

Министерство образования и науки Российской Федерации
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И.Носова

Ю.А. Кашникова
В.П. Дзюба

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Часть I. Простое сопротивление

*Утверждено Редакционно-издательским советом университета
в качестве курса лекций*

Магнитогорск
2010

УДК 539.3/.4(075.8)

Рецензенты:

Заведующий кафедрой прикладной механики и динамики,
прочности машин ЮУрГУ, профессор, доктор технических наук

А.О. Чернявский

Доцент кафедры прикладной механики и динамики,
прочности машин ЮУрГУ, кандидат технических наук

И.А. Ивашиков

Начальник центральной заводской лаборатории
ОАО «ММК-МЕТИЗ», кандидат технических наук

А.А. Соколов

Кашникова Ю.А., Дзюба В.П.

Сопротивление материалов. Часть I. Простое сопротивление:
курс лекций. – Магнитогорск: Изд-во Магнитогорск. гос. техн. ун-та
им. Г.И.Носова, 2010. – 52 с.

Курс лекций соответствует поставленной цели – помочь студенту-заочнику, осваивающему материал по самостоятельному изучению дисциплины «Сопротивление материалов», в подготовке к экзамену, выполнению контрольных и расчетно-графических работ.

В доступной форме изложены основные разделы курса сопротивления материалов, согласно рабочей программе, утвержденной для студентов строительных специальностей. Курс лекций сопровождается примерами расчетов, что должно облегчить процесс самостоятельного освоения предмета.

Курс лекций написан на основе использования опыта преподавания сопротивления материалов на кафедре теоретической механики и сопротивления материалов Магнитогорского государственного технического университета им. Г.И.Носова.

УДК 539.3/.4(075.8)

© Магнитогорский государственный
технический университет
им. Г.И. Носова, 2010

© Кашникова Ю.А., Дзюба В.П., 2010

ВВЕДЕНИЕ

Задачи и методы сопротивления материалов

Сопротивление материалов (СМ) – раздел механики твердых деформируемых тел, в котором рассматриваются инженерные методы расчета элементов инженерных конструкций на прочность, жесткость и устойчивость.

Методами СМ выполняются расчеты, на основании которых определяются необходимые размеры деталей машин, выбирается рациональная форма поперечного сечения, подбирается оптимальный материал конструкции, рассчитывается максимально допускаемая нагрузка на элемент сооружения.

В состав механики деформируемых тел входят также дисциплины: теоретическая механика, теория упругости, теория пластичности, теория ползучести, теория разрушения и другие, рассматривающие, по существу, те же вопросы, что и СМ. Различие между СМ и другими теориями механики твердого деформируемого тела заключается в подходах к решению задач.

Строгие теории механики деформируемого тела базируются на более точной постановке проблем: для решения задач приходится применять более сложный математический аппарат и проводить громоздкие вычислительные операции. Вследствие этого возможности применения таких методов в практических задачах ограничены.

Методы СМ базируются на упрощенных гипотезах, которые позволяют решать широкий круг инженерных задач и получать приемлемые по точности результаты расчетов.

При этом главной задачей курса СМ является формирование знаний для применения математического аппарата при решении прикладных задач, осмысления полученных численных результатов и поиска выбора наиболее оптимальных конструктивных решений.

Дисциплина СМ является базовой для формирования инженерного мышления и подготовки кадров высшей квалификации по техническим специализациям.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

1.1. Гипотезы СМ, реальный объект и расчетная схема

В СМ принято рассматривать все материалы как **однородную сплошную среду**, независимо от их микроструктуры. Под **однородностью** материала понимают независимость его свойств от величины выде-

ленного из тела объема. И хотя в действительности реальный материал, как правило, неоднороден (уже в силу его молекулярного строения), тем не менее, указанная особенность не является существенной, поскольку в сопротивлении материалов рассматриваются конструкции, размеры которых существенно превышают не только межатомные расстояния, но и размеры кристаллических зерен.

