Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Магнитогорский государственный технический университет им. Г. И. Носова»

Т. В. Абрамова
О. С. Андросенко
Т. Г. Кузина
О. В. Петрова

Комплексные числа

*Утверждено Редакционно-издательским советом университета
в качестве практикума для студентов экономических специальностей*

Магнитогорск
2011

УДК 511.24(075)

Рецензенты:

Заведующая кафедрой математического анализа
ГОУ ВПО «Магнитогорский государственный университет»,
профессор, кандидат физико-математических наук
Т.К. Плышевская

Доцент кафедры прикладной математики и вычислительной техники
ГОУ ВПО «Магнитогорский государственный университет»
кандидат физико-математических наук
В.В. Дубровский

Абрамова Т.В., Андросенко О.С., Кузина Т.Г., Петрова О.В.
Комплексные числа : практикум для студентов экономических специальностей. – Магнитогорск : Изд-во Магнитогорск. гос. техн. ун-та им. Г.И. Носова, 2011. – 65 с.

В практикум включен теоретический материал, содержащий сведения о комплексных числах, действиях над комплексными числами и решения упражнений в поле комплексных чисел. Приведены примеры решения практических задач и сформулированы задачи для самостоятельного решения, содержатся варианты индивидуальных заданий.

Практикум предназначен для организации самостоятельной работы студентов экономических специальностей по дисциплине «Математика».

УДК 511.24(075)

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Понятие «число» прошло длительный путь развития. Коротко рассмотрим расширение понятия числа с точки зрения потребностей математики.

Натуральные числа. Первоначально под числами понимали лишь *натуральные числа* 1, 2, 3, …, которых вполне хватало для счета отдельных предметов. Множество натуральных чисел обозначается N. Записанные в порядке возрастания, они образуют *бесконечный натуральный ряд*

$$N = \{1, 2, 3, \ldots\}.$$

Отрицательные числа. После появления арифметических действий над натуральными числами началось постепенное расширение числового множества. Действительно, если сумма и произведение двух натуральных чисел есть натуральное число, то уже разность двух натуральных чисел не всегда дает натуральное число. «Невозможность» вычитания из меньшего числа большего в области арифметики натуральных чисел объясняется тем, что натуральный ряд бесконечен только в одном (положительном) направлении. Чтобы операция вычитания была неограниченно выполнимой, возникает необходимость расширения понятия числа путем введения отрицательных чисел и нуля. Полученное множество целых чисел обозначается Z.

$$Z = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Существование отрицательных чисел обосновали в 7 веке н.э. индийские математики, а известны они были китайцам еще 2000 лет назад. Европейцы же использовали их неохотно даже в 13–16 веках, и только в 1629 году французский математик Жирар ввел общеизвестный ныне способ изображения отрицательных чисел на числовой оси, придав им геометрический образ.

Довольно поздно к семье чисел присоединился и нуль. Первоначально «нуль» означало отсутствие числа (буквальный смысл латинского слова $nullum$ – «ничто»).

Рациональные числа. На множестве целых чисел всегда выполнимы операции сложения, вычитания и умножения. Но при делении двух целых чисел не всегда получается целое число. Вводится понятие дробного числа $a/b \quad (b \neq 0)$.

Представление о дробных числах имелось у древних египтян (Ахлис, 17 век до н.э.). Объединение множества целых и дробных чисел привело к понятию множества *рациональных чисел*, которое обозначается Q:

$$Q = \left\{ \frac{a}{b}, \textit{где } a \in Z, b \in Z, b \neq 0 \right\}.$$

Всякое рациональное число является либо *целым*, либо представляется в виде *конечной* или *бесконечной периодической десятичной дроби*. Например, рациональные числа $3/4$ и $1/3$ можно представить в виде следующих десятичных дробей: $3/4 = 0,75$; $1/3 = 0,333...$.

В области рациональных чисел неограниченно выполнимы все рациональные действия (кроме деления на нуль): сумма, разность, произведение и частное рациональных чисел также являются рациональными. Поэтому рациональные числа образуют *числовое поле – поле рациональных чисел.*

Иррациональные числа. Необходимость дальнейшего расширения множества чисел диктовалось двумя основными причинами:

Во-первых, рациональных чисел недостаточно, чтобы точно выразить результат измерения. Простейший случай такого рода хорошо известен: если каждый из катетов прямоугольного треугольника равен единице длины, то гипотенуза этого треугольника по теореме Пифагора должна иметь длину, квадрат которой равен 2. Но легко показать, что рационального числа, квадрат которого равнялся бы 2, не существует (будет доказано ниже).

Вторая причина – чисто алгебраическая. Не все действия, рассматриваемые в алгебре, выполнимы в поле рациональных чисел Q. Примером может служить операция извлечения квадратного корня. Так, если уравнение $x^2 = 4$ имеет два решения $x = 2$, $x = -2$, то уравнение $x^2 = 2$ не имеет рациональных корней.

Докажем это. Сначала заметим, что целое число x не может иметь квадрата, равного 2: при $x = 1$ имеем $x^2 = 1$, а при целом $x \succ 1 \left(x = 2 \right)$ получаем x^2 заведомо больше 2.

Предположим теперь, что x дробное: $x = a/b$ (дробь считается несократимой) и $\left(a/b \right)^2 = 2$. Тогда $a^2 = 2b^2$, откуда следует, что a должно быть четным числом (иначе квадрат a не был бы четным). Положим $a = 2k$, $a^2 = 4k^2$. Тогда $4k^2 = 2b^2$ и $b^2 = 2k^2$, что означает, что число b также – четное, что противоречит допущению несократимости дроби a/b.

Таким образом, в поле рациональных чисел нельзя извлечь квадратный корень из числа 2, символ $\sqrt{2}$ не имеет смысла в области рациональных чисел. Между тем треугольник с катетами, равными единице, существует и его гипотенуза $x = \sqrt{2}$. Чтобы устранить это недоразумение, понятие числа расширяется введением *иррациональных* чисел. В отличие от *рационального числа*, которое всегда можно представить в виде отношения двух целых чисел $a/b \quad (b \neq 0)$, *иррациональное число* в этом виде точно представить нельзя (термин «иррациональный» дословно означает «не имеющий отношения»).

Иррациональное число представляется в виде бесконечной непериодической десятичной дроби. Например, $\sqrt{2} = 1,4142135...$

К иррациональным числам приводят многие действия, как, например, действие извлечения корня n-й степени из рационального числа (если оно не представляет n-ю степень другого рационального числа), логарифмирование и т.д.

Действительные числа. Объединяя рациональные и иррациональные числа, получаем множество *действительных* чисел, обозначаемое R.

Действительных чисел вполне достаточно, чтобы выразить результат любого измерения.

$$R = (-\infty; +\infty).$$

Тем не менее и в области действительных чисел не все операции выполнимы.

Комплексные числа. На множестве действительных чисел остается невыполнимой операция извлечения *корня четной степени из отрицательного числа*. К такой операции приводит, например, решение простого на вид квадратного уравнения $x^2 + 1 = 0$, откуда $x^2 = -1$. Однако известно, что квадрат любого действительного числа неотрицателен и при любом x имеем $x^2 + 1 \succ 0$, что означает, что уравнение $x^2 = -1$ не имеет действительных корней, т.е. число $\sqrt{-1}$ не существует. Чтобы операция извлечения корня была неограниченно выполнимой, необходимо расширить множество действительных чисел введением в рассмотрение новых величин – квадратных корней из отрицательных чисел. Это было сделано итальянским математиком Кардано в середине 16 века. Он назвал эти величины «софистическими» или «мудреными», а в 1637 году французский математик Ф.Декарт назвал их «мнимыми числами».

В 1777 году русский академик Х.Эйлер ввел символ $i = \sqrt{-1}$ – мнимую единицу (использовав первую букву французского слова $imaginair$ – мнимый).

Таким образом, корень из отрицательного числа записывали в виде $\sqrt{-y^2} = y\sqrt{-1} = yi$. Такие числа называют *чисто мнимыми.* Именно в противоположность мнимым числам прежде известные числа (положительные и отрицательные, в том числе и иррациональные) стали называть *действительными* или *вещественными*. Сумма действительного и мнимого чисел называется *комплексным числом* $x+iy$ (термин введен немецким ученым Гауссом, что означает в переводе «совокупный»).

Теория комплексных чисел развивалась очень медленно, так как существование их для многих математиков казалось сомнительным. Только в середине 18 века Х.Эйлер дал исчерпывающие правила действия над комплексными числами. На рубеже 18 и 19 веков было дано геометрическое представление комплексного числа Весселем (Дания) и Арчаном (Франция). С этого момента они стали широко использоваться в математике и технике (теория упругости, электротехника, аэродинамика и др.).

1. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

1.1. Основные понятия

Определение 1.1. *Комплексным числом* называется выражение вида
$z = x + yi$,
где x и y – любые действительные числа;

i – *мнимая единица*, удовлетворяющая условию $i^2 = -1$ или $i = \sqrt{-1}$.

Обозначают:

$x = \operatorname{Re} z$ – *действительная часть* комплексного числа z;

$y = \operatorname{Im} z$ – *мнимая часть* комплексного числа z;

(от французских слов «reel» – реальный, действительный и «imaginaire» – мнимый, воображаемый).

В частности, если $x = 0$, то число $z = 0 + yi = yi$ называется *чисто мнимым числом*.

Если $y = 0$, то число $z = x + 0 \cdot i = x$ является *действительным*. Таким образом, множество действительных чисел R является подмножеством множества комплексных чисел, обозначаемого C, т.е. $R \subset C$.

Пример 1.1

а) $z = 1 - 2i$, здесь $\operatorname{Re} z = 1$, $\operatorname{Im} z = -2$.

Мы будем записывать короче: $x = 1$, $y = -2$.

б) $z = 3 \Rightarrow x = 3$, $y = 0$.

в) $z = 3i \Rightarrow x = 0$, $y = 3$. Число $3i$ является *чисто мнимым*.

Определение 1.2. Два комплексных числа $z_1 = x_1 + y_1 i$ и $z_2 = x_2 + y_2 i$ называются *равными* тогда и только тогда, когда равны их действительные и мнимые части.

$$z_1 = z_2 \iff \begin{cases} x_1 = x_2, \\ y_1 = y_2. \end{cases}$$

Если хотя бы одно из этих условий нарушается, то $z_1 \neq z_2$. Понятие «больше» и «меньше» для комплексных чисел не применимо.

Определение 1.3. Комплексное число $z = x + iy$ равно нулю

тогда и только тогда, когда $x = y = 0$.

Таким образом, $z = 0 = 0 + 0 \cdot i$.

Определение 1.4. Для комплексного числа $z = x + yi$ число $\overline{z} = x - yi$ называется *сопряженным*.

У сопряженных комплексных чисел z и $\overline{z}$ действительные части совпадают, а мнимые противоположны по знаку.

Например, $z = 2 + 3i$, тогда $\overline{z} = 2 - 3i$.

Очевидно, что $\overline{\overline{z}} = z$.

1.2. Геометрическое изображение комплексного числа. Комплексная плоскость

Действительное число $x \in R$ изображается точкой на числовой оси.

Задание комплексного числа $z = x + yi$ равносильно заданию упорядоченной пары действительных чисел $(x; y)$. Следовательно, комплексное число $z = x + yi$ можно изобразить на координатной плоскости OXY точкой M с координатами $(x; y)$ (рис. 1.1) или вектором $\overline{OM} = (x; y)$ с началом в точке $O(0;0)$ (рис. 1.2).

Таким образом, каждому комплексному числу z ставится в соответствие точка координатной плоскости и, обратно, каждой точке координатной плоскости соответствует некоторое комплексное число.

Определение 1.5. Плоскость OXY, точки которой отождествляются с комплексными числами, называется *комплексной плоскостью*.

При этом *ось* OX называется *действительной осью*, так как на ней откладывается действительная часть комплексного числа $x = \operatorname{Re} z$, а *ось* OY называется *мнимой осью*, так как на ней откладывается мнимая часть комплексного числа $y = \operatorname{Im} z$.

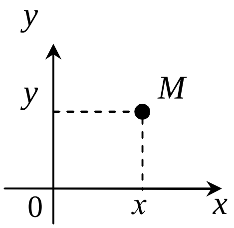

Рис. 1.1

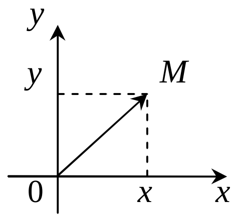

Рис. 1.2

Фактически, действительная ось OX служит для изображения действительных чисел $x \in R$, а мнимая ось – для изображения чисто мнимых чисел $z = iy$.

Числу $z = 0 = 0 + 0i$ соответствует точка $O(0;0)$.

Иногда рассматривают *расширенную комплексную плоскость*, добавляя к точкам $z = x + iy$ еще одну «условную» точку $z = \infty$.

Пример 1.2

Изобразить на комплексной плоскости числа (рис. 1.3):

а) $z_1 = 2 + 3i$, где $x = 2, \quad y = 3 \Rightarrow \mathrm{M}_1(2;3)$;

б) $z_2 = 2$, где $x = 2, \quad y = 0 \Rightarrow \mathrm{M}_2(2;0)$;

в) $z_3 = 3i$, где $x = 0, \quad y = 3 \Rightarrow \mathrm{M}_3(0;3)$;

г) $z_4 = -4 + i$, где $x = -4, \quad y = 1 \Rightarrow \mathrm{M}_4(-4;1)$;

д) $z_5 = -2i$, где $x = 0, \quad y = -2 \Rightarrow \mathrm{M}_5(0;-2)$;

На рис. 1.4 эти же числа изображены в виде векторов.

