Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова»

Т.В. Абрамова
О.С. Андросенко
Т.Г. Кузина
О.В. Петрова

Векторная алгебра

*Утверждено Редакционно-издательским советом университета
в качестве практикума для студентов экономических специальностей*

Магнитогорск
2011

УДК 514.742.2(075)

Рецензенты:

Заведующая кафедрой математического анализа
ГОУ ВПО «Магнитогорский государственный университет»,
профессор, кандидат физико-математических наук
Т.К. Плышевская

Доцент кафедры прикладной математики и вычислительной техники
ГОУ ВПО «Магнитогорский государственный университет»
кандидат физико-математических наук
В.В. Дубровский

Абрамова Т. В., Андросенко О. С., Кузина Т. Г., Петрова О. В.
Векторная алгебра : практикум для студентов экономических специальностей. – Магнитогорск : Изд-во Магнитогорск. гос. техн. ун-та им. Г.И. Носова, 2011. – 61 с.

В практикум включен теоретический материал, содержащий сведения о линейных операциях над векторами: скалярное, векторное и смешанное произведения и их свойства. Приведены примеры решения практических задач и сформулированы задачи для самостоятельного решения, содержатся варианты индивидуальных заданий.

Практикум предназначен для организации самостоятельной работы студентов экономических специальностей по дисциплине «Математика».

УДК 514.742.2(075)

Содержание

Введение

Практикум предназначен для студентов экономических специальностей, изучающих раздел «Векторная алгебра».

В каждом разделе практикума приведен справочный теоретический материал и рассмотрено достаточное число примеров его использования. Для закрепления теоретического материала предложены задачи для самостоятельного решения с ответами, а также 25 вариантов индивидуального задания по данному разделу.

Практикум может быть использован на практических занятиях или являться руководством при организации самостоятельной работы студентов.

1. Векторы и линейные операции над векторами. Разложение векторов

1.1. Основные понятия

Вектором (геометрическим вектором) называется направленный отрезок, то есть отрезок, имеющий определенную длину и направление. Векторы рассматриваются на плоскости (двумерные) и в пространстве (трехмерные). И в том, и в другом случае вектор определяется упорядоченной парой точек, первая из которых – *начало* вектора, другая – *конец* вектора. Для обозначения векторов используются символы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{x}$, … . Если A и B соответственно точки начала и конца вектора, то этот вектор обозначается $\overline{AB}$ (рис. 1.1). Вектор $\overline{BA}$ с началом в точке B и концом в точке A называется противоположным вектору $\overline{AB}$.

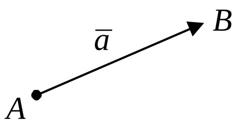


Рис. 1.1

Длиной или *модулем* $\left|\overline{AB}\right|$ вектора $\overline{AB}$ называется число, равное длине отрезка AB, изображающего вектор. Векторы $\overline{AB}$ и $\overline{BA}$ имеют один и тот же модуль.

Нулевым вектором называется вектор, начало и конец которого совпадают. Нуль-вектор обозначается символом $\bar{0}$. Модуль нулевого вектора равен нулю.

Единичным вектором называется вектор, длина которого равна единице. Единичный вектор, направление которого совпадает с направлением вектора $\overline{a}$, называется *ортом* вектора $\overline{a}$ и обозначается $\overline{a^0}$.

Два ненулевых вектора называются равными, если один из них путем параллельного переноса можно совместить с другим так, что совпадут их начала и концы (рис. 1.2). Обозначают $\overline{a} = \overline{b}$.

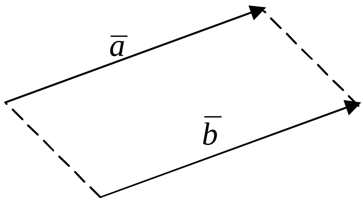


Рис. 1.2

С точки зрения векторной алгебры вектор не меняется при его параллельном переносе с сохранением его длины и его направления, то есть точку приложения вектора можно помещать в любую точку пространства.

1.2. Линейные операции над векторами

Линейными операциями над векторами называются операции сложения, вычитания и умножения вектора на число.

Сложение двух векторов_$\overline{a}$ и $\overline{b}$ можно выполнить с помощью правила параллелограмма. Если отложить векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ от общей точки O и построить на них как на сторонах параллелограмм, то вектор $\overline{OB}$, идущий из общего начала O в противоположную вершину параллелограмма, будет их суммой $\overline{a} + \overline{b}$ (рис. 1.3).

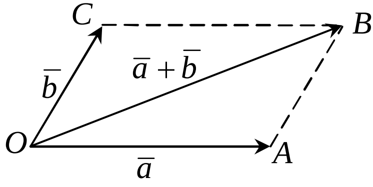


Рис. 1.3

Для построения суммарного вектора $\overline{OB}$ не обязательно строить весь параллелограмм $OABC$, достаточно построить треугольник OAB. Сформулированное правило определения суммы можно заменить более удобным.

Суммой двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется вектор, соединяющий начало первого слагаемого вектора $\overline{a}$ с концом второго при условии, что начало второго слагаемого совмещено с концом первого (рис. 1.4).

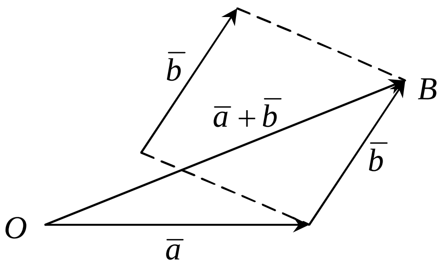


Рис. 1.4

При этом ясно, что результат сложения не зависит от того, в какой точке пространства помещено начало первого слагаемого: при её изменении весь треугольник параллельно переносится. Это правило сложения векторов называется *правилом треугольника*.

Сложение многих векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, $\overline{d}$, … совершается последовательно: сначала складывается первый вектор $\overline{a}$ со вторым $\overline{b}$, затем к их сумме прибавляется третий вектор $\overline{c}$, затем к полученной сумме $\left(\overline{a}+\overline{b}\right)+\overline{c}$ прибавляется вектор $\overline{d}$ и т.д. (рис. 1.5).

Непосредственно видно, что получается следующее правило для сложения векторов.

Правило многоугольника. Суммой нескольких векторов является вектор, соединяющий начало первого слагаемого вектора с концом последнего при условии, что начало каждого последующего вектора совмещено с концом предыдущего (рис. 1.6).

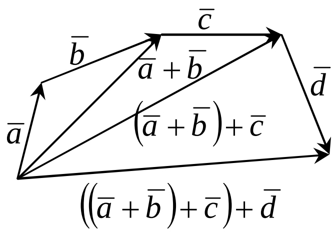


Рис. 1.5

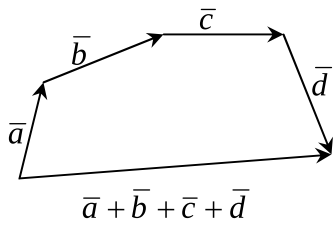


Рис. 1.6

Законы сложения векторов

1. $\overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a}$.
2. $\left(\overline{a}+\overline{b}\right)+\overline{c}=\overline{a}+\left(\overline{b}+\overline{c}\right)$.
3. $\overline{a}+\overline{0}=\overline{a}$.

Разностью двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется вектор $\overline{c}=\overline{a}-\overline{b}$, который при сложении с вектором $\overline{b}$ даёт вектор $\overline{a}$ (рис. 1.7).

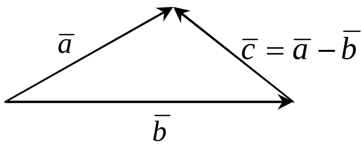
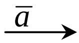
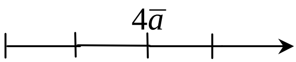


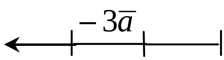
Рис. 1.7

Заметим, что если на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$, отложенных от общего начала, можно построить параллелограмм, то одна направленная диагональ является суммой векторов, а другая разностью.

Произведением ненулевого вектора $\overline{a}$ на число $\lambda \neq 0$ называется вектор $\lambda\overline{a}$ (или $\overline{a}\lambda$), длина которого равна $|\lambda|\cdot|\overline{a}|$, а направление совпадает с направлением вектора $\overline{a}$ при $\lambda > 0$ и противоположно ему при $\lambda < 0$.

Например, если дан вектор 

, то векторы $4\overline{a}$ и $-3\overline{a}$ имеют вид 

и 

.

Законы умножения вектора на число

1. $\lambda_1\cdot\left(\lambda_2\overline{a}\right)=\left(\lambda_1\cdot\lambda_2\right)\overline{a}$.
2. $\left(\lambda_1+\lambda_2\right)\overline{a}=\lambda_1\overline{a}+\lambda_2\overline{a}$.
3. $\lambda\left(\overline{a}+\overline{b}\right)=\lambda\overline{a}+\lambda\overline{b}$.
4. $\lambda\cdot\overline{0}=0\cdot\overline{a}=\overline{0}$.

Из определения произведения вектора на число следует, что всякий вектор $\overline{a}$ может быть представлен в виде произведения модуля вектора на орт этого вектора.

$$\overline{a}=|\overline{a}|\cdot\overline{a^0} . \qquad (1.1)$$

1.3. Линейные зависимости между векторами

Если над векторами $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, $\overline{d}$ выполнять действия сложения, вычитания и умножения на число, то в результате любого числа таких действий получится вектор вида

$$\lambda_1 \cdot \overline{a} + \lambda_2 \cdot \overline{b} + \lambda_3 \cdot \overline{c} + \lambda_4 \cdot \overline{d} ,$$

представляющий собой линейную комбинацию исходных векторов.

Векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, $\overline{d}$ называются линейно зависимыми (связанными линейной зависимостью), если между ними выполняется соотношение следующего вида:

$$\lambda_1 \cdot \overline{a} + \lambda_2 \cdot \overline{b} + \lambda_3 \cdot \overline{c} + \lambda_4 \cdot \overline{d} = \overline{0}, \tag{1.2}$$

где скалярные коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ не все равны нулю.

Если все коэффициенты равны нулю, то соотношение (1.2) будет выполняться, но оно не будет устанавливать зависимости между векторами. Про векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, $\overline{d}$ в этом случае говорят, что они линейно независимые.

Понятие линейной зависимости между векторами используется для алгебраической характеристики взаимного расположения векторов в пространстве.

Два ненулевых вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называются *коллинеарными* (обозначают $\overline{a} \parallel \overline{b}$), если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. Коллинеарные векторы могут быть одинаково или противоположно направленными.

Пусть $\overline{a}$ и $\overline{b}$ два коллинеарных вектора и один из них, например $\overline{a}$, отличен от нуля. Тогда второй вектор $\overline{b}$ получится из него умножением на некоторое число

$$\overline{b} = \lambda \overline{a} . \tag{1.3}$$

Следовательно $\overline{a}$ и $\overline{b}$ связаны линейной зависимостью

$$-\lambda \overline{a} + 1 \cdot \overline{b} = 0 .$$

Итак, два коллинеарных вектора всегда линейно зависимы. Справедливо и обратное утверждение: два линейно зависимых вектора всегда коллинеарны.

Теорема. Два вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны.

Следствие. Если между двумя неколлинеарными векторами выполняется равенство

$$\lambda_1\bar{a} + \lambda_2\bar{b} = 0,$$

то оба коэффициента должны равняться нулю $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Ненулевые векторы называются *компланарными*, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях. Любые два вектора всегда компланарны, а три вектора могут и не быть компланарными.

Пусть из трех компланарных векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, имеющих общее начало 0, два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ неколлинеарны (рис. 1.8).

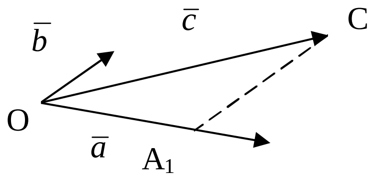


Рис. 1.8

Через конец С третьего вектора $\bar{c}$ проведем прямую, параллельную $\bar{b}$, до пересечения в точке A_1, с прямой, на которой лежит вектор $\bar{a}$, тогда

$$\bar{c} = \overline{OA_1} + \overline{A_1C},$$

но $\overline{OA_1} \parallel \bar{a}$ и $\overline{A_1C} \parallel \bar{b}$ и поэтому

$$\overline{OA_1} = \alpha\bar{a}, \overline{A_1C} = \beta\bar{b}.$$

Следовательно, получается линейная зависимость

$$\bar{c} = \alpha\bar{a} + \beta\bar{b}. \tag{1.4}$$

Справедливо и обратное утверждение: три линейно зависимых вектора всегда компланарны.

Теорема. Три вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны.

Представление вектора $\bar{c}$ в виде линейной комбинации векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ по (1.4) называется разложением $\bar{c}$ на плоскости по двум неколлинеарным векторам.

Рассмотрим произвольный вектор $\overline{d}$ и тройку некомпланарных векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$.

Теорема. Каждый вектор $\overline{d}$ единственным образом разлагается по трем некомпланарным векторам $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$, то есть представляется в виде

$$\overline{d} = \alpha\overline{a} + \beta\overline{b} + \gamma\overline{c}\,. \tag{1.5}$$

Из (1.5) следует, что любые четыре вектора в пространстве линейно зависимы.

Упорядоченная тройка некомпланарных (линейно независимых) векторов $\{\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\}$ называется базисом во множестве геометрических векторов пространства. Скалярные коэффициенты α, β, γ однозначно определяются и называются координатами вектора $\overline{d}$ относительно базиса $\{\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\}$.

Аналогично: упорядоченная пара $\{\overline{a}, \overline{b}\}$ неколлинеарных (линейно независимых) векторов образует базис геометрических векторов на плоскости. Коэффициенты α, β в разложении (1.4) есть координаты вектора $\overline{c}$ относительно базиса $\{\overline{a}, \overline{b}\}$.

Примеры

1. Дана точка O пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ и векторы $\overline{AB} = \overline{a}$, $\overline{AD} = \overline{b}$. Выразить через $\overline{a}$ и $\overline{b}$ векторы $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}, \overline{OD}$.

Решение. $\overline{AC} = \overline{a} + \overline{b}$, $\overline{DB} = \overline{a} - \overline{b}$. В соответствии с определением суммы и разности векторов имеем (рис. 1.9).

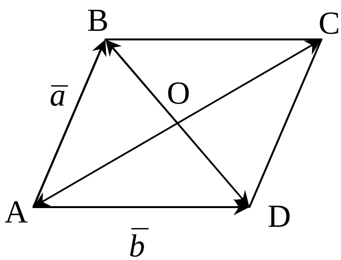


Рис. 1.9

Исходя из свойства диагоналей параллелограмма и определения произведения вектора на число, находим

$$\overline{OA} = -\frac{1}{2}\overline{AC} = -\frac{\overline{a}+\overline{b}}{2}; \quad \overline{OB} = \frac{1}{2}\overline{DB} = \frac{\overline{a}-\overline{b}}{2};$$

$$\overline{OC} = \frac{1}{2}\overline{AC} = \frac{\overline{a}+\overline{b}}{2}; \quad \overline{OD} = -\frac{1}{2}\overline{DB} = -\frac{\overline{a}-\overline{b}}{2} = \frac{\overline{b}-\overline{a}}{2}.$$

2. Два ненулевых вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$ таковы, что $\left|\overline{a}+\overline{b}\right| = \left|\overline{a}-\overline{b}\right|$. Доказать, что векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ перпендикулярны.

Решение. Построим на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$ параллелограмм $ABCD$ (рис. 1.9). Тогда $\overline{AC} = \overline{a}+\overline{b}$, $\overline{DB} = \overline{a}-\overline{b}$.

Равенство $\left|\overline{a}+\overline{b}\right| = \left|\overline{a}-\overline{b}\right|$ означает, что длины диагоналей параллелограмма равны, то есть $\left|\overline{AC}\right| = \left|\overline{DB}\right|$. Значит, данный параллелограмм есть прямоугольник. Следовательно, векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ перпендикулярны.

3. На стороне BC треугольника OBC расположена точка N так, что $BN : BC = n$ (рис. 1.10). Разложить вектор $\overline{ON}$ по векторам $\overline{OB}$ и $\overline{OC}$.

Решение. Для геометрического решения задачи достаточно из конца вектора $\overline{ON}$ провести прямые, параллельные векторам $\overline{OB}$ и $\overline{OC}$. В полученном параллелограмме $\overline{OB_1}\,\overline{NC_1}$ $\overline{ON} = \overline{OB_1} + \overline{OC_1}$, $\overline{OB_1} = \alpha\overline{OB}$ и $\overline{OC_1} = \beta\overline{OC}$, то есть $\overline{ON} = \alpha\overline{OB} + \beta\overline{OC}$, однако коэффициенты α, β этого разложения геометрическим способом определяются лишь приближенно.

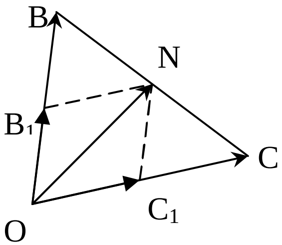


Рис. 1.10

Решим задачу аналитическим методом.

Векторы $\overline{BN}$ и $\overline{BC}$ коллинеарны и одинаково направлены.

По условию $\left|\overline{BN}\right| = n \cdot \left|\overline{BC}\right|$, значит $\overline{BN} = n\overline{BC}$.

Так как $\overline{BC} = \overline{OC} - \overline{OB}$ и $\overline{ON} = \overline{OB} + \overline{BN}$,

то $\overline{ON} = \overline{OB} + n\left(\overline{OC} - \overline{OB}\right) \quad (1-n)\cdot\overline{OB} + n\cdot\overline{OC}$.

Значит $\alpha = 1-n$, $\beta = n$.