С понятием однородности тесно связано понятие **сплошности среды**: материал конструкции полностью заполняет весь отведенный ему объем, а значит, в теле конструкции нет пустот.

Под действием внешних сил реальное тело меняет свои геометрические размеры. После снятия нагрузки геометрические размеры тела полностью или частично восстанавливаются. Свойство тела восстанавливать свои первоначальные размеры после разгрузки называется **упругостью**. При решении большинства задач в СМ принимается, что материал конструкций **абсолютно упругий**.

Обычно сплошная среда принимается **изотропной**, т.е. предполагается, что свойства тела, выделенного из нее, не зависят от его ориентации в пределах этой среды. Отдельно взятый кристалл материала анизотропен, но так как в объеме реального тела содержится бесконечно большое количество хаотично расположенных кристаллов, принимается, что материал изотропен.

В СМ исследование вопроса о прочности или жесткости реального объекта начинается с выбора расчетной схемы. Расчетная схема конструкции есть его упрощенная схема, освобожденная от несущественных в данной задаче особенностей. Выбор расчетной схемы начинается со схематизации свойств материалов сооружения.

При выборе расчетной схемы вводятся упрощения и в геометрию реального объекта. Основным упрощающим приемом в СМ является приведение геометрической формы тела к схемам бруса (стержня) или оболочки. Любое тело в пространстве характеризуется тремя измерениями. **Брусом (стержень, балка)** называется геометрический объект, одно из измерений которого (длина) много больше двух других. Геометрически брус может быть образован путем перемещения плоской фигуры вдоль некоторой кривой (рис.1.1).

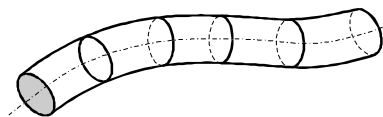


Рис.1.1

Эта кривая называется **осью бруса**, а плоская замкнутая фигура, располагающая свой центр тяжести на оси бруса и нормальная к ней, называется **поперечным сечением**. Брус может иметь как постоянное, так и переменное поперечное сечение.

Второй основной геометрической формой, рассматриваемой в СМ, является **оболочка**, под которой подразумевается тело, у которого одно из измерений (толщина) намного меньше, чем два других.

Для соединения отдельных частей конструкции между собой и передачи внешней нагрузки на основание на нее накладываются **связи**, ограничивающие перемещения тех точек сооружения, к которым они приложены. Связи могут ограничивать либо повороты точек сооружения, либо их линейные смещения, либо и то, и другое.

1.2. Классификация сил. Метод сечений

Силы являются мерилем механического взаимодействия тел. Если конструкция рассматривается изолированно от окружающих тел, то действие последних на нее заменяется силами, которые называются **внешними**. Внешние силы, действующие на тело, можно разделить на **активные** (независимые) и **реактивные**. Реактивные усилия возникают в связях, наложенных на тело, и определяются действующими на тело активными усилиями.

По способу приложения внешние силы делятся на **объемные** и **поверхностные**.

Объемные силы распределены по всему объему рассматриваемого тела и приложены к каждой его частице, например, собственный вес сооружения, магнитное притяжение или силы инерции. Единицей измерения объемных сил является сила, отнесенная к единице объема – кН/м^3 .

Поверхностные силы приложены к участкам поверхности и являются результатом непосредственного контактного взаимодействия рассматриваемого объекта с окружающими телами. В зависимости от соотношения площади приложения нагрузки и общей площади поверхности рассматриваемого тела, поверхностные нагрузки подразделяются на **сосредоточенные** и **распределенные**. К первым относятся нагрузки, реальная площадь приложения которых меньше полной площади поверхности тела (например, воздействие колонн на фундаментную плиту достаточно больших размеров можно рассматривать как действие на нее сосредоточенных усилий). Если же площадь приложения нагрузки сопоставима с площадью поверхности тела, то такая нагрузка рассматривается как распределенная. Сосредоточенные усилия измеряются в кН , а распределенные – кН/м^2 .

