Министерство образования и науки Российской Федерации
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И.Носова

Андросенко О.С.
Трофимова В.Ш.

ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ. ЭЛЕМЕНТЫ СЕТЕВОГО ПЛАНИРОВАНИЯ И ТЕОРИИ ИГР

Утверждено Редакционно-издательским советом университет в качестве практикума

Магнитогорск
2010

УДК 519.8: 004.9 (075)

Рецензенты:

Кафедра прикладной математики и вычислительной техники
Магнитогорского государственного университета,
заведующий кафедрой, профессор,
доктор физико-математических наук
С.И. Кадченко

Доцент кафедры прикладной математики и вычислительной
техники Магнитогорского государственного университета,
кандидат физико-математических наук
Е.М. Малеко

Андросенко О.С., Трофимова В.Ш.
Линейное программирование. Элементы сетевого планирования и теории игр: практикум. – Магнитогорск: ГОУ ВПО «МГТУ», 2010. – 120 с.

В практикуме рассмотрены специальные разделы математики: задачи линейного программирования, элементы теории игр, сетевые модели планирования и управления проектами. Приведены решения практических задач экономического содержания, в том числе с использованием «Excel» и задачи для самостоятельного решения. Предназначен для самостоятельной работы и аудиторных занятий студентов экономических специальностей очной и заочной форм обучения под руководством преподавателя.

УДК 519.8: 004.9 (075)

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Формирование у студентов теоретических знаний, практических навыков по вопросам, касающимся принятия правильных управленческих решений на любом этапе развития экономики, представляется важным звеном в становлении грамотного специалиста - экономиста. Данное издание призвано помочь обучить студентов экономических специальностей использовать математические методы и модели в процессе подготовки и принятия управленческих решений в организационно-экономических и производственных системах. В частности, рассматриваются оптимизационные, игровые и сетевые модели.

Оптимизационные модели позволяют найти из множества возможных (альтернативных) вариантов наилучший план производства, распределения капиталовложений или составления какой-либо смеси и пр. При этом запас ресурсов будет использован наиболее эффективным образом для достижения поставленной цели.

Сетевые модели наиболее широко применяются в управлении проектами. Сетевая модель отображает комплекс работ (операций) и событий и их взаимосвязь во времени. Обычно сетевая модель предназначена для выполнения работ в такой последовательности, чтобы сроки выполнения проекта были минимальными. В этом случае ставится задача нахождения критического пути. Однако существуют и такие сетевые модели, которые ориентированы не на критерий времени, а, например, на минимизацию стоимости работ.

Игровые модели, применяемые в экономике, решают задачи о выборе решения в условиях экономической неопределенности (например, о рыночной конъюнктуре или погодных условиях, в условиях конкурентной борьбы и пр.)

Целью изучения данных разделов математики является знакомство с задачами организационно-экономического управления и освоение математических методов как инструмента их решения.

В процессе изучения у студентов должны быть сформированы теоретические знания, необходимые для моделирования экономических систем и решения поставленных математических задач, а также практические навыки такого решения и анализа полученных результатов.

1. ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Линейное программирование – область математики, разрабатывающая теорию и численные методы решения задач нахождения экстремума (максимума или минимума) линейной функции многих переменных при наличии линейных ограничений, т.е. линейных равенств или неравенств, связывающих эти переменные. К задачам линейного программирования приводится широкий круг вопросов планирования экономических и технико-экономических процессов, где ставится задача поиска наилучшего (оптимального) решения; само возникновение и развитие линейного программирования непосредственно связано с экономической проблематикой.

1.1. Постановка задачи линейного программирования (ЗЛП)

Задачи линейного программирования имеют несколько вариантов постановок, т.к. левая и правая части ограничений линейной модели могут быть связаны знаками ≤ , ≥ или =. Также и переменные, фигурирующие в линейных моделей, могут быть неотрицательными, отрицательными или не иметь ограничений в знаке.

Общая постановка задачи линейного программирования

Общая задача линейного программирования (ОЗЛП) может быть сформулирована следующим образом: найти значения переменных X_1, $X_2,\ldots,Xn$, максимизирующие линейную форму

$$\max f(\bar{x}) = c_1 \cdot x_1 + \ldots + c_n \cdot x_n \qquad (1.1)$$

при условиях:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i,\ \mathrm{i} = 1,\ldots,\mathrm{k},\ (\mathrm{k} \le \mathrm{m}) \qquad (1.2)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ \mathrm{i} = \mathrm{k}+1,\ldots,\mathrm{m} \qquad (1.3)$$

$$x_{\mathrm{j}} \ge 0,\ \ \mathrm{j} = 1,\ldots,\mathrm{h}\ \ (\mathrm{h} \le \mathrm{n})$$

Значения переменных x_j (j=1,2,…,n) можно рассматривать как компоненты некоторого вектора $\overline{X} = (x_1,..,x_n)$ пространства R^n.

Определение. *Планом* или допустимым решением задачи линейного программирования будем называть вектор $\overline{X}$ пространства R^n, компоненты которого удовлетворяют ограничениям задачи.

Множество всех планов задачи линейного программирования (1.1) – (1.3) будем обозначать D.

Теорема 1.1 Множество планов D задачи линейного программирования (ЗЛП) есть замкнутое выпуклое множество.

Множество D может быть как ограниченным, так и неограниченным, кроме того оно может оказаться пустым.

Напомним, что множество точек D пространства R^n есть выпуклое множество, если вместе с любыми двумя его точками $\overline{X}_1$ и $\overline{X}_2$ ему принадлежит и любая выпуклая линейная комбинация этих точек, то есть если $\overline{X}_1, \overline{X}_2 \in D$, то и любая точка

$$\overline{X} = (1-\lambda)\overline{X}_1 + \lambda\overline{X}_2,\ 0 \le \lambda \le 1$$

также принадлежит множеству D.

С геометрической точки зрения это означает, что если множество выпуклое, то вместе с любыми двумя точками A и B оно содержит весь отрезок AB.

На рис. 1.1. изображены два множества в пространстве R^2: область D - выпуклая, а область D_1 – не является выпуклой.

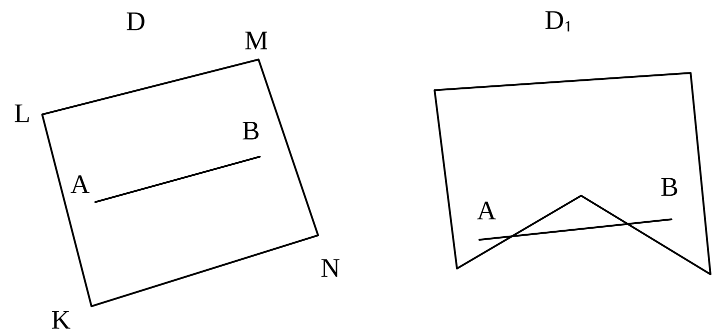


Рис. 1.1. Пример выпуклого и невыпуклого множеств

Нетрудно доказать, что прямая, плоскость и полуплоскость являются выпуклыми множествами.

Множество точек $\overline{X} = (x_1,..,x_n)$ пространства R^n, компоненты которых удовлетворяют условию $c_1 \cdot x_1 + \ldots + c_n \cdot x_n = b$ называется *гиперплоскостью* пространства R^n.

Множество точек $\overline{X} = (x_1,..,x_n)$ пространства R^n, компоненты которых удовлетворяют условию $c_1 \cdot x_1 + \ldots + c_n \cdot x_n \le (\ge) b$ называется полупространством пространства R^n.

Очевидно, что гиперплоскость и полупространство являются выпуклыми множествами пространства R^n.

Напомним, что точка $\overline{X}_0$ выпуклого множества D является крайней (угловой), если в D не существует таких точек $\overline{X}_1$ и $\overline{X}_2$, $\overline{X}_1 \ne \overline{X}_2$, что $\overline{X} = (1-\lambda)\overline{X}_1 + \lambda\overline{X}_2$, при некотором $\lambda \in (0,1)$.

Геометрически это означает, что эта угловая точка не может лежать внутри отрезка, соединяющего две точки выпуклого множества. Она лишь может быть одной из концевых точек этого отрезка.

На рис. 1.1 угловыми точками выпуклого множества D являются его вершины K, L, M, N.

Определение. План $\overline{X}^* = (x_1^*,..,x_n^*)$ будем называть решением задачи линейного программирования или ее *оптимальным планом*, если

$$f(\overline{x}^*) = \max_{\overline{x} \in P} f(\overline{x})$$

Определение. Будем говорить, что задача линейного программирования разрешима, если она имеет хотя бы один оптимальный план.

Основная задача линейного программирования

ЗЛП во многих случаях оказывается ассоциированной с задачей распределительного типа или с задачей производственного планирования, в которой требуется распределить ограниченные ресурсы по нескольким видам производственной деятельности.

Такую ЗЛП можно поставить следующим образом: найти значения переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, максимизирующие линейную форму

$$f(\overline{x}) = c_1 \cdot x_1 + \ldots + c_n \cdot x_n \qquad (1.4)$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \ i = 1,...,m \tag{1.5}$$

$$x_j \ge 0, \ j = 1,...,n \tag{1.6}$$

или в векторно-матричной форме

$$f(\overline{X}) = (\overline{C}, \overline{X}) \to \max \tag{1.7}$$

$$A \cdot \overline{X} \le \overline{B} \tag{1.8}$$

$$\overline{X} \ge 0, \tag{1.9}$$

где $\overline{C}$ =(c_1,c_2,…,c_n), $\overline{B}$ =(b_1,b_2,…,b_m), A=(a_{ij}) – матрицы коэффициентов ограничений (1.5). Задача (1.4)- (1.6) или (1.7) – (1.9) называется *основной задачей линейного программирования*. Основная ЗЛП является частным случаем общей ЗЛП при k=m, h=n.

Каноническая задача линейного программирования

Для построения общего метода решения ЗЛП разные формы ЗЛП должны быть приведены к некоторой стандартной форме, называемой *канонической задачей линейного программирования* (КЗЛП).

В канонической форме

1. все функциональные ограничения записываются в виде равенств с неотрицательной правой частью;
2. все переменные неотрицательны;
3. целевая функция подлежит максимизации

Таким образом, КЗЛП имеет вид

$$f(\overline{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max \tag{1.10}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_j, \quad i = 1,...,m \tag{1.11}$$

$$x_i \ge 0, \ j = 1,...,n; \ b_i \ge 0; \ i = 1,...,m \tag{1.12}$$

или в векторно-матричной форме

$$f(\overline{X}) = (\overline{C}, \overline{X}) \to \max \tag{1.13}$$

$$A \cdot \overline{X} = \overline{B} \tag{1.14}$$

$$\overline{X} \ge 0, \ \overline{B} \ge 0 \tag{1.15}$$

КЗЛП является частным случаем общей ЗЛП при k=0, h=n.

Любую ЗЛП можно привести к каноническому виду, используя следующие правила:

а) максимизация целевой функции $f(\overline{x})$ равносильна минимизации целевой функции $-f(\overline{x})$;

б) ограничение в виде неравенства, например, $3X_1+2X_2-X_3 \le 6$, может быть приведено к стандартной форме $3X_1+2X_2-X_3+X_4=6$, где новая переменная X_4 неотрицательна. Ограничение $X_1 -X_2+3X_3 \ge 10$ может быть приведено к стандартной форме $X_1 -X_2+3X_3-X_5=10$, где новая переменная X_5 неотрицательна;

в) если некоторая переменная X_k может принимать любые значения, а требуется, чтобы она была неотрицательная, ее можно привести к виду $X_k = X'_k - X''_k$, где $X'_k \ge 0$ и $X''_k \ge 0$.

1.2. Графический метод решения ЗЛП

Графическим методом целесообразно решать ЗЛП, содержащие не более двух переменных x_1 и x_2. Данный метод основывается на возможности графического изображения области допустимых решений ЗЛП на листе бумаги. Алгоритм графического метода рассмотрим применительно к задаче.

Пример 1. Фабрика выпускает пряжу двух видов: П1 и П2. Продукция поступает в оптовую продажу. Для производства используется три вида сырья – шерсть, капрон и акрил. Максимально возможные суточные запасы этих материалов составляют 6, 8 и 5 тонн соответственно. Расходы сырья на партию пряжи и оптовые цены приведены в таблице:

Сырьё	Расход сырья на 1 партию пряжи		Запас, тонн
	П1	П2	
шерсть	1	2	6
капрон	2	1	8
акрил	1	0,8	5
оптовая цена партии, тыс.у.е.	3	2	

Изучение рынка сбыта показало, что суточный спрос на пряжу П2 никогда не превышает спроса на пряжу П1 более чем на одну партию. Кроме того, установлено, что спрос на пряжу П2 никогда не превышает 2 партий.

Какое количество пряжи (в партиях) каждого вида должна производить фабрика, что бы доход от реализации продукции был максимальным?

Решение. Построение математической модели задачи начинается с обозначения переменных: X_1 – суточный объем производства пряжи П1; X_2 - суточный объем производства пряжи П2 в количестве партий.

Целевая функция должна представлять собой доход от продажи пряжи обои видов, произведенной за сутки: $f = 3X_1 + 2X_2$ тыс. у.е.

Ограничения накладываются на запасы сырья:

расход шерсти на производство пряжи П1 в количестве X_1 партий и пряжи П2 в количестве X_2 партий составит: $1X_1+2X_2$ тонн и это количество не должно превысить запаса в 6 тонн. Получаем первое ограничение: $X_1+2X_2 \le 6$.

Аналогично накладываются ограничения по капрону: $2X_1 + X_2 \le 8$ и акрилу: $X_1+0{,}8X_2 \le 5$.

Ограничения на величину спроса на продукцию имеют вид:
$-X_1 + X_2 \le 1$ (соотношение величины спроса на пряжу П1 и П2);
$X_2 \le 2$ (максимальная величина спроса на пряжу П2).

Вводятся так же условия неотрицательности переменных, т. к. объемы производства не могут быть отрицательными: $X_1 \ge 0$, $X_2 \ge 0$.

В итоге, получаем следующую математическую модель задачи:

$$\max f(\bar{x}) = 3X_1 + 2X_2 \qquad (1.16)$$

при ограничениях

$$D: \begin{cases} X_1 + 2X_2 \le 6 & (а) \\ 2X_1 + X_2 \le 8 & (б) \\ X_1+0{,}8X_2 \le 5 & (в) \\ -X_1 + X_2 \le 1 & (г) \\ X_2 \le 2 & (д) \\ X_1 \ge 0,\ X_2 \ge 0 & (е) \end{cases} \qquad (1.17)$$

Поскольку переменных в задаче только две, можно решить её с помощью графического метода.

Шаг 1. Строим область допустимых решений (1.17) - область D, т.е. геометрическое место точек, в котором одновременно удовлетворяются все ограничения ЗЛП. Каждое из неравенств (а)-(д) системы ограничений (1.17) задачи геометрически определяет полуплоскость соответственно с граничными прямыми:

$$\begin{array}{ll} X_1 + 2X_2 = 6 & (а) \\ 2X_1 + X_2 = 8 & (б) \\ X_1+0{,}8X_2 = 5 & (в) \\ -X_1 + X_2 = 1 & (г) \\ X_2 = 2 & (д) \end{array}$$

Каждая из прямых делит координатную плоскость на две полуплоскости. Чтобы определить, какая именно из двух полуплоскостей, ограниченных, например, прямой (а) $X_1 + 2X_2 = 6$, удовлетворяет соответствующему неравенству $X_1 + 2X_2 \le 6$, подставим в неравенство координаты произвольной точки, не лежащей на граничной прямой, например, координаты точки О(0,0). Если координаты «контрольной» точки удовлетворяют неравенству, то областью его решений является полуплоскость, содержащая эту точку. Если же координаты не удовлетворяют неравенству, то областью его решений является полуплоскость, не содержащая данную точку.

В нашем случае, получаем верное неравенство: $0+2*0 \le 6$, следовательно, решением неравенства (а) является полуплоскость, содержащая точку начала координат и лежащая ниже граничной прямой (а).

Условия неотрицательности переменных (е) ограничивают область допустимых решений первой четвертью. Области, в которых выполняются соответствующие ограничения (1.17) в виде неравенств, указываются стрелками, направленными в сторону допустимых значений переменных (рис. 1.2).

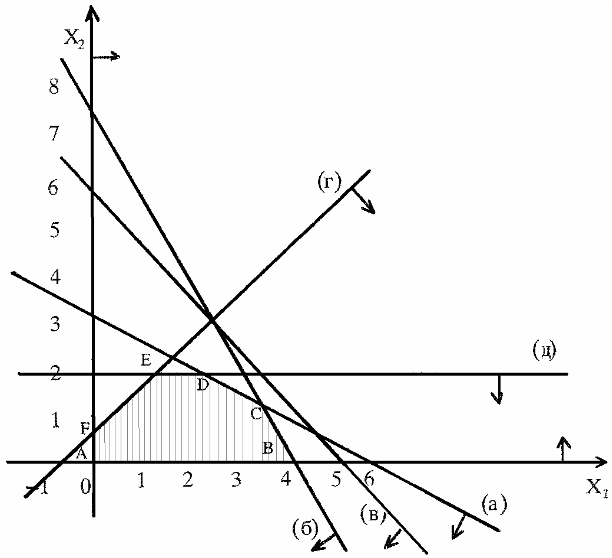


Рис.1.2. Область допустимых решений D

Если система неравенств (1.17) совместна, область ее решений есть множество точек, принадлежащих всем указанным полуплоскостям.

Полученная таким образом область допустимых решений D - планов ЗЛП (рис. 1.2) есть многоугольник ABCDEF - замкнутое, ограниченное, выпуклое множество с шестью крайними или угловыми точками: А, В, С, D, Е, F.

Шаг 2. Строим вектор-градиент линейной формы $f(\overline{x})$: $\overline{grad(f)} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}; \frac{\partial f}{\partial x_2}\right)$. Обозначим его $\overline{C} = (c_1; c_2)$, т.к. частные производные линейной функции совпадают с коэффициентами при соответствующих переменных. В условиях данной задачи $\overline{C} = (3{,}2)$. Вектор градиент указывает направление наискорейшего роста функции f.

Шаг 3. Строим прямую $C_1X_1 + C_2X_2$ = const - линию уровня функции $f(\overline{x})$, перпендикулярную вектору-градиенту $\overline{C}$:

$3X_1 + 2X_2$ = const (рис.1.3)

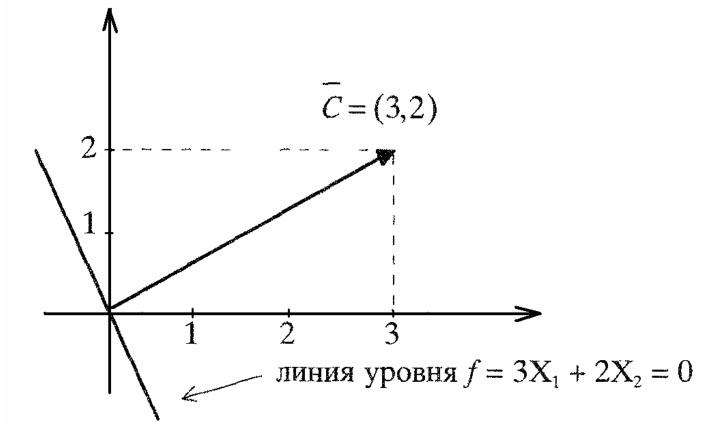


Рис.1.3. Вектор - градиент целевой функции и линия уровня

Шаг 4. В случае максимизации $f(\overline{X})$ передвигают прямую $3X_1 + 2X_2$ = const в направлении вектора $\overline{C}$ до тех пор, пока она не покинет область D. Крайняя точка (или точки) области, в которой линия уровня покидает допустимую область, и является решением задачи (рис. 1.4).

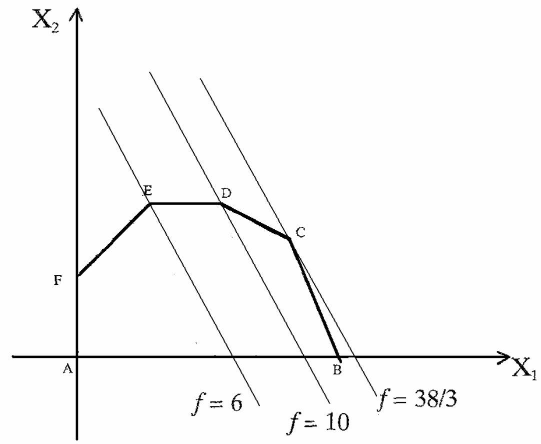


Рис.1.4. Определение угловой точки области D, являющейся оптимальным решением.

Угловая точка С - точка максимума $f(\overline{X})$, С = $\overline{X}^*$ лежит на пересечении прямых (а) и (б). Для определения ее координат решим систему уравнений:

$$X_1 + 2X_2 = 6$$
$$2X_1 + X_2 = 8.$$

Откуда $X^*_1 = 10/3$; $X^*_2 = 4/3$ или $\overline{X}^* = (10/3\ ;\ 4/3)$.

Подставляя значения X^*_1 и X^*_2 в функцию $f(\overline{X})$, найдем

$$\max f(\overline{X}) = f(\overline{X}^*) = 3 \cdot 10/3 + 2 \cdot 4/3 = 38/3.$$

Ответ: фабрике необходимо производить пряжи первого вида 3 и 1/3 партий, а второго вида – 1 и 1/3 партий. При этом фабрика получит максимальный доход от реализации всей пряжи 12,67 тыс. у.е.

Замечания.

1. В случае минимизации $f(\overline{X})$ прямую $C_1X_1 + C_2X_2$ = const надо перемещать в направлении ($-\overline{C}$), противоположном $\overline{C}$.

2. Если допустимая область решений D представляет собой неограниченную область и линия уровня при движении в заданном направлении не покидает область D, то в этом случае говорят, что $f(\overline{X})$ не ограничена сверху (или снизу), т.е. $\max f(\overline{X}) = +\infty$ или $\min f(\overline{X}) = -\infty$.

3. Если целевая функция достигает экстремума в двух угловых точках, то задача имеет бесконечное множество оптимальных решений (альтернативный оптимум). Если обозначить эти угловые точки $\overline{X}_1$ и $\overline{X}_2$, тогда оптимальное решение записывается в виде выпуклой линейной комбинации этих угловых точек: $\overline{X} = (1-t)\cdot\overline{X}_1 + t\cdot\overline{X}_2$, где $0 \le t \le 1$.

Пример 2. Графическим способом решить ЗЛП

$$\max (2X_1 + X_2)$$

при ограничениях

$$\begin{cases} X_1 - X_2 \le 2 & (1) \\ X_1 + 3X_2 \ge 3 & (2) \\ 7X_1 - X_2 \ge 2 & (3) \end{cases}$$

$$X_{1,2} \ge 0.$$

<u>Шаг 1.</u> Строим область D (Рис. 1.5). Она является неограниченной.

<u>Шаг 2.</u> Строим вектор - градиент $\overline{C} = (2,1)$.

<u>Шаг 3.</u> Строим линию уровня функции $f(\overline{x})$: $2X_1 + X_2 = \text{const}$.

<u>Шаг 4.</u> Передвигая линию уровня (на рисунке изображена пунктиром) в направлении вектора $\overline{C} = (2,1)$, убеждаемся в неограниченном возрастании функции $f(\overline{x})$, то есть $\max f(\overline{x}) = \infty$

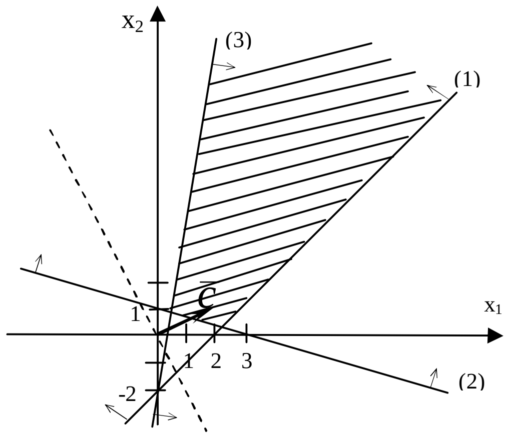


Рис.1.5. Решение задачи примера 2

Пример 3. Решить графическим методом ЗЛП. Найти

$$\max f(\overline{x}) = X_1 + 3X_2$$

при ограничениях

$$\begin{cases} 2X_1 + 3X_2 \le 6 & (1) \\ X_1 + 2X_2 \ge 5 & (2) \\ X_1 \ge 4 & (3) \\ 0 \le X_2 \le 3 & (4) \end{cases}$$

Из рис. 1.6 видно, что область допустимых решений пуста (D=$\varnothing$). Задача не имеет решения.

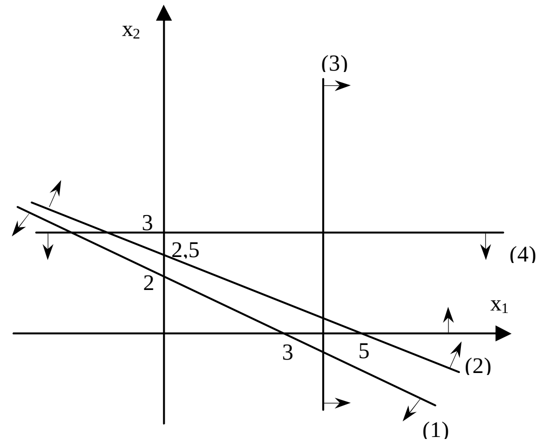


Рис.1.6. Решение задачи примера 3

Пример 4. Найти решение ЗЛП

$$\min f(\overline{x}) = X_1 + 2X_2$$

при ограничениях

$$\begin{cases} 2X_1 + X_2 \ge 4 & (1) \\ X_1 + 2X_2 \ge 5 & (2) \\ X_1 \ge 0,5 & (3) \\ 0 \le X_2 \le 5 & (4) \end{cases}$$

Линию уровня $X_1 + 2X_2$ =const (пунктирная линия) передвигаем в противоположном направлении: $-\overline{C}$ = (-1;-2). На рис. 1.7 видно, что она параллельна границе области D, образованной прямой (2). Значит целевая функция достигает своего экстремума в двух угловых точках A и B. Следовательно, решением задачи является весь отрезок прямой (2) от точки А(5;0) до точки В(1;2): $\overline{X}^* = (1-t)\cdot\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, где $0 \le t \le 1$.

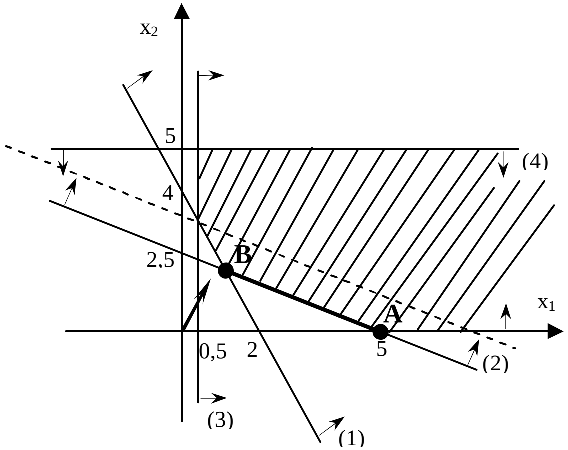


Рис.1.7. Решение задачи примера 4

1.3. Решение линейных моделей симплексным методом

Рассмотрим каноническую задачу линейного программирования (КЗЛП)

$$f(\overline{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_j, \quad i = 1,\dots,m \qquad (1.18)$$

$$x_i \ge 0,\ j = 1,\dots,n;\ b_i \ge 0;\ i = 1,\dots,m$$

Опорное решение ЗЛП

Будем в дальнейшем считать, что ранг матрицы А системы уравнений $A\cdot\overline{X} = \overline{B}$ равен m , причем m < n. То есть, система имеет множество решений, среди которых необходимо найти решение $\overline{X}^* = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, максимизирующее линейную функцию $f(\overline{x})$.

Применив к системе (1.18) метод Жордана – Гаусса, можно привести её к виду:

$$\begin{cases} x_1 + a_{1m+1}\cdot x_{m+1} + \dots + a_{1n}\cdot x_n = b_1 \\ x_2 + a_{2m+1}\cdot x_{m+1} + \dots + a_{2n}\cdot x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots \\ x_m + a_{mm+1}\cdot x_{m+1} + \dots + a_{mn}\cdot x_n = b_m \end{cases} \qquad (1.19)$$

где $x_1, x_2, \dots, x_m$ - базисные переменные, а $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$ - свободные переменные. Набор базисных переменных назовем *базисом*, а систему ограничений (1.19) назовем *системой, приведенной к единичному базису*. Выразим базисные переменные через свободные и получим общее решение системы ограничений (1.18).

$$\begin{cases} x_1 = b_1 - a_{1m+1}\cdot x_{m+1} - \dots - a_{1n}\cdot x_n \\ x_2 = b_2 - a_{2m+1}\cdot x_{m+1} - \dots - a_{2n}\cdot x_n \\ \dots\dots\dots \\ x_m = b_m - a_{mm+1}\cdot x_{m+1} - \dots - a_{mn}\cdot x_n \end{cases} \qquad (1.20)$$

Придавая свободным переменным $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$ произвольные числовые значения, будем получать из общего решения (1.20) различные частные решения.

Определение. Частное решение системы (1.19), полученное из общего при условии, что все свободные переменные равны 0, называется *базисным решением* данной системы.

В данном случае, если $x_{m+1} = x_{m+2} = \dots = x_n = 0$, базисные переменные примут значения $x_1 = b_1; x_2 = b_2; \dots; x_m = b_m$. Соответствующее базисное решение примет вид: $\overline{X} = (b_1, b_2, \dots, b_m, 0, 0, \dots, 0)$.

Так как базисными переменными могут быть разные группы m переменных (не обязательно $x_1, x_2, \dots, x_m$), то число базисов, а следовательно, и число соответствующих им базисных решений не превысит C_n^m (количество способов выбора m переменных из n возможных). Таким образом, число базисных решений конечно.

Определение. Базисное решение, в котором все базисные переменные принимают неотрицательные значения, называется *опорным решением* (или *опорным планом*) ЗЛП.

Определение. Если в опорном плане хоты бы одна базисная переменная равна 0, то такой план называется *вырожденным*. Если в опорном плане все базисные переменные строго положительны, то он называется *невырожденным*.

Определение. План $\overline{X}^* = (x_1, x_2, ..., x_n)$, при котором целевая функция ЗЛП $f(\overline{x})$ принимает свое максимальное значение, называется *оптимальным планом*.