Если $n = \dfrac{1}{2}$, то точка N является серединой стороны $\overline{BC}$, а $\overline{ON}$ – медианой треугольника. В этом случае

$$\overline{ON} = \frac{1}{2}\left(\overline{OB} + \overline{OC}\right).$$

4. Дана треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 1.11). Разложить вектор $\overline{AA_1}$ по векторам $\overline{AC_1}$, $\overline{BA_1}$ и $\overline{CB_1}$.

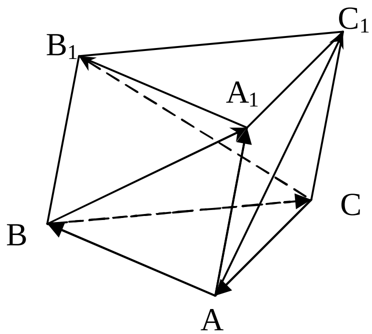


Рис. 1.11

Решение. Согласно правилу треугольника сложения векторов имеем

$$\overline{AA_1} = \overline{AB} + \overline{BA_1},$$
$$\overline{BB_1} = \overline{BC} + \overline{CB_1},$$
$$\overline{CC_1} = \overline{CA} + \overline{AC_1}.$$

Складывая левые и правые части этих векторных равенств, получаем

$$\overline{AA_1} + \overline{BB_1} + \overline{CC_1} = \left(\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA}\right) + \left(\overline{BA_1} + \overline{CB_1} + \overline{AC_1}\right).$$

Так как

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = \overline{AA} = \overline{0},$$
$$\overline{AA_1} = \overline{BB_1} = \overline{CC_1},$$

то

$$3\overline{AA_1} = \overline{BA_1} + \overline{CB_1} + \overline{AC_1},$$
$$\overline{AA_1} = \frac{1}{3}\left(\overline{BA_1} + \overline{CB_1} + \overline{AC_1}\right).$$

5. В прямоугольнике $ABCD$ (рис. 1.12) $|\overline{AD}| = 12$, $|\overline{CD}| = 5$, O – точка пересечения диагоналей. Найдите $|\overline{AB} + \overline{AD} - \overline{DC} - \overline{OD}|$.

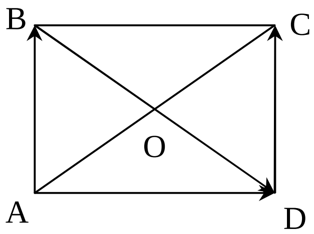


Рис. 1.12

Решение. $\overline{AB} + \overline{AD} = \overline{AC}$, $\overline{OD} + \overline{DC} = \overline{OC} = \frac{1}{2}\overline{AC}$.

Значит,

$$\overline{AB} + \overline{AD} - \overline{DC} - \overline{OD} = \left(\overline{AB} + \overline{AD}\right) - \left(\overline{DC} + \overline{OD}\right) =$$

$$= \overline{AC} - \frac{1}{2}\overline{AC} = \frac{1}{2}\overline{AC}.$$

Найдем

$$\left|\overline{AB} + \overline{AD} - \overline{DC} - \overline{OD}\right| = \left|\frac{1}{2}\overline{AC}\right| = \frac{1}{2}\left|\overline{AC}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{12^2 + 5^2} = 13.$$

6. В треугольнике ABC (рис. 1.13) O – точка пересечения его медиан. Постройте вектор $\overline{OA} + \overline{OB} - \overline{OC}$ и найдите его длину, если медиана CC_1 равна m.

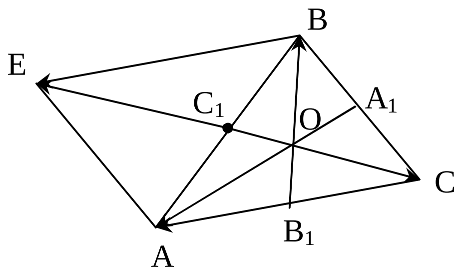


Рис. 1.13

Решение. $\overline{OA}+\overline{OB}-\overline{OC}=\overline{OB}+\left(\overline{OA}-\overline{OC}\right)=\overline{OB}+\overline{CA}$.

Построим $\overline{BE}=\overline{CA}$, тогда $\overline{OB}+\overline{CA}=\overline{OB}+\overline{BE}=\overline{OE}$.

$$\overline{OE}=\overline{C_1E}+\overline{OC_1}=\overline{CC_1}+\frac{1}{3}\overline{CC_1}=\frac{4}{3}\overline{CC_1}.$$

$$\left|\overline{OE}\right|=\frac{4}{3}\left|\overline{CC_1}\right|=\frac{4}{3}m.$$

7. Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ неколлинеарны. Найти, при каком x векторы $\overline{c}=(x-2)\overline{a}+\overline{b}$ и $\overline{d}=(2x+1)\overline{a}-\overline{b}$ будут коллинеарны.

Решение. Вектор $\overline{c}$ ненулевой, следовательно существует такое число λ, что

$$\overline{d}=\lambda\overline{c} \text{ или } (2x+1)\overline{a}-\overline{b}=\lambda(x-2)\overline{a}+\lambda\overline{b}.$$

Откуда $(2x+1-\lambda x+2\lambda)\overline{a}+(-1-\lambda)\overline{b}=0$.

Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ неколлинеарны, поэтому

$$\begin{cases} 2x+1-\lambda x+2\lambda=0, \\ -1-\lambda=0. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $\lambda=-1,\ x=\frac{1}{3}$.

При $x=\frac{1}{3}$ $\overline{c}=-\frac{5}{3}\overline{a}+\overline{b}$, $\overline{d}=\frac{5}{3}\overline{a}-\overline{b}$. Значит, $\overline{d}=-\overline{c}$.

8. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD угла A (рис. 1.14). Разложить вектор $\overline{AD}$ по векторам $\overline{AB}=\overline{a}$ и $\overline{AC}=\overline{b}$.

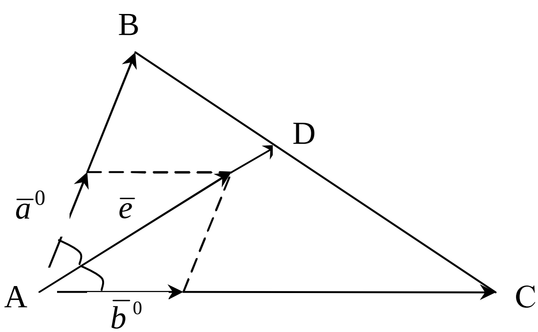


Рис. 1.14

Решение. Используя формулу (1.1), найдем орты векторов $\overline{AB} = \overline{a}$ и $\overline{AC} = \overline{b}$.

$$\overline{a^0} = \frac{\overline{a}}{|\overline{a}|},\ \overline{b^0} = \frac{\overline{b}}{|\overline{b}|}.$$

Тогда вектор $\overline{e} = \overline{a^0} + \overline{b^0}$ направлен по биссектрисе угла A (см. рис. 1.14), то есть $\overline{e} \parallel \overline{AD}$. Значит, существует $\lambda_1 \neq 0$ такое, что

$$\overline{AD} = \lambda_1 \overline{e} = \lambda_1\left(\overline{a^0} + \overline{b^0}\right) = \frac{\lambda_1}{|\overline{a}|}\overline{a} + \frac{\lambda_1}{|\overline{b}|}\overline{b}. \qquad (1.6)$$

С другой стороны, по правилу сложения векторов

$$\overline{AD} = \overline{AC} + \overline{CD}.$$

Векторы $\overline{CD}$ и $\overline{CB} = \overline{a} - \overline{b}$ коллинеарны, следовательно

$$\overline{CD} = \lambda_2\left(\overline{a} - \overline{b}\right),$$

$$\overline{AD} = \overline{b} + \lambda_2\left(\overline{a} - \overline{b}\right) = \lambda_2\vec{a} + \left(1 - \lambda_2\right)\overline{b}. \qquad (1.7)$$

Учитывая единственность разложения $\overline{AD}$ по векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$, имеем

$$\begin{cases} \lambda_2 = \dfrac{\lambda_1}{|\overline{a}|}, \\ 1 - \lambda_2 = \dfrac{\lambda_1}{|\overline{b}|}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_2 = \dfrac{\lambda_1}{|\overline{a}|}, \\ 1 - \dfrac{\lambda_1}{|\overline{a}|} = \dfrac{\lambda_1}{|\overline{b}|}, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_2 = \dfrac{\lambda_1}{|\overline{a}|}, \\ \lambda_1 = \dfrac{|\overline{a}| \cdot |\overline{b}|}{|\overline{a}| + |\overline{b}|} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{|\overline{a}| \cdot |\overline{b}|}{|\overline{a}| + |\overline{b}|}, \\ \lambda_2 = \dfrac{|\overline{b}|}{|\overline{a}| + |\overline{b}|}. \end{cases}$$

Таким образом разложение вектора биссектрисы $\overline{AD}$ по векторам $\overline{AB} = \overline{a}$ и $\overline{AC} = \overline{b}$ имеет вид $\overline{AD} = \dfrac{|\overline{b}|}{|\overline{a}| + |\overline{b}|} \cdot \overline{a} + \dfrac{|\overline{a}|}{|\overline{a}| + |\overline{b}|} \cdot \overline{b}$.

Задачи

1. В трапеции $ABCD$ отношение длины основания BC к длине основания AD равно n. Диагонали трапеции пересекаются в точке O. Разложить вектор $\overline{AO}$ по векторам $\overline{a} = \overline{AB}$ и $\overline{b} = \overline{AD}$.

2. $ABCD$ – параллелограмм, точка M – середина стороны CD. Разложить векторы $\overline{BD}$ и $\overline{AM}$ по векторам $\overline{BM}$ и $\overline{MC}$.

3. В треугольнике ABC точки M и N – середины сторон AB и AC. Разложить векторы $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{MN}$ по векторам $\overline{BN}$ и $\overline{CM}$.

4. В тетраэдре $OABC$ точки M и N – середины ребер $\overline{OB}$ и $\overline{OC}$. Разложить векторы $\overline{AM}$, $\overline{BN}$ и $\overline{MN}$ по векторам $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$.

5. В треугольнике ABC: M – точка пересечения медиан треугольника, $\overline{AM} = a$, $\overline{AC} = b$. Разложить $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$ по векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

6. $ABCDEF$ – правильный шестиугольник, причем $\overline{AB} = \overline{p}$, $\overline{BC} = \overline{q}$. Выразить через $\overline{p}$ и $\overline{q}$ векторы $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$, $\overline{FA}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ и $\overline{AE}$.

7. Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ неколлинеарны. Найти числа x и y, если векторы $x\overline{a} + y\overline{b}$ и $(y+1)\overline{a} + (2-x)\overline{b}$ равны.

8. Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ неколлинеарны. Найти число x, если векторы $(x-1)\overline{a} + 2\overline{b}$ и $3\overline{a} + x\overline{b}$ коллинеарны.

9. Даны векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$. Коллинеарны ли векторы $\overline{c} = \overline{a} - 2\sqrt{3}\overline{b}$ и $\overline{d} = -\sqrt{3}\overline{a} + 6\overline{b}$?

10. При каких значениях x векторы $x^3\overline{a}$ и $(x^2 - x - 2)\overline{a}$ $(\overline{a} \neq 0)$ противоположно направлены?

Ответы

1. $\overline{AO} = \dfrac{1}{1+n}\left(\overline{a} + n\overline{b}\right)$.

2. $\overline{BD} = \overline{BM} - \overline{MC}$, $\overline{AM} = \overline{BM} + 2\overline{MC}$.

3. $\overline{AB} = -\frac{2}{3}\overline{CM} - \frac{4}{3}\overline{BN}$, $\overline{AC} = -\frac{4}{3}\overline{CM} - \frac{2}{3}\overline{BN}$,

$\overline{MN} = \frac{1}{3}\left(\overline{BN} - \overline{CM}\right)$.

4. $\overline{AM} = \frac{1}{2}\overline{OB} - \overline{OA}$, $\overline{BN} = \frac{1}{2}\overline{OC} - \overline{OB}$, $\overline{MN} = \frac{1}{2}\left(\overline{OC} - \overline{OB}\right)$.

5. $\overline{AB} = 3\overline{a} - \overline{b}$, $\overline{BC} = 2\overline{b} - 3\overline{a}$.

6. $\overline{CD} = \overline{q} - \overline{p}$, $\overline{DE} = -\overline{p}$, $\overline{EF} = -\overline{q}$, $\overline{EA} = \overline{p} - \overline{q}$, $\overline{AC} = \overline{p} + \overline{q}$,

$\overline{AD} = 2\overline{q}$, $\overline{AE} = 2\overline{q} - \overline{p}$.

7. $x = \frac{3}{2}$, $y = \frac{1}{2}$.

8. $x = 3$ или $x = -2$.

9. Да, $\overline{d} = -\sqrt{3}\overline{c}$.

10. $(-\infty;-1) \cup (0;2)$.

2. Прямоугольные координаты вектора. Действия над векторами, заданными своими координатами

2.1. Проекции векторов на ось

Проекцией вектора $\overline{AB}$ на ось l называется число, равное длине вектора $\overline{A_1B_1}$ (рис. 2.1), взятое со знаком «плюс», если направление вектора $\overline{A_1B_1}$ совпадает с направлением оси, и со знаком «минус» в противном случае. Точки A_1, B_1 – это точки пересечения оси l с плоскостями, проходящими через точки A и B, перпендикулярно оси l. Обозначение $np_l\,\overline{AB}$.

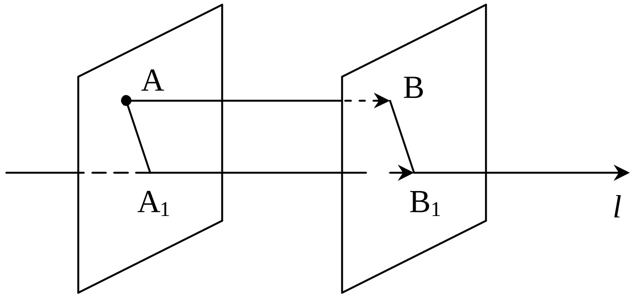


Рис. 2.1

Основные свойства проекции:

1. $np_l\overline{a} = \left|\overline{a}\right| \cdot \cos\varphi$, где φ – угол между вектором $\overline{a}$ и осью l;
2. $\overline{a} = \overline{b} \Rightarrow np_l\overline{a} = np_l\overline{b}$;
3. $np_l\left(\overline{a} + \overline{b}\right) = np_l\overline{a} + np_l\overline{b}$;
4. $np_l\left(\lambda\overline{a}\right) = \lambda \cdot np_l\overline{a}$.

2.2. Разложение вектора по ортам координатных осей

Рассмотрим в пространстве прямоугольную систему координат $OXYZ$. Построим на координатных осях OX, OY и OZ единичные векторы, обозначаемые $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ соответственно (рис. 2.2).

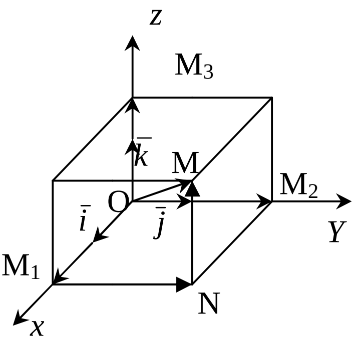


Рис. 2.2

Единичные векторы $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$, имеющие направление положительных координатных полуосей, называются координатными векторами (или ортами).

Произвольный вектор $\overline{a}$ пространства можно единственным образом представить в виде линейной комбинации ортов координатных осей. Для разложения вектора $\overline{a}$ совместим его начало с началом координат (см. рис. 2.2). Из конца M вектора $\overline{a}$ проведем плоскости, параллельные координатным плоскостям. Обозначим M_1, M_2 и M_3, точки пересечения этих плоскостей с осями OX, OY, OZ, соответственно. Тогда

$$\overline{a} = \overline{OM} = \overline{OM_1} + \overline{M_1N} + \overline{NM} = \overline{OM_1} + \overline{OM_2} + \overline{OM_3},$$

$$\overline{OM_1} \parallel \overline{i}, \ \overline{OM_2} \parallel \overline{j}, \ \overline{OM_3} \parallel \overline{k},$$

а значит, существуют числа a_x, a_y, a_z такие, что

$$\overline{OM_1} = a_x\overline{i}, \ \overline{OM_2} = a_y\overline{j}, \ \overline{OM_3} = a_z\overline{k} \text{ и}$$

$$a_x = np_{OX}\overline{a}, \ a_y = np_{OY}\overline{a}, \ a_z = np_{OZ}\overline{a}.$$

Следовательно

$$\overline{a} = a_x\overline{i} + a_y\overline{j} + a_z\overline{k}. \tag{2.1}$$

Формула (2.1) называется разложением вектора $\overline{a}$ по ортам координатных осей или по базису $\{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$. Коэффициенты a_x, a_y, a_z линейной комбинации (2.1) называют прямоугольными координатами вектора $\overline{a}$, то есть координаты вектора есть его проекции на соответствующие координатные оси.

Векторное равенство (2.1) записывают в виде

$$\overline{a} = (a_x; a_y; a_z). \tag{2.2}$$

Имеет место аналогичное разложение вектора $\overline{a}$ по базису $\{\overline{i}, \overline{j}\}$ на плоскости (рис. 2.3).