Взаимодействие между частями рассматриваемого тела характеризуется **внутренними силами**, которые возникают внутри тела под

действием внешних нагрузок и определяются силами межмолекулярного взаимодействия.

Величины внутренних усилий определяются с применением **метода сечений**, суть которого заключается в следующем: если при действии внешних сил тело находится в состоянии равновесия, то любая отсеченная часть тела, вместе с приходящимися на нее внешними и внутренними усилиями, также находится в равновесии, следовательно, к ней применимы уравнения равновесия.

Рассмотрим тело, имеющее форму бруса (рис.1.2,а).

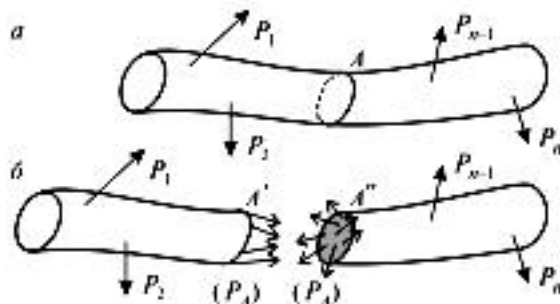


Рис. 1.2

Пусть к нему приложена некоторая система внешних сил $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$, удовлетворяющая условиям равновесия, т.е. при действии указанных внешних сил тело находится в состоянии равновесия.

Если рассечь брус сечением A на две части и правую отбросить (рис.1.2,б), то необходимо действие правой (отброшенной) части на левую заменить некоей системой внутренних сил (P_A) , действующей в сечении A .

Обозначая через $P_{лев}$ и $P_{прав}$ суммы внешних сил, приложенных соответственно к левой и правой частям бруса (относительно сечения A), и учитывая, что

$$P_{лев} + P_{прав} = 0, \quad (1.1)$$

для отсеченных частей бруса получим следующие соотношения:

$$P_{лев} + P_A = 0; \quad P_{прав} - P_A = 0. \quad (1.2)$$

Последние соотношения показывают, что равнодействующая внутренних сил P_A в сечении A может определяться из условий равновесия либо левой, либо правой части рассеченного тела. В этом суть **метода сечений**.

Внутренние усилия должны быть так распределены по сечению, чтобы деформированные поверхности сечения A при совмещении правой и левой частей тела в точности совпадали. Это требование в механике

твёрдого деформируемого тела носит название **условия неразрывности деформаций**.

Воспользуемся правилами статики и приведем систему внутренних сил P_A к центру тяжести сечения A в соответствии с правилами теоретической механики. В результате получим главный вектор сил $\vec{R}$ и главный вектор момента $\vec{M}$ (рис.1.3). Далее выбираем декартову систему координат x, y, z с началом координат, совпадающим с центром тяжести сечения A . Ось z направим по нормали к сечению, а оси x и y расположим в плоскости сечения. Спроектировав главный вектор сил $\vec{R}$ и главный момент $\vec{M}$ на координатные оси x, y, z , получаем шесть составляющих: три силы N_z, Q_x, Q_y и три момента M_z, M_x, M_y , называемых внутренними силовыми факторами в сечении бруса.

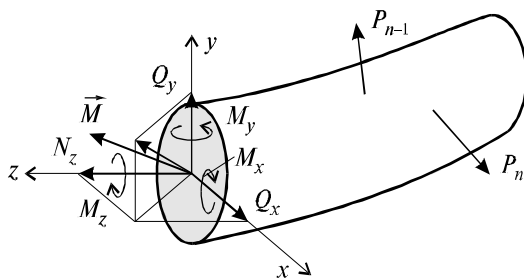


Рис. 1.3

Составляющая N_z называется **нормальной** или **продольной** силой в сечении. Силы Q_x и Q_y называются **поперечными** усилиями. Момент M_z называется **крутящим** моментом, а моменты M_x и M_y – **изгибающими** моментами относительно осей x и y соответственно.

