнее прямого магнитного взаимодействия, и именно он выстраивает магнитные моменты в ферромагнитных материалах.

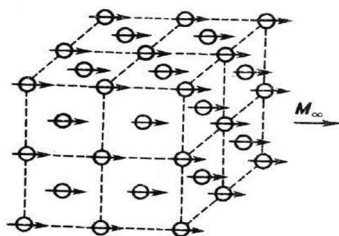


Рис. 19

Ферромагнитная коллинеарная атомная структура в гранецентрированной кубической решётке ниже точки Кюри T_C ; (стрелками обозначены направления атомных магнитных моментов) (рис. 19).

В квантовой механике действует *принцип запрета Паули*, согласно которому два электрона **не могут занимать в точности одно и то же состояние**. В результате пара близко расположенных электронов «стремится» направить свои спины противоположно друг другу. Фактически это объясняет *отсутствие* магнетизма почти у всех веществ.

Однако в ферромагнетиках этот принцип приводит к следующему: электрон на внутренней оболочке атома, имеющий нескомпенсированный спин (а следовательно, и магнитный момент) «заставляет» электрон внешней оболочки направить свой спин противоположно внутреннему. Это приводит к тому, что спин внутреннего электрона *соседнего* атома ферромагнетика, ориентируясь антипараллельно этому внешнему, оказывается параллельным спину внутреннего электрона *первого* атома. Внутренние электроны «как бы *обмениваются* информацией» о направлении своих спинов через посредника – электрона внешней оболочки.

Если данная тенденция оказывается сильнее термического разориентирующего фактора (ниже точки Кюри), то во всех атомах ближайшей окрестности *спонтанно* устанавливается ферромагнитное упорядочение магнитных моментов. Возникает так называемый «домен», область вещества, в которой большинство атомных магнитных моментов параллельны друг другу.

В монокристаллах оказывается энергетически более выгодным образование нескольких доменов с противоположным направлением магнитных моментов в соседних областях, разделённых «*доменной стенкой*». При помещении монокристалла во внешнее магнитное поле доменная стенка смещается таким образом, что увеличивается объём доменов, в которых магнитные моменты совпадают с направлением внешнего поля.

В поликристаллическом образце ферромагнетика домены могут занимать целиком объём отдельного зерна. Под действием внешнего магнитного поля можно наблюдать разворот отдельных зерен вдоль

внешнего поля, при снятии которого может остаться остаточный магнетизм (намагниченность); (что отсутствует в 2-х предыдущих случаях).

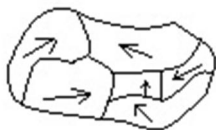


Рис. 20

Фрагмент поликристаллического образца ферромагнетика доменной структуры показан на рис. 20 (стрелками обозначены направления атомных магнитных моментов в отдельных доменах).

Намагниченность (магнитный момент единицы объёма) характеризует способность вещества намагничиваться.

Вектор намагниченности, А/м,

$$\vec{j} = \frac{\sum \vec{p}_m}{\Delta V}$$

можно рассматривать как аналог вектора поляризации диэлектрика ($\vec{P} = \frac{\sum \vec{p}_{эл}}{\Delta V}$).

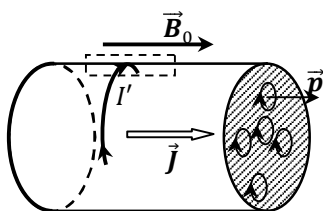


Рис. 21

Рассмотрим намагниченность на следующем примере. Имеются внешнее магнитное поле $\vec{B}_0$ и некоторая среда (рис. 21). Внутри среды под действием этого поля должна произойти ориентация круговых микроскопических токов i_k , представляющих собой магнитные моменты $\vec{p}_m = i_k d\vec{S}$, что приводит к намагниченности $\vec{j}$ образца.

Нас интересуют токи внутри и на границе вещества. Все внутренние микроскопические токи вещества взаимно компенсируют друг друга, в результате остаётся только ток на поверхности образца:

$$I' = \sum_k i_k,$$

где i_k – круговой микроскопический ток.

Выберем вблизи поверхности образца, вдоль его поверхности, замкнутый контур L так, чтобы одна его часть была внутри образца, а другая – снаружи. Определим циркуляцию вектора намагниченности по этому контуру (учтём, что намагниченность снаружи образца равна нулю):

$$\oint_L \vec{j} d\vec{l} = \int_{\text{внутри}} \vec{j} d\vec{l} = \int_{\text{внутри}} \frac{\sum i_{кр} d\vec{S}}{dV} d\vec{l} = \sum i_{кр} = I'.$$

Вектор намагниченности $\vec{j}$ обусловлен результирующим микроскопическим током I' на поверхности объекта.

Результирующее магнитное поле $\vec{B}_\Sigma = \vec{B}_0 + \vec{B}'$ является суммой внешнего поля $\vec{B}_0$ и поля $\vec{B}'$, полученного суперпозицией вкладов от поверхностных токов I' :

$$\vec{B}' = \int d\vec{B}' = \int \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[(I' d\vec{l}) \vec{R}]}{R^3}.$$

Для определения поверхностных токов I' используется теорема о циркуляции вектора намагничённости $\vec{J}$ по замкнутому контуру L :

$$I' = \oint_L \vec{J} d\vec{l}.$$

Ранее была введена теорема о циркуляции магнитного поля:

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{пр}}.$$

Теперь для определения поля в веществе учтём появление поверхностных токов I' :

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 (I_{\text{пр}} + I') = \mu_0 \left(I_{\text{пр}} + \oint_L \vec{J} d\vec{l} \right).$$

Объединяя в данном выражении циркуляции в левой и правой частях равенства, приходим к определению нового вектора $\vec{H}$, названного вектором напряжённости магнитного поля:

$$\oint_L \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} \right) d\vec{l} = \oint_L \vec{H} d\vec{l} = I_{\text{пр}}.$$

Данный вектор ($\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J}$) не обладает глубоким физическим смыслом и вводится для облегчения расчётов. Аналогично вводился вектор $\vec{D}$ в электростатике.

Для связи векторов $\vec{B}$ и $\vec{H}$ вводится понятие относительной магнитной проницаемости μ среды:

а) для однородных магнетиков вводится понятие магнитной восприимчивости χ , определяемой из условия

$$\vec{J} = \chi \vec{H};$$

б) подставляя в определение вектора $\vec{H}$ это выражение вектора намагничённости, получим $\frac{\vec{B}}{\mu_0} = (1 + \chi) \vec{H} = \mu \vec{H}$ или $\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}$.

Рассматривая величину $\mu_0 \vec{H} = \vec{B}_0$ как индукцию внешнего магнитного поля, для относительной магнитной проницаемости μ получаем выражение $\mu = \frac{\vec{B}}{\vec{B}_0}$, показывающее, во сколько раз поле в магнетике больше внешнего поля. Для неоднородных магнетиков ситуация значительно сложнее.

5.3. Скалярный и векторный потенциалы магнитного поля

Для магнитного поля вводятся уже два потенциала.

Скалярный магнитный потенциал φ_m вводится для областей пространства, где отсутствуют токи, поле потенциально.

Всё аналогично потенциалу электрического поля.

Существует связь: $\vec{H} = -grad \varphi_m$. В области, где магнитное поле стационарно, сначала находят φ_m , затем $\vec{H}$ и $\vec{B}$.

Используя закон $div \vec{B} = 0$ и условие $\mu = const$ для однородных магнетиков, найдём выражение для магнитного потенциала:

$$div \vec{B} = div(\mu_0 \mu \vec{H}) = -\mu_0 \mu div grad \varphi_m = 0 \text{ или } \nabla^2 \varphi_m = 0.$$

Магнитное поле в тех областях, где оно потенциально, описывается уравнением Лапласа. И вообще все потенциальные поля описываются одинаковыми уравнениями.

Существует понятие разность магнитных потенциалов:

$$U_{m12} = \varphi_{m1} - \varphi_{m2} = \int_1^2 \vec{H} d\vec{l}.$$

Разность скалярных магнитных потенциалов между точками 1 и 2 называют падением магнитного напряжения между точками 1 и 2. Так как поля потенциальны, то эта разность не зависит от формы пути, по которому можно пройти из точки 1 в точку 2.

Векторный потенциал магнитного поля – в электродинамике, вектор, ротор которого равен вектору индукции магнитного поля:

$$\vec{B} = rot \vec{A} = [\vec{\nabla} \vec{A}].$$

Единицы измерения: в системе СИ единицей векторного потенциала является вебер на метр (Вб/м, размерность – В·с/м = кг·м·с⁻²·А⁻¹).

Одним из способов записи уравнений Максвелла является их формулировка в терминах векторного и скалярного потенциалов.

При этом уравнение $div \vec{B} = 0$ удовлетворяется автоматически.

Подстановка выражения для $\vec{A}$ в

$$rot \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

приводит к уравнению $rot \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0$, согласно которому, так же как и в электростатике, вводится скалярный потенциал.

Однако теперь в электрическое поле $\vec{E}$ вносят вклад и скалярный и векторный потенциалы:

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t},$$

и уравнение $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ принимает вид

$$\text{div} \vec{E} = \text{div} \left(-\text{grad } \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \text{ или}$$

$$\nabla^2 \varphi + \frac{\partial}{\partial t} \text{div} \vec{A} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Из уравнений $\text{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$, $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ и $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$ следует

$$\text{rot rot} \vec{A} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(-\text{grad } \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right).$$

Используя равенство

$$\text{rot rot} \vec{A} = \text{grad div} \vec{A} - \nabla^2 \vec{A},$$

уравнение для векторного $\vec{A}$ и скалярного φ потенциалов можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vec{A} - \text{grad} \left(\text{div} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} &= -\mu_0 \vec{j}; \\ \nabla^2 \varphi + \frac{\partial}{\partial t} \text{div} \vec{A} &= -\frac{\rho}{\varepsilon_0}. \end{aligned}$$

Поскольку векторный $\vec{A}$ и скалярный φ потенциалы задаются неоднозначно, т.е. преобразование

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A}' + \vec{\nabla} \psi \text{ и } \varphi = \varphi' + \frac{\partial}{\partial t} \psi,$$

где ψ – произвольная функция координат и времени, не изменяют уравнений Максвелла (калибровочная инвариантность, по теореме Нётер ей соответствует закон сохранения электрического заряда), то для удобства решения этих уравнений накладывают дополнительное искусственное условие, называемое **калибровкой потенциала**. При решении различного класса задач удобнее бывает та или иная калибровка.

Калибровкой Кулона называют выражение

$$\text{div} \vec{A} = 0.$$

Эта калибровка используется при решении статических задач (с постоянными во времени токами и потенциалами). При этом уравнения Максвелла приобретают вид

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \text{ и } \nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}.$$

Их решениями являются:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho dV}{R};$$

$$A_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{j_x dV}{R}; \quad A_y = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{j_y dV}{R}; \quad A_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{j_z dV}{R};$$

Три последних являются проекциями векторного выражения для векторного потенциала:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{j} dV}{R},$$

где $\vec{j}$ – вектор плотности тока.

Калибровкой Лоренца называют условие

$$\operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0.$$

В этом случае уравнения Максвелла переписываются в виде:

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0};$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j}.$$

(В математике они называются уравнениями Даламбера.)

Уравнения, записанные в таком виде, удобнее использовать для решения нестационарных задач.

5.4. Физический смысл векторного потенциала

Обычно считается, что векторный потенциал – величина, не имеющая непосредственного физического смысла, вводимая лишь для удобства выкладок. Однако удалось поставить эксперименты, показавшие, что векторный потенциал доступен непосредственному измерению. Подобно тому, как электростатический потенциал связан с понятием энергии, векторный потенциал обнаруживает тесную связь с понятием импульса.

5.4.1. Обобщенный импульс

При движении частицы в электромагнитном поле полный импульс равен не просто

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad \text{а} \quad \vec{p} + q\vec{A}.$$

Следовательно, при движении частицы в чисто магнитном поле сохраняется именно эта величина. Налицо аналогия с полной энергией частицы:

$$E = T + U = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + q\varphi,$$

которую можно считать суммой кинетической и потенциальной энергий.

Если заряженная частица находится вблизи источника магнитного поля, которое в определённый момент времени быстро отключают, то она приобретает дополнительный импульс $\Delta \vec{p} = q\vec{A}$ даже в том случае, если $\vec{B}$ в точке нахождения частицы был равен нулю (например, с внешней стороны соленоида). В частности, если частица до отключения поля покоилась, то она начинает движение с импульсом, равным $q\vec{A}$. Таким образом, мы получаем возможность непосредственно измерить векторный потенциал в макроскопической системе.

5.4.2. Вектор–потенциал и магнитный поток

В соответствии с теоремой Стокса магнитный поток Φ через контур L легко выразить через циркуляцию векторного потенциала A по этому контуру:

$$\Phi = \iint_S \vec{B} d\vec{S} = \iint_S \text{rot } \vec{A} d\vec{S} = \oint_L \vec{A} d\vec{l}.$$

5.5. Граничные условия для векторов B, H, A

Используя принцип переходного слоя, для определения граничных условий применим интегральные законы – уравнения Максвелла в интегральной форме:

$$1) \oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0 \quad \text{и} \quad 2) \oint_L \vec{H} d\vec{l} = I_{\Sigma}.$$

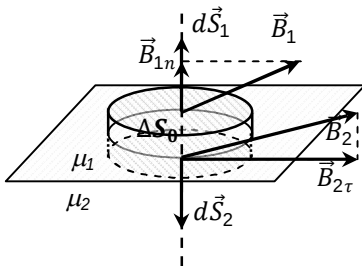


Рис. 22

1) Выбираем малый цилиндр таким образом, что его образующие перпендикулярны поверхности раздела двух сред (рис. 22). Сверху – среда с магнитной проницаемостью μ_1 , снизу – с μ_2 ($\mu_2 > \mu_1$). Площадь поперечного сечения цилиндра – ΔS_0 . Как меняется поле при переходе из одной среды в другую?

Рассмотрим первое условие: $\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0$.

Разобьём поток вектора $\vec{B}$ сквозь замкнутую поверхность данного цилиндра на три части – сквозь верхний и нижний торцы и боковую поверхность.

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = \int_{S_1} B_{1n} dS_1 - \int_{S_1} B_{2n} dS_2 + \int_{S_{\text{бок}}} \langle B \rangle dS_{\text{бок}} = 0.$$

У второго слагаемого знак «минус», поскольку угол между векторами $d\vec{S}_2$ и $\vec{B}_2$ тупой. При стремлении высоты цилиндра к нулю третье слагаемое также стремится к нулю. Далее, считая величины B_{1n} и B_{2n} на торцах цилиндра постоянными (в силу малости самого цилиндра), а площади торцов равными ΔS_0 , приходим к выводу, что

$$B_{1n} = B_{2n},$$

нормальная компонента вектора магнитной индукции на границе раздела непрерывна.

Используя второе материальное условие $\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}$, для нормальной компоненты вектора $\vec{H}$ получим:

$$\mu_1\mu_0 H_{1n} = \mu_2\mu_0 H_{2n}, \text{ откуда } \frac{H_{1n}}{H_{2n}} = \frac{\mu_2}{\mu_1},$$

т.е. нормальная компонента вектора напряжённости $\vec{H}$ на границе раздела двух сред с магнитными проницаемостями μ_1 и μ_2 испытывает скачок:

$$\Delta H_n = H_{2n} - H_{1n} = \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} - 1\right) H_{1n}.$$

2) Для тангенциальных компонент используем уравнение Максвелла, выражающее циркуляцию магнитного поля: $\oint_L \vec{H} d\vec{l} = I_\Sigma$.

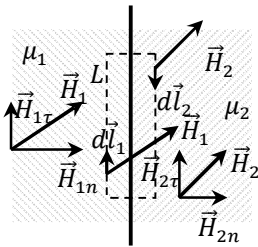


Рис. 23

Выберем вдоль границы раздела двух сред с магнитными проницаемостями μ_1 и μ_2 малый замкнутый контур L , как показано на рис. 23. Направление обхода вдоль контура – по часовой стрелке. В отсутствие токов вдоль границы циркуляция поля $\vec{H}$ по данному контуру равна нулю. Разобьём циркуляцию $\vec{H}$ на участки, параллельные и перпендикулярные границе раздела:

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_1 H_{1\tau} dl_1 + \int_{\perp} H_{1,2n} dl_{\perp} - \int_1 H_{2\tau} dl_2 - \int_{\perp} H_{2,1n} dl_{\perp} = 0.$$

У третьего и четвёртого слагаемых знак «минус», поскольку угол между соответствующими векторами $d\vec{l}$ и $\vec{H}$ тупой. Второе и четвёртое слагаемые, в силу малости выбранного контура L , равны по модулю и не

дают вклад в циркуляцию вектора $\vec{H}$. Далее, считая величины $H_{1\tau}$ и $H_{2\tau}$ на отрезках l_1 и l_2 контура L постоянными (по той же причине), приходим к выводу, что

$$H_{1\tau}l_1 = H_{2\tau}l_2 \text{ или } H_{1\tau} = H_{2\tau},$$

т.е. тангенциальная компонента вектора напряжённости магнитного поля на границе раздела непрерывна.

Для тангенциальной компоненты вектора индукции магнитного поля получим $B_{2\tau} = \frac{\mu_2}{\mu_1} B_{1\tau}$, откуда следует, что тангенциальная компонента вектора индукции $\vec{B}$ испытывает скачок при переходе через границу раздела двух сред:

$$\Delta B_\tau = B_{2\tau} - B_{1\tau} = \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} - 1\right) B_{1\tau}.$$

Для векторного потенциала $\vec{A}$ при переходе через границу нормальная и тангенциальная составляющие не меняются.

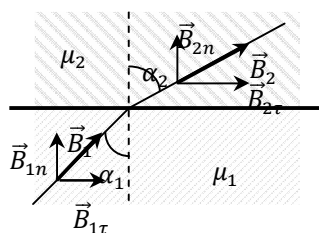


Рис. 24

Силовые линии магнитного поля при переходе через границу раздела двух сред (на рис. 24 предполагается $\mu_2 > \mu_1$) преломляются так, что $\operatorname{tg} \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{\mu_2}{\mu_1}$, силовые линии «прижимаются» к границе раздела в среде с большим значением магнитной проницаемости μ .

Способность силовых линий магнитного поля преломляться (стягиваться к границе) используется для магнитного экранирования (рис. 25).

Магнитное поле внутри полости будет ослаблено во много раз, но не полностью (как в случае электростатики).

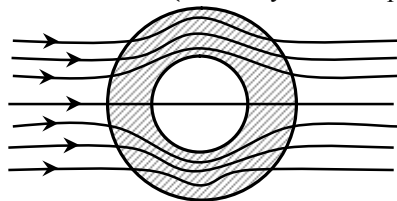


Рис. 25

Пример: если диаметр трубы 5,5 см, а толщина стенки 5 мм, то при таких размерах индукция магнитного поля в полости трубы составит 0,2% поля вне экрана.

Применяется для защиты от магнитных наводок.