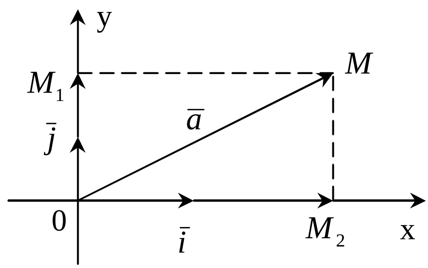


Рис. 2.3

$$\overline{a} = \overline{OM_1} + \overline{OM_2} = a_x \overline{i} + a_y \overline{j} = (a_x; a_y). \tag{2.3}$$

Длина вектора $\overline{a}$ с координатами (a_x, a_y, a_z) определяется по формуле

$$|\overline{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\,. \tag{2.4}$$

Для плоского вектора $\overline{a} = (a_x; a_y)$

$$|\overline{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}\,. \tag{2.5}$$

Направление вектора $\overline{a}$ в пространстве и на плоскости можно определить с помощью косинусов углов, которые образует вектор с осями координат. Их называют направляющими косинусами вектора. Обозначим α, β, γ – углы, которые составляет вектор $\overline{a}$ с осями OX, OY, OZ, соответственно, тогда

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\overline{a}|},\ \cos\beta = \frac{a_y}{|\overline{a}|},\ \cos\gamma = \frac{a_z}{|\overline{a}|}. \tag{2.6}$$

Справедливо равенство

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \tag{2.7}$$

2.3. Линейные операции над векторами в координатной форме. Условие равенства и коллинеарности векторов

При выполнении линейных операций над векторами тем же операциям подвергнутся и их проекции на координатные оси.

Пусть даны два вектора $\overline{a} = (a_x; a_y; a_z)$ и $\overline{b} = (b_x; b_y; b_z)$.

При сложении векторов их одноименные координаты складываются, при вычитании – вычитаются, при умножении на число – умножаются на это число.

$$\overline{a} \pm \overline{b} = (a_x \pm b_x; a_y \pm b_y; a_z \pm b_z); \tag{2.8}$$

$$\lambda\overline{a} = (\lambda a_x; \lambda a_y; \lambda a_z).$$

Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ равны тогда и только тогда, когда равны их соответствующие координаты

$$\overline{a} = \overline{b} \Leftrightarrow a_x = b_x,\ a_y = b_y,\ a_z = b_z. \tag{2.9}$$

Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда их соответствующие координаты пропорциональны, то есть

$$\overline{a} \parallel \overline{b} \Leftrightarrow \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}. \qquad (2.10)$$

2.4. Радиус-вектор точки. Координаты вектора по его началу и концу

Радиус-вектором точки $M(x, y, z)$ называется вектор $\overline{r} = \overline{OM}$ (рис. 2.4), начало которого совпадает с началом координат, а конец с точкой М.

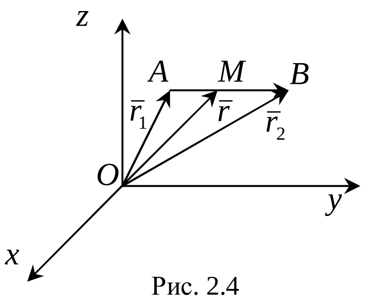


Рис. 2.4

Координаты точки – это координаты её радиус-вектора $\overline{r} = (x, y, z)$.

Для вектора $\overline{a} = \overline{AB}$, заданного координатами точки $A = (x_1; y_1; z_1)$ и $B = (x_1; y_1; z_1)$, его координаты определяются из векторного равенства

$$\overline{a} = \overline{AB} = \overline{r}_2 - \overline{r}_1 = \left(\underbrace{x_2 - x_1}_{a_x}; \underbrace{y_2 - y_1}_{a_y}; \underbrace{z_2 - z_1}_{a_z} \right). \qquad (2.11)$$

Здесь $\overline{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ и $\overline{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ – радиус-векторы точек A и B, то есть координаты вектора AB равны разностям одноименных координат конечной B и начальной A точек этого вектора.

2.5. Деление отрезка в данном отношении

Определим радиус-вектор $\overline{r}$ точки M, делящей отрезок AB в отношении $\dfrac{|\overline{AM}|}{|\overline{MB}|} = \lambda$.

Вектор $\overline{AM} \parallel \overline{MB}$ одинаково направлен с $\overline{MB}$, поэтому $\overline{AM} = \lambda \overline{MB}$. Учитывая векторные равенства $\overline{AM} = \bar{r} - \bar{r}_1$, $\overline{MB} = \bar{r}_2 - \bar{r}_1$ получим

$$\bar{r} - \bar{r}_1 = \lambda\left(\bar{r}_2 - \bar{r}\right),$$

откуда
$$\bar{r} = \frac{\bar{r}_1 + \lambda \bar{r}_2}{1+\lambda}. \qquad (2.12)$$

Из равенства векторов (2.12) следуют три координатных формулы

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda},\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda},\ z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}. \qquad (2.13)$$

Для $\lambda = 1$ (M – середина отрезка AB)

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},\ y = \frac{y_1 + y_2}{2},\ z = \frac{z_1 + z_2}{2}. \qquad (2.14)$$

Примеры

1. Найти координаты орта вектора $\bar{a} = (-8;0;6)$.

Решение. По формуле (1.1) вектор $\bar{a}$ может быть представлен в виде произведения модуля вектора на орт этого вектора, то есть $\bar{a} = |\bar{a}| \cdot \overline{a^0}$.

Найдем $|\bar{a}|$ по формуле (2.4) $|\bar{a}| = \sqrt{(-8)^2 + 6^2} = 10$.

Значит $\overline{a^0} = \frac{1}{|a|} \cdot \bar{a} = \frac{1}{10} \cdot \bar{a}$.

Выполняя умножение вектора на число по (2.8) получим $\overline{a^0} = (-0{,}8; 0; 0{,}6)$.

2. Даны точка $A(-1;1;3)$ и вектор $\bar{a} = (3;2;1)$. Найти координаты такой точки B, что $\overline{AB} = \bar{a}$.

Решение. Пусть $(x; y; z)$ координаты точки B, тогда по формуле (2.11) $\overline{AB} = (x+1; y-1; z-3)$. По условию задачи $\bar{a} = \overline{AB}$. Используя условие равенства векторов (2.9) имеем

$$x+1 = 3;\ y-1 = 2;\ z-3 = 1;$$
$$x = 2;\ y = 3;\ z = 4.$$

Точка B имеет координаты $(2;3;4)$.

3. Даны два вектора $\overline{a} = 3\overline{j} + 2\overline{k}$ и $\overline{b} = -2\overline{i} + 3\overline{j} + 2\overline{k}$. Найти $\left|2\overline{a} - 3\overline{b}\right|$ и $\left|2\overline{a}\right| - \left|3\overline{b}\right|$.

Решение. Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ заданы в виде разложения по базису $\{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$. Коэффициенты этого разложения являются прямоугольными координатами векторов, значит $\overline{a} = (0;3;2)$ и $\overline{b} = (-2;3;2)$. По правилам действий над векторами в координатной форме (2.8) находим $2\overline{a} = (0;6;4)$, $3\overline{b} = (-6;9;6)$ и $2\overline{a} - 3\overline{b} = (6;-3;-2)$. Теперь находим длины этих векторов по (2.4):

$$\left|2\overline{a}\right| = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52}\,,\ \left|3\overline{b}\right| = \sqrt{(-6)^2 + 9^2 + 6^2} = \sqrt{153}\,,$$

$$\left|2\overline{a} - 3\overline{b}\right| = \sqrt{6^2 + (-3)^2 + (-2)^2} = 7\,,$$

$$\left|2\overline{a}\right| - \left|3\overline{b}\right| = \sqrt{52} - \sqrt{153}\,.$$

4. Найти длину и направляющие косинусы медианы AM треугольника ABC, если $A(2;3;-4)$, $B(3;-4;1)$, $C(1;6;-7)$.

Решение. Найдем координаты точки $M(x, y, z)$ середины отрезка BC по формулам (2.14)

$$x = \frac{3+1}{2} = 2\,,\ y = \frac{-4+6}{2} = 1\,,\ z = \frac{1-7}{2} = -3\,.$$

Значит $M(2;1;-3)$. Определим координаты вектора $\overline{AM} = (2-2;1-3;-3-(-4)) = (0;-2;1)$.

Длина медианы или модуль вектора $\overline{AM}$ определим по формуле (2.4)

$$\left|\overline{AM}\right| = \sqrt{(-2)^2 + 1} = \sqrt{5}\,.$$

Направляющие косинусы вектора $\overline{AM}$ определим используя формулу (2.6).

$$\cos\alpha = \frac{0}{\sqrt{5}} = 0\,,\ \cos\beta = \frac{-2}{\sqrt{5}}\,,\ \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{5}}\,.$$

5. В пространстве даны точки A, B и C, причем $\overline{AB} = (2;3;-1)$ и $\overline{AC} = (-4;m;n)$. При каких m и n эти точки лежат на одной прямой?

Решение. Точки A, B и C лежат на одной прямой, если векторы $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ коллинеарны.

Воспользуемся условием коллинеарности векторов в координатной форме (2.10).

$$\overline{AB} \parallel \overline{AC} \Leftrightarrow \frac{2}{-4} = \frac{3}{m} = \frac{-1}{n},$$

$$\begin{cases} \dfrac{3}{m} = \dfrac{-2}{4}, \\ \dfrac{-1}{n} = \dfrac{-2}{4}, \end{cases} \quad \begin{cases} m = -6, \\ n = 2. \end{cases}$$

6. Найти координаты вектора $\overline{a}$, образующего равные острые углы с осями координат, если длина вектора $\overline{a}$ равна 3.

Решение. Используя формулы (2.6), найдем выражение координат a_x, a_y, a_z через направляющие косинусы вектора $\overline{a}$.

$$a_x = |\overline{a}| \cdot \cos\alpha, \ a_x = |\overline{a}| \cdot \cos\beta, \ a_x = |\overline{a}| \cdot \cos\gamma.$$

По условию задачи $\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma$, так как углы α, β, γ с осями координат равны. Из равенства (2.7) получим

$$\cos^2\alpha + \cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \ 3\cos^2\alpha = 1, \ \cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Выбираем положительное значение $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, так как α – острый угол. Координаты вектора $\overline{a}$ равны между собой

$$a_x = a_y = a_z = 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

7. Дан треугольник с вершинами $A(-2;1;3), B(0;3;4), C(1;5;3)$. Найти длину биссектрисы внутреннего угла A.

Решение. Пусть $M(x, y, z)$ точка пересечения биссектрисы угла A со стороной BC треугольника ABC. По свойству биссектрисы точка M делит отрезок BC на части, пропорциональные длинам прилежащих сторон треугольника. Найдем векторы сторон $\overline{AB} = (2;2;1), \overline{AC} = (3;4;0)$ и их длины $|\overline{AB}| = 3, |\overline{AC}| = 5$, тогда $\lambda = BM : MC = \dfrac{3}{5}$.

Найдем координаты точки M, делящей отрезок BC в отношении $\lambda = \frac{3}{5}$ по формулам (2.13):

$$x = \frac{0+\frac{3}{5}\cdot 1}{1+\frac{3}{5}} = \frac{3}{8};\ y = \frac{3+\frac{3}{5}\cdot 5}{1+\frac{3}{5}} = \frac{30}{8};\ z = \frac{4+\frac{3}{5}\cdot 3}{1+\frac{3}{5}} = \frac{29}{8}.$$

Точка $M\left(\frac{3}{8};\frac{30}{8};\frac{29}{8}\right)$ является концом вектора $\overline{AM} = \left(\frac{3}{8}+2;\frac{30}{8}-1;\frac{29}{8}-3\right) = \left(\frac{19}{8};\frac{22}{8};\frac{5}{8}\right)$. Значит, длина биссектрисы есть модуль вектора $\left|\overline{AM}\right| = \sqrt{\left(\frac{19}{8}\right)^2+\left(\frac{22}{8}\right)^2+\left(\frac{5}{8}\right)^2} = \frac{\sqrt{870}}{8}$.

8. Даны три вектора $\overline{a} = (2;3;1), \overline{b} = (4;-1;2), \overline{c} = (5;1;-1)$. Вектор $\overline{d} = (0;15;-7)$ разложить по векторам $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$.

Решение. Разложить вектор $\overline{d}$ по векторам $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ – это значит, представить его в виде (1.5) линейной комбинации этих векторов, то есть

$\overline{d} = \alpha\overline{a} + \beta\overline{b} + \gamma\overline{c}$, где α, β, γ – некоторые числа.

Перейдем в этом векторном равенстве к координатам

$$(0;15;-7) = \alpha\cdot(2;3;1)+\beta\cdot(4;-1;2)+\gamma\cdot(5;1;-1) \text{ или}$$

$$(0;15;-7) = (2\alpha+4\beta-5\gamma;3\alpha-\beta+\gamma;\alpha+2\beta-\gamma).$$

Учитывая условие (2.9) равенства векторов, получим систему

$$\begin{cases} 2\alpha+4\beta+5\gamma=0, \\ 3\alpha-\beta+\gamma=15, \\ \alpha+2\beta-\gamma=-7, \end{cases}$$

решение которой $\alpha = 3, \beta = -4, \gamma = 2,$ то есть $\overline{d} = 3\overline{a} - 4\overline{b} + 2\overline{c}$.

Задачи

1. Найти расстояние от точки $M(-2;0;1)$ до середины отрезка AB, если $A(2;-1;0)$ и $B(-2;3;2)$.

2. Найти длину и направляющие косинусы вектора $\overline{a} = 2\overline{i} + 3\overline{j} - 6\overline{k}$.

3. Даны три последовательные вершины параллелограмма $ABCD$: $A(3;-4;7), B(-5;3;-2), C(1;2;-3)$. Найти его четвертую вершину D.

4. Найти координаты единичного вектора, противоположно направленного вектору $\overline{AB}$, если $A(7;4;-2)$ и $B(1;2;1)$.

5. Вектор $\overline{m}$ одинаково направлен с вектором $\overline{p} = (-1;2;1)$. Найдите координаты вектора $\overline{m}$, если $|\overline{m}| = 3\sqrt{6}$.

6. В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Найдите координаты вершины C и D, если $A(1;3;-1), B(-2;1;0), O(0;1,5;0)$.

7. При каком значении m и n векторы $\overline{a} = 3\overline{i} - 2\overline{j} + m\overline{k}$ и $\overline{b} = n\overline{i} + \overline{j} - 2\overline{k}$ коллинеарны?

8. Найти координаты вектора $\overline{a}$, коллинеарного вектору $\overline{b} = (6;8;-7,5)$ и образующего тупой угол с координатным вектором j, если $|\overline{a}| = 50$.

9. Даны четыре вектора $\overline{a} = (2;1;0)$, $\overline{b} = (1;-1;2)$, $\overline{c} = (2;2;-1)$ и $\overline{d} = (3;7;-7)$. Разложить вектор $\overline{a}$ по векторам $\overline{b}$, $\overline{c}$ и $\overline{d}$.

10. Треугольник задан координатами своих вершин $A(3;-2;1)$, $B(3;1;5)$, $C(4;0;3)$. Вычислить расстояние от начала координат до точки пересечения медиан этого треугольника.

Ответы

1. $\sqrt{5}$.

2. $|\overline{a}| = 7,\ \cos\alpha = \frac{2}{7},\ \cos\beta = \frac{3}{7},\ \cos\gamma = -\frac{6}{7}$.

3. $D(9;-5;6)$.

4. $\left(\frac{6}{7};\frac{2}{7};-\frac{3}{7}\right)$.

5. $m = (-3;6;3)$;

6. $C(-1;0;1), D(2;2;0)$.

7. $m = 4, n \quad -\frac{3}{2}$.

8. $(48;-64;60)$.

9. $\overline{a} = \frac{3}{2}\overline{b} - \frac{1}{2}\overline{c} + \frac{1}{2}\overline{d}$.

10. $\frac{\sqrt{182}}{3}$.

3. Скалярное произведение векторов

3.1. Определение скалярного произведения

Скалярным произведением двух ненулевых векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется число, обозначаемое $\overline{a} \cdot \overline{b}$, равное произведению длин этих векторов на косинус угла φ между ними (рис. 3.1).

Таким образом

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cos\varphi, \tag{3.1}$$

где $\varphi = \left(\overline{a}\,\widehat{,}\,\overline{b} \right)$.

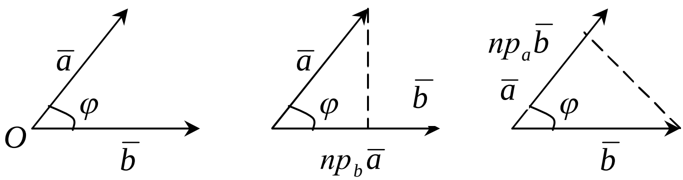


Рис. 3.1

Из рисунка видно, что

$$|\overline{a}| \cdot \cos\varphi = np_b\overline{a}\ , \ |\overline{b}| \cdot \cos\varphi = np_a\overline{b}\ . \tag{3.2}$$

С учетом (3.2) можно записать равенства

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}| \cdot np_b\overline{a} = |\overline{b}| \cdot np_a\overline{b}\ . \tag{3.3}$$

3.2. Свойства скалярного произведения

1) $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{b} \cdot \overline{a}$ (перестановочный закон);

2) $\overline{a} \cdot \left(\overline{b} + \overline{c}\right) = \overline{a} \cdot \overline{b} + \overline{a} \cdot \overline{c}$ (распределительный закон);

3) $\lambda\overline{a} \cdot \overline{b} = \lambda\left(\overline{a} \cdot \overline{b}\right)$ (сочетательность по отношению к скалярному множителю);

4) $\bar{a}\cdot\bar{a}=|\bar{a}|^2$, скалярный квадрат вектора $\bar{a}$ равен квадрату длины вектора. В частности $\bar{i}^2=\bar{j}^2=\bar{k}^2=1$;

5) если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ ненулевые, то

$$\bar{a}\perp\bar{b}\Leftrightarrow\bar{a}\cdot\bar{b}=0 \qquad (3.4)$$

(условие перпендикулярности векторов).