Симплексный метод решения ЗЛП

Аналитический метод основывается на следующих утверждениях:

1. Область допустимых решений ЗЛП является выпуклым множеством с конечным числом угловых точек, т.е. многогранником или многоугольной областью.
2. Оптимальное решение ЗЛП достигается в одной из угловых точек области допустимых решений.
3. Угловые точки области допустимых решений алгебраически представляют собой опорные планы системы ограничений (1.18) ЗЛП.

Симплексные метод решения ЗЛП – это метод последовательного улучшения плана, который позволяет за конечное число шагов либо найти оптимальный план, либо установить его отсутствие.

Симплексный метод состоит из трех основных этапов:

1. Отыскание начального опорного плана.
2. Переход от одного опорного плана к другому, значение целевой функции в котором больше, чем в предыдущем.
3. Проверка оптимальности полученного плана, позволяющая своевременно остановить перебор опорных планов или сделать вывод об отсутствии оптимального плана.

Симплекс - метод основан на следующих теоремах, которые приводятся без доказательства.

Теорема 1.2 (о существовании опорного плана)

Если линейная форма $f(\overline{x})$ ограничена сверху на непустом множестве D, то ЗЛП разрешима, то есть существует такая точка $\overline{x}^* \in D$, что $f(\overline{x}^*) = \max\limits_{\overline{x} \in D} f(\overline{x})$.

Теорема 1.3 (признак оптимальности опорного плана)

Опорный план $\overline{X}^* = (x_1, x_2, ..., x_n)$ задачи (1.18) является оптимальным, если для всех j , $j = \overline{1,n}$ выполняется $\Delta_j \geq 0$, где величина

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} c_i \cdot a_{ij} - c_j \qquad (1.21)$$

называется *симплекс – разностью* или *оценкой.*

Теорема 1.4 (признак отсутствия оптимального плана)

Если $\Delta_k < 0$ при некотором k и среди чисел a_{ik}, $i = \overline{1,m}$ нет положительных, т.е. все $a_{ik} \leq 0,\ i = \overline{1,m}$, целевая функция задачи не ограничена на множестве допустимых решений и не имеет конечного решения.

Теорема 1.5 (признак существования лучшего опорного плана)

Если опорный план $\overline{X} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ задачи (1.18) не вырожден и $\Delta_k < 0$ для некоторых k, но среди чисел a_{ik}, $i = \overline{1,m}$ есть хоты бы одно положительное, т.е. не все $a_{ik} \leq 0,\ i = \overline{1,m}$, то существует опорный план $\overline{X}' = (x_1', x_2', ..., x_n')$, в котором целевая функция принимает значение не меньше, чем в предыдущем плане: $f(\overline{X}) \leq f(\overline{X}')$.

Алгоритм симплекс-метода

1. Задача должна быть приведена к каноническому виду. Система ограничений приведена к единичному базису, т.е. разрешена относительно некоторых базисных переменных (не умоляя общности, будем считать, что относительно первых m переменных) с помощью метода Жордана – Гаусса (система (1.19)). Получено соответствующее исходное опорное решение $\overline{X} = (b_1, b_2, ..., b_m, 0, 0, ..., 0)$.

2. Для удобства ведения вычислений записываем все в симплекс-таблицу (табл. 1.1). Столбец «Базис» содержит список базисных переменных; следующий столбец «c_j базиса» содержит коэффициенты целевой

функции при базисных переменных; следующие столбцы содержат коэффициенты системы ограничений при соответствующих переменных; столбец «b_i» - столбец свободных членов системы ограничений. Последняя строка содержит симплекс – разности, рассчитанные по формуле (1.21) и последняя ячейка содержит значение целевой функции $f(\overline{x}) = \sum_{i=1}^{m} b_i \cdot c_j^{баз}$. Отметим, что симплекс – разности базисных переменных всегда равны нулю.

Таблица 1.1

№	Базис	c_j базиса	c_1	c_2	…	c_m	c_{m+1}	…	c_n	b_i	$\frac{b_i}{a_{ip}}$
			x_1	x_2	...	x_m	x_{m+1}	…	x_n		
1	x_1	c_1	1	0		0	a_{1m+1}		a_{1n}	b_1	
2	x_2	c_2	0	1		0	a_{2m+1}		a_{2n}	b_2	
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
m	x_m	c_m	0	0		1	a_{mm+1}		a_{mn}	b_m	
	Δ_j		Δ_1	Δ_2	…	Δ_m	Δ_{m+1}	…	Δ_n	$f(\overline{x})$	

3. Если все симплекс – разности неотрицательны, т.е. $\Delta_j \geq 0$, то опорный план оптимален.

4. Если хотя бы одна симплекс – разность отрицательна, $\Delta_j < 0$, и в соответствующем столбце нет положительных элементов, то задача не имеет оптимального решения, т.е. $f_{\max} \to \infty$.

5. Если хотя бы одна симплекс – разность отрицательна, $\Delta_j < 0$, и в каждом столбце, имеющем отрицательную оценку, есть хотя бы один положительный элемент, то полученный опорный план можно улучшить.

6. Выбираем *разрешающий столбец* «p», которому соответствует наименьшая отрицательная оценка.

7. Выбираем *разрешающую строку* «к», которой соответствует наименьшее из отношений правых частей к соответствующим положительным элементам разрешающего столбца $\frac{b_i}{a_{ip}}$. Элемент, стоящий на пере-

сечении разрешающего столбца и разрешающей строки a_{kp} называется *разрешающим элементом*.

8. Переходим к новой симплекс – таблице, в которой будет новый базис: базисная переменная на «к» - ом месте в старом базисе меняется на новую переменную x_p. Соответствующий вектор новой базисной переменной нужно превратить в единичный. Для этого разрешающую строку делим на a_{kp}, чтобы на месте разрешающего элемента появилась единица. Умножая разрешающую строку на подходящие числа и складывая её с остальными строками получаем нули в разрешающем столбце. После этого выписываем новый опорный план и пересчитываем строчку оценок. Переходим к пункту 3.

Замечание об альтернативном плане.

Если все оценки свободных переменных в последней симплекс – таблице окажутся строго больше нуля, то оптимальный план единственен. В случае если хотя бы одна оценка при свободной переменной окажется равной нулю, то имеет место альтернативный оптимум (множество оптимальных планов). Чтобы найти альтернативное решение, необходимо сделать один шаг симплекс-метода, выбрав в качестве разрешающего столбец свободной переменной, которому соответствует нулевая оценка.

В этом случае множество все оптимальных планов можно представить в виде выпуклой линейной комбинации опорных оптимальных планов: $\overline{X}^* = \sum_{i=1}^{s} t_i \cdot \overline{X}^*_i$, где $\sum_{i=1}^{s} t_i = 1; t_i \geq 0$.

Пример 5. Решить ЗЛП симплекс-методом:

$$\max f(\overline{x}) = 3x_1 + 2x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ -x_1 + x_2 \leq 1 \\ \qquad x_2 \leq 2 \end{cases} \qquad (1.22)$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Приводим систему линейных неравенств (1.22) к каноническому виду, вводя в каждое неравенство дополнительную неотрицательную переменную. Получим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 8 \\ -x_1 + x_2 + x_5 = 1 \\ \qquad x_2 + x_6 = 2 \end{cases} \qquad (1.23)$$

$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,5}$

Целевая функция будет иметь вид

$\max f(\bar{x}) = 3x_1 + 2x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6$.

Составляем симплекс – таблицу:

Таблица 1.2

№	Базис	c_j базиса	$c_1=3$	$c_2=2$	$c_3=0$	$c_4=0$	$c_5=0$	$c_6=0$	b_i	$\frac{b_i}{a_{ip}}$
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
1	x_3	0	1	2	1	0	0	0	6	6/1
2	x_4	0	$\boxed{2}$	1	0	1	0	0	8	8/2
3	x_5	0	-1	1	0	0	1	0	1	
4	x_6	0	0	1	0	0	0	1	2	
	Δ_j		-3	-2	0	0	0	0	0	

Опорный план $\bar{X} = (0,0,6,8,1,2)$ не является оптимальным, т.к. в строке оценок есть отрицательные элементы Δ_1 = - 3 и Δ_2 = - 2. Выбираем разрешающий столбец – первый, т.к. ему соответствует минимальная из отрицательных оценок Δ_1 = - 3. Для всех положительных элементов первого столбца вычисляем отношение $\frac{b_i}{a_{ip}}$. Находим минимальное из этих отношений: $\min\limits_i \frac{b_i}{a_{ip}} = \min\{6/1;\ 8/2\} = 4$. Оно соответствует второй строке, следовательно, она будет разрешающей. Таким образом, разрешающий элемент $a_{21} = 2$ показывает, что из базиса выводится переменная x_4, а вместо неё в базисе будет переменная x_1. Заполняем новую симплекс – таблицу (табл. 1.3). Для этого превращаем первый столбец в единичный. Умножаем вторую строку на (-1/2) и складываем с первой, записываем результат в первую строку новой симплекс – таблицы; аналогично, умножаем вторую строку на (1/2) и складываем с третьей; разрешающую строку делим на 2; четвертую переписываем без изменений.

Таблица 1.3

№	Базис	c_j базиса	$c_1=3$	$c_2=2$	$c_3=0$	$c_4=0$	$c_5=0$	$c_6=0$	b_i	$\frac{b_i}{a_{ip}}$
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
1	x_3	0	0	$\boxed{3/2}$	1	-1/2	0	0	2	4/3
2	x_1	3	1	1/2	0	1/2	0	0	4	8
3	x_5	0	0	3/2	0	1/2	1	0	5	10/3
4	x_6	0	0	1	0	0	0	1	2	2/1
	Δ_j		0	-1/2	0	3/2	0	0	12	

Заполняем строку оценок: $\Delta_1 = \Delta_3 = \Delta_5 = \Delta_6 = 0$, как базисные;

$\Delta_2 = 0 \cdot 3/2 + 3 \cdot 1/2 + 0 \cdot 3/2 + 0 \cdot 1 - 2 = -1/2$;

$\Delta_4 = 0 \cdot (-1/2) + 3 \cdot 1/2 + 0 \cdot 1/2 + 0 \cdot 0 - 0 = 3/2$;

$f(\bar{x}) = 0 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 0 \cdot 5 + 0 \cdot 2 = 12$.

Получили новое опорное решение $\bar{X}_1 = (4,0,2,0,5,2)$, которое тоже не является оптимальным, т.к. есть отрицательная оценка Δ_2 = -1/2. Его можно улучшить, выбрав второй разрешающий столбец и первую разрешающую строку $\min\limits_i \frac{b_i}{a_{ip}} = \min\left\{2/\frac{3}{2};\ 4/\frac{1}{2};\ 5/\frac{3}{2};\ 2/1\right\} = 4/3$.

Таким образом, переменную x_3 в базисе заменяем на переменную x_2.

Переходим к заполнению следующей симплекс – таблицы:

Таблица 1.4

№	Базис	c_j базиса	$c_1=3$	$c_2=2$	$c_3=0$	$c_4=0$	$c_5=0$	$c_6=0$	b_i	$\frac{b_i}{a_{ip}}$
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
1	x_2	2	0	1	2/3	-1/3	0	0	4/3	
2	x_1	3	1	0	-1/3	2/3	0	0	10/3	
3	x_5	0	0	0	-1	1	1	0	3	
4	x_6	0	0	0	-2/3	1/3	0	1	2/3	
	Δ_j		0	0	1/3	4/3	0	0	38/3	

Поскольку в данной таблице нет отрицательных оценок, то полученное опорное решение $\overline{X}_2 = (10/3;\ 4/3;\ 0;\ 0;\ 3;\ 2/3)$ является оптимальным и единственным, т.к. все оценки свободных переменных строго больше нуля. Данному решению соответствует максимальное значение целевой функции $f(\overline{x})$=38/3.

Заметим, что в дальнейшем все этапы решения можно оформлять в одной симплекс - таблице, продолжая её вниз.

1.4. Метод искусственного базиса (метод больших штрафов)

Во многих задачах линейного программирования приведение системы ограничений к единичному базису для получения начального опорного плана сопряжено с большими вычислительными трудностями. В этом случае используют метод искусственного базиса.

Согласно методу для данной задачи составляется так называемая *расширенная задача*, которая решается симплексным методом. На основе решения расширенной задачи находят решение исходной или устанавливают его отсутствие.

Пусть имеется КЗЛП:

$$\max f(\overline{x}) = c_1 \cdot x_1 + \ldots + c_n \cdot x_n$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \ldots + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \ldots + a_{2n} \cdot x_n = b_2 \\ \ldots\ldots. \\ a_{m1}x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \ldots + a_{mn} \cdot x_n = b_m \end{cases} \qquad (1.24)$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n}$$

Будем считать, что правые части уравнений системы ограничений (1.24) неотрицательны, т.е. $b_i \ge 0, \quad i = \overline{1,m}$. Составляем расширенную задачу путем введения искусственных неотрицательных переменных $y_1, y_2, .., y_m$. Каждая искусственная переменная вводится в левую часть соответствующего уравнения системы ограничений с коэффициентом 1 и в целевую функцию в задаче на максимум с коэффициентом (-М), где М – сколь угодно большое положительное число.

$$\max f(\overline{x}) = c_1 \cdot x_1 + \ldots + c_n \cdot x_n - M(y_1 + y_2 + .. + y_m)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \ldots + a_{1n} \cdot x_n + y_1 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \ldots + a_{2n} \cdot x_n + y_2 = b_2 \\ \ldots\ldots. \\ a_{m1}x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \ldots + a_{mn} \cdot x_n + y_m = b_m \end{cases} \qquad (1.25)$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n}\ ;\ y_i \ge 0, \quad i = \overline{1,m};\ b_i \ge 0, \quad i = \overline{1,m}.$$

Базисом здесь будет являться система искусственных переменных. Данной системе соответствует начальный опорный план $\overline{X}_0 = (0,0,\ldots,0,b_1,b_2,\ldots,b_m)$. И решается она обычным симплекс – методом.

Между оптимальным решением исходной задачи и соответствующей ей расширенной существует связь.

Теорема 1.6

Если в оптимальном плане $\overline{X}^* = (x_1^*,\ldots,x_n^*, y_1^*,\ldots,y_m^*)$ расширенной задачи (1.25) значения искусственных переменных равны нулю, $y_i = 0, \quad i = \overline{1,m}$, то $\overline{X}^* = (x_1^*,\ldots,x_n^*)$ является оптимальным планом задачи (1.24), причем значения целевых функций задач одинаковы.

Теорема 1.7

Если в оптимальном плане $\overline{X}^* = (x_1^*,\ldots,x_n^*, y_1^*,\ldots,y_m^*)$ расширенной задачи (1.25) хотя бы одна искусственная переменных не равна нулю, то исходная задача не имеет оптимального решения в виду несовместимости системы ограничений.

Теорема 1.8 Если расширенная задача (1.25) не имеет решения в виду неограниченности целевой функции, то исходная задача не имеет оптимального решения в силу несовместимости системы ограничений или неограниченности целевой функции.

Особенности метода искусственного базиса:

1. Искусственные переменные следует вводить только в те уравнения системы ограничений, которые не разрешены относительно «естественных» базисных переменных.

2. При решении расширенной задачи оценки свободных переменных x_j содержат два слагаемых $\Delta_j = \Delta'_j + \Delta''_j \cdot M$, которые размещают в двух строках: в m+1 – ой строке слагаемое Δ'_j, не содержащее М и в m+2 – ой строке коэффициенты Δ''_j при М. Т.к. М - сколь угодно большое положительное число, то на первом этапе для выбора разрешающего столбца принимают в расчет только Δ''_j.

3. Соответствующие искусственным переменным векторы - столбцы, выводимые из базиса опорного решения, в дальнейшем исключаются из рассмотрения.

4. После того, как все искусственные переменные выводятся из базиса, расчет продолжается обычным симплекс методом с использованием оценок Δ'_j.

Пример 6. На животноводческой ферме для откорма животных в их суточный рацион включают два продукта питания $П_1$ и $П_2$, причем продукта $П_1$ должно войти в дневной рацион не более 200 ед. Стоимость 1 ед. продукта $П_1$ составляет 2 руб., продукта $П_2$ – 4 рубля. Содержание питательных веществ в 1 ед. продукта и минимальные нормы потребления приведены в таблице 1.5.

Таблица 1.5

		Содержание питательных веществ в 1 ед. продукта	
Питательные вещества	Минимальная норма потребления	$П_1$	$П_2$
А	120	0,2	0,2
В	160	0,4	0,2

Необходимо определить оптимальный рацион питания животных, стоимость которого будет наименьшей.

Решение: Построение математической модели задачи начинается с обозначения переменных: X_1 – количество продукта $П_1$ в суточном рационе; X_2 - количество продукта $П_2$ в суточном рационе (ед.).

Целевая функция должна представлять собой общие расходы на оба продукта в сутки: f = $2X_1 + 4X_2$ рублей.

Ограничения накладываются на содержание питательных веществ:

$0{,}2X_1+0{,}2X_2 \geq 120$; (по веществу А)

$0{,}4X_1+0{,}2X_2 \geq 160$. (по веществу В)

Ограничение на величину продукта $П_1$ в рационе: $X_1 \leq 200$.

Вводятся так же условия неотрицательности переменных, т. к. количества продуктов в рационе не могут быть отрицательными: $X_{1,2} \geq 0$.

В итоге, получаем следующую математическую модель задачи:

$$\min f(\bar{x}) = 2X_1 + 4X_2$$

при ограничениях

$$\begin{cases} 0{,}2X_1 + 0{,}2X_2 \geq 120 \\ 0{,}4X_1 + 0{,}2X_2 \geq 160 \\ X_1 \leq 200 \end{cases}$$

$X_1 \geq 0$, $X_2 \geq 0$.

Умножим первых два неравенства на 5, что бы не было дробных чисел и приведем задачу к каноническому виду.

$$\max F(\bar{x}) = -2X_1 - 4X_2 + 0X_3 + 0X_4 + 0X_5$$

при ограничениях

$$\begin{cases} X_1 + X_2 - X_3 = 600 \\ 2X_1 + X_2 - X_4 = 800 \\ X_1 + X_5 = 200 \end{cases}$$

$X_j \geq 0$, j=1,..,5.

Поскольку в системе нет трех базисных векторов, есть только один при X_5, то необходимо ввести две искусственные переменные в первое и второе уравнение системы. Расширенная задача примет вид:

$$\max F(\bar{x}) = -2X_1 - 4X_2 + 0X_3 + 0X_4 + 0X_5 - MY_1 - MY_2$$

при ограничениях

$$\begin{cases} X_1 + X_2 - X_3 + Y_1 = 600 \\ 2X_1 + X_2 - X_4 + Y_2 = 800 \\ X_1 + X_5 = 200 \end{cases}$$

$X_j \geq 0$, j=1,..,5; $Y_1, Y_2 \geq 0$.

Составляем для неё симплекс-таблицу:

Таблица 1.6

№	Базис	c_j базиса	– 2	– 4	0	0	0	–M	–M	b_i	$\frac{b_i}{a_{ip}}$
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2		
1	y_1	–M	1	1	-1	0	0	1	0	600	600
2	y_2	–M	2	1	0	-1	0	0	1	800	400
3	x_5	0	$\boxed{1}$	0	0	0	1	0	0	200	200
	Δ'_j		2	4	0	0	0	0	0	0	
	Δ''_j		-3	-2	1	1	0	0	0	-1400	

Разрешающий столбец – первый, выбрали его по последней строке, ему соответствует меньшая из отрицательных оценок. Для всех положительных элементов первого столбца вычисляем отношение $\frac{b_i}{a_{ip}}$. Находим минимальное из этих отношений: $\min\limits_i \frac{b_i}{a_{ip}} = \min\{600;400;200\} = 200$. Оно соответствует третьей строке, следовательно, она будет разрешающей. Таким образом, разрешающий элемент $a_{31} = 1$ показывает, что из базиса выводится переменная x_5, а вместо неё в базисе будет переменная x_1. Заполняем новую симплекс – таблицу (табл. 1.7). Для этого превращаем первый столбец в единичный. Умножаем третью строку на (-2) и складываем со второй, записываем результат в первую строку новой симплекс – таблицы; аналогично, умножаем третью строку на (-1) и складываем с первой; третью переписываем без изменений.

Таблица 1.7

№	Базис	c_j базиса	–2	–4	0	0	0	–M	–M	b_i	$\frac{b_i}{a_{ip}}$
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2		
1	y_1	–M	0	$\boxed{1}$	-1	0	-1	1	0	400	400
2	y_2	–M	0	1	0	-1	-2	0	1	400	400
3	x_1	–2	1	0	0	0	1	0	0	200	
	Δ'_j		0	4	0	0	–2	0	0	–400	
	Δ''_j		0	–2	1	1	3	0	0	–800	

Далее разрешающим столбцом будет второй. Разрешающей строкой может быть любая: первая или вторая, для них отношение $\frac{b_i}{a_{ip}}$ одинаково. Выбираем первую. Новая симплекс – таблица:

Таблица 1.8

№	Базис	c_j базиса	–2	–4	0	0	0	–M	–M	b_i	$\frac{b_i}{a_{ip}}$
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2		
1	x_2	–4	0	1	-1	0	-1	1	0	400	
2	y_2	–M	0	0	$\boxed{1}$	-1	-1	-1	1	0	
3	x_1	–2	1	0	0	0	1	0	0	200	
	Δ'_j		0	0	4	0	2	-4	0	–2000	
	Δ''_j		0	0	-1	1	1	2	0	0	

На следующей итерации из базиса выводится последняя искусственная переменная y_2, она заменяется на x_3.

Таблица 1.9

№	Базис	c_j базиса	–2	–4	0	0	0	–M	–M	b_i	$\frac{b_i}{a_{ip}}$
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2		
1	x_2	–4	0	1	0	-1	-2	0	1	400	
2	x_3	0	0	0	$\boxed{1}$	-1	-1	-1	1	0	
3	x_1	–2	1	0	0	0	1	0	0	200	
	Δ'_j		0	0	0	4	6	0	-4	–2000	
	Δ''_j		0	0	0	0	0	1	1	0	

Поскольку все оценки положительны, то найден оптимальный план расширенной задачи $\overline{X}^* = (200;400;0;0;0;0;0)$ и $F_{\max} = F(\overline{X}^*) = -2000$. Отметим, что значения искусственных переменных в нем равны нулю. Следовательно, найден оптимальный план исходной задачи $\overline{X}^* = (200;400)$ и $f_{\min} = f(\overline{X}^*) = 2000$.

Ответ: животноводческой ферме следует в суточный рацион животных включать 200 ед. продукта П$_1$ и 400 ед. продукта П$_2$. При этом будет обеспечено необходимое содержание веществ и наименьший расход средств 2000 рублей.

1.5. Решение ЗЛП с помощью MS EXCEL

Для решения задач оптимизации в MS Excel используют надстройку Поиск решения, которая вызывается из пункта главного меню «Сервис» (рис. 1.8).

Если в версии Excel, установленной на Вашем компьютере, отсутствует данный подпункт меню «Сервис», необходимо вызвать пункт меню «Надстройки» и в предложенном списке дополнительных модулей выбрать «Поиск решения» (рис. 1.9).

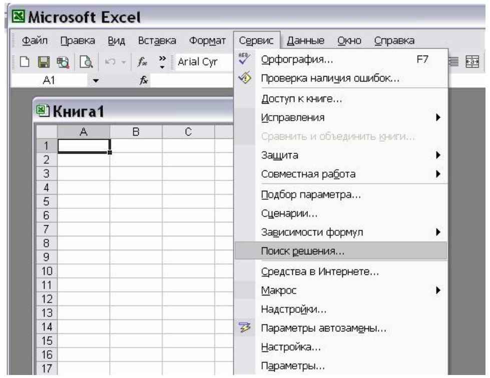


Рис. 1.8.

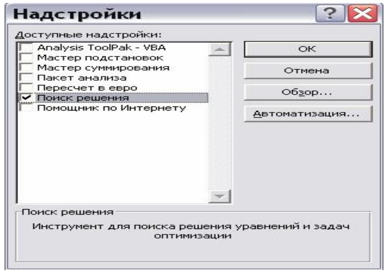


Рис. 1.9.

Рассмотрим использование данной надстройки на примере. Решим с её помощью задачу, математическая модель которой строилась в примере 1. Математическая модель задачи имеет вид:

$$\max f(\bar{x}) = 3X_1 + 2X_2$$

при ограничениях

$$\begin{cases} X_1 + 2X_2 \le 6 & \text{(а)} \\ 2X_1 + X_2 \le 8 & \text{(б)} \\ X_1 + 0{,}8X_2 \le 5 & \text{(в)} \\ -X_1 + X_2 \le 1 & \text{(г)} \\ X_2 \le 2 & \text{(д)} \\ X_1 \ge 0,\ X_2 \ge 0 & \text{(е)} \end{cases}$$

Составим шаблон в редакторе Excel, как показано на рис. 1.10

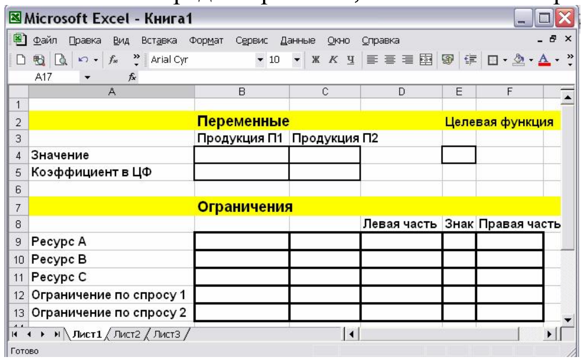


Рис.1.10. Шаблон оформления задачи.

Теперь занесём данную в задаче числовую информацию (рис.1.11).

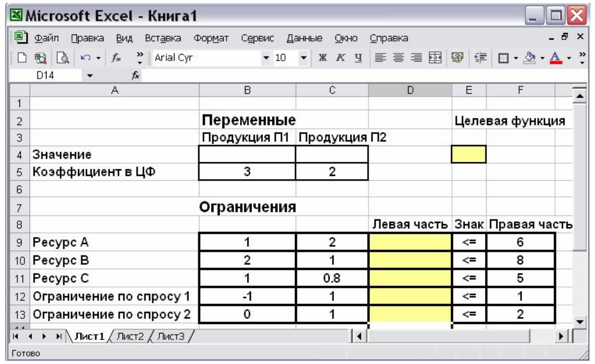


Рис.1.11. Исходные данные задачи

В выделенные пустые ячейки (значения целевой функции и левых частей неравенств) необходимо занести формулы, отображающие связи и отношения между числами на рабочем листе.

Ячейки B4 – C4 называются в Excel изменяемыми (в нашей модели это неизвестные переменные), т.е., изменяя их Поиск решения будет находить оптимальное значение целевой функции. Значения, которые первоначально вводят в эти ячейки, обычно нули (незаполненные клетки трактуются по умолчанию как содержащие нулевые значения).

Теперь необходимо ввести формулы. В нашей математической модели, целевая функция представляет собой произведение вектора коэффициентов на вектор неизвестных. Действительно, выражение $3X_1 + 2X_2$ можно рассматривать как произведение вектора (3,2) на вектор (X_1,X_2).

В Excel существует функция СУММПРОИЗВ, которая позволяет найти скалярное произведение векторов. В ячейку E4 необходимо вызвать данную функцию, а в качестве перемножаемых векторов задать адреса ячеек, содержащих коэффициенты уравнений (в данном случае, это B5:C5) и ячеек, в которые в результате решения будут помещены значения X_1 и X_2 (ячейки B4:C4) (рис. 1.12).

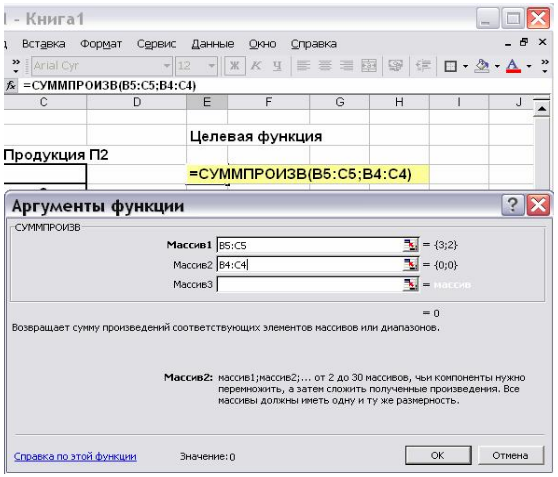


Рис.1.12. Вызов функции СУММПРОИЗВ.

Каждая левая часть ограничения тоже представляет собой произведение двух векторов: соответствующей строки матрицы затрат и вектора неизвестных. То есть, выражение X_1+2X_2 (для первого ограничения $X_1 + 2X_2 \leq 6$) будем рассматривать как произведение вектора коэффициентов (1,2) и вектора переменных (X_1,X_2).

В ячейке, отведенной для формулы левой части первого ограничения (D9), вызовем функцию СУММПРОИЗВ. В качестве адресов перемножаемых векторов занесем адрес строки коэффициентов B9:C9 и адрес значений переменных B4:C4 (рис. 1.13).

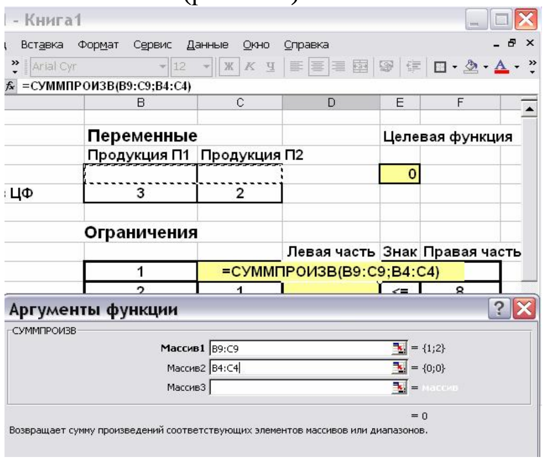


Рис.1.13.

В четыре оставшиеся ячейки графы «Левая часть» вводим аналогичные формулы, используя соответствующую строку матрицы затрат. Фрагмент экрана с введёнными формулами показан на рис.1.14.

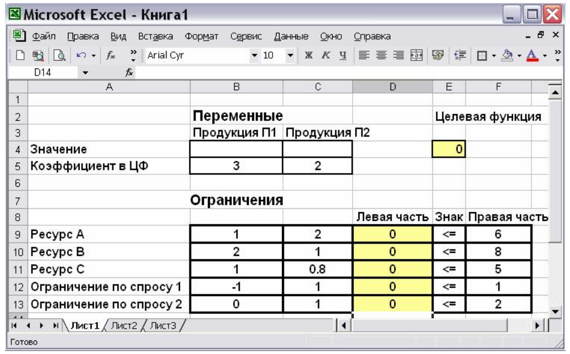


Рис.1.14.