Для качественной защиты используется двойное экранирование.

5.6. Магнитные цепи

Магнитные цепи – элементы, участки, совокупность устройств, по которым проходят магнитные силовые линии. Для них пользуются общими законами.

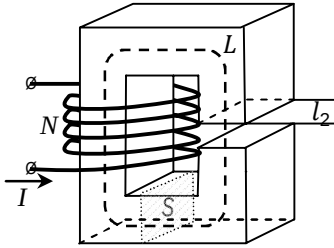


Рис. 26

На рис. 26 показан магнитопровод в виде сердечника с воздушным зазором. Магнитная проницаемость сердечника во много раз больше магнитной проницаемости воздуха ($\mu_{\text{серд}} \gg \mu_{\text{возд}}$). Длина сердечника вместе с зазором

$$L = l_1 + l_2,$$

где l_2 – длина воздушного зазора.

В магнитопроводе с помощью катушки из N витков с током I создаётся магнитное поле. Воспользуемся теоремой полного тока: $\oint_L \vec{H} d\vec{l} = I_{\Sigma}$. Отсюда следует

$$H_1 l_1 + H_2 l_2 = NI.$$

Поскольку магнитный поток в сердечнике $\Phi_{\text{серд}} = (\vec{B}\vec{S})_{\text{серд}}$ равен потоку в зазоре $\Phi_{\text{возд}} = (\vec{B}\vec{S})_{\text{возд}}$, а $\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}$, то $H_1 = \frac{\Phi}{\mu_0 \mu_1 S_1}$; $H_2 = \frac{\Phi}{\mu_0 \mu_2 S_2}$.

Подставляя полученные значения H_1 и H_2 в исходную формулу, получим:

$$\Phi \cdot \left(\frac{l_1}{\mu_0 \mu_1 S_1} + \frac{l_2}{\mu_0 \mu_2 S_2} \right) = NI, \text{ откуда } \Phi = \frac{NI}{\left(\frac{l_1}{\mu_0 \mu_1 S_1} + \frac{l_2}{\mu_0 \mu_2 S_2} \right)}.$$

Последнее выражение можно рассматривать как аналог закона Ома для полной электрической цепи: $NI = \mathcal{E}_{\text{магн}}$ – магнитная ЭДС; отношение $\frac{l_i}{\mu_0 \mu_i S_i} = R_{\text{магн}}$ – магнитное сопротивление соответствующего участка магнитной цепи.

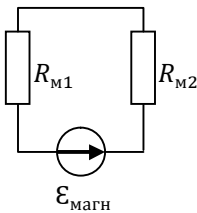


Рис. 27

Эквивалентная схема магнитной цепи (рис. 27)

$$\Phi = \frac{\mathcal{E}_{\text{магн}}}{R_{M1} + R_{M2}}.$$

5.7. Явление самоиндукции. Индуктивность

Явление электромагнитной индукции наблюдается во всех случаях, когда изменяется магнитный поток, пронизывающий контур. При этом причины изменения потока не важны.

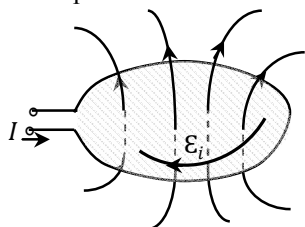


Рис. 28

Имеется контур с током I (рис. 28). Если произошло изменение тока ΔI , то происходит изменение потока магнитного поля $\Delta \Phi$, создаваемого этим контуром с током I . Тут же возникает ЭДС индукции ϵ_i , препятствующая изменению тока в цепи:

$$\epsilon \epsilon_i = - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_i.$$

Если вместо одного контура (витка) имеется катушка с N витками, то такая катушка создаёт поток $\Phi = \frac{NI}{R_{\text{магн}}}$, в каждом витке которой возникает ЭДС индукции ϵ_i . Тогда полная ЭДС индукции, возникающая в такой катушке, равна:

$$\epsilon \epsilon_{i\Sigma} = -N \left(\frac{d\Phi}{dt} \right)_i = -N \frac{N}{R_{\text{магн}}} \frac{dI}{dt} = - \frac{N^2 \mu_0 \mu S}{l} \frac{dI}{dt},$$

где знак « - » указывает на то, что ЭДС индукции всегда направлена против причины, её вызывающей;

коэффициент $L = \frac{N^2 \mu_0 \mu S}{l}$ — называется индуктивностью катушки. Эта величина всегда положительная, зависит от геометрии катушки и свойств среды (размерность индуктивности — генри, Гн = В · с/А).

ЭДС индукции, возникающая в катушке при изменении собственного тока, называется ЭДС самоиндукции, т.е.

$$\epsilon \epsilon_{i\Sigma} = -L \frac{dI}{dt}.$$

Явление взаимной индукции. Взаимная индуктивность.

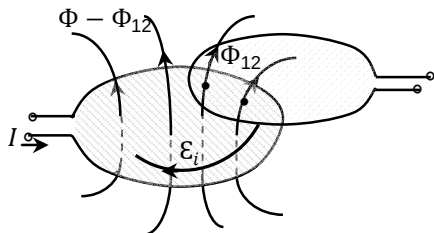


Рис. 29

Магнитный поток 1-го контура пронизывает 2-й контур (рис. 29).

Φ_{12} — рабочий поток, осуществляющий связь контуров по магнитному полю.

Если меняется ток в первом контуре, то меняется и

поток Φ_{12} , в результате во 2-м контуре появляется ЭДС $\mathcal{E}_{M2}$, компенсирующая воздействие потока Φ_{12} :

$$\mathcal{E}_{M2} = -N_2 \frac{d\Phi_{12}}{dt}.$$

В общем случае поток Φ_{12} пропорционален первичному потоку $\Phi_{12} = k\Phi$, тогда $\mathcal{E}_{M2} = -N_2 \frac{d\Phi_{12}}{dt} = -N_2 \frac{d}{dt} \left(\frac{kN_1 I_1}{R_{M2}} \right) = -k \frac{N_2 N_1}{R_{M2}} \frac{dI_1}{dt} = -L_{12} \frac{dI_1}{dt}$, где $L_{12} = L_{21}$ – взаимная индуктивность. (Аналогично $\mathcal{E}_{M1} = -L_{21} \frac{dI_2}{dt}$).

Коэффициент связи k характеризует магнитную связь между двумя контурами. Если отсутствует рассеяние магнитного потока, то $k = 1$. Для этого случая

$$L_{12} = L_{21} = \frac{N_1 N_2}{R_M} = \sqrt{\frac{N_1^2}{R_M}} \sqrt{\frac{N_2^2}{R_M}} = \sqrt{L_1 L_2},$$

где L_1 и L_2 – индуктивности 1-го и 2-го контуров.

В случае если $k \neq 1$, взаимная индуктивность $L_{12} = L_{21} = k\sqrt{L_1 L_2}$.

Катушка – накопитель энергии магнитного поля.

5.8. Энергия магнитного поля (на примере уединённой катушки)

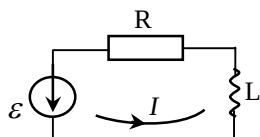


Рис. 30

Рассмотрим электрическую цепь (рис. 30), состоящую из источника тока $\mathcal{E}$ и катушки с омическим (активным) сопротивлением R и индуктивностью L . Из второго закона Кирхгофа получим:

$$\mathcal{E} = U_R + U_L = IR + L \frac{dI}{dt}.$$

Умножим почленно обе части равенства на $I dt$. Получим

$$\mathcal{E} \cdot I dt = I^2 R \cdot dt + LI dI.$$

Левая часть равенства – это энергия, отдаваемая источником за время dt ; в правой части первое слагаемое – энергия, выделяемая в виде тепла в омическом сопротивлении R ; второе слагаемое – энергия, идущая на создание магнитного поля в уединённой, неподвижной, недеформирующейся катушке (что нас и интересует): $dW_M = LI dI$.

Если ток в катушке изменяется от 0 до I , то какова полная энергия, запасённая в катушке? Это

$$W_M = L \int_0^I I dI = \frac{LI^2}{2}.$$

Факт вхождения индуктивности в выражение полной энергии показывает инерционные свойства магнитного поля (не происходит мгновенного появления или исчезновения магнитного поля).

Подставим в W_m выражение для индуктивности $\frac{N^2 \mu_0 \mu S}{l} = L$. Получим $W_m = \frac{LI^2}{2} = \frac{N^2 \mu_0 \mu S}{2l} I^2 = \frac{1}{2} \mu_0 \mu S l \left(\frac{NI}{l} \right)^2 = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} V$, где $\frac{NI}{l} = H$ – напряжённость магнитного поля катушки, $V = Sl$ – её объём.

Плотность энергии магнитного поля

$$w = \frac{W}{V} = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} = \frac{BH}{2}, \text{ где } B = \mu_0 \mu H,$$

т.е. в области существования магнитного поля есть магнитная энергия; магнитное поле представляет собой особую форму материи, сосредоточенную в том же объеме, что и магнитное поле.

6. СТАЦИОНАРНОЕ ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ

Стационарное температурное поле описывается теми же самыми дифференциальными уравнениями (ДУ), что и для потенциальных полей, по принципу аналогии.

Существует метод неразрушающего контроля (НК), основанный на стационарном температурном поле: ГОСТ 23483–79 выделяет стационарный метод теплового вида НК.

Основная особенность: объект поддерживается при постоянной температуре и распределение тепла по его поверхности зависит от наличия дефектов на поверхности и под поверхностью. Распределение температуры по поверхности нагретого объекта (до $T = \text{const}$) будет различным у объектов с дефектами и без них.

Пример теплового поля очевиден. В названии НК содержится вид зондирующей энергии – тепловой.

Изменить энергию можно: а) контактным силовым воздействием; б) сообщением телу дополнительного тепла. Таким образом, основная характеристика теплового поля – температура – величина, характеризующая меру нагретости тела.

Существуют три способа передачи тепловой энергии от объекта к объекту или от одной части объекта к другой его части:

- 1) теплопроводность;
- 2) конвективный теплообмен (например, охлаждается жидкость и нагревается тело);
- 3) тепловое излучение (имеет чисто электромагнитную природу).

Если один конец металлического стержня нагрет до более высокой температуры ($T_2 > T_1$), то от нагретого конца к холодному движется поток фононов, которые взаимодействуя с электронами, увлекают их к холодному концу. На конце с низкой температурой появится избыточная концентрация электронов, что вызовет появление разности потенциалов. С течением времени установится равновесие ($\Delta U = k\Delta T$, возникает термоЭДС).

В диэлектриках перенос тепла осуществляется за счет колебаний узлов решетки.

На практике трудно выделить в чистом виде какой-либо из процессов – они существуют в разной степени вместе.

6.1. Основные параметры и понятия теплового поля

Изотермическая поверхность – поверхность, температура во всех точках которой одинакова.

Изотерма – линия, образованная пересечением изотермической поверхности с поверхностью тела.

Имеется произвольное тело (рис. 31):

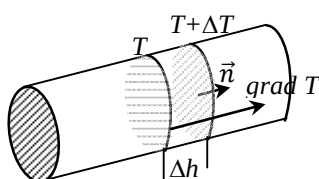


Рис. 31

T и $(T+\Delta T)$ – температуры двух изотерм на поверхности тела;

Δh – расстояние между двумя соседними изотермами;

$\vec{n}$ – единичный вектор нормали к изотермической поверхности с температурой $(T+\Delta T)$ внутри тела.

6.1.1. Градиент температуры

При смещении вдоль нормали к изотермической поверхности в сторону роста температуры отношение прироста температуры на единицу длины достигает максимального значения. Это отношение называют градиентом температуры. Градиент – величина векторная, направление совпадает с направлением нормали $\vec{n}$:

$$\text{grad } T = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \frac{\Delta T}{\Delta h} \vec{n} = \frac{\partial T}{\partial h} \vec{n}.$$

Внутри тела наблюдается перенос тепла из области с высокими температурами в область с низкими температурами по кратчайшему пути, т.е. в направлении, противоположном градиенту температуры.

Для количественного описания процесса переноса тепла вводится понятие вектора плотности теплового потока $\vec{q}$:

$$\vec{q} = -\frac{1}{s} \frac{dQ}{dt} \vec{n},$$

где Q – количество тепла, переносимое от одной изотермической поверхности ($S_{T+\Delta T}$) к другой (S_T).

6.1.2. Закон Фурье

Закон Фурье устанавливает связь плотности теплового потока с градиентом температуры, а именно

$$\vec{q} = -\lambda \operatorname{grad} T,$$

где λ – коэффициент теплопроводности, структурно чувствительная характеристика вещества. Размерность $[\lambda] = \text{Вт/м} \cdot ^\circ\text{C}$.

Для реальных твёрдых тел λ принимает значения в широких пределах. Например, $\lambda_{\text{CCl}_4} = 0,0086 \text{ Вт/м} \cdot ^\circ\text{C}$; $\lambda_{\text{Ag}} = 416 \text{ Вт/м} \cdot ^\circ\text{C}$.

6.1.3. Дифференциальное уравнение теплопроводности

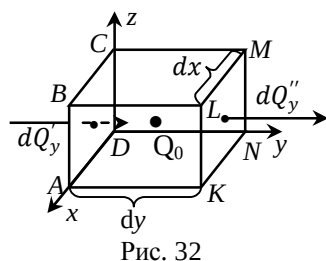


Рис. 32

Температура на грани ABCD (рис. 32) равна $T_{ABCD} = T$;

на грани KLMN – $T_{KLMN} = T +$

$\frac{\partial T}{\partial y} dy$;

dQ'_y – тепло, поступающее через ABCD;

dQ''_y – тепло, выходящее через KLMN.

Кроме того, внутри объема существует источник тепла с удельной мощностью Q_0 .

Здесь выполняется закон сохранения энергии – основа дальнейших рассуждений:

$$dQ = dQ_1 + dQ_2.$$

Считаем, что dQ_1 – теплота, подведенная в единицу времени (тепловая мощность) к объему dV в результате теплопроводности; dQ_2 – тепловая мощность, выделившаяся в объеме dV от внутреннего источника. Тогда dQ – тепловая мощность, идущая на повышение энергии объема dV .

Величина dQ'_{y1} – тепловая мощность, подведенная к объему dV вдоль оси y ; dQ''_{y1} – тепловая мощность, выделенная из объема dV вдоль оси y .

Используя закон Фурье, определим величины dQ'_{y1} и dQ''_{y1} :

$$dQ'_{y1} = -\lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} dx \cdot dz; \quad dQ''_{y1} = -\lambda_y \frac{\partial}{\partial y} \left(T + \frac{\partial T}{\partial y} dy \right) dx \cdot dz.$$

В результате в объём dV вдоль оси y за счёт теплопроводности поступит тепловая мощность:

$$dQ_{y1} = dQ'_{y1} - dQ''_{y1} = \lambda_y \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} dx \cdot dy \cdot dz.$$

Аналогично получим величину тепловой мощности, поступающей в объём dV за счёт теплопроводности вдоль осей x и z . При этом необходимо учесть, что для анизотропной среды коэффициенты теплопроводности вдоль разных осей могут иметь отличные друг от друга значения.

Кроме того, в объём dV от внутреннего источника тепла с удельной мощностью Q_0 поступает тепловая мощность:

$$dQ_2 = Q_0 dV.$$

Вся полученная тепловая мощность идёт на нагрев тела, т.е. на повышение его температуры в единицу времени:

$$dQ = c\rho \frac{\partial T}{\partial t} dV = dQ_1 + dQ_2.$$

Окончательно получим уравнение для нестационарного теплового процесса в трехмерном пространстве:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \lambda_y \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \lambda_z \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + Q_0.$$

Уравнение сложное, но оно упрощается для различных типов задач:

- 1) Для стационарного поля ($\frac{dT}{dt} = 0$) слева имеем ноль.
- 2) В изотропной среде $\lambda_x = \lambda_y = \lambda_z = \lambda$, тогда для стационарного процесса, сокращая на λ , получаем уравнение Пуассона:

$$\nabla^2 T = -Q_0 / \lambda.$$

- 3) Для стационарного поля в изотропной среде и при отсутствии внутреннего источника получаем уравнение Лапласа:

$$\Delta T = 0.$$

7. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕМЕННОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

1) Переменное электромагнитное поле – сумма изменяющихся во времени, взаимосвязанных и обуславливающих друг друга электрического и магнитного полей.

2) Электромагнитное поле полностью описывается векторами $\vec{E}$ и $\vec{H}$, а также $\vec{B}$ и $\vec{D}$ для различных сред.

Говоря о переменном электрическом поле, подразумеваем связь вектора $\vec{E}$ с изменением его во времени и пространстве: $\vec{E} = \vec{E}(t, \vec{r})$.

3) Переменное электромагнитное поле – один из видов материи, обладает массой, энергией, импульсом и может превращаться из одного вида энергии в другой.

4) Любое возмущение электромагнитного поля, произошедшее, например, в диэлектрической среде, с огромной, но конечной скоростью ($\approx 3 \cdot 10^8$ м/с) распространяется на большие расстояния.

5) При исследовании электромагнитных процессов будем пользоваться уравнениями Максвелла - последовательным обобщением законов электричества и магнетизма, известных с древности.

Теория Максвелла характеризуется несколькими признаками:

1) Теория Максвелла является теорией феноменологической, т.е. электрические и магнитные свойства среды описываются следующими величинами: ϵ , μ и γ .

2) Не рассматриваем (как и в предыдущих случаях) атомное, электронное строение сред, следовательно, теория – макроскопическая: рассматриваемые поля, создаваемые макроскопическими зарядами и токами в объемах $V \gg V_M$, где V_M – объем, занимаемый молекулой. Признак макроскопичности: поля изучаются на расстояниях $R \gg d$, где d – линейные размеры молекул и атомов.

3) Имеем дело с промежутками времени $\Delta t \gg \Delta t_{хар}$ времен, характеризующих процессы в молекулах и атомах.

Другую теорию, где знак «>>» меняется на «<<», называют электронной теорией Лоренца.

Будем заниматься классической электродинамикой, одним из свойств которой является БЛИЗКОДЕЙСТВИЕ – скорость распространения взаимодействия электрического и магнитного полей равна скорости света в данной среде. В электродинамике полностью раскрывается электромагнитная природа света.

7.1. Уравнения Максвелла

Первое уравнение Максвелла в дифференциальной форме:

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{j}_{\text{пр}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

Слева – производные $\vec{H}$ по координатам, справа – сумма вектора $\vec{j}_{\text{пр}}$ – плотности тока проводимости и производная $\vec{D}$ по t , поэтому эта производная имеет размерность плотности тока ($\frac{d\vec{D}}{dt} = \vec{j}_{\text{см}}$ – плотность тока смещения, ввел Максвелл).

Дифференциальная форма записи закона:

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{j}_{\text{пр}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

позволяет выявить структуру поля (выяснить соотношение векторов в 3-мерном пространстве). Это уравнение справедливо в любой произвольной системе координат.