В частности $\bar{i}\cdot\bar{j}=0,\quad \bar{j}\cdot\bar{k}=0,\ \bar{k}\cdot\bar{i}=0$.

3.3. Скалярное произведение в координатной форме

Пусть векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ заданы своим разложением по базису $\{\bar{i},\bar{j},\bar{k}\}$: $\bar{a}=a_x\bar{i}+a_y\bar{j}+a_z\bar{k}$ и $\bar{b}=b_x\bar{i}+b_y\bar{j}+b_z\bar{k}$. Перемножая векторы как многочлены с учетом распределительного закона умножения и свойств скалярного произведения базисных векторов, получим

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z. \qquad (3.5)$$

То есть, если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ заданы своими координатами в базисе $\{i,j,k\}$, то их скалярное произведение равно сумме произведений одноименных координат.

3.4. Приложения скалярного произведения

С помощью скалярного произведения определяют косинус угла между векторами по формуле

$$\cos\varphi=\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}, \qquad (3.6)$$

или переходя к координатам векторов

$$\cos\varphi=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}. \qquad (3.7)$$

Находят проекцию одного вектора на направление другого по формуле

$$np_{\bar{b}}\bar{a}=\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{b}|},\ np_{\bar{a}}\vec{b}=\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|}. \qquad (3.8)$$

Определяют длину вектора

$$|\bar{a}|=\sqrt{\bar{a}\cdot\bar{a}}. \qquad (3.9)$$

Примеры

1. Даны точки $A(-1;3;-7)$, $B(2;-;1;5)$, $C(0;1;-5)$. Найти $\left(2\overline{AB}-\overline{CD}\right)\cdot\left(2\overline{BC}+\overline{BA}\right)$.

Решение. Определим координаты векторов, входящих в искомое скалярное произведение.

$$\overline{AB}=\left(2-(-1);-1-3;5-(-7)\right)=(3;-4;12),$$

$$\overline{BA}=-\overline{AB}=(-3;4;-12),$$

$$\overline{BC}=\left(0-2;1-(-1);-5-5\right)=(-2;2;-10),$$

$$\overline{CB}=-\overline{BC}=(2;-2;10),$$

$$2\overline{AB}-\overline{CB}=2(3;-4;12)-(2;-2;10)=(4;-6;14),$$

$$2\overline{BC}+\overline{BA}=2(-2;2;-10)+(-3;4;-12)=(-7;8;-32).$$

А теперь по формуле (3.5) найдем

$$\left(2\overline{AB}-\overline{CD}\right)\cdot\left(2\overline{BC}+\overline{BA}\right)=4\cdot(-7)+(-6)\cdot 8+14\cdot(-32)=-524.$$

2. Найти $\left(3\overline{a}_1-2\overline{a}_2\right)\cdot\left(\overline{a}_1+2\overline{a}_2\right)$, если $\left|\overline{a}_1\right|=3$, $\left|\overline{a}_2\right|=4$, $\left(\overline{a}_1,\hat{\ }\overline{a}_2\right)=\dfrac{2\pi}{3}$.

Решение. Для нахождения скалярного произведения воспользуемся его свойствами. По распределительному закону

$$\left(3\overline{a}_1-2\overline{a}_2\right)\cdot\left(\overline{a}_1+2\overline{a}_2\right)=3\overline{a}_1\cdot\overline{a}_1-2\overline{a}_2\cdot\overline{a}_1+3\overline{a}_1\cdot 2\overline{a}_2-4\overline{a}_2\cdot\overline{a}_2.$$

Упростим равенство с учетом $\overline{a}_1\cdot\overline{a}_1=\left|\overline{a}_1\right|^2$, $\overline{a}_2\cdot\overline{a}_2=\left|\overline{a}_2\right|^2$, $\overline{a}_1\cdot\overline{a}_2=\overline{a}_2\cdot\overline{a}_1$.

$$\left(3\overline{a}_1-2\overline{a}_2\right)\cdot\left(\overline{a}_1+2\overline{a}_2\right)=3\left|\overline{a}_1\right|^2+4\overline{a}_1\cdot\overline{a}_2-4\left|\overline{a}_2\right|^2=$$

$$=3\cdot 3^2+4\cdot 3\cdot 4\cos\frac{2\pi}{3}-4\cdot 4^2=-61.$$

3. Найти угол между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{a}=(1;-3;1)$, если $A(-5;7;-8)$ и $B(-7;9;-9)$.

Решение. Обозначим вектором

$$\overline{b}=\overline{AB}=\left(-7-(-5);9-7;-9-(-8)\right)=(-2;2-1).$$

Найдем длины векторов $\left|\overline{b}\right| = \left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + (-1)^2} = 3;$ $\left|\overline{a}\right| = \sqrt{1^2 + (-3)^2 + 1^2} = \sqrt{11}.$ Определим скалярное произведение $\overline{a} \cdot \overline{b}$ по формуле (3.5)

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = (-2) \cdot 1 + 2 \cdot (-3) + (-1) \cdot 1 = -9 .$$

Теперь по формуле (3.6)

$$\cos\varphi = \frac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{\left|\overline{a}\right| \cdot \left|\overline{b}\right|} = \frac{-9}{3 \cdot \sqrt{11}} = \frac{-3}{\sqrt{11}},$$

$$\varphi = \arccos\left(-\frac{3}{\sqrt{11}}\right).$$

4. Даны векторы $\overline{a} = (1;-3;4)$, $\overline{b} = (3;-4;2)$, $\overline{c} = (-1;1;4)$. Найти $np_{\overline{b}+\overline{c}}\overline{a}$.

Решение. Используя формулу (3.8), запишем $np_{\overline{b}+\overline{c}}\overline{a} = \dfrac{\overline{a} \cdot \left(\overline{b} + \overline{c}\right)}{\left|\overline{b} + \overline{c}\right|}$.

Поскольку векторы заданы своими координатами, найдем по формуле (2.8) сумму векторов

$$\overline{b} + \overline{c} = (3;-4;2) + (-1;1;4) = (2;-3;6).$$

$\left|\overline{b} + \overline{c}\right| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 6^2} = 7.$ Определим величину скалярного произведения по формуле (3.5)

$\overline{a} \cdot \left(\overline{b} + \overline{c}\right) = 1 \cdot 2 + (-3) \cdot (-3) + 4 \cdot 6 = 35$. Подставляем в формулу проекции, имеем

$$np_{b+c}\overline{a} = \frac{35}{7} = 5 .$$

5. Найти координаты вектора $\overline{a}$, перпендикулярного векторам $\overline{i}$ и $\overline{b} = 3\overline{i} + \overline{j} - \overline{k}$, если $\left|\overline{a}\right| = \sqrt{2}$.

Решение. Обозначим неизвестные координаты вектора $\overline{a} = (x; y; z)$. Воспользуемся условием перпендикулярности векторов (3.4).

$\overline{a} \perp \overline{i}, \overline{i} = (1;0;0) \Leftrightarrow \overline{a} \cdot \overline{i} = 0$, откуда $x = 0$;

$\bar{a} \perp \bar{b}, \bar{b} = (3;1;-1) \Leftrightarrow \bar{a} \cdot \bar{b} = 0$, значит $3x + y - z = 0$.

С учетом $|\bar{a}| = \sqrt{2}$, то есть $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{2}$, получим систему

$$\begin{cases} x = 0, \\ 3x + y - z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 2; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0, \\ y - z = 0, \\ y^2 + z^2 = 2; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0, \\ y = z, \\ z = \pm 1. \end{cases}$$

Условию задачи удовлетворяют два вектора $(0;1;1)$ и $(0;-1;-1)$.

6. Единичные векторы $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ удовлетворяют условию $\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3 = \bar{0}$. Найти $\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2 + \bar{e}_2 \cdot \bar{e}_3 + \bar{e}_1 \cdot \bar{e}_3$.

Решение. Найдем скалярный квадрат вектора

$$\left(\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3\right) \cdot \left(\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3\right) =$$

$$= \bar{e}_1^{\,2} + \bar{e}_2^{\,2} + \bar{e}_3^{\,2} + 2\bar{e}_1\bar{e}_2 + 2\bar{e}_2\bar{e}_3 + 2\bar{e}_1\bar{e}_3.$$

Поскольку векторы $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ единичные, то $\bar{e}_1^{\,2} = |\bar{e}_1|^2 = 1$, $\bar{e}_2^{\,2} = 1$, $\bar{e}_3^{\,2} = 1$.

Значит $\left(\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3\right)^2 = 3 + 2(\bar{e}_1\bar{e}_2 + \bar{e}_2\bar{e}_3 + \bar{e}_1\bar{e}_3)$.

С другой стороны, согласно условию это нулевой вектор, имеем

$$3 + 2(\bar{e}_1\bar{e}_2 + \bar{e}_2\bar{e}_3 + \bar{e}_1\bar{e}_3) = \bar{0}, \quad \bar{e}_1\bar{e}_2 + \bar{e}_2\bar{e}_3 + \bar{e}_1\bar{e}_3 = -\frac{3}{2}.$$

7. Вычислить длину диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\vec{p} = 5\bar{a} + 2\bar{b}$ и $\bar{g} = \bar{a} - 3\bar{b}$, если $|\bar{a}| = 2\sqrt{2}$, $|\bar{b}| = 3$, $\left(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}\right) = 45°$.

Решение. Векторы диагоналей параллелограмма имеют вид

$$\bar{p} + \bar{g} = \left(5\bar{a} + 2\bar{b}\right) + \left(\bar{a} - 3\bar{b}\right) = 6\bar{a} - \bar{b};$$

$$\bar{p} - \bar{g} = \left(5\bar{a} + 2\bar{b}\right) - \left(\bar{a} - 3\bar{b}\right) = 4\bar{a} + 5\bar{b}.$$

Определим длины диагоналей, используя формулу (3.9).

$$\left|6\bar{a} - \bar{b}\right| = \sqrt{\left(6\bar{a} - \bar{b}\right) \cdot \left(6\bar{a} - \bar{b}\right)} =$$

$$= \sqrt{36\left|\bar{a}^2\right| - 12|\bar{a}||\bar{b}|\cos\left(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}\right) + \left|\bar{b}^2\right|} = 15.$$

$$\left|4\overline{a}+5\overline{b}\right| = \sqrt{\left(4\overline{a}+5\overline{b}\right)\cdot\left(4\overline{a}+5\overline{b}\right)} =$$

$$= \sqrt{16\left|\overline{a}^2\right| + 40\left|\overline{a}\right|\left|\overline{b}\right|\cos\left(\widehat{\overline{a},\overline{b}}\right) + 25\left|\overline{b}^2\right|} = \sqrt{593}.$$

Задачи

1. Вычислить скалярное произведение векторов $4\overline{a}-\overline{b}$ и $2\overline{a}+3\overline{b}$, если $\left|\overline{a}\right| = 2, \left|\overline{b}\right| = 3$ и угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$ равен $120°$.

2. Даны векторы $\overline{a} = 4\overline{i} - 2\overline{j} - 4\overline{k}$ и $\overline{b} = (6;-3;2)$. Вычислить: а) $\overline{a}\cdot\overline{b}$; б) $\left(\overline{a}+2\overline{b}\right)\cdot\left(2\overline{a}-3\overline{b}\right)$; в) $np_{\overline{b}}\overline{a}$; г) $np_{\overline{a}}\overline{b}$.

3. Дано $A(-1;3;-7)$, $B(2;-1;5)$, $C(0;1;-5)$. Найти $\left(2\overline{AB}-\overline{CB}\right)\cdot\left(2\overline{BC}+\overline{BA}\right)$.

4. Упростить выражение $\left(2\overline{i}-\overline{j}\right)\cdot\overline{j} + \left(\overline{j}-2\overline{k}\right)\cdot\overline{k} + \left(\overline{i}-2\overline{k}\right)^2$.

5. При каком значении λ векторы $\overline{b} = \lambda\overline{i} - 5\overline{j} + 3\overline{k}$ и $\overline{c} = \overline{i} + 2\overline{j} - \lambda\overline{k}$ взаимно перпендикулярны?

6. Найти косинус острого угла между диагоналями параллелограмма, если заданы три его вершины $A(2;1;3), B(5;2;-1), C(-3;3;-3)$.

7. Даны векторы $\overline{a} = 6\overline{i} - 8\vec{j} + 5\sqrt{2}\overline{k}$ и $\overline{b} = 2\overline{i} - 4\overline{j} + \sqrt{2}\overline{k}$. Найти угол, образуемый вектором $\overline{a}-\overline{b}$ с осью OZ.

8. В плоскости находятся два вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$. Даны модули этих векторов $\left|\overline{a}\right| = 3, \left|\overline{b}\right| = 4$ и угол между ними $\varphi = 60°$. Найти модуль вектора $\overline{U} = 2\overline{a} - \overline{b}$.

9. Найти угол, образованный единичными векторами $\overline{e}_1$ и $\overline{e}_2$, если известно, что векторы $\overline{a} = \overline{e}_1 + 2\overline{e}_2$ и $\overline{b} = 5\overline{e}_1 - 4\overline{e}_2$ перпендикулярны.

10. Найти вектор $\overline{b}$, коллинеарный вектору $\overline{a} = (1;-2;2)$ и удовлетворяющий условию $\overline{a}\cdot\overline{b} = -18$.

Ответы

1. -25. 2. а) 22; б) -200; в) $\frac{22}{7}$; г) $\frac{11}{3}$.

3. 13. 4. 2. 5. -5.

6. $\dfrac{43}{25\sqrt{13}}$. 7. $45°$.

8. $2\sqrt{7}$. 9. $\dfrac{\pi}{3}$. 10. $(-2;4;-4)$.

4. Векторное произведение векторов

4.1. Определение векторного произведения

Векторным произведением вектора $\overline{a}$ на вектор $\overline{b}$ называется вектор, обозначаемый $\overline{a}\times\overline{b}$ и удовлетворяющий условиям:

1) $\left|\overline{a}\times\overline{b}\right| = \left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|\cdot\sin\varphi$, $\varphi = \left(\widehat{\overline{a},\overline{b}}\right)$, (4.1)

то есть длина $\overline{a}\times\overline{b}$ численно равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$;

2) $\overline{a}\times\overline{b}$ перпендикулярен вектору $\overline{a}$ и вектору $\overline{b}$;

3) $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{a}\times\overline{b}$ образуют правую тройку, то есть если смотреть с конца последнего вектора, то кратчайший поворот от первого ко второму совершается против часовой стрелки (рис. 4.1).

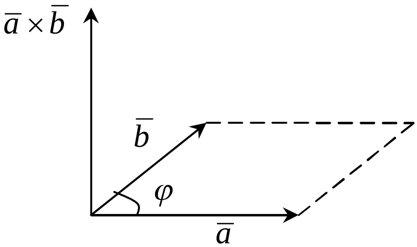


Рис. 4.1

В частности: $\overline{i}\times\overline{j} = \overline{k};\ \overline{j}\times\overline{k} = \overline{i};\ \overline{k}\times\overline{i} = \overline{j}$. (4.2)

4.2. Свойства векторного произведения

1. $\overline{a}\times\overline{b} == \overline{b}\times\overline{a}$ (антиперестановочность).
2. $\left(\overline{a}+\overline{c}\right)\times\overline{b} = \overline{a}\times\overline{b}+\overline{c}\times\overline{b}$ (распределительность).
3. $\lambda\overline{a}\times\overline{b} = \overline{a}\times\lambda\overline{b} = \lambda\cdot\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)$ (сочетательность по отношению к скалярному множителю).

4. $\bar{a}\times\bar{b}=\bar{0}$, если $\bar{a}\parallel\bar{b}$ (или $\bar{a}=\bar{0}$, или $\bar{b}=\bar{0}$).

В частности $\bar{i}\times\bar{i}=\bar{j}\times\bar{j}=\bar{k}\times\bar{k}=\bar{0}$. (4.3)

4.3. Векторное произведение в координатной форме

Если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ заданы своими прямоугольными координатами $\bar{a}=\left(a_x;a_y;a_z\right)$, $\bar{b}=\left(b_x;b_y;b_z\right)$, то

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}. \tag{4.4}$$

4.4. Приложение векторного произведения

Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$,

$$S_{пар.}=\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|, \tag{4.5}$$

а площадь треугольника, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$,

$$S_{\Delta}=\frac{1}{2}\cdot\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|. \tag{4.6}$$

Примеры

1. Даны два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$, для которых $\left|\bar{a}\right|=4$, $\left|\bar{b}\right|=5$, $\varphi=\left(\bar{a},\hat{\ }\bar{b}\right)=\dfrac{\pi}{4}$. Вычислить: а) $\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|$; б) $\left|\left(7\bar{a}-\bar{b}\right)\times\left(\bar{a}+3\bar{b}\right)\right|$.

Решение

а) По формуле (4.1) длина вектора векторного произведения

$$\left|\bar{a}\times\bar{b}\right| \quad =\left|\bar{a}\right|\cdot\left|\bar{b}\right|\cdot\sin\left(\cancel{a},\hat{\ } b\right) \quad 4\cdot5\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=10\sqrt{2}.$$

б) По свойствам векторного произведения найдем

$$\left(7\bar{a}-\bar{b}\right)\times\left(\bar{a}+3\bar{b}\right)\overset{св.2}{=}7\bar{a}\times\bar{a}-\bar{b}\times\bar{a}+7\bar{a}\times3\bar{b}-\bar{b}\times3\bar{b}\overset{св.4и3}{=}$$

$$=-\bar{b}\times\bar{a}+21\bar{a}\times\bar{b}\overset{св.1}{=}\bar{a}\times\bar{b}+21\bar{a}\times\bar{b}=22\bar{a}\times\bar{b}.$$

$$\left|\left(7\bar{a}-\bar{b}\right)\times\left(\bar{a}+3\bar{b}\right)\right|=\left|22(a\times b)\right|=22\left|a\times b\right|=220\sqrt{2}.$$

2. Заданы векторы $\overline{a} = 3\overline{i} - \overline{j} + 2\overline{k}$ и $\overline{b} = (1;2;-1)$. Найти координаты векторов: а) $\overline{a} \times \overline{b}$; б) $(\overline{a} - \overline{b}) \times (3\overline{a} + \overline{b})$.