Важно! К моменту вызова сервиса «Поиск решения» на рабочем листе с задачей должны быть занесены формулы для левых частей ограничений и формула для значения целевой функции.

В меню Сервис выбираем Поиск решения. В появившемся окне задаём следующую информацию:

а) в качестве целевой ячейки устанавливаем адрес ячейки для значения целевой функции E4;

б) «флажок» устанавливаем на вариант «максимальному значению», т.к. в данном случае, целевая функция дохода подлежит максимизации;

в) в качестве изменяемых ячеек заносится адрес строки значений переменных B4:C4;

г) справа от окна, предназначенного для занесения ограничений, нажимаем кнопку «Добавить», появится форма для занесения ограничения (рис. 1.15)

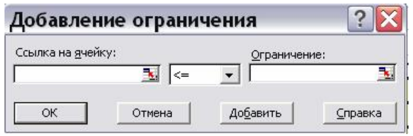


Рис.1.15. Форма для занесения одного ограничения ЗЛП

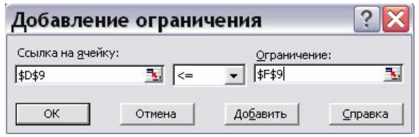


Рис.1.16. Занесение первого ограничения задачи

д) в левой части формы «Ссылка на ячейку» заносится адрес формулы для левой части первого ограничения D9, выбирается требуемый знак неравенства (в нашем случае, <=), в поле «Ограничение» заносится ссылка на правую часть ограничения F9 (рис. 1.16).

е) аналогично заносятся все ограничения задачи, после чего нажимается кнопка «ОК».

Таким образом, окно «Поиск решения» с занесенной информацией выглядит следующим образом (рис.1.17):

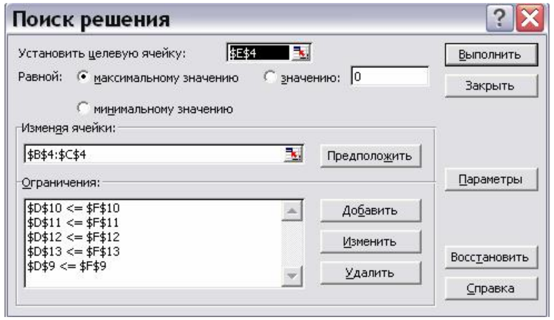


Рис.1.17.

Далее необходимо нажать кнопку Параметры, установить «флажки» «Линейная модель» и «Неотрицательные значения», поскольку в данном случае задача является ЗЛП, а ограничение 6) требует неотрицательности значений (рис.1.18).

Рис.1.18. Установка параметров

Затем следует нажать «ОК», «Выполнить», после чего появляется окно результата решения (рис.1.19).

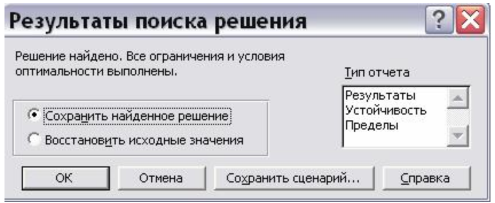


Рис.1.19. Окно результата решения

Если в результате всех действий получено окно с сообщением «Решение найдено», то Вам предоставляется возможность получения трех типов отчета, которые полезны при анализе модели на чувствительность. В данном примере достаточно сохранить найденное решение, нажав «ОК». В результате получено решение задачи из примера 1. (рис.1.20).

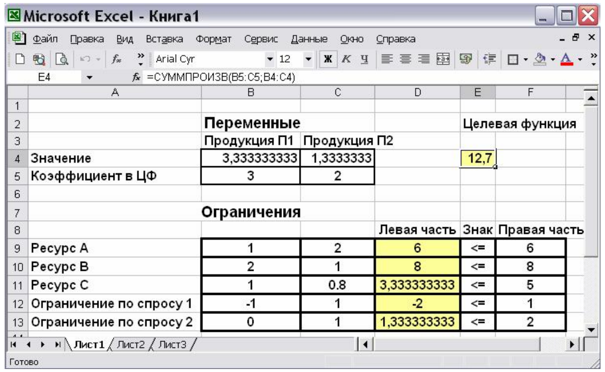


Рис.1.20. Результат применения «Поиска решения»

Если в результате решения задачи выдано окно с сообщением о невозможности нахождения решения (рис.1.21), это означает, что при оформлении задачи была допущена ошибка (не заполнены формулы для ограничений, неправильно установлен «флажок» максимизации/минимизации и т.д.).

Рис.1.21. Сообщение об ошибке

В данном разделе рассмотрен общий формат решения задач оптимизации в Excel. В зависимости от экономических моделей, выполняют его соответствующие модификации.

1.6. Транспортная задача линейного программирования

Постановка задачи.

Некоторый однородный продукт, сосредоточенный у m поставщиков A_i в количестве a_i единиц (i = 1, ..., m) соответственно, необходимо доставить n потребителям B_j в количестве b_j единиц (j = 1,..., n). Известна стоимость c_{ij} перевозки единицы груза от i-го поставщика к j-му потребителю.

Необходимо составить самый дешевый план перевозок, позволяющий вывести все грузы у поставщиков и полностью удовлетворить потребителей.

Обозначим через x_{ij} количество единиц груза, запланированных к перевозке от i-го поставщика к j-му потребителю. Так как от i-го поставщика к j-му потребителю запланировано к перевозке x_{ij} единиц груза, то стоимость перевозки составит $c_{ij}x_{ij}$.

Стоимость всех перевозок выразится двойной суммой

$$Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

Систему ограничений получаем из следующих условий задачи:

а) все грузы должны быть перевезены, т.е.

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad , \quad i = 1..m$$

б) все потребности должны быть удовлетворены, т.е.

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad , \quad j = 1..n$$

Таким образом, математическая модель транспортной задачи имеет следующий вид: найти минимальное значение линейной функции

$$Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij} \tag{1.26}$$

при ограничениях:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = 1,..,m \tag{1.27}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = 1,..,n \tag{1.28}$$

$$x_{ij} \geq 0,\ i = 1,\ldots,m;\ j = 1,\ldots,n; \tag{1.29}$$

В рассмотренной модели предполагается, что суммарные запасы поставщиков равны суммарным потребностям потребителей, т.е.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \tag{1.30}$$

Транспортная задача, в которой суммарные запасы и потребности совпадают, т.е. выполняется условие (1.30), называется *закрытой моделью*; в противном случае – *открытой*. Для открытой модели может быть два случая:

а) Суммарные запасы превышают суммарные потребности

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$$

б) Суммарные потребности превышают суммарные запасы

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Открытая модель решается приведением к закрытой модели.

В случае (а), когда суммарные запасы превышают суммарные потребности, вводится фиктивный потребитель B_{n+1}, потребность которого

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$$

В случае (б), когда суммарные потребности превышают суммарные запасы, вводится фиктивный поставщик A_{m+1}, запасы которого

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$$

Как стоимость перевозки единицы груза до фиктивного потребителя, так и стоимость перевозки груза от фиктивного поставщика полагаются равными нулю, так как груз в обоих случаях не перевозится.

Транспортная задача имеет n + m уравнений с mn неизвестными.

Матрицу $X = (x_{ij})_{m,n}$, удовлетворяющую условиям (1.26)-(1.29), называют *планом перевозок* транспортной задачи (x_{ij} – перевозками).

Определение. План X*, при котором целевая функция (1.26) обращается в минимум, называется <u>оптимальным</u>.

Теорема 1.9 Для разрешимости транспортной задачи необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие баланса

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

План транспортной задачи называется *опорным*, если положительным перевозкам соответствует система линейно независимых векторов $\overline{P_{ij}}$ (i = 1. . m, j = 1. . n), где $\overline{P_{ij}}$ – векторы при переменных x_{ij} (i = 1. . m, j = 1. . n) в матрице системы ограничений (1.27)-(1.28).

Теорема 1.10 Существует план, содержащий не более m + n – 1 положительных перевозок, при этом система векторов $\overline{P_{ij}}$, соответствующая таким перевозкам ($x_{ij} > 0$), линейно-независима.

Таким образом, опорный план транспортной задачи содержит m + n – 1 положительных перевозок. Дадим другое определение опорного плана.

Определение. План транспортной задачи называется *опорным*, если из его основных коммуникаций невозможно составить замкнутый маршрут.

Методы составления первоначальных опорных планов

Метод северо-западного угла используют для нахождения произвольного опорного плана транспортной задачи.

Схема метода:

1) Полагают верхний левый элемент матрицы X

$$x_{11} = \min(a_1, b_1).$$

Возможны три случая:

а) если $a_1 < b_1$, то $x_{11} = a_1$ и всю первую строку, начиная со второго элемента, заполняют нулями.

б) если $a_1 > b_1$, то $x_{11} = b_1$, а все оставшиеся элементы первого столбца заполняют нулями.

в) если $a_1 = b_1$, то $x_{11} = a_1 = b_1$, и все оставшиеся элементы первых столбца и строки заполняют нулями.

На этом один шаг метода заканчивается.

2) Пусть проделано k шагов, (k_μ)-й шаг состоит в следующем.

Определяют верхний левый элемент незаполненной части матрицы X. Пусть это элемент $x_{\lambda\mu}(\lambda + \mu = k + \lambda)$.

Тогда полагают $x_{\lambda\mu} = \min(a_\lambda^{(k)}, b_\mu^{(k)})$, где

$$a_\lambda^{(k)} = a_\lambda - \sum_{j=1}^{\mu-1} x_{\lambda j} \text{ и } b_\mu^{(k)} = b_\mu - \sum_{i=1}^{\lambda-1} x_{i\mu}$$

Если $a_\lambda^{(k)} < b_\mu^{(k)}$, то заполняют нулями λ-ю строку начиная с $(\mu+1)$-го элемента.

В противном случае заполняют нулями оставшуюся часть μ-го столбца.

Метод минимального элемента позволяет построить начальный опорный план транспортной задачи и является вариантом метода северо-западного угла, учитывающим специфику матрицы $C = (c_{ij})_{mxn}$. В отличие от метода северо-западного угла данный метод позволяет сразу получить достаточно экономичный план и сокращает общее количество итераций по его оптимизации.

Схема метода: элементы матрицы C нумеруют, начиная от минимального в порядке возрастания, а затем в этом же порядке заполняют матрицу X^0.

Пусть элементом с минимальным порядковым номером оказался элемент x_{ij}^0.

Тогда полагают $x_{ij}^0 = \min(a_i, b_j)$

Возможны три случая:

а) если $\min(a_i, b_j) = a_i$, то оставшуюся часть i-й строки заполняют нулями;

б) если $\min(a_i, b_j) = b_j$, то оставшуюся часть j-го столбца заполняют нулями.

в) если $a_i = b_j$, то оставшуюся часть строки и столбца заполняют нулями.

Далее этот процесс повторяют с незаполненной частью матрицы.

Пусть элементом с k-м порядковым номером оказался $x_{\lambda\mu}^{(k)}$.

Тогда $x_{\lambda\mu}^{(k)} = \min(a_\lambda^{(k)},\ b_\mu^{(k)})$, где

$$a_{\lambda}^{(k)} = a_{\lambda} - \sum_{j=1}^{\mu-1} x_{\lambda j}^{(g)} \quad g = 1..k-1$$

$$b_{\mu}^{(k)} = b_{\mu} - \sum_{i=1}^{\lambda-1} x_{i\mu}^{(u)} \quad u = 1..k-1$$

Возможны три случая:

а) $a_{\lambda}^{(k)} < b_{\mu}^{(k)}$, тогда и $x_{\lambda\mu}^{(k)} = a_{\lambda}^{(k)}$ оставшуюся часть строки λ заполняют нулями;

б) $a_{\lambda}^{(k)} > b_{\mu}^{(k)}$, тогда $x_{\lambda\mu}^{(k)} = b_{\mu}^{(k)}$ и остаток столбца μ заполняют нулями;

в) $a_{\lambda}^{(k)} = b_{\mu}^{(k)}$, тогда оставшуюся часть строки λ и столбца μ заполняют нулями.

В дальнейшем, что бы не загромождать таблицу, нули не пишем, оставляя пустыми клетки, которым соответствует $x_{ij} = 0$.

Проверка опорного плана на оптимальность. Метод потенциалов.

Для транспортной задачи (ТЗ), как и для любой ЗЛП, существует двойственная к ней задача.

Исходная задача

$$Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij} \tag{1.26}$$

при ограничениях:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = 1,..,m \tag{1.27}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = 1,..,n \tag{1.28}$$

$$x_{ij} \geq 0,\ i = 1,\ldots,m;\ j = 1,\ldots,n; \tag{1.29}$$

Обозначим двойственные переменные для каждого ограничения вида (1.27) через U_i (i = 1,...,m) и вида (1.28) – V_j (j = 1,...,n), тогда двойственная задача имеет вид

$$\max\left[\sum_{i=1}^{m} a_i U_i + \sum_{j=1}^{n} b_j V_j\right] \tag{1.31}$$

$$U_i + V_j \leq C_{ij},\ i = \overline{1,m},\quad j = \overline{1,n} \tag{1.32}$$

Переменные двойственной к транспортной задаче U_i и V_j называют *потенциалами.*

Теорема 1.11 Для оптимальности плана $X = (X_{ij})_{mxn}$ ТЗ необходимо и достаточно существования чисел (потенциалов) $V_1, V_2,..., V_n$ и $U_1, U_2,..., U_m$ таких, что

$U_i + V_j \leq C_j$ для i = 1,...,m, j = 1,...,n,

$U_i + V_j = C_j$, если $X_{ij}>0$.

Из теоремы следует: для того чтобы опорный план был оптимальным, необходимо выполнение следующих условий:

а) для каждой занятой клетки (отличного от нуля элемента матрицы X) сумма потенциалов должна быть равна стоимости перевозки единицы груза

$$U_i + V_j = C_j \tag{1.33}$$

б) для каждой незанятой клетки ($X_{ij} = 0$) сумма потенциалов должна быть меньше или равна стоимости перевозки единицы груза

$$U_i + V_j \leq C_{ij} \tag{1.34}$$

Таким образом, для проверки плана на оптимальность необходимо сначала построить систему потенциалов. Для построения системы потенциалов используем условие

$$U_i + V_j = C_j,\ X_{ij}>0.$$

Систему потенциалов можно построить только для *невырожденного опорного плана*. Такой план содержит m + n – 1 занятых клеток, поэтому для него можно составить систему из m + n – 1 линейно-независимых уравнений вида (1.33) с неизвестными U_i и V_j. Уравнений на одно меньше, чем переменных, поэтому система является неопределенной и одному неизвестному (обычно U_i) придают нулевое значение. После этого остальные потенциалы определяются однозначно.

Затем для каждой незанятой клетки проверяем выполнения условия (1.34), т.е. суммируем потенциалы тех строк и столбцов, на пересечении которых стоит незанятая клетка. Если для всех незанятых клеток $U_i + V_j \leq C_{ij}$, т.е. $\Delta_{ij} = U_i + V_j - C_{ij} \leq 0$, то по теореме 1.11 проверяемый план является оптимальным. Если для некоторых клеток $\Delta_{ij} = U_i + V_j - C_{ij} > 0$, то план не является оптимальным. Оценки всех клеток удобно записывать в отдельную оценочную матрицу.

Необходимо отметить, что в экономическом смысле оценка Δ_{ij} представляет собой величину, на которую уменьшится значение целевой функции, если в соответствующей клетке разместить одну единицу груза.

Переход к новому плану перевозок

Если план перевозок оказался не оптимальным, можно найти другой, более дешевый план перевозок. Для этого необходимо определить какая из свободных клеток подлежит загрузке. Загрузке подлежит в первую очередь клетка, которой соответствует максимальная из положительных оценок

$$\max((U_i + V_j) - C_{ij}).$$

Далее необходимо перераспределить груз. Это происходит по замкнутому циклу. Цикл представляет собой ломаную линию, вершинами которой могут быть только занятые клетки, а его начало в клетке, подлежащей загрузке. Соседние звенья ломаной должны образовывать прямой угол, т.е. если одно из звеньев располагалось вдоль горизонтального ряда, то следующее звено должно быть вдоль вертикального ряда. Такой цикл находится однозначно. Циклы могут выглядеть по-разному (рис. 1.22).

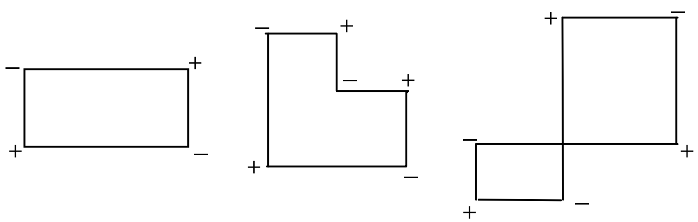


Рис.1.22. Примеры циклов

Для определения количества единиц груза, подлежащих перераспределению, отмечаем знаком «+», незанятую клетку, которую надо загрузить. Следующие клетки цикла поочередно отмечаем знаками «-» и «+». Затем находим r = min X_{ij}, где X_{ij} – перевозки, стоящие в вершинах цикла, отмеченной знаком «–». Эта величина определяет, сколько единиц груза можно перераспределить по найденному циклу. Записываем значение r в незанятую клетку, отмеченную знаком «+». Двигаясь по циклу, вычитаем r из объемов перевозок, расположенных в клетках, которые

отмечены знаком «–», и прибавляем к объемам перевозок, находящихся в клетках, отмеченных знаком «+». Если r соответствует несколько минимальных перевозок, то при вычитании оставляем в соответствующих клетках нулевые перевозки в таком количестве, чтобы во вновь полученном опорном плане занятых клеток было m + n – 1.

Далее проверяем новый план перевозок на оптимальность. Для этого нужно вновь построить систему потенциалов и проверить выполнение условия оптимальности для каждой незанятой клетки. Если полученный план снова окажется неоптимальным, то следует выполнить переход к следующему опорному плану. Процесс повторяют до тех пор, пока все незанятые клетки не будут удовлетворять условию (1.34).

Пример 7. Решить транспортную задачу. В таблице 1.5 приведены стоимости перевозок ед. груза, запасы трех поставщиков и потребности четырех потребителей.

Таблица 1.5

	B_1	B_2	B_3	B_4	запасы
A_1	5	4	6	3	200
A_2	1	10	2	1	300
A_3	2	3	3	1	100
потребности	150	150	250	50	600

Решение. Условие баланса выполнено: 200+300+100 = 150+150+250+50. Следовательно, имеем ТЗ закрытого типа.

Шаг 1. Находим исходный опорный план X° методом «минимального элемента ». В правых верхних углах клеток находятся тарифы на перевозки c_{ij}, а по центру объемы перевозок x_{ij}.

Таблица 1.6

	B_1	B_2	B_3	B_4	запасы
A_1	5	4 **150**	6 **50**	3	~~200~~ ~~50~~ 0
A_2	1 **150**	10	2 **150**	1	~~300~~ ~~150~~ 0
A_3	2	3	3 **50**	1 **50**	~~100~~ ~~50~~ 0
потребности	~~150~~ 0	~~150~~ 0	~~250~~ ~~100~~ ~~50~~ 0	~~50~~ 0	600

Сначала заполняются клетки с минимальным тарифом 1: в клетку (A_2, B_1) можно поместить min(300, 150) = 150, при этом выбывают из рассмотрения остальные клетки первого столбца, т.к. потребности первого потребителя удовлетворены полностью, а запасы второго поставщика корректируем, у него осталось 300 – 150 = 150 ед. груза.

Дале заполняем клетку (A_3,B_4) (порядок заполнения клеток с одинаковыми тарифами не существенен), туда поместим min(50, 100) = 50 ед. груза, при этом выбывают из рассмотрения остальные клетки четвертого столбца, т.к. потребности четвертого потребителя удовлетворены полностью, а запасы третьего поставщика корректируем, у него осталось 100 – 50 = 50 ед. груза.

Из оставшихся клеток минимальный тариф 2 в клетке (A_2,B_3), её можно загрузить min(150, 250) = 150 ед. груза, при этом выбывают из рассмотрения остальные клетки второй строчки, т.к. запасы второго поставщика исчерпаны, а потребности третьего потребителя корректируем, ему необходимо 250 – 150 = 100 ед. груза.

Из оставшихся клеток минимальный тариф 3 в клетках (A_3,B_2) и (A_3,B_3), загрузим клетку (A_3,B_3) min(50, 100) = 50 ед. груза, при этом выбывают из рассмотрения остальные клетки третьей строчки, т.к. запасы третьего поставщика исчерпаны, а потребности третьего потребителя корректируем, ему осталось поставить 100 – 50 = 50 ед. груза.

Из оставшихся клеток минимальный тариф 4 в клетке (A_1,B_2), её можно загрузить min(200, 150) = 150 ед. груза, при этом потребности второго потребителя удовлетворяются полностью, а запасы первого поставщика корректируем 200 – 150 = 50 ед. груза.

И оставшиеся 50 единиц груза проставляем в последнюю клетку (A_1,B_3). Получили опорный план перевозок.

Число занятых клеток равно 6 и совпадает с числом m + n – 1 = 3 + 4 – 1 = 6, значит, полученный план не вырожден.

Шаг 2. Для проверки полученного опорного плана на оптимальность находим систему потенциалов для занятых клеток ($x_{ij}>0$).

Для этого, например, полагаем $V_3 = 0$ (записываем $V_3 = 0$ в дополнительной строке табл. 1.7).

Таблица 1.7

		B_1	B_2	B_3	B_4	запасы
		V_1 = -1	V_2 = - 2	V_3 = 0	V_4 = -2	
A_1	U_1 = 6	5	4 **150**	– 6 **50**	+ 3	200
A_2	U_2 = 2	1 **150**	10	2 **150**	1	300
A_3	U_3 = 3	2	3	+ 3 **50**	– 1 **50**	100
потребности		150	150	250	50	

Далее, исходя из занятых клеток (1,3), (2,3) и (3,3) находим U_1 = 6 – 0 = 6, U_2 = 2 – 0 = 2, U_3 = 3 – 0 =3 (записываем слева в таблице). На ос-

нове базисной клетки (2,1) получаем V_1 = 1 – 2 = –1, затем по клетке (1,2) найдем V_2 = 4 – 6 = - 2; и по клетке (3,4) найдем V_4 = 1 – 3= –2.

Далее вычисляем оценку $\Delta_{ij} = U_i + V_j - C_{ij}$ для каждой из свободных клеток и записываем их в отдельную матрицу оценок Δ (оценки базисных клеток равны 0).

Δ_{11} =6 + (– 1) – 5 = 0; Δ_{14} = 6 + (–2) – 3 = 1;

Δ_{22} = 2 + (–2) – 10 = – 10; Δ_{24} = 2 + (–2) – 1 = – 1;

Δ_{31} = 3 + (–1) – 2 = 0; Δ_{32} = 3 + (–2) – 3 = – 2.

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -10 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Так как для клеток (1,4) критерий оптимальности (условие 1.34) не выполняется: U1 + V4 = 4 > 3, то полученный опорный план не оптимальный. Поскольку это единственная клетка с положительной оценкой, то она и подлежит загрузке. Строим для неё цикл: (1,4) → (3,4) → (3,3) → (1,3) → (1,4). Знаки + и – в клетках чередуются, начиная с клетки (1,4), которую помечаем +. Цикл можно нанести на заполненную таблицу с планом (табл. 1.7).

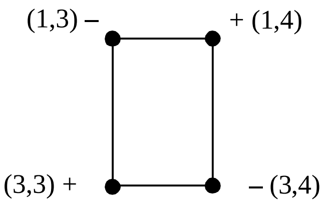


Рис.1.23. Цикл передвижения груза

Определим, сколько можно передвигать единиц груза по данному циклу: min(50; 50) = 50. Далее к грузам, стоящим в клетках с «+», прибавляем 50 ед. груза; из грузов, стоящих в клетках с «–», отнимаем 50 единиц груза. В данном случае в клетке (1,4) будет стоять 50; в клетках (3,4) и (1,3) пусто; в клетке (3,3) 50+50 = 100 единиц груза. Поскольку в новом плане должно быть по-прежнему 6 занятых клеток, что бы он не был вырожденным, то одну из двух освободившихся клеток будем считать занятой и поставим там 0. Целесообразнее нуль оставить в клетке с меньшей стоимостью перевозок, т.е. в клетке (3,4).

Остальные клетки, не задействованные в цикле, остаются без изменений. Новый опорный план $X^{(1)}$ приведен в таблице 1.8.

Таблица 1.8

		B_1	B_2	B_3	B_4	запасы
		$V_1 = -1$	$V_2 = -1$	$V_3 = 0$	$V_4 = -2$	
A_1	$U_1 = 5$	5	4 **150**	6	3 **50**	200
A_2	$U_2 = 2$	1 **150**	10	2 **150**	1	300
A_3	$U_3 = 3$	2	3	3 **100**	1 **0**	100
потребности		150	150	250	50	

Шаг 3. Проверяем полученный план $X^{(1)}$ на оптимальность. Находим систему потенциалов. Они записаны в таблице 1.8 слева и сверху, вычисляем сумму потенциалов для свободных клеток:

$\Delta_{11} = 5 + (-1) - 5 = -1$; $\Delta_{13} = 5 + 0 - 6 = -1$;

$\Delta_{22} = 2 + (-1) - 10 = -9$; $\Delta_{24} = 2 + (-2) - 1 = -1$;

$\Delta_{31} = 3 + (-1) - 2 = 0$; $\Delta_{32} = 3 + (-1) - 3 = -1$.

$$\Delta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -9 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Так как все оценки свободных клеток оказались меньше либо равны 0, то мы получили оптимальный план перевозок

$$X_1^* = \begin{pmatrix} 0 & 150 & 0 & 50 \\ 150 & 0 & 150 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 0 \end{pmatrix}.$$

Стоимость перевозок будет при этом плане наименьшей Z (X^*)= 150*4+50*3+150*1+150*2+100*3 = 1500 у.е.

Замечание: Поскольку одна из оценок небазисной переменной равна 0 ($\Delta_{31} = 0$), то данная задача будет иметь еще один оптимальный план перевозок с той же общей стоимостью перевозок 1500 у.е. Этот план можно найти, загрузив клетку (3,1).

Построим цикл: (3,1) → (2,1) → (2,3) → (3,3) → (3,1). По нему передвигаем min (150; 100) = 100 единиц груза. Новый план перевозок записан в табл. 1.9. Проверять его оптимальность нет необходимости, т.к.

во вновь занятой клетке при той же системе потенциалов выполняется условие (1.33), а в освободившейся – условие (1.34).

Таблица 1.9

		B_1	B_2	B_3	B_4	запасы
		$V_1 = -1$	$V_2 = -1$	$V_3 = 0$	$V_4 = -2$	
A_1	$U_1 = 5$	5	4 **150**	6	3 **50**	200
A_2	$U_2 = 2$	1 **50**	10	2 **250**	1	300
A_3	$U_3 = 3$	2 **100**	3	3	1 **0**	100
потребности		150	150	250	50	

Тогда еще один оптимальный план перевозок будет такой:

$$X_2^* = \begin{pmatrix} 0 & 150 & 0 & 50 \\ 50 & 0 & 250 & 0 \\ 100 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Общий ответ запишется, как выпуклая линейная комбинация двух оптимальных решений: $X^* = t \cdot X_1^* + (1-t) \cdot X_2^*, \quad 0 \le t \le 1.$

Пример 8. Решить транспортную задачу:

	B_1	B_2	B_3	запасы
A_1	7	3	4	80
A_2	5	7	8	60
A_3	3	8	2	60
потребности	30	70	60	

Решение. Объем ресурсов: 80+60+60=200 превышает общие потребности: 30+70+60=160 на 40 ед., следовательно, ТЗ является задачей открытого типа. Вводим дополнительный (балансовый пункт) потребления с объемом потребностей $b_4 = 40$ и полагаем $c_{14} = c_{24} = c_{34} = 0$. В результате получаем ТЗ закрытого типа.

Шаг 1. Находим исходный опорный план $X^{(0)}$ методом «минимального элемента» (см. таблицу 1.10). Клетки четвертого «фиктивного» потребителя заполняются по остаточному принципу. Сначала заполнили 60 ед. груза клетку (3,3), т.к. в ней самый маленький тариф, после чего из рассмотрения вышли сразу все остальные клетки третьей строки и третьего столбца. Затем клетку (1,2) заняли min (70, 80) = 70 единицами груза. И так далее. Последней была занята клетка (2,4) оставшимися 40 ед. груза.

Таблица 1.10

		B_1	B_2	B_3	B_4	запасы
		$V_1 = 7$	$V_2 = 3$	$V_3 = 4$	$V_4 = 2$	
A_1	$U_1 = 0$	− ^{7} **10**	^{3} **70**	^{4}	+ ^{0}	~~80~~ ~~10~~ 0
A_2	$U_2 = -2$	+ ^{5} **20**	^{7}	^{8}	− ^{0} **40**	~~60~~ ~~40~~ 0
A_3	$U_3 = -2$	^{3}	^{8}	^{2} **60**	^{0} **0**	~~60~~ 0
потребности		~~30~~ ~~20~~ 0	~~70~~ 0	~~60~~ 0	~~40~~ 0	

Данный план является вырожденным, поэтому ставим «0» – перевозку в клетку с минимальным значением c_{ij}, но так, чтобы не образовалось замкнутого маршрута (цикла). В нашем примере $c_{14} = c_{34} = 0$, но занять клетку (1,4) нельзя, так как образуется цикл: (1,4) → (2,4) → (2,1) → (1,1) → (1,4). Поэтому ставим «0» в клетку (3,4).

Шаг 2. Проверяем план $x^{(0)}$ на оптимальность. Положив $u_1 = 0$, находим потенциалы (см. таблицу). Далее находим оценки для свободных клеток:

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -6 & -6 & 0 \\ 2 & -7 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Так как есть клетки с положительными оценками ($\Delta_{14} = 0 + 2 - 0 = 2$; $\Delta_{31} = -2 + 7 - 3 = 2$), то полученный опорный план x^0 не оптимален. Для клеток (1,4) и (3,1) оценки одинаковы, поэтому выбираем с минимальным тарифом – (1,4). Составляем для неё цикл, чередуя знаки «+» и «–»: (1,4) → (2,4) → (2,1) → (1,1) → (1,4) (изображен в табл. 1.10). По циклу можно передвинуть min (40; 10) = 10 ед. груза.