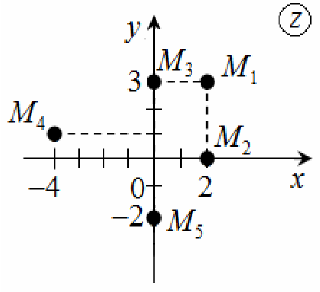

Рис. 1.3

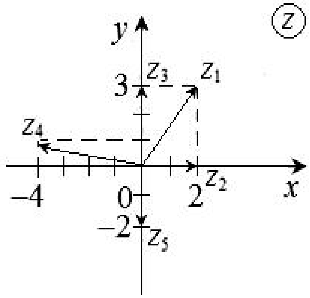

Рис. 1.4

1.3. Алгебраическая форма комплексного числа. Операции над комплексными числами в алгебраической форме

Запись $z = x + yi$ называется *алгебраической формой* комплексного числа.

Пусть даны два комплексных числа

$$z_1 = x_1 + y_1 i \quad \text{и} \quad z_2 = x_2 + y_2 i.$$

Над комплексными числами в алгебраической форме выполняются следующие операции:

1. Сложение. *Суммой* двух комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число, определяемое равенством

$$z = z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i. \tag{1.1}$$

Из формулы (1.1) следует, что сложение комплексных чисел, изображенных векторами, производится по правилу сложения векторов (рис. 1.5).

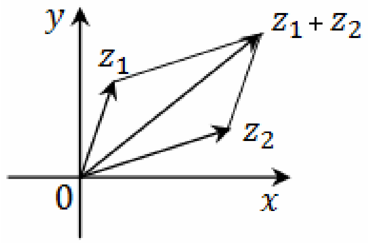

Рис. 1.5

2. Вычитание. *Разностью* двух комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число, определяемое равенством

$$z = z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i. \tag{1.2}$$

Следует отметить, что операции сложения и вычитания производятся только над комплексными числами в алгебраической форме.

3. Умножение. *Произведением* двух комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число z, получаемое по правилу умножения двучленов.

$$\begin{aligned} z = z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + y_1 i)\cdot(x_2 + y_2 i) = x_1x_2 + x_1y_2 i + y_1x_2 i + + y_1y_2 i^2 = \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + y_1x_2). \end{aligned} \tag{1.3}$$

Помнить: $i^2 = -1$.

Как видим, операции сложения, вычитания и умножения выполняются над комплексными числами как над двучленами по правилам алгебры.

Пример 1.3

Дано: $z_1 = 2+3i$; $z_2 = 1-4i$.

Найти: $z_1 + z_2$; $z_1 - z_2$; $z_1 \cdot z_2$.

Решение

$$z_1 + z_2 = (2+3i)+(1-4i) = (2+1)+(3-4)i = 3-i;$$

$$z_1 - z_2 = (2+3i)-(1-4i) = (2-1)+(3+4)i = 1+7i;$$

$$z_1 \cdot z_2 = (2+3i)(1-4i) = 2-4i+3i-12i^2 = 2-4i+3i+12 = 14-i.$$

Пример 1.4

Найти произведение двух сопряженных чисел $z \cdot \overline{z}$.

Решение

$$z \cdot \overline{z} = (x+iy)\cdot(x-iy) = x^2 - xyi + yxi - y^2 i^2 = x^2 + y^2.$$

Число $z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2$ является действительным числом. Этот результат используем ниже.

4. Деление. *Частным* двух комплексных чисел z_1 *и* z_2 $\left(z_2 \neq 0\right)$ называется число z, определяемое равенством

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + y_1 i}{x_2 + y_2 i} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} i, \tag{1.4}$$

где $x_2^2 + y_2^2 \neq 0$.

Формулу (1.4) запоминать необязательно.

Практически деление комплексных чисел z_1 / z_2 выполняется следующим образом: числитесь и знаменатель умножают на число, сопряженное знаменателю (т.е. на число $\overline{z_2} = x_2 - y_2 i$) («избавляемся от мнимости в знаменателе»).

Тогда делителем будет действительное число (см. пример 1.4); разделив на него действительную и мнимую части числителя (после умножения $z_1 \cdot \overline{z_2}$), получим формулу (1.4).

Пример 1.5

Дано: $z_1 = 2-4i$; $z_2 = 3+i$; $z_3 = i$.

Найти: $\dfrac{z_1}{z_2}$; $\dfrac{z_2}{z_1}$; $\dfrac{z_1}{z_3}$.

Решение:

1) $$\frac{z_1}{z_2}=\frac{2-4i}{3+i}=\frac{(2-4i)(3-i)}{(3+i)(3-i)}=\frac{6-2i-12i+4i^2}{9-i^2}=$$
$$=\frac{6-14i-4}{9+1}=\frac{2-14i}{10}=0,2-1,4i;$$

2) $$\frac{z_2}{z_1}=\frac{3+i}{2-4i}=\frac{(3+i)(2+4i)}{(2-4i)(2+4i)}=\frac{6+14i+4i^2}{4-16i^2}=$$
$$=\frac{6+14i-4}{4+16}=\frac{2+14i}{20}=0,1+0,7i;$$

3) $$\frac{z_1}{z_3}=\frac{2-4i}{i}=\frac{(2-4i)i}{i\cdot i}=\frac{2i-4i^2}{i^2}=\frac{2i+4}{-1}=-4-2i.$$

Замечание. Справедливы следующие соотношения:

$$\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}.$$

$$\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}.$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}.$$

Они означают, что если в выражениях суммы, разности, произведения и частного комплексные числа z_1 и z_2 заменить на сопряженные $\overline{z_1}$ и $\overline{z_2}$, то результат действий также заменяется на сопряженное число.

5. Возведение в целую положительную степень *n*

Легко получить $n-ю$ степень числа i, где $n\in N$.

$i^1=i$,	$i^5=i^4\cdot i=i,$	$i^{4k+1}=i$,
$i^2=-1$,	$i^6=i^4\cdot i^2=-1$,	$i^{4k+2}=-1$,
$i^3=i^2\cdot i=-i$,	$i^7=i^4\cdot i^3=-i$,	$i^{4k+3}=-i$,
$i^4=\left(i^2\right)^2=1$,	$i^8=(i^4)^2=1$, и т.д.	$i^{4k+4}=1$.

При возведении комплексного числа $z = x + yi$ в целую положительную степень n приходится использовать формулу бинома Ньютона

$$\left(a+b\right)^n \quad a^n + n\cdot a^{n-1}\cdot b + \frac{n\cdot\left(n-1\right)}{1\cdot 2}a^{n-2}\cdot b^2 + \qquad (1.5)$$

$$+(n\cdot(n-1)\cdot(n-2))/(1\cdot 2\cdot 3)a^{(n-3)}\cdot b^3 + \cdot ... + b^n,$$

что весьма затруднительно при больших n.

На практике формулу (1.5) используют при $n=2,\ n=3$, когда она принимает простой вид квадрата или куба суммы (разности).

$$\left(a\pm b\right)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2;\quad \left(a\pm b\right)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3.$$

Пример 1.6

Дано: $z = 1 + 2i$.

Найти: z^2, z^3.

Решение:

1) $z^2 = (1+2i)^2 = \quad 1^2 + 2\cdot 2i + (2i)^2 \quad 1 + 4i + 4i^2 = \ 1 + 4i - 4 =$

$= -3 + 4i.$

2) $z^3 = (1+2i)^3 \quad 1^3 + 3\cdot 2i + 3\cdot(2i)^2 + (2i)^3 \quad 1 + 6i + 3\cdot 4\cdot i^2 +$

$+8\cdot i^3 = 1 + 6i - 12 - 8i = -11 - 2i.$

Пример 1.7

Выполнить указанные действия. Результат представить в алгебраической форме.

1) $$\frac{4+i}{2-i}+\frac{5-3i}{3+i} \quad \frac{\left(4+i\right)\left(2+i\right)}{\left(2-i\right)\left(2+i\right)}+\frac{\left(5-3i\right)\left(3-i\right)}{\left(3+i\right)\left(3-i\right)}=$$

$$=\frac{8+4i+2i+i^2}{4-i^2}+\frac{15-5i-9i+3i^2}{9-i^2} \quad \frac{8+6i-1}{4+1}+\frac{15-14i-3}{9+1}=$$

$$=\frac{7+6i}{5}+\frac{12-14i}{10} \quad 7/5+(6/5)i+1,2-1,4i = 2,6-0,2i.$$

2) $$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^6 = \left(\frac{\left(1+i\right)\left(1+i\right)}{\left(1-i\right)\left(1+i\right)}\right)^6 \quad \left(\frac{1+2i+i^2}{1-i^2}\right)^6 \quad \left(\frac{1+2i-1}{1+1}\right)^6$$

$$=\left(\frac{2i}{2}\right)^6 \quad i^6 \quad \left(i^2\right)^3 \quad -1.$$

При возведении комплексного числа z в $n-ю$ степень, где $n > 3$, а также при извлечении корня $n-й$ степени из комплексного числа, используют другие формы записи комплексного числа: тригонометрическую и показательную.

Перейдем к рассмотрению тригонометрической формы комплексного числа.

1.4. Модуль и аргумент комплексного числа

Каждому комплексному числу $z = x + yi$ ставится в соответствие точка $M(x, y)$ или радиус-вектор $\overline{OM}$ на комплексной плоскости OXY (рис. 1.6).

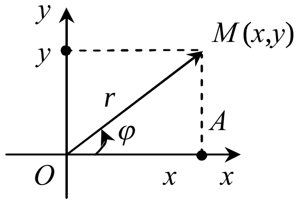

Рис. 1.6

Определение 1.6. Длина вектора $\overline{OM}$ называется *модулем* комплексного числа $z = x + yi$ и обозначается $|z|$ или r.

Из ΔOAM (см. рис. 1.6) модуль комплексного числа определяется по формуле

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{1.6}$$

Откуда следует, что:

1) $|z| \geq 0$.

2) $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.

Определение 1.7. *Аргументом* комплексного числа $z = x + yi$, отличного от нуля, называется угол φ, образованный вектором $\overline{OM}$ с положительным направлением оси OX, и обозначается

$$\varphi = Arg\ z.$$

Аргумент комплексного числа определяется неоднозначно, с точностью до слагаемого, кратного 2π .

$Argz = \arg z + 2\pi k$, где $\arg z$ есть *главное значение аргумента*, определяемое условиями

$-\pi < \arg z < \pi$ (или $0 \le \arg z \le 2\pi$).

Аргумент комплексного числа считается *положительным*, если он отсчитывается от положительного направления оси OX против часовой стрелки, и *отрицательным* – если отсчитывается по часовой стрелке.

Главное значение аргумента $\arg z$ можно найти двумя способами:

I способ

Из ΔOAM (см. рис. 1.6) имеем

$$tg\ \varphi = \frac{y}{x}, \quad \text{откуда} \quad \varphi = arctg\frac{y}{x} + \pi k,$$

где $k =\ -1;\ 0;\ 1$, и, учитывая четверть, в которой лежит вектор $\overline{OM}$, получим формулы для определения главного значения аргумента

$$\varphi = \arg z \quad \begin{cases} arctg\dfrac{y}{x}, \quad если \ \ \overline{OM} \in\ I\ или\ IV\ \ четверти; \\ arctg\dfrac{y}{x} + \pi, \quad если \ \ \overline{OM} \in II\ четверти; \\ arctg\dfrac{y}{x} - \pi,\ если \ \ \overline{OM} \in III\ четверт; \\ \dfrac{\pi}{2};\ если\ \ x = 0,\ \ y > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2};\ если\ \ x \quad 0,\ y < 0. \end{cases} \tag{1.7}$$

При этом необходимо помнить некоторые сведения из тригонометрии:

1. $arctg\left(-x\right) \quad -arctgx.$ 2. $arctg1 = \dfrac{\pi}{4}.$

3. $arctg\sqrt{3} = \dfrac{\pi}{3}.$ 4. $arctg\,\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\pi}{6}.$

II способ

Из ΔOAM (см. рис. 1.6)

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{x}{r} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}; \\ \sin\varphi = \dfrac{y}{r} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}. \end{cases} \qquad (1.8)$$

Для определения $\varphi = \arg z$ необходимо учитывать значение одной из тригонометрических функций $\cos\varphi$ или $\sin\varphi$ и учитывать знак второй.

Итак, всякому комплексному числу z может быть поставлена в соответствие пара действительных чисел (r,φ), где r – модуль комплексного числа, а φ – аргумент комплексного числа, определяемый неоднозначно.

Особыми свойствами обладает число *нуль*: его модуль равен нулю, а аргументу не приписывается никакого определенного значения.

Отметим некоторые *свойства модуля комплексного числа* $z = x + yi$.

1) $|z| \geq x$; 2) $|z| \geq y$;

3) $|z| \leq |x| + |y|$; 4) $|\bar{z}| = z$;

5) $z\cdot\bar{z} = |z|^2$; 6) $|z^n| = |z|^n$;

7) $|z_1 z_2| = |z_1|\cdot|z_2|$; 8) $|z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|,\quad z_2 \neq 0$;

9) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$; 10) $|(|z_1| - |z_2|)| \leq |z_1 - z_2|$.

Свойства 1, 2, 3 вытекают из рис. 1.6.