Решение: а) Используем формулу (4.4) вычисления координат вектора векторного произведения векторов $\overline{a} = (3;-1;2)$ и $\overline{b} = (1;2;-1)$

$$\overline{a} \times \overline{b} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \overline{i} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - \overline{j} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \overline{k} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= (1-4)\overline{i} - (-3-2)\overline{j} + (6+1)\overline{k} = -3\overline{i} + 5\overline{j} + 7\overline{k} = (-3;+5;7).$$

б) Сначала определим координаты векторов

$\overline{a} - \overline{b} = (3-1;-1-2;2-(-1)) = (2;-3;3)$,

$3\overline{a} + \overline{b} = 3(3;-1;2) + (1;2;-1) = (10;-1;5)$. Снова используем (4.4)

$$(\overline{a} - \overline{b}) \times (3\overline{a} \times \overline{b}) = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 2 & -3 & 3 \\ 10 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -12\overline{i} + 20\overline{j} + 28\overline{k} = (-12;20;28).$$

3. Определить единичный вектор $\vec{n}$, перпендикулярный каждому из векторов $\overline{a} = (1;2;-3)$, $\overline{b} = (-2;1;1)$, образующий острый угол с осью OZ.

Решение. Найдем координаты вектора

$$\overline{c} = \overline{a} \times \overline{b} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5\overline{i} + 5\overline{j} + 5\overline{k} = (5;5;5).$$ По определению векторного произведения векторов $\overline{c} = \overline{a} \times \overline{b}$ перпендикулярен и $\overline{a}$, и $\overline{b}$. Значит $\overline{n} \parallel \overline{c}$. Найдем орт вектора $\overline{c^0}$.

$$\overline{c^0} = \frac{\overline{c}}{|\overline{c}|} = \frac{(5;5;5)}{\sqrt{5^2 + 5^2 + 5^2}} = \left(\frac{5}{5\sqrt{3}};\frac{5}{5\sqrt{3}};\frac{5}{5\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Тогда $\overline{n} = \pm\overline{c^0}$. Выбираем знак +, так как в этом случае третья координата вектора положительна, значит вектор образует острый угол с осью OZ. Значит $\overline{n} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

4. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a} = \bar{i} - 2\bar{j} + 5\bar{k}$ и $\bar{b} = 2\bar{i} - 2\bar{j} + \bar{k}$.

Решение. Согласно формуле (4.5) $S_{пар.} = \left|\bar{a} \times \bar{b}\right|$. Учитывая координатный способ задания векторов, найдем сначала координаты вектора

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & -2 & 5 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (8;9;2).$$

А теперь его модуль

$$\left|\bar{a} \times \bar{b}\right| = \sqrt{8^2 + 9^2 + 2^2} = \sqrt{149}. \qquad S_{пар} = \sqrt{149}.$$

5. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a} = 3\bar{p} + 2\bar{q}$ и $\bar{b} = 2\bar{p} - \bar{q}$, если $|\bar{p}| = |\bar{q}| = 1$, $\left(\widehat{\bar{p},\bar{q}}\right) = \dfrac{5\pi}{6}$.

Решение. Найдем $\bar{a} \times \bar{b} = \left(3\bar{p} + 2\bar{q}\right) \times \left(2\bar{p} - \bar{q}\right) =$

$$= 6\bar{p} \times 2\bar{p} + 2\bar{q} \times 2\bar{p} - 3\bar{p} \times \bar{q} - 2\bar{q} \times \bar{q} = 4\bar{q} \times \bar{p} - 3\bar{p} \times \bar{q} =$$

$$= -4\bar{p} \times \bar{q} - 3\bar{p} \times \bar{q} = -7\left(\bar{p} \times \bar{q}\right).$$

$$S_{пар} = \left|\bar{a} \times \bar{b}\right| = \left|-7\left(\bar{p} \times \bar{q}\right)\right| = |-7| \cdot \left|\bar{p} \times \bar{q}\right| = 7 \cdot |\bar{p}| \cdot |\bar{q}| \cdot \sin\frac{5\pi}{6} = 3{,}5.$$

6. В треугольнике с вершинами $A(1;-1;2)$, $B(5;-6;2)$, $C(1;3;-1)$ найти длину высоту, опущенной из вершины B на сторону AC .

Решение. Обозначим h длину высоты из вершины B, тогда $S_{\Delta} = \dfrac{1}{2} h \cdot \left|\overline{AC}\right| = \dfrac{1}{2} h \cdot \sqrt{(1-1)^2 + (3+1)^2 + (-1-2)^2} = \dfrac{5}{2} h$.

С другой стороны $S_{\Delta} = \dfrac{1}{2}\left|\bar{a} \times \bar{b}\right|$, где $\bar{a} = \overline{AB} = (4;-5;0)$, $\bar{b} = \overline{AC} = (0;4;-3)$. Определим $\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 4 & -5 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} = (15;12;16)$,

$$\left|\bar{a} \times \bar{b}\right| = \sqrt{15^2 + 12^2 + 16^2} = 25.$$

Итак, $S_{\Delta} = \dfrac{1}{2} \cdot 25 = \dfrac{5}{2} h$. Откуда $h = 5$.

7. Дано: $|\bar{a}| = 3$, $|\bar{b}| = 26$, $|\bar{a} \times \bar{b}| = 72$. Найти $\bar{a} \cdot \bar{b}$.

Решение. Согласно формуле (4.1)

$$|\bar{a} \times \bar{b}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \sin\left(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}\right) = 3 \cdot 26 \cdot \sin\left(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}\right) = 78 \cdot \sin\left(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}\right).$$

По условию $|\bar{a} \times \bar{b}| = 72$, следовательно $78 \cdot \sin\left(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}\right) = 72$, $\sin\left(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}\right) = \dfrac{12}{13}$.

Определим с помощью основного тригонометрического тождества

$$\cos\left(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}\right) = \pm\sqrt{1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2} = \pm\frac{5}{13}.$$

Тогда скалярное произведение $\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos\left(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}\right) = \pm 30$.

8. Найти координаты вектора $\bar{x}$, если известно, что он перпендикулярен векторам $\bar{a} = (4;-2;-3)$ и $\bar{b} = (0;1;3)$, образует с ортом $\bar{j}$ тупой угол и $|\bar{x}| = 26$.

Решение. По условию $\bar{x} \perp \bar{a}$ и $\bar{x} \perp \bar{b}$, следовательно $\bar{x} \parallel \bar{a} \times \bar{b}$.

Найдем

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 4 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -3\bar{i} - 12\bar{j} + 4\bar{k} = (-3;-12;4).$$ Согласно (1.3) $\bar{x} = \alpha(-3;-12;4) = (-3\alpha;-12\alpha;4\alpha)$. Найдем α из условия $|\bar{x}| = 26$.

$$\sqrt{(-3\alpha)^2 + (12\alpha)^2 + (4\alpha)^2} = 26,\ 169\alpha^2 = 26^2,\ \alpha^2 = \left(\frac{26}{13}\right)^2,$$

$\alpha = \pm 2$. Если $\alpha = -2$, то $\bar{x} = (6;24;-8)$. Проекция на ось OY равна $24 > 0$, этот вектор образует с $\bar{j}$ острый угол. При $\alpha = 2$ $\bar{x} = (-6;-24;8)$ образует тупой угол с вектором $\bar{j}$, что удовлетворяет условию.

Задачи

1. Найти $\left|\left(\overline{a}+3\overline{b}\right)\times\left(3\overline{a}-\overline{b}\right)\right|$, если $\left|\overline{a}\right|=1$, $\left|\overline{b}\right|=2$ и $\left(\overline{a},\hat{\ }\overline{b}\right)=\dfrac{2\pi}{3}$.

2. Упростить выражение $\left(\overline{b}+\overline{c}\right)\times\left(\overline{a}+\overline{b}\right)-\left(2\overline{a}+\overline{b}\right)\times\left(\overline{a}-\overline{c}\right)$.

3. Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ образуют угол 45°. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\left(\overline{a}-2\overline{b}\right)$ и $\left(3\overline{a}+2\overline{b}\right)$, если $\left|\overline{a}\right|=\left|\overline{b}\right|=5$.

4. Вычислить площадь параллелограмма, диагоналями которого служат векторы $2\overline{p}-\overline{q}$ и $4\overline{p}-5\overline{q}$, где $\overline{p},\overline{q}$ - единичные векторы и $\left(\overline{p},\hat{\ }\overline{q}\right)=\dfrac{\pi}{4}$.

5. Найти площадь параллелограмма, три последовательные вершины которого находятся в точках $A(7;-5;6), B(9;-4;8), C(6;0;6)$.

6. Дан треугольник с вершинами $A(3;-4;5), B(5;-3;7), C(6;-8;7)$. Найти длину высоты, опущенной из вершины C на сторону AB.

7. Найти синус угла между векторами $\overline{a}=(2;-4;4)$ и $\overline{b}=(2;1;-2)$.

8. Дано $\left|\overline{a}\right|=3, \left|\overline{b}\right|=20, \overline{a}\cdot\overline{b}=30$. Найти $\left|\overline{a}\times\overline{b}\right|$.

9. Найти координаты вектора $\overline{x}$, если он перпендикулярен векторам $\overline{a}=(2;-3;1)$ и $\overline{b}=(1;-2;3)$ и удовлетворяет условию $\overline{x}\cdot\left(\overline{i}+2\overline{j}-7\overline{k}\right)=10$.

10. Найти координаты вектора $\overline{x}$, перпендикулярного оси OZ и вектору $\overline{a}=(8;-15;3)$, если $\left|\overline{x}\right|=51$.

Ответы

1. $10\sqrt{3}$.	2. $\overline{a}\times\overline{c}$.	3. $50\sqrt{2}$.
4. $\dfrac{3}{2}\sqrt{2}$.	5. 15.	6. 5.
7. $\dfrac{\sqrt{65}}{9}$.	8. $30\sqrt{3}$.	9. $(7;5;1)$.
10. $\pm(45;24;0)$.		

5. Смешанное произведение векторов

5.1. Определение смешанного произведения

Смешанным произведением трех векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ называется *число*, равное скалярному произведению вектора $\overline{a} \times \overline{b}$ на вектор $\overline{c}$. Обозначается символом $\overline{a}\overline{b}\overline{c}$.

Таким образом

$$\overline{a}\overline{b}\overline{c} = \left(\overline{a} \times \overline{b}\right) \cdot \overline{c} \tag{5.1}$$

5.2. Свойства смешанного произведения

1) $\left(\overline{a} \times \overline{b}\right) \cdot \overline{c} = \left(\overline{b} \times \overline{c}\right) \cdot \overline{a} = \left(\overline{c} \times \overline{a}\right) \cdot \overline{b}$;
2) $\left(\overline{a} \times \overline{b}\right) \cdot \overline{c} = \overline{a} \cdot \left(\overline{b} \times \overline{c}\right)$;
3) $\overline{a}\overline{b}\overline{c} = -\overline{a}\overline{c}\overline{b} = -\overline{b}\overline{a}\overline{c} = -\overline{c}\overline{b}\overline{a}$;
4) $\overline{a}\overline{b}\overline{c} = 0 \Leftrightarrow \overline{a}, \overline{b}, c$ - компланарны.

5.3. Смешанное произведение в координатной форме

Если векторы $\overline{a}, \overline{b}$ и $\overline{c}$ заданы прямоугольными координатами $\overline{a} = \left(a_x; a_y; a_z\right)$, $\overline{b} = \left(b_x; b_y; b_z\right)$ и $\overline{c} = \left(c_x; c_y; c_z\right)$, то

$$\overline{a}\overline{b}\overline{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \tag{5.2}$$

5.4. Приложения смешанного произведения

Объем параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{a}, \overline{b}$ и ,$\overline{c}$

$$V_{пар} = \left|\overline{a}\overline{b}\overline{c}\right|. \tag{5.3}$$

Объем треугольной пирамиды, построенной на векторах $\overline{a}, \overline{b}$ и $\overline{c}$,

$$V_{пир} = \frac{1}{6}\left|\overline{a}\overline{b}\overline{c}\right|. \tag{5.4}$$

Примеры

1. Найти объем параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{a} = 2\overline{i} + \overline{j} + 3\overline{k}$, $\overline{b} = \overline{i} + 3\overline{j} + \overline{k}$, $\overline{c} = 3\overline{i} + \overline{j} + 2\overline{k}$.

Решение. Найдем смешанное произведение векторов $\overline{a}=(2;1;3), \overline{b}=(1;3;1), \overline{c}=(3;1;2)$. Согласно формуле (5.2) имеем

$$\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}=\begin{vmatrix}2&1&3\\1&3&1\\3&1&2\end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix}3&1\\1&2\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1&1\\3&2\end{vmatrix}+3\cdot\begin{vmatrix}1&3\\3&1\end{vmatrix}=10+1-24=-13.$$

Найдем объем параллелепипеда по формуле (5.3)

$$V_{пар}=\left|\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}\right|=|-13|=13.$$

2. Проверить, компланарны ли векторы $\overline{a}=\overline{i}+2\overline{j}+3\overline{k}$, $\overline{b}=4\overline{i}+5\overline{j}+6\overline{k}$ и $\overline{c}=7\overline{i}+8\overline{j}+9\overline{k}$.

Решение. Воспользуемся свойством 4 смешанного произведения. Найдем $\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}$ трех векторов с координатами $\overline{a}=(1;2;3), \overline{b}=(4;5;6), \overline{c}=(7;8;9)$.

$$\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}=\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}5&6\\8&9\end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix}4&6\\7&9\end{vmatrix}+3\cdot\begin{vmatrix}4&5\\7&8\end{vmatrix}=-3+12-9=0.$$

Значит векторы $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ компланарны.

3. Вычислить $\overline{a}\left(\overline{b}-\overline{c}\right)\left(\overline{a}+\overline{b}+2\overline{c}\right)$, если $\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}=10$.

Решение. Используем определение и свойства смешанного произведения векторов, получаем

$$\overline{a}\left(\overline{b}-\overline{c}\right)\left(\overline{a}+\overline{b}+2\overline{c}\right)=\left(\overline{a}\times\left(\overline{b}-\overline{c}\right)\right)\cdot\left(\overline{a}+\overline{b}+2\overline{c}\right)=$$

$$=\left(\overline{a}\times\overline{b}-\overline{a}\times\overline{c}\right)\cdot\left(\overline{a}+\overline{b}+2\overline{c}\right)=\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\cdot\overline{a}+\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\cdot\overline{b}+$$

$$+\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\cdot2\overline{c}-\left(\overline{a}\times\overline{c}\right)\cdot\overline{a}-\left(\overline{a}\times\overline{c}\right)\cdot\overline{b}-\left(\overline{a}\times\overline{c}\right)\cdot2\overline{c}=$$

$$=\overline{a}\overline{b}\overline{a}+\overline{a}\overline{b}\overline{b}+2\overline{a}\overline{b}\overline{c}-\overline{a}\overline{c}\overline{a}-\overline{a}\overline{c}\overline{b}-2\overline{a}\overline{c}\overline{c}=$$

$$=0+0+2\overline{a}\overline{b}\overline{c}-0+\overline{a}\overline{b}\overline{c}-0=3\overline{a}\overline{b}\overline{c}.$$

Значит $\overline{a}\left(\overline{b}-\overline{c}\right)\left(\overline{a}+\overline{b}+2\overline{c}\right)=3\cdot10=30$.

4. Доказать, что точки $A(-1;2;1), B(-3;1;2), C(3;-2;2), D(3;-4;3)$ лежат в одной плоскости.

Решение. Достаточно показать, что три вектора $\overline{AB}, \overline{AC}$ и $\overline{AD}$ компланарны. Найдем координаты векторов

$$\overline{AB} = (-3-(-1);1-2;2-1) = (-2;-1;1);$$
$$\overline{AC} = (3-(-1);-2-2;2-1) = (4;-4;1);$$
$$\overline{AD} = (3-(-1);-4-2;3-1) = (4;-6;2).$$

Проверим условие компланарности векторов

$$\overline{AB}\times\overline{AC}\cdot\overline{AD} = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 4 & -4 & 1 \\ 4 & -6 & 2 \end{vmatrix} = -2\cdot\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -6 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & -4 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} =$$
$$= 4+4-8 = 0.$$

Значит, векторы $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$ компланарны, а точки A, B, C, D лежат в одной плоскости.

5. Дана пирамида с вершинами $A(2;1;1), B(-6;-2;2),$
$C(4;3;2), D(-6;8;7).$

Вычислить длину высоты, опущенной из вершины D.