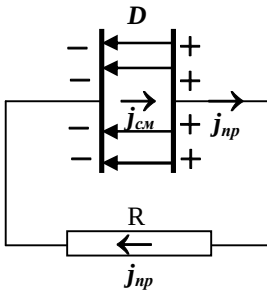


Рис. 33

Рассмотрим электрический конденсатор, включенный в электрическую цепь переменного тока (рис. 33). Допустим, он был заряжен и при замыкании цепи стал разряжаться.

Заряды, двигаясь от «+» к «-» по внешнему участку цепи, достигают пластины «-», но линии тока не прерываются: в пространстве между обкладками возникает $\vec{j}_{\text{см}}$ – плотность тока смещения. При этом в пространстве между пластинами конденсатора поле $\vec{D}$ убывает и вектор плотности тока смещения $\vec{j}_{\text{см}}$ направлен в сторону, противоположную вектору $\vec{D}$, т.е. совпадает с направлением тока проводимости во внешней цепи.

В присутствии диэлектрической среды

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}.$$

В переменном поле плотность тока смещения:

$$\vec{j}_{\text{см}} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$

состоит из двух слагаемых, каждое из которых имеет определённый смысл:

– первое – плотность тока смещения в вакууме; этот ток соответствует изменению электрического поля во времени и не сопровождается

каким-либо движением зарядов, выделением тепла или других видов энергии;

– второе – слагаемое обусловлено упорядоченным смещением связанных зарядов под действием переменного электромагнитного поля. Это смещение можно рассматривать как своеобразный ток смещения связанных зарядов в диэлектрике. Если в диэлектрике произошло изменение электрического поля, то появляется ток смещения, связанный с переориентацией связанных зарядов.

К ситуации на рис. 33 добавим, что линия плотности тока смещения не обязательно является продолжением линии тока проводимости. В общем случае токи текут одновременно, в одной области пространства, их величины находятся в произвольном соотношении.

Первое уравнение Максвелла в интегральной форме можно представить как:

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} d\vec{l} = \iint_S \operatorname{rot} \vec{H} d\vec{S} = \iint_S (\vec{j}_{\text{пр}} + \vec{j}_{\text{см}}) d\vec{S}.$$

Физическое содержание первого уравнения Максвелла: вихревое магнитное поле ($\operatorname{rot} \vec{H}$) создается как током проводимости, так и током смещения. Всякое изменение электрического поля во времени сопровождается появлением вихревого магнитного поля.

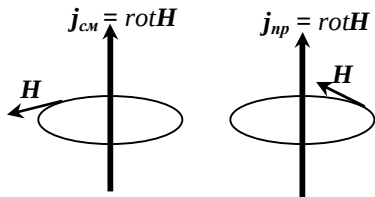


Рис. 34

Вокруг каждой линии плотности тока проводимости, точно так же как и вокруг линии плотности тока смещения, имеется элементарная замкнутая линия напряженности магнитного поля (рис. 34), описываемая оператором $\operatorname{rot} \vec{H}$:

$$\vec{D} = \varepsilon_a \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}_{\text{np}} + \varepsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

В диэлектрике между обкладками конденсатора протекает ток смещения $I_{\text{см}} = \vec{j}_{\text{см}} \vec{S}$, где S – площадь обкладок.

Пользуясь определением вектора плотности тока смещения $\vec{j}_{\text{см}}$, получим:

$$I_{\text{см}} = \varepsilon_a \frac{\partial E}{\partial t} S = \varepsilon_a S \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{U}{d} \right) = \frac{\varepsilon_a S}{d} \cdot \frac{\partial U}{\partial t}.$$

Между $I_{см}$ и изменением потенциала на емкости существует коэффициент $C = \frac{\epsilon_0 \epsilon \cdot S}{d}$ – электрическая емкость конденсатора, зависит от геометрии и свойств диэлектрика.

$$I_{см} = C \frac{dU}{dt}.$$

Выводы теории поля можно применять к участкам среды.

Уравнение непрерывности тока. Раньше записывали в случае постоянного тока $\text{div} \vec{J} = 0$ (линии тока замкнуты). Рассмотрим, как изменится данный закон в случае переменного электромагнитного поля.

Записываем первое уравнение Максвелла: $\text{rot} \vec{H} = \vec{J}_{np} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$.

От левой и правой частей данного уравнения возьмём дивергенцию и учтём, что div rot (любого поля) $\equiv 0$. Получим:

$0 = \text{div} (\text{rot} \vec{H}) = \text{div} (\vec{J}_{np} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t})$ и, следовательно, $\text{div} (\vec{J}_{np} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) = 0$, т.е. в переменном электромагнитном поле полный ток тоже непрерывен.

Далее:

$$\text{div} \vec{J}_{np} = - \text{div} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial t} \text{div} \vec{D},$$

но $\text{div} \vec{D} = \rho_{свб}$ – объемная плотность свободных зарядов,

тогда $\text{div} \vec{J}_{np} = - \frac{\partial \rho_{свб}}{\partial t}$ – линии тока проводимости не непрерывны, т.е. линии начинаются и заканчиваются на свободных зарядах, плотность которых меняется со временем. Кроме того, закон называется принципом неуничтожимости (сохранения) зарядов. Заряды не возникают и не исчезают, они лишь меняются в пространстве и во времени.

Это можно продемонстрировать следующим образом: обе части полученного уравнения проинтегрируем по объему:

$$\int_V \text{div} \vec{J}_{np} dV = - \int_V \frac{\partial}{\partial t} \rho_{свб} dV = - \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho_{свб} dV = - \frac{\partial}{\partial t} Q_{свб}.$$

Первый интеграл заменим согласно теореме Остроградского-Гаусса:

$$\int_V \text{div} \vec{J}_{np} dV = \oint_S \vec{J}_{np} \cdot \vec{dS} = I = - \frac{\partial Q_{свб}}{\partial t} -$$

физическое определение электрического тока, выходящего сквозь замкнутую поверхность S из объема V . Знак «-» указывает на убыль заряда $Q_{свб}$ в объеме V , ограниченном замкнутой поверхностью S .

Второе уравнение Максвелла (является обобщением закона электромагнитной индукции Фарадея): ЭДС в замкнутом контуре, который пронизывает переменный магнитный поток (рис. 35), равна

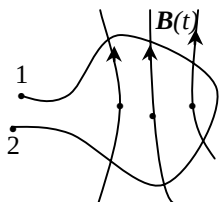


Рис. 35

$$\varepsilon = - \frac{d\Phi}{dt} = \oint_{\Gamma} \vec{E}_{\text{стр}} d\vec{l}.$$

Это исходная формула (все процессы происходят, даже если нет контура).

Кроме того, в разомкнутом контуре

$$\varepsilon = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E}_{\text{стр}} d\vec{l}.$$

Вспомним, что $\Phi = \int d\Phi = \int \vec{B} d\vec{S}$, тогда приравнявая, получим второе уравнение Максвелла в интегральной форме:

$$\oint_{\Gamma} \vec{E}_{\text{стр}} d\vec{l} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} d\vec{S}$$

($\frac{d}{dt} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t}$, т.к. интересует изменение потока только по одной переменной, а не по нескольким).

Выведем дифференциальную форму закона Фарадея: по теореме Стокса циркуляция векторного поля $\vec{A}$ вдоль замкнутого контура Γ равна потоку ротора этого поля сквозь площадь S , натянутую на данный контур:

$$\oint_{\Gamma} \vec{A} d\vec{l} = \iint_S \text{rot } \vec{A} d\vec{S}.$$

В данном случае из

$$\varepsilon = \oint_{\Gamma} \vec{E} d\vec{S} = \iint_S \text{rot } \vec{E} d\vec{S} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} d\vec{S} = - \iint_S \left(\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \right) d\vec{S}$$

следует равенство подынтегральных выражений:

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Это уравнение векторное, в частных производных, в произвольной системе координат.

Физическое содержание второго уравнения Максвелла: вихревое электрическое поле ($\text{rot } \vec{E}$) создается переменным магнитным полем ($\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \neq 0$), любое изменение во времени магнитного поля сопровождается появлением вихревого электрического поля (рис. 36).

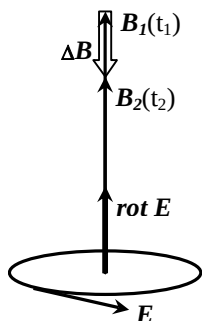


Рис. 36

Третье уравнение Максвелла. Для однозначного определения векторного поля, кроме ротора, нужно также знать и дивергенцию этого поля. Следовательно, два первых уравнения дополняются дивергенциями электромагнитного поля:

$\operatorname{div} \vec{D} = \rho_{своб}$ – третье уравнение Максвелла – обобщение теоремы Гаусса на случай переменного электромагнитного поля.

Очевидно соотношение $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho_{своб}}{\epsilon_0 \epsilon}$, полученное из первого уравнения Максвелла и первого материального уравнения.

Физический смысл третьего уравнения Максвелла: каждый заряд является источником электромагнитного поля. Линии $\mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$ имеют начало (исток) и конец (сток) в тех точках пространства, где имеются свободные заряды; это уравнение скалярное (дивергенция приводит к скалярным величинам).

Четвертое уравнение Максвелла в дифференциальной форме

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0.$$

Физический смысл четвертого уравнения Максвелла: в природе не обнаружены магнитные заряды.

Эти четыре уравнения необходимо дополнить **пятым уравнением Максвелла** (материальным):

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E} ; \vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H} ; \vec{j} = \gamma \vec{E}.$$

Эти уравнения рисуют полную картину электромагнитного поля.

Заключение по уравнениям Максвелла

Анализируя уравнения Максвелла, видим, что в них число неизвестных равно двенадцати (четыре вектора по три проекции) и восемь уравнений (шесть векторных и два скалярных).

В случае анизотропных сред величины связи (ϵ , μ , γ) становятся тензорными и связь, например, между $\vec{B}$ и $\vec{H}$ является матричной:

$$\begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \mu_0 \begin{pmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & \mu_{xz} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & \mu_{yz} \\ \mu_{zx} & \mu_{zy} & \mu_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix} = \mu_0 \vec{\mu} \vec{H}.$$

Все эти пять уравнений составлены относительно реально существующих в природе величин.

7.2. Уравнения Максвелла с магнитными токами и зарядами

В природе не существует магнитных зарядов. Система уравнений Максвелла состоит из реальных величин, но не является симметричной, что создает неудобства при анализе физических полей. Поэтому целесо-

образно ввести искусственно магнитные токи с плотностью $\vec{j}^M$ и магнитные заряды, плотность которых $\rho_{своб}^M$. В старые формулы вставим $\vec{j}^M$, $\rho_{своб}^M$ и γ^M – магнитная проводимость.

Напишем полную систему уравнений Максвелла с учетом введенных изменений:

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{H} &= \vec{j}^{\vec{}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}; \\ \text{rot} \vec{E} &= -\vec{j}^M - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \\ \text{div} \vec{D} &= \rho_{своб}^{\vec{}}; \\ \text{div} \vec{B} &= \rho_{своб}^M; \\ \vec{D} &= \epsilon_a \vec{E}; \vec{B} = \mu_a \vec{H}; \vec{j}^{\vec{}} = \gamma \vec{E}; \vec{j}^M = \gamma^M \vec{H}. \end{aligned}$$

7.3. Уравнения Максвелла с учетом сторонних электрических и магнитных токов и зарядов

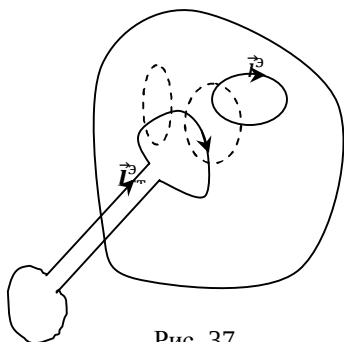


Рис. 37

Как правило, сторонние токи и сторонние заряды задаются внешним источником энергии.

Пример. В область пространства с помощью генератора по петле заставляют течь заряды (рис. 37). Величина $\vec{j}_{cm}$ носит сторонний характер, в то время как $\vec{j}^{\vec{}}$ обусловлено действием поля в самом объекте.

Система уравнений Максвелла приобретает здесь еще одну модификацию:

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{H} &= \vec{j}^{\vec{}} + \vec{j}_{cm}^{\vec{}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}; & \text{rot} \vec{E} &= -\vec{j}^M + \vec{j}_{cm}^M - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \\ \text{div} \vec{D} &= \rho_{своб}^{\vec{}} + \rho_{своб}^{cm}; & \text{div} \vec{B} &= \rho_{своб}^M + \rho_{своб}^{cm}; \\ & & \begin{cases} \vec{D} = \epsilon_a \vec{E} \\ \vec{B} = \mu_a \vec{H} \\ \vec{j}^{\vec{}} = \gamma \vec{E} \\ \vec{j}^M = \gamma^M \vec{H}. \end{cases} \end{aligned}$$

8. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА В КОМПЛЕКСНЫХ АМПЛИТУДАХ

1) Записанные системы уравнений справедливы для любого закона поведения источников и векторов поля во времени.

2) Для практики наибольший интерес представляют поля, изменяющиеся во времени по гармоническому закону ($\sin\omega t, \cos\omega t$). Признаком гармонического закона является одна частота ω , и такие поля называются монохроматическими. Если процесс не монохроматический, то его можно представить как сумму простых одночастотных зависимостей, для каждой из которых находится решение задачи.

Из курса «Теория цепей и сигналов» (ТЦиС) известно, что гармонический анализ существенно упрощается при использовании метода комплексных амплитуд (МКА): из уравнений исключается одна из переменных.

МКА применим при трех условиях:

- 1) источники гармонические;
- 2) среда линейная;
- 3) уравнения линейные («+», «-», интегр., диф.).

Если содержатся операции («*», «/», « $\sqrt{\quad}$ » и т.п.), то МКА не применим.

Рассмотрим методику представления одного из векторов поля в комплексных амплитудах. Например, $\vec{E}$ (в гармоническом поле).

В декартовой системе координат

$$\vec{E} = \vec{E}(x, y, z, t) = \vec{E}_m(x, y, z) \cos(\omega t + \varphi_1),$$

где $\vec{E}_m(x, y, z)$ – амплитуда колебаний, вектор (не зависит от времени);
 $\cos(\omega t + \varphi_1)$ – фазовый множитель.

Теперь

$$\vec{E}(t) = E_x(t)\vec{e}_x + E_y(t)\vec{e}_y + E_z(t)\vec{e}_z,$$

где $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ – единица вектора.

Но $E_x(t) = E_{mx} \cos(\omega t + \varphi_x) = \operatorname{Re}[E_{mx} e^{i\varphi_x} e^{i\omega t}]$,
 т.к., согласно теореме Эйлера

$$e^{i\varphi_1} = (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \text{ и } \operatorname{Re}[e^{i\varphi_1}] = \cos \varphi_1,$$

то же самое для $E_y(t)$ и $E_z(t)$.

Учитывая справедливость равенства $\sum \operatorname{Re} A_i = \operatorname{Re} \sum A_i$, первоначальное выражение приобретает вид

$$\vec{E}(t) = \operatorname{Re}[(E_{mx} e^{i\varphi_x} \vec{e}_x + E_{my} e^{i\varphi_y} \vec{e}_y + E_{mz} e^{i\varphi_z} \vec{e}_z) e^{i\omega t}].$$

МКА предполагает, что величина в круглых скобках – комплексная амплитуда $\vec{E}_m$:

$$\vec{E} = \text{Re}[\vec{E}_m e^{i\omega t}].$$

Перепишем систему уравнений Максвелла для комплексных амплитуд. Возьмем самую простую формулу:

$$\text{rot } \text{Re}(\vec{H}_m e^{i\omega t}) = \text{Re} \vec{J}_m e^{i\omega t} + \text{Re} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{D}_m e^{i\omega t}).$$

Операция взятия Re-части по отношению к взятию определенной производной (rot) независимы, тогда

$$\text{Re } \text{rot}(\vec{H}_m e^{i\omega t}) = \text{Re} \vec{J}_m e^{i\omega t} + \text{Re} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{D}_m e^{i\omega t}); \quad \vec{D}_m = \varepsilon_a \vec{E}_m;$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\vec{D}_m e^{i\omega t}) = (\frac{\partial}{\partial t} \vec{D}_m) e^{i\omega t} + \vec{D}_m i\omega e^{i\omega t}$$

$\vec{D}_m$ не зависит от времени, тогда

$$\text{Re } \text{rot}(\vec{H}_m e^{i\omega t}) = \text{Re}(\vec{J}_m e^{i\omega t} + i\omega \varepsilon_a \vec{E}_m e^{i\omega t}).$$

Условие равенства комплексных чисел – равенство их реальных и мнимых частей ($\text{Re}_1 = \text{Re}_2, \text{Im}_1 = \text{Im}_2$).

Условие равенства комплексных функций – равенство их реальных частей: ($\text{Re}_{f1} = \text{Re}_{f2}$) в произвольно взятый момент времени:

$$\text{rot}(\vec{H}_m e^{i\omega t}) = \vec{J}_m e^{i\omega t} + i\omega \varepsilon_a \vec{E}_m e^{i\omega t}.$$

Операция дифференцирования по координатам rot не зависит от времени, таким образом, первое уравнение Максвелла в КА:

$$\text{rot}(\dot{\vec{H}}) = \dot{\vec{J}} + i\omega \varepsilon_a \dot{\vec{E}}.$$

Здесь относительно исходного уравнения исчезла переменная (здесь переменная – дифференцирование по времени).

Вместо производной по времени появился множитель $i\omega$.

Сильнейшей стороной МКА является замена дифференцирования по времени $\frac{\partial}{\partial t}$ умножением на $i\omega$.

Замена операции второй производной $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ – умножением на $(-\omega^2)$, замена операции интегрирования – умножением на $(1/i\omega)$.

Всякое умножение чего-либо на мнимую единицу i можно понимать как изменение фазы на угол $\frac{\pi}{2}$.

Теперь можно записать систему уравнений Максвелла в комплексных амплитудах:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{j} + i\omega \varepsilon_a \vec{E}; & \operatorname{div} \vec{j} &= -i\omega \rho; \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -i\omega \mu_a \vec{H}; & \operatorname{div} \vec{B} &= 0. \end{aligned}$$

8.1. Общие свойства уравнений Максвелла

1) Уравнения Максвелла устанавливают внутреннюю связь между электрическим и магнитным полями с их источниками.

2) Из уравнений Максвелла следует, что электрические и магнитные поля неотделимы друг от друга и составляют единую картину электромагнитного процесса.

Рассмотрим пример. Запишем два первых уравнения Максвелла в вакууме без источников в некомплексной форме:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \varepsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (1) \quad \text{и} \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\mu_a \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (2).$$

Отсюда видно, что переменное электрическое поле рождает вихревое переменное магнитное поле (1), которое, в свою очередь, рождает вихревое переменное электрическое поле (2).

3) Таким образом, переменные электрические и магнитные поля взаимно порождают и поддерживают друг друга.

4) Возможно существование свободных электромагнитных волн вдали от источников, их создавших.