1.5. Тригонометрическая форма комплексного числа

Из формул (1.8) получим связи действительной и мнимой частей комплексного числа $z = x + yi$ с модулем r и аргументом φ данного числа

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi; \\ y = r\sin\varphi; \\ r = \sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$$

Следовательно, комплексное число z можно представить в виде

$z = x + yi = r\cos\varphi + ir\sin\varphi$ или

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \qquad (1.9)$$

Эта форма записи комплексного числа называется ***тригонометрической***. При этом r и φ определяются по формулам (1.6) и (1.7) или (1.8).

Всегда можно перейти от алгебраической формы комплексного числа $z \neq 0$ к тригонометрической и обратно.

Два комплексных числа в тригонометрической форме $z_1 = r_1\left(\cos\varphi_1 + isin\varphi_1\right)$ и $z_2 = r_2\left(\cos\varphi_2 + isin\varphi_2\right)$ ***равны*** тогда и только тогда, когда равны их модули, а их аргументы φ_1 *и* φ_2 равны или отличаются на целое число периодов 2π

$$\varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi k, \ \text{где} \ k \in z.$$

Пример 1.8

Представить в тригонометрической форме числа:

1) $z_1 = 2;$ 2) $z_2 = 2i;$ 3) $z_3 = -i;$

4) $z_4 = 1 - i;$ 5) $z_5 = -1 - \sqrt{3}i;$ 6) $z_6 = -\sqrt{3} + i.$

Решение

Тригонометрическая форма комплексного числа имеет вид $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Для определения аргумента φ полезно изобразить комплексное число на плоскости OXY, чтобы уточнить в какой четверти лежит вектор $\overline{OM}\left(x; y\right)$, изображающий данное число, что поможет в выборе соответствующей формулы из (1.7).

1. Изобразим число $z_1 = 2 + 0 \cdot i$, $x = 2$, $y = 0$, что определяет точку М (2; 0). Найдем $r = |z_1| = \sqrt{2^2 + 0^2} = 2.$ Из рис. 1.7 видим, что $\varphi = \arg z_1 = 0.$ Тогда $z_1 = 2(\cos 0 + \sin 0).$

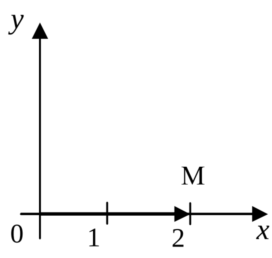

Рис. 1.7

2. Изобразим число $z_2 = 0 + 2i$, $x = 0$, $y = 2$, что определяет точку М (0; 2). Найдем $r = |z_2| = \sqrt{0^2 + 2^2} = 2.$

Из рис. 1.8 видим, что $\varphi = \arg z_2 = \pi / 2$.

Тогда $z_2 = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$.

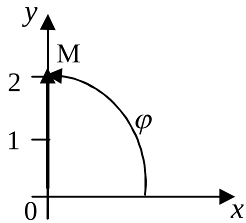

Рис. 1.8

3. Изобразим число $z_3 = 0 - i$, $x = 0$, $y \quad -1$, что определяет точку М (0;-1). Найдем $r = |z_3| = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = 1.$ Из рис. 1.9 видим, что $\varphi = \arg z_3 \quad -\dfrac{\pi}{2}$ (отрицательный, так как откладывается по часовой стрелке). Тогда $z_3 = \cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$.

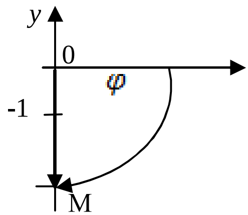

Рис. 1.9

4. Изобразим число $z_4 = 1 - i$, где $x = 1$, $y = -1$, что определяет точку М (1; -1), лежащую в IV четверти (рис. 1.10).

Найдем $r = |z_4| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}.$

Найдем главное значение аргумента двумя способами.

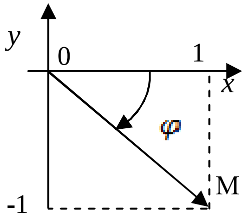

Рис 1.10

I способ. $tg\varphi = \frac{y}{x} = \frac{-1}{1} = -1$. С учетом IV четверти из формул (1.7) выбираем $\varphi = \arg z_4 = arctg(-1) = -arctg1 = -\frac{\pi}{4}$.

Тогда $z_4 = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

II способ. Найдем φ из системы

$$\begin{cases} cos\varphi = \frac{x}{r}; \\ sin\varphi = \frac{y}{r}; \\ -\pi \le \varphi \le \pi; \end{cases} \quad \begin{cases} cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}; \\ sin\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}}; \\ -\pi \le \varphi \le \pi. \end{cases}$$

Откуда $\varphi = \arg z_4 = -\frac{\pi}{4}$.

5. Изобразим число $z_5 = -1 - \sqrt{3}i$, $x = -1$, $y = -\sqrt{3}$, что определяет точку М (-1; $-\sqrt{3}$) $\in$ III четверти (рис. 1.11).

Найдем $r = |z_5| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$. Найдем аргумент φ из условия $tg\varphi = \frac{y}{x} = \frac{-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3}$.

С учетом III четверти выбираем из (1.7) формулу

$$\varphi = \arg z_5 = arctg\sqrt{3} - \pi = \frac{\pi}{3} - \pi = -\frac{2}{3}\pi .$$

(отрицательный, так как откладывается по часовой стрелке).

Тогда $r_5 = 2\left(\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)\right)$.

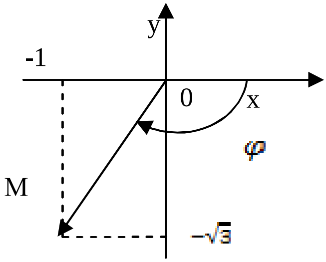

Рис. 1.11

6. Изобразим число $z_6 = -\sqrt{3} + i$, $x = -\sqrt{3}$, $y = 1$, что определяет точку М (-$\sqrt{3}$; 1) $\in$ II четверти (рис. 1.12). Найдем $r = |z_6| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$. Найдем аргумент φ из условия $tg\varphi = \frac{y}{x} = \frac{1}{(-\sqrt{3})} \quad -\frac{1}{\sqrt{3}}$. С учетом II четверти выбираем из (1.6) формулу

$$\varphi = \arg z_6 \quad arctg\frac{1}{(-\sqrt{3})} + \pi = -arctg\frac{1}{\sqrt{3}} + \pi = -\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{5}{6}\pi.$$

Тогда $z_6 = 2(\cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi)$.

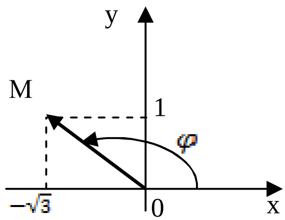

Рис. 1.12

Замечание. Еще раз подчеркнем, что аргумент φ определяется неоднозначно.

Например, для числа $z_5 = -1-\sqrt{3}i$ можно найти аргумент φ_1, удовлетворяющий неравенству $0 \le \varphi_1 \le 2\pi$ (рис. 1.13). При этом φ_1 откладывается против часовой стрелки.

Так как $tg\varphi_1 = \sqrt{3}$, то $\varphi_1 = \frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4}{3}\pi$ (с учетом III четверти).

Тогда $z_5 = 2(\cos\frac{4}{3}\pi + \text{i}\sin\frac{4}{3}\pi)$.

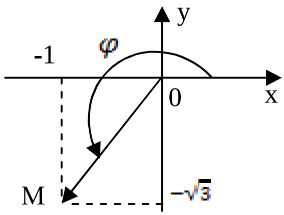

Рис.1.13

1.6. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме

Пусть даны два комплексных числа в тригонометрической форме

$$z_1 = r_1\left(\cos\varphi_1 + isin\varphi_1\right),$$

$$z_2 = r_2\left(\cos\varphi_2 + isin\varphi_2\right), \quad \text{где} \quad r_1 > 0,\ r_2 > 0.$$

1. ***Операции сложения*** и ***вычитания*** чисел в тригонометрической форме не выполняются.

2. ***Умножение***. При умножении двух комплексных чисел в тригонометрической форме их модули перемножаются, а аргументы складываются, результат записывается в тригонометрической форме.

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2\left(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + isin(\varphi_1+\varphi_2)\right). \qquad (1.10)$$

3. ***Деление***. При делении двух комплексных чисел в тригонометрической форме их модули делятся, а аргументы вычитаются, результат записывается в тригонометрической форме.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1\left(\cos\varphi_1 + isin\varphi_1\right)}{r_2\left(\cos\varphi_2 + isin\varphi_1\right)} = \frac{z_1}{z_2}\left(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + isin(\varphi_1-\varphi_2)\right). \qquad (1.11)$$

Пример 1.9

Найти $z_1 \cdot z_2$, $\dfrac{z_1}{z_2}$,

если $z_1 = 3\left(\cos\dfrac{5\pi}{6} + i\sin\dfrac{5\pi}{6}\right)$, $z_2 = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$.

Решение:

1) $$z_1 \cdot z_2 = 3\cdot 2\left(\cos\left(\frac{5}{6}\pi + \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{5}{6}\pi + \frac{\pi}{3}\right)\right) =$$

$$= 6\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right).$$

2) $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{3}\left(\cos\left(\frac{5}{6}\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{5}{6}\pi - \frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{2}{3}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right).$$

Результаты вычислений могут быть переведены в алгебраическую форму

$$z_1 \cdot z_2 = 6\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right); \qquad \frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{3}(0 + i\cdot 1) = \frac{2}{3}i .$$

4. ***Возведение в степень.*** Пусть n-целое положительное число $(n \in N)$, применив формулу (1.10) n раз, получим

$$z^n = \left(r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)\right)^n = r^n\left(\cos n\varphi + i\sin n\varphi\right). \qquad (1.12)$$

Формула (1.12) называется формулой Муавра.

Получили простое правило: при возведении комплексного числа в *n-ю* степень модуль возводится в *n-ю* степень, а аргумент увеличивается в *n* раз.

Рассмотрим еще одно приложение формулы Муавра. Полагая в формуле (1.12) $r = 1$, получим

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi. \qquad (1.13)$$

Разлагая левую часть по формуле бинома Ньютона (1.5) и приравнивая действительные и мнимые части, мы сможем выразить $\sin n\varphi$ и $\cos n\varphi$ через степени $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$.

Например, в случае $n = 3$ получим

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 = \cos^3\varphi + 3i\cos^2\varphi\cdot\sin\varphi - 3\cos\varphi\cdot\sin^2\varphi - i\sin^3\varphi =$$

$$= \cos 3\varphi + i\sin 3\varphi.$$

Используя условие равенства двух комплексных чисел, получим

$$\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi \cdot \sin^2\varphi,$$

$$\sin 3\varphi = -\sin^3\varphi + 3\cos^2\varphi \sin\varphi.$$

Пример 1.10

Найти z^{12}, если $z = 1 + i$.

Решение

1) Запишем число z в тригонометрической форме. $z = 1 + i$, где $x = 1,\ y = 1$, $M\ (1;\ 1) \in \mathrm{I}$ четверти (рис. 1.14).

Найдем $r = |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

Найдем φ из условия $tg\varphi = \dfrac{y}{x} = 1$ и, с учетом I четверти, имеем $\varphi = arctg1 = \dfrac{\pi}{4}$. Тогда $z = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$.

2) $z^{12} = \left(\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)\right)^{12} =$

$$= \left(\sqrt{2}\right)^{12}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\cdot 12\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot 12\right)\right) \quad 64\left(\cos 3\pi + i\sin 3\pi\right).$$

Результат может быть записан в алгебраической форме $z^{12} = 64(-1 + 0\cdot i) \quad -64.$

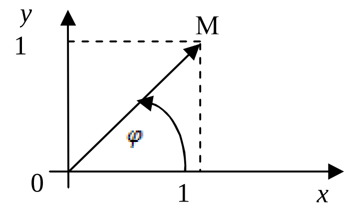

Рис. 1.14

1.7. Извлечение корня n-й степени из комплексного числа

Рассмотрим задачу извлечения корня натуральной степени n из произвольного комплексного (в частности, действительного) числа z; при этом будем искать *все возможные значения корня, действительные и комплексные.*

Для решения задачи в общем виде используется представление комплексного числа в тригонометрической форме.

Определение 1.8. *Корнем n-й* степени из комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i sin\varphi)$ называется другое комплексное число $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i sin\varphi_1)$, *n-я* степень которого равна z, т.е. ${z^n}_1 = z$.

Получим формулу для отыскания $z_1 = \sqrt[n]{z}$. Применим к левой части равенства $z_1^n = z$ формулу Муавра и получим

$$r_1^n(\cos n\varphi_1 + i sin\ n\varphi_2) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Так как у равных комплексных чисел модули должны быть равны, а аргументы могут отличаться на число, кратное 2π, то

$$\begin{cases} r_1^n = r, \\ n\varphi_1 = \varphi + 2\pi k. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_1 = \sqrt[n]{r}, \\ \varphi_1 = \dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}, \text{где } k \in z. \end{cases}$$

Заметим, что под $\sqrt[n]{r}$ понимается арифметическое значение корня.

Таким образом $z_1 = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\cos\left(\cos\dfrac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)$,

где $k \in z$.

При $k = 0, 1, 2 \ldots, (n-1)$ получим n *различных значений* корня *n-й* степени из числа z, а при всех других k (отрицательных и $k \geq n$) значения корня будут повторяться.