Новый опорный план представлен в таблице (1.11).

Таблица 1.11

		B_1	B_2	B_3	B_4	запасы
		$V_1 = 5$	$V_2 = 3$	$V_3 = 2$	$V_4 = 0$	
A_1	$U_1 = 0$	^{7}	^{3} **70**	^{4}	^{0} **10**	80
A_2	$U_2 = 0$	− ^{5} **30**	^{7}	^{8}	+ ^{0} **30**	60
A_3	$U_3 = 0$	+ ^{3}	^{8}	^{2} **60**	− ^{0} **0**	60
потребности		30	70	60	40	

Шаг 3. Поскольку новый опорный план не вырожден (6 занятых клеток), то находим систему потенциалов (см. слева и сверху табл. 1.11). Оценка свободных клеток:

$$\Delta = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & -6 & 0 \\ 2 & -5 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Критерий оптимальности не выполняется для клетки (3,1): $\Delta_{31} = 0 + 5 - 3 = 2 > 0$.

Шаг 4. Составляем цикл для клетки (3,1): (3,1) → (2,1) → (2,4) → (3,4) → (3,1) (изображен в табл. 1.11). По циклу можно передвинуть min (30; 0) = 0 ед. груза. По сути, груз в данном случае не двигается, меняется фиктивно занятая клетка. Новый опорный план представлен в таблице (1.12).

Таблица 1.12

		B_1	B_2	B_3	B_4	запасы
		$V_1 = 5$	$V_2 = 3$	$V_3 = 4$	$V_4 = 0$	
A_1	$U_1 = 0$	^{7}	^{3} **70**	+ ^{4}	− ^{0} **10**	80
A_2	$U_2 = 0$	− ^{5} **30**	^{7}	^{8}	+ ^{0} **30**	60
A_3	$U_3 = -2$	+ ^{3} **0**	^{8}	− ^{2} **60**	^{0}	60
потребности		30	70	60	40	

Проверяем его оптимальность. Вычисляем потенциалы по занятым клеткам и проверяем оценки свободных клеток.

$$\Delta = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Положительных оценок нет, поэтому получен оптимальный план

$$X_1^* = \begin{pmatrix} 0 & 70 & 0 \\ 30 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 60 \end{pmatrix}.$$

Транспортные издержки при нем составят 480 у.е. Так как четвертый потребитель фиктивный, то 10 ед. груза останутся не вывезенными у первого поставщика, 30 ед. – у второго.

Но этот план не единственен, т.к. есть нулевая оценка небазисной клетки: $\Delta_{13} = 0 + 4 - 4 = 0$. Перераспределим груз, переместив min (10; 30; 60) = 10 ед. груза в клетку (1,3) по циклу: (1,3) → (1,4) → (2,4) → (2,1) → (3,1) → (3,3) → (1,3) (изображен в табл. 1.12). Альтернативный план не нуждается в проверке на оптимальность.

$$X_2^* = \begin{pmatrix} 0 & 70 & 10 \\ 20 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 50 \end{pmatrix}.$$

При втором плане 40 единиц груза останутся не вывезенными у второго поставщика. Окончательный ответ является выпуклой линейной комбинацией полученных двух оптимальных планов: $X^* = t \cdot X_1^* + (1-t) \cdot X_2^*,\ \ 0 \le t \le 1.$

Задачи для самостоятельного решения.

1. Составить математическую модель задачи и решить графически. Из двух сортов бензина составляют для различных целей две смеси А и В. Смесь А содержит 60% бензина первого и 40% бензина второго сорта, смесь В - 80% бензина первого и 20% бензина второго сорта. Составить оптимальный план образования смесей, при котором будет получен максимальный доход, если имеется 50000 л бензина первого и 30000 л второго сорта. и продажная цена 1 л смеси А составляет 10 руб., а смеси В - 12 руб.

2. Менеджер по ценным бумагам намерен разместить 100000 ф. с. капитал таким образом, чтобы получать максимальные годовые проценты с дохода. Его выбор ограничен четырьмя возможными объектами инвестиций: A, B, C и D. Объект А позволяет получать 6% годовых, объект В — 8% годовых, объект С— 10%, а объект D — 9% годовых. Для всех четырех объектов степень риска и условия размещения капитала различны. Чтобы не подвергать риску имеющийся капитал, менеджер принял решение, что не менее половины инвестиций необходимо вложить в объекты А и В. Чтобы обеспечить ликвидность, не менее 25% общей суммы капитала нужно поместить в объект D. Учитывая возможные изменения в политике правительства, предусматривается, что в объект С следует вкладывать не более 20% инвестиций, тогда как особенности налоговой политики требуют, чтобы в объект А было вложено не менее 30% капитала. Сформулируйте для изложенной проблемы распределения инвестиций модель линейного программирования и найдите оптимальный способ распределения инвестиций симплексным методом. Проверьте результат с помощью MS Excel.

3. Решите следующую транспортную задачу методом потенциалов. В резерве трех железнодорожных станций А,Б и В находятся соответственно 50, 70 и 40 вагонов. Составить оптимальных план перегона этих вагонов к четырем пунктам погрузки угля, если пункту №1 требуется 60 вагонов, №2 – 45, №3 – 65 и №4 – 30 вагонов. При этом следует учесть, что стоимость перегона одного вагона со станции А в указанные пункты соответственно равна 140, 130, 160 и 110 тыс руб; со станции Б – 120, 170, 140, 180 тыс. руб; со станции В – 150, 120, 110, 130 тыс. руб.

Ответы:

1. 70000 л смеси А и 10000 л смеси В; доход 820 тысяч рублей.

2. В объект А – 30 тыс ф.с., в объект В – 20 тыс. ф.с., в объект С – 20 тыс. ф.с., в объект D – 30 тыс. ф.с., общий доход – 8100 фунтов стерлингов.

3. Со станции А 20 вагонов на пункт №2 и 30 вагонов на пункт №4; со станции Б 60 вагонов на пункт №1 и 10 вагонов на пункт №3; со станции В 40 вагонов на пункт №3; на пункт № 2 не прибудет 25 вагонов, а на № 3 - 15 вагонов. При этом стоимость всех перегонов будет минимальна и составит 18900 тыс. рублей.

2. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ИГР

2.1. Решение матричных игр в чистых стратегиях

Определение. *"Игра (в математике)* - это идеализированная математическая модель конфликтной ситуации: несколько игроков влияют на исход игры, причем их интересы различны".

Регулярное действие, выполняемое игроком во время игры, называется *ходом*. Совокупность ходов игрока, совершаемых им для достижения цели игры, называется *стратегией*.

Классификация игр

Классификацию игр можно проводить: по количеству игроков, количеству стратегий, характеру взаимодействия игроков, характеру выигрыша, количеству ходов, состоянию информации и т.д.

В зависимости от количества игроков различают игры двух и n игроков. Игры двух лиц называются *парными* и они наиболее изучены. Игры трёх и более игроков менее исследованы из-за возникающих принципиальных трудностей и технических возможностей получения решения.

По количеству стратегий игры делятся на конечные и бесконечные. Если в игре все игроки имеют конечное число возможных стратегий, то она называется *конечной*. Если же хотя бы один из игроков имеет бесконечное количество возможных стратегий, игра называется *бесконечной*.

По характеру взаимодействия игры делятся на бескоалиционные: игроки не имеют права вступать в соглашения, образовывать коалиции; коалиционные (кооперативные) – могут вступать в коалиции.

В кооперативных играх коалиции заранее определены.

По характеру выигрышей игры делятся на: игры с нулевой суммой - антагонистические (общий капитал всех игроков не меняется, а перераспределяется между игроками; сумма выигрышей всех игроков равна нулю) и игры с ненулевой суммой.

По виду функций выигрыша игры делятся на: матричные, биматричные, непрерывные, выпуклые и др.

Матричная игра – это конечная игра двух игроков с нулевой суммой, в которой задаётся выигрыш первого игрока в виде матрицы (строка матрицы соответствует номеру применяемой стратегии первого игрока, столбец – номеру применяемой стратегии второго игрока; на пересечении строки и столбца матрицы находится выигрыш первого игрока, соответствующий применяемым стратегиям).

Для матричных игр доказано, что любая из них имеет решение, и оно может быть легко найдено путём сведения игры к задаче линейного программирования.

Биматричная игра – это конечная игра двух игроков с ненулевой суммой, в которой выигрыши каждого игрока задаются матрицами отдельно для соответствующего игрока (в каждой матрице строка соответствует стратегии первого игрока, столбец – стратегии второго игрока, на пересечении строки и столбца в первой матрице находится выигрыш первого игрока, во второй матрице – выигрыш второго игрока)

Непрерывной считается игра, в которой функция выигрышей каждого игрока является непрерывной. Доказано, что игры этого класса имеют решения, однако не разработано практически приемлемых методов их нахождения.

Если функция выигрышей является выпуклой, то такая игра называется выпуклой. Для них разработаны приемлемые методы решения, состоящие в отыскании чистой оптимальной стратегии (определённого числа) для одного игрока и вероятностей применения чистых оптимальных стратегий другого игрока. Такая задача решается сравнительно легко.

Запись матричной игры в виде платёжной матрицы

В общем виде матричная игра может быть записана следующей платёжной матрицей (рис. 2.1.)

	B_1	B_2	…	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	. . .	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	. . .	a_{2n}
…	. . .	. . .	. . .	. . .
A_m	a_{m1}	a_{m2}	. . .	a_{mn}

Рис. 2.1. Общий вид платёжной матрицы матричной игры

где A_i – названия стратегий первого игрока, B_j – названия стратегий второго игрока, a_{ij} – значения выигрышей первого игрока при выборе им i – й стратегии, а вторым игроком – j – й стратегии. Поскольку данная игра является игрой с нулевой суммой, значение выигрыша для второго игрока является величиной, противоположенной по знаку значению выигрыша первого игрока.

Понятие о нижней и верхней цене игры. Решение игры в чистых стратегиях.

Каждый из игроков стремится максимизировать свой выигрыш с учётом поведения противодействующего ему игрока. Поэтому для первого игрока необходимо определить минимальные значения выигрышей в каждой из стратегий, а затем найти максимум из этих значений, то есть определить величину

$$\alpha = \max_{1 \le i \le m} \min_{1 \le j \le n} a_{ij} .$$

Другими словами, нужно найти минимальные значения по каждой из строк платёжной матрицы, а затем определить максимальное из этих значений. Величина α называется *максимином* матрицы или *нижней ценой игры*.

Величина выигрыша первого игрока равна, по определению матричной игры, величине проигрыша второго игрока. Поэтому для второго игрока необходимо определить значение

$$\beta = \min_{1 \le j \le n} \max_{1 \le i \le m} a_{ij} .$$

Другими словами, нужно найти максимальные значения по каждому из столбцов платёжной матрицы, а затем определить минимальное из этих значений. Величина β называется *минимаксом* матрицы или *верхней ценой игры*.

В случае, если значения α и β не совпадают, при сохранении правил игры (коэффициентов a_{ij}) в длительной перспективе, выбор стратегий каждым из игроков оказывается неустойчивым. Устойчивость он приобретает лишь при равенстве $\alpha = \beta = V$. В этом случае говорят, что игра имеет *решение в чистых стратегиях* или *игра имеет седловую точку*, а стратегии A_i и B_j , в которых достигается V называются *оптимальными чистыми стратегиями*. Точка (A_i;B_j) – седловой точкой. Величина V называется *чистой ценой игры*.

Например, в матрице (рис. 2.2) существует решение в чистых стратегиях.

	B_1	B_2	B_3	B_4	$\min_j$
A_1	7	6	5	4	4
A_2	1	8	2	3	1
A_3	8	1	3	2	1
$\max_i$	8	8	5	4	

Рис. 2.2. Платёжная матрица, в которой существует решение в чистых стратегиях

При этом для первого игрока оптимальной чистой стратегией будет стратегия A_1, а для второго игрока – стратегия B_4.

В матрице (рис. 2.3) решения в чистых стратегиях не существует, так как нижняя цена игры достигается в стратегии A_1 и её значение равно

2, в то время как верхняя цена игры достигается в стратегии B_4 и её значение равно 3.

	B_1	B_2	B_3	B_4	$\min_j$
A_1	7	6	5	2	2
A_2	1	8	2	3	1
A_3	8	1	3	2	1
$\max_i$	8	8	5	3	

Рис. 2.3. Платёжная матрица, в которой не существует решения в чистых стратегиях

Уменьшение порядка платёжной матрицы

Порядок платёжной матрицы (количество строк и столбцов) может быть уменьшен за счёт исключения доминируемых и дублирующих стратегий.

Стратегия A_k первого игрока называется *доминируемой* стратегией A_r, если при любом варианте поведения второго игрока выполняется соотношение

$$a_{kj} \le a_{rj}, \text{ для всех } j=1,\ldots,n$$

где a_{kj} и a_{rj} - значения выигрышей первого игрока при выборе им, соответственно, стратегий A_k и A_r.

Стратегия B_k второго игрока называется *доминируемой* стратегией B_r, если при любом варианте поведения первого игрока выполняется соотношение

$$a_{ik} \ge a_{ir}, \text{ для всех } i=1,\ldots,m$$

где a_{ik} и a_{ir} - значения проигрышей второго игрока, при выборе им, соответственно, стратегий A_k и A_r.

Если все неравенства выполняются строго, то говорят о *строгом доминировании.*

В случае, если выполняется соотношение $a_{kj} = a_{rj}$, для всех j=1,…,n, или $a_{ik} = a_{ir}$, для всех i=1,…,m, стратегии A_k и A_m или B_k и B_m, соответственно, называются дублирующими друг друга.

Например, в матрице игры

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6
A_1	1	2	3	4	4	7
A_2	7	6	5	4	4	8
A_3	1	8	2	3	3	6
A_4	8	1	3	2	2	5

стратегия A_1 является доминируемой по отношению к стратегии A_2, стратегия B_6 является доминируемой по отношению к стратегиям B_3, B_4 и B_5, а стратегии B_5 и B_4 дублируют друг друга.

Доминируемые стратегии не будут выбраны игроками, так как являются заведомо проигрышными и удаление этих стратегий из платёжной матрицы не повлияет на определение нижней и верхней цены игры, описанной данной матрицей. Так же можно удалить из матрицы игры одну из дублирующих стратегий.

Множество недоминируемых стратегий, полученных после уменьшения размерности платёжной матрицы, называется ещё множеством Парето (по имени итальянского экономиста Вильфредо Парето, занимавшегося исследованиями в данной области)

Матрица игры после уменьшения размерности:

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_2	7	6	5	4
A_3	1	8	2	3
A_4	8	1	3	2

Пример решения матричной игры в чистых стратегиях

Рассмотрим пример решения матричной игры в чистых стратегиях, в условиях реальной экономики, в ситуации борьбы двух предприятий за рынок продукции региона.

Пример 1. Два предприятия производят продукцию и поставляют её на рынок региона. Они являются единственными поставщиками продукции в регион, поэтому полностью определяют рынок данной продукции в регионе.

Каждое из предприятий имеет возможность производить продукцию с применением одной из трёх различных технологий. В зависимости от качества продукции, произведённой по каждой технологии, предприятия могут установить цену единицы продукции на уровне 10, 6 и 2 денежных единиц соответственно. При этом предприятия имеют различные затраты на производство единицы продукции (таблица 2.1).

В результате маркетингового исследования рынка продукции региона была определена функция спроса на продукцию:

$$S = 6 - 0{,}5 \cdot R,$$

где S – количество продукции, которое приобретёт население региона (тыс. ед.), а R – средняя цена продукции предприятий, д.е.

Таблица 2.1

Затраты на единицу продукции, произведенной на предприятиях региона.

Технология	Цена реализации единицы продукции, д.е.	Полная себестоимость единицы продукции, д.е.	
		Предприятие 1, C_1	Предприятие 2, C_2
I	10	5	8
II	6	3	4
III	2	1,5	1

Данные о спросе на продукцию в зависимости от цен реализации приведены в таблице 2.2.

Таблица 2.2

Спрос на продукцию в регионе, тыс. ед.

Цена реализации 1 ед. продукции, д.е.		Средняя цена реализации 1 ед. продукции, д.е. R	Спрос на продукцию, тыс. ед. S=5-0,5R
Предприятие 1 R_1	Предприятие 2 R_2		
10	10	10	1
10	6	8	2
10	2	6	3
6	10	8	2
6	6	6	3
6	2	4	4
2	10	6	3
2	6	4	4
2	2	2	5

Значения долей продукции предприятия 1, приобретенной населением, зависят от соотношения цен на продукцию предприятия 1 и предприятия 2. В результате маркетингового исследования эта зависимость установлена и значения вычислены (таблица 2.3).

Таблица 2.3

Доля продукции предприятия 1, приобретаемой населением в зависимости от соотношения цен на продукцию

Цена реализации 1 ед. продукции, д.е.		Доля продукции предприятия 1, купленной населением, p
Предприятие 1 R_1	Предприятие 2 R_2	
10	10	0,31
10	6	0,33
10	2	0,18
6	10	0,7
6	6	0,3
6	2	0,2
2	10	0,92
2	6	0,85
2	2	0,72

По условию задачи на рынке региона действует только 2 предприятия. Поэтому долю продукции второго предприятия, приобретённой населением, в зависимости от соотношения цен на продукцию можно определить как единица минус доля первого предприятия.

Стратегиями предприятий в данной задаче являются их решения относительно выбора технологии производства продукции. Эти решения определяют себестоимость и цену реализации единицы продукции. В задаче необходимо определить:

1. Существует ли в данной задаче ситуация равновесия при выборе технологий производства продукции обоими предприятиями?

2. Существуют ли технологии, которые предприятия заведомо не будут выбирать вследствие невыгодности?

3. Сколько продукции будет реализовано в ситуации равновесия? Какое предприятие окажется в выигрышном положении?

Решение

1. Определим экономический смысл коэффициентов выигрышей в платёжной матрице задачи. Каждое предприятие стремится к максимизации прибыли от производства продукции. Но, кроме того, в данном случае предприятия ведут борьбу за рынок продукции в регионе. При этом выигрыш одного предприятия означает проигрыш другого. Такая задача может быть сведена к матричной игре с нулевой суммой. При этом коэффициентами выигрышей будут значения разницы прибыли предприятия 1 и предприятия 2 от производства продукции. В случае, если эта разница положительна, выигрывает предприятие 1, а в случае, если она отрицательна – предприятие 2.

2. Рассчитаем коэффициенты выигрышей платёжной матрицы. Для этого необходимо определить значения прибыли предприятия 1 и предприятия 2 от производства продукции. Прибыль предприятия в данной задаче зависит:

- от цены и себестоимости продукции;
- от количества продукции, приобретаемой населением региона;
- от доли продукции, приобретённой населением у предприятия.

Таким образом, значения разницы прибыли предприятий, соответствующие коэффициентам платёжной матрицы, необходимо определить по формуле:

$$D = p \cdot S \cdot (R_1 - C_1) - (1-p) \cdot S \cdot (R_2 - C_2),$$

где D – значение разницы прибыли от производства продукции предприятия 1 и предприятия 2;

p – доля продукции предприятия 1, приобретаемой населением региона;

S – количество продукции, приобретаемой населением региона;

R_1 и R_2 - цены реализации единицы продукции предприятиями 1 и 2;

C_1 и C_2 – полная себестоимость единицы продукции, произведённой на предприятиях 1 и 2.

Вычислим один из коэффициентов платёжной матрицы.

Пусть, например, предприятие 1 принимает решение о производстве продукции в соответствии с технологией III, а предприятие 2 – в соответствии с технологией II. Тогда цена реализации единицы продукции для предприятия 1 составит 2 д.е. при себестоимости единицы продукции 1,5 д.е. Для предприятия 2 цена реализации единицы продукции составит 6 д.е. при себестоимости 4 д.е. (табл. 2.1).

Количество продукции, которое население региона приобретёт при средней цене 4 д.е., равно 4 тыс. ед. (таблица 2.2). Доля продукции, которую население приобретёт у предприятия 1, составит 0,85, а у предприятия 2 – 0,15 (табл. 2.3). Вычислим коэффициент платёжной матрицы a_{32} по приведенной выше формуле:

$$a_{32} = 0{,}85 \cdot 4 \cdot (2-1{,}5) - 0{,}15 \cdot 4 \cdot (6-4) = 0{,}5 \text{ тыс. ед.}$$

где i=3 – номер технологии первого предприятия, а j=2 – номер технологии второго предприятия.

Аналогично вычислим все коэффициенты платёжной матрицы:

$a_{11} = 0{,}31 \cdot 1 \cdot (10-5) - 0{,}69 \cdot 1 \cdot (10-8) = 0{,}17$;

$a_{12} = 0{,}33 \cdot 2 \cdot (10-5) - 0{,}67 \cdot 2 \cdot (6-4) = 0{,}62$;

$a_{13} = 0{,}18 \cdot 3 \cdot (10-5) - 0{,}82 \cdot 3 \cdot (2-1) = 0{,}24$;

$a_{21} = 0{,}7 \cdot 2 \cdot (6-3) - 0{,}3 \cdot 2 \cdot (10-8) = 3$;

$a_{22} = 0{,}3 \cdot 3 \cdot (6-3) - 0{,}7 \cdot 3 \cdot (6-4) = -1{,}5$;

$a_{23} = 0{,}2 \cdot 4 \cdot (6-3) - 0{,}8 \cdot 4 \cdot (2-1) = -0{,}8$;

$a_{31} = 0{,}92 \cdot 3 \cdot (2-1{,}5) - 0{,}08 \cdot 3 \cdot (10-8) = 0{,}9$;

$a_{32} = 0{,}85 \cdot 4 \cdot (2-1{,}5) - 0{,}15 \cdot 4 \cdot (6-4) = 0{,}5$;

$a_{33} = 0{,}72 \cdot 5 \cdot (2-1{,}5) - 0{,}28 \cdot 5 \cdot (2-1) = 0{,}4$.

В платёжной матрице стратегии A_1, A_2, A_3 – представляют собой решения о выборе технологии производства продукции предприятием 1, стратегии B_1, B_2, B_3 – решения о выборе технологи производства продукции предприятием 2, коэффициенты выигрышей – разница прибыли предприятия 1 и предприятия 2.

	B_1	B_2	B_3	$\min_j$
A_1	0,17	0,62	0,24	0,17
A_2	3	-1,5	-0,8	-1,5
A_3	0,9	0,5	0,4	0,4
$\max_i$	3	0,62	0,4	

Рис. 2.4. Платёжная матрица в игре «Борьба двух предприятий за рынок продукции региона»

В данной матрице нет ни доминируемых, ни дублирующих стратегий. Это значит, что для обоих предприятий нет заведомо невыгодных технологий производства продукции. Определим минимальные элементы строк матрицы. Для предприятия 1 каждый из этих элементов имеет значение минимально гарантированного выигрыша при выборе соответствующей стратегии. Минимальные элементы матрицы по строкам имеют значения: 0,17; -1,5; 0,4.

Определим максимальные элементы столбцов матрицы. Для предприятия 2 каждый из этих элементов также имеет значение гарантированного максимального проигрыша при выборе соответствующей стратегии. Максимальные элементы матрицы по столбцам имеют значения: 3; 0,62, 0,4. Нижняя цена игры в матрице равна 0,4. Верхняя цена игры также равна 0,4. Таким образом, нижняя и верхняя цена игры в матрице совпадают, т. е. имеем игру с седловой точкой (обведена на рис.2.4). Это значит, что имеется технология производства продукции, которая является оптимальной для обоих предприятий в условиях данной задачи. Эта технология III, которая соответствует стратегиям A_3 предприятия 1 и B_3 предприятия 2. Стратегии A_3 и B_3 – чистые оптимальные стратегии в данной задаче.

Значение разницы прибыли предприятия 1 и предприятия 2 при выборе чистой оптимальной стратегии положительно. Это означает, что предприятие 1 выиграет в данной игре. Выигрыш предприятия 1 составит 0,4 тыс. д.е. При этом на рынке будет реализовано 5 тыс. ед. продукции (реализация равна спросу на продукцию, таблица 2.2). Оба предприятия установят цену за единицу продукции в 2 д.е. При этом для первого предприятия полная себестоимость единицы продукции составит 1,5 д.е., а для второго – 1 д.е (таблица 2.1). Предприятие 1 окажется в выигрыше лишь за счёт высокой доли продукции, которую приобретёт у него население.

2.2. Смешанные стратегии в матричных играх

Понятие о матричных играх со смешанным расширением

Исследование в матричных играх начинается с нахождения её чистой цены. Если матричная игра имеет решение в чистых стратегиях, то нахождением чистой цены заканчивается исследование игры. Если же в игре нет решения в чистых стратегиях, т. е. нет седловой точки, то можно найти нижнюю и верхнюю цены этой игры, которые указывают, что игрок 1 не должен надеяться на выигрыш больший, чем верхняя цена игры, и может быть уверен в получении выигрыша не меньше нижней цены игры. Улучшение решений матричных игр следует искать в использовании секретности выбора чистых стратегий и возможности многократного

повторения игр в виде партии. Этот результат достигается путём применения чистых стратегий случайно, с определённой вероятностью.

Определение. *Смешанной стратегией игрока* называется полный набор чистых стратегий, применённых в соответствии с установленным распределением вероятностей.

Смешанная стратегия первого игрока:

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_m \\ p_1 & p_2 & \dots & p_m \end{pmatrix} (0 \le p_i \le 1 \text{ , i=1,…,m; } \sum_{i=1}^{m} p_i = 1.)$$

Смешанная стратегия второго игрока:

$$\begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_n \\ q_1 & q_2 & \dots & q_n \end{pmatrix} (0 \le q_j \le 1 \text{ , j=1,…,n; } \sum_{j=1}^{n} q_j = 1.)$$

Матричная игра, решаемая с использованием смешанных стратегий, называется *игрой со смешанным расширением*.

Стратегии, применённые с вероятностью, отличной от нуля, называются *активными стратегиями*.

Доказано, что для всех игр со смешанным расширением существует оптимальная смешанная стратегия, значение выигрыша при выборе которой находится в интервале между нижней и верхней ценой игры:

$$\alpha \le V \le \beta .$$

При этом условии величина V называется ценой игры.

Кроме того, доказано, что, если один из игроков придерживается своей оптимальной смешанной стратегии, то его средний выигрыш остаётся неизменным и равным цене игры V, независимо от того, каких стратегий придерживается другой игрок, если только он не выходит за пределы своих активных стратегий. Поэтому, для достижения наибольшего гарантированного выигрыша второму игроку также необходимо придерживаться своей оптимальной смешанной стратегии.

Решение игр размерности 2x2

В случае если в матричной игре у игроков ровно две стратегии, игра допускает наглядную геометрическую интерпретацию. Игра в этом случае задана платежной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Решение в смешанных стратегиях ищется в виде: $\overline{P} = (p;\ 1-p)$, где $0 \le p \le 1$ для первого игрока и $\overline{Q} = (q;\ 1-q)$, $0 \le q \le 1$ для второго игрока.

Решение ищется в два этапа, сначала находим решение первого игрока.

По горизонтальной оси p откладывается единичный отрезок, соответствующий интервалу $0 \le p \le 1$. Каждая его точка соответствует какой-либо смешанной стратегии (p; 1-p), а крайние точки p = 0 и p = 1 – чистым стратегиям A_2 и A_1 соответственно.

На вертикальной оси откладывается средний выигрыш первого игрока при выборе им какой-либо стратегии. Средний выигрыш первого игрока при использовании им смешанной стратегии (p; 1-p), в случае выбора вторым игроком чистых своих стратегий B_1 и B_2 равен
$\nu(\overline{P}, B_1) = a_{11} \cdot p + a_{21} \cdot (1-p)$ и
$\nu(\overline{P}, B_2) = a_{12} \cdot p + a_{22} \cdot (1-p)$ соответственно.

Поскольку выигрыши представляют собой линейные функции, то для графического изображения каждой из прямых достаточно отметить две точки: при p = 0 и при p = 1, и соединить их по прямой. Например, прямая B_1B_1 проходит через точки (0, a_{21}), (1, a_{11}); прямая B_2B_2 проходит через точки (0, a_{22}), (1, a_{12}). В случае, если в игре нет доминируемых стратегий и седловой точки, получим две пересекающиеся прямые. (рис. 2.5)

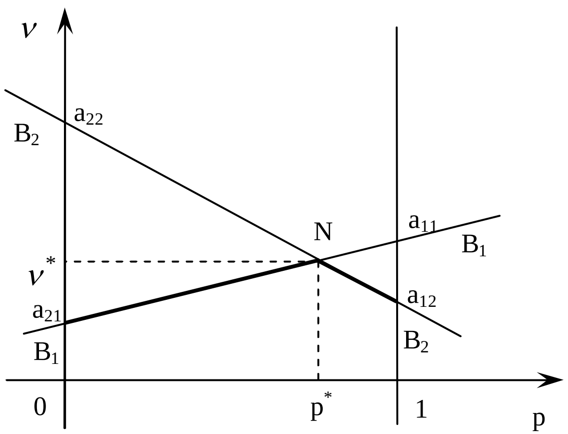


Рис.2.5. Решение игры 2х2 для первого игрока

Поскольку первый игрок выбирает свою оптимальную стратегию исходя из принципа максимина, т.е. выбирает такую смешанную стратегию $\overline{P}$, при которой достигается максимум из всех минимально возможных средних выигрышей:

$$\max_{\overline{P}} \min_{j} (a_{1j} \cdot p + a_{2j} \cdot (1-p)).$$

Все минимальные средние выигрыши первого игрока располагаются на ломаной B_1NB_2 (нижняя огибающая). Наивысшая её точка N($p^*; \nu^*$) и будет определять оптимальную смешанную стратегию первого игрока.

Аналогично находится оптимальная стратегия второго игрока.

По горизонтальной оси q откладывается единичный отрезок, соответствующий интервалу $0 \le q \le 1$. Каждая его точка соответствует какой-либо смешанной стратегии (q; 1-q), а крайние точки q = 0 и q = 1 – чистым стратегиям B_2 и B_1 соответственно.

На вертикальной оси откладывается средний проигрыш второго игрока при выборе им какой-либо стратегии. Средний проигрыш второго игрока при использовании им смешанной стратегии (q; 1-q), в случае выбора первым игроком чистых своих стратегий A_1 и A_2 равен
$\nu(A_1, \overline{Q}) = a_{11} \cdot q + a_{12} \cdot (1-q)$ и
$\nu(A_2, \overline{Q}) = a_{21} \cdot q + a_{22} \cdot (1-q)$ соответственно.