5) Принцип перестановочной двойственности уравнений Максвелла: ничего не изменится в уравнениях Максвелла, если заменить $\vec{E}$ на $\vec{H}$, $\vec{B}$ на $(-\vec{D})$, $\vec{\varepsilon}_a$ на $\vec{\mu}_a$, ρ^e на ρ^m , γ^e на $(-\gamma^m)$. Работает и обратный принцип. Вводится для удобства перехода от одной величины к другой.

8.2. Классификация сред на диэлектрики и полупроводники

Одна и та же среда при разных условиях может проявлять двойные свойства. Например: железо в обычных условиях – проводник, но на частоте рентгеновского или -диапазона становится диэлектриком.

Критерий – частота.

Вводится понятие идеального проводника ($\gamma \rightarrow \infty$) и диэлектрика ($\gamma = 0$). Любая среда обладает смешанными свойствами. Всё отличие в соотношениях. Критерий отнесения среды к тому или иному классу следует из первого уравнения Максвелла:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \gamma \vec{E} + \varepsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Критерий – сравнение токов проводимости и смещения.

Плотность тока проводимости (направление тока проводимости совпадает с направлением вектора напряжённости):

$$\vec{j}_{\text{пр}} = \gamma \vec{E}_m \cos(\omega t + \varphi_1).$$

Плотность тока смещения:

$$\vec{j}_{\text{см}} = i\omega\varepsilon_a \vec{E}_m = \omega\varepsilon_a \vec{E}_m \cos(\omega t + \varphi_1 + \frac{\pi}{2}).$$

$$\frac{|j|}{|j_{\text{см}}|} = \frac{\gamma}{\varepsilon_a \omega} - \text{критерий разграничения сред:}$$

- 1) если $\frac{\gamma}{\varepsilon_a \omega} \gg 1$, то среда считается проводящей;
- 2) если $\frac{\gamma}{\varepsilon_a \omega} \ll 1$, то среда относится к диэлектрикам;
- 3) если $\frac{\gamma}{\varepsilon_a \omega} \approx 1$, то среда обладает полупроводниковыми свойствами.

ми.

Удобно ввести понятие «граничная частота». Из соотношения $\frac{\gamma}{\varepsilon_a \omega} \approx 1$ следует $\omega_{\text{гр}} = \frac{\gamma}{\varepsilon_a}$, тогда, имея дело с частотой, много больше граничной, характеризующей данную среду, имеем дело с диэлектрической средой.

Если имеется частота, много меньше граничной, то имеем дело с проводящей средой; $\omega_{\text{гр}}$ – характеристика среды.

В первом уравнении Максвелла в зависимости от ситуации одним из слагаемых можно пренебречь, а это ОЧЕНЬ ПОЛЕЗНАЯ ВЕЩЬ.

8.3. Общие теоремы электродинамики

Теорема Умова–Пойнтинга описывает энергетический баланс и имеет две формы выражений:

- 1) для мгновенных значений;
- 2) комплексная.

Удельная энергия электрического поля равна $\frac{\varepsilon_a E^2}{2}$; магнитного поля: $\frac{\mu_a H^2}{2}$. Эти равенства остаются в силе и в переменном электромагнитном поле:

$$\left(\frac{\varepsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2} \right) dV = dW -$$

энергия электромагнитного поля, запасённая в объёме dV .

Умножим первое уравнение Максвелла на $\vec{E} dV$:

$$\vec{E} \text{rot} \vec{H} dV = \left(\gamma E^2 + \varepsilon_a \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{E^2}{2} \right) \right) dV,$$

а второе уравнение Максвелла – на $\vec{H} dV$:

$$\vec{H} \text{rot} \vec{E} dV = -\mu_a \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{H^2}{2} \right) dV.$$

Вычтем из первого второе:

$$\begin{aligned} (\vec{E} \text{rot} \vec{H} - \vec{H} \text{rot} \vec{E}) dV &= \left(\gamma E^2 + \varepsilon_a \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{E^2}{2} \right) + \mu_a \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{H^2}{2} \right) \right) dV = \\ &= \left[\gamma E^2 + \frac{\partial}{\partial t} \left(\varepsilon_a \frac{E^2}{2} \right) + \mu_a \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{H^2}{2} \right) \right] dV. \end{aligned}$$

Величина слева $(\vec{E} \text{rot} \vec{H} - \vec{H} \text{rot} \vec{E}) = -\text{div}[\vec{E}, \vec{H}]$, тогда приходим к равенству

$$-\text{div}[\vec{E}, \vec{H}] dV = \left[\gamma E^2 + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varepsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2} \right) \right] dV.$$

Под знаком div стоит векторное произведение: $[\vec{E}, \vec{H}] = \vec{\Pi}$ – вектор Пойнтинга, размерность которого $\dim \vec{\Pi} = \frac{B}{M} \cdot \frac{A}{M} = \frac{Bm}{M^2}$. По своему смыслу $\vec{\Pi}$ представляет собой поток энергии, проходящей через единицу поверхности в единицу времени.

К уравнению можно применить любую линейную операцию (проинтегрировав по dV):

$$-\int_V \text{div} \vec{\Pi} dV = \int_V \gamma E^2 dV + \frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{\varepsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2} \right) dV.$$

Применив теорему Стокса $\iiint \text{div} \vec{\Pi} dV = \oint_S \vec{\Pi} \vec{dS}$, получим:

$$-\oint_S \vec{\Pi} \vec{dS} = \int_V \gamma E^2 dV + \frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{\varepsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2} \right) dV -$$

теорему Умова–Пойнтинга для мгновенных значений $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$.

В левой части равенства поток вектора $\vec{\Pi}$ сквозь замкнутую поверхность S и знак «-» показывают, что поток направлен внутрь объема V сквозь замкнутую поверхность S , ограничивающую этот объем.

В правой части равенства два слагаемых:

– первое слагаемое – закон Джоуля–Ленца о выделении тепла в проводящей среде за счет протекания электрического тока;

– второе слагаемое – под интегралом – энергия электрического поля в чистом виде, а т.к. берётся производная $\frac{\partial}{\partial t}$, то это скорость изменения запаса электромагнитной энергии в объеме V .

Теорема: поток энергии через поверхность S в объем V расходуется на покрытие потерь выделения джоулева тепла на проводящих участках анализируемого объема и на приращение электромагнитной энергии.

Возможные ситуации:

1) Если изменение электромагнитной энергии во времени $\frac{\partial W_{эм}}{\partial t} < 0$, то происходит «вытекание» энергии из объема (вектор $\vec{P}$ направлен из объема наружу).

2) Если $\frac{\partial W_{эм}}{\partial t} > 0$, то энергия втекает в объем ($\vec{P}$ направлен в объем).

3) Если второе слагаемое в правой части равно нулю, тогда $\vec{P}$ проходит через объем и энергия проходит «транзитом» без накапливания в объеме; при этом возможны потери за счет первого слагаемого.

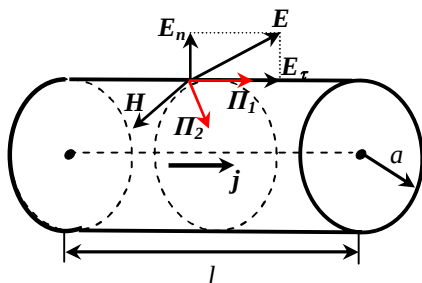


Рис. 38

Под действием электрического поля E_τ в проводнике (вдоль проводника) течет ток $I = j\vec{S}$, по касательной к поверхности, вызванный этим током вектор магнитного поля $\vec{H}$ (рис. 38).

В общем случае

$$\vec{P} = [\vec{E}, \vec{H}] = [(\vec{E}_n + \vec{E}_\tau), \vec{H}] = [\vec{E}_n, \vec{H}] + [\vec{E}_\tau, \vec{H}] = \vec{P}_1 + \vec{P}_2.$$

Вектор $\vec{P}_1$ направлен по касательной к поверхности вдоль проводника, отвечает за перенос энергии вдоль проводника.

Вектор $\vec{P}_2$ направлен вглубь проводника перпендикулярно к поверхности.

Для выяснения физического смысла $\vec{P}_2$ произведем количественные оценки.

Поток P вектора $\vec{P}_2$, направленного вглубь проводника перпендикулярно к поверхности, равен:

$$P = \int [\vec{E}\vec{H}] d\vec{S} = E_\tau H \int dS = E_\tau H 2\pi a l.$$

$$\text{Учтем, что } \vec{j} = \gamma \vec{E} \rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{j}}{\gamma}; \quad E_\tau = \frac{j}{\gamma}; \quad H = \frac{j}{2\pi a}.$$

$$\text{Тогда } P = \frac{j}{\gamma} \frac{j}{2\pi a} 2\pi a l = \frac{j^2}{\gamma} l.$$

Теперь вместо j подставим реальную величину для данного случая:

$$j = I / \pi a^2.$$

В результате получаем

$$P = I^2 \frac{l}{\pi a^2 \gamma} = I^2 R,$$

где $R = \frac{l}{\gamma \pi a^2}$ – активное сопротивление.

P – мощность, потраченная на омические потери в проводнике, характеризует потери тепла (при протекании тока) по закону Джоуля – Ленца.

Но из всего этого неясно, как распределена энергия в пространстве вокруг проводника.

Решим эту задачу на примере коаксиальной линии: имеется внешний, хорошо проводящий экран, внутренний проводник и диэлектрик между ними. Пусть радиус внутреннего проводника R_1 , внешнего R_2 .

По внутреннему проводнику течёт ток I в направлении, указанном стрелкой. Вокруг него возникает магнитное поле $\mathbf{H}(r)$, направленное вдоль силовой линии, показанной на рис. 39 пунктиром. Также между внутренним и внешним проводниками существует радиальное электрическое поле $\mathbf{E}(r)$, обусловленное наличием электрического заряда, распределённого с линейной плотностью τ на внутреннем проводнике.

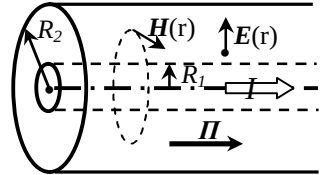


Рис. 39

$$|\vec{H}(r)| = \frac{I}{2\pi r}, \quad |\vec{E}(r)| = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0\epsilon r},$$

где r – расстояние от центра кабеля до анализируемой точки; ϵ – диэлектрическая проницаемость среды; μ – магнитная проницаемость диэлектрика, равна единице.

Вектор Пойнтинга $\vec{\Pi}(r) = [\vec{E}\vec{H}]$ направлен при данной конфигурации полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ вдоль коаксиальной линии и представляет собой плотность потока мощности через поперечное сечение кольца диэлектрика. Тогда полная мощность, переносимая через всё поперечное сечение кольца, будет равна

$$P_{\Sigma} = \iint \vec{\Pi} d\vec{S} = \int |\vec{\Pi}| |\vec{dS}| = \int \frac{I\tau}{4\pi^2 r^2 \epsilon_0 \epsilon} dS.$$

$$\text{Здесь модуль вектора Пойнтинга } |\vec{\Pi}| = EH = \frac{I\tau}{4\pi^2 r^2 \epsilon_0 \epsilon}.$$

В полярной системе координат dS – элемент площади кольца, имеет следующий вид:

$$dS = 2\pi r dr,$$

и для мощности P получим:

$$P_{\Sigma} = \int \frac{I\tau}{4\pi^2 r^2 \varepsilon_0 \varepsilon} dS = 2\pi \frac{I\tau}{4\pi^2 \varepsilon_0} \int \frac{r dr}{r^2} = \frac{I\tau}{2\pi \varepsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{I\tau}{2\pi \varepsilon_0} \lg \frac{R_2}{R_1}.$$

Так как по линии течет ток, то существует разность потенциалов U между внутренним и внешним проводниками (электродами) данной коаксиальной линии, связанная с линейной плотностью заряда $\tau = C_0 U$, где C_0 – погонная ёмкость линии. Наиболее часто встречаемые конфигурации электродов, образующих ёмкость, рассчитаны и сведены в таблицу. Погонная ёмкость для коаксиальных электродов $C_0 = \frac{2\pi \varepsilon \varepsilon_0}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$.

В итоге получим $P_{\Sigma} = UI$ – мощность, передаваемая коаксиальной линией передачи.

Как распределена эта мощность по сечению линии?

$$P(r) = \frac{I\tau}{2\pi \varepsilon \varepsilon_0} \int_{R_1}^r \frac{dr}{r} = \frac{I\tau}{2\pi \varepsilon \varepsilon_0} \lg \frac{r}{R_1}.$$

Учитывая, что величина перед логарифмом

$$\frac{I\tau}{2\pi \varepsilon \varepsilon_0} = \frac{P_{\Sigma}}{\lg \frac{R_2}{R_1}},$$

получим

$$P(r) = \frac{P_{\Sigma}}{\lg \frac{R_2}{R_1}} \lg \frac{r}{R_1}.$$

Рассмотрим численный пример для интерпретации полученного соотношения.

Пусть $R_1 = 0,1$ см и $R_2 = 10$ см и необходимо найти мощность на расстоянии $r = 1$ см от оси центрального проводника.

Получим $P(r) = \frac{1}{2} P_{\Sigma}$, что вблизи внутреннего проводника через площадь, равную 0,01 всей площади сечения, проходит **половина** всей переносимой мощности, т.е. вся переносимая энергия локализована в диэлектрике между проводниками, которые являются как бы «направляющими» для переносимой энергии. Энергия переносится не по проводам, а в пространстве вблизи них. Если диэлектрик хороший, то потери энергии незначительны (и наоборот).

Чаще на практике используются средние значения (а не мгновенные).

Под *активной мощностью* понимают среднее значение мгновенной мощности P за период T :

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = \frac{1}{T} \int_0^T u i dt.$$

Если ток на участке цепи $i = I_m \sin \omega t$, напряжение $u = U_m \sin(\omega t + \varphi)$,

$$\text{то } P = \frac{1}{T} \int_0^T U_m I_m \sin(\omega t + \varphi) \sin \omega t dt = \frac{U_m I_m}{2} \cos \varphi = UI \cos \varphi.$$

Поскольку $U \cos \varphi = IR$, то $P = UI \cos \varphi = I^2 R$ представляет собой энергию, выделяющуюся в единицу времени в виде тепла в сопротивлении R .

Единица активной мощности – Вт (ватт).

Под *реактивной мощностью* Q понимают произведение действующих значений напряжения и тока на участке цепи на синус φ :

$$Q = UI \sin \varphi.$$

Реактивная мощность Q пропорциональна среднему за четверть периода значению энергии, которая отдаётся источником питания на создание переменной составляющей электрического и магнитного поля конденсатора и катушки индуктивности. За период генератор дважды отдаёт эту энергию в цепь и дважды получает её обратно.

Единица реактивной мощности – ВАр (вольт-ампер реактивный).

Полная мощность $S = UI$.

Единица полной мощности – В·А (вольт-ампер).

Мощности P , Q и S связаны следующей зависимостью:

$$P^2 + Q^2 = S^2.$$

Графически эту связь можно представить в виде прямоугольного треугольника, у которого один катет представляет активную мощность P , другой – реактивную Q , гипотенуза – полную мощность S (рис. 40).

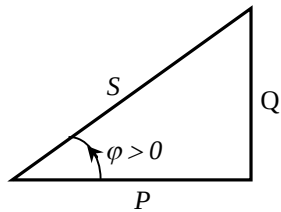


Рис. 40

Выражение мощности в комплексной форме:

1) Комплексная величина

$$\dot{A} = A e^{i\varphi_A} = A \cos \varphi_A + i A \sin \varphi_A.$$

2) Комплексное сопряжение величине $\dot{A}$:

$$\dot{A}^* = A e^{-i\varphi_A} = A \cos \varphi_A - i A \sin \varphi_A.$$

3) Если напряжение на некотором участке цепи $\dot{U} = U e^{i\varphi_U}$, ток по этому участку $\dot{I} = I e^{i\varphi_I}$, комплексно сопряжённая величина тока $\dot{I}^* = I e^{-i\varphi_I}$, то произведение $\dot{U} \dot{I}^* = UI e^{i(\varphi_U - \varphi_I)} = UI e^{i\Delta\varphi}$, где $\Delta\varphi = \varphi_U - \varphi_I$ – сдвиг фаз между напряжением и током. Обозначим это произведение $\tilde{S}$ (значок $\sim$ тильда над S обозначает комплексную величину полной мощности): полная мощность $\tilde{S} = \dot{U} \dot{I}^*$, тогда $\tilde{S} = UI \cos \varphi + i UI \sin \varphi = P + iQ$, где $P = \text{Re}(\dot{U} \dot{I}^*)$ – активная, $Q = \text{Im}(\dot{U} \dot{I}^*)$ – реактивная мощности.

Теорема Умова-Пойнтинга в комплексной форме

Нечто аналогичное мы сделаем и для уравнения Умова-Пойнтинга. Надо от обычного $\vec{\Pi}$ перейти к $\vec{\tilde{\Pi}} = [\dot{\vec{E}}\dot{\vec{H}}^*]$. Тогда поток вектора $\vec{\tilde{\Pi}}$ сквозь замкнутую поверхность S , с учётом теоремы Остроградского – Гаусса, даёт цепочку равенств:

$$-\oint_S \vec{\tilde{\Pi}} d\vec{S} = -\iiint_V \text{div} \vec{\tilde{\Pi}} dV = \iiint_V (\dot{\vec{E}} \text{rot} \dot{\vec{H}}^* - \dot{\vec{H}}^* \text{rot} \dot{\vec{E}}) dV.$$

Запишем первое уравнение Максвелла $\text{rot} \dot{\vec{H}} = \gamma \dot{\vec{E}} + i\omega \varepsilon_a \dot{\vec{E}}$ в комплексной форме и его комплексно сопряженное выражение $\text{rot} \dot{\vec{H}}^* = \gamma \dot{\vec{E}}^* - i\omega \varepsilon_a \dot{\vec{E}}^*$, а также второе уравнение Максвелла $\text{rot} \dot{\vec{E}} = -i\omega \mu_a \dot{\vec{H}}$ и произведём замену соответствующих величин в подынтегральном выражении:

$$\begin{aligned} \iiint_V (\dot{\vec{E}} \gamma \dot{\vec{E}}^* - \dot{\vec{E}} i\omega \varepsilon_a \dot{\vec{E}}^* + \dot{\vec{H}}^* i\omega \mu_a \dot{\vec{H}}) dV = \\ = \iiint_V (\gamma E^2 + i2\omega (\frac{\mu_a H^2}{2} - \frac{\varepsilon_a E^2}{2})) dV. \end{aligned}$$

Таким образом, получим:

$$-\oint_S \vec{\tilde{\Pi}} d\vec{S} = \iiint_V \gamma E^2 dV + i2\omega \iiint_V (\frac{\mu_a H^2}{2} - \frac{\varepsilon_a E^2}{2}) dV = P + iQ,$$

где P – мощность, идущая на нагрев; Q – мощность, обусловленная электромагнитным полем (ее частота удваивается).

Знак «минус» показывает, что поток направлен внутрь объёма V .

Некоторые замечания к определению полей:

1) В систему уравнений Максвелла входят параметры среды ($\mu_a, \varepsilon_a, \gamma$). Эти величины характеризуют усредненные в пространстве и во времени свойства вещества.