Действительно, при $k = 0 \Rightarrow z_{1,0} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{\varphi}{n} + i\sin\dfrac{\varphi}{n}\right)$. При $k = n$ получим точно такое же значение

$$z_{1,n} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi n}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi n}{n}\right) =$$

$$= \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + 2\pi\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + 2\pi\right)\right) = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right).$$

Аналогично, при $k = 1$ и $k = n + 1$ получим повторяющиеся значения и т.д.

Вывод. Корень *n-й* степени из комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ имеет n *различных значений* $z_0, z_1, .., z_{n-1}$, которые находятся по формуле

$$z_k = \sqrt[n]{z} \quad \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \\ = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \qquad (1.14)$$

где $k = 0, 1, 2.., (n-1)$.

Следствие 1. В поле комплексных чисел *корень n-й степени из действительного числа* $A \neq 0$ так же имеет *n* различных значений, так как действительное число *A* есть частный случай комплексного.

Следствие 2. В поле комплексных чисел двучленное уравнение вида $x^n = a$, где a – любое комплексное или действительное число, также имеет n различных корней, которые находятся по формуле (1.14).

Геометрический смысл. Точки, соответствующие значениям $\sqrt[n]{z}$, являются вершинами правильного *n*-угольника, вписанного в окружность радиуса $R = \sqrt[n]{|z|}$ с центром в начале координат.

Пример 1.11

Найти все значения кубического корня из числа $z = -1 + i$.

Решение

Найдем $\sqrt[3]{-1+i}$. Так как корень 3-й степени, т.е. $n = 3$, получим 3 различных значения корня z_0, z_1 и z_2.

Перейдем к тригонометрической форме записи числа $z = -1 + i$. Так как $x = -1; y = 1$, то точка $M(-1;1)$ лежит во II четверти (рис. 1.15).

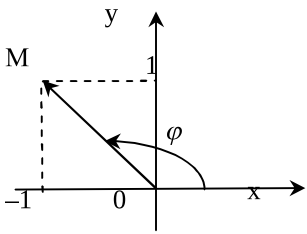

Рис. 1.15

Модуль $\left|z\right| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$; $\quad tg\varphi = \dfrac{y}{x} = -1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \varphi = \pi + arctg\left(-1\right) = \pi - arctg1 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi .$$

Тогда $z = -1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3}{4}\pi + i\sin\dfrac{3}{4}\pi\right)$.

Найдем корни 3-й степени из числа z по формуле (1.14)

$$z_k = \sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi\right)} =$$

$$= \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\frac{3}{4}\pi + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{\frac{3}{4}\pi + 2\pi k}{3}\right) =$$

$$= \sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}k\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}k\right)\right),$$

где $k = 0;1;2$.

Если $k = 0$, то $z_0 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Если $k = 1$, то

$$z_1 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right)\right) =$$

$$= \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{11}{12}\pi + i\sin\frac{11}{12}\pi\right).$$

Если $k = 2$, то

$$z_2 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{3}\right)\right) =$$

$$= \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{19\pi}{12} + i\sin\frac{19\pi}{3}\right).$$

Точки, соответствующие числам z_0, z_1, z_2 являются вершинами правильного треугольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[6]{2}$ с центром в начале координат (рис. 1.16).

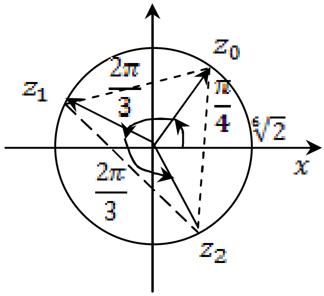

Рис. 1.16

Пример 1.12

Найти все решения уравнения $x^5 = 1$.

Решение уравнения сводится к отысканию корней 5-й степени из числа $z = 1$.

$$z_k = \sqrt[5]{1} = \sqrt[5]{\cos 0 + i\sin 0} = \cos\left(\frac{0+2\pi k}{5}\right) + i\sin\left(\frac{0+2\pi k}{5}\right),$$

где $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

Если $k = 0$, то $x_0 = \cos 0 + i\sin 0 = 1$.

Если $k = 1$, то $x_1 = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$.

Если $k = 2$, то $x_2 = \cos\frac{4\pi}{5} + i\sin\frac{4\pi}{5}$.

Если $k = 3$, то $x_3 = \cos\frac{6\pi}{5} + i\sin\frac{6\pi}{5}$.

Если $k = 4$, то $x_4 = \cos\frac{8\pi}{5} + i\sin\frac{8\pi}{5}$.

Итак, уравнение имеет один действительный корень 1 и четыре комплексных корня. Точки, соответствующие корням z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, являются вершинами правильного 5-угольника, вписанного в окружность радиуса $R = 1$ с центром в начале координат (рис. 1.17).

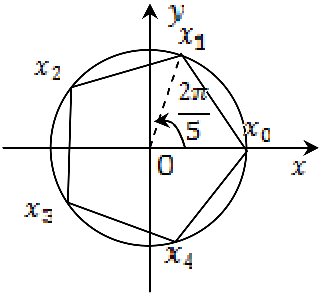

Рис. 1.17

1.8. Показательная форма комплексного числа

На множестве действительных чисел R мы рассмотрели важное понятие – функцию действительного аргумента $y = f(x)$, где $x \in R$.

Аналогично введем в рассмотрение функцию комплексного переменного z

$w = f(z)$, где $z \in C$.

Особую роль играет показательная функция комплексного аргумента $w = e^z$.

Определение 1.9. *Показательной функцией* комплексного аргумента называется функция вида

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos x + i\sin y), \text{ где } x \in R, y \in R. \tag{1.15}$$

Как видим, показательная функция с комплексным показателем выражается через известные функции действительных аргументов e^x, $\cos x$ и $\sin y$.

В частности, если $y = 0$, т.е. $z = x$ – действительное число, получим обычную показательную функцию

$$e^{x+0i} = e^x\left(\cos 0 + i\sin 0\right) = e^x.$$

Поэтому свойства функции e^z, где $z \in C$, аналогичны свойствам функции e^x, где $x \in R$.

Свойства функции e^z

1. $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$.

2. $e^{z_1-z_2}=\dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}}$.

3. $(e^z)^m=e^{mz}$, где m – целое число.

4. $e^{-z}=\dfrac{1}{e^z}$.

5. $(e^z)'=e^z$.

Но в отличие от e^x, функция e^z является периодической с периодом $2\pi i$.

Действительно, $e^{z+2\pi i}=e^ze^{2\pi i}=e^z\left(\cos 2\pi+i\sin 2\pi\right)=e^z$.

Если в формуле (1.15) положить $x=0$, то получим *формулу Эйлера*

$$e^{iy}=\cos y+i\sin y. \qquad (1.16)$$

Записывая число $z=x+iy$ в тригонометрической форме и учитывая формулу Эйлера, получим запись комплексного числа в виде

$$z=r\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right)=re^{i\varphi},$$

где r – модуль комплексного числа z, а φ – его аргумент.

Определение 1.10. *Показательной* формой комплексного числа называется запись вида

$$z=re^{i\varphi}. \qquad (1.17)$$

Вывод. Всякое комплексное число $z(z\neq 0)$ можно записать в трех формах: алгебраической, тригонометрической и показательной.

$$z=x+iy=r\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right)=re^{i\varphi}.$$

Пример 1.13

Представить числа:

а) $z_1=1$, б) $z_2=i$, в) $z_3=-3$, г) $z_4=-2i$, д) $z_5=1+i$

в показательной форме.

Решение

Рекомендуется самостоятельно изобразить на комплексной плоскости заданные числа:

а) $z_1=1\Rightarrow x=1, y=0\Rightarrow$ точка $(1,0)$ лежит на оси OX. $r=1,\ \varphi=0$. Тогда $1=1e^{0i}=e^{0i}$ – показательная форма.

б) $z_2 = i \Rightarrow x = 0$, $y = 1 \Rightarrow$ точка $(0;1)$ лежит на оси OY. $r = 1$, $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$. Тогда $i = 1e^{\frac{\pi}{2}i} = e^{\frac{\pi}{2}i}$.

в) $z_3 = -3 \Rightarrow x = -3$; $y = 0 \Rightarrow$ точка $(-3;0)$ лежит на оси OX.

$r = \sqrt{(-3)^2 + 0^2} = 3$; $\varphi = \pi$. Тогда $-3 = 3e^{\pi i}$.

г) $z_4 = -2i \Rightarrow x = 0$; $y = -2 \Rightarrow$ точка $(0;-2)$ лежит на оси OY.

$r = \sqrt{0^2 + (-2)^2} = 2$; $\varphi = -\dfrac{\pi}{2}$. Тогда $-2i = 2e^{-\frac{\pi}{2}i}$.

д) $z_5 = 1 + i \Rightarrow x = 1$; $y = 1 \Rightarrow$ точка $(1;1)$ лежит в I четверти.

$r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$; $tg\varphi = 1$, $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$ (с учетом I четверти).

Тогда $1 + i = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$.

Пример 1.14

Какие комплексные числа задаются выражениями:

а) $2e^{\pi i}$; б) $e^{\frac{\pi}{6}i}$.

Решение:

а) С учетом формулы (1.17) видим, что $r = 2$, $\varphi = \pi$. Применим формулу Эйлера (1.16), получим

$$2e^{\pi i} = 2\left(\cos\pi + i\sin\pi\right) = -2.$$

б) $r = 1$, $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$. Тогда $e^{\frac{\pi}{6}i} = \cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$.

1.9. Действия над комплексными числами в показательной форме

С учетом свойств показательной функции e^z легко производятся действия над комплексными числами в показательной форме.

Пусть имеются два комплексных числа

$$z_1 = r_1 e^{i\varphi_1},\ z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}.$$

1. Умножение

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}. \quad (1.18)$$

При умножении двух комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются. Этот результат совпадает с формулой умножения (1.10), полученной для чисел в тригонометрической форме.

2. Деление

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}. \qquad (1.19)$$

При делении двух комплексных чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются. Этот результат согласуется с формулой (1.11) деления комплексных чисел в тригонометрической форме.

3. Возведение в степень

$$z^n = (re^{i\varphi})^n = r^n e^{in\varphi}. \qquad (1.20)$$

Эта формула аналогична формуле Муавра (1.12).

4. Извлечение корня *n*-й степени

$$\sqrt[n]{re^{i\varphi}} = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\varphi + 2\pi k}{n}}, \text{ где } k = 0, 1, 2, .., n-1. \qquad (1.21)$$

Эта формула совпадает с формулой (1.14) извлечения корня n-й степени из числа, заданного в тригонометрической форме.

Пример 1.15

Вычислить все значения корня 3-й степени из числа $z = \dfrac{(-1+\sqrt{3}i)^6}{(2-2i)^8}$.

Решение:

1) Сначала вычислим $z = \dfrac{(-1+\sqrt{3}i)^6}{(2-2i)^8}$, записав в показательной форме два числа $z_1 = -1+\sqrt{3}i$ и $z_2 = 2-2i$.

Изобразим число z_1 (рис. 1.18) и число z_2 (рис. 1.19) на комплексной плоскости.

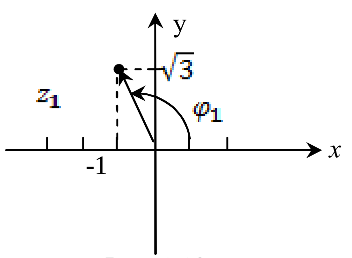

Рис. 1.18

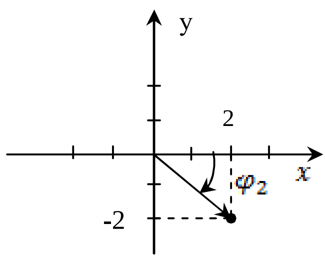

Рис. 1.19

$$r_1=|z_1|=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=2,\quad tg\varphi_1=\frac{y}{x}=\frac{\sqrt{3}}{-1}=-\sqrt{3}.$$

С учетом II четверти

$$\varphi_1=arctg\left(-\sqrt{3}\right)+\pi=-arctg\sqrt{3}+\pi=-\frac{\pi}{3}+\pi=\frac{2}{3}\pi.$$

Тогда $z_1=r_1e^{\varphi_1 i}=2e^{\frac{2}{3}\pi i}$.

$$r_2=|z_2|=\sqrt{2^2+(-2)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2},\quad tg\varphi_2=\frac{-2}{2}=-1.$$

С учетом IV четверти $\varphi_2=arctg\left(-1\right)=-arctg1=-\pi/4$.

Тогда $z_2=r_2e^{\varphi_2 i}=2\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$.

Вычислим

$$z=\frac{z_1{}^6}{z_2{}^8}=\frac{\left(2e^{\frac{2}{3}\pi i}\right)^6}{\left(2\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}\right)^8}=\frac{2^6e^{\frac{12}{3}\pi i}}{2^{12}e^{-\frac{8\pi i}{4}}}=\frac{e^{4\pi i}}{2^6e^{-2\pi i}}=\frac{1}{2^6}e^{4\pi i-(-2\pi i)}=\frac{1}{2^6}e^{6\pi i}. \qquad =$$

2) Вычислим корень 3-й степени из $z=\frac{1}{2^6}e^{6\pi i}$ по формуле (1.21), где $n=3$.

$$z_k=\sqrt[3]{\frac{1}{2^6}e^{6\pi i}}=\frac{1}{2^2}e^{\frac{6\pi+2\pi k}{3}i}=0,25e^{\left(2\pi+\frac{2}{3}\pi k\right)i},\ \text{где } k=0;1;2.$$

С учетом периодичности функции e^z с периодом $T=2\pi i$ имеем

$$z_k=0,25e^{\frac{2}{3}\pi ki+2\pi i}=0,25e^{\frac{2}{3}\pi ki},\ \text{где } k=0;1;2.$$

Если $k=0$, то $z_0=0,25e^{oi}=0,25(\cos 0+i\sin 0)=0,25$.