Проигрыши второго игрока также можно изобразить двумя прямыми: прямая A_1A_1 проходит через точки (0, a_{12}), (1, a_{11}); прямая A_2A_2 проходит через точки (0, a_{22}), (1, a_{21}). В случае, если в игре нет доминируемых стратегий и седловой точки, получим две пересекающиеся прямые. (рис. 2.6)

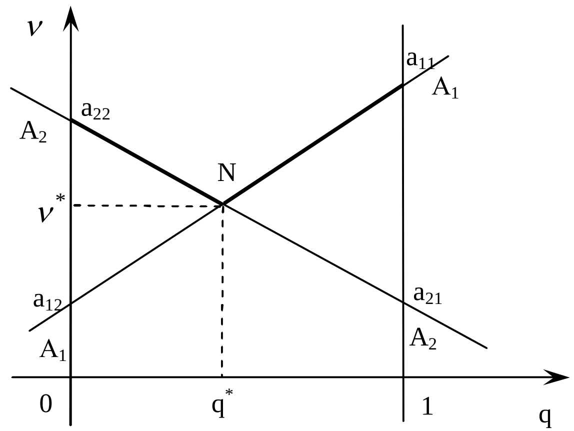


Рис.2.6. Решение игры 2х2 для второго игрока

Поскольку второй игрок выбирает свою оптимальную стратегию исходя из принципа минимакса, т.е. выбирает такую смешанную стратегию $\overline{Q}$, при которой достигается минимум из всех максимально возможных средних проигрышей:

$$\min_{\overline{Q}} \max_{i} (a_{i1} \cdot q + a_{i2} \cdot (1-q)) .$$

Все максимальные средние проигрыши второго игрока располагаются на ломаной A_2NA_1 (верхняя огибающая). Самая нижняя её точка N(q^* ; ν^*) и будет определять оптимальную смешанную стратегию второго игрока.

Пример 2. Решите матричную игру $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение. Проверим, есть ли в игре седловая точка. Нижняя цена игры $\alpha = \max\{-2;0\} = 0$, верхняя цена игры $\beta = \min\{5;3\} = 3$. $\alpha < \beta$, следовательно, седловой точки нет. Решение ищем среди смешанных стратегий. Для первого игрока ищем смешанную стратегию $\overline{P} = (p;\ 1-p)$, где $0 \le p \le 1$.

Изображаем две прямых: B_1B_1: ν = -2p + 5(1-p) и B_2B_2: ν = 3p + 0(1-p). (рис.2.7)

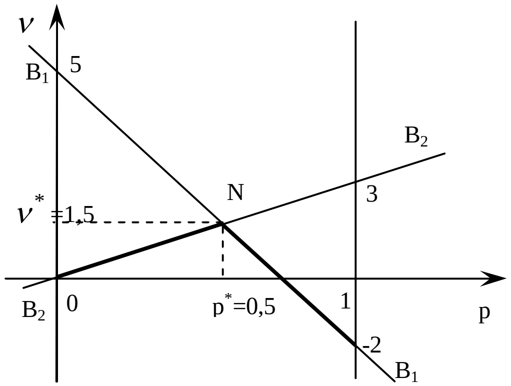


Рис.2.7. Решение игры для первого игрока

Наивысшая точка нижней огибающей N определяет решение первого игрока. Для нахождения её координат необходимо решить систему уравнений этих прямых:

$$\begin{cases} -2p + 5(1-p) = \nu \\ 3p + 0(1-p) = \nu \end{cases} \Rightarrow \text{N(0,5; 1,5)} \Rightarrow \overline{P}^* = (0{,}5;\ 0{,}5),\ \nu = 1{,}5 .$$

Для второго игрока ищем смешанную стратегию $\overline{Q} = (q;\ 1-q)$, где $0 \le q \le 1$.

Изображаем две прямых: A_1A_1: ν = -2q + 3(1-q) и A_2A_2: ν = 5q + 0(1-q). (рис.2.8)

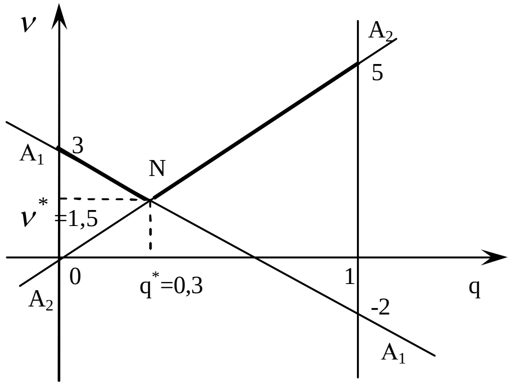


Рис.2.8. Решение игры для второго игрока

Низшая точка верхней огибающей N определяет решение второго игрока. Для нахождения её координат необходимо решить систему уравнений этих прямых:

$$\begin{cases} -2p + 3(1-p) = \nu \\ 5p + 0(1-p) = \nu \end{cases} \Rightarrow \text{N(0,3; 1,5)} \Rightarrow \overline{Q}^* = (0{,}3;\ 0{,}7),\ \nu = 1{,}5 .$$

Ответ: $\overline{P}^* = (0{,}5;\ 0{,}5)$; $\overline{Q}^* = (0{,}3;\ 0{,}7)$, $\nu = 1{,}5$.

Решение игр размерности 2 х n и m х 2

В случае, если у одного игрока, первого или второго, в матричной игре две стратегии, игру тоже можно решать графически.

Принцип решения основан на общем свойстве игр m x n, состоящем в том, что в любой игре m x n каждый игрок имеет оптимальную смешанную стратегию, в которой число чистых стратегий не больше, чем min(m, n). Из этого свойства следует, что в игре 2 x n и m x 2 каждая оптимальная смешанная стратегия $\overline{P}$ и $\overline{Q}$ содержит не более двух активных чистых стратегий. Значит, любая игра 2 x n и m x 2 может быть сведена к игре 2 x 2 и решена графически. Рассмотрим решение этих игр на примерах.

Пример 3. Решить игру с матрицей выигрышей $A=\begin{pmatrix}-30 & 45 & 60\\ 120 & -15 & -30\end{pmatrix}$.

Решение. Поскольку все числа матрицы выигрышей кратны 15, то можно перейти к другой матрице B, такой что $b_{ij}=a_{ij}/15$. Оптимальное решение при этом не измениться, а полученная цена игры $\nu_B=\nu_A/15$.

$$B=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 4\\ 8 & -1 & -2\end{pmatrix}$$

Проверим, есть ли седловая точка и мажорируемые стратегии.

Нижняя цена игры $\alpha=\max\{-2;-2\}=-2$, верхняя цена игры $\beta=\min\{8;3;4\}=3$. $\alpha<\beta$, следовательно, седловой точки нет. Решение ищем среди смешанных стратегий.

Мажорируемых строчек нет (- 2 < 8; 3 > - 1; 4 > - 2). Мажорируемых столбцов нет (- 2 < 3; 8 > - 1), (- 2 < 4; 8 > - 2) и (3 < 4; - 1 > - 2).

Решение начинаем с игрока, у которого ровно две стратегии. В данном случае, с первого игрока. Для него ищем смешанную стратегию $\overline{P}=(p;\ 1-p)$, где $0 \le p \le 1$.

Строим три прямых, изображающих средние выигрыши первого игрока, когда второй игрок выбирает одну из трех своих чистых стратегий: B_1B_1: ν = -2p + 8(1-p),

B_2B_2: ν = 3p -1(1-p),

B_3B_3: ν =4p – 2(1-p). (рис. 2.9)

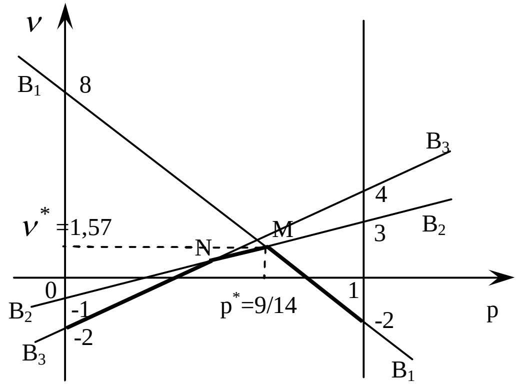


Рис.2.9. Решение игры для первого игрока

Нижняя огибающая в данном случае состоит из трех кусков: B_3NMB_1. Наивысшая точка нижней огибающей M определяет решение первого игрока. Для нахождения её координат необходимо решить систему уравнений, пересечением которых она является. В данном случае - это прямые B_1B_1 и B_2B_2:

$$\begin{cases}-2p+8(1-p)=\nu\\ 3p-(1-p)=\nu\end{cases} \Rightarrow M(9/14;22/14) \Rightarrow \overline{P}^*=\left(\frac{9}{14};\ \frac{5}{14}\right),\ \nu_B=1{,}57\,.$$

Для второго игрока ищем смешанную стратегию $\overline{Q}=(q_1;q_2;q_3)$, где $0 \le q_{1,2,3} \le 1$. Какие две из трех стратегий второго игрока будут активны, зависит от вида нижней огибающей первого игрока.

Общее правило таково: если наивысшая точка нижней огибающей первого игрока является точкой пересечения k-ой и l-ой прямых, то оптимальная смешанная стратегия второго игрока содержит ненулевые компоненты на k-ом и l-ом местах. Остальные компоненты равны нулю. Аналогично для игры m x 2: если низшая точка верхней огибающей второго игрока является точкой пересечения k-ой и l-ой прямых, то оптимальная смешанная стратегия первого игрока содержит ненулевые компоненты на k-ом и l-ом местах. Остальные компоненты равны нулю.

Поскольку в нашем случае точка M была получена пересечением первой и второй прямых, то, соответственно, в векторе $\overline{Q}=(q_1;q_2;q_3)$ будет ненулевые компоненты на первом и втором местах (активные первая и вторая чистые стратегии), третья равна нулю. Т.е. оптимальную смешанную стратегию второго игрока ищем в виде: $\overline{Q}=(q;1-q;0)$.

Строим две прямые, изображающие средние проигрыши второго игрока, когда первый игрок выбирает одну из двух своих чистых стратегий: A_1A_1: ν = -2q + 3(1-q) + 4*0 и

A_2A_2: ν = 8q -(1-q) – 2*0. (рис.2.10)

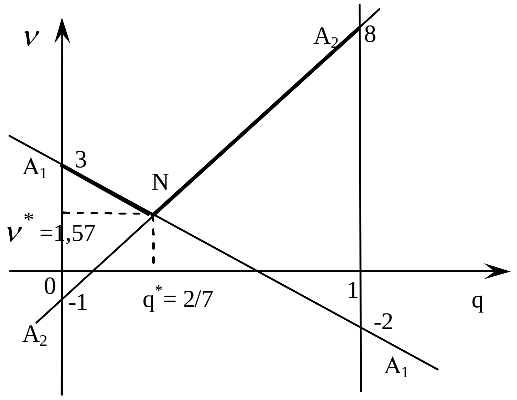


Рис.2.10. Решение игры для второго игрока

Низшая точка верхней огибающей N определяет решение второго игрока. Для нахождения её координат необходимо решить систему уравнений этих прямых:

$$\begin{cases} -2p + 3(1-p) = \nu \\ 8p - (1-p) = \nu \end{cases} \Rightarrow \text{N(4/14;22/14)} \Rightarrow \overline{Q}^* = \left(\frac{2}{7};\ \frac{5}{7};0\right),\ \nu_B = 1{,}57\,.$$

Учтем, что решалась игра В, поэтому цена игры А будет равна $\nu_A = 15 \cdot \nu_B$, т.е. $\nu_A = 15 \cdot 1{,}57 = 23{,}55$.

Ответ: $\overline{P}^* = \left(\frac{9}{14};\ \frac{5}{14}\right),\ \overline{Q}^* = \left(\frac{2}{7};\ \frac{5}{7};0\right),\ \nu = 23{,}55\,.$

Пример 4. Решить игру с матрицей выигрышей $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 6 \\ -1 & 5 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение. Проверим, есть ли седловая точка и мажорируемые стратегии.

Нижняя цена игры $\alpha = \max\{2;-2;-1;4\} = 4$, верхняя цена игры $\beta = \min\{5;6\} = 5$. $\alpha < \beta$, следовательно, седловой точки нет. Решение ищем среди смешанных стратегий.

Мажорируемых строчек и столбцов нет.

Решение начинаем с игрока, у которого ровно две стратегии. В данном случае, со второго игрока. Для него ищем смешанную стратегию $\overline{Q} = (q;\ 1-q)$, где 0 ≤ q ≤ 1.

Строим четыре прямых, изображающих средние проигрыши второго игрока, когда первый игрок выбирает одну из четырех своих чистых стратегий: A_1A_1: ν = 5q + 2(1-q),

A_2A_2: ν = -2q + 6(1-q),

A_3A_3: ν = -q + 5(1-q)

A_4A_4: ν = 4q + 4(1-q). (рис.2.11)

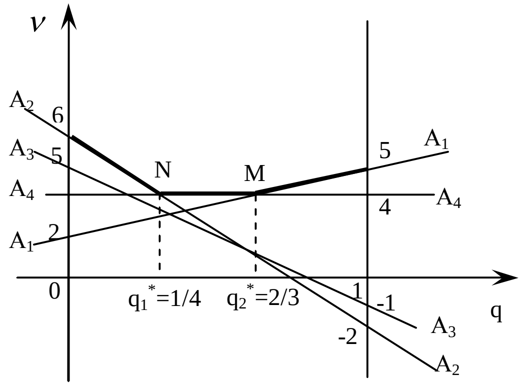


Рис.2.11. Решение игры для второго игрока

Верхняя огибающая в данном случае состоит из трех кусков: A_2NMA_1. Нижних точек верхней огибающей несколько – они составляют отрезок NM. Значит, у второго игрока множество оптимальных стратегий. Найдем координаты крайних точек: N как пересечение второй и четвертой прямых; M как пересечение первой и четвертой.

$$\begin{cases} -2q + 6(1-q) = \nu \\ 4q + 4(1-q) = \nu \end{cases} \Rightarrow \text{N(1/4;4)} \Rightarrow \overline{Q_1}^* = \left(\frac{1}{4};\ \frac{3}{4}\right),\ \nu = 4\,.$$

$$\begin{cases} 5q + 2(1-q) = \nu \\ 4q + 4(1-q) = \nu \end{cases} \Rightarrow \text{M(2/3;4)} \Rightarrow \overline{Q_2}^* = \left(\frac{2}{3};\ \frac{1}{3}\right),\ \nu = 4\,.$$

В итоге, оптимальное решение второго игрока: $\overline{Q}^* = t \cdot \overline{Q}_1^* + (1-t) \cdot \overline{Q}_2^*, \quad 0 \le t \le 1.$

Для первого игрока оптимальной стратегией будет чистая четвертая A_4, т.к. все низшие точки верхней огибающей лежат на четвертой прямой, она и будет единственной активной стратегией в смешанной стратегии первого игрока, а это фактически означает чистую A_4.

Ответ: A_4; $\overline{Q}^* = t \cdot \left(\frac{1}{4}; \frac{3}{4}\right) + (1-t) \cdot \left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right), \quad 0 \le t \le 1; \ v = 4.$

Решение матричных игр со смешанным расширением методами линейного программирования

Ранее были рассмотрены случаи, когда хотя бы у одного из игроков в наличии две стратегии. В случае игры m x n, где у обоих игроков больше двух стратегий, используются методы линейного программирования. Для матричной игры, платёжная матрица которой

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

и нижняя и верхняя цены не совпадают: $\alpha < \beta$, определим такие значения вероятностей выбора стратегий для игрока 1 ($p_1, p_2, \dots, p_m$) и для игрока 2 ($q_1, q_2, \dots, q_n$), при которых игроки достигали бы своего максимально среднего гарантированного выигрыша.

Если один из игроков придерживается своей оптимальной стратегии, то, по условию задачи, его выигрыш не может быть меньше цены игры V. Поэтому данная задача может быть представлена для игроков в виде следующих систем линейных неравенств:

$$\text{Для первого игрока: } \begin{cases} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \dots + a_{m1}p_m \ge V \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + \dots + a_{m2}p_m \ge V \\ \dots \\ a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + \dots + a_{mn}p_m \ge V \\ p_1 + p_2 + \dots + p_m = 1 \\ p_1 \ge 0; p_2 \ge 0; \dots; p_m \ge 0 \end{cases}$$

$$\text{Для второго игрока: } \begin{cases} a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + \dots + a_{1n}q_n \le V \\ a_{21}q_1 + a_{22}q_2 + \dots + a_{2n}q_n \le V \\ \dots \\ a_{m1}q_1 + a_{m2}q_2 + \dots + a_{mn}q_n \le V \\ q_1 + q_2 + \dots + q_n = 1 \\ q_1 \ge 0; q_2 \ge 0; \dots; q_n \ge 0 \end{cases}$$

Чтобы определить значение V, разделим обе части каждого из уравнений на V. Величину p_i/V обозначим через x_i, а q_j/V – через y_j.

Для игрока 1 получим следующую систему неравенств, из которой найдём значение 1/v:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{m1}x_m \ge 1 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{m2}x_m \ge 1 \\ \dots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \dots + a_{mn}x_m \ge 1 \\ x_1 + x_2 + \dots + x_m = 1/v \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0; \dots; x_m \ge 0 \end{cases}$$

Для игрока 1 необходимо найти максимальную цену игры (V). Следовательно, значение 1/V должно стремиться к минимуму.

Целевая функция задачи будет иметь следующий вид:

$$\min Z = \min 1/V = \min (x_1 + x_2 + \dots + x_m)$$

Для игрока 2 получим следующую систему неравенств, из которой найдём значение 1/v:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n \le 1 \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n \le 1 \\ \dots \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \dots + a_{mn}y_n \le 1 \\ y_1 + y_2 + \dots + y_n = 1/V \\ y_1 \ge 0; y_2 \ge 0; \dots; y_n \ge 0 \end{cases}$$

Для игрока 2 необходимо найти минимальную цену игры (V). Следовательно, значение 1/V должно стремиться к максимуму.

Целевая функция задачи будет иметь следующий вид:

$$\max F = \max 1/V = \max (y_1 + y_2 + \ldots + y_n)$$

Все переменные в данных системах линейных неравенств должны быть неотрицательными: $x_i = p_i/V$, а $y_i = q_j/V$. Значения p_i и q_j не могут быть отрицательными, так как являются значениями вероятностей выбора стратегий игроков. Поэтому необходимо, чтобы значение цены игры V не было отрицательным. Цена игры вычисляется на основе коэффициентов выигрышей платёжной матрицы. Поэтому, для того, чтобы гарантировать условие неотрицательности для всех переменных, необходимо, чтобы все коэффициенты матрицы были неотрицательными. Этого можно добиться, прибавив перед началом решения задачи к каждому коэффициенту матрицы число K, соответствующее модулю наименьшего отрицательного коэффициента матрицы. Тогда в ходе решения задачи будет определена не цена игры, а величина $V^* = V + K$.

Для решения задач линейного программирования используется симплекс-метод, изложенный в предыдущем разделе методических указаний.

В результате решения определяются значения целевых функций (для обоих игроков эти значения совпадают), а также значения переменных x_i и y_j .

Величина V* определяется по формуле: $V^* = 1/z$

Значения вероятностей выбора стратегий определяются: для игрока 1: $P_i = x_i \cdot V^*$; для игрока 2: $q_i = y_i \cdot V^*$.

Для определения цены игры V из величины V* необходимо вычесть число K (если перед решением задачи такое преобразование имело место).

Пример решения матричной игры со смешанным расширением

Пример 5. Рассмотрим пример решения матричной игры со смешанным расширением. Платёжную матрицу игры составим на основе исходных данных примера 1, заменив лишь значения долей продукции предприятия 1, приобретаемой населением в зависимости от соотношений цен (табл. 2.4).

Таблица 2.4

Доля продукции предприятия 1, приобретаемой населением в зависимости от соотношения цен на продукцию

Цена реализации 1 ед. продукции, д.е.		Доля продукции предприятия 1, купленной населением
Предприятие 1	Предприятие 2	
10	10	0,31
10	6	0,33
10	2	0,18
6	10	0,7
6	6	0,3
6	2	0,2
2	10	0,9
2	6	0,85
2	2	0,69

Продолжение таблицы 2.4

Определим по этим исходным данным разницу прибылей 1 и 2 предприятий от производства продукции по той же формуле. Получим следующую платёжную матрицу (рис. 2.12)

	B_1	B_2	B_3	$\min_j$
A_1	0,17	0,62	0,24	0.17
A_2	3	-1,5	-0,8	-1,5
A_3	0,75	0,5	0,175	0,175
$\max_i$	3	0.62	0.24	

Рис.2.12. Платёжная матрица в игре «Борьба двух предприятий за рынок продукции региона».

В данной матрице (рис. 2.12) нет доминируемых или дублирующих стратегий. Нижняя цена игры равна 0,175, а верхняя цена игры равна 0,24. Нижняя цена игры не равна верхней. Поэтому решения в чистых стратегиях не существует и для каждого из игроков необходимо найти оптимальную смешанную стратегию.

Решение

1. В данной матрице имеются отрицательные коэффициенты. Для соблюдения условия неотрицательности в задачах линейного программирования прибавим к каждому коэффициенту матрицы модуль минимального отрицательного коэффициента. В данной задаче к каждому коэффициенту матрицы необходимо прибавить число 1,5 – значение модуля наименьшего отрицательного элемента матрицы. Получим платёжную матрицу, преобразованную для выполнения условия неотрицательности (рис. 2.13)

	B_1	B_2	B_3
A_1	1,67	2,12	1,74
A_2	4,5	0	0,7
A_3	2,25	2	1,675

Рис.2.13. Платёжная матрица, преобразованная для выполнения условия неотрицательности

2. Опишем задачу линейного программирования для каждого игрока в виде системы линейных неравенств:

Для игрока 1:

$\min Z = x1 + x2 + x3$

$$\begin{cases} 1{,}67 \cdot x1 + 4{,}5 \cdot x2 + 2{,}25 \cdot x3 \geq 1 \\ 2{,}12 \cdot x1 + 0 \cdot x2 + 2 \cdot x3 \geq 1 \\ 1{,}74 \cdot x1 + 0{,}7 \cdot x2 + 1{,}675 \cdot x3 \geq 1 \\ x1 \geq 0;\ x2 \geq 0;\ x3 \geq 0 \end{cases}$$

Для игрока 2:

$\max F = y1 + y2 + y3$

$$\begin{cases} 1{,}67 \cdot y1 + 2{,}12 \cdot y2 + 1{,}74 \cdot y3 \leq 1 \\ 4{,}5 \cdot y1 + 0 \cdot y2 + 0{,}7 \cdot y3 \leq 1 \\ 2{,}25 \cdot y1 + 2 \cdot y2 + 1{,}675 \cdot y3 \leq 1 \\ y1 \geq 0;\ y2 \geq 0;\ y3 \geq 0 \end{cases}$$

3. Решим обе задачи с использованием симплекс-метода, применяя встроенную функцию «Поиск решения» в MS Excel (глава 1).

В результате решения задачи получим следующие значения целевой функции и переменных:

$Z = 0{,}5771$

$V^* = 1/0{,}5771 = 1{,}7328$

$x_1 = 0{,}5144$; $x_2 = 0$; $x_3 = 0{,}0626$

$y_1 = 0{,}0582$; $y_2 = 0$; $y_3 = 0{,}5189$

4. Для определения значений вероятностей выбора стратегий игроков 1 и 2, умножим значения переменных на V*.

$p_1 = x_1 \cdot V^* = 0{,}8914$,

$p_2 = 0$,

$p_3 = x_3 \cdot V^* = 0{,}1083$;

$q_1 = y1 \cdot V^* = 0{,}1008$,

$q_2 = 0$,

$q_3 = y3 \cdot V^* = 0{,}8991$.

5. Определим значение цены игры. Для этого из величины V* вычтем 1,5 (значение модуля наименьшего отрицательного элемента).

$V = 1{,}7328 - 1{,}5 = 0{,}2328$

Таким образом, в данной игре выиграет предприятие 1 (значение $V > 0$). Для достижения своей оптимальной стратегии (получения максимального среднего гарантированного выигрыша) предприятие 1 должно выбирать технологию 1 с вероятностью 0,8914, а технологию 3 – с вероятностью 0,1083. Предприятие 2, соответственно, должно выбирать технологию 1 с вероятностью 0,1008, а технологию 3 – с вероятностью 0,8991. Значение математического ожидания выигрыша предприятия 1 составит 0,2328 тыс. д.е.

2.3. Принятие решений в условиях неопределенности

Понятие о статистических играх (играх с «природой»)

Принятие управленческих решений предполагает наличие ситуаций выбора наиболее выгодного варианта поведения из нескольких имеющихся вариантов в условиях неопределённости. Такие задачи могут быть описаны матричными играми особого типа, в которых игрок взаимодействует не со вторым игроком, а с окружающей средой. Объективно окружающая среда не заинтересована в проигрыше игрока. В процессе принятия решения о выборе варианта поведения игрок имеет информацию о том, что окружающая среда может принять одно из нескольких возможных состояний и сталкивается с неопределённостью относительно того конкретного состояния, которое примет окружающая среда в данный момент времени.

Матричная игра, в которой игрок взаимодействует с окружающей средой, не заинтересованной в его проигрыше, и решает задачу определения наиболее выгодного варианта поведения с учётом неопределённости состояния окружающей среды, называется *статистической игрой* или «*игрой с природой*». Игрок в этой игре называется *лицом, принимающим решение* (ЛПР).

В общем виде платёжная матрица статистической игры приведена на рисунке 2.14.

	S_1	S_2	…	S_n
A_1	a_{11}	a_{12}	. . .	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	. . .	a_{2n}
…	. . .	. . .	. . .	. . .
A_n	a_{m1}	a_{m2}	. . .	a_{mn}

Рис.2.14. Общий вид платёжной матрицы статистической игры

В данной игре строки матрицы (A_i) - стратегии ЛПР, а столбцы матрицы (S_j) – состояния окружающей среды.

Критерии принятия решения

ЛПР определяет наиболее выгодную стратегию в зависимости от целевой установки, которую он реализует в процессе решения задачи. Результат решения задачи ЛПР определяет по одному из критериев принятия решения. Для того, чтобы прийти к однозначному и по возможности наиболее выгодному варианту решению, необходимо ввести оценочную (целевую) функцию. При этом каждой стратегии ЛПР (A_i) приписывается некоторый результат W_i, характеризующий все последствия этого решения. Из массива результатов принятия решений ЛПР выбирает элемент W, который наилучшим образом отражает мотивацию его поведения.

Критерий максимального математического ожидания выигрыша Байеса

Критерий максимального математического ожидания выигрыша применяется в тех случаях, когда ЛПР известны вероятности состояний окружающей среды. Платёжная матрица дополняется столбцом, каждый элемент которого представляет собой значение математического ожидания выигрыша при выборе соответствующей стратегии ЛПР:

$$w_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_j \quad , \qquad (2.1)$$

где p_j –вероятность j-го состояния окружающей среды.

Оптимальной по данному критерию считается та стратегия ЛПР, при выборе которой значение математического ожидания выигрыша максимально:

$$W = max\ w_i$$

Применение критерия максимального математического ожидания выигрыша, таким образом, оправдано, если ситуация, в которой принимается решение, следующая:

1. ЛПР известны вероятности всех состояний окружающей среды;
2. минимизация риска проигрыша представляется ЛПР менее существенным фактором принятия решения, чем максимизация среднего выигрыша.

Необходимость иметь информацию о вероятностях состояний окружающей среды ограничивает область применения данного критерия.

Критерий недостаточного основания Лапласа

Данный критерий используется при наличии неполной информации о вероятностях состояний окружающей среды в задаче принятия решения. Вероятности состояний окружающей среды принимаются равными и по каждой стратегии ЛПР в платёжной матрице определяется, таким образом, среднее значение выигрыша:

$$w_i = \frac{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}}{n} \qquad (2.2)$$

Оптимальной по данному критерию считается та стратегия ЛПР, при выборе которой значение среднего выигрыша максимально:

$$W = max\ w_i$$

Использование данного критерия оправдано в следующей ситуации:

1. ЛПР не имеет информации, либо имеет неполную информацию о вероятностях состояний окружающей среды;
2. вероятности состояний окружающей среды близки по своим значениям;
3. минимизация риска проигрыша представляется ЛПР менее существенным фактором принятия решения, чем максимизация среднего выигрыша.

Максиминный критерий Вальда (критерий крайнего пессимизма)

Правило выбора решения в соответствии с максиминным критерием можно интерпретировать следующим образом: платёжная матрица дополняется столбцом, каждый элемент которого представляет собой минимальное значение выигрыша в соответствующей стратегии ЛПР:

$$w_i = min_j\ a_{ij} \qquad (2.3)$$

Оптимальной по данному критерию считается та стратегия ЛПР, при выборе которой минимальное значение выигрыша максимально:

$$W = max\ w_i$$

Выбранная таким образом стратегия полностью исключает риск. Это означает, что принимающий решение не может столкнуться с худшим результатом, чем тот, на который он ориентируется. Это свойство позволяет считать критерий Вальда одним из самых осторожных.

Применение критерия Вальда оправдано, если ситуация, в которой принимается решение следующая:

1. о возможности появления состояний окружающей среды ничего не известно;
2. решение реализуется только один раз;
3. необходимо исключить какой бы то ни было риск.

Критерий минимаксного риска Сэвиджа

Стратегия выбора по принципу Сэвиджа характеризует те потенциальные потери, которые фирма будет иметь, если выберет неоптимальное решение. Величина ($\beta_j - a_{ij}$), где β_j - максимальный элемент j – го столбца, может быть интерпретирована как дополнительный выигрыш, получаемый в условиях состояния окружающей среды S_j при выборе ЛПР наиболее выгодной стратегии, по сравнению с выигрышем, получаемым

ЛПР при выборе в тех же условиях любой другой стратегии. Эта же разность может быть интерпретирована как величина возможного проигрыша при выборе ЛПР i – й стратегии по сравнению с наиболее выгодной стратегией. На основе данной интерпретации разности выигрышей производится определение наиболее выгодной стратегии по критерию минимаксного риска.