2) При низких частотах эти величины представляют действительные (не комплексные) числа. Кроме того, на низких частотах $\mu_a, \varepsilon_a, \gamma$ не зависят от частоты. То есть в соответствующих материальных уравнениях нет сдвига фаз между векторами $\vec{D}$ и $\vec{E}$, $\vec{B}$ и $\vec{H}$, $\vec{j}$ и $\vec{E}$.

На высоких частотах, в общем случае, наблюдается запаздывание $\vec{D}$ от $\vec{E}$, $\vec{B}$ от $\vec{H}$, но $\vec{j}$ от $\vec{E}$ никогда не запаздывает, т.к. в первых случаях речь идет либо об электрической, либо о магнитной вязкости среды, в последнем случае речь идет об электронах, вязкость не наблюдается. Таким образом, на высоких частотах электрическая и магнитная проницаемости становятся функциями частоты.

В целом зависимость каких-либо параметров от частоты называется дисперсией, т.е. существуют дисперсии электрической проницаемости и магнитной проницаемости.

Запаздывание способствует тому, что величины ε'_a, μ'_a становятся комплексными:

$$\varepsilon_a = \varepsilon'_a - i\varepsilon''_a; \mu_a = \mu'_a - i\mu''_a.$$

Знак «-» показывает факт запаздывания вектора $\vec{D}$ относительно $\vec{E}$ и $\vec{B}$ относительно $\vec{H}$. Этот факт подтверждается на опыте, но уже изначально заложен в уравнениях Максвелла.

$$\text{rot } \vec{H} = \gamma \vec{E} + i\omega \varepsilon_a \vec{E} = i\omega \vec{E} \left(\varepsilon_a + \frac{\gamma}{i\omega} \right) = i\omega \vec{E} \left(\varepsilon_a - i \frac{\gamma}{\omega} \right),$$

для диэлектрической среды (любой среды, параметры которой сведены к ε_a ; здесь $\varepsilon'_a = \varepsilon_a$; $\varepsilon''_a = \frac{\gamma}{\omega}$).

8.3.1. Диэлектрические потери

В конденсаторе при прохождении переменного тока будет наблюдаться ток смещения, причем происходят диэлектрические потери (диэлектрик нагревается). Потери пропорциональны E^2 .

Покажем на комплексной плоскости составляющие полного тока.

Если имеем дело с идеальным диэлектриком ($\gamma = 0$), то остается только вертикальная составляющая полного тока – ток смещения $\vec{J}_{\text{см}} = \omega \varepsilon_a \vec{E}$ (рис. 41).

Если проводник идеальный ($\gamma = \infty$), имеем горизонтальную составляющую полного тока $\vec{J}_{\text{пр}} = \gamma \vec{E}$ – ток проводимости.

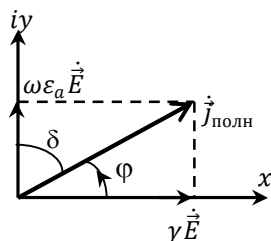


Рис. 41

Для характеристики свойств среды введем параметр $\text{tg } \delta = \frac{\gamma}{\omega \varepsilon_a}$, показывающий, насколько реальная среда отличается от идеального диэлектрика или проводника.

Если $\text{tg } \delta \gg 1$, т.е. $\omega \varepsilon_a \ll \gamma$, – среда представляет собой проводник; при $\text{tg } \delta \ll 1$, т.е. $\omega \varepsilon_a \gg \gamma$, – диэлектрик. Кроме того, $\text{tg } \delta$ – структурно чувствительная характеристика, а также зависит от частоты ω , поэтому в справочниках для $\text{tg } \delta$ приводится и частота.

Область, которая изучает поведение диэлектриков (их внутреннее строение) в зависимости от частоты, называется диэлектрической спектроскопией (рис. 42).

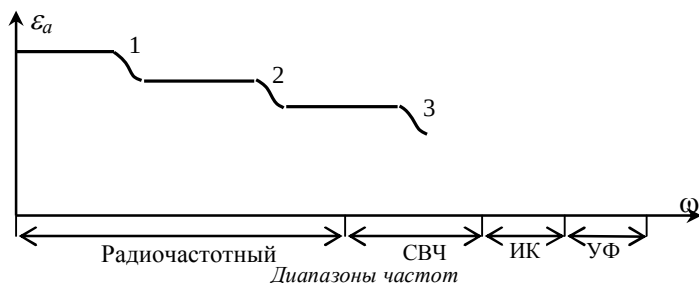


Рис. 42

1) уменьшение ε_a связано с ориентационной поляризацией (молекулярные кластеры (скопления) под действием резонансной частоты увеличивают амплитуду движения, т.е. энергия падает);

2) ионная ориентация (резонируют ионы);

3) электронная поляризация (резонируют электроны).

Параметру ω можно поставить в соответствие энергию E .

8.3.2. Переменное электромагнитное поле в однородной изотропной проводящей среде

Рассмотрим ситуацию, когда анализируемая область пространства – проводник.

Среда проводящая, т.е. $\dot{J}_{\text{пр}} \gg \dot{J}_{\text{см}}$. Согласно выработанному критерию ($\text{tg } \delta = \frac{\gamma}{\omega_{\text{гр}} \varepsilon_a} \approx 1$) найдём граничную частоту $\omega_{\text{гр}} = \frac{\gamma}{\varepsilon \varepsilon_0}$.

Например, для меди $\gamma_{\text{Cu}} = 57 \cdot 10^6 \frac{\text{См}}{\text{м}}$; $\varepsilon_{a\text{Cu}} = (1 \div 10) \varepsilon_0$.

Тогда из $\omega_{\text{гр}} = 2\pi f_{\text{гр}}$ получим $f_{\text{гр}} \approx 10^{17}$ Гц – очень высокая частота. Поэтому медь остаётся проводником для частот радиодиапазона, но выше $f_{\text{гр}}$ (в области рентгеновского излучения и выше) медь ведёт себя как диэлектрик.

Так как среда проводящая, то она обладает параметрами γ и μ_a . Для анализа поля в такой среде запишем два уравнения Максвелла:

$$\text{rot } \vec{H} = \gamma \vec{E} + i\omega \varepsilon_a \vec{E} \text{ и } \text{rot } \vec{E} = -i\omega \mu_a \vec{H}.$$

Среда проводящая, т.е. $\dot{J}_{\text{пр}} \gg \dot{J}_{\text{см}}$, и в первом уравнении вторым слагаемым можно пренебречь.

Возьмем от обеих частей первого уравнения операцию rot :

$\text{rot rot } \vec{H} = \gamma \text{ rot } \vec{E}$ и подставим $\text{rot } \vec{E}$ из второго,

тогда получим: $-\Delta \vec{H} = -i\omega\gamma\mu_a \vec{H}$ или $\nabla^2 \vec{H} = i\omega\gamma\mu_a \vec{H}$.

Это уравнение аналогично уравнению $\nabla^2 \vec{H} - \gamma\mu_a \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0$ – волновому уравнению, записанному относительно $\vec{H}$. Волновое, т.к. есть вторые производные по координатам и первые производные $\vec{H}$ по времени. Знак «-» физически означает, что со временем происходит затухание поля вектора $\vec{H}$.

В целом полученный результат является частным выводом ЭМ теории Максвелла о том, что изменение во времени электрических и магнитных полей приводит к возникновению волнового процесса или волнового движения ЭМ энергии. При этом происходит перенос энергии в пространстве.

Уравнения Максвелла записаны для трехмерного пространства, что очень сложно решать. Обычно решение ищут для специальной формы поля в предположении плоских волн.

Плоская волна – простейшая структура ЭМ поля. Хотя реально их сложно создать, но очень удобно использовать для расчетов.

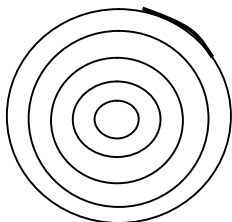


Рис. 43

Пусть имеется точечный источник ЭМ энергии, излучающий сферические волны (аналог – волны на поверхности воды от камня, брошенного в воду) (рис. 43). Когда фронт волны доходит до наблюдателя, то его интересует лишь малый участок фронта сферической волны и этот «мелкий» участок можно представить как малый фрагмент плоскости. Это упрощение позволяет заменить трехмерное уравнение на одномерное.

8.3.3. Определение плоской волны

Волна называется плоской, если поверхности равных фаз представляют собой плоскость, т.е. в плоской электромагнитной волне векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ расположены в плоскости хода, перпендикулярно направлению распространения волны.

Плоскость векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ плоской волны параллельна плоскости $хоу$ (рис. 44). Смотрим на ней следы силовых линий электрического и магнитного полей при прохождении ЭМ волны вдоль оси oz ; $\vec{E}$ и $\vec{H}$ перпендикулярны направлению распространения волны. Такая волна называется поперечной или Т-волной.

Условия поперечности волн (условие плоских волн):

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} = \frac{\partial \vec{H}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{H}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \vec{E}}{\partial z} \text{ и } \frac{\partial \vec{H}}{\partial z} \neq 0.$$

Волна называется линейно поляризованной, если при распространении ЭМ волны вдоль оси z вектор $\vec{E}$ совершает колебания в плоскости xoz вдоль оси x , при этом вектор $\vec{H}$ колеблется в плоскости $yoз$ вдоль оси y (рис. 45). Плоскость, в которой колеблется вектор $\vec{E}$, называется плоскостью колебаний или плоскостью поляризации.

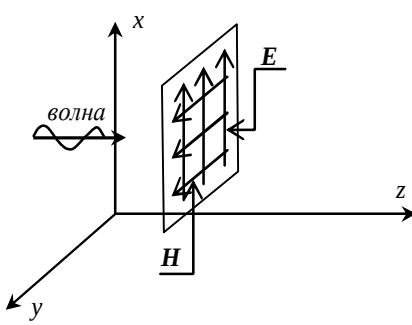


Рис. 44

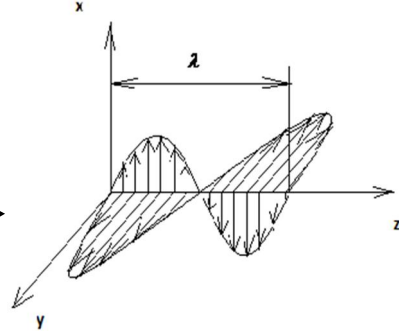


Рис. 45

Рассмотрим задачу.

Имеется однородная, изотропная, проводящая, безграничная среда с μ_a и γ . Систему координат выберем следующим образом:

- ось x с единичным ортом $\vec{e}_x$ параллельно вектору $\vec{E}$;
- ось y с единичным ортом $\vec{e}_y$ параллельно вектору $\vec{H}$.

При данном выборе системы координат вектор Пойнтинга $\vec{P} = [\vec{E}\vec{H}]$, направлен вдоль оси z с единичным ортом $\vec{e}_z$.

Рассмотрим решение исходного уравнения

$$\nabla^2 \vec{H} = i\omega\gamma\mu_a \vec{H}$$

в выбранной таким образом системе координат в предположении плоских волн. В этом случае вектор $\vec{H}$ имеет единственную компоненту $\vec{H} = \dot{H}\vec{e}_y$, и для плоской волны, с учётом условия $\frac{\partial \vec{E}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} = \frac{\partial \vec{H}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{H}}{\partial y} = 0$, остаётся только $\frac{\partial^2}{\partial z^2} \dot{H} = i\omega\gamma\mu_a \dot{H}$. Это уравнение вида $y'' = qy$.

Составляем характеристическое уравнение: $p^2 = i\omega\gamma\mu_a$, тогда $p = \pm \sqrt{i\omega\gamma\mu_a} \left(\frac{1}{m}\right)$. Корни комплексные, равные по величине и противоположные по знаку. Общее решение:

$$\dot{H} = c_1 e^{pz} + c_2 e^{-pz},$$

где $\dot{c}_1$ и $\dot{c}_2$ – постоянные интегрирования, зависящие от начальных условий.

$$\text{Разберемся с } \sqrt{i\omega\gamma\mu_a} = \sqrt{i}\sqrt{\omega\gamma\mu_a} = \sqrt{e^{i\frac{\pi}{2}}}\sqrt{\omega\gamma\mu_a} = e^{i\frac{\pi}{4}}\sqrt{\omega\gamma\mu_a} = \\ = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{\omega\gamma\mu_a} = (1+i)\sqrt{\frac{\omega\gamma\mu_a}{2}} = (1+i)k, \text{ где } k = \sqrt{\frac{\omega\gamma\mu_a}{2}}.$$

Следовательно, $p = \pm\sqrt{i\omega\gamma\mu_a} = \pm(1+i)k$.

$\vec{H}$ – известно, ищем $\vec{E}$ через первое уравнение Максвелла:

$\text{rot}\vec{H} = \gamma\vec{E}$ откуда $\vec{E} = \frac{1}{\gamma}\text{rot}\vec{H}$. Ищем $\text{rot}\vec{H}$, зная $\vec{H}$:

$$\text{rot}\vec{H} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & H_y & 0 \end{vmatrix} = \vec{e}_x \left(-\frac{\partial H_y}{\partial z}\right).$$

Тогда в целом $\vec{E} = \left(-\frac{1}{\gamma}\frac{\partial H_y}{\partial z}\right)\vec{e}_x$. Видно, что $\vec{E}$ имеет направление по оси x (перпендикулярно $\vec{H}$, т.к. здесь только орт $\vec{e}_x$).

$$\frac{\partial H_y}{\partial z} = p(\dot{c}_1 e^{pz} - \dot{c}_2 e^{-pz}),$$

следовательно,

$$\vec{E} = -\frac{p}{\gamma}(\dot{c}_1 e^{pz} - \dot{c}_2 e^{-pz})\vec{e}_x.$$

Частное от деления $\frac{p}{\gamma}$ называется волновым сопротивлением среды, Ом,

$$Z_B = \frac{p}{\gamma} = \sqrt{\frac{\omega\mu_a}{2\gamma}}(1+i).$$

Волновое сопротивление Z_B является величиной комплексной, с равными по модулю активной и реактивной частями. Волновое сопротивление Z_B зависит от частоты и параметров μ_a и γ проводящей среды.

Следовательно,

$$\vec{E} = Z_B \dot{c}_2 e^{-pz} - Z_B \dot{c}_1 e^{pz}.$$

Полученный результат представляет собой две волны векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$, распространяющиеся вдоль оси z в противоположных направлениях:

а) $\vec{H}_+ = \dot{c}_2 e^{-pz}$ и $\vec{E}_+ = Z_B \dot{c}_2 e^{-pz}$, а также соответствующий им вектор Пойнтинга $\vec{\Pi}_+ = \left[\vec{E}_+ \vec{H}_+^*\right]$ – в положительном направлении оси z ;

б) $\dot{H}_- = \dot{c}_1 e^{+pz}$ и $\dot{E}_- = -Z_B \dot{c}_1 e^{+pz}$, а также соответствующий им вектор Пойнтинга $\vec{\Pi}_- = [\vec{\dot{E}}_- \vec{\dot{H}}_-^*]$ – в отрицательном направлении оси z .

В целом можно представить $\dot{E}_+ = Z_B \dot{c}_2 e^{-pz} = Z_B \dot{H}_+$ и т.д., откуда следует, что волновое сопротивление служит для связи между электрическим и магнитным полями электромагнитной волны и равно отношению их амплитуд: $Z_B = \frac{\dot{E}}{\dot{H}}$.

В действительной форме записи уравнение бегущей волны имеет вид $E_x = Z_B \dot{c}_2 e^{i(\omega t - pz)} = E_0 e^{i(\omega t - pz)}$.

Параметр $p = \pm \sqrt{i\omega\gamma\mu_a} = \pm(1 + i)k$ в показателе уравнения волны – величина комплексная, с равными по модулю Re и Im , но разными по смыслу частями.

Обозначим реальную и мнимую части p :

$$Re\ p = \beta = \sqrt{\frac{\omega\gamma\mu_a}{2}} \text{ и } Im\ p = i\ k_z = i\sqrt{\frac{\omega\gamma\mu_a}{2}},$$

в результате получим

$$E_x = E_0 e^{\pm pz} e^{i\omega t} = E_0 e^{\pm\beta z} e^{i(\omega t - k_z z)}.$$

Множитель $e^{i(\omega t - k_z z)}$ представляет бегущую вдоль оси z волну с амплитудой A , экспоненциально зависящей от z : $A(z) = E_0 e^{\pm\beta z}$. Знак показателя экспоненты для обычных материалов, не являющихся источниками электромагнитных волн, «минус», что приводит к ослаблению волны с ростом z . Причина – поглощение энергии волны на нагрев среды.

1) Критерий затухания – глубина проникновения $z_e = \Delta$ – расстояние вдоль направления распространения волны, на котором амплитуда E_0 или H_0 уменьшается в e раз (рис. 46).

$$Ae^{-\beta z_e} = Ae^{-\beta\Delta} = Ae^{-1},$$

откуда

$$\beta\Delta = 1,$$

$$\text{следовательно, } \Delta = \frac{1}{\beta} = \sqrt{\frac{2}{\omega\gamma\mu_a}},$$

$$\text{где } \beta = \sqrt{\frac{\omega\gamma\mu_a}{2}}.$$

Глубина проникновения Δ зависит от параметров среды и частоты (с ростом частоты ω глубина проникновения Δ уменьшается).

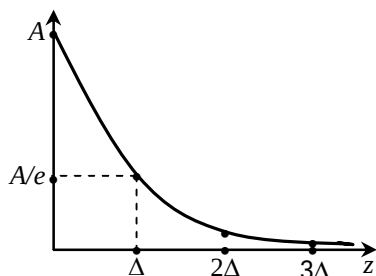


Рис. 46

Рассмотрим пример.

Дана проводящая среда $\gamma = 10^7 (\text{Ом} \cdot \text{м})^{-1}$, $\mu = 10^3$; $f = 5 \text{ кГц}$;
 $\mu_0 = 1,256 \cdot 10^{-6} \text{ Гн/м}$.

$$\beta = k_z = \sqrt{\frac{2\pi \cdot 5 \cdot 10^7 \cdot 10^6 \cdot 1,256 \cdot 10^{-6}}{2}} \approx 14050 \text{ м}^{-1} \Rightarrow \Delta \approx 0,007 \text{ см}.$$

Глубина проникновения в проводящую среду очень маленькая.

2) λ – длина волны в проводящей среде (не совпадает с длиной волны частоты ω в свободном пространстве).

λ – расстояние вдоль oz , вдоль которой фаза колебания изменяется на 2π .

Сделаем следующее: $k_z \Delta z = k_z \lambda = 2\pi$, тогда $\lambda = \frac{2\pi}{k_z}$.

Для нашего примера $\lambda = 0,45 \text{ мм}$ (длина волны в проводящей среде).

3) Третий параметр – фазовая скорость – скорость движения, с которой должен был бы двигаться наблюдатель вдоль распространения волны, чтобы перед собой он мог видеть одну и ту же точку фазы волны.