Если $k=1$, то

$$z_1=0,25e^{\frac{2}{3}\pi i}=0,25\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)=0,25\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right).$$

Если $k = 2$, то

$$z_2 = 0,25e^{\frac{4\pi i}{3}} = 0,25\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) =$$

$$= 0,25\left(\cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)\right) =$$

$$= 0,25\left(-\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 0,25\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right).$$

Итак, получим три значения корня:

$$z_0 = 0,25;\ z_1 = 0,25\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right);\ z_2 = -0,25\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right).$$

1.10. Множество точек комплексной плоскости

Рассмотрим графический способ решения уравнений и неравенств, содержащих комплексную переменную z.

Пусть $z = x + iy$, где x и y – произвольные действительные числа. На комплексной плоскости переменной z соответствует точка z с координатами (x, y).

Пример 1.16

Определить множества точек на комплексной плоскости, удовлетворяющие уравнениям

а) $|z| = 2$; б) $|z - 1 + i| = 3$.

Решение

Рассмотрим два подхода к решению этой задачи:

а) **I способ**

По определению модуль $|z|$ – расстояние от точки z до начала координат. Для данного множества точек это расстояние должно быть одним и тем же, равным 2. Этому условию удовлетворяют те и только те точки плоскости, которые лежат на окружности с центром в начале координат и радиусом $R = 2$.

II способ

Получим уравнение, связывающее переменные x и y.

Так как $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, то по условию $\sqrt{x^2 + y^2} = 2$,

$x^2+y^2=4$ – уравнение окружности с центром в точке $O(0,0)$ и радиусом R = 2.

б) **I способ**

Так как $|z-z_0|$ определяет расстояние от точки z до z_0, то из равенства $|z-(1-i)|=3$ следует, что точки искомого множества удалены от точки $z_0=1-i$ на расстояние, равное 3, т.е. являются точками окружности с центром в точке $(1;-1)$ и радиусом $R=3$.

II способ

Преобразуем уравнение $|z-1+i|=3$, подставив $z=x+iy$.

$|x+iy-1+i|=3$, $|(x-1)+i(y+1)|=3$,

$\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}=3$.

Получим $(x-1)^2+(y+1)^2=9$ – уравнение окружности с центром в точке $(1;-1)$ и радиусом $R=3$.

Обобщим этот пример.

Уравнение

$$|z|=R \tag{1.22}$$

задает окружность с центром в начале координат с радиусом R.

Уравнение

$$|z-z_0|=R \tag{1.23}$$

задает окружность с центром в точке (x_0,y_0) с радиусом R, где $z_0=x_0+iy_0$.

Окружности, задаваемые уравнениями (1.22) и (1.23), изображены на рис. 1.20 и 1.21 соответственно.

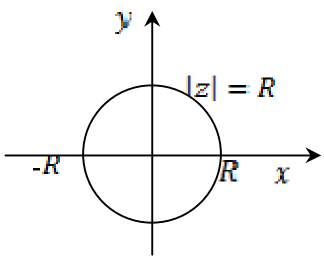

Рис. 1.20

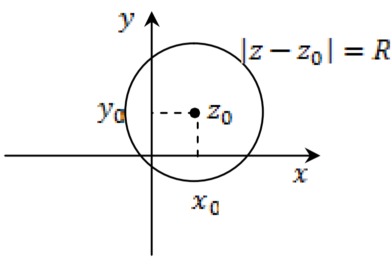

Рис.1.21

Пример 1.17

Определить и построить геометрическое место точек (ГМТ), для которых:

а) $Re\ z = 2$; б) $\arg z = \dfrac{\pi}{4}$; в) $Im\overline{z}^{2} = 2$; г) $\mathrm{Re}\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{2}$;

д) $|z-i| = |z-1|$.

Решение:

а) По определению $Re\ z = x$, поэтому уравнение $Re\ z = 2$ равносильно уравнению $x = 2$. Это уравнение задает прямую, параллельную оси OY (рис. 1.22).

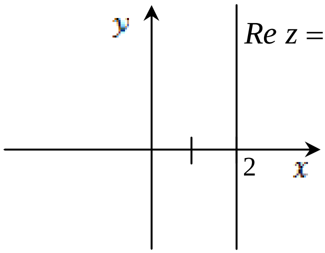

Рис. 1.22

б) Уравнению $\arg z = \dfrac{\pi}{4}$ удовлетворяют точки, лежащие на луче, выходящем из начала координат под углом $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$ к оси OX (рис 1.23).

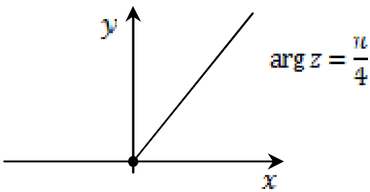

Рис. 1.23

в) $Im\overline{z}^{2} = 2$.

Пусть $z = x + iy$, тогда сопряженное ему число $\overline{z} = x - iy$.

Найдем

$$\overline{z}^{2} = (x-iy)^2 = x^2 - 2xyi + (-iy)^2 = x^2 - 2xyi + i^2y^2 = x^2 - y^2 - 2xyi.$$

По определению $Im\bar{z}^{2}=-2xy$ (мнимая часть).

По условию $-2xy=2$, $xy=-1$.

Уравнение $xy=-1$ задает гиперболу, лежащую во II и IV четвертях (рис. 1.24).

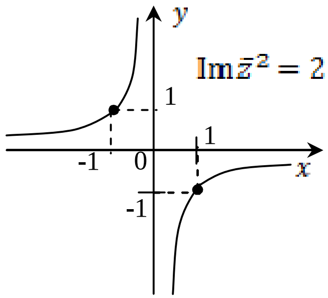

Рис. 1.24

г) $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{2}$.

Найдем

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{x+iy}=\frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}=\frac{x}{x^2+y^2}-\frac{y}{x^2+y^2}i.$$

По определению $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{x}{x^2+y^2}$. По условию $\frac{x}{x^2+y^2}=\frac{1}{2}$ или

$x^2+y^2=2x$;

$\left(x^2-2x+1\right)+y^2=1$;

$(x-1)^2+y^2=1$ – уравнение окружности с центром в точке $(1;0)$ и радиусом $R=1$ (рис. 1.25).

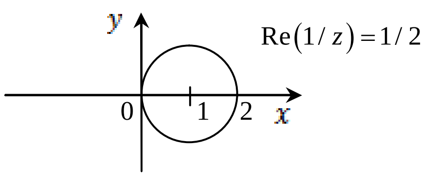

Рис. 1.25

д) Преобразуем $|z-i| = |z-1|$ с учетом $z = x+iy$.

$|x+iy-i| = |x+iy-1|$;

$|x+(y-1)i| = |(x-1)+iy|$;

$\sqrt{x^2+(y-1)^2} = \sqrt{(x-1)^2+y^2}$;

$x^2+(y-1)^2 = (x-1)^2+y^2$;

$x^2+y^2-2y+1 = x^2-2x+1+y^2$;

$-2y = -2x$;

$y = x$.

Получили уравнение прямой $y = x$.

Пример 1.18

Определить и построить множество точек, удовлетворяющих неравенствам:

а) $|z-i| \le 3$; б) $|z+i| > 1$; в) $3 \le |3z-6| \le 9$; г) $Re\ z \le -1$;

д) $1 \le Imz < 2$.

Решение:

а) Неравенство $|z-i| \le 2$ означает, что расстояние от точек z до точки $z_0 = i$ $(x_0 = 0; y_0 = 1)$ равно двум или меньше (не больше двух). Этому условию удовлетворяют точки круга с центром в точке $(0;1)$ и радиусом $R = 2$ (рис. 1.26).

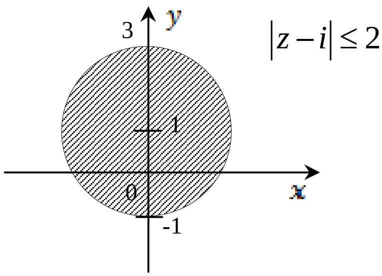

Рис. 1.26

б) Неравенство $|z-(-i)| > 1$ означает, что расстояние от точек z до точки $z_0 = -i$ $(x_0 = 0; y_0 = -1)$ должно быть больше 1. Этому условию удовлетворяют точки, лежащие вне круга с центром в точке $(0;-1)$ радиуса $R=1$. Граничные точки, лежащие на окружности $|z+i|=1$, не принадлежат данному множеству, так как неравенство строгое. Точки окружности будем изображать пунктирной линией (рис. 1.27).

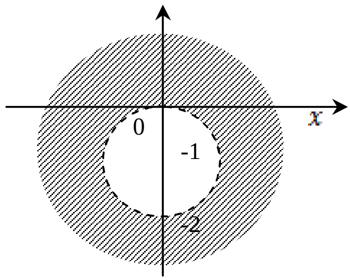

Рис. 1.27

в) Неравенство $3 \le |3z-6| \le 6$ запишем в виде $1 \le |z-2| \le 2$.

Этому условию удовлетворяют точки, которые лежат в кольце, ограниченном двумя концентрическими окружностями с центром в точке $z_0 = 2$ $(x_0 = 2; y_0 = 0)$ и радиусами $R_1 = 1$ и $R_2 = 2$ (рис. 1.28).

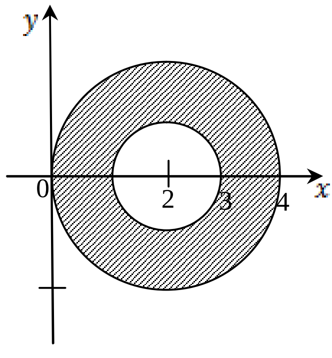

Рис. 1.28

г) Неравенство $Re\ z \le -1$ можно записать в виде $x \le -1$. Это неравенство задает множество точек, лежащих на прямой $x=-1$ и левее данной прямой, т.е. левая полуплоскость с границей $x=-1$ (рис. 1.29).

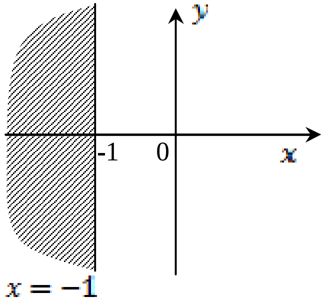

Рис. 1.29

д) Неравенство $1 \le Imz < 2$ равносильно неравенству $1 \le y < 2$.

Данному неравенству удовлетворяют точки, лежащие между прямыми $y = 1$ и $y = 2$. Точки прямой $y = 1$ принадлежат данному множеству, а точки $y = 2$ не принадлежат (рис. 1.30).

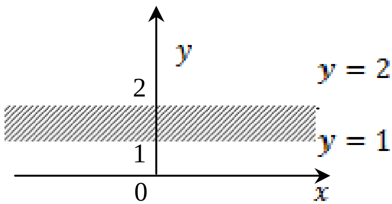

Рис. 1.30

Пример 1.19

Изобразить на комплексной плоскости множества точек, удовлетворяющих системам неравенств:

а) $\begin{cases} \dfrac{1}{|z|} \ge 2; \\ -\dfrac{\pi}{4} \le \arg z \le \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$ б) $\begin{cases} |z| \le 2 + Im\, z; \\ Imz \le 2. \end{cases}$.

Решение

Решая систему неравенств, мы ищем множество точек, удовлетворяющих одновременно каждому из неравенств, входящих в систему.

а) Неравенство $\frac{1}{|z|} \geq 2$ равносильно неравенству $|z| \leq 2$ при условии, что $|z| \neq 0$. Получаем круг с выколотым центром $O(0,0)$ и радиусом $R = 2$.

Неравенству $-\frac{\pi}{4} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4}$ удовлетворяют точки, заключенные между лучами $\varphi = -\frac{\pi}{4}$ и $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

Решением системы являются точки сектора круга (рис. 1.31).

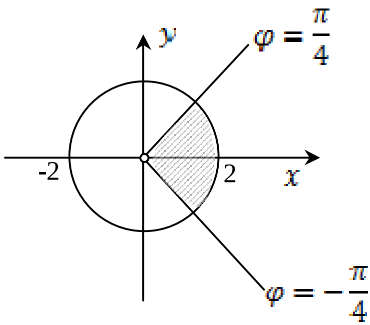

Рис. 1.31

б) С учетом $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ и $Im\ z = y$ запишем неравенство $|z| \leq 2 + Im\ z$ в виде

$\sqrt{x^2 + y^2} \leq 2 + y$;

$x^2 + y^2 \leq (2 + y)^2$, при условии, что $2 + y \geq 0$;

$x^2 + y^2 \leq 4 + 4y + y^2$;

$x^2 \leq 4 + 4y$;

$y \geq \frac{x^2}{4} - 1.$

Данному неравенству удовлетворяют точки параболы $y = \dfrac{x^2}{4} - 1$ с вершиной в точке $O(0;-1)$, и точки, лежащие выше параболы (внутри параболы).

Неравенство $Im\, z \le 2$ или $y \le 2$ определяет точки прямой $y = 2$ и точки, лежащие ниже данной прямой (полуплоскость с границей $y = 2$).