Для определения оптимальной стратегии по данному критерию на основе платёжной матрицы рассчитывается матрица рисков, каждый коэффициент которой (r_{ij}) определяется по формуле:

$$r_{ij} = \beta_j - a_{ij}$$

Матрица рисков дополняется столбцом, содержащим максимальные значения коэффициентов r_{ij} по каждой из стратегий ЛПР:

$$R_i = max_j\ r_{ij} \qquad (2.4)$$

Оптимальной по данному критерию считается та стратегия, в которой значение R_i минимально:

$$W = min\ R_i$$

Ситуация, в которой оправдано применение критерия Сэвиджа, аналогична ситуации критерия Вальда, однако наиболее существенным в данном случае является учёт степени воздействия фактора риска на величину выигрыша.

Критерий максимакса (принцип крайнего оптимизма)

Если критерий максимина ориентирован на получение гарантированного минимума желаемого результата (правило "лучший" из "худших"), то критерий оптимизма предполагает возможность получения максимального уровня желательности результата.

Для определения оптимальной стратегии по данному критерию на основе платёжной матрицы рассчитывается максимальные значения коэффициентов a_{ij} по каждой из стратегий ЛПР:

$$w_i = max_j\ a_{ij} \qquad (2.5)$$

Оптимальной по данному критерию считается та стратегия, в которой значение w_i максимально:

$$W = max\ w_i$$

Ситуация, в которой оправдано применение критерия максимакса, прямо противоположна ситуации критерия Вальда. ЛПР считает ситуацию очень для себя благоприятной и рассчитывает на самый лучший исход, критерий «азартного игрока».

Критерий пессимизма-оптимизма Гурвица

В практике принятия решений ЛПР руководствуется не только критериями, связанными с крайним пессимизмом, крайним оптимизмом

или учётом максимального риска. Стараясь занять наиболее уравновешенную позицию, ЛПР может ввести оценочный коэффициент, называемый коэффициентом пессимизма, который находится в интервале $[0,\ 1]$ и отражает ситуацию, промежуточную между точкой зрения крайнего оптимизма и крайнего пессимизма. Данный коэффициент определяется на основе статистических исследований результатов принятия решений или личного опыта принятия решений в схожих ситуациях.

Здесь используются две гипотезы: первая - среда находится с вероятностью γ в самом невыгодном состоянии и вторая - среда находится с вероятностью $(1-\gamma)$ в самом выгодном состоянии.

Платёжная матрица дополняется столбцом, коэффициенты которого рассчитываются по формуле:

$$w_i = \gamma \cdot \min_j a_{ij} + (1-\gamma) \cdot \max_j a_{ij} \qquad (2.6)$$

где γ – коэффициент пессимизма.

Оптимальной по данному критерию считается стратегия, в которой значение w_i максимально:

$$W = max\ W_i$$

В зависимости от значения весового коэффициента γ можно получить различные предпочтительные альтернативы. При γ = 1 критерий Гурвица превращается в критерий Вальда. При γ = 0 он превращается в критерий “максимакса”, делающего ставку на то, что «выпадет» наилучший случай.

Критерий Гурвица применяется в ситуации, когда:

1. информация о состояниях окружающей среды отсутствует или недостоверна;
2. необходимо считаться с появлением каждого состояния окружающей среды;
3. реализуется только малое количество решений;
4. допускается некоторый риск.

Пример решения статистической игры

Пример 6. Рассмотрим пример решения игры «с природой» в экономической задаче.

Сельскохозяйственное предприятие производит капусту. Оно имеет возможность хранить произведённую капусту в течение всего сезона реализации – с осени до начала лета следующего года. Хозяйство может выбрать одну из трёх стратегических программ реализации капусты в течение сезона реализации:

A_1 - реализовать всю капусту осенью, непосредственно после уборки;

A_2 - заложить часть капусты на хранение и реализовать её в течение осенних и зимних месяцев;

A_3 – заложить всю капусту на хранение и реализовать её в весенние месяцы.

Сумма затрат на производство, хранение и реализацию капусты для хозяйства при выборе им каждой из стратегий составляет соответственно 20, 30 и 40 тыс. денежных единиц.

На региональном рынке капусты может сложиться одна из следующих трёх ситуаций:

S_1 - поступление капусты на рынок происходит равномерно в течение всего сезона реализации и рынок не испытывает сезонных колебаний цен реализации продукта;

S_2 - в осенние месяцы на рынок поступает капусты немного больше, чем зимой и весной. В связи с этим наблюдаются небольшие сезонные колебания цен – в начале зимы цены немного возрастают по сравнению с осенним уровнем и держатся стабильными в течение всех последующих месяцев сезона реализации;

S_3 - в осенние месяцы на рынок поступает капусты значительно больше, чем зимой и весной. Объёмы капусты, поступающей в течение сезона реализации, постоянно уменьшаются. Поэтому рынок испытывает значительные сезонные колебания цен.

Значения суммы выручки предприятия от реализации капусты при выборе каждой из стратегий реализации и формировании различных ситуаций на рынке представлены в таблице 2.5.

Таблица 2.5.

Выручка от реализации капусты, тыс. д.е.

Стратегии хозяйства	Выручка от реализации капусты, тыс. д.е.		
	S_1	S_2	S_3
A_1	30	25	22
A_2	30	40	33
A_3	30	40	60

В задаче необходимо определить:

1. Какая стратегия хозяйства является наиболее выгодной, если известны значения вероятностей состояний рынка капусты региона: 0,3, 0,6 и 0,1 соответственно;

2. Какая стратегия хозяйства является наиболее выгодной, если информация о вероятностях состояний рынка капусты отсутствует и предприятию необходимо:

а) получить минимально гарантированный выигрыш;

б) учесть значения риска от принятия различных решений;

в) определить наиболее выгодную стратегию, если коэффициент пессимизма равен 0,3;

3. Дать экономическую интерпретацию результатов решения задачи.

Решение

1. Составим платёжную матрицу данной игры. Её коэффициентами будут значения прибыли от производства капусты, получаемые как разница суммы выручки от реализации капусты и затрат на производство, хранение и реализацию капусты (рис. 2.15.).

	S_1	S_2	S_3
A_1	10	5	2
A_2	0	10	3
A_3	-10	0	20

Рис.2.15. Платёжная матрица задачи определения наиболее выгодной стратегии реализации капусты

2. Определим наиболее выгодную стратегию по критерию максимального математического ожидания выигрыша по формуле (2.1):

$W_1 = 10 \cdot 0,3 + 5 \cdot 0,6 + 2 \cdot 0,1 = 6,2$

$W_2 = 0 \cdot 0,3 + 10 \cdot 0,6 + 3 \cdot 0,1 = 6,3$

$W_3 = -10 \cdot 0,3 + 0 \cdot 0,6 + 20 \cdot 0,1 = -1$

	S_1	S_2	S_3	W_i
P_j	0,3	0,6	0,1	
A_1	10	5	2	6.2
A_2	0	10	3	6.3
A_3	-10	0	20	-1

Рис.2.16. Определение оптимальной стратегии в статистической игре по критерию максимального математического ожидания

$W = \max W_i = W_2$

Оптимальной по данному критерию при указанных значениях вероятностей состояния рынка капусты будет стратегия A_2 (W = 6,3) (рис. 2.16).

3. Определим наиболее выгодные стратегии предприятия по критерию Вальда, критерию максимакса, критерию недостаточного основания Лапласа и критерию пессимизма-оптимизма Гурвица (рисунок - 2.10).

	S_1	S_2	S_3	W_i Вальд	W_i Максимакс	W_i Лаплас	W_i Гурвиц
A_1	10	5	2	2	10	5,67	7,6
A_2	0	10	3	0	10	4,33	7
A_3	-10	0	20	-10	20	3,33	11

Рис.2.17. Определение оптимальной стратегии в статистической игре по максиминному критерию, критерию недостаточного основания Лапласа и критерию пессимизма-оптимизма

Значения W_i для критерия Вальда найдём по формуле (2.3):

W_1 = min (10, 5, 2) = 2

W_2 = min (0, 10, 3) = 0

W_3 = min (-10, 0 20) =-10

W = max W_i = W_1

Оптимальной стратегией по максиминному критерию является стратегия A_1 (W = 2).

По критерию максимакса (формула (2.5)) лучшей стратегией считается стратегия A_3

Определим оптимальную стратегию по критерию недостаточного основания Лапласа (формула (2.2)). По данному критерию оптимальной является стратегия A_1 (W = 5,67).

По критерию пессимизма-оптимизма Гурвица при коэффициенте пессимизма, равном 0,3 (формула (2.6)) – стратегия A_3 (W = 11).

4. Определим наиболее выгодную стратегию по критерию минимаксного риска Севиджа (формула (2.4)). Для этого рассчитаем матрицу рисков, рисунок 2.17.

	S_1	S_2	S_3	R_i
A_1	0	5	18	18
A_2	10	0	17	17
A_3	20	10	0	20

Рис.2.17. Определение оптимальной стратегии в статистической игре по критерию минимаксного риска с помощью построения матрицы рисков

Оптимальной стратегией по критерию минимаксного риска является стратегия A_2 (W = 17).

5. Проведём экономическую интерпретацию результатов решения задачи.

Если предприятие имеет информацию о вероятностях состояния рынка капусты и значения этих вероятностей соответствуют исходным данным задачи, наиболее выгодной стратегией является продажа части капусты в осенние месяцы и хранение оставшейся капусты для реализации в течение зимних месяцев (прибыль составит 6,3 тыс. д.е.). Эта же стратегия является наиболее эффективной, если информация о вероятностях состояний рынка капусты отсутствует и предприятию необходимо минимизировать степень возможного риска потери прибыли в процессе принятия решения (значение возможного риска составит 17 тыс. д.е.).

В случае, когда при отсутствии информации о состоянии рынка наиболее существенным для предприятия является не максимизация прибыли в абсолютном выражении, а получение её гарантированного объема, хотя бы и минимального, наиболее целесообразным решением является реализация всей капусты в осенние месяцы (гарантированная прибыль составит 2 тыс. д.е.). Эта же стратегия применяется, если считать, что вероятности состояний рынка примерно одинаковы (средняя прибыль составит 5,67 тыс. д.е.)

В случае, если информация о вероятностях состояний рынка отсутствует и риск значительных потерь не является для предприятия определяющим фактором при принятии решения, или если есть основания для оптимистической оценки ситуации на рынке капусты, при котором предприятие имеет возможность получить наибольшую прибыль от производства капусты, ему следует сохранить произведённую продукцию и реализовать её в весенние месяцы (прибыль составит соответственно 20 и 11 тыс. д.е.).

Сделаем несколько практических рекомендаций по применению рассмотренных выше критериев (принципов).

1. Критерий Вальда лучше всего использовать тогда, когда фирма желает свести риск от принятого решения к минимуму.

2. Коэффициент в критерии Гурвица выбирается из субъективных соображений: чем опаснее ситуация, тем больше ЛПР желает подстраховаться.

3. Критерий Сэвиджа удобен, если для предприятия приемлем некоторый риск.

4. Критерий Лапласа может быть применен, когда ЛПР не может предпочесть ни одной гипотезы.

5. Критерий оптимизма используется в ситуации, предполагающей большую возможность получения максимального результата.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Фирма А производит некоторый сезонный товар, имеющий спрос в течение 3 лет, и который она может поставить на рынок в один из моментов i (i = 1, 2, 3).
Для конкурентной борьбы с фирмой А дочерняя фирма В концерна D, не заботясь о собственных доходах, производит аналогичный товар, который поступает на рынок в один из моментов j (j=1,2,3). Цель фир-

мы B - разорение фирмы A, после чего, используя капитал концерна D, она может легко наверстать упущенное. Единственным законным средством фирмы B в конкурентной борьбе является выбор момента поставки товара на рынок, так как понижение цены на поставляемый товар запрещено определенным соглашением. Для разорения фирмы A фирма B должна минимизировать ее доходы. Пусть технология выпуска товара такова, что чем дольше он находится в производстве, и, следовательно, позже поступает на рынок, тем выше его качество, а реализуется товар только более высокого качества (так как цена на товары разного качества одна и та же). Доход от продажи товара в единицу времени составляет 4 денежных единиц.

Требуется построить матрицу выигрышей фирмы A, где под выигрышем понимается в данном случае доход этой фирмы, зависящий от складывающихся ситуаций. Используя полученную матрицу игры, найти все оптимальные стратегии обоих игроков. Предварительно проверить наличие седловой точки и возможности доминирования.

2. В конфликтной ситуации участвуют две стороны: A - государственная налоговая инспекция; B – налогоплательщик с определенным годовым доходом, налог с которого составляет 13 % годовых.

У стороны A два возможных варианта поведения. A_1 – не контролировать доход налогоплательщика; A_2 – контролировать доход налогоплательщика B и взимать с него:

- налога в размере 13 % годовых, если доход заявлен и соответствует действительности;

- налога в размере 13 % годовых и штрафа в размере 7%, если заявленный в декларации доход меньше действительного, или в случае сокрытия всего налога.

У стороны B три стратегии поведения: B_1 – заявить о действительном доходе; B_2 – заявить доход меньше действительного и реально налог в этом случае составит 7%; B_3 – скрыть доход, тогда не надо будет платить налог.

Составить матрицу игры и найти все оптимальные стратегии обоих игроков. Предварительно проверить наличие седловой точки и возможности доминирования.

3. Доминировать матрицу игры: $A=\begin{pmatrix}5&8&3&4&5\\3&5&6&2&8\\4&5&6&2&8\\3&6&1&2&4\\5&8&3&4&5\end{pmatrix}$.

Найти верхнюю и нижнюю цену игры, максиминные и минимаксные стратегии игроков.

4. Решить графически игру, заданную матрицей: $A=\begin{pmatrix}-1&0\\3&5\\7&-4\\-2&6\\5&3\end{pmatrix}$.

Ответы:

1. Матрица игры $A=\begin{pmatrix}6&4&8\\8&4&4\\4&4&2\end{pmatrix}$. В игре есть две седловые точки: (A_1,B_2) и $(A_2.B_2)$. То есть, фирме A нужно выходить на рынок в 1 или 2 год, а фирме B во второй год. Цена игры ν = 4 денежным единицам.

2. Матрица игры $A=\begin{pmatrix}13&20&20\\13&7&0\end{pmatrix}$. В игре есть седловая точка: (A_1,B_1). То есть, налоговой инспекции необходимо придерживаться первой стратегии, т.е. контролировать доходы налогоплательщика, а налогоплательщику – заявлять истинный доход. Цена игры ν = 13 %.

3. $\begin{pmatrix}6&2\\3&4\end{pmatrix}$. Нижняя цена игры α =3 и соответствующая максиминная стратегия первого игрока A_5; верхняя цена игры β = 4 и соответствующая минимаксная стратегия второго игрока B_4.

4. $P^*(0;\ 0{,}5;\ 0;\ 0;\ 0{,}5)$, $Q^*(0{,}5;\ 0{,}5)$, ν =4.

3. СЕТЕВЫЕ МОДЕЛИ В ПЛАНИРОВАНИИ ПРОЕКТА

3.1. Основные понятия и определения

Модели сетевого планирования и управления (модели СПУ) предназначены для планирования и управления сложными комплексами работ (проектами), направленными на достижение определенной цели в заданные сроки. В качестве примеров проектов можно привести следующие: строительство жилого дома или промышленного объекта, программа научно-исследовательских работ, реконструкция предприятия, создание новой организации, разработка новой техники и технологии, создание кинофильма, развитие региона и многое другое. Производственные циклы в чистом виде не являются проектами, т.к. проект является однократной, а не циклической деятельностью.

Управление проектом – профессиональная деятельность по руководству ресурсами (человеческими и материальными) путем применения методов, средств и управления для успешного достижения заранее поставленных целей в результате выполнения комплекса взаимосвязанных мероприятий при определенных требованиях к срокам, бюджету и характеристикам ожидаемых результатов проектов.

Сетевой моделью (СМ) называется экономико-математическая модель, отражающая весь комплекс работ и событий, связанных с реализацией проекта в их логической и технологической последовательности и связи.

Математическим аппаратом СМ является теория графов, поэтому необходимо ввести некоторые понятия теории графов.

Графом называется совокупность двух конечных множеств: множества точек (x_1, x_2, …, x_n), которые называются *вершинами*, и множества пар вершин, которые называются *ребрами* (e_1, e_2, …, e_n). Если пары вершин упорядочены, т.е. на каждом ребре задано направление, ребро называется *дугой*, а граф называется *ориентированным*; иначе – *неориентированным*. Последовательность ребер, ведущая от некоторой вершины к другой вершине, образует *путь***.** Замкнутый путь называется *циклом*. Граф называется *связным*, если для любых двух вершин существует путь, их соединяющий. В противном случае граф называется *несвязным*. Если дугам (i, j) присвоены некоторые числа или *веса* (C_{ij}), то граф называется *нагруженным*. В ориентированном графе вершины, не имеющие входных дуг, называются начальными (источниками), а вершины, не имеющие выходных дуг – конечными (стоками), остальные – промежуточными.

В СПУ применяются связные, ориентированные графы без циклов, имеющие одну начальную и одну конечную вершину.

Основные понятия сетевой модели: *событие*, *работа*, *путь***.**

Работа характеризует любое действие, требующее затрат времени или ресурсов. Работами считаются и процессы, не требующие затрат времени и ресурсов, а устанавливающие зависимости выполнения работ. Такие работы называются *фиктивными*. Работа обозначается парой чисел (i, j), где i – номер события, являющимся начальным для данной работы, j – номер события, являющимся конечным для данной работы, в которое она входит. Работа не может начаться раньше, чем свершится событие, являющееся для нее начальным. Каждая работа имеет свою продолжительность $t(i, j)$.

Работы на графах обозначаются стрелками: ⟶ ; фиктивные работы обозначаются пунктирными стрелками: – – – →.

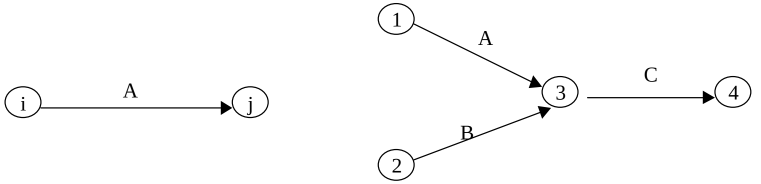
Событиями называются начало или завершение одной или нескольких работ. Они не имеют протяженности во времени. Событие совершается в тот момент, когда оканчивается последняя работа, входящая в него. На графе события изображаются кружками, внутри которых записывается номер события. В моделях СПУ имеется одно начальное событие (номер 0), одно конечное событие или завершающее (номер N) и промежуточные события (номер i). В графической интерпретации сетевой модели работы представляются дугами, а события – вершинами графа.

Путь – упорядоченная последовательность работ и событий, соединяющих начальную и конечную его вершины. *Полный путь L* – путь, начало которого совпадает с начальным событием сети, а конец – с завершающим. Продолжительность пути определяется суммой продолжительностей составляющих его работ. Путь, имеющий максимальную продолжительность, называют *критическим* (обозначение $L_{кр}$). Продолжительность критического пути обозначается как $t_{кр}$. Работы, принадлежащие критическому пути, называются *критическими*. Их несвоевременное выполнение ведет к срыву сроков завершения всего комплекса работ.

Сетевая модель должна удовлетворяет следующим требованиям:

1. Не должно быть событий с одинаковыми номерами.
2. Для каждой работы (i, j) должно выполняться $i < j$.
3. Должны быть только одно начальное и одно конечное события.
4. Сетевая модель не должна содержать циклы, т.е. замкнутые пути, соединяющие событие с ним же самим.

Приведем основные правила построения сетевых моделей с примерами.



(а) (б)

Рис.3.1. Графическое изображение операции

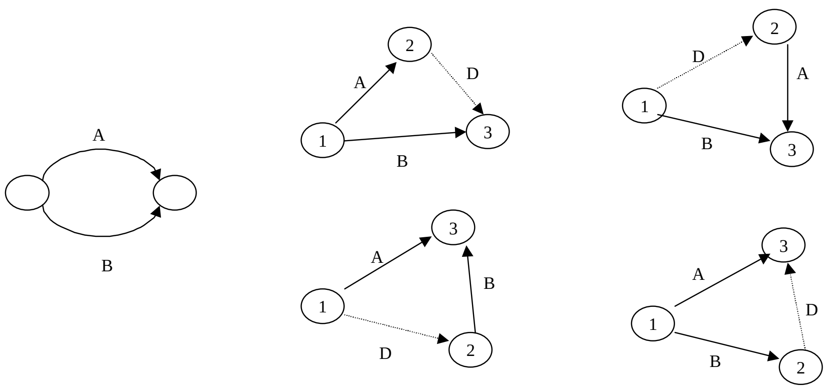
На рис. 3.1(а) приведен пример графического изображения операции А с начальным событием i и конечным j. На рис.3.1(б) показан другой пример, из которого видно, что для возможности начала операции С требуется завершение операций А и В . Протекание операций во времени задается путем нумерации событий, причем номер начального события всегда меньше номера конечного.

Приведем правила построения сетевой модели.

Правило 1. Каждая операция в сети представляется одной дугой (стрелкой).

Правило 2. Ни одна пара операций не должна определяться одинаковыми начальным и конечным событиями.

Возможность неоднозначного определения операций через события появляется в случае, когда две или большее число операций допустимо выполнять одновременно. Чтобы исключить такую ситуацию вводится фиктивная операция.

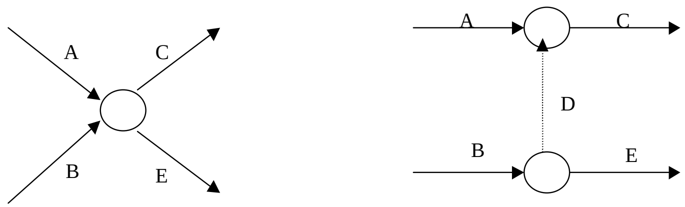


(а) - неправильно (б) - правильно

Рис.3.2. Изображение операций, выполняющихся одновременно

Рис.3.2(б) иллюстрирует различные варианты введения такой фиктивной операции D. В результате операции А и В определяются теперь однозначно парой событий, отличающихся либо номером начального, либо номером конечного события. Заметим, что фиктивные операции не требуют затрат ни времени, ни ресурсов.

Фиктивные операции позволяют также правильно отображать логические связи, которые без их помощи нельзя задать на сети. Предположим, что в некотором проекте операции А и В должны непосредственно предшествовать С, а операции Е непосредственно предшествует только В. На рис.3.3(а) эти условия отражены неверно, так как, хотя упорядочения между А, В и С показаны правильно, из этого фрагмента следует, что операции Е должны непосредственно предшествовать обе операции А и В. Правильное представление указанных условий дает фрагмент (б), в котором используется фиктивная операция D. Поскольку на операцию D не затрачиваются ни время, ни ресурсы, заданные отношения упорядочения выполняются.



(а) (б)

Рис.3.3. Изображение логических связей между операциями на сети

Правило 3. При включении каждой операции в сетевую модель для обеспечения правильного упорядочения необходимо дать ответы на следующие вопросы.

а) Какие операции необходимо завершить непосредственно перед началом рассматриваемой операции?

б) Какие операции должны непосредственно следовать после завершения данной операции?

в) Какие операции могут выполняться одновременно с рассматриваемой?

Пример 1.

Постройте сетевую модель, включающую операции A, B, C, D, E, F, H, G, I, J, K, L, которая отображает следующие отношения упорядочения.

1. А, В и С – исходные операции проекта, которые можно начинать одновременно.

2. A и B   предшествуют D.
3. B   предшествует E, F и H.
4. F и C   предшествуют G.
5. E и H   предшествуют I и J.
6. C, D, F и J   предшествуют K.
7. K   предшествует L.
8. I, G и L – завершающие операции проекта.

Сеть, соответствующая этим отношениям упорядочения, приведена на рис.3.4.

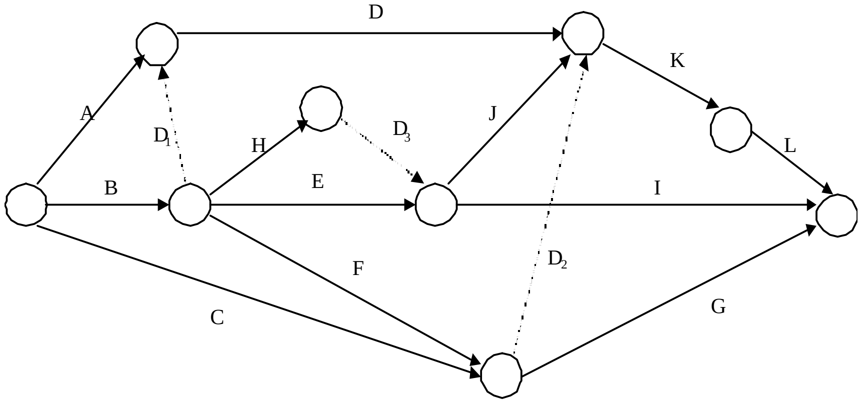


Рис.3.4. Сетевая модель примера 1

Фиктивные операции D_1 и D_2 введены для того, чтобы правильно отразить отношения следования. Операция D_3 использована для однозначного определения операций E и H по конечным событиям.

Для *правильной нумерации* событий используем следующий **алгоритм**:

Шаг 1. Присвоить начальному событию (вершина x_1 графа G), в которое не входит ни одного ребра (работы), т.е. со степенью $d^+(x_1)=0$, начальный номер 1. Затем мысленно удалить её из графа со всеми выходящими из неё рёбрами. Получим граф $G\backslash\{x_1\}$.

Шаг 2. Присвоить следующий номер 2 вершине графа $G\backslash\{x_1\}$, для которой $d^+(x_2)=0$, т. е. в которую не входит ни одного ребра. Если таких вершин окажется несколько, то выбирается любая из них. Затем мысленно удалить её из графа со всеми выходящими из неё рёбрами. Получим граф $G\backslash\{x_1; x_2\}$.

Повторять шаг 2 до тех пор, пока все события не будут занумерованы.

Замечание: нумерация событий может начинаться как с 1 так и с 0.

В результате получим:

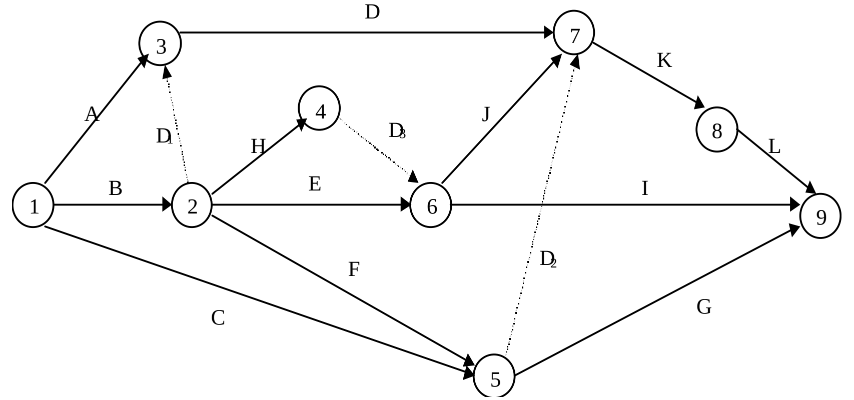


Рис.3.5. Нумерация событий сети

События сети пронумерованы таким образом, что возрастание номеров соответствует ходу выполнения проекта.

3.2. Временные параметры, характеризующие сетевую модель

Построение сети является лишь первым шагом на пути к получению календарного плана, определяющего сроки начала и окончания каждой операции. Вследствие наличия взаимосвязей между различными операциями для определения сроков их начала и окончания необходимо проведение специальных расчетов. Эти расчеты можно выполнять непосредственно на сети, пользуясь простыми правилами. В результате вычислений определяются критические и некритические операции проекта. Операция считается критической, если задержка ее начала или окончания приводит к увеличению срока окончания всего проекта. Некритическая операция отличается тем, что промежуток времени между ее ранним началом и поздним окончанием (в рамках рассматриваемого проекта) больше ее фактической продолжительности. В таком случае говорят, что некритическая операция имеет резерв, или запас времени.

Прежде чем приступить к описанию методов расчета сетевой модели введем её числовые характеристики. При расчетах для сетевой модели определяются следующие характеристики ее элементов.

Характеристики событий

1. *Ранний срок свершения события* $t_0^p = 0$, $t_j^p = \max\limits_i \left\{ t_i^p + t_{ij} \right\}$, j = 1,…,N характеризует самый ранний срок завершения всех путей, в него входящих. Этот показатель определяется «прямым ходом» по графу модели, начиная с начального события сети.

2. *Поздний срок свершения события* $t_N^n = t_N^p$, $t_i^n = \min\limits_j \left\{ t_j^n - t_{ij} \right\}$, i = 0,…,N–1 характеризует самый поздний срок, после которого остается ровно столько времени, сколько требуется для завершения всех путей, следующих за этим событием. Этот показатель определяется «обратным ходом» по графу модели, начиная с завершающего события сети.

3. *Резерв времени события* $R_i = t_i^n - t_i^p$ показывает, на какой максимальный срок можно задержать наступление этого события, не вызывая при этом увеличения срока выполнения всего комплекса работ.

Резервы времени для событий на критическом пути равны нулю, $R(i) = 0$.

При расчетах сетевого графика каждый круг, изображающий событие i, делим на четыре сектора:

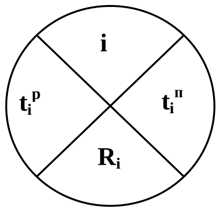


Рис.3.6. Изображение события на сети

Характеристики работы (i, j)

1. *Продолжительность работы*: t_{ij}. *(задается по условию задачи или исходя из нормативов времени, установленных для данного вида работ)*

2. *Ранний срок начала работы:* $t_{ij}^{рн} = t_i^p$.

3. *Ранний срок окончания работы:* $t_{ij}^{ро} = t_i^p + t_{ij}$.

4. *Поздний срок начала работы:* $t_{ij}^{пн} = t_j^n - t_{ij}$.

5. *Поздний срок окончания работы:* $t_{ij}^{по} = t_j^n$.