Фаза $\omega t - k_z z + \varphi_0 = \text{const}$ – по определению. Ищем фазовую скорость:

$$\frac{d}{dt}(\omega t - k_z z + \varphi_0) = 0 \Rightarrow \omega - k_z \frac{dz}{dt} = 0, \text{ здесь } \frac{dz}{dt} = v_{\text{фаз}},$$

тогда

$$v_{\text{фаз}} = \frac{\omega}{k_z} = \frac{2\pi f}{k_z}. \text{ Для нашего примера } v_{\text{фаз}} = 2,24 \text{ м/с}.$$

8.3.4. Распространение электромагнитной волны в однородной, изотропной диэлектрической среде

Уравнения Максвелла:

$$\text{rot} \vec{\dot{H}} = \gamma \vec{E} + i\varepsilon_a \omega \vec{\dot{E}} \text{ и } \text{rot} \vec{E} = -i\omega \mu_a \vec{\dot{H}}.$$

Среда диэлектрическая: $\vec{j}_{\text{см}} \gg \vec{j}_{\text{пр}}$. Следовательно, в первом уравнении пренебрегаем первым слагаемым (иначе $\gamma = 0$).

Получим: $\text{rot} \vec{\dot{H}} = i\varepsilon_a \omega \vec{\dot{E}}$. Возьмём операцию rot от обеих частей равенства:

$\text{rot}(\text{rot} \vec{\dot{H}}) = i\varepsilon_a \omega \text{rot} \vec{\dot{E}}$ и, подставив $\text{rot} \vec{\dot{E}}$ из второго уравнения, получим $\nabla^2 \vec{\dot{H}} = -\omega^2 \varepsilon_a \mu_a \vec{\dot{H}}$ – волновое уравнение относительно $\vec{\dot{H}}$ в диэлектрической среде.

Рассмотрим произведение $\varepsilon_a \mu_a$. Выясним это на примере анализа размерности: $[\varepsilon_a] = \frac{\Phi}{\text{м}} = \frac{\text{Кл}}{\text{В} \cdot \text{м}}$; $[\mu_a] = \frac{\Gamma_{\text{H}}}{\text{м}} = \frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{А} \cdot \text{м}}$, тогда $[\varepsilon_a \mu_a] = \frac{\text{с}^2}{\text{м}^2}$ – квадрат обратной скорости.

Таким образом $v_\Phi = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_a \mu_a}}$ – фазовая скорость распространения ЭМ-волны.

$$\nabla^2 \dot{\vec{H}} = - \left(\frac{\omega}{v_\Phi} \right)^2 \dot{\vec{H}}.$$

Решение этого уравнения находится в структуре плоских волн (т.к. они вводились для любой среды). В этом случае вектор $\dot{\vec{H}}$ имеет единственную компоненту $\dot{\vec{H}} = \dot{H}_y \vec{e}_y$, и для плоской волны с учётом условия $\frac{\partial \vec{E}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} = \frac{\partial \vec{H}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{H}}{\partial y} = 0$ остаётся только $\frac{\partial^2}{\partial z^2} \dot{H} = - \left(\frac{\omega}{v_\Phi} \right)^2 \dot{H}$. Это уравнение вида $y'' = qy$.

Составляем характеристическое уравнение: $p^2 = - \left(\frac{\omega}{v_\Phi} \right)^2$, тогда $p = \pm i \left(\frac{\omega}{v_\Phi} \right) \left(\frac{1}{\text{м}} \right) = \pm i k_z$. (k_z – проекция волнового вектора на ось Z).

Общее решение:

$$\dot{H}_y = c_1 e^{i k_z z} - c_2 e^{-i k_z z}.$$

Полученный результат представляет собой две волны векторов $\dot{\vec{E}}$ и $\dot{\vec{H}}$, распространяющиеся вдоль оси z в противоположных направлениях.

Ищем величину $\dot{\vec{E}}$ из первого уравнения Максвелла: $\vec{E} = \frac{1}{i \varepsilon_a \omega} \text{rot } \vec{H}$.

Ищем $\text{rot } \vec{H}$:

$$\text{rot } \dot{\vec{H}} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \dot{H}_x & \dot{H}_y & \dot{H}_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \dot{H}_y & 0 \end{vmatrix} = \vec{e}_x \left(- \frac{\partial \dot{H}_y}{\partial z} \right).$$

Берем производную $\frac{d \dot{H}}{dz} = (i k_z) c_1 e^{i k_z z} - (i k_z) c_2 e^{-i k_z z}$, тогда

$$\vec{E} = \vec{e}_x \frac{1}{\varepsilon_a \omega i} [(i k_z) c_2 e^{-i k_z z} - (i k_z) c_1 e^{i k_z z}] = \vec{e}_x \frac{i k_z}{\varepsilon_a \omega i} [c_2 e^{-i k_z z} - c_1 e^{i k_z z}].$$

Рассмотрим величину $\frac{k_z}{\varepsilon_a \omega} = \frac{\frac{\omega}{v_\Phi}}{\varepsilon_a \omega} = \frac{\sqrt{\varepsilon_a \mu_a}}{\varepsilon_a} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} = Z_B$ – волновое сопротивление диэлектрической среды; оно зависит от параметров диэлектрика и не зависит от частоты. Тогда

$$\vec{E} = Z_B [\dot{c}_2 e^{-ik_z z} - \dot{c}_1 e^{ik_z z}] \vec{e}_x.$$

В литературе пользуются соотношением $Z_B = \frac{E}{H}$, а также

$$Z_B = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0} \frac{\mu}{\varepsilon}} = 377 \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}.$$

Например, для воздуха $\varepsilon = 1, \mu = 1 \Rightarrow Z_B = 377$ Ом.

Не происходит затухания волны по мере её распространения вдоль оси «oz».

Определим фазовую скорость распространения ЭМ-волны из условия постоянства фазы бегущей волны:

$$\omega t - k_z z = \text{const}, \text{ откуда } \omega dt - k_z dz = 0 \text{ и } v = \frac{dz}{dt} = v_{\text{фаз}} = \frac{\omega}{k_z} = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_a \mu_a}}.$$

Если рассматривать $v_{\text{фаз}}$ для вакуума, то получим величину, равную $v_{\text{вак}} = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}} = c$ – скорости света в вакууме. Тогда в среде с параметрами $\varepsilon_a = \varepsilon_0 \varepsilon$ и $\mu_a = \mu_0 \mu$ фазовая скорость равна $v_{\text{фаз}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}} = \frac{c}{n}$, где n – показатель преломления среды.

Как и раньше, вводим длину волны λ : $\frac{\omega}{v_{\text{ф}}} \Delta z = \frac{\omega}{v_{\text{ф}}} \lambda = 2\pi$.

Отсюда получим: $\lambda_{\text{ср}} = \frac{2\pi v_{\text{ф}}}{\omega} = \frac{c}{nf} = \frac{\lambda_{\text{вак}}}{n}$ (здесь $\lambda_{\text{ср}}$ – длина волны в диэлектрической среде, $\lambda_{\text{вак}}$ – в вакууме, n – показатель преломления среды).

8.3.5. Распространение ЭМ-волны в однородных изотропных полупроводящих средах

В первом уравнении Максвелла $\text{rot } \vec{H} = \dot{\vec{j}}_{\text{пр}} + i\omega \varepsilon_a \vec{E}$ плотности тока проводимости $\dot{\vec{j}}_{\text{пр}} = \gamma \vec{E}$ и тока смещения $\dot{\vec{j}}_{\text{см}} = \omega \varepsilon_a \vec{E}$ соизмеримы, поэтому систему уравнений

$$\text{rot } \vec{H} = \gamma \vec{E} + i\omega \varepsilon_a \vec{E} \quad \text{и} \quad \text{rot } \vec{E} = -i\omega \mu_a \vec{H}$$

решаем без упрощений.

Решаем стандартно:

$$\begin{aligned} \text{rot rot } \vec{H} &= (\gamma + i\omega \varepsilon_a) \text{rot } \vec{E} = (\gamma + i\omega \varepsilon_a) (-i\omega \mu_a \vec{H}); \\ -\nabla^2 \vec{H} &= i\omega \left(\varepsilon_a + \frac{\gamma}{i\omega} \right) (-i\omega \mu_a \vec{H}) = i\omega \left(\varepsilon_a - i \frac{\gamma}{\omega} \right) (-i\omega \mu_a \vec{H}); \\ \nabla^2 \vec{H} &= -\omega^2 \varepsilon_k \mu_a \vec{H}, \end{aligned}$$

где $\varepsilon_k = \varepsilon_a - i \frac{\gamma}{\omega}$ – комплексная диэлектрическая проницаемость.

Решение этого уравнения ищем в структуре плоских волн:

$$\frac{d^2 \dot{H}}{dz^2} = -\omega^2 \varepsilon_k \mu_a \dot{H} -$$

уравнение для поиска $\vec{H}$ и $\vec{E}$ для полупроводящей среды.

$\dot{\varepsilon} = \varepsilon_k$ – комплексная диэлектрическая проницаемость среды.

Вводя комплексность только для ε , а не для μ подразумеваем, что потери обусловлены не магнитной вязкостью, а обусловлены проводимостью γ этой среды.

Имеем уравнение типа $y'' = qu$. Характеристическое уравнение

$$p^2 = -\omega^2 \varepsilon_k \mu_a \text{ имеет два корня:}$$

$p_1 = \sqrt{-\omega^2 \varepsilon_k \mu_a}$ и $p_2 = -\sqrt{-\omega^2 \varepsilon_k \mu_a}$ – комплексные числа, т.к. ε_k – комплексное.

Представим эти корни в виде Re и Im частей:

$$p_1 = \sqrt{-\omega^2 \varepsilon_k \mu_a} = \beta + ik_z; \quad p_2 = -\sqrt{-\omega^2 \varepsilon_k \mu_a} = \beta - ik_z.$$

$$\text{Здесь } k_z = \frac{\omega}{v_\phi}.$$

Почему Re и Im части выбрали в таком виде?

В случае предельного перехода (от ПП к диэлектрической среде) должно отсутствовать поглощение. Коэффициент затухания β показывает уменьшение амплитуды волны, распространяющейся вдоль оси oz , и в этом смысле β – аналог коэффициента затухания в проводящей среде; k_z – фазовый коэффициент, не отвечает за изменение амплитуды, является проекцией волнового вектора на ось Z .

Произведя анализ размерности, получаем: $[\beta] = [k_z] = 1/\text{м}$.

Величина $k_z = \frac{\omega}{v_\phi}$ выбрана так, чтобы в предельном переходе

($\beta \rightarrow 0$) получилось известное выражение $\dot{H} = \dot{c}_1 e^{i \frac{\omega}{v_\phi} z} + \dot{c}_2 e^{-i \frac{\omega}{v_\phi} z}$ с фазовым множителем $\frac{\omega}{v_\phi} = k_z$, представляющим собой проекцию волнового вектора на ось Z .

Рассмотрим решение характеристического уравнения:

$$\begin{aligned} p &= \pm \sqrt{-\omega^2 (\varepsilon_a - i \frac{\gamma}{\omega}) \mu_a} = \pm \sqrt{-\omega^2 (\varepsilon_a \mu_a - i \frac{\gamma \mu_a}{\omega})} = \\ &= \pm \omega \sqrt{\varepsilon_a \mu_a} \sqrt{-1 + ia}, \quad \text{где } a = \frac{\omega \gamma \mu_a}{\omega^2 \varepsilon_a \mu_a} = \frac{\gamma}{\omega \varepsilon_a}. \end{aligned}$$

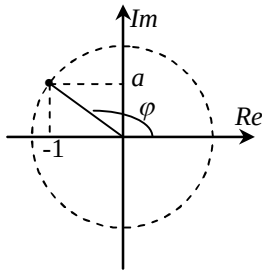


Рис. 47

Величину под корнем $(-1 + ia)$, изображенную на комплексной плоскости точкой с координатами $(-1; a)$ (рис. 47), можно выразить через её модуль и фазу φ , как

$$-1 + ia = |-1 + ia|e^{i\varphi}.$$

Модуль $|-1 + ia| = \sqrt{1 + a^2}$, откуда

$$-1 + ia = \sqrt{1 + a^2}e^{i\varphi}.$$

Извлекая корень из обеих частей равенства, получим

$$p = \pm \omega \sqrt{\varepsilon_a \mu_a} \sqrt{\sqrt{1 + a^2}} e^{i\frac{\varphi}{2}}.$$

Обозначая множитель $\pm \omega \sqrt{\varepsilon_a \mu_a} \sqrt{\sqrt{1 + a^2}} = A$ и учитывая разложение экспоненты $e^{i\frac{\varphi}{2}} = \cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2}$, получим:

$$p = A \cos \frac{\varphi}{2} + iA \sin \frac{\varphi}{2}.$$

Этот результат, используя формулы двойного угла, преобразуем к виду

$$p = A \sqrt{\frac{1 + \cos \varphi}{2}} + iA \sqrt{\frac{1 - \cos \varphi}{2}}.$$

Значение $\cos \varphi$ определим на комплексной плоскости: $\cos \varphi = -\sqrt{\frac{1}{1 + a^2}}$.

Коэффициент затухания примет вид:

$$\begin{aligned} \beta &= A \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{1}{1 + a^2}} \right)} = \pm \omega \sqrt{\varepsilon_a \mu_a} \sqrt{\sqrt{1 + a^2}} \sqrt{\frac{\sqrt{1 + a^2} - 1}{2\sqrt{1 + a^2}}} = \\ &= \pm \omega \sqrt{\varepsilon_a \mu_a} \sqrt{\frac{\sqrt{1 + a^2} - 1}{2}}, \quad \text{где} \quad a = \frac{\gamma}{\omega \varepsilon_a}. \end{aligned}$$

Фазовый коэффициент

$$k_z = A \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{1}{1 + a^2}} \right)} = \dots = \pm \omega \sqrt{\varepsilon_a \mu_a} \sqrt{\frac{\sqrt{1 + a^2} + 1}{2}}, \quad \text{где} \quad a = \frac{\gamma}{\omega \varepsilon_a}.$$

Фазовая скорость волны в полупроводящей среде $v_\phi = \frac{\omega}{k_z}$.

Волновое сопротивление Z_B полупроводящей среды составляется таким образом, чтобы в пределе при переходе к диэлектрической среде мы получили Z_B для диэлектрической среды:

$$Z_B = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_k}} = \frac{1}{\sqrt{1-ia}}$$

Физический смысл $Z_B = \frac{E}{H}$ – величина, служащая для связи $\vec{H}$ и $\vec{E}$.

Если среда диэлектрическая, то $\varepsilon_k = (\varepsilon_a - i\frac{\gamma}{\omega}) \rightarrow \varepsilon_a$. Это значит, что $\frac{\gamma}{\omega} \rightarrow 0$, следовательно, $a = \frac{\gamma}{\omega\varepsilon_a} \rightarrow 0$ и тогда $\beta \rightarrow 0$, а $k_z \rightarrow \omega\sqrt{\varepsilon_a\mu_a}$, и фазовая скорость $v_\phi = \frac{\omega}{k_z} \rightarrow \frac{\omega}{\omega\sqrt{\varepsilon_a\mu_a}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_a\mu_a}}$ (что было показано ранее).

В полупроводящей среде β , k_z и Z_B зависят от частоты.

Проанализируем распространение ЭМ-волны в какой-либо среде.

Рассмотрим отношение $a = \frac{\gamma}{\omega\varepsilon_a}$.

Возможны следующие ситуации:

- Величина $a \gg 1$ (низкие частоты), следовательно, среда – проводник.
- Величина $a \ll 1$ (высокие частоты), следовательно, среда – диэлектрик.
- Величина a лежит в пределах 0,01–100, среда обладает выраженными полупроводящими свойствами.

8.3.6. Волновые явления на границе раздела двух сред

Общая ситуация для анализа: на границе раздела происходит несколько физических процессов, рассмотрим их в различных средах.

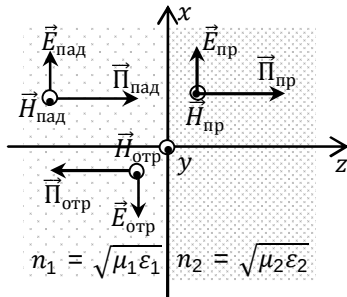


Рис. 48

Рассмотрим случай нормального падения плоской волны на границу раздела двух сред, в данном случае – двух диэлектриков.

Рис. 48 отражает процессы в двух средах в случае нормального падения ЭМВ на границу раздела.

Исходное уравнение для диэлектрика

$$\nabla^2 \vec{H} = -\left(\frac{\omega}{v_\phi}\right)^2 \vec{H}.$$

Решение этого уравнения для диэлектрической среды:

$$\vec{H} = c_1 e^{i\frac{\omega}{v_\phi}z} + c_2 e^{-i\frac{\omega}{v_\phi}z} = c_1 e^{ik_z z} + c_2 e^{-ik_z z};$$

$\vec{E} = Z_B(c_2 e^{ik_z z} + c_1 e^{-ik_z z})$, (где $Z_B = \frac{E}{H}$ – волновое сопротивление)

содержит две волны. В рассматриваемом случае в первой среде распространяются падающая и отражённая волны, во второй – прошедшая (преломлённая) волна.

Фазовая скорость ЭМВ в диэлектрической среде

$$v_{\text{фаз}} = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}} = \frac{c}{n},$$

где $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$ – скорость света в вакууме; $n = \sqrt{\varepsilon \mu}$ – показатель преломления среды, зависит от параметров среды (которые могут быть комплексными); $\frac{\omega}{v_{\text{ф}}} = k_z$ – волновое число, также может быть комплексным (размерность $[k_z] = 1/\text{м}$).

Следовательно, к параметрам ε_a и μ_a прибавляется k_z .

В формуле для $\dot{H}$ в первой среде коэффициенту $\dot{c}_1$ придаем смысл амплитуды $\dot{H}_{\text{отр}}$ отражённой волны: $\dot{c}_1 = \dot{H}_{\text{отр}}$, $\dot{c}_2 = \dot{H}_{\text{пад}}$ – амплитуда падающей волны, во второй среде, соответственно, $\dot{c}_1' = 0$ и $\dot{c}_2' = \dot{H}_{\text{пр}}$.