Решение. Используем известную формулу $V_{пир} = \frac{1}{3}S_{\Delta}\cdot H$, откуда $H = \frac{3V_{пир}}{S_{\Delta}}$. Для нахождения S_{Δ} и $V_{пир}$ воспользуемся свойствами векторного и смешанного произведений векторов

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|,\ V_{пир} = \frac{1}{6}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\cdot\overline{AD}\right|.$$

Вычислим координаты векторов и их произведения:

$$\overline{AB} = (-6-2;-2-1;2-1) = (-8;-3;1);$$
$$\overline{AC} = (4-2;3-1;2-1) = (2;2;1);$$
$$\overline{AD} = (-6-2;8-1;7-1) = (-8;7;6);$$

$$\overline{AB}\times\overline{AC} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ -8 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \overline{i}\cdot\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \overline{j}\cdot\begin{vmatrix} -8 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \overline{k}\cdot\begin{vmatrix} -8 & -3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} =$$
$$= (-5;10;-10);$$

$$\overline{AB}\times\overline{AC}\cdot\overline{AD}=\begin{vmatrix}-8 & -3 & 1\\ 2 & 2 & 1\\ -8 & 7 & 6\end{vmatrix}=-8\cdot\begin{vmatrix}2 & 1\\ 7 & 6\end{vmatrix}+3\cdot\begin{vmatrix}2 & 1\\ -8 & 6\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2 & 2\\ -8 & 7\end{vmatrix}=$$

$$=-40+60+30=50.$$

$$S_{\Delta}=\frac{1}{2}\sqrt{(-5)^2+10^2+(-10)^2}=\frac{25}{2};\ V_{пир}=\frac{50}{6}=\frac{25}{3}.$$

Высота пирамиды:

$$H=\left(3\cdot\frac{25}{3}\right):\frac{25}{2}=2.$$

Задачи

1. Вычислить смешанное произведение векторов $\overline{a}=(-4;-3;-9), \overline{b}=(1;0;-1), \overline{c}=(-5;-4;3)$.

2. Проверить, компланарны ли данные векторы:

а) $\overline{a}=2\overline{i}+\overline{j}+2\overline{k}$, $\overline{b}=\overline{i}+2\overline{j}+2\overline{k}$, $\overline{c}=2\overline{i}+2\overline{j}+\overline{k}$;

б) $\overline{a}=(1;7;1), \overline{b}=(8;1;8), \overline{c}=(1;2;1)$.

3. Вычислить объем треугольной пирамиды $ABCD$, если $A(1;2;6), B(0;3;8), C(-5;-1;4), D(-3;2;-6)$.

4. Вычислить $(\overline{a}-\overline{b})(\overline{b}-\overline{c})(\overline{c}-\overline{a})$.

5. Вектор $\overline{c}$ перпендикулярен $\overline{a}$ и $\overline{b}$, $\left(\widehat{\overline{a},\overline{b}}\right)=\frac{\pi}{6}$, $|\overline{a}|=6, |\overline{b}|=3, |\overline{c}|=3$. Найти $\overline{a}\overline{b}\overline{c}$.

6. Показать, что точки $A(2;-1;-2), B(1;2;1), C(2;3;0)$ и $D(5;0;-6)$ лежат в одной плоскости.

7. Найти $(\overline{a}+\overline{b})(\overline{a}+\overline{c})\overline{b}$, если $\overline{a}\overline{b}\overline{c}=-2$.

8. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, построенный на векторах $\overline{AB}=(4;3;0), \overline{AD}=(2;1;2)$ и $\overline{AA_1}=(-3;-2;5)$.

Найти:

а) объем параллелепипеда;

б) площадь грани $ABCD$;

в) длину высоты, проведенной из A_1;

г) угол между ребром AB и диагональю BD_1.

Ответы

1. 46. 2. а) нет, б) да. 3. $\frac{62}{3}$. 4. 0.

5. ± 27. 7. 2.

8. а) 12; б) $2\sqrt{26}$; в) $\frac{6}{\sqrt{26}}$; г) $\arccos\frac{16\sqrt{10}}{75}$.

Варианты заданий

Вариант 1

1. Даны векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ и угол между ними $135°$. Построить вектор $\overline{c} = -2\overline{a} + 2{,}5\overline{b}$ и определить его длину, если $|\overline{a}| = 3$, $|\overline{b}| = 2$.

2. По заданным векторам $\overline{a} = -2\overline{i} + \overline{j} - 3\overline{k}$, $\overline{b} = 2\overline{i} + \overline{k}$, $\overline{c} = 3\overline{j} + 2\overline{k}$ найти:

а) $-2\overline{a} + \overline{b} - 3\overline{c}$; б) $\overline{a} \cdot \overline{b}$; в) $\overline{a} \times \overline{b}$; г) $\overline{a}\overline{b}\overline{c}$; д) орт вектора $\overline{b}$;

е) угол между векторами $\overline{a} + \overline{c}$ и $\overline{b} - \overline{c}$; ж) $np_{\overline{b}}(\overline{a} - \overline{c})$.

3. Определить, является ли четырехугольник с вершинами $A(2;4;-4)$, $B(1;1;-3)$, $C(-2;0;5)$, $D(-1;3;4)$ параллелограммом. Найти точку пересечения диагоналей.

4. Вектор $\overline{в}$, перпендикулярный к оси OZ и к вектору $\overline{a} = (8;-15;3)$, образует острый угол с осью OX. Зная, что $|\overline{b}| = 51$, найти его координаты.

5. Дана пирамида с вершинами в точках $A(-3;0;2)$, $B(-1;2;2)$, $C(3;-8;4)$, $D(0;2;-3)$. Найти:

а) длину ребра AD;

б) косинус угла между ребрами $\overline{AB}$ и $\overline{AD}$;

в) объем пирамиды.

6. Найти $|\overline{a} \times \overline{b}|$, если $a = \overline{m} + 2\overline{n}$, $\overline{b} = 2\overline{m} + \overline{n}$, $|\overline{m}| = 2$, $|\overline{n}| = 1$, $\left(m, \hat{\ } n\right) = \frac{\pi}{6}$.

Вариант 2

1. Даны векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ и угол между ними $60°$. Построить вектор $\bar{c} = 5\bar{a} - 3\bar{b}$ и определить его длину, если $|\bar{a}| = 1$, $|\bar{b}| = 2$.

2. По заданным векторам $\bar{a} = (5;0;4)$, $\bar{b} = (-2;1;3)$, $\bar{c} = (-4;2;-2)$ найти:

а) $2\bar{a} + \bar{b} - \frac{1}{2}\bar{c}$; б) $\bar{a} \cdot \bar{c}$; в) $\bar{a} \times \bar{b}$; г) $\overline{abc}$; д) орт вектора $\bar{c}$; е) угол между вектором $\bar{a}$ и $(\bar{b} + \bar{c})$; ж) $np_{\bar{b}}(\bar{a} - 2\bar{c})$.

3. Найти единичный вектор, перпендикулярный векторам $\bar{a} = 2\bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$ и $\bar{b} = (1;1;2)$.

4. Даны два вектора $\bar{a} = (4;1;-5)$, $\bar{b} = (-3;2;6)$. Найти вектор $\bar{x}$, перпендикулярный оси OZ и удовлетворяющий условиям $\bar{x} \cdot \bar{a} = 5$, $\bar{x} \cdot \bar{b} = -12$.

5. Дана пирамида с вершинами в точках $A(5;0;-3)$, $B(-3;-3;4)$, $C(-1;4;6)$, $D(7;2;2)$. Найти:

а) длину ребра BC;

б) угол между ребрами AB и CD;

в) объем пирамиды.

6. Определить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a} = 3\bar{p} + \bar{g}$ и $\bar{b} = \bar{p} - 2\bar{g}$, где $|\bar{p}| = 4$, $|\bar{g}| = 3$, $\left(p,\hat{\ }g\right) = \frac{\pi}{4}$.

Вариант 3

1. Даны векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ и угол между ними $120°$. Построить вектор $\bar{c} = 3\bar{a} - 2\bar{b}$ и определить его длину, если $|\bar{a}| = 2$, $|\bar{b}| = 3$.

2. По заданным векторам $\bar{a} = (3;-2;4)$, $\bar{b} = (0;2;1)$, $\bar{c} = (-2;2;3)$ найти:

а) $5\bar{a} - 2\bar{b} + 3\bar{c}$; б) $\bar{a} \cdot \bar{b}$; в) $\bar{a} \times \bar{b}$; г) $\overline{abc}$; д) угол между векторами $\bar{a} + \bar{b}$ *и* $\bar{c}$; е) направляющие косинусы вектора $\bar{b}$; ж) $np_{\bar{a}}(\bar{b} + \bar{c})$.

3. Проверить, что четыре точки $A(3;-1;2)$, $B(1;2;-1)$, $C(-1;1;-3)$ *и* $D(3;-5;3)$ служат вершинами трапеции. Определить длину диагонали BD.

4. Даны два вектора $\overline{a}=(4;1;-5)$, $\overline{b}=(-3;2;6)$. Найти вектор $\overline{x}$, перпендикулярный оси OZ и удовлетворяющий условиям $\overline{x}\cdot\overline{a}=5$, $\overline{x}\cdot\overline{b}=-12$.

5. Дана пирамида с вершинами в точках $A_1(1;-2;3)$, $A_2(-4;5;2)$, $A_3(0;-2;8)$, $A_4(1;-1;1)$. Найти:

а) длину ребра A_1A_4;

б) угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4;

в) объем пирамиды.

6. Найти $(2\overline{b}-\overline{a})\left(\overline{c}+3\overline{a}\right)\left(5\overline{b}-\overline{c}\right)$, если $\overline{abc}=2.$

Вариант 4

1. Даны векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ и угол между ними $30°$. Построить вектор $\overline{c}=-3\overline{a}+2{,}5\overline{b}$ и определить его длину, если $\left|\overline{a}\right|=2$, $\left|\overline{b}\right|=4$.

2. По заданным векторам $\overline{a}=5\overline{i}-4\overline{j}$, $\overline{b}=3\overline{i}-\overline{j}+2\overline{k}$ и $\overline{c}=2\overline{j}-\overline{k}$ найти:

а) $5\overline{c}-4\overline{b}+\overline{a}$; б) $\overline{b}\cdot\overline{c}$; в) $\overline{a}\times\overline{b}$; г) $\overline{abc}$; д) направляющие косинусы $\overline{b}$; е) угол между векторами $\overline{a}-2\overline{b}$ и $\overline{c}$; ж) $np_{\overline{b}}(2\overline{a}-\overline{c})$.

3. Даны вершины четырехугольника $A(1;-2;2)$, $B(1;4;0)$, $C(-4;1;1)$, $D(-5;-5;3)$. Доказать, что его диагонали взаимно перпендикулярны.

4. Найти вектор $\overline{x}$, перпендикулярный оси OY и удовлетворяющий условиям $\overline{x}\cdot\overline{a}=4$, $\overline{x}\cdot\overline{b}=-6$, если $\overline{a}=(4;-3;5)$, $\overline{b}=(1;6;3)$.

5. Дана пирамида с вершинами в точках $A(-3;2;0)$, $B(3;4;-4)$, $C(0;2;1)$ и $D(-2;0;2)$. Найти:

а) длину ребра AB;

б) площадь грани ABC;

в) объем пирамиды.

6. Упростить выражение $\left(\bar{i}-\bar{j}+\bar{k}\right)\times\left(\bar{i}+\bar{k}\right)-2i\times\left(\bar{i}+\bar{j}+2\bar{k}\right)$.

Вариант 5

1. Даны векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ и угол между ними 150°. Построить вектор $\bar{c}=2\bar{a}-3\bar{b}$, если $\left|\bar{a}\right|=3$, $\left|\bar{b}\right|=2$.Определить длину вектора $\bar{c}$.

2. По заданным векторам $\bar{a}=(3;0;-4)$, $\bar{b}=(1;2;-3)$, $\bar{c}=(2;-4;0)$ найти:

а) $2\bar{b}-4\bar{c}+\frac{1}{2}\bar{a}$; б) $\bar{a}\cdot\bar{c}$; в) $\bar{a}\times\bar{b}$; г) $\overline{abc}$; д) орт вектора $\bar{b}$; е) угол между $\bar{a}$ и $\left(\bar{b}+\bar{c}\right)$; ж) $np_{\bar{a}+\bar{b}}\bar{c}$.

3. Показать, что четырехугольник с вершинами $A(-5;3;4)$, $B(-1;-7;5)$, $C(6;-5;-3)$ и $D(2;5;-4)$ есть квадрат.

4. Даны векторы $\bar{a}=3\bar{i}+2\bar{j}-4\bar{k}$, $\bar{b}=2\bar{i}-\bar{j}+3\bar{k}$, $\bar{c}=\bar{i}-3\bar{j}+2\bar{k}$. Найти вектор $\bar{p}$, удовлетворяющий условиям $\bar{p}\cdot\bar{a}=20$, $\bar{p}\cdot\bar{b}=-5$, $\bar{p}\cdot\bar{c}=-11$.

5. Дана пирамида с вершинами $A_1(6;6;3)$, $A_2(-1;4;2)$, $A_3(4;0;-3)$, $A_4(2;8;2)$. Найти:

а) длину ребра A_1A_4;

б) площадь грани $A_1A_2A_3$;

в) объем пирамиды.

6. Найти произведение $\bar{a}\left(\bar{c}+\bar{b}\right)\left(\bar{b}-2\bar{a}\right)$, если $\overline{abc}=-4$.

Вариант 6

1. Даны векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ и угол между ними 30°. Построить вектор $\bar{c}=-5\bar{a}+3\bar{b}$, если $\left|\bar{a}\right|=1$, $\left|\bar{b}\right|=3$.Определить длину вектора $\bar{c}$.

2. По заданным векторам $\bar{a}=5\bar{j}+3\bar{k}$, $\bar{b}=2\bar{i}-\bar{j}-\bar{k}$ и $\bar{c}=3\bar{i}+2\bar{k}$ найти:

а) $-5\bar{a}+\bar{b}-2\bar{c}$; б) $\bar{a}\cdot\bar{b}$; в) $\bar{b}\times\bar{c}$; г) $\overline{abc}$; д) направляющие косинусы вектора $\bar{c}$; е) угол между $\bar{a}$ и $\bar{b}-\bar{c}$; ж) $np_{\bar{b}}\bar{c}$.

3. Коллинеарны ли векторы $\overline{c_1} = 2\overline{a} + 4\overline{b}$ и $\overline{c_2} = 3\overline{b} - \overline{a}$, построенные по векторам $\overline{a} = (1;-2;3)$ и $\overline{b} = (3;0;-1)$?

4. Даны векторы $\overline{a} = 7\overline{i} - \overline{j} + 12\overline{k}$ и $\overline{b} = 2\overline{i} + 4\overline{j} - 3\overline{k}$. Найти вектор $\overline{c}$ перпендикулярный оси OY и удовлетворяющий условиям $\overline{c} \cdot \overline{a} = 2$, $\overline{c} \cdot \overline{b} = 52$.

5. Дана пирамида с вершинами $A(4;5;0)$, $B(2;-2;1)$, $C(8;9;-3)$, $D(-1;-4;1)$. Найти:

а) длину ребра BC;

б) угол между ребрами AB и AD;

в) объем пирамиды.

6. Найти $\left|(2a + 3b) \times (\overline{a} - 4b)\right|$, если $|\overline{a}| = 2$, $|\overline{b}| = 5$, $(\overline{a}\overline{b}) = \dfrac{5\pi}{6}$.

Вариант 7

1. Даны векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ и угол между ними $\dfrac{5\pi}{6}$. Построить вектор $\overline{c} = -2\overline{a} + 4\overline{b}$ и определить его длину, если $|\overline{a}| = 3$, $|\overline{b}| = 2$.

2. По заданным векторам $\overline{a} = 3\overline{j} + 4\overline{k}$, $\overline{b} = \overline{i} - 2\overline{k}$, $\overline{c} = \overline{i} + \overline{j}$ найти:

а) $3\overline{a} - 2\overline{b} + 4\overline{c}$; б) $\overline{a} \cdot \overline{c}$; в) $\overline{b} \times \overline{c}$; г) $\overline{a}\overline{b}\overline{c}$; д) орт вектора $\overline{c}$; е) угол между векторами $\overline{b}$ и $(\overline{a} + \overline{c})$; ж) $np_{\overline{b}}\overline{c}$.

3. Доказать, что точки $A(-3;-7;-5)$, $B(0;-1;-2)$ и $C(2;3;0)$ лежат на одной прямой.

4. Найти вектор $\overline{x}$, зная, что он перпендикулярен к оси OY и удовлетворяет условиям $\overline{x} \cdot \overline{a} = 9$, $\overline{x} \cdot \overline{b} = -4$, где $\overline{a} = (3;-1;5)$, $\overline{b} = (1;2;-3)$.

5. Дана пирамида с вершинами в точках $A(1;2;3)$, $B(-1;4;3)$, $C(2;1;-6)$, $D(-4;0;1)$. Найти:

а) длину ребра AD;

б) площадь грани ABC;

в) объем пирамиды.

6. Компланарны ли векторы $\overline{a} = (3;2;1)$, $\overline{b} = (1;-3;-7)$, $\overline{c} = (1;2;3)$?

Вариант 8

1. Даны векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ и угол между ними $\frac{\pi}{3}$. Построить вектор $\overline{c} = 3\overline{a} - 2\overline{b}$ и определить его длину, если $|\overline{a}| = 3$, $|\overline{b}| = 4$.

2. По заданным векторам $\overline{a} = (-5;2;1)$, $\overline{b} = (0;3;-2)$, $\overline{c} = (1;-2;2)$ найти:

а) $4\overline{a} - 3\overline{b} + \overline{c}$; б) $\overline{b} \cdot \overline{c}$; в) $\overline{a} \times \overline{c}$; г) $\overline{a}\overline{b}\overline{c}$; д) направляющие косинусы вектора $\overline{b}$; е) угол между $\overline{a} + \overline{c}$ и $\overline{b} - \overline{c}$; ж) $np_{\overline{a}+\overline{c}}\overline{b}$.

3. Показать, что четырехугольник с вершинами $A(-2;-6;4)$, $B(0;-3;5)$, $C(1;0;5)$ и $D(-1;-3;4)$ параллелограмм. Найти точку пересечения диагоналей.