6. *Резервы времени работ:*

• *полный резерв* $R_{ij}^n = t_{ij}^{пн} - t_{ij}^{рн} = t_j^n - t_i^p - t_{ij}$ – это максимальный запас времени, на который можно отсрочить начало или увеличить длительность работы без увеличения длительности критического пути. Работы на критическом пути не имеют полного резерва времени, для них $R_{ij}^n = 0$;

• *частный резерв первого рода* $R_{ij}^1 = R_{ij}^n - R_i = t_j^n - t_i^n - t_{ij}$ – часть полного резерва, на которую можно увеличить продолжительность работы, не изменив позднего срока ее начального события и не затрагивая резервов времени всех предшествующих работ;

• *частный резерв второго рода* $R_{ij}^2 = R_{ij}^n - R_j = t_{ij}^{пн} - t_{ij}^{рн} = t_j^p - t_i^p - t_{ij}$ – максимальный запас времени, на который можно задержать начало работы или (если она началась в ранний срок) увеличить ее продолжительность, не изменяя ранних сроков начала последующих работ, т.е. не затрагивая резервов времени всех последующих работ;

• *свободный резерв* $R_{ij}^c = R_{ij}^n - R_i - R_j = t_j^p - t_i^n - t_{ij}$ – запас времени, при котором все предшествующие работы заканчиваются в поздние сроки, а все последующие – начинаются в ранние сроки.

Использование этого резерва не влияет на величину резервов времени других работ. Все виды резервов проиллюстрированы на рисунке 3.7.

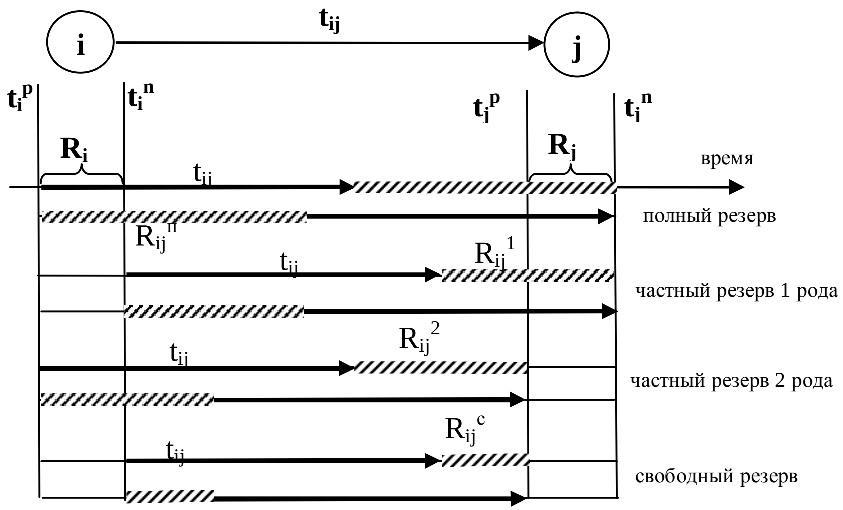


Рис.3.7. Резервы времени работы *(i,j)*

Сделаем ряд замечаний.

✓ Работы, лежащие на критическом пути, резервов времени не имеют. Если на критическом пути $L_{кр}$ лежит начальное событие i работы (i, j), то $R_{ij}^{n} = R_{ij}^{1}$. Если на $L_{кр}$ лежит конечное событие j работы (i, j), то $R_{ij}^{n} = R_{ij}^{2}$. Если на $L_{кр}$ лежат и событие i, и событие j работы (i, j), а сама работа не принадлежит критическому пути, то $R_{ij}^{n} = R_{ij}^{2} = R_{ij}^{c}$.

✓ Только критические операции должны иметь нулевой полный резерв времени. Когда полный резерв равен нулю, свободный резерв также должен быть равен нулю. Однако обратное неверно, поскольку свободный резерв некритической операции также может быть нулевым.

✓ Необходимо учитывать тот факт, что при вычислении полного резерва времени работы принимается неявное допущение, согласно которому все предшествующие работы (во всяком случае, те, которые имеют какое-либо отношение к рассматриваемой работе) должны выполняться как можно раньше, чтобы обеспечить полный резерв времени для данной работы. Следовательно, в общем случае практически невозможно для каждой работы реализовать собственный полный резерв времени.

✓ Полный резерв времени для определенной работы всегда больше или равен остальных резервов.

✓ Различные показатели резерва времени помогают распределять имеющиеся ресурсы для каждой работы. При наличии резерва времени имеется некоторая свобода распределения ресурсов.

✓ Свободный резерв времени может быть отрицательным. Это будет значить, что возможности для этого резерва нет, т.е. в самом неблагоприятном случае предыдущие работы ещё не закончатся, а последующие уже должны будут начаться. Если он положителен, то данная работа может быть увеличена на это значение без каких-либо последствий и без затрат резервов времени предшествующих и последующих работ.

✓ Частный резерв первого рода может быть использован на увеличение продолжительности данной и последующих работ, без затрат резервов времени предшествующих работ.

✓ Частный резерв второго рода может быть использован на увеличение продолжительности данной и предшествующих работ, без затрат резервов времени последующих работ.

Характеристики путей

1. *Продолжительность пути L* равна сумме продолжительностей составляющих ее работ: t_L.

2. *Резерв времени пути* равен разности между длинами критического пути и рассматриваемого пути: $R_L = t_{кр} - t_L$. Резерв времени пути показывает, на сколько может увеличиться продолжительность работ, составляющих данный путь, без изменения продолжительности срока выполнения всех работ.

В сетевой модели можно выделить так называемый *критический путь*.

Критический путь $L_{кр}$ состоит из работ (i, j), у которых полный резерв времени равен нулю $R_{ij}^{n} = 0$, кроме этого, резерв времени R_i всех событий i на критическом равен 0. Длина критического пути определяет величину наиболее длинного пути от начального до конечного события сети и равна $t_{кр} = t_р(N) = t_п(N)$. Заметим, что в проекте может быть несколько критических путей.

3. *Коэффициент напряженности работ*

Для оценки трудности своевременного выполнения работ служит коэффициент напряженности работ:

$$K_н(i, j) = 1 - \frac{t_{L_{\max}(i,j)} - t_{кр}}{t_{кр} - t'_{кр}} = 1 - \frac{R_{ij}^{n}}{t_{кр} - t'_{кр}},$$

где $t_{L_{\max}(i,j)}$ – продолжительность максимального пути $L_{max}(i, j)$, проходящего через работу (i, j); $t'_{кр}$ – продолжительность отрезка пути $L_{max}(i, j)$, совпадающего с критическим путем.

Видно, что $K_н(i, j) < 1$. Чем ближе $K_н(i, j)$ к 1, тем сложнее выполнить данную работу в установленный срок. Напряженность критических работ полагается равной 1. Все работы сетевой модели могут быть разделены на 3 группы: напряженные ($K_н(i, j) > 0{,}8$), надкритические ($0{,}6 < K_н(i, j) < 0{,}8$) и резервные ($K_н(i, j) < 0{,}6$).

В результате перераспределения ресурсов стараются максимально уменьшить общую продолжительность работ, что возможно при переводе всех работ в первую группу.

3.3. Определение критического пути

Критический путь определяет непрерывную последовательность критических операций, связывающих исходное и завершающее события сети. Критический путь - самый длинный полный путь. Другими словами, критический путь задает все критические операции проекта. Метод определения такого пути иллюстрируется на численном примере.

Пример 2.

Комплекс работ по проекту состоит из 10 работ, информация о которых представлена в таблице 3.1. Построить сетевую модель с исходным событием 0. Определить критический путь, резервы времени работ и событий.

Таблица 3.1

Работа	Предшествующая работа	Продолжительность работы, недель
A	-	2
B	-	3
C	A	2
D	B	3
E	B	2
G	C,D	3
H	C,D	2
I	E,C,D	7
K	E,C,D	5
L	I,G	6

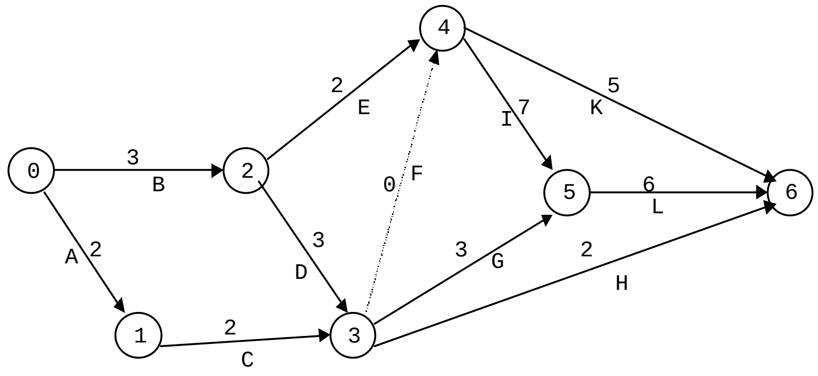


Рис.3.8. Сетевая модель примера 2

Расчет критического пути включает два этапа. Первый этап называется прямым ходом. Вычисления начинаются с исходного события и продолжаются до тех пор, пока не будет достигнуто завершающее событие всей сети. Для каждого события j вычисляется одно число t_j^p, представляющее ранний срок его наступления (ранний срок окончания всех операций, входящих в событие j; ранний срок начала всех операций, выходящих из события j).

На *втором этапе*, называемом обратным ходом, вычисления начинаются с завершающего события сети и продолжаются, пока не будет достигнуто исходное событие. Для каждого события i вычисляется число

t_i^n, представляющее поздний срок его наступления (поздний срок окончания всех операций, входящих в событие i, поздний срок начала всех операций, выходящих из события i).

Прямой ход.

Если принять $j = 0$, т.е. считать, что номер исходного события сети равен нулю, то при расчете сети полагаем $t_0^p = 0$. Вычисления при прямом проходе выполняются по формуле $t_j^p = \max_i \{t_i^p + t_{ij}\}$, где max берется по всем операциям, завершающимся в j-м событии. Следовательно, чтобы вычислить t_j^p для события j, нужно сначала определить t_i^p начальных событий ***всех*** операций (i,j), входящих в событие j.

Применительно к рис. 3.8 вычисления начинаются с $t_0^p = 0$. Далее получим:

$t_1^p = t_0^p + t_{01} = 0 + 2 = 2$,

$t_2^p = t_0^p + t_{02} = 0 + 3 = 3$,

$t_3^p = \max_{i=1,2} \{t_i^p + t_{i3}\} = \max\{2 + 2; 3 + 3\} = 6$,

$t_4^p = \max_{i=2,3} \{t_i^p + t_{i4}\} = \max\{3 + 2; 6 + 0\} = 6$,

$t_5^p = \max_{i=3,4} \{t_i^p + t_{i5}\} = \max\{6 + 3; 6 + 7\} = 13$,

$t_6^p = \max_{i=3,4,5} \{t_i^p + t_{i6}\} = \max\{6 + 2; 6 + 5; 13 + 6\} = 19$.

На этом вычисления первого этапа заканчиваются.

Обратный ход начинается с завершающего события сети, для которого полагаем

$t_N^n = t_N^p$, где N- завершающее событие. Затем, для любого события i

$t_i^n = \min_j \{t_j^n - t_{ij}\}$, где min берется по всем операциям, выходящим из i-го события. Далее получим:

$t_6^n = t_6^p = 19$,

$t_5^n = t_6^n - t_{56} = 19 - 6 = 13$,

$$t_4^n = \min_{j=5,6}\left\{t_j^n - t_{4j}\right\} = \min\{13-7; 19-5\} = 6,$$

$$t_3^n = \min_{j=4,5,6}\left\{t_j^n - t_{3j}\right\} = \min\{6-0; 13-3; 19-2\} = 6,$$

$$t_2^n = \min_{j=3,4}\left\{t_j^n - t_{2j}\right\} = \min\{6-3; 6-2\} = 3,$$

$$t_1^n = t_3^n - t_{13} = 6-2 = 4,$$

$$t_0^n = \min_{j=1,2}\left\{t_j^n - t_{0j}\right\} = \min\{4-2; 3-3\} = 0.$$

Таким образом, вычисления при обратном проходе закончены.

Теперь, используя результаты вычислений прямого и обратного ходов, можно определить операции критического пути. Операция (i,j) принадлежит критическому пути, если она удовлетворяет следующим трем условиям:

$$t_i^n = t_i^p, \qquad (3.1)$$

$$t_j^n = t_j^p, \qquad (3.2)$$

$$t_j^p - t_i^p = t_j^n - t_i^n = t_{ij} \qquad (3.3)$$

По существу, эти условия означают, что между ранним сроком начала (окончания) и поздним сроком начала (окончания) критической операции запас времени отсутствует. В сетевой модели это отражается в том, что для критических операций числа, проставленные у начальных и конечных событий, совпадают, а разность между числом у конечного события и числом у начального события равна продолжительности соответствующей операции.

На рис.3.9 критический путь (выделен жирным) включает операции {**B, D, F, I, L**}. Длина критического пути определяет наименьшее время, за которое может быть реализован весь проект в целом. В данном случае $t_{кр}$=19 недель, то есть, весь комплекс работ завершиться через 19 недель. Если задерживается выполнение любой из критических операций на некоторое время, то на это же время будет откладываться срок выполнения всего комплекса работ. Заметим, что операции (2,4), (3,5), (3,6) и (4,6) удовлетворяют условиям (1) и (2), но не условию (3). Поэтому они не являются критическими. Отметим также, что критический путь представляет собой непрерывную цепочку операций, соединяющую исходное событие сети с завершающим.

Другой способ определения критического пути – по событиям с нулевыми резервами. Определим резервы всех событий, используя формулу: $R_i = t_i^n - t_i^p$.

$R_0 = t_0^n - t_0^p = 0 – 0 = 0,$

$R_1 = t_1^n - t_1^p = 4 – 2 = 2,$

$R_2 = 3 – 3 = 0,$

$R_3 = 6 – 6 = 0,$

$R_4 = 6 – 6 = 0,$

$R_5 = 13 – 13 = 0,$

$R_6 = 19 – 19 = 0.$

Следовательно, критический путь проходит через события $L_{кр}$: $0 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 6$ и содержит работы: B, D, F, I, L.

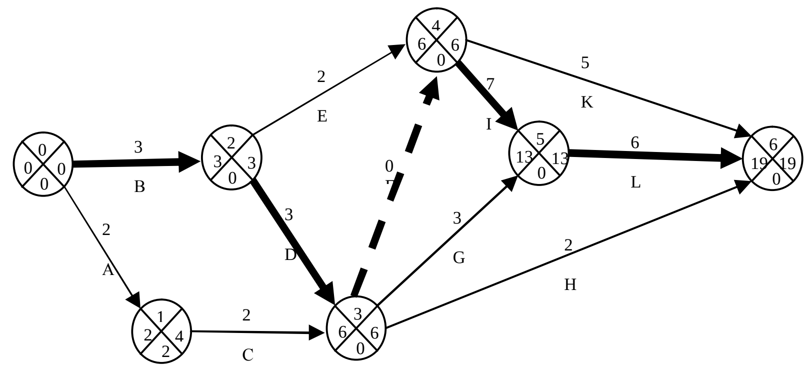


Рис.3.9. Критический путь

Временные характеристики работ данного сетевого графика сведем в таблицу 3.2.

Таблица 3.2

Операция (i,j)	t_{ij}	$t_{ij}^{рн}$	$t_{ij}^{ро}$	$t_{ij}^{пн}$	$t_{ij}^{по}$	$R_{ij}^{п}$	R_{ij}^{1}	R_{ij}^{2}	R_{ij}^{c}
0	**1**	**2**	**3=1+2**	**4=5-1**	**5**	**6=4-2**	**7**	**8**	**9**
A-(0,1)	2	0	2	2	4	2	2	0	0
B- (0,2)	**3**	**0**	**3**	**0**	**3**	**0**	**0**	**0**	**0**
C – (1,3)	2	2	4	4	6	2	0	2	0

Продолжение таблицы 3.2

Операция (i,j)	t_{ij}	$t_{ij}^{рн}$	$t_{ij}^{ро}$	$t_{ij}^{пн}$	$t_{ij}^{по}$	$R_{ij}^{п}$	R_{ij}^{1}	R_{ij}^{2}	R_{ij}^{c}
D – (2,3)	**3**	**3**	**6**	**3**	**6**	**0**	**0**	**0**	**0**
E – (2,4)	2	3	5	4	6	1	1	1	1
F – (3,4)	**0**	**6**	**6**	**6**	**6**	**0**	**0**	**0**	**0**
G – (3,5)	3	6	9	10	13	4	4	4	4
H – (3,6)	2	6	8	17	19	11	11	11	11
I – (4,5)	**7**	**6**	**13**	**6**	**13**	**0**	**0**	**0**	**0**
K – (4,6)	5	6	11	14	19	8	8	8	8
L – (5,6)	**6**	**13**	**19**	**13**	**19**	**0**	**0**	**0**	**0**

По таблице хорошо видны критические операции – их полный резерв равен нулю (выделены жирным).

Проанализируем ситуацию с резервами, например, работы А.

Полный её резерв $R_{01}^{п} = 2$ - максимальная продолжительность задержки работы (0,1), не вызывающая задержки в осуществлении всего проекта, т.е., эту работу можно задержать или увеличить длительность на 2 недели, от этого весь комплекс работ все равно выполниться за 19 недель. Но при этом, путь проходящий через работу А станет критическим.

Частный резерв первого рода $R_{01}^{1} = 2$ - это максимально возможная задержка работы, не влияющая на окончательный срок выполнения проекта, если предшествующие работы выполняются с запаздыванием. Поскольку у этой работы нет предшествующих, то этот резерв совпадает с полным.

Частный резерв второго рода $R_{01}^{2} = 0$ - для работы он является показателем максимальной задержки работы, не влияющей на начало последующих работ. Операции с частным резервом второго рода уникальны, так как выполнение операции может откладываться, не влияя на ранний старт следующих операций. Изменение сроков операции с частным резервом второго рода требует меньше координации с другими участками проекта. В данном случае операция не обладает этим резервом, т.к. откладывая выполнение работы А, мы тем самым будем задерживать старт работы С, следующей за ней.

Свободный резерв $R_{01}^{c} = 0$. Он не оказывает никакого влияния на предшествующие и последующие операции. Свободный резерв времени является удобным показателем свободы планирования сроков. Он представляет собой максимальную продолжительность задержки работы без задержки последующих работ, если все предшествующие работы заканчиваются как можно позже. Работа А не обладает этим резервом.

Вычислим *коэффициент напряженности* работы (0,1):

$$K_н(0{,}1) = 1 - \frac{t_{L_{\max}(0,1)} - t_{кр}}{t_{кр} - t'_{кр}} = 1 - \frac{R_{01}^{n}}{t_{кр} - t'_{кр}},$$

где $t_{L_{\max}(0,1)}$– продолжительность максимального пути $L_{max}(0,\ 1)$, проходящего через работу $(0,\ 1)$; $t'_{кр}$ – продолжительность отрезка пути $L_{max}(0,\ 1)$, совпадающего с критическим путем. В данной задаче $L_{max}(0,\ 1)$: $0 \to 1 \to 3 \to 4 \to 5 \to 6$, отрезок этого пути, совпадающий с критическим: $3 \to 4 \to 5 \to 6$, следовательно, $t'_{кр}$ = 0+7+6 = 13.

$$K_н(0{,}1) = 1 - \frac{R_{01}^{n}}{t_{кр} - t'_{кр}} = 1 - \frac{2}{19 - 13} = 2/3 \approx 0{,}66\,.$$

3.4. Пример расчета сети

Пример 3. Последовательность работ проекта и их длительности представлены в табл. 3.3. Необходимо найти ранние и поздние сроки свершения событий, рассчитать резервы времени всех работ, определить напряженности работ и критические пути.

Таблица 3.3

Работа	A	B	C	D	E	F	G	H	J	K	L
Предшествующая работа	-	-	-	A	A	A	B,D	C	E,G	E,G	J,H
Продолжительность работы, недель	4	5	4	1	7	8	4	2	1	3	4

Решение. По данным таблицы 3.3 строится сетевой график (рис. 3.10) и рассчитываются все характеристики событий и работ.

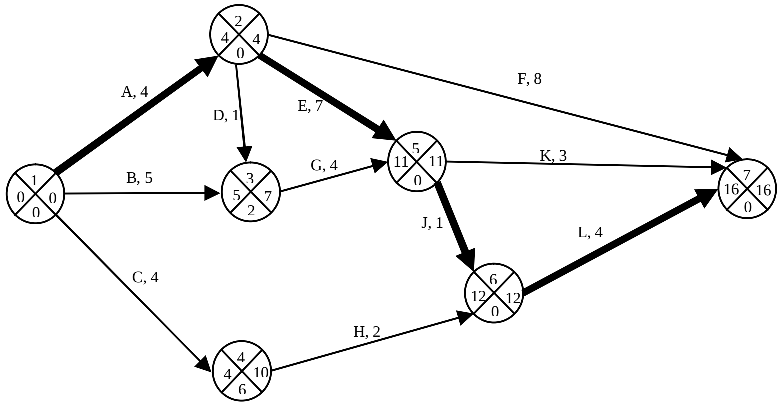


Рис.3.10. Сетевой график с характеристиками событий

Рассчитаем характеристики событий. При определении ранних сроков наступления событий двигаемся по сетевому графику слева направо и используем формулы $t_0^p = 0$, $t_j^p = \max_i \{t_i^p + t_{ij}\}$, $j = 1,\ldots,N$. При определении поздних сроков наступления события двигаемся по сетевому графику справа налево и используем формулы $t_N^n = t_N^p$, $t_i^n = \min_j \{t_j^n - t_{ij}\}$, $i = 0,\ldots,N{-}1$.

Для наглядности каждое событие сетевого графика разделено на 4 сектора. Верхний сектор соответствует номеру события, в левом секторе записан ранний срок t_i^p наступления события i, в правом – поздний срок t_i^n наступления события i, в нижнем секторе представлен резерв времени R_i события i. Эти же характеристики представлены в таблице 3.4, приведенной ниже.

Таблица 3.4

Событие i	1	2	3	4	5	6	7
t_i^p	0	4	5	4	11	12	16
t_i^n	0	4	7	10	11	12	16
R_i	0	0	2	6	0	0	0

Анализ таблицы и сетевого графика показывает, что критический путь имеет вид $L_{кр}$: $1\to2\to5\to6\to7$, а его длина равна $t_{кр} = 16$.

Перейдем к определению характеристик работ. Отдельная работа может начаться и окончиться в ранние, поздние или другие промежуточные сроки. В дальнейшем, при оптимизации сетевого графика, возможно любое размещение работ в заданном интервале.

Расчет сроков начала и окончания работ и резервов времени работ проводим по формулам, приведенным выше.
Все расчеты сведены в таблицу 3.5 (столбцы 2-9).

Таблица 3.5

Работы	t_{ij}	$t_{ij}^{рн}$	$t_{ij}^{ро}$	$t_{ij}^{пн}$	$t_{ij}^{по}$	$R_{ij}^{п}$	R_{ij}^{1}	R_{ij}^{2}	R_{ij}^{c}	$К_н$
0	**1**	**2**	**3=1+2**	**4=5-1**	**5**	**6=4-2**	**7**	**8**	**9=7+8-6**	**10**
(1,2)	4	0	4	0	4	0	0	0	0	1
(1,3)	5	0	5	2	7	2	2	0	0	
(1,4)	4	0	4	6	10	6	6	0	0	
(2,3)	1	4	5	6	7	2	2	0	0	
(2,5)	7	4	11	4	11	0	0	0	0	1
(2,7)	8	4	12	8	16	4	4	4	4	
(3,5)	4	5	9	7	11	2	0	2	0	0,71
(4,6)	2	4	6	10	12	6	0	6	0	
(5,6)	1	11	12	11	12	0	0	0	0	1
(5,7)	3	11	14	13	16	2	2	2	2	
(6,7)	4	12	16	12	16	0	0	0	0	1

Анализ таблицы и сетевого графика показывает тот же результат: критический путь имеет вид $L_{кр}$: $1\to2\to5\to6\to7$, а его длина равна $t_{кр} = 16$.

После нахождения критического пути $L_{кр}$: $1\to2\to5\to6\to7$ длины 16 перейдем к определению коэффициентов напряженности работ. Рассмотрим, например, работу (3, 5) и найдем все полные пути, проходящие через эту работу, и соответствующие им длины:

L_1: $1\to2\to3\to5\to7$; $t(L_1)=12$;
L_2: $1\to3\to5\to7$; $t(L_2)=12$;
L_3: $1\to3\to5\to6\to7$; $t(L_2)=14$;
L_4: $1\to2\to3\to5\to6\to7$; $t(L_3)=14$.

Через работу (3,5) проходит два максимальных пути длины 14. Выберем второй из них. Тогда $t'_{кр} = 9$ – длина части (1-2, 5-6-7) пути (1-2-3-5-6-7), совпадающей с критическим путем (1-2-5-6-7). Воспользуемся формулой расчета коэффициента напряженности:

$$K_н(i,j) = 1 - \frac{t_{L_{\max}(i,j)} - t_{кр}}{t_{кр} - t'_{кр}} = 1 - \frac{R_{ij}^n}{t_{кр} - t'_{кр}},$$

в результате получим, что

$$K_{н}(3,5) = 1 - \frac{R^{n}_{35}}{t_{кр} - t'_{кр}} = 1 - \frac{2}{16-9} = \frac{5}{7} = 0{,}71.$$

Для расчета коэффициента напряженности работ надо построить список всех полных путей сетевого графика. Для этого используется специальный алгоритм, основанный на преобразовании сетевого графика в многоуровневый граф типа «дерева», но с повторяющимися вершинами. При построении дерева сетевого графика можно использовать таблицу длительностей работ.

1. Построение «дерева» сетевого графика

На 1-й уровень помещается начальная вершина сетевого графика. На (*n + 1*)-й уровень, правее предыдущего, помещаются все вершины графа, непосредственно связанные с уровнем (*n*) и соединяются с ним ребрами работ. Расположение вершин на каждом уровне осуществляется сверху вниз в порядке возрастания номеров.

2. Составление списка всех полных путей сетевого графика

Список путей составляется по крайним правым ребрам. Очередной путь строится при движении по ребрам дерева справа налево от конечного события сети к начальному.

Построим «дерево» для рассмотренного сетевого графика:

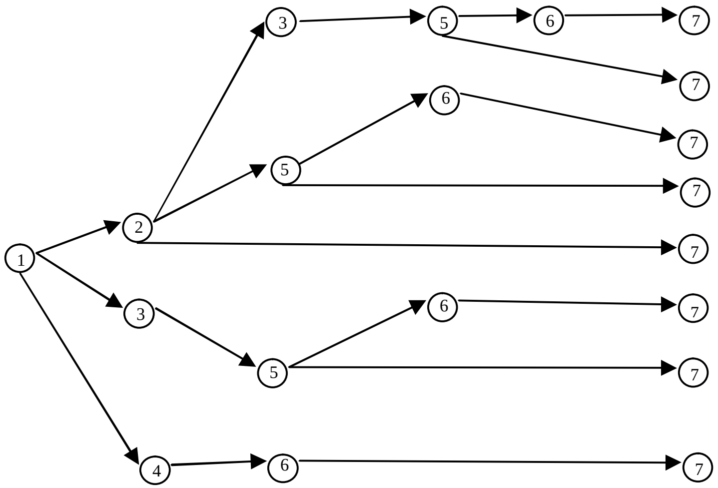


Рис.3.11. Дерево сетевого графика

Итого, получили 8 полных путей:

L_1: $1 \to 2 \to 3 \to 5 \to 6 \to 7$; $t_{L1}=14$;

L_2: $1 \to 2 \to 3 \to 5 \to 7$; $t_{L2}=12$;

L_3: $1 \to 2 \to 5 \to 6 \to 7$; $t_{L3}=16$;

L_4: $1 \to 2 \to 5 \to 7$; $t_{L4}=14$;

L_5: $1 \to 2 \to 7$; $t_{L5}=12$;

L_6: $1 \to 3 \to 5 \to 6 \to 7$; $t_{L6}=14$;

L_7: $1 \to 3 \to 5 \to 7$; $t_{L7}=12$;

L_8: $1 \to 4 \to 6 \to 7$; $t_{L8}=10$.

3.5. Оптимизация сетевого графика по критерию «время – стоимость»

Конечным результатом выполняемых на сетевой модели расчетов является сетевой график и его временные характеристики. При его построении необходимо учитывать множество дополнительных факторов. Например: ограничения в ресурсах, ограничения в стоимости проекта, ограничения по времени проекта и т.п.

Оптимизация проекта может осуществляться с точки зрения различных критериев и с различными ограничениями. Вот основные из них:

1. минимизировать общее время выполнения проекта при том, что сумма вложенных дополнительных средств не должна превысить заданной величины;
2. минимизировать сумму вложенных дополнительных средств в проект при том, что время завершения проекта не должно превысить заданного срока;
3. минимизировать общее время выполнения проекта с помощью использования внутренних резервов (переброс средств с некритических операций на критические, тем самым увеличивая срок выполнения некритических операций и уменьшая срок выполнения критических операций);
4. определить оптимальные сроки начала и окончания операций с целью минимизировать общее время выполнения проекта, при которых в любой момент планируемого периода было бы достаточно ресурсов для их выполнения. (распределение ресурсов)

Рассмотрим подробнее эти задачи.

Общая стоимость проекта зависит от стоимости выполнения каждой операции, а также от постоянных затрат. Общая стоимость выполнения комплекса работ представляет собой сумму стоимостей каждой операции.

Нередко выполнение работ проекта можно ускорить путем выделения большего количества ресурсов (денег, рабочих и т.п.). Последствием такой меры является увеличение стоимости данных операций. Однако, если операция критическая, то экономия времени ее выполнения может привести к общей экономии времени выполнения проекта в целом, а, следовательно, и к снижению общей стоимости проекта.

В таких случаях существует много различных комбинаций продолжительностей работ, при которых может быть получена некоторая требуемая плановая продолжительность проекта в целом. Однако каждая комбинация может давать различные значения общей стоимости проекта.

Процедуры выбора компромиссного соотношения между сроками и затратами имеют целью составление календарного плана, обеспечивающего минимальные затраты при данной продолжительности проекта. Или, целью может быть минимизация времени выполнения всего комплекса работ при заданной сумме расходов на проект.

В общем случае можно предположить, что руководители проекта могут оценивать продолжительность работ как функцию суммы денежных средств, затраченных на каждую из них.

Итак, могут быть поставлены и решены следующие две задачи оптимизации сетевого графика по критерию «время-стоимость»:

1. Минимизация стоимости проекта при сохранении времени его выполнения $t_{кр}$.

2. Минимизация времени выполнения $t_{кр}$ при заданной стоимости проекта.

Стоимостной аспект вводится в схему календарного планирования проекта путем определения зависимости «затраты - продолжительность» для каждой операции проекта. При этом рассматриваются только элементы так называемых прямых затрат, а косвенные затраты типа административно-управленческих расходов не принимаются во внимание. Однако их влияние учитывается при выборе окончательного календарного плана проекта.