Поле, которое существует в первой среде:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\vec{E}}_{\text{пад}} &= (\dot{E}_{\text{пад}} e^{-ik_1 z}) \vec{e}_x \\ \dot{\vec{H}}_{\text{пад}} &= (\dot{H}_{\text{пад}} e^{-ik_1 z}) \vec{e}_y \end{aligned} \right\} - \text{падающая волна в первой среде.}$$

Кроме того, в первой среде существует отражённая волна:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\vec{E}}_{\text{отр}} &= -(\dot{E}_{\text{отр}} e^{ik_1 z}) \vec{e}_x \\ \dot{\vec{H}}_{\text{отр}} &= (\dot{H}_{\text{отр}} e^{ik_1 z}) \vec{e}_y \end{aligned} \right\} - \text{отражённая волна в первой среде.}$$

Во второй среде существует только прошедшая волна:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\vec{E}}_{\text{пр}} &= (\dot{E}_{\text{пр}} e^{-ik_1 z}) \vec{e}_x \\ \dot{\vec{H}}_{\text{пр}} &= (\dot{H}_{\text{пр}} e^{-ik_1 z}) \vec{e}_y \end{aligned} \right\} - \text{прошедшая волна во второй среде.}$$

Рассматриваем поле в первой среде:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{E}}_1 &= \dot{\vec{E}}_{\text{пад}} + \dot{\vec{E}}_{\text{отр}} = (\dot{E}_{\text{пад}} e^{-ik_1 z} - \dot{E}_{\text{отр}} e^{ik_1 z}) \vec{e}_x, \\ \dot{\vec{H}}_1 &= \dot{\vec{H}}_{\text{пад}} + \dot{\vec{H}}_{\text{отр}} = (\dot{H}_{\text{пад}} e^{-ik_1 z} + \dot{H}_{\text{отр}} e^{ik_1 z}) \vec{e}_y. \end{aligned}$$

Векторы $\vec{H}$ и $\vec{E}$, как видно из рис. 48, являются касательными (тангенциальными) к поверхности раздела диэлектриков. Вспоминая граничные условия для касательных составляющих (при условии отсутствия поверхностных зарядов и токов), можно записать:

$$\left\{ \begin{aligned} E_{1\tau} &= E_{2\tau} \\ H_{1\tau} &= H_{2\tau} \end{aligned} \right\} \text{ при } z = 0.$$

Раз выполняются такие граничные условия, то суммарное поле на границе раздела в первой среде равно полю во второй:

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_2, \text{ при } z = 0 \text{ (аналогично } \vec{H}_1 = \vec{H}_2, \text{ при } z = 0).$$

Таким образом, на границе раздела ($z = 0$) двух диэлектриков должны выполняться следующие условия:

$$\begin{cases} \dot{E}_{m \text{ пад}} - \dot{E}_{m \text{ отр}} = \dot{E}_{m \text{ пр}}, \\ \dot{H}_{m \text{ пад}} + \dot{H}_{m \text{ отр}} = \dot{H}_{m \text{ пр}}. \end{cases}$$

При этом между величинами $\dot{E}_m$ и $\dot{H}_m$ существует связь $Z_B = \frac{\dot{E}_m}{\dot{H}_m}$.

В первом уравнении произведём следующие преобразования:

$$1 - \frac{\dot{E}_{m \text{ отр}}}{\dot{E}_{m \text{ пад}}} = \frac{\dot{E}_{m \text{ пр}}}{\dot{E}_{m \text{ пад}}}; \quad 1 - \frac{Z_{B1}\dot{H}_{m \text{ отр}}}{Z_{B1}\dot{H}_{m \text{ пад}}} = \frac{Z_{B2}\dot{H}_{m \text{ пр}}}{Z_{B1}\dot{H}_{m \text{ пад}}}; \quad 1 - r = \tau \frac{Z_{B2}}{Z_{B1}},$$

где введены новые величины: r_H – коэффициент отражения по магнитному полю и τ_H – коэффициент прохождения по магнитному полю волны на границе раздела двух сред.

Аналогичные действия во втором уравнении дают

$$1 + \frac{\dot{H}_{m \text{ отр}}}{\dot{H}_{m \text{ пад}}} = \frac{\dot{H}_{m \text{ пр}}}{\dot{H}_{m \text{ пад}}}; \quad 1 + r_H = \tau_H.$$

В результате получили систему уравнений для нахождения коэффициентов r_H и τ_H :

$$\begin{cases} 1 - r_H = \tau_H \frac{Z_{B2}}{Z_{B1}}, \\ 1 + r_H = \tau_H \end{cases}, \text{ откуда следует } r_H = \frac{Z_{B1} - Z_{B2}}{Z_{B1} + Z_{B2}}; \quad \tau_H = \frac{2Z_{B1}}{Z_{B1} + Z_{B2}}.$$

Повторяя данную процедуру для электрического поля, получим соответствующие коэффициенты r_E и τ_E по электрическому полю:

$$r_E = \frac{Z_{B2} - Z_{B1}}{Z_{B1} + Z_{B2}}; \quad \tau_E = \frac{2Z_{B2}}{Z_{B1} + Z_{B2}}.$$

Таким образом, для прошедшей волны получим:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{E}}_{\text{пр}} &= (\dot{E}_{m \text{ пр}} e^{-ik_1 z}) \vec{e}_x = (\tau_E \dot{E}_{m \text{ пад}} e^{-ik_1 z}) \vec{e}_x \\ \dot{\vec{H}}_{\text{пр}} &= (\dot{H}_{m \text{ пр}} e^{-ik_1 z}) \vec{e}_y = (\tau_H \dot{H}_{m \text{ пад}} e^{-ik_1 z}) \vec{e}_y. \end{aligned}$$

Это значит, что во второй среде имеется бегущая волна, амплитуда которой связана с амплитудами падающих волн через τ_E и τ_H . Во второй среде ничего, кроме бегущих волн, нет.

Анализ в первой среде сложнее, т.к. имеется суперпозиция падающих и отраженных волн:

$$\dot{\vec{E}}_1 = \dot{\vec{E}}_{\text{пад}} + \dot{\vec{E}}_{\text{отр}} = (\dot{E}_{m \text{ пад}} e^{-ik_1 z} - \dot{E}_{m \text{ отр}} e^{ik_1 z}) \vec{e}_x -$$

суммарное поле в первой среде.

Выразим $\dot{E}_{m \text{ пад}}$ через $\dot{E}_{m \text{ пр}}$ и $\dot{E}_{m \text{ отр}}$ на основании соотношения $\dot{E}_{m \text{ пад}} - \dot{E}_{m \text{ отр}} = \dot{E}_{m \text{ пр}}$, откуда $\dot{E}_{m \text{ пад}} = \dot{E}_{m \text{ отр}} + \dot{E}_{m \text{ пр}}$, и для поля в первой среде получим:

$$\begin{aligned}\dot{\vec{E}}_1 &= ((\dot{E}_{m \text{ отр}} + \dot{E}_{m \text{ пр}})e^{-ik_1 z} - \dot{E}_{m \text{ отр}}e^{ik_1 z})\vec{e}_x = \\ &= ((\dot{E}_{m \text{ пр}})e^{-ik_1 z} + \dot{E}_{m \text{ отр}}(e^{-ik_1 z} - e^{ik_1 z}))\vec{e}_x = \\ &= ((\tau_E \dot{E}_{m \text{ пад}})e^{-ik_1 z} - r_E \dot{E}_{m \text{ пад}}(e^{ik_1 z} - e^{-ik_1 z}))\vec{e}_x.\end{aligned}$$

Поле в первой среде состоит из суммы бегущих волн с амплитудой $(\tau_E \dot{E}_{m \text{ пад}})$ и стоячих волн с амплитудой, осциллирующей синусоидально:

$$-r_E \dot{E}_{m \text{ пад}}(e^{ik_1 z} - e^{-ik_1 z}) = (2r_E \dot{E}_{m \text{ пад}} \sin(-k_z z))e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

Частные случаи:

1) Случай согласованных сред: $Z_{B2} = Z_{B1}$,

тогда
$$r_E = \frac{Z_{B2} - Z_{B1}}{Z_{B1} + Z_{B2}} = 0; \quad \tau_E = \frac{2Z_{B2}}{Z_{B1} + Z_{B2}} = 1,$$

вся волна проходит из первой среды во вторую без отражения.

2) Переход волны в оптически более плотную среду.

Критерий оптической плотности среды – фазовая скорость. Чем больше оптическая плотность среды, тем меньше фазовая скорость. Тогда из выражения $v_{\text{фаз}} = \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}} = \frac{c}{n}$ следует, что с ростом оптической плотности среды растёт её показатель преломления $n = \sqrt{\varepsilon \mu}$, а в среде с $\mu = 1$ растёт диэлектрическая проницаемость ε и уменьшается волновое сопротивление $Z_B = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0 \varepsilon}}$.

В данном случае $Z_{B2} < Z_{B1}$, откуда следует $r_E < 0$, а $r_H > 0$. Это означает, что отражённая $\vec{E}_{\text{отр}}$ волна на границе раздела отражается в противофазе относительно падающей $\vec{E}_{\text{пад}}$, а отражённая $\vec{H}_{\text{отр}}$ в фазе с падающей $\vec{H}_{\text{пад}}$.

3) Переход волны в оптически менее плотную среду. В этом случае $Z_{B2} > Z_{B1}$, откуда следует $r_E > 0$, а $r_H < 0$. Это означает, что отражённая $\vec{H}_{\text{отр}}$ волна на границе раздела отражается в противофазе относительно падающей $\vec{H}_{\text{пад}}$, а отражённая $\vec{E}_{\text{отр}}$ в фазе с падающей $\vec{E}_{\text{пад}}$.

4) Падение плоской ЭМВ из диэлектрика на границу раздела, где вторая среда – проводник.

Волновое сопротивление проводящей среды $Z_B = \frac{\rho}{\gamma} = \sqrt{\frac{\omega \mu_a}{2\gamma}} (1 + i)$

для идеального проводника ($\gamma \rightarrow \infty$) равно нулю, т.е. $Z_{B2} = 0$, следовательно,

$$r_H = \frac{Z_{B1} - Z_{B2}}{Z_{B1} + Z_{B2}} = 1; \quad r_E = \frac{Z_{B2} - Z_{B1}}{Z_{B1} + Z_{B2}} = -1 \text{ и } \tau_H = \tau_E = \frac{2Z_{B2}}{Z_{B1} + Z_{B2}} = 0.$$

Это значит, что волна полностью отражается от границы раздела и распространяется только в первой среде; в результате сложения с падающей волной в первой среде образуются стоячие волны. На границе раздела возникает узел стоячей волны электрического поля и пучность магнитного.

9. ЗАПАЗДЫВАЮЩИЕ ПОТЕНЦИАЛЫ ПЕРЕМЕННОГО ЭМ-ПОЛЯ. ИЗЛУЧЕНИЕ ЭМ-ЭНЕРГИИ

Есть система сторонних зарядов (сторонних токов), величины которых являются функциями координат и времени. Нас интересуют возникающие при этом поля, зависимость их амплитуды от меняющихся величин, распространение полей в пространстве.

Для решения общей задачи приступим к частной, именуемой «запаздывающий потенциал».

Ранее, при рассмотрении вопроса о векторном потенциале магнитного поля, были получены уравнения Максвелла в терминах векторного и скалярного потенциалов (в форме уравнений Даламбера):

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{v_\phi^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_a};$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{v_\phi^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_a \vec{j}.$$

Комментарии:

1. Это дифференциальные уравнения второго порядка, линейные, неоднородные. Второе уравнение – векторное.
2. Если потенциалы φ и $\vec{A}$ не являются функцией времени (статика), то уравнения Даламбера переходят в уравнения Пуассона:

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_a}; \quad \nabla^2 \vec{A} = -\mu_a \vec{j}.$$

В области пространства, свободной от зарядов и токов, получим уравнения Лапласа:

$$\nabla^2 \varphi = 0; \quad \nabla^2 \vec{A} = 0.$$

В сферической системе координат уравнение Лапласа для потенциала электростатического поля имеет вид

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\varphi) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} = 0;$$

для сферически симметричной задачи исчезают угловые зависимости (производные $\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = 0$) и уравнение Лапласа приобретает вид

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\varphi) = 0;$$

дважды интегрируя, получим

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial r} (r\varphi) = \text{const} = a; \int \partial (r\varphi) = \int a dr; (r\varphi) = ar + b \right\},$$

сферически симметричное решение для потенциала:

$$\varphi(r) = a + \frac{b}{r}.$$

Но данный результат даёт зависимость от r , такую же, как и $\varphi(r)$ точечного заряда:

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} + \text{const}.$$

Получается, что мы искали решение уравнения Лапласа в пустом пространстве, а фактически получили также поле потенциала точечного заряда, расположенного в начале координат.

В электростатике, в уравнении Пуассона $\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho(r)}{\epsilon_a}$, появляется заряд, распределённый в пространстве с известной плотностью $\rho(r)$.

Его решение:

$$\varphi(R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_a} \int \frac{\rho(r)dV}{r'},$$

где величину $\delta\varphi = \frac{\rho(r)dV}{4\pi\epsilon_a r'}$ можно рассматривать как вклад в полный потенциал $\varphi(R)$ от точечного заряда $\rho(r)dV$, расположенного на расстоянии $r' = |\vec{R} - \vec{r}|$ от точки, в которой ищется полный потенциал поля такого заряда.

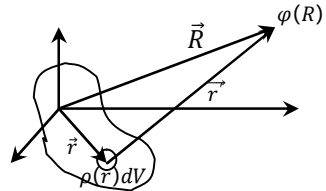


Рис. 49

Перейдём к решению уравнений Даламбера. Сначала рассмотрим область пространства, свободную от зарядов. Решение первого уравнения рассмотрим в декартовой системе координат в модели плоских волн (производные по координатам, кроме одной, равны нулю). Тогда волновое уравнение упростится до вида:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{1}{v_\phi^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}.$$

Общее решение имеет вид $\varphi = f_1\left(t - \frac{z}{v}\right) + f_2\left(t + \frac{z}{v}\right)$.

Функции f_1 и f_2 могут быть любыми. Единственное требование – они должны быть дважды дифференцируемы по координатам и по времени. Аргументу $\left(t - \frac{z}{v}\right)$ соответствует распространение волны вдоль оси z , а $\left(t + \frac{z}{v}\right)$ – соответствует распространению волны против оси z . Данное уравнение описывает бегущие волны.

Если представить функции f_1 и f_2 в виде жестких образований (не меняющих форму в процессе распространения), то и значения аргументов функций f_1 и f_2 с течением времени должны оставаться без изменений.

Для наглядности рассмотрим картинку – жесткость функции f_1 (рис. 50): приросту времени на Δt соответствует смещение в пространстве на Δz , такое, что $\frac{\Delta z}{v} = \Delta t$, в результате получим

$$\begin{aligned} f_1\left(t - \frac{z}{v}\right) &= f_1\left(t + \Delta t - \frac{z + \Delta z}{v}\right) = \\ &= f_1\left(t + \Delta t - \frac{z}{v} - \Delta t\right) = f_1\left(t - \frac{z}{v}\right). \end{aligned}$$

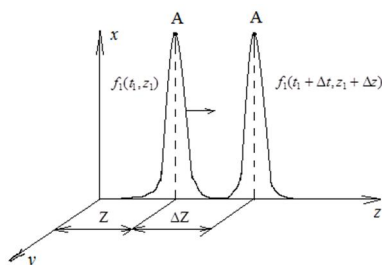


Рис. 50

То же самое будет и для функции f_2 при смещении против оси z на величину $(-\Delta z) = v\Delta t$:

$$f_2\left(t + \frac{z}{v}\right) = f_2\left(t + \Delta t + \frac{z - \Delta z}{v}\right) = f_2\left(t + \Delta t + \frac{z}{v} - \Delta t\right) = f_2\left(t + \frac{z}{v}\right)$$

$\begin{cases} f_1 - \text{бегущая волна в положительном направлении оси } z; \\ f_2 - \text{бегущая волна в противоположном направлении.} \end{cases}$

Рассмотрим сферически симметричное решение исходного уравнения $\nabla^2 \varphi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$ (без конкретной системы координат). В сферической системе координат оно имеет вид:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\varphi) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}.$$

В силу симметрии задачи исчезнут угловые зависимости $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = 0\right)$.

Останется уравнение $\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\varphi) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$. Если умножить обе его части на r , то получится уравнение

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\varphi) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (r\varphi),$$

в котором функция $(r\varphi)$ удовлетворяет одномерному волновому уравнению по переменной r (рис. 51).

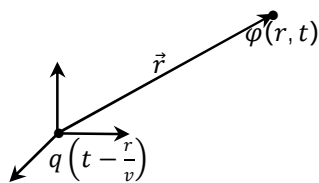


Рис. 51

Решение будет иметь вид

$$(r\varphi) = f_1\left(t - \frac{r}{v}\right).$$

Отсюда видно, что характеризующая поле функция $\varphi(r, t)$ имеет вид

$$\varphi(r, t) = \frac{f_1\left(t - \frac{r}{v}\right)}{r}.$$

Такая функция представляет сферическую волну общего вида, распространяющуюся от начала координат со скоростью v . В отличие от плоской волны амплитуда сферической волны убывает обратно пропорционально радиусу.

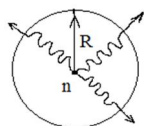


Рис. 52

Поскольку функция f_1 не зависит от угловых координат, то волна распространяется во все стороны одинаково и имеет одинаковую фазу на поверхности сферы радиуса R с центром в точечном источнике излучения (рис. 52). Такая поверхность называется эквифазной поверхностью или фронтом волны.

Поэтому существует первичная классификация волн:

- волну создает точечный источник $\rightarrow$ волна сферическая;
- источник – бесконечная плоскость $\rightarrow$ волна имеет плоский фронт и волна плоская;
- источник в виде нити $\rightarrow$ волна цилиндрическая.

По аналогии с электростатикой, мы должны сделать заключение, что источником такой сферической волны потенциала $\varphi(r, t)$ является *нечто*, расположенное в начале координат, и этим «нечто» является зависящий от времени точечный заряд $q(t)$, т.е.

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\left(t - \frac{r}{v}\right)}{r}.$$

Значение потенциала $\varphi(r, t)$, измеренное в точке $\vec{r}$ в момент времени t , соответствует величине заряда $q\left(t - \frac{r}{v}\right)$ в предшествующий момент времени. Запаздывание $\Delta t = \frac{r}{v}$ обусловлено конечной скоростью распространения волны. Отсюда, кстати, и название – «запаздывающие потенциалы».

Другими словами, информация, поступающая к нам в данный момент времени, описывает уже происшедшие события (например, свет от давно погасшей звезды).

Также по аналогии, сравнивая уравнения Пуассона $\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_a}$ и

Даламбера $\nabla^2 \varphi - \frac{1}{v_\phi^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho(\vec{r}, t)}{\varepsilon_a}$, решение последнего можно представить в виде

$$\varphi(\vec{R}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_a} \int \frac{\rho(\vec{r}, t - \frac{r'}{v}) dV}{r'},$$

где величину $\delta\varphi(\vec{r}', t) = \frac{\rho(\vec{r}, t - \frac{r'}{v})}{r'} dV$ можно рассматривать как вклад в полный потенциал от точечного заряда $\rho(\vec{r}, t - \frac{r'}{v}) dV$, расположенного на расстоянии $r' = |\vec{R} - \vec{r}|$ от точки, в которой ищется полный потенциал $\varphi(\vec{R}, t)$ поля такого заряда (рис. 53).

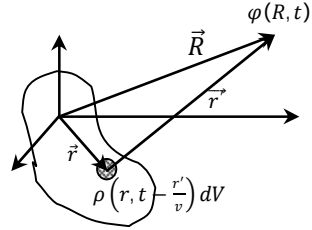


Рис. 53

Аналогично как в магнитостатике, рассмотрим решение уравнения Пуассона для векторного потенциала магнитного поля:

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_a \vec{j}.$$

Это уравнение векторное.