4. Найти вектор $\overline{m}$, перпендикулярный оси OX и удовлетворяющий условиям $\overline{m} \cdot \overline{a} = -12$, $\overline{m} \cdot \overline{b} = 5$, где $\overline{a} = (-3;2;6)$, $\overline{b} = (4;1;-5)$.

5. Дана пирамида с вершинами в точках $A(0;0;3)$, $B(8;4;-3)$, $C(3;0;0)$, $D(-1;-1;2)$. Найти:

а) длину ребра BC;

б) площадь грани AC и AB;

в) объем пирамиды.

6. Проверить, лежат ли точки $A(1;9;-3)$, $B(2;2;7)$, $C(-4;-2;5)$, $D(1;1;1)$ в одной плоскости?

Вариант 9

1. Даны векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ и угол между ними $60°$. Построить вектор $\overline{c} = 5\overline{a} - \frac{3}{2}\overline{b}$ и определить его длину, если $|\overline{a}| = 1$, $|\overline{b}| = 4$.

2. По заданным векторам $\overline{a} = (-3;0;4)$, $\overline{b} = (-2;2;-2)$, $\overline{c} = (3;1;-1)$ найти:

а) $3\overline{a} - \overline{b} + 2\overline{c}$; б) $\overline{a} \cdot \overline{c}$; в) $\overline{b} \times \overline{c}$; г) $\overline{a}\overline{b}\overline{c}$; д) орт вектора $\overline{a}$; е) угол между $\overline{a}$ и $\overline{c}$; ж) $np_{\overline{a}}\overline{c}$.

3. Найти вектор $\overline{m}$, зная, что $\overline{m} \perp \overline{a}$, $\overline{a} = (1;0;1)$, $\overline{m} \perp \overline{b}$, $\overline{b} = (0;2;-1)$, проекция вектора $\overline{m}$ на вектор $\overline{c} = (1;2;2)$ равна 1.

4. Показать, что четырехугольник с вершинами $A(-3;-2;0)$, $B(3;-3;1)$, $C(5;0;2)$, $D(-1;1;1)$ параллелограмм. Найти длину диагонали AC.

5. Дана пирамида с вершинами в точках $A(-1;-5;2)$, $B(-6;0;-3)$, $C(3;6;-3)$, $D(-10;6;7)$. Найти:

а) угол между ребрами AB и AD;

б) площадь грани ABC;

в) объем пирамиды.

6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если $\overline{a} = \overline{p} - 2\overline{g}$, $\overline{b} = 2\overline{p} + \overline{g}$, $|\overline{p}| = 3$, $|\overline{g}| = 2$, $\left(p \hat{\ } g\right) = \dfrac{\pi}{6}$.

Вариант 10

1. Даны векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ и угол между ними $120°$. Построить вектор $\overline{c} = 4\overline{a} + \dfrac{1}{4}\overline{b}$ и определить его длину, если $|\overline{a}| = 2$, $|\overline{b}| = 4$.

2. По заданным векторам $\overline{a} = \overline{i} + \overline{j}$, $\overline{b} = 3\overline{k}$, $\overline{c} = \overline{i} - 2\overline{j} + 4\overline{k}$. Найти:

а) $5\overline{b} + \overline{a} - 2\overline{c}$; б) $\overline{a} \cdot \overline{b}$; в) $\overline{b} \times \overline{c}$; г) $\overline{a}\overline{b}\overline{c}$; д) направляющие косинусы $\overline{b}$; е) угол между $\overline{a}$ и $\overline{c}$; ж) $np_{\overline{b}}(\overline{b} + \overline{c})$.

3. Какой угол образуют единичные векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если известно, что векторы $\overline{m} = \overline{a} + 2\overline{b}$ и $\overline{n} = 5\overline{a} - 4\overline{b}$ взаимно перпендикулярны.

4. Вектор $\overline{x}$, коллинеарный вектору $\overline{b} = (3;0;4)$, образует острый угол с осью OZ. Найти координаты вектора $\overline{x}$, если $|\overline{x}| = 50$.

5. Дана пирамида с вершинами в точках $A(2;3;1)$, $B(4;1;-2)$, $C(6;3;7)$, $D(-5;-4;8)$. Найти:

а) длину ребра BC;

б) площадь грани BCD;

в) объем пирамиды.

6. Проверить, компланарны ли векторы $\overline{a} = (3;5;0)$, $\overline{b} = (1;-1;2)$, $\overline{c} = (5;3;4)$?

Вариант 11

1. Даны векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ и угол между ними $45°$. Построить вектор $\overline{c} = -3\overline{a} + 2\overline{b}$ и определить его длину, если $|\overline{a}| = 2$, $|\overline{b}| = 3$.

2. По заданным векторам $\overline{a} = 5\overline{i} - 2\overline{j} + \overline{k}$, $\overline{b} = 3\overline{i} - \overline{j} - \overline{k}$, $\overline{c} = 2\overline{i} - 5\overline{k}$. Найти:

а) $3\overline{a} - 2\overline{b} + \overline{c}$; б) $\overline{a} \cdot \overline{c}$; в) $\overline{b} \times \overline{c}$; г) $\overline{a}\overline{b}\overline{c}$; д) орт вектора $\overline{a}$; е) угол между $\overline{a} - \overline{b}$ и $\overline{c}$; ж) $np_{\overline{c}}(\overline{a} + 2\overline{b})$.

3. Зная одну из вершин треугольника $A(1;-6;3)$ и векторы, совпадающие с двумя сторонами $\overline{AB} = 3\overline{j} + 5\overline{k}$ и $\overline{BC} = 4\overline{i} + 2\overline{j} - \overline{k}$, найти остальные вершины и вектор $\overline{CA}$.

4. Найти вектор $\overline{p}$, зная, что он перпендикулярен к векторам $\overline{a} = (2;3;-1)$ и $\overline{b} = (1;-2;3)$ и удовлетворяет условию $\overline{p} \cdot (2\overline{i} - \overline{j} + \overline{k}) = -6$.

5. Дана пирамида с вершинами $A(0;-1;3)$, $B(2;1;-4)$, $C(-2;3;1)$, $S(0;-2;2)$. Найти:

а) длину ребра AS;

б) площадь грани ABC;

в) объем пирамиды.

6. Проверить, лежат ли точки $A(0;1;5)$, $B(2;1;3)$, $C(-1;2;1)$ и $D(1;2;-1)$ в одной плоскости?

Вариант 12

1. Даны векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ и угол между ними $135°$. Построить вектор $\overline{c} = 1{,}5\overline{a} - 2{,}5\overline{b}$ и найти его длину, если $|\overline{a}| = 2$, $|\overline{b}| = 4$.

2. По заданным векторам $\overline{a} = (2;-3;5)$, $\overline{b} = (-1;2;4)$, $\overline{c} = (0;-3;0)$. Найти:

а) $2\overline{a} + 3\overline{b} - 7\overline{c}$; б) $\overline{a} \cdot \overline{b}$; в) $\overline{b} \times \overline{c}$; г) $\overline{a}\overline{b}\overline{c}$; д) направляющие косинусы $\overline{b}$; е) угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b} + \overline{c}$; ж) $np_{\overline{c}}(\overline{a} + 2\overline{b})$.

3. Какой угол образуют векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если $\overline{m} = \overline{a} + 2\overline{b}$ и $\overline{n} = 5\overline{a} - 4\overline{b}$ перпендикулярны $|\overline{a}| = |\overline{b}| = 1$?

4. Найти вектор $\overline{g}$, коллинеарный $\overline{a} = (2;3;2)$ и удовлетворяющий условию $\overline{g} \cdot \overline{a} = 34$.

5. Дана пирамида с вершинами в точках $A(3;1;4)$, $B(-1;6;1)$, $C(-1;1;6)$, $D(0;4;-1)$. Найти:

а) длину ребра BC;

б) угол между ребрами AB и AC;

в) объем пирамиды.

6. Найти площадь треугольника с вершинами $A(-2;3;1)$, $B(0;-4;5)$ и $C(2;1;-2)$.

Вариант 13

1. Даны векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ и угол между ними $150°$. Построить вектор $\overline{c} = 2\overline{a} - 4\overline{b}$ и определить его длину, если $|\overline{a}| = 4$, $|\overline{b}| = 2$.

2. По заданным векторам $\overline{a} = 3\overline{i} - 2\overline{j} + 5\overline{k}$, $\overline{b} = \overline{i} - 2\overline{k}$, $\overline{c} = 3\overline{j} + \overline{k}$ найти:

а) $1{,}5\overline{a} + 2\overline{b} - \overline{c}$; б) $\overline{a} \cdot \overline{c}$; в) $\overline{b} \times \overline{c}$; г) $\overline{a}\overline{b}\overline{c}$; д) орт вектора $\overline{c}$; е) угол между $\overline{a}$ и $\overline{b}$; ж) $np_{\overline{a}+\overline{c}}\overline{b}$.

3. Найти вектор $\overline{x}$, зная, что $\overline{x} \perp \overline{a}$, $\overline{a} = (0;1;1)$, $\overline{x} \perp \overline{b}$, $\overline{b} = (2;0;-1)$, проекция вектора $\overline{x}$ на вектор $\overline{c} = (1;2;2)$ равна 1.

4. Показать, что четырехугольник с вершинами $A(1;0;-3)$, $B(0;-2;2)$, $C(1;5;-4)$, $D(2;7;-9)$ параллелограмм. Найти длину диагонали BD.

5. Дана пирамида с вершинами в точках $A(2;4;-5)$, $B(0;-1;2)$, $C(3;3;-1)$, $Q(1;1;0)$. Найти:

а) косинус угла между BC и BQ;

б) объем пирамиды;

в) длину высоты, опущенной на грань ABC.

6. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{p} = 3\overline{m} - \overline{n}$, $\overline{g} = 3\overline{m} + 2\overline{n}$, если $|\overline{m}| = 3$, $|\overline{n}| = 2$, $\left(m, \hat{} n\right) = \dfrac{3\pi}{4}$.

Вариант 14

1. Даны векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ и угол между ними $120°$. Построить вектор $\overline{c} = 4\overline{a} + 1{,}5\overline{b}$ и определить его длину, если $|\overline{a}| = 2$, $|\overline{b}| = 4$. Определить $|\overline{c}|$.

2. По заданным векторам $\overline{a} = 3\overline{j} - 5\overline{k}$, $\overline{b} = 2\overline{i} + \overline{j} - \overline{k}$, $\overline{c} = 2\overline{j}$ найти:

а) $7\overline{c} - 4\overline{a} + \overline{b}$; б) $\overline{b} \cdot \overline{c}$; в) $\overline{a} \times \overline{b}$; г) $\overline{abc}$; д) направляющие косинусы вектора $\overline{b}$; е) угол между $\overline{a}$ и $\overline{c}$; ж) $np_{\overline{a}}(\overline{b} - \overline{c})$.

3. Найти вектор $\overline{m}$, перпендикулярный оси OY и удовлетворяющий условиям $\overline{m} \cdot \overline{a} = 12$, $\overline{m} \cdot \overline{b} = -5$, если $\overline{a} = (1;2;7)$ и $\overline{b} = (3;3;-4)$.

4. Даны два единичных вектора $\overline{m}$ и $\overline{n}$, угол между которыми $30°$. Найти $np_{\overline{b}}\overline{a}$, если $\overline{a} = \overline{m} + 2\overline{n}$, $\overline{b} = 2\overline{n}$.

5. Дана пирамида с вершинами в точках $S(3;1;0)$, $A(2;-1;4)$, $B(0;3;2)$, $C(-1;4;-2)$. Найти:

а) угол между ребрами AB и AC;
б) объем пирамиды;
в) площадь грани ABC.

6. Лежат ли точки в одной плоскости $A(0;-1;5)$, $B(2;-1;3)$, $C(-1;2;1)$, $D(1;2;-1)$.

Вариант 15

1. Даны векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ и угол между ними $60°$. Построить вектор $\overline{c} = 3\overline{a} - 2\overline{b}$ и определить его длину, если $|\overline{a}| = 2$, $|\overline{b}| = 4$.

2. По заданным векторам $\overline{a} = -3\overline{j}$, $\overline{b} = 2\overline{i} - 4\overline{j} + \overline{k}$, $\overline{c} = 5\overline{i} - 3\overline{j}$ найти:

а) $2\overline{a}-\overline{b}+3\overline{c}$; б) $\overline{a}\cdot\overline{c}$; в) $\overline{b}\times\overline{c}$; г) $\overline{a}\overline{b}\overline{c}$; д) орт вектора $\overline{b}$; е) угол между $\overline{b}+\overline{c}$ и $\overline{a}$; ж) $np_{\overline{c}}\overline{a}$.

3. Найти вектор $\overline{m}$, коллинеарный вектору $\overline{b}=(3;2;-1)$ и удовлетворяющий условию $\overline{m}\cdot\overline{b}=5$.

4. При каких значениях α векторы $\overline{m}=\alpha\overline{a}-13\overline{b}$ и $\overline{n}=2\overline{a}+\overline{b}$ перпендикулярны, если $\left|\overline{a}\right|=5$, $\left|\overline{b}\right|=2$ и $\left(a,\hat{\ }b\right)=120^\circ$.

5. Дана пирамида с вершинами в точках $A_1(0;3;-5)$, $A_2(2;4;6)$, $A_3(-1;1;2)$, $A_4(-5;3;4)$. Найти:

а) длину ребра A_1A_4;

б) площадь грани $A_1A_2A_3$;

в) объем пирамиды.

6. Найти $\left(\overline{a}+\overline{b}\right)\times\left(2\overline{a}-\overline{c}\right)\cdot\overline{b}$, если $\overline{a}\overline{b}\overline{c}=-5$.

Вариант 16

1. Даны векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ и угол между ними $\frac{3\pi}{4}$. Построить вектор $\overline{c}=-3\overline{a}+2{,}5\overline{b}$, если $\left|\overline{a}\right|=2$, $\left|\overline{b}\right|=4$.

2. По заданным векторам $\overline{a}=3\overline{i}-2\overline{j}$, $\overline{b}=(1;-4;-2)$, $\overline{c}=(-3;1;-3)$ найти:

а) $7\overline{a}-3\overline{b}+4\overline{c}$; б) $\overline{b}\cdot\overline{c}$; в) $\overline{a}\times\overline{c}$; г) направляющие косинусы $\overline{a}$.

3. Найти вектор $\overline{p}$, коллинеарный вектору $\overline{a}=(3;0;4)$, если $\left|\overline{p}\right|=75$ и он образует острый угол с осью OX.

4. Вычислить угол между векторами $\overline{b}=2\overline{p}+3\overline{g}$ и $\overline{c}=\overline{g}+5\overline{p}$, где $\overline{p},\overline{g}$ – единичные взаимно перпендикулярные векторы.

5. Дана пирамида с вершинами в точках $A(0;4;-3)$, $B(6;2;-1)$, $C(0;-3;2)$, $D(-2;4;6)$. Найти:

а) угол между ребрами AB и CD;

б) объем пирамиды;

в) длину высоты, опущенной на грань ABC.

6. Лежат ли точки $A(0;7;1)$, $B(-1;2;-1)$, $C(2;-2;2)$ и $D(1;9;0)$.

Вариант 17

1. На плоскости даны три единичных вектора $\overline{m}, \overline{n}, \overline{p}$, причем $\left(\overline{m}\,\hat{}\,\overline{n}\right)=30^\circ; \left(\overline{n}\hat{=}\overline{p}\right)\quad 60^\circ$. Построить вектор $\overline{a}=\overline{n}+2\overline{m}-2\overline{p}$. Найти его длину.

2. По заданным векторам $\overline{a}=3\overline{j}+5\overline{k}$, $\overline{b}=7\overline{i}+\overline{j}$, $\overline{c}=\overline{i}-\overline{j}+2\overline{k}$ найти:

а) $\overline{a}-3\overline{b}+2\overline{c}$; б) $\overline{a}\cdot\overline{b}$; в) $\overline{b}\times\overline{c}$; г) $\overline{a}\overline{b}\overline{c}$; д) орт вектора $\overline{a}$; е) угол между $\overline{b}$ и $\overline{c}$; ж) $np_{\overline{a}}\left(\overline{b}-\overline{c}\right)$.

3. Показать, что четырехугольник с вершинами $A(3;0;1)$, $B(0;6;2)$, $C(-5;4;3)$, $D(-7;-4;3)$ трапеция. Найти длину большего основания.

4. Даны векторы $\overline{a}=(3;-1;2)$ и $\overline{b}=(2;3;-1)$. Найти вектор $\overline{c}$ при условии, что он перпендикулярен к оси OY и удовлетворяет условиям $\overline{a}\cdot\overline{c}=9$, $\overline{b}\cdot\overline{c}=-4$.

5. Дана пирамида с вершинами $A(1;1;1)$, $B(2;0;2)$, $C(2;-2;2)$, $D(-3;4;3)$. Найти:

а) длину ребра BC;

б) площадь грани ABC;

в) объем пирамиды.

6. Найти $\left|\left(4\overline{m}+2\overline{n}\right)\times\left(2\overline{m}-7\overline{n}\right)\right|$, если $\left|\overline{m}\right|=1, \left|\overline{n}\right|=2$, $\left(\overline{m}\,\hat{}\,\overline{n}\right)=\dfrac{\pi}{3}$.

Вариант 18

1. На плоскости даны три единичных вектора $\overline{p}, \overline{g}, \overline{r}$, причем $\left(\overline{p}\,\hat{}\,\overline{g}\right)=60^\circ; \left(\overline{g}\hat{=}\overline{r}\right)\quad 30^\circ$. Построить вектор $\overline{b}=2\overline{p}+3\overline{g}-\overline{r}$. Найти его длину.