При оптимизации сетевого графика предполагается:

- уменьшение продолжительности работ ведет к увеличению их стоимости;
- для каждой работы (i, j) ее продолжительность t_{ij} лежит в пределах $a_{ij} \le t_{ij} \le b_{ij}$, где a_{ij} – минимально возможная продолжительность работы; b_{ij} – максимально допустимая продолжительность выполнения работы;
- стоимость C_{ij} работы заключена в пределах C_{ij}^{max} и C_{ij}^{min}.

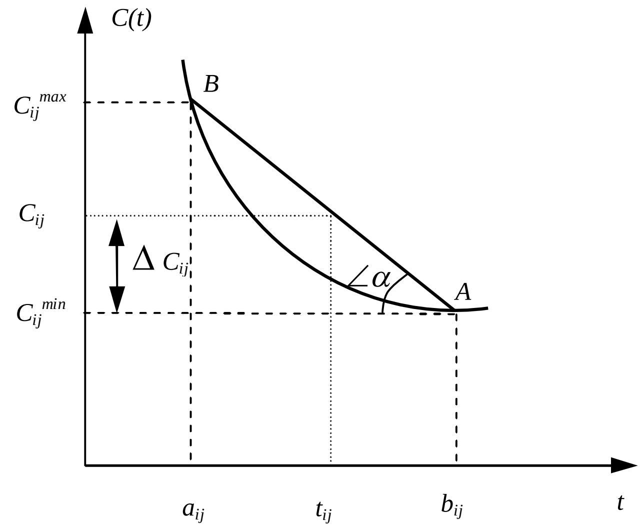


Рис.3.12. Зависимость стоимости выполнения работы от времени её выполнения

На рис. 3.12 показана типичная линейная зависимость стоимости операции (i,j) от ее продолжительности, используемая для большинства проектов. Точка A с координатами (b_{ij} , C_{ij}^{min}), где b_{ij} – продолжительность операции, а C_{ij}^{min} – ее стоимость, соответствует, так называемому, нормальному режиму выполнения операции.

Продолжительность операции b_{ij} можно уменьшить (сжать), увеличив интенсивность использования ресурсов (т.е. количество ресурсов, затрачиваемых на выполнение операции в единицу времени), а, следовательно, увеличив и стоимость операции. Однако существует предел, называемый минимальной продолжительностью операции a_{ij}. За точкой, соответствующей этому пределу (точкой максимально интенсивного режима), дальнейшее увеличение интенсивности использования ресурсов ведет лишь к увеличению затрат без сокращения продолжительности операции. Этот предел обозначен на рис. 3.12 точкой B с координатами (a_{ij}, C_{ij}^{max}).

Линейная зависимость «затраты - продолжительность» принимается, прежде всего, из соображений удобства, так как ее можно определить для любой операции всего по двум точкам нормального и максимального режимов. Использование нелинейной зависимости (кривая на рис. 3.12) существенно усложняет вычисления. Однако иногда нелинейную зависимость можно аппроксимировать кусочно-линейной. При таких условиях операция разбивается на части, каждая из которых соответствует одному линейному отрезку. Отметим, что наклоны этих отрезков при переходе от точки нормального режима к точке максимально интенсивного режима возрастают.

Обычно применяют линейную модель зависимости затрат от времени (рис. 3.12). Тогда изменение стоимости работы ΔC_{ij} при увеличении ее продолжительности на величину Δt_{ij} определяется соотношением

$$\Delta C_{ij} = h_{ij} \cdot \Delta t_{ij}\,, \qquad (3.4)$$

где h_{ij} показывает изменение затрат при изменении времени выполнения работы (i, j) на единицу и вычисляется по формуле

$$h_{ij} = tg\alpha = \frac{C_{ij}^{\max} - C_{ij}^{\min}}{b_{ij} - a_{ij}}.$$

Задача минимизации стоимости проекта

Минимизация стоимости проекта при сохранении $t_{кр}$ достигается увеличением продолжительности выполнения некритических работ на основе использования их частных резервов времени второго рода, т.к. их использование не влияет на ранние сроки начала последующих работ. Увеличение продолжительности работы (i, j) осуществляется на величину Δt_{ij} до тех пор, пока не будет исчерпан весь частный резерв времени второго рода, или не будет достигнуто максимально допустимое значение продолжительности работы (i, j), т.е.

$$\Delta t_{ij} = \min\left\{b_{ij} - t_{ij}; R_{ij}^2\right\}$$

$$\Delta C_{ij} = h_{ij} \cdot \Delta t_{ij}$$

Полная стоимость проекта $C = \sum C_{ij}$ уменьшается на величину $\Delta C = \sum \Delta C_{ij}$.

Пример 4. Провести минимизацию стоимости проекта. Сетевой график представлен на рис. 3.13. Значения продолжительности a_{ij}, t_{ij}, b_{ij}, стоимости C_{ij} выполнения работы при времени t_{ij} и коэффициенты затрат на ускорение h_{ij} представлены в таблице 3.6. Первоначальная стоимость проекта 1204 тыс. руб.

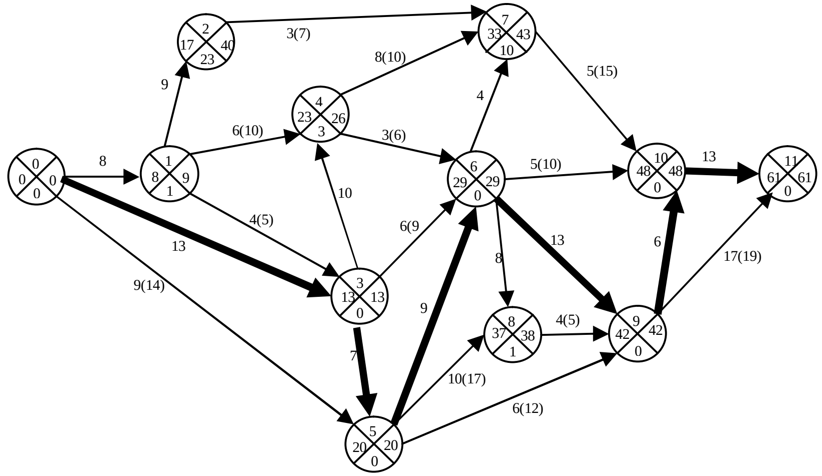


Рис.3.13. Сетевой график проекта

Решение. Исходные и расчетные значения представлены в табл. 3.6. Заметим, что на предмет увеличения длительности исполнения рассматриваются только те работы, для которых $R_{ij}^2 > 0$. В результате оптимизации стоимость нового проекта при том же времени выполнения снизилась на 293 тыс. руб. и стала равна 911, т.е. уменьшилась почти на 24,3%.

В результате снижения стоимости проекта появились новые критические пути с $t_{кр} = 61$:
$0 \to 1 \to 3 \to 4 \to 7 \to 10 \to 11$, $0 \to 3 \to 5 \to 8 \to 9 \to 11$,
$0 \to 1 \to 3 \to 4 \to 6 \to 7 \to 10 \to 11$, $0 \to 3 \to 5 \to 6 \to 8 \to 9 \to 11$ и т.д.
В новом графике из 64 полных путей 28 путей будут критическими.

Таблица 3.6

Работы (i,j)	a_{ij}	t_{ij}	b_{ij}	$t_{ij}^{рн}$	$t_{ij}^{ро}$	$t_{ij}^{пн}$	$t_{ij}^{по}$	$R_{ij}^{п}$	R_{ij}^{2}	C_{ij}	h_{ij}	Δt_{ij}	ΔC_{ij}	$t_{ij}+\Delta t_{ij}$
0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5=4+2**	**6=7-2**	**7**	**8=6-4**	**9**	**10**	**11**	**12=min(3-2;9)**	**13=11*12**	**14=2+12**
(0,1)	5	8	9	0	8	1	9	1	0	20	1			
(0,3)	**6**	**13**	**15**	**0**	**13**	**0**	**13**	**0**	**0**	**35**	**3**			
(0,5)	5	9	14	0	9	11	20	11	11	60	8	5	40	14
(1,2)	2	9	12	8	17	31	40	23	0	32	5			
(1,3)	3	4	6	8	12	9	13	1	1	37	12	1	12	5
(1,4)	4	6	10	8	14	20	26	12	9	28	4	4	16	10
(2,7)	2	3	7	17	20	40	43	23	13	86	6	4	24	7
(3,4)	3	10	16	13	23	16	26	3	0	55	7			
(3,5)	**3**	**7**	**9**	**13**	**20**	**13**	**20**	**0**	**0**	**86**	**8**			
(3,6)	4	6	9	13	19	23	29	10	10	92	10	3	30	9
(4,6)	1	3	6	23	26	26	29	3	3	64	12	3	36	6
(4,7)	3	8	14	23	31	35	43	12	2	48	5	2	10	10
(5,6)	**4**	**9**	**11**	**20**	**29**	**20**	**29**	**0**	**0**	**44**	**6**			
(5,8)	5	10	18	20	30	28	38	8	7	15	1	7	7	17
(5,9)	3	6	12	20	26	36	42	16	16	86	7	6	42	12
(6,7)	2	4	6	29	33	39	43	10	0	92	3			
(6,8)	6	8	10	29	37	30	38	1	0	57	4			
(6,9)	**10**	**13**	**17**	**29**	**42**	**29**	**42**	**0**	**0**	**45**	**7**			
(6,10)	2	5	10	29	34	43	48	14	14	44	5	5	25	10
(7,10)	1	5	15	33	38	43	48	10	10	74	4	10	40	15
(8,9)	2	4	8	37	41	38	42	1	1	20	3	1	3	5
(9,10)	**3**	**6**	**8**	**42**	**48**	**42**	**48**	**0**	**0**	**25**	**10**			
(9,11)	11	17	23	42	59	44	61	2	2	40	4	2	8	19
(10,11)	**7**	**13**	**18**	**48**	**61**	**48**	**61**	**0**	**0**	**19**	**2**			
Итого										**1204**			**293**	

Задача минимизации времени выполнения проекта

Минимизация времени выполнения проекта возможна только за счет сокращения продолжительности выполнения работ, лежащих на критическом пути $L_{кр}$. При этом стоимость этих работ и всего проекта увеличится согласно соотношениям (4). Для решения этой задачи проводится расчет исходного сетевого графика, а затем выполняется его оптимизация. Выполняются следующие действия:

1. Для всех операций проекта принимают нормальную продолжительность. Далее производится полный расчет сети и фиксируется сумма затрат на проект при этой продолжительности операций.
2. На следующем шаге рассматриваются возможности сокращения продолжительности проекта. Поскольку этого можно достичь за счет уменьшения продолжительности какой-либо критической операции, только такие операции и подвергаются анализу. Чтобы добиться сокращения продолжительности выполнения проекта при минимально возможных затратах, сжимают в максимально допустимой степени ту критическую операцию, у которой наклон кривой «затраты - продолжительность» наименьший.
3. Проверяется, появились ли новые критические пути. Если да, то операции, лежащие на них, включаются в список рассмотрения.
4. Далее подвергается сжатию критическая операция с минимальным наклоном кривой «затраты - продолжительность».
5. Описанная процедура повторяется, пока все критические операции не будут выведены в режим максимальной интенсивности. В результате расчетов получается новый календарный план с меньшей продолжительностью, но более дорогой.

Пример 5. Провести минимизацию времени выполнения проекта из предыдущего примера. Сетевой график представлен на рис. 3.13. Значения продолжительности a_{ij}, t_{ij}, b_{ij}, стоимости C_{ij} и коэффициенты затрат на ускорение h_{ij} представлены в таблице 3.6. Первоначальная стоимость проекта 1204 тыс. руб.

Решение:

Будем считать, что все работы проводятся в сроки t_{ij}. Из расчетов, проведенных в предыдущем примере, известен критический путь $L_{кр}$: $0 \to 3 \to 5 \to 6 \to 9 \to 10 \to 11$ продолжительности $t_{кр} = 61$.

Поочередно будем сжимать длительность критических операций до предельного значения a_{ij}.

1) Начинаем с работы (10,11), т.к. у неё самое низкое значение коэффициента $h_{10,11}=2$, т. е. уменьшать срок её исполнения дешевле всего.

Уменьшаем продолжительность работы (10,11) с 13 до 7, при этом стоимость выполнения увеличивается на $\Delta C_{10,11} = h_{10,11} \cdot \Delta t_{10,11}$=2(13-7)=12 тыс. руб. Критический путь изменился: $L_{кр}$: $0 \to 3 \to 5 \to 6 \to 9 \to 11$, его длительность $t_{кр} = 59$.

2) Из всех критических операций сейчас самое низкое значение коэффициента $h_{0,3}=3$ у работы (0,3). Она сжимается с 13 до 6 дней, при этом стоимость выполнения увеличивается на $\Delta C_{0,3} = h_{0,3} \cdot \Delta t_{0,3}$ =3(13-6)=21 тыс. руб. Критический путь изменился: $L_{кр}$: $0 \to 1 \to 3 \to 5 \to 6 \to 9 \to 11$, его длительность $t_{кр} = 58$. Далее аналогично.

3) Сжимаем работу (0,1), у которой $h_{0,1}=1$ с 8 до 5, $\Delta C_{0,1} = h_{0,1} \cdot \Delta t_{0,1}$ =1(8-5)=3 тыс. руб. Критический путь не изменился: $L_{кр}$: $0 \to 1 \to 3 \to 5 \to 6 \to 9 \to 11$, его длительность уменьшилась $t_{кр} = 56$.

4) Сжимаем работу (9,11), у которой $h_{9,11}=4$ с 17 до 11, $\Delta C_{9,11} = h_{9,11} \cdot \Delta t_{9,11}$ =4(17-11)=24 тыс. руб. Критический путь изменился: $L_{кр}$: $0 \to 1 \to 3 \to 5 \to 6 \to 9 \to 10 \to 11$, его длительность уменьшилась $t_{кр} = 51$.

5) Сжимаем работу (5,6), у которой $h_{5,6}=6$ с 9 до 4, $\Delta C_{5,6} = h_{5,6} \cdot \Delta t_{5,6}$ =6(9-4)=30 тыс. руб. Критический путь изменился: $L_{кр}$: $0 \to 1 \to 3 \to 4 \to 6 \to 9 \to 10 \to 11$, его длительность уменьшилась $t_{кр} = 48$. (Рис. 3.14)

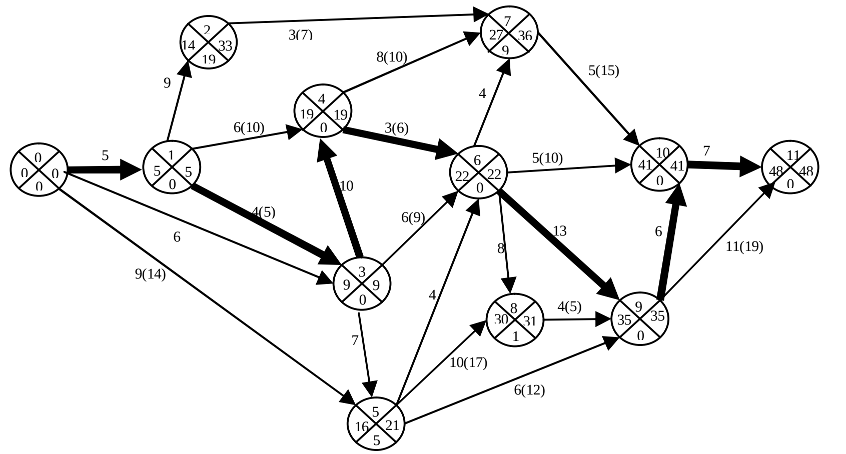


Рис.3.14. Сетевой график проекта после сжатия работы (5,6)

6) На данном этапе можно сжимать либо работу (3,4) либо (6,9), т.к. у обоих h=7. Сжимаем работу (3,4), с 10 до 3, $\Delta C_{3,4} = h_{3,4} \cdot \Delta t_{3,4}$ =7(10-3)=49 тыс. руб. Критический путь изменился: $L_{кр}$: $0 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 9 \rightarrow 10 \rightarrow 11$, его длительность уменьшилась $t_{кр}$ = 46. (Рис. 3.15)

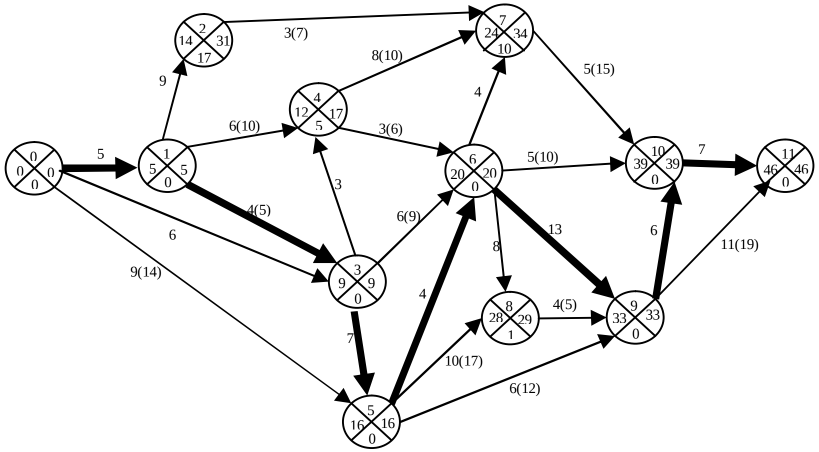


Рис.3.15. Сетевой график проекта после сжатия работы (3,4)

7) Сжимаем работу (6,9), с 13 до 10, $\Delta C_{6,9} = h_{6,9} \cdot \Delta t_{6,9}$ =7(13-10)=21 тыс. руб. Критический путь изменился: $L_{кр}$: $0 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 8 \rightarrow 9 \rightarrow 10 \rightarrow 11$, его длительность уменьшилась $t_{кр}$ = 45. (Рис. 3.16)

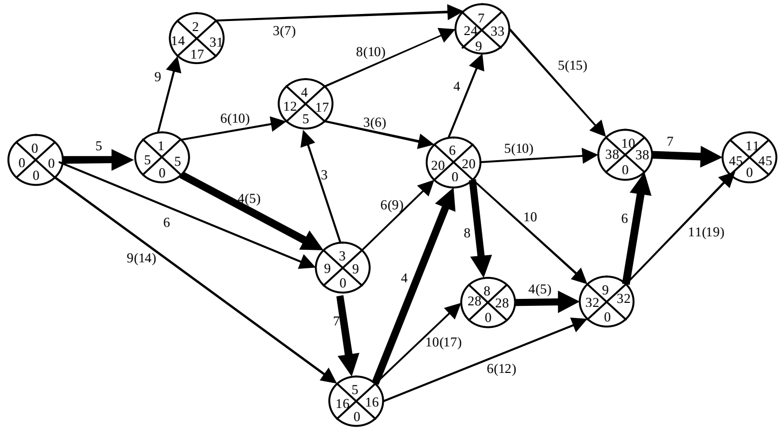


Рис.3.16. Сетевой график проекта после сжатия работы (6,9)

8) Сжимаем работу (8,9), у которой $h_{8,9}$=3 с 4 до 2, $\Delta C_{8,9} = h_{8,9} \cdot \Delta t_{8,9}$ =3(4-2)=6 тыс. руб. Два критических пути:
$L_{кр1}$: $0 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 8 \rightarrow 9 \rightarrow 10 \rightarrow 11$ и
$L_{кр2}$: $0 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 9 \rightarrow 10 \rightarrow 11$, его длительность уменьшилась $t_{кр}$ = 43.
9) Сжимаем работу (6,8), у которой $h_{6,8}$=4 с 8 до 6, $\Delta C_{6,8} = h_{6,8} \cdot \Delta t_{6,8}$ =4(8-6)=8 тыс. руб. Критический путь: $L_{кр}$: $0 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 9 \rightarrow 10 \rightarrow 11$, его длительность по-прежнему $t_{кр}$ = 43.
10) Из несжатых критических операций, работа (3,5) с наименьшим $h_{3,5}$=8. Сжимаем её с 7 до 3, $\Delta C_{3,5} = h_{3,5} \cdot \Delta t_{3,5}$ =8(7-3)=32 тыс. руб. Критический путь не изменился: $L_{кр}$: $0 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 9 \rightarrow 10 \rightarrow 11$, его длительность уменьшилась $t_{кр}$ = 39. (Рис. 3.17)

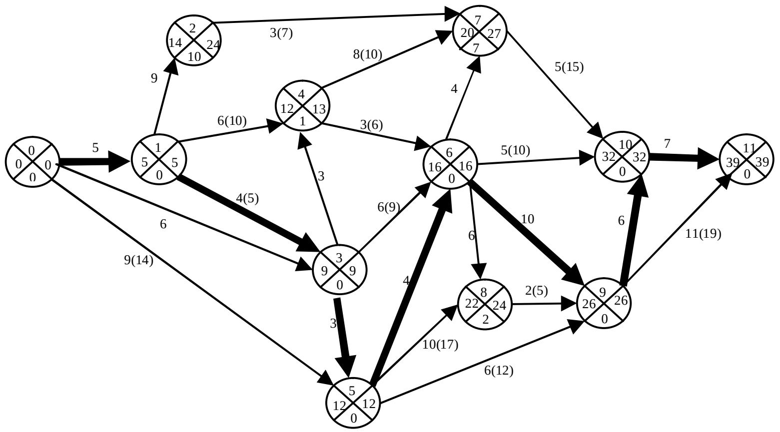


Рис.3.17. Сетевой график проекта после сжатия работы (3,5)

11) Из несжатых критических операций, работа (9,10) с наименьшим $h_{9,10}$=10. Сжимаем её с 6 до 3, $\Delta C_{9,10} = h_{9,10} \cdot \Delta t_{9,10}$ =10(6-3)=30 тыс. руб. Критический путь изменился: $L_{кр}$: $0 \to 1 \to 3 \to 5 \to 6 \to 9 \to 11$, его длительность уменьшилась $t_{кр}$ = 37.

12) Осталась одна несжатая критическая операция (1,3). Сжимаем её с 4 до 3, $\Delta C_{1,3} = h_{1,3} \cdot \Delta t_{1,3}$ =12(4-3)=12 тыс. руб. Критический путь не изменился: $L_{кр}$: $0 \to 1 \to 3 \to 5 \to 6 \to 9 \to 11$, его длительность уменьшилась $t_{кр}$ = 36. В итоге, получили следующую сеть (Рис. 3.18):

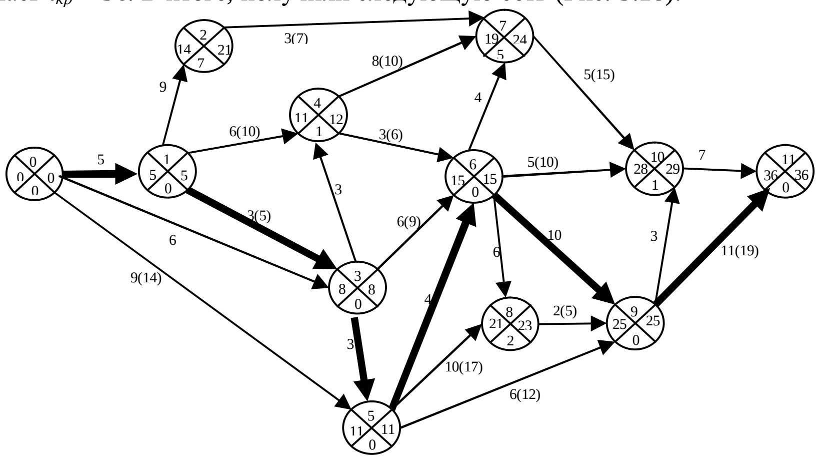


Рис.3.18. Сетевой график проекта после сжатия работы (1,3)

Отметим, что сжатие операции (6,8) или (8,9) не обязательно, т. к. оно не приводит к принципиальному изменению критического пути и не уменьшает длительность критического пути. Коэффициент затрат на ускорение $h_{6,\,8}$ = 4 больше, чем $h_{8,\,9}$ = 3, сжимать операцию (6,8), и при этом дополнительно тратить 8 тыс. руб., не целесообразно.

Итого, при дополнительных расходах 12+21+3+24+30+49+21+6+32+30+12=240 тыс. руб., (т.е. увеличение на 20% от первоначальной стоимости), можно снизить время выполнения всего комплекса работ с 61 до 36 дней, т.е. на 41 %.

Окончательные результаты выполненных расчетов иллюстрируются рис. 3.19, на котором приведена кривая прямых затрат по рассмотренной задаче.

С учетом косвенных затрат, соответствующих каждому из возможных календарных планов, можно найти план, минимизирующий общие затраты, т.е. оптимальный календарный план проекта.

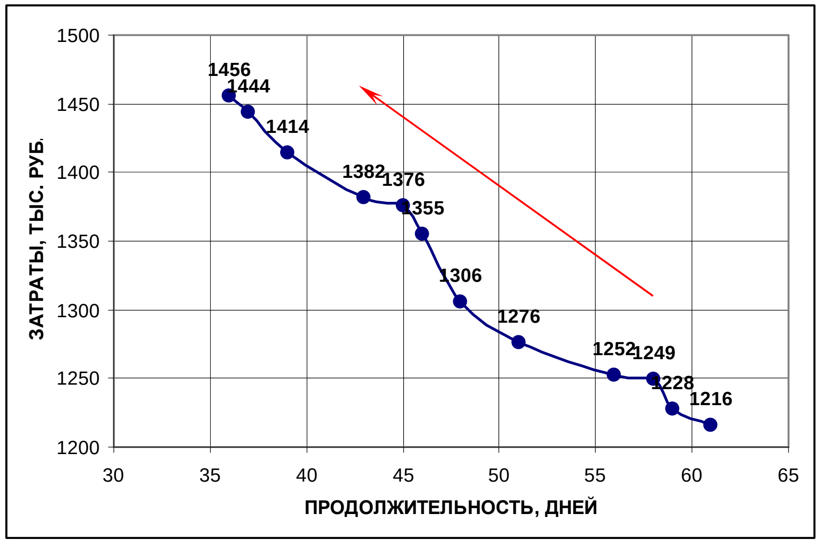


Рис.3.19. Зависимость затрат от времени выполнения комплекса работ

Задача для самостоятельного решения.

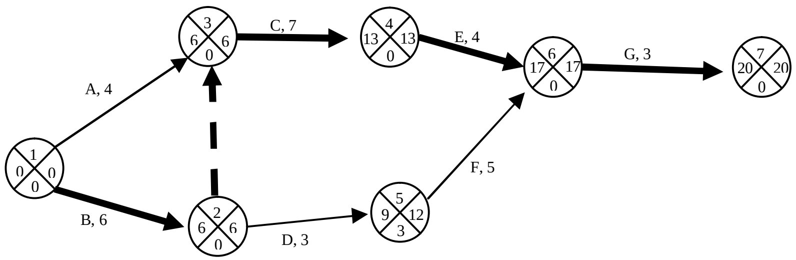
Компания с ограниченной ответственностью «MR» разрабатывает строительный проект небольшого масштаба. Основные операции проекта, соответствующие им непосредственно предшествующие операции и время их выполнения приведены в таблице 3.7:

Таблица 3.7

Операция	Непосредственно предшествующая операция	Продолжительность, дней
A	-	4
B	-	6
C	A,B	7
D	B	3
E	C	4
F	D	5
G	E,F	3

Требуется:
1. Дать иллюстрацию проекта с помощью стрелочного сетевого графа.
2. Определить критические операции и общую продолжительность выполнения проекта.

Ответ.
Сетевой граф проекта:



Критические операции: B, C, E, G. Общее время выполнения проекта 20 дней.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Условия жизни в нынешних экономических условиях диктуют необходимость тщательного расчета и планирования любых действий, направленных на достижение экономически выгодных результатов, тем более, если речь идет о сложных, дорогостоящих проектах, как, например, строительство здания, переоборудование цеха, наладка новой производственной линии и пр. Или о грамотном разрешении конфликта, будь то фирмы-конкуренты или налоговая инспекция и налогоплательщик. Задачи определения оптимального плана производства или эффективного плана перевозок – являются уже «классикой» математической экономики. Поэтому эти разделы входят в обязательный минимум образованного экономиста. И предложенный практикум позволяет в первом приближении познакомиться с теорией по этим темам, методами решения подобных задач и приобрести навыки решения на задачах для самостоятельного решения.

В практикуме приведено большое количество разобранных задач экономического содержания, иллюстрирующих методы и модели решения оптимизационных, игровых и сетевых задач. Предложен вариант решения задач линейного программирования с помощью программы «Excel».

Необходимо отметить, что по рассмотренным темам существует большое количество литературы, но в ней обычно отсутствует единообразие в изложении тем и большая разрозненность материала по разным учебникам. Поэтому использование данного практикума поможет студентам очникам и особенно - заочникам успешно освоить предложенные темы, не прибегая к большому количеству учебников.

Библиографический список

1. И. Л. Акулич Математическое программирование в примерах и задачах. Уч. пос. – М.: ВШ, 1986, 2004.
2. Г. И. Просветов Математические методы в экономике. Уч. мет. пособие – М.: РДЛ, 2005
3. Красс М. С., Чупрынов Б.П. Основы математики и её приложения в экономическом образовании – М.: Дело, 2001-02
4. Н.Ш.Кремер, Б.А.Путко, И.М.Тришин, М.Н. Фридман Исследование операций в экономике - М.: ЮНИТИ, 2003
5. Г.П. Фомин Математические методы и модели в коммерческой деятельности – М.: ФиС, 2005
6. О.О.Замков, А.В.Толстопятенко, Ю.Н.Черемных Математические методы в экономике - М: ДИС, 1975
7. Г. И. Просветов Математические модели в экономике. Уч. мет. пособие – М.: РДЛ, 2005
8. И.Л. Калихман Сборник задач по математическому программированию (для эк. спец. Вуз.) – М.: ВШ, 1975
9. Л.С. Костевич, А.А. Лапко Теория игр. Исследование операций. – М.: ВШ, 1982
10. Ю. Н.Кузнецов Математическое программирование – М.: ВШ, 1976-80
11. Вагнер Г. Основы исследования операций. – М., Мир, 1972.
12. Вентцель Е.С. Исследование операций: задачи, принципы, методология. – М., Наука, 1980.
13. Лабскер Л.Г., Бабешко Л.О. Теория массового обслуживания в экономической сфере. – М., Банки и биржи, изд. Объединение «ЮНИТИ», 1998.