Системе неравенств удовлетворяют точки, лежащие между прямой $y = 2$ и параболой $y = \dfrac{x^2}{4} - 1$ (рис. 1.32).

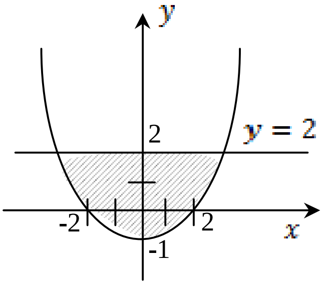

Рис. 1.32

Упражнения для самостоятельного решения

1.1. Изобразить комплексные числа на комплексной плоскости:

1. $z_1 = 4 - 3i$.
2. $z_2 = 3i$.
3. $z_3 = -2 + i$.
4. $z_4 = -2$.
5. $z_5 = -2i$.
6. $z_6 = 3 + 3i$.

1.2. Найти $z_1 + z_2$; $z_1 - z_2$; $z_1 \cdot z_2$; z_1 / z_2; $z_1^2; z_2^3$, если:

1) $z_1 = 2 + 3i; \; z_2 = 3 - i;$

2) $z_1 = 4 - i; \; z_2 = 3 + 2i;$

3) $z_1 = 2 + i; \; z_2 = 2 - i.$

1.3. Вычислить: i^3; i^{12}; i^{18}; i^{37}; i^{55}; i^{104}; $(-i)^{10}$; i^{2010}; $1/i$.

1.4. Найти $\operatorname{Re} z$ и Imz, если:

1) $z = 2i - 7$; 2) $z\left(1-i\right)^2 \cdot \left(3+5i\right)$; 3) $z = i^7 + \dfrac{2+i}{4-3i}$.

1.5. Найти число, сопряженное данному:

1. $z = -1 + 4i.$
2. $z = -5i.$
3. $z = 10.$
4. $z = \dfrac{(1+i)^2}{i} + 2i.$
5. $z = \dfrac{1}{i^7}.$
6. $z = -2i^5.$
7. $z = (1+i)^3 - (1-i)^3.$

1.6. Выполнить указанные действия, представив результат в алгебраической форме:

1) $\left(1-2i\right)\cdot\left(2+i\right)^2 + 5i^9$;

2) $\dfrac{1}{1+4i} + \dfrac{1}{4-i}$;

3) $\dfrac{\left(1+i\right)\cdot\left(3+i\right)}{3-i} - \dfrac{\left(1-i\right)\cdot\left(3-i\right)}{3+i}$;

4) $\left(\dfrac{i^5+2}{i^{19}+1}\right)^2$;

5) $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{100} + i^9 + \dfrac{2i-3}{i}$;

6) $(2-i)^2 + (1+i)^3 - \dfrac{7-i}{2+i}$.

1.7. Найти модуль и аргумент комплексных чисел:

1) 2; 2) -3; 3) $-3i$; 4) $2-2i$; 5) $-3\sqrt{3}+3i$.

1.8. Построить векторы, изображающие следующие комплексные числа, и представить их в тригонометрической форме:

1) $z_1 = -1 - i\sqrt{3}$; 2) $z_2 = -\sqrt{3} + i$;

3) $z_3 = 1$; 4) $z_4 \quad -5i$; 5) $z_5 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{i\sqrt{3}}{2}$.

1.9. Выполнить указанные действия над числами из упражнения 1.8 в тригонометрической форме:

1) $z_1 \cdot z_2$; 2) z_1 / z_2; 3) z_1^{27}; 4) z_2^{60};

5) $\sqrt[3]{z_1}$; 6) $\sqrt[8]{z_3}$; 7) $\sqrt[4]{z_4}$; 8) $\sqrt{z_5^{\,3}}$.

1.10. Представить числа в тригонометрической форме:

1) $-3\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\,sin\frac{\pi}{4}\right)$; 2) $\cos\frac{3\pi}{4}-i\,sin\frac{3\pi}{4}$;

3) $1+\cos\frac{\pi}{4}+i\,sin\frac{\pi}{4}$; 4) $2\cdot\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\,sin\frac{\pi}{6}\right)$.

1.11. Используя тригонометрическую форму комплексного числа, выполнить следующие действия:

1) $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{80}$; 2) $(2+2i)^7$;

3) $\left(-\sqrt{3}+3i\right)^{12}$; 4) $\sqrt{\frac{1+5i}{3+2i}}$;

5) $\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{i\sqrt{6}}{2}\right)^3}{\left(-\frac{2}{3}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^3}$; 6) $\frac{\left(\sqrt{3}-i\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3}{\left(2\sqrt{2}-2\sqrt{2}i\right)^2}$;

7) $\frac{(1-i)^{100}}{(\sqrt{3}+i)^{50}}$.

1.12. Найти все корни двучленного уравнения:

1) $z^3=-5i$; 2) $z^2=\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}$;

3) $z^4=-16$; 4) $z^6=i$;

5) $z^3=\left(2+2i\right)^2$; 6) $z^4=81$.

1.13. Найти и изобразить на комплексной плоскости все значения следующих корней:

1) $\sqrt[3]{\cos 120^\circ + i\,sin 120^\circ}$;

2) $\sqrt[7]{-1}$;

3) $\sqrt[3]{6-6\sqrt{3}i}$;

4) $\sqrt[4]{16i}$;

5) $\sqrt[6]{-64}$;

6) $\sqrt[4]{-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i}$;

7) $\sqrt[5]{-4+4i}$;

8) $\sqrt[3]{\left(\frac{2\sqrt{3}-2i}{1+\sqrt{3}i}\right)^{15}}$.

1.14. Комплексные числа из упражнения 1.8 представить в показательной форме и выполнить над ними указанные действия:

1) $z_1 \cdot z_5$;

2) $\frac{z_5}{z_1}$;

3) z_2^{30};

4) z_5^{12};

5) $\sqrt[3]{z_4}$;

6) $\sqrt{z_2}$.

1.15. Представить в алгебраической форме комплексные числа:

1) $5e^{-\frac{\pi}{6}i}$;

2) $e^{-\pi i}$;

3) $\sqrt{3}e^{3/4\pi i} \cdot \left(\cos\frac{\pi}{4}+isin\frac{\pi}{4}\right)$.

1.16. Используя показательную форму комплексного числа, выполнить следующие действия:

1) $(2-2i)^2 \cdot \left(-1+i\sqrt{3}\right)$;

2) $\dfrac{-5+5i}{\left(\sqrt{3}-i\right)^2}$;

3) $\left(-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}i\right)^3\cdot\left(2\sqrt{3}-2i\right)^2$;

4) $\left(-\sqrt{3}-i\right)^5$;

5) $\sqrt[4]{8\sqrt{3}-8i}$;

6) $\sqrt[6]{-27+27i}$.

1.17. Построить множества точек, удовлетворяющих условиям:

1) $|z|=1$;

2) $|z-1|=2$;

3) $|z+i|=1$;

4) $|z+3|=|z-3i|$;

5) $arg z=\dfrac{3\pi}{4}$;

6) $\begin{cases} Re z\geq 1; \\ Im z\leq 2; \end{cases}$

7) $\begin{cases} |Im z|\leq 1; \\ \dfrac{3\pi}{4}\leq arg z\leq\dfrac{\pi}{4}; \end{cases}$

8) $|z-2+i|>1$;

9) $|z+1-2i|\leq 2$;

10) $3\leq|z+3i|\leq 4$;

11) $3\leq|z+3i|\leq 4$;

12) $|z|>1-Re z$;

13) $|\pi-arg z|<\dfrac{\pi}{4}$;

14) $\dfrac{1}{|z|} \ge 1; z \ne 0;$

15) $\left|\dfrac{1}{z}\right| \le 3; z \ne 0;$

16) $\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right| \le 1;$

17) $Im\,\overline{z}^{2} < 1;$

18) $Im\left(\dfrac{1}{z}\right) < -\dfrac{1}{2}.$

Ответы

1.2. 1) $5+2i$; $-1+4i$; $9+7i$; $0,3+1,1i$; $1+12i$; $18-26i$;

2) $7+i$; $1-3i$; $14+5i$; $\dfrac{10}{13}-\dfrac{11}{13}i$; $15-8i$; $-9+46i$;

3) 4; $2i$; 5; $0,6+0,8i$; $3+4i$; $2-11i$.

1.3. $-i$; 1; -1; i; $-i$; 1; -1; $-i$.

1.4. 1) $Rez=-7; Imz=2;$ 2) $Rez=10; Imz=-6;$

3) $Rez=0,2; Imz=-0,6.$

1.5. 1) $\overline{z}=-1-4i;$ 2) $\overline{z}=5i;$ 3) $\overline{z}=2-2i;$

4) $\overline{z}=-i;$ 5) $\overline{z}=2i;$ 6) $\overline{z}=-4i.$

1.6. 1) $11+3i;$ 2) $\dfrac{5}{17}-\dfrac{3}{17}i;$ 3) $2,8;$

4) $-0,5+1,5i;$ 5) $3+4i;$ 6) $3,6-3,8i.$

1.7. 1) $|z|=2; argz=0;$ 2) $|z|=3; argz=\pi;$ 3) $|z|=3; argz=-\dfrac{\pi}{2};$

4) $|z|=2\sqrt{2}; argz=-\dfrac{\pi}{4};$ 5) $|z|=6; argz=\dfrac{5}{6}\pi.$

1.8. 1) $z_1=2\left(\cos\cos\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)\right);$

2) $z_2=2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+isin\frac{5\pi}{6}\right);$

3) $z_3=\cos 0^\circ+i\,sin\,0^\circ;$

4) $z_4=5\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\,sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right);$

5) $z_5=\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\,sin\left(-\frac{\pi}{3}\right).$

1.9. 1) $4\left(\cos\frac{5}{6}+isin\frac{5}{6}\right);$ 2) $\cos\left(-\frac{3}{2}\pi\right)+isin\left(-\frac{3}{2}\pi\right);$

3) $2^{27};$ 4) $-2^{60};$

5) $\sqrt[3]{2}\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{9}\right)+isin\left(-\frac{2\pi}{9}\right)\right);$

$\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{4\pi}{9}+isin\frac{4\pi}{9}\right);$ $\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{10\pi}{9}+isin\frac{10\pi}{9}\right);$

6) $1;\ \frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i;-1;-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i;-i;\ \frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i;$

7) $\sqrt[4]{5}(\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right)+isin\left(-\frac{\pi}{8}\right);$ $\sqrt[4]{5}\left(\cos\frac{3}{8}\pi+isin\frac{3\pi}{8}\right);$

$\sqrt[4]{5}\left(\cos\frac{7\pi}{8}+isin\frac{7\pi}{8}\right);$ $\sqrt[4]{5}\left(\cos\frac{11\pi}{8}+isin\frac{11\pi}{8}\right);$.

8) $-i;i$

1.10. 1) $3\left(\cos\frac{5\pi}{4}+isin\frac{5\pi}{4}\right);$ 2) $\cos\left(-\frac{3}{4}\pi\right)+isin\left(-\frac{3\pi}{4}\right);$

3) $2\cos\frac{\pi}{8}\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\,sin\frac{\pi}{8}\right)$ 4) $2(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+isin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\Big).$

1.11. 1) $-\sqrt{3}+i;$ 2) $1024(1-i);$ 3) $12^6;$

4) $\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{8}+isin\frac{\pi}{8}\right)$; $\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{8}+isin\frac{9\pi}{8}\right)$;

5) $-\frac{\sqrt{2}}{3}-\frac{\sqrt{6}}{3}i$; 6) $-\frac{1}{2}$; 7) $-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$.

1.12. 1) $\sqrt[3]{5}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)$; $\sqrt[3]{5}i$; $\sqrt[3]{5}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)$;

2) $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}$; $-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$;

3) $\sqrt{2}+i\sqrt{2}$; $-\sqrt{2}+i\sqrt{2}$; $-\sqrt{2}-i\sqrt{2}$; $\sqrt{2}-\sqrt{2}i$;

4) $\cos\frac{\pi}{12}+isin\frac{\pi}{12}$; $\cos\frac{5\pi}{12}+isin\frac{5\pi}{12}$; $\cos\frac{9\pi}{12}+isin\frac{9\pi}{12}$;

$\cos\frac{13\pi}{12}+isin\frac{13\pi}{12}$; $\cos\frac{17}{12}\pi+isin\frac{17\pi}{12}$; $\cos\frac{21\pi}{12}+isin\frac{21\pi}{12}$;

5) $2+2\sqrt{3}i$; -4; $2-2\sqrt{3}i$; 6) 3; $3i$; -3; $-3i$.

1.13. 1) $\cos 40^{\circ}+isin40^{\circ}$; $\cos160^{\circ}+isin160^{\circ}$; $\cos 280^{\circ}+isin280^{\circ}$;

2) $\cos\left(\frac{\pi+2\pi k}{7}\right)+isin\left(\frac{\pi+2\pi k}{7}\right)$; $k=0,1,2,3,4,5,6$;

3) $\sqrt[3]{12}\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{3}+2\pi k}{3}+isin\frac{-\frac{\pi}{3}+2\pi k}{3}\right)$; $k=0,1,2$;

4) $2\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}\right)+isin\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}\right)\right)$; $k=0,1,2,3$;

5) $2(\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3}\right)+isin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3}\right)$; $k=0,1,2,3,4,5$;

6) $\cos\left(-\frac{5\pi}{24}+\frac{\pi k}{2}\right)+isin\left(-\frac{5\pi}{24}+\frac{\pi k}{2}\right)$; $k=0,1,2,3$;

7) $\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{20}+\frac{2\pi}{3}\right)+isin\left(\frac{3\pi}{20}+\frac{2\pi}{3}\right)\right)$; $k=0,1,2,3,4$;

8) $\frac{1}{6}(\cos\cos\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}k\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi k}{3}\right);\ k=0,1,2.$

1.14. 1) $2e^{-\pi i}$; 2) $\frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{3}i}$; 3) $2^{30}\cdot e^{25\pi i}$; 4) $e^{-4\pi i}$;

5) $z_k=\sqrt[3]{5}e^{-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi k}{3}}$; $k=0,1,2$; 6) $z_k=\sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{12}+\pi k}$; $k=0,1.$

1.15. 1) $5\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)$; 2) -1; 3) $-\sqrt{3}$.