2. По заданным векторам $\overline{a}=\left(3;-2;5\right)$, $\overline{b}=\left(11;3;9\right)$, $\overline{c}=\left(-4;0;5\right)$ найти:

а) $-2\bar{a}+\bar{b}-\bar{c}$; б) $\bar{a}\cdot\bar{b}$; в) $\bar{a}\times\bar{c}$; г) $\overline{abc}$; д) направляющие косинусы $\bar{c}$; ж) $np_{\bar{b}}\left(\bar{a}-2\bar{c}\right)$.

3. Найти вектор $\bar{b}$, коллинеарный вектору $\bar{a}=2\bar{i}-\bar{j}+\bar{k}$ и удовлетворяющий условию $\bar{a}\cdot\bar{b}=12$.

4. Разложить вектор $\bar{d}=(3;0;-2)$ по векторам $\bar{a}=(2;2;3)$, $\bar{b}=(1;2;3)$ и $\bar{c}=(1;1;1)$.

5. Дана пирамида с вершинами $A(2;1;-1)$, $B(2;3;0)$, $C(1;1;-1)$, $D(6;-5;3)$. Найти:

а) длину ребра AD;

б) угол между ребрами AB и AD;

в) объем пирамиды.

6. Найти площадь параллелограмма, диагоналями которого служат векторы $\bar{c}=(3;-4;2)$ и $\bar{d}=2\bar{i}+5\bar{j}+\bar{k}$.

Вариант 19

1. На плоскости даны три единичных вектора $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$, причем $\left(\bar{a}\,\hat{}\,\bar{b}\right)=30^\circ;\left(\bar{b}\,\hat{=}\,\bar{c}\right)\quad 90^\circ$. Построить вектор $\bar{d}=2\bar{a}+4\bar{b}-\bar{c}$. Найти его длину.

2. По заданным векторам $\bar{a}=3\bar{i}$, $\bar{b}=2\bar{j}-\bar{k}$ и $\bar{c}=5\bar{i}-4\bar{j}+\bar{k}$ найти:

а) $2\bar{b}+\bar{c}-\bar{a}$; б) $\bar{a}\cdot\bar{c}$; в) $\bar{a}\times\bar{b}$; г) $\overline{abc}$; д) орт вектора $\bar{c}$; е) угол между $\bar{a}$ и $\bar{b}$; ж) $np_{\bar{b}}\left(\bar{a}-2\bar{c}\right)$.

3. Коллинеарны ли векторы $\bar{c}_1=2\bar{a}-3\bar{b}$ и $\bar{c}_2=\bar{a}+3\bar{b}$, если $\bar{a}=(1;2;3)$ и $\bar{b}=(0;-4;2)$.

4. Даны три вектора $\bar{a}=2\bar{i}-4\bar{j}+3\bar{k}$, $\bar{b}=\bar{j}-2\bar{i}+3\bar{k}$ и $\bar{c}=\bar{i}-3\bar{j}+2\bar{k}$. Найти вектор $\bar{x}$, удовлетворяющий условиям: $\bar{x}\cdot\bar{a}=2$, $\bar{x}\cdot\bar{b}=1$, $\bar{x}\cdot\bar{c}=-2$.

5. Дана пирамида с вершинами в точках $A(0;4;-1)$, $B(-2;2;2)$, $C(3;-3;2)$, $D(5;-3;7)$. Найти:

а) длину ребра AC;

б) угол между ребрами AB и AC;

в) объем пирамиды.

6. Упростить выражение

$$\overline{j}\times\left(3\overline{i}+\overline{j}-2\overline{k}\right)-\overline{k}\times\left(\overline{i}+\overline{j}\right)+\left(\overline{j}-2\overline{k}\right)\times\overline{i}.$$

Вариант 20

1. На плоскости даны три единичных вектора $\overline{m},\overline{n},\overline{p}$, причем $\left(\overline{m}\,\overline{n}\right)=60^\circ;\left(\overline{n}=\overline{p}\right)\ 30^\circ$. Построить вектор $\overline{s}=2\overline{m}+\overline{n}-\overline{p}$, если $\left|\overline{m}\right|=1$, $\left|\overline{n}\right|=\left|\overline{p}\right|=2$. Найти длину вектора $\overline{s}$.

2. По заданным векторам $\overline{a}=-4\overline{j}$, $\overline{b}=2\overline{i}+4\overline{k}$, $\overline{c}=3\overline{j}+2\overline{k}$ найти:

а) $\overline{c}-2\overline{a}+8\overline{b}$; б) $\overline{a}\cdot\overline{c}$; в) $\overline{a}\times\overline{b}$; г) $\overline{a}\overline{b}\overline{c}$; д) направляющие косинусы $\overline{b}$; е) угол между $\overline{a}$ и $\overline{b}$; ж) $np_{\overline{b}}\overline{c}$.

3. Найти вектор $\overline{x}$, коллинеарный вектору $\overline{b}=(-1;1;2)$ и удовлетворяющий условию $\overline{x}\cdot\overline{b}=-13$.

4. Даны три вектора $\overline{a}=\left(2;-1;4\right)$, $\overline{b}=\left(0;-3;5\right)$ и $\overline{c}=\left(1;-2;2\right)$. Найти вектор $\overline{x}$, удовлетворяющий условиям: $\overline{x}\cdot\overline{a}=-5$, $\overline{x}\cdot\overline{b}=-2$, $\overline{x}\cdot\overline{c}=-1$.

5. Дана пирамида с вершинами в точках $A(-2;2;4)$, $B(0;-3;5)$, $C(-1;1;2)$, $D(0;-8;-7)$. Найти:

а) угол между ребрами AB и AD;

б) объем пирамиды;

в) площадь грани BCD.

6. Найти $\left|\left(2\overline{p}-6\overline{g}\right)\times\left(\overline{p}+3\overline{g}\right)\right|$, если $\left|\overline{p}\right|=2$, $\left|\overline{g}\right|=4$, $\left(\overline{p}\,\overline{g}\right)=30^\circ$.

Вариант 21

1. Даны векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ и угол между ними 60°. Построить вектор $\overline{c}=-\overline{a}+3\overline{b}$ и определить его длину, если $\left|\overline{a}\right|=3$, $\left|\overline{b}\right|=2$.

2. По заданным векторам $\overline{a}=7\overline{i}-\overline{j}$, $\overline{b}=3\overline{j}+5\overline{k}$, $\overline{c}=2\overline{i}-\overline{j}+3\overline{k}$ найти:

а) $-4\overline{a}+1{,}5\overline{b}-0{,}5\overline{c}$; б) $\overline{a}\cdot\overline{c}$; в) $\overline{b}\times\overline{c}$; г) $\overline{a}\overline{b}\overline{c}$; д) орт вектора $\overline{c}$; е) угол между $\overline{b}\times\overline{c}$ и $\overline{a}$; ж) $пр_{\overline{a}}(\overline{b}-2\overline{c})$.

3. Найти вектор $\overline{p}$, зная, что $\overline{p}\perp\overline{a}$, $\overline{a}=(-2;1;2)$, $\overline{p}\perp\overline{b}$, $\overline{b}=(3;0;-1)$ и проекция вектора $\overline{p}$ на вектор $\overline{c}=(1;-2;2)$ равна 1.

4. Показать, что четырехугольник с вершинами $A(-3;2;0)$, $B(0;-6;3)$, $C(3;2;2)$, $D(6;26;-3)$ трапеция. Найти отношение длин оснований.

5. Дана пирамида с вершинами в точках $A_1(0;7;-2)$, $A_2(-5;3;-3)$, $A_3(4;0;-5)$, $A_4(2;2;2)$.

Найти:

а) длину ребра A_3A_4;

б) площадь грани $A_1A_2A_3$;

в) объем пирамиды.

6. Упростить выражение $\left(4\overline{i}+6\overline{j}-5\overline{k}\right)\times\left(\overline{i}-3\overline{j}+\overline{k}\right)$.

Вариант 22

1. На плоскости даны три единичных вектора $\overline{m},\overline{n},\overline{p}$, причем $\left(\overline{m}\,\widehat{\ }\,\overline{n}\right)=60^\circ;\left(\overline{n}\,\widehat{=}\,\overline{p}\right)\quad 30^\circ$. Построить вектор $\overline{s}=2\overline{m}-\overline{n}+4\overline{p}$, если $\left|\overline{m}\right|=1$, $\left|\overline{n}\right|=3$, $\left|\overline{p}\right|=2$. Найти длину вектора $\overline{s}$.

2. По заданным векторам $\overline{a}=(3;-4;8)$, $\overline{b}=(-11;7;-6)$, $\overline{c}=(0;2;-5)$ найти:

а) $2\overline{a}-1{,}5\overline{b}+0{,}5\overline{c}$; б) $\overline{a}\cdot\overline{b}$; в) $\overline{b}\times\overline{c}$; г) $\overline{a}\overline{b}\overline{c}$; д) направляющие косинусы вектора $\overline{a}$; е) угол между $\overline{a}$ и $\overline{c}$; ж) $пр_{\overline{c}}(\overline{a}-\overline{b})$.

3. Какой угол образуют единичные векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если известно, что векторы $\overline{m}=\overline{a}-2\overline{b}$ и $\overline{n}=2\overline{a}+3\overline{b}$ взаимно перпендикулярны.

4. Вектор $\bar{b}$, коллинеарный вектору $\bar{a} = (4;-3;0)$, образует тупой угол с осью OY. Найти координаты вектора $\bar{b}$, если $|\bar{b}| = 75$.

5. Дана пирамида с вершинами в точках $A(8;-7;5)$, $B(0;4;7)$, $C(-2;3;5)$, $D(-2;2;2)$. Найти:

а) угол между ребрами AB и AC;

б) объем пирамиды;

в) высоту, опущенную на грань ABC.

6. Упростить выражение

$\left(\bar{a} - 2\bar{b} + \bar{c}\right) \times \bar{c} + \left(\bar{b} - \bar{c} + \bar{a}\right) \times \bar{b} - \left(\bar{a} + \bar{c}\right) \times \bar{a}$.

Вариант 23

1. Даны векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ и угол между ними $135°$. Построить вектор $\bar{c} = -2\bar{a} + 4\bar{b}$ и определить его длину, если $|\bar{a}| = 3$, $|\bar{b}| = 1$.

2. По заданным векторам $\bar{a} = 5\bar{i} + \bar{k}$, $\bar{b} = -3\bar{i} + 2\bar{j} - \bar{k}$, $\bar{c} = 7\bar{i} - \bar{k}$ найти:

а) $2{,}5\bar{a} - 2\bar{b} + 1{,}5\bar{c}$; б) $\bar{a} \cdot \bar{c}$; в) $\bar{a} \times \bar{c}$; г) $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$; д) орт вектора $\bar{c}$; е) угол между векторами $\bar{a} \times \bar{c}$ и $\bar{b}$; ж) $пр_{\bar{a}}(\bar{b} - 2\bar{c})$.

3. Показать, что четырехугольник с вершинами $A(3;-1;0)$, $B(2;-2;2)$, $C(0;-4;3)$, $D(1;-3;1)$ параллелограмм. Найти точку пересечения диагоналей.

4. Даны два единичных вектора $\bar{p}$ и $\bar{g}$, угол между которыми $120°$. Найти $пр_{\bar{g}}\,\bar{p}$, $пр_{\bar{g}}\left(\bar{p} + \bar{g}\right)$.

5. Дана пирамида с вершинами в точках $A(3;-5;0)$, $B(-4;2;2)$, $C(0;1;1)$ и $D(-2;4;2)$. Найти:

а) длину ребра AB;

б) площадь грани ABC;

в) объем пирамиды.

6. Проверить, лежат ли точки $A(1;8;-2)$, $B(-3;4;1)$, $C(-2;4;5)$, $D(8;3;-3)$ в одной плоскости.

Вариант 24

1. На плоскости даны три вектора $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, причем $\left(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{b}\right) = 30°$, $\left(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{c}\right) = 90°$. Построить вектор $\overline{d} = 3\overline{a} - 2\overline{b} + 1{,}5\overline{c}$ если $\left|\overline{a}\right| = 2$, $\left|\overline{b}\right| = 1$, $\left|\overline{c}\right| = 2$. Определить длину вектора $\overline{d}$.

2. По заданным векторам

$\overline{a} = (0;-4;3)$, $\overline{b} = (2;6;-8)$, $\overline{c} = (-4;6;8)$. Найти:

а) $-3\overline{a} - 1{,}5\overline{b} + 0{,}5\overline{c}$; б) $\overline{a} \cdot \overline{c}$; в) $\overline{b} \times \overline{c}$; г) $\overline{abc}$; д) направляющие косинусы $\overline{a}$; е) угол между $\overline{a}$ и $\overline{c}$; ж) $np_{\overline{a}}\left(\overline{b} + 2\overline{c}\right)$.

3. Найти вектор $\overline{x}$, перпендикулярный оси OX и удовлетворяющий условиям $\overline{x} \cdot \overline{a} = 5$, $\overline{x} \cdot \overline{b} = 4$, если $\overline{a} = 2\overline{i} - \overline{j} + \overline{k}$, $\overline{b} = (0;3;1)$.

4. Дан вектор $\overline{c} = 4\overline{i} + 7\overline{i} - 4\overline{k}$. Найти вектор $\overline{d}$, коллинеарный вектору $\overline{c}$ и противоположного с ним направления, если $\left|\overline{d}\right| = 27$.

5. Дана пирамида с вершинами в точках $A(1;4;-3)$, $B(0;7;1)$, $C(-2;3;-3)$ и $D(-4;4;4)$. Найти:

а) длину ребра BC;

б) площадь грани BCD;

в) объем пирамиды.

6. Найти произведение $\left(\overline{a} - \overline{c}\right)\left(2\overline{b} + \overline{c}\right)\left(\overline{b} - 2\overline{a}\right)$, если $\overline{abc} = -3$.

Вариант 25

1. Даны векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ и угол между ними $120°$. Построить вектор $\overline{c} = \frac{3}{2}\overline{a} - 4\overline{b}$ и определить его длину, если $\left|\overline{a}\right| = 4$, $\left|\overline{b}\right| = 2$.

2. По заданным векторам $\overline{a} = 3\overline{i} - 8\overline{j}$, $\overline{b} = 5\overline{j} + 3\overline{k}$, $\overline{c} = \overline{i} + 2\underline{j} + \overline{k}$ найти:

а) $3\overline{a} - 2\overline{b} + 4\overline{c}$; б) $\overline{a} \cdot \overline{c}$; в) $\overline{a} \times \overline{c}$; г) $\overline{abc}$; д) орт вектора $\overline{c}$;

е) угол между $\overline{a} \times \overline{c}$ и $\overline{b}$; ж) $np_{\overline{a}}(\overline{c} + 4\overline{b})$.

3. Найти вектор $\overline{m}$, зная, что $\overline{m} \perp \overline{a}$, $\overline{a} = (0;1;1)$, $\overline{m} \perp \overline{b}$, $\overline{b} = (-2;0;3)$ и проекция вектора $\overline{m}$ на вектор $\overline{c} = (2;-2;1)$ равна 2 .

4. Показать, что четырехугольник с вершинами $A(-1;1;1)$, $B(5;0;2)$, $C(3;-3;1)$, $D(-3;-2;0)$ параллелограмм. Найти длину диагонали AC .

5. Дана пирамида с вершинами в точках $A(7;-5;2)$, $B(-2;2;2)$, $C(0;1;1)$, $D(-3;2;1)$. Найти:

а) длину ребра AB ;

б) площадь грани ABC;

в) объем пирамиды.

6. Показать, что векторы $\overline{a} = -\overline{i} + 3\overline{j} + 2\overline{k}$, $\overline{b} = 2\overline{i} - 3\overline{j} - 4\overline{k}$, $\overline{c} = -3\overline{i} + 12\overline{j} + 6\overline{k}$ компланарны и разложить $\overline{c}$ по векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

Библиографический список

1. Высшая математика для экономистов: учебник для вузов / под ред. Н.Ш. Кремера. – М.: ЮНИТИ, 2004.

2. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. Ч. 1. – М.: Айрис-пресс, 2000.

3. Сборник задач по высшей математике для экономистов: учеб. пособие / под ред. В.И. Ермакова. – М.: ИНФРА-М, 2001.

4. Сборник задач по высшей математике / К.П. Лунгу, Д.Т. Письменный, С.Н. Федин и др. – М.: Айрис-пресс, 2003.

Св. темплан 2011, поз. 64

Заявки на книгу присылать по адресу:
455000, Магнитогорск, пр. Ленина, 38,
ФГБОУ ВПО «МГТУ»,
кафедра ММвЭ
Т. (3519) 23-91-52. Факс 29-84-26

АБРАМОВА Татьяна Викторовна
АНДРОСЕНКО Ольга Сергеевна
КУЗИНА Татьяна Георгиевна
ПЕТРОВА Ольга Васильевна

Векторная алгебра

Практикум для студентов экономических специальностей

Редактор Т.А. Колесникова
Компьютерная верстка Л.М. Недялковой
Подписано в печать 31.10.2011. Формат 60x84 1/16. Бумага тип. № 1.
Плоская печать. Усл.печ.л. 4,00. Уч.-изд.л. 4,64. Тираж 100 экз.
Заказ

Издательский центр ФГБОУ ВПО «МГТУ»
455000, Магнитогорск, пр. Ленина, 38
Полиграфический участок ФГБОУ ВПО «МГТУ»

Т. В. Абрамова
О. С. Андросенко
Т. Г. Кузина
О. В. Петрова

ÂÅÊÒÎÐÍÀß ÀËÃÅÁÐÀ

Магнитогорск 2011