Его можно расписать покомпонентно:

$$\nabla^2 A_x = -\mu_a j_x; \quad \nabla^2 A_y = -\mu_a j_y; \quad \nabla^2 A_z = -\mu_a j_z.$$

Соответственно, для каждой компоненты, по аналогии с электростатикой, получим:

$$A_x = \frac{\mu_a}{4\pi} \int_V \frac{j_x(r)}{r'} dV; \quad A_y = \frac{\mu_a}{4\pi} \int_V \frac{j_y(r)}{r'} dV; \quad A_z = \frac{\mu_a}{4\pi} \int_V \frac{j_z(r)}{r'} dV,$$

откуда

$$\vec{A}(R) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(r) dV}{r'},$$

где величина $\delta\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j}(r) dV}{r'}$ даёт вклад в суммарный векторный потенциал от каждого из элементов тока $\vec{j}(r) dV$, расположенного на расстоянии $r' = |\vec{R} - \vec{r}|$ от точки, в которой ищется этот векторный потенциал.

Продолжая аналогию для уравнения Даламбера относительно векторного потенциала

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{v_\phi^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_a \vec{j},$$

получим решение (по принципу – одинаковые уравнения дают одинаковые решения):

$$\vec{A}(\vec{R}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}, t - \frac{r'}{v}) dV}{r'},$$

где $r' = |\vec{R} - \vec{r}|$ – расстояние от элемента тока $\vec{j}(\vec{r}, t - \frac{r'}{v}) dV$, взятого в предшествующий момент времени $(t - \frac{r'}{v})$, до точки, в которой определяется потенциал в момент времени (t) .

Выводы:

1) $\varphi(\vec{R}, t)$ и $\vec{A}(\vec{R}, t)$ эквивалентны электромагнитной волне, распространяющейся со скоростью $\vec{v}$.

2) Источниками волн $\varphi(\vec{R}, t)$ и $\vec{A}(\vec{R}, t)$ являются соответственно точечный заряд $\rho(\vec{r}, t) dV$ и объёмный элемент тока $\vec{j}(\vec{r}, t) dV$. Так как в уравнениях волн данных потенциалов появляются аргументы вида $(t - \frac{r'}{v})$, то эти потенциалы называются запаздывающими.

3) Объёмный элемент тока в подходящих условиях можно заменить линейным – $\vec{j}(\vec{r}, t) dV = Id\vec{l}$.

Излучение электромагнитной энергии

Рассмотрим вопрос об излучении электромагнитной энергии линейным элементом тока, изменяющимся по гармоническому закону:

$$Id\vec{l} = I_m e^{i\omega t} d\vec{l}.$$

На первом этапе воспользуемся цилиндрической системой координат. Ось z совпадает с положительным направлением элемента тока $Id\vec{l}$ (рис. 54).

Найдём значение векторного потенциала $\vec{A}$ в произвольной точке $\vec{R}$, заменив объёмный элемент тока линейным ($\vec{j}(\vec{r}, t) dV = Id\vec{l}$). Тогда получим:

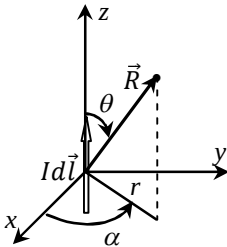


Рис. 54

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l}}{R} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_m e^{i\omega(t - \frac{R}{v})} d\vec{l}}{R}.$$

Найдём индукцию магнитного поля $\vec{B}$ в этой точке: $\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$. Раскроем ротор в цилиндрической системе координат:

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\alpha + \left(\frac{\partial(r A_\alpha)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{r \partial \alpha} \right) \vec{e}_z.$$

Поскольку вектор $\vec{A}$ совпадает по направлению с элементом тока $Id\vec{l}$ и осью z , т.е. у него отлична от нуля единственная компонента A_z , зависящая от R и не зависящая, в силу симметрии, от α , то остаётся только

$A_z = \frac{\mu_0 I_m e^{i\omega(t-\frac{R}{v})} dl}{4\pi R}$, неявно зависящая от r через очевидное соотношение $r^2 + z^2 = R^2$. Отсюда $2R \frac{\partial R}{\partial r} = 2r$ или $\frac{\partial R}{\partial r} = \frac{r}{R} = \sin\theta$.

Тогда производная $\frac{\partial A_z}{\partial r}$ примет вид

$$\frac{\partial A_z}{\partial r} = \frac{\partial A_z}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial r} = \frac{\mu_0 I_m dl}{4\pi} \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{e^{i\omega(t-\frac{R}{v})}}{R} \right) \sin\theta,$$

а вектор индукции магнитного поля $\vec{B} = \left(-\frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\alpha$, после раскрытия данной производной становится равным

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I_m dl \sin\theta}{4\pi} \left(\frac{1}{R^2} e^{i\omega(t-\frac{R}{v})} + i \frac{\omega}{vR} e^{i\omega(t-\frac{R}{v})} \right) \vec{e}_\alpha = B_\alpha \vec{e}_\alpha,$$

т.е. вектор $\vec{B}$ направлен вдоль $\vec{e}_\alpha$.

Модуль вектора $\vec{B}$ можно представить в виде

$B_\alpha = \frac{\mu_0 I_m dl \sin\theta}{4\pi R^2} (1 + ikR) e^{i(\omega t - kR)}$, где $k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{Tv} = \frac{2\pi}{\lambda}$ – модуль волнового вектора.

Найдём закон изменения напряжённости электрического поля, полагая, что в данном случае оно изменяется также по гармоническому закону $\vec{E} = \vec{E}_m e^{i\omega t}$. Тогда в уравнении Максвелла получим

$$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = i\omega \mu_0 \varepsilon_0 \vec{E},$$

откуда
$$\vec{E} = \frac{1}{i\omega \mu_0 \varepsilon_0} \text{rot} \vec{B} = -i \frac{1}{\omega \mu_0 \varepsilon_0} \text{rot} \vec{B}.$$

На этом этапе удобнее раскрыть ротор в сферической системе координат:

$$\begin{aligned} (\text{rot} \vec{B})_R &= \frac{1}{R \sin\theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin\theta B_\alpha - \frac{\partial B_\theta}{\partial \alpha}) \right]; \\ (\text{rot} \vec{B})_\theta &= \frac{1}{R \sin\theta} \frac{\partial B_R}{\partial \alpha} - \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (RB_\alpha); \\ (\text{rot} \vec{B})_\alpha &= \frac{1}{R} \left[\frac{\partial}{\partial R} (RB_\theta - \frac{\partial B_R}{\partial \theta}) \right]. \end{aligned}$$

Поскольку у вектора $\vec{B}$ проекции $B_R = 0$ и $B_\theta = 0$, то остаётся только

$$\begin{aligned} (\text{rot} \vec{B})_R &= \frac{1}{R \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin\theta B_\alpha); \\ (\text{rot} \vec{B})_\theta &= -\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (RB_\alpha). \end{aligned}$$

Найдём проекцию $(\text{rot}\vec{B})_R$:

$$(\text{rot}\vec{B})_R = \frac{\mu_0 I_m d \cos \theta}{2\pi R^3} (1 + ikR) e^{i(\omega t - kR)},$$

а также проекцию $(\text{rot}\vec{B})_\theta$:

$$(\text{rot}\vec{B})_\theta = -\frac{B_\alpha}{R} - \frac{\partial B_\alpha}{\partial R} = \frac{\mu_0 I_m d \sin \theta}{4\pi R^3} (1 + ikR - k^2 R^2) e^{i(\omega t - kR)}.$$

Для определения соответствующих проекций вектора напряжённости электрического поля воспользуемся ранее полученным выражением связи $\vec{E}$ и $\text{rot}\vec{B}$:

$$\vec{E} = -i \frac{1}{\omega \mu_0 \varepsilon_0} \text{rot}\vec{B},$$

откуда

$$E_R = -i \frac{1}{\omega \mu_0 \varepsilon_0} (\text{rot}\vec{B})_R = -i \frac{1}{\omega \varepsilon_0} \frac{I_m d \cos \theta}{2\pi R^3} (1 + ikR) e^{i(\omega t - kR)};$$

$$E_\theta = -i \frac{1}{\omega \mu_0 \varepsilon_0} (\text{rot}\vec{B})_\theta = -i \frac{1}{\omega \varepsilon_0} \frac{I_m d \sin \theta}{4\pi R^3} (1 + ikR - k^2 R^2) e^{i(\omega t - kR)}.$$

Данный расчёт применим и для линейного излучателя конечной длины, при условии $|\vec{l}| \ll \lambda$ – длины волны излучения.

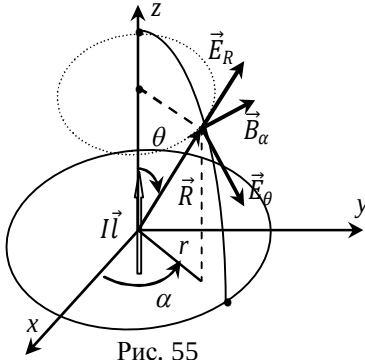


Рис. 55

Таким образом, в точке наблюдения $\vec{R}$ электрическое поле $\vec{E}$ имеет две компоненты (рис. 55): радиальную $\vec{E}_R$ и касательную, направленную вдоль меридиана, $\vec{E}_\theta$, магнитное поле – одну компоненту: $\vec{B} = \vec{B}_\alpha$.

Принято всё поле разделять на ближнюю, среднюю и дальнюю зоны. Для ближней зоны $R \ll \lambda$ или $kR = \frac{2\pi}{\lambda} R \ll 1$, для дальней зоны – $kR \gg 1$. В средней зоне R соизмеримо с $\lambda/2\pi$ (т.е. $kR \approx 1$).

С учётом деления на зоны магнитное поле

$$B_\alpha = \frac{\mu_0 I_m d \sin \theta}{4\pi R^2} (1 + ikR) e^{i(\omega t - kR)}$$

в ближней зоне примет вид

$$B_{\alpha \text{ ближн}} = \frac{\mu_0 I_m d \sin \theta}{4\pi R^2} e^{i(\omega t)};$$

электрическое поле

$$E_R = -i \frac{1}{\omega \varepsilon_0} \frac{I_m d \cos \theta}{2\pi R^3} (1 + ikR) e^{i(\omega t - kR)},$$

$$E_\theta = -i \frac{1}{\omega \varepsilon_0} \frac{I_m d \sin \theta}{4\pi R^3} (1 + ikR - k^2 R^2) e^{i(\omega t - kR)}$$

в ближней зоне примет вид

$$E_R = -i \frac{1}{\omega \varepsilon_0} \frac{I_m d \cos \theta}{2\pi R^3} e^{i(\omega t)}; \quad E_\theta = -i \frac{1}{\omega \varepsilon_0} \frac{I_m d \sin \theta}{4\pi R^3} e^{i(\omega t)}.$$

Таким образом, в ближней зоне излучателя поле имеет колебательный характер. Ближнюю зону принято называть квазистационарной, т.к. в ней отсутствует волновой процесс. Она описывается законами электро- и магнитостатики. Ее называют зоной Био–Савара–Кулона.

Рассмотрим поведение данного поля в дальней зоне ($kR \gg 1$): магнитное поле $B_\alpha = \frac{\mu_0 I_m d \sin \theta}{4\pi R^2} (1 + ikR) e^{i(\omega t - kR)}$ примет вид

$$\vec{B} = \left(i \frac{\mu_0 I_m d \sin \theta}{2R\lambda} e^{i(\omega t - kR)} \right) \vec{e}_\alpha;$$

радиальная компонента электрического поля

$E_R = -i \frac{1}{\omega \varepsilon_0} \frac{I_m d \cos \theta}{2\pi R^3} (1 + ikR) e^{i(\omega t - kR)}$ исчезает, поскольку с учётом условия дальней зоны и сокращения R в знаменателе остаётся R^2 , что приводит к обнулению E_R в дальней зоне.

Касательная компонента

$$E_\theta = -i \frac{1}{\omega \varepsilon_0} \frac{I_m d \sin \theta}{4\pi R^3} (1 + ikR - k^2 R^2) e^{i(\omega t - kR)}$$

преобразуется к виду

$$E_\theta = i \frac{1}{\omega \varepsilon_0} \frac{I_m d \sin \theta}{4\pi R} (k^2) e^{i(\omega t - kR)} = i \frac{1}{\omega \varepsilon_0} \frac{I_m d \sin \theta}{2R\lambda} \frac{\omega}{v} e^{i(\omega t - kR)},$$

где $k^2 = k k = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda} \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$.

Окончательно получим $\vec{E}_\theta = \left(i \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{I_m d \sin \theta}{2R\lambda} e^{i(\omega t - kR)} \right) \vec{e}_\theta$.

В дальней зоне векторы $\vec{E}_\theta$ и $\vec{B}_\alpha$ взаимно перпендикулярны; поле в дальней зоне носит волновой характер.

$$\begin{cases} B_\alpha = i \frac{\mu_0 I_m d \sin \theta}{2R\lambda} e^{i(\omega t - kR)} = \mu_0 H_\alpha, \\ E_\theta = i \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{I_m d \sin \theta}{2R\lambda} e^{i(\omega t - kR)}. \end{cases}$$

Во всех точках сферы радиуса R фазы векторов $\vec{E}_\theta$ и $\vec{B}_\alpha = \mu_0 \vec{H}_\alpha$ в любой момент времени совпадают, однако амплитуды в разных точках сферы различны, зависят от угла θ ; на полюсах они равны нулю в любой момент времени, на «экваторе» – максимальны. Модуль E в $\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = Z_B$ раз больше модуля H , т.е. $E = Z_B H$. (Здесь Z_B – волновое сопротивление).

Диаграмму зависимости модуля E и H от угла θ называют диаграммой направленности.

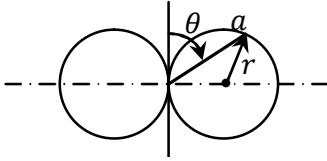


Рис. 56

Из геометрии известно выражение $a = 2r \sin\theta$, представляющее собой фигуру из двух соприкасающихся окружностей радиуса r (рис. 56).

Диаграмма направленности, с учётом данного обстоятельства, является объёмной фигурой – тором, сечение которого плоскостью, проходящей через полярную ось, совпадает с этой фигурой.

Рассмотрим вектор Пойнтинга для дальней зоны: $\vec{P} = [\vec{E}_\theta \vec{H}_\alpha]$. Направление вектора $\vec{P}$ перпендикулярно плоскости векторов $\vec{E}_\theta, \vec{H}_\alpha$ и совпадает с направлением вектора $\vec{R}$. Модуль вектора Пойнтинга

$$P = \operatorname{Re} \left\{ \frac{Z_B (I_m d \sin\theta)^2}{4R^2 \lambda^2} e^{i2(\omega t - kR)} \right\} = \frac{Z_B (I_m d \sin\theta)^2}{4R^2 \lambda^2} \cos^2(\omega t - kR).$$

Из формулы следует, что существует анизотропия по мощности излучения.

Вычислим поток вектора Пойнтинга в дальней зоне через сферическую поверхность радиуса R , в центре которой находится линейный элемент тока $I d\vec{l} = I_m e^{i\omega t} d\vec{l}$:

$$\oint_S \vec{P} d\vec{S} = \oint_S Z_B \frac{\left(I_m d l e^{i\omega(t - \frac{R}{v})} \right)^2}{4R^2 \lambda^2} \sin^2\theta dS.$$

Элемент сферической поверхности $d\vec{S}$ сонаправлен с вектором Пойнтинга. Площадь элемента сферической поверхности равна

$$dS = R d\theta R \sin\theta d\alpha = R^2 \sin\theta d\theta d\alpha.$$

Следовательно, поток вектора Пойнтинга, представляющий собой излучаемую мощность, равен

$$P_\Sigma = \oint_S \vec{P} d\vec{S} = Z_B \frac{\left(I_m d l e^{i\omega(t - \frac{R}{v})} \right)^2}{4\lambda^2} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^\pi \frac{R^2 \sin^3\theta d\theta}{R^2} = \frac{2\pi}{3} Z_B \frac{(Idl)^2}{\lambda^2},$$

не зависит от R , пропорционален квадрату элемента тока, обратно пропорционален квадрату длины волны, а следовательно, прямо пропорционален квадрату частоты излучения (так как $\lambda = \frac{v}{f}$).

Величина $\frac{2}{3} \frac{Z_B \pi (dl)^2}{\lambda^2} = R_S$ называется сопротивлением излучения.

$P_\Sigma = R_S I^2$ – типичное выражение для мощности.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Васильев А.Н. Классическая электродинамика. Краткий курс лекций: учеб. пособие. 2-е изд., стереотипное. СПб.: БХВ-Петербург, 2010. 276 с.: ил. (Учебная литература для вузов). ISBN 978-5-9775-0343-3. ЗНАНИУМ
2. Глушко В.П., Глушко А.В. Курс уравнений математической физики с использованием пакета 3Mathematica. Теория и технология решения задач. + CD/- 1-е изд. СПб.: Лань, 2010. 320 с. ISBN 978-5-8114-0983-9.
3. Аполлонский С.М. Теоретические основы электротехники. Электромагнитное поле. 1-е изд. СПб.: Лань, 2012. 592 с. ISBN 5-8297-0070-0.
4. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электромагнитное поле: учебник. 9-е изд. М.: Гардарики, 2001. 317 с. ISBN 978-5-8114-1155-9.
5. Комаров В.А., Мужичкий В.Ф., Гуревич С.Ю. Теория физических полей: учеб. пособие. Т.1. Электромагнитное поле. Ижевск: Изд-во УГУ, 1997. 208 с.; Т.2. Акустическое поле. Челябинск; Ижевск: Изд-во ЮУрГУ, 1998. 304 с.; Т.3. Связанные поля. Челябинск; Ижевск: Изд-во ЮУрГУ, 2000. 627 с.
6. Николаев А.А. Исследование температурного поля. Определение коэффициента теплопроводности твердых тел. Неразрушающий контроль: лабор. практикум. Магнитогорск: ГОУ ВПО «МГТУ», 2006. 39 с.
7. Николаев А.А. Исследование волновой природы электромагнитного поля в системе «источник поля – передающая линия – граница раздела сред». Неразрушающий контроль: лабор. практикум. Магнитогорск: ГОУ ВПО «МГТУ», 2006. 39 с.

Учебное издание

Александр Александрович НИКОЛАЕВ

ТЕОРИЯ ФИЗИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ

Часть 1

Учебное пособие

Редактор Н.П. Боярова
Оператор компьютерной правки Е.А. Назарова

Подписано в печать 24.02.2015. Рег. №82-15. Формат 60х84/16. Бумага тип. № 1.
Плоская печать. Усл.печ.л. 6,00. Тираж 50 экз. Заказ 106.



Издательский центр ФГБОУ ВПО «МГТУ»
455000, Магнитогорск, пр. Ленина, 38
Полиграфический участок ФГБОУ ВПО «МГТУ»