1.16. 1) $5\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)$; 2) $\frac{5\sqrt{2}}{4}e^{-\frac{11\pi i}{12}}$; 3) $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi i}{12}}$; 4) $32e^{\frac{\pi}{6}i}$;

5) $2e^{\frac{-\frac{\pi}{6}+2\pi k}{4}}$; $k=0,1,2,3$;

6) $\sqrt{3}\sqrt[12]{2}\cdot e^{\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{3}}$; $k=0,1,2,3,4,5.$

1.17. 1) Окружность с центром $(0;0)$ и $R=1$;

2) окружность с центром $(1;0)$ и $R=2$;

3) окружность с центром $(0;-i)$ и $R=1$;

4) биссектриса II и IV координатных четвертей;

5) луч $y=-x,\ x\le 0.$

6) $x\ge 1$ и $y\le 2$;

7) внешность круга с центром $(2;-1)$ и $R=1$;

8) круг с центром $(-1;2)$ и $R=4$;

9) кольцо с центром (0; -3), заключенное между окружностями с $y=-x$ и $y=x$; и $R_2=4$;

10) часть кольца с центром (0; 0) между окружностями с $R_1=1$ и $R_2=3$ и лучами $y=-x$ и $y=x$;

11) части плоскости $D = \left\{ \left(x, y \right) \mid y^2 > 1 - 2x \right\}$;

12) сектор, ограниченный лучами $y = 0$ $и$ $y = \quad x,\ x \geq 0$;

13) круг с $R = 1$ и «выколотым» центром $\left(0; 0 \right)$;

14) плоскость XOY , из которой вырезан круг с $R = 3$;

15) правая полуплоскость, включая OY;

16) внутренняя часть гиперболы $xy = -\dfrac{1}{2}$;

17) внутренность окружности $x^2 + \left(y - 1 \right)^2 = 1$.

2. РЕШЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В ПОЛЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

2.1. Многочлены и алгебраические уравнения. Основная теорема алгебры

Рассмотрим *многочлен* (полином) *n-й степени* вида

$$P_n\left(x \right) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n, \tag{2.1}$$

в котором переменная x может принимать как действительные, так и комплексные значения $\left(x \in C \right)$, коэффициенты $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ также могут быть действительными или комплексными числами; $n \in N$.

Уравнение вида

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0 \tag{2.2}$$

называется *алгебраическим уравнением n-й степени.*

Коротко уравнение (2.2) будем записывать в виде

$$P_n(x) = 0. \tag{2.3}$$

Число x_0, для которого $P_n(x_0) = 0$, называется *корнем многочлена* (2.1) или *корнем уравнения* (2.2).

Таким образом, задачи отыскания корней многочлена (2.1) и отыскания корней уравнения (2.2) равносильны.

Напомним некоторые сведения из высшей алгебры.

Теорема 2.1 (Теорема Безу). Остаток от деления многочлена $P_n(x)$ на двучлен (бином) $x-a$ равен $P_n(a)$.

Доказательство. При делении многочлена $P_n(x)$ на бином $x-a$ получим частное от деления – многочлен $(n-1)$ степени $Q_{n-1}(x)$ и остаток R.

Тогда $P_n(x) = (x - a) \cdot Q_{n-1}(x) + R.$ Подставив в данное равенство $x=a,$ получим $R=P_n(a).$

Следствие. Если x_0 – корень многочлена $P_n(x),$ то $P_n(x)$ делится без остатка на $(x-x_0)$ (так как остаток $R=P_n(x_0) = 0$) и представляется в виде

$$P_n(x) = (x-x_0) \cdot Q_{n-1}(x). \tag{2.4}$$

Пример 2.1

Многочлен $P_3(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$ при $x=-1$ обращается в ноль, т.е. $P_3(-1) = 0$, поэтому данный многочлен делится на бином $(x+1)$ без остатка.

Найдем частное от деления многочлена $\mathrm{P}_3(x)$ на $(x+1).$ Поделим «уголком».

$$
\begin{array}{r|l}
-\; x^3 + 3x^2 - x - 3 & \underline{x + 1} \\
\underline{x^3 + x^2 \qquad\qquad} & x^2 + 2x - 3 \\
-\; 2x^2 - x - 3 & \\
\underline{2x^2 + 2x \quad} & \\
-\; -3x - 3 & \\
\underline{-3x - 3} & \\
0 &
\end{array}
$$

Следовательно, данный многочлен можно представить в виде

$$P_3(x) = (x+1)(x^2 + 2x - 3).$$

Возникает вопрос: всякое ли уравнение имеет корни?

В случае алгебраического уравнения на этот вопрос отвечает основная теорема алгебры.

Теорема 2.2 (Основная теорема алгебры). Всякий многочлен ненулевой степени $(n \geq 1)$ в множестве комплексных чисел имеет хотя бы один корень (действительный или комплексный).

Первое строгое доказательство этой теоремы принадлежит великому немецкому математику К.Ф. Гауссу (1777–1855).

С помощью основной теоремы алгебры и следствия из теоремы Безу легко доказать следующую теорему.

Теорема 2.3. Всякий многочлен *n*-й степени разлагается на *n* линейных множителей вида $(x-x_i)$ и множитель, равный коэффициенту при x^n, т.е.

$$P_n(x)=a_0(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n), \tag{2.5}$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – корни многочлена $P_n(x)$.

Справедливы следующие утверждения:

1. Задача разложения многочлена на линейные множители равносильна отысканию его корней.

2. Многочлен *n*-й степени $P_n(x)$ не может иметь более чем *n* различных корней.

3. Если в разложении (2.5) некоторые множители совпадают, то их можно объединить и тогда разложение многочлена $P_n(x)$ на множители будет иметь вид

$$P_n(x)=a_0(x-x_1)^{k_1}\cdot(x-x_2)^{k_2}\cdot\ldots\cdot(x-x_m)^{k_m}, \tag{2.6}$$

где $k_1+k_2+\ldots+k_m=n.$

В этом случае корень x_1 называется *корнем кратности* k_1, корень x_2 называется *корнем кратности* k_2. Если многочлен имеет корень x_0 *кратности* k, то будем считать, что многочлен имеет k одинаковых корней, равных x_0.

С учетом замечания о кратных корнях имеют место следующие теоремы.

Теорема 2.4. Всякий многочлен *n*-й степени $(n\geq 1)$ имеет ровно *n* корней (действительных или комплексных), если каждый из корней считать столько раз, какова его кратность.

Теорема 2.5. Алгебраическое уравнение *n*-й степени

$a_0x^n+a_1x^{n-1}+ \ldots +a_n=0$ имеет ровно *n* корней (действительных или комплексных) с учетом их кратности.

Пример 2.2

Разложим многочлен x^4-8x^2+16 на множители

$$x^4-8x^2+16 = \left(x^2-4\right)^2 = \left(x-2\right)^2\left(x+2\right)^2.$$

Корень $x_1=2$ – двукратный корень; $x_2=-2$ – двукратный корень.

Рассмотрим подробнее случай комплексных корней.

Теорема 2.6 (О комплексных корнях). Если многочлен $P_n(x)$ с действительными коэффициентами имеет комплексный корень $x_1=\alpha+i\beta$, то он имеет и сопряженный корень $x_2=\alpha-i\beta$.

Если $x_1=\alpha+i\beta$ – корень кратности r, то $x_2=\alpha-i\beta$ – корень той же кратности r.

Итак, в разложении $P_n(x)=a_0(x-x_1)(x-x_2)\ \dots\ (x-x_n)$ комплексные корни входят *попарно сопряженными*.

Перемножив линейные множители, соответствующие паре комплексно сопряженных корней, получим квадратный трехчлен с действительными коэффициентами

$$(x-(\alpha+i\beta))\cdot(x-(\alpha-i\beta)) = ((x-\alpha)-i\beta)\cdot((x-\alpha)+i\beta)=$$

$$=(x-\alpha)^2-i^2\cdot\beta^2=(x-\alpha)^2+\beta^2=x^2-2\alpha x+\alpha^2+\beta^2=$$

$$=x^2+px+q,$$

где $p=-2\alpha;\ q=\alpha^2+\beta^2$.

Таким образом, *многочлен* с действительными коэффициентами разлагается на линейные и квадратичные множители соответствующей кратности

$$P_n\left(x\right)=a_0\left(x-x_1\right)^{k_1}\cdot\left(x-x_2\right)^{k_2}\dots\ \cdot$$
$$\cdot\left(x-x_r\right)^{k_r}\cdot\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{l_1}\cdot\ldots\cdot\left(x^2+p_sx+q_s\right)^{l_s}, \tag{2.7}$$

где $k_1+k_2+\ \dots\ +k_r+2l_1+\ \dots\ +2l_s=n$.

Перейдем к непосредственному решению некоторых алгебраических уравнений.

2.2. Двучленные уравнения $z^n=a$

Решение двучленного алгебраического уравнения $z^n=a$, где $a\neq 0$, сводится к отысканию корней *n*-й степени из числа a и имеет *n* различных корней.

Пример 2.3

Решить уравнение $z^5 - 1 - i = 0.$

Решение

Запишем уравнение в виде $z^5 = 1 + i$.

Корнями данного уравнения будут являться корни *5-й* степени из числа $1+i$.

Учитывая, что $1+i \quad \left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)$, и используя формулу (1.14), получим

$$z_k = \sqrt[5]{1+i} = \sqrt[5]{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)} =$$

$$= \sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi k}{5} + i\sin\frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi k}{5}\right),$$

где $k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4.$

Получили корни уравнения:

$$Z_0 = \sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{\pi}{20} + i\sin\frac{\pi}{20}\right),$$

$$Z_1 = \sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{20} + i\sin\frac{9\pi}{20}\right),$$

$$Z_2 = \sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{20} + i\sin\frac{17\pi}{20}\right),$$

$$Z_3 = \sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{25\pi}{20} + i\sin\frac{25\pi}{20}\right),$$

$$Z_4 = \sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{33\pi}{20} + i\sin\frac{33\pi}{20}\right).$$

2.3. Квадратные уравнения

Рассмотрим вначале квадратное уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{2.8}$$

с действительными коэффициентами a, b, c, где $x \in C$.

Так как число корней алгебраического уравнения на множестве комплексных чисел равно степени уравнения, то квадратное уравнение (2.8) должно иметь два корня. Найдем их.

Применяя известный алгоритм выделения полного квадрата, данное уравнение можно привести к виду

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0.$$

Отсюда получим известные из школьного курса формулы отыскания корней квадратного уравнения

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \tag{2.9}$$

где $D = b^2 - 4ac$ называется *дискриминантом.*

Рассмотрим три случая: $D > 0$, $D = 0$, $D < 0$.

1. Если $D > 0$, то уравнение (2.8) имеет *два различных действительных корня*

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}.$$

2. Если $D = 0$, то уравнение (2.8) имеет *два одинаковых действительных корня* $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$. Иначе говорят, что уравнение имеет двукратный корень $x = \frac{-b}{2a}$.

3. Пусть $D < 0$. Запишем дискриминант в виде $D = -|D|$ и учтем, что $\sqrt{-1} = i$.

Тогда $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{-|D|}}{2a} = \dfrac{-b \pm \sqrt{|D|} \cdot i}{2a}$.