При известных внешних силах все шесть внутренних силовых факторов в сечении определяются из шести уравнений равновесия, которые могут быть составлены для отсеченной части бруса

$$\begin{aligned} \sum X &= 0; \sum Y = 0; \sum Z = 0; \\ \sum m_x &= 0; \sum m_y = 0; \sum m_z = 0. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Сопротивления, при которых в поперечном сечении бруса действует одно внутреннее усилие, называются **простыми** (осевое растяжение/сжатие, кручение, чистый изгиб, плоский поперечный изгиб). При одновременном действии в сечении бруса двух и более усилий сопротивление бруса называется **сложным** (изгиб с кручением, внецентренное сжатие, косой изгиб).

1.3. Порядок построения эпюр

При выполнении практических расчетов, для определения «опасного» сечения строят графики изменения внутренних усилий вдоль продольной оси стержня - **эпюры**. Для построения эпюры необходимо:

1. Определить опорные реакции с помощью уравнений статики (в случае заделки - не требуется).
2. Стержень разделить на силовые участки, в пределах которых внешняя сила не меняет своей величины.
3. Применяя метод сечений, установить закон изменения внутреннего усилия на каждом силовом участке.
4. Подсчитать численное значение внутреннего усилия на границах силовых участков.
5. Результаты изобразить графически, т.е. построить эпюру внутреннего усилия:
 - 5.1. Ось эпюры всегда параллельна оси бруса (база эпюры).
 - 5.2. Силовые участки на расчетной схеме и на эпюре совпадают.
 - 5.3. Эпюра строится под расчетной схемой или справа от нее (вертикальное исполнение эпюры).
 - 5.4. Ординаты эпюры откладывают в масштабе перпендикулярно базе эпюры.
 - 5.5. На поле эпюры обязательно проставить:
 - 5.5.1) численное значение ординат;
 - 5.5.2) знак поля эпюры;
 - 5.5.3) перпендикулярную базу эпюры штриховку;
 - 5.5.4) название эпюры.

1.4. Напряжения и деформации

В окрестности произвольной точки K , принадлежащей сечению A некоторого нагруженного тела, выделим элементарную площадку ΔF , в пределах которой действует внутреннее усилие $\Delta \vec{R}$ (рис. 1.4,а).

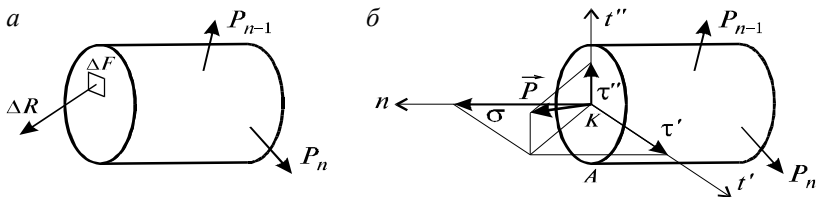


Рис. 1.4

Векторная величина $\lim_{\Delta F \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta \vec{R}}{\Delta F} \right) = \vec{P}$ называется полным на-

пряжением в точке K . Проекция вектора полного напряжения $\vec{P}$ на нормаль к данной площадке обозначается через σ и называется **нормальным напряжением**.

Проекции вектора $\vec{P}$ на перпендикулярные оси в плоскости площадки (рис. 1.4,б) называются **касательными напряжениями** по направлению соответствующих осей и обозначаются τ' и τ'' . Если через ту же самую точку K провести другую площадку, то будем иметь другое полное напряжение. Совокупность напряжений для множества площадок, проходящих через данную точку, образует **напряженное состояние** в точке.

Под действием внешних сил твердые тела изменяют свою геометрическую форму, а точки тела неодинаково перемещаются в пространстве. Вектор $\vec{T}$, имеющий свое начало в т. A недеформированного состояния, а конец в т. A' деформированного состояния, называется вектором полного перемещения т. A (рис. 1.5,а). Его проекции на оси хуз называются осевыми перемещениями и обозначаются u , v и w , соответственно.