Таким образом, если $D<0$, то уравнение (2.8) имеет *два комплексно сопряженных корня.*

$$x_1 = \frac{-b}{2a} + \frac{\sqrt{|D|}}{2a} i, \quad x_2 \quad \frac{-b}{2a} - \frac{\sqrt{|D|}}{2a} i.$$

Пример 2.4

Решить уравнения:

$a) x^2+2x+5=0; \qquad б) x^2+9=0; \qquad в) x^3+8=0;$

$г) x^4-5x^2-36=0; \qquad д) x^4+x^2+1=0.$

Решение:

а) $x^2+2x+5=0; \quad D=4-20 \quad -16<0$, имеем комплексно сопряженные корни

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{-2 \pm 4i}{2}.$$

Итак, $x_1 = -1-2i$ и $x_2 = -1+2i.$

б) $x^2+9=0,$

$x^2=-9;$

$x=\pm\sqrt{-9};$

$x=\pm 3i.$

Получили $x_1=3i$ и $x_2=-3i.$

Запись при решении данного уравнения может вестись по-другому $x^2=-9;$ так как $i^2=-1,$ то $x^2=9i^2; \quad x \quad \pm 3i;$

в) $x^3+8=0;$

$$(x+2)(x^2+2x+4)=0, \qquad \left[\begin{array}{l} x+2=0, \\ x^2+2x+4=0, \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x=-2, \\ x_{1,2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{-12}}{2} = \dfrac{-2 \pm 2\sqrt{3}i}{2}. \end{array}\right.$$

Получили три корня $x_1=-1-\sqrt{3}i, \quad x_2 \quad -1+\sqrt{3}i, \quad x_3 \quad -2.$

г) $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$. Решаем биквадратное уравнение с помощью стандартной подстановки $x^2 = t$, где t – любого знака.

$$t^2 - 5t - 36 = 0;$$

$$t_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{169}}{2} = \frac{5 \pm 13}{2};$$

$$\left[\begin{array}{l} x^2 = 9, \\ x^2 = -4, \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x_{1,2} = \pm 3, \\ x_{3,4} = \pm 2i. \end{array}\right.$$

Получили 4 корня биквадратного уравнения:

$$x_1 = 3;\ x_2 = -3;\ x_3 = 2i;\ x_4 = -2i.$$

д) $x^4 + x^2 + 1 = 0$. Пусть $t = x^2$.

$$t^2 + t + 1 = 0,$$

$$t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}.$$

$$\left[\begin{array}{l} x^2 = -\dfrac{1}{2} - \sqrt{3}i, \\ x^2 = -\dfrac{1}{2} + \sqrt{3}i. \end{array}\right.$$

Подставим числа $-\frac{1}{2} - \sqrt{3}i$ и $-\frac{1}{2} + \sqrt{3}i$ в тригонометрической форме

$$-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3};$$

$$-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right).$$

Отсюда находим с помощью формулы (1. 14)

$$x_{1,2} = \sqrt{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i} = \cos\frac{\frac{2\pi}{3} + 2\pi k}{2} + i\sin\frac{\frac{2\pi}{3} + 2\pi k}{2},$$

где $k = 0;\ 1.$

$$x_{3,4}=\sqrt{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}=\cos\frac{-\frac{2\pi}{3}+2\pi k}{2}+i\sin\frac{-\frac{2\pi}{3}+2\pi k}{2},$$

где $k=0;\ 1.$

Полагая $k=0;\ 1$, получим корни исходного уравнения:

$$x_1=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3},= \qquad x_2 \quad \cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3},$$

$$x_3=\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right), \quad x_4= \quad \cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}.$$

Или в алгебраической форме:

$$x_1=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i, \qquad x_2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

$$x_3=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i, \qquad x_4=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Пример 2.5

Найти все комплексные числа, удовлетворяющие уравнению

$$\overline{z}-z^2=0\,.$$

Решение

Пусть $z=x+iy$, тогда $z=x-iy$, где $x\in R$ и $y\in R.$

Уравнение $\overline{z}-z^2=0$ примет вид

$$x-iy-\left(x+iy\right)^2=0,$$

$$x-iy-x^2-2xyi-i^2y^2=0,$$

$$\left(x-x^2+y^2\right)+\left(-2xy-y\right)i=0.$$

Будем опираться на тот факт, что

$$Z=0 \;<=>\; \begin{cases}\operatorname{Re}Z=0,\\ \operatorname{Im}Z=0.\end{cases}$$

Следовательно, наше последнее уравнение равносильно системе двух уравнений:

$$\begin{cases}x-x^2+y^2=0,\\ -2xy-y=0,\end{cases} <=> \begin{cases}y^2=x^2-x,\\ y(2x+1)=0,\end{cases} <=>$$

$$\begin{cases} y^2 = x^2 - x, \\ \left[\begin{array}{l} y = 0, \\ x = -\dfrac{1}{2}. \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 0 \\ y^2 = x^2 - x \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} \\ y^2 = x^2 - x \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 0 \\ x(x-1) = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} \\ y^2 = \dfrac{3}{4} \end{cases} \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \quad \textit{или} \quad x = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \quad \textit{или} \quad y \quad -\dfrac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases} \end{array}$$

Получим решение в виде пары чисел x и y.

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \;=>\; z_1 = 0; \qquad \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \;=>\; z_2 = 1 + 0i = 1;$$

$$\begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \;=>\; z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i;$$

$$\begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} \\ y = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \;=>\; z_4 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i.$$

Ответ: $z_1 = 0;\ z_2 = 1;\ z_3 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} i;\ \ z_4 \quad -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} i.$

2.4. Решение линейных уравнений с комплексными коэффициентами

При решении таких уравнений будем применять следующие факты относительно комплексных чисел:

$$z_1 = z_2 \quad <=> \quad \begin{cases} \operatorname{Re} Z_1 = \operatorname{Re} Z_2, \\ \operatorname{Im} Z_1 = \operatorname{Im} Z_2, \end{cases} \tag{2.10}$$

$$z_1 = 0 \quad <=> \quad \begin{cases} \operatorname{Re} Z = 0, \\ \operatorname{Im} Z = 0. \end{cases} \tag{2.11}$$

Пример 2.6

Найти действительные решения уравнений:

а) $(1+i)x+(-2+5i)y=-4+17i.$

Раскроем скобки в левой части и перегруппируем

$$x+xi-2y+5yi=-4+17i,$$

$$(x-2y)+i(x+5y)=-4+17i.$$

Используем условие равенства двух комплексных чисел (2.10), получим

$$\begin{cases} x-2y=-4, \\ x+5y=17. \end{cases}$$

Решим систему линейных уравнений по формулам Крамера.

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}=5+2=7;$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} -4 & -2 \\ 17 & 5 \end{vmatrix}=-20+34=14;$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 17 \end{vmatrix}=17+4=21.$$

Тогда $x=\dfrac{\Delta_1}{\Delta}=\dfrac{14}{7}=2; \qquad y=\dfrac{\Delta_2}{\Delta}=\dfrac{21}{7}=3.$

Ответ: $x=2; \quad y=3.$

б) $(x-iy)(2-3i)=i^5,$

$$2x-3xi-2yi+3yi^2=\left(i^2\right)^2\cdot i,$$

$$2x-3xi-2yi-3y-i=0,$$

$$(2x-3y)+(-3x-2y-1)i=0.$$

Используя условие равенства нулю комплексного числа (2.11), получим:

$$\begin{cases} 2x-3y=0, \\ -3x-2y-1=0; \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x-3y=0, \\ 3x+2y=-1. \end{cases}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=4+9=13, \qquad \Delta_1=\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=-3,$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=-2.$$

Тогда $x=\dfrac{\Delta_1}{\Delta}=\dfrac{-3}{13}$; $\quad y=\dfrac{\Delta_2}{\Delta}=\dfrac{-2}{13}$.

Ответ: $x=\dfrac{-3}{13}$; $\qquad y=\dfrac{-2}{13}$.

2.5. Решение систем линейных уравнений с комплексными переменными

Рассмотрим решение таких систем на примере.

Пример 2.7

Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} (1+i)x+(1-i)y=5-i, \\ (1-i)x+iy=-1, \end{cases}$$

где $x, y \in C$.

Решение

Решим систему по формулам Крамера:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1+i & 1-i \\ 1-i & i \end{vmatrix}=i(1+i)-(1-i)^2=i+i^2-1+2i-i^2=-1+3i;$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 5-i & 1-i \\ -1 & i \end{vmatrix}=i(5-i)+1-i=5i-i^2+1-i=2+4i;$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} 1+i & 5-i \\ 1-i & -1 \end{vmatrix}=-1-i-(1-i)(5-i)=$$

$$=-1-i-5+6i-i^2=-5+5i.$$

Тогда

$$x=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{2+4i}{-1+3i}=\frac{(2+4i)(-1-3i)}{(-1+3i)(-1-3i)}=\frac{10-10i}{1-3i^2}=\frac{10-10i}{4}=$$

$$=2,5-2,5i;$$

$$y=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{-5+5i}{-1+3i}=\frac{(-5+5i)(-1-3i)}{4}=\frac{20+10i}{4}=5+2,5i.$$

Ответ: $x=2,5-2,5i$; $y=5+2,5i$.

Упражнения для самостоятельного решения

2.1. Решить уравнения:

1) $x^2-2x+2=0$, $x\in C$;

2) $x^2-6x+16=0$, $x\in C$;

3) $x^2+10x+28=0$, $x\in C$;

4) $x^2+95=0$, $x\in C$;

5) $4x^2+5=0$, $x\in C$;

6) $x^4-5x^2-36=0$, $x\in C$;

7) $x^4-16=0$;

8) $x^3+27=0$;

9) $x^4-10x^2+169=0$;

10) $x^4-30x^2+289=0$;

11) $x^4+6x^2+25=0$;

12) $x^4+\sqrt{2}x^2+1=0$.

2.2. Решить двучленные уравнения:

1) $x^4+64=0$, $x\in C$;

2) $x^2-16i=0$, $x\in C$;

3) $x^3+8i=0$, $x\in C$;

4) $x^5+1=0$, $x\in C$.

2.3. Найти действительные решения следующих уравнений:

1) $\left(2-i\right)x+\left(-3+4i\right)y=2i-7;$

2) $\left(1-i\right)x+\left(2+i\right)y=7-i^3;$

3) $\left(3x-i\right)\cdot\left(2+i\right)+\left(x-iy\right)\cdot\left(1+2i\right)=5+6i;$

4) $\left(x-iy\right)\cdot\left(2-5i\right)=i^2;$

5) $\dfrac{2+5i}{x-y}-\dfrac{1-3i}{x+y}=\dfrac{-7x+12i}{y^2-x^2}.$

2.4. Найти все комплексные числа z , удовлетворяющие следующим уравнениям:

1) $z+2i\bar{z}-3=0,$

2) $z^2+|z|=0,$

3) $\bar{z}=2-z,$

4) $z^2+\bar{z}=0,$

5) $\dfrac{1}{z-i}+\dfrac{2+i}{1+i}=\sqrt{2},$

6) $\left(\dfrac{z=i}{z-i}\right)^4=1.$

2.5. Решить системы:

1) $\begin{cases}(2+i)x+(1+3i)y=5+5i,\\(1-i)x+y=3-i;\end{cases}$

2) $\begin{cases}(1+2i)x+(3+2i)y=4+2i,\\(1-2i)x+(1+2i)y=6.\end{cases}$

Ответы

2.1. 1) $1+i$; 2) $3\pm\sqrt{7}i$; 3) $-5\mp\sqrt{3}i$; 4) $\pm5i$; 5) $\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}i$;

6) $\pm3;\pm2i$; 7) $\pm2;\pm2i$; 8) $-3;-1,5\mp1,5\sqrt{3}i$;

9) $3\pm2i;-3\pm2i$; 10) $4\pm i;\ -4\pm i$; 11) $1\pm2i;\ -1\pm2i$;

12) $\cos\dfrac{3\pi}{8}+i\sin\dfrac{3\pi}{8}$; $\cos\dfrac{5\pi}{8}+i\sin\dfrac{5\pi}{8}$;

$\cos\left(-\dfrac{3\pi}{8}\right)+i\sin\left(\dfrac{3\pi}{8}\right);\cos\left(-\dfrac{5\pi}{8}\right)+i\sin\left(-\dfrac{5\pi}{8}\right).$

2.3 1) $x=-0{,}6;\ y=-4{,}4;$

2) $x=\dfrac{5}{3};\ y=\dfrac{8}{3};$

3) $x=\dfrac{20}{17};\ y=-\dfrac{36}{17};$

4) $x=-\dfrac{2}{29};\ y=\dfrac{5}{29};$

5) $x=-1;\ y=-2.$

2.4 1) $z=-1+2i;$

2) $0;\ \ i;\ -i;$

3) $1+yi;\ \ y\in R;$

4) $0;\ -1;\ \ \dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i;$

5) $\dfrac{\left(\sqrt{2}-2\right)-\left(7\sqrt{2}-10\right)}{9-6\sqrt{2}};$

6) $1;\ 0;\ -1.$

2.5 1) $x=1+i;\ y=1-i;$

2) $x=1+i;\ y=1-i.$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Краснов М.И., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости: учеб. пособие. – М.: Наука, 1981.

2. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – М.: Наука, 1975.

3. Практикум по высшей математике для экономистов: учеб. пособие для вузов / Н.Ш. Крамер, И.М. Тришин, Б.А. Путко и др.; под ред. Н.Ш. Крамера. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005.

4. Сборник задач по высшей математике для экономистов: учеб. пособие / под ред. В.И. Ермакова. – М.: ИНФРА-М, 2003.

Св. темплан 2011, поз. 66

Заявки на книгу присылать по адресу:
455000, Магнитогорск, пр. Ленина, 38,
ФГБОУ ВПО «МГТУ»,
кафедра ММвЭ
Т. (3519) 23-91-52. Факс 29-84-26

АБРАМОВА Татьяна Викторовна
АНДРОСЕНКО Ольга Сергеевна
КУЗИНА Татьяна Георгиевна
ПЕТРОВА Ольга Васильевна

Комплексные числа

Практикум для студентов экономических специальностей

Редактор Т.А. Колесникова
Компьютерная верстка Л.М. Недялковой
Подписано в печать 30.01.2012. Формат 60x84 1/16. Бумага тип. № 1.
Плоская печать. Усл.печ.л. 4,25. Уч.-изд.л. 4,93. Тираж 100 экз.
Заказ

Издательский центр ФГБОУ ВПО «МГТУ»
455000, Магнитогорск, пр. Ленина, 38
Полиграфический участок ФГБОУ ВПО «МГТУ»

Т. В. Абрамова
О. С. Андросенко
Т. Г. Кузина
О. В. Петрова

ÊÎÌÏËÅÊÑÍÛÅ
×ÈÑËÀ

Магнитогорск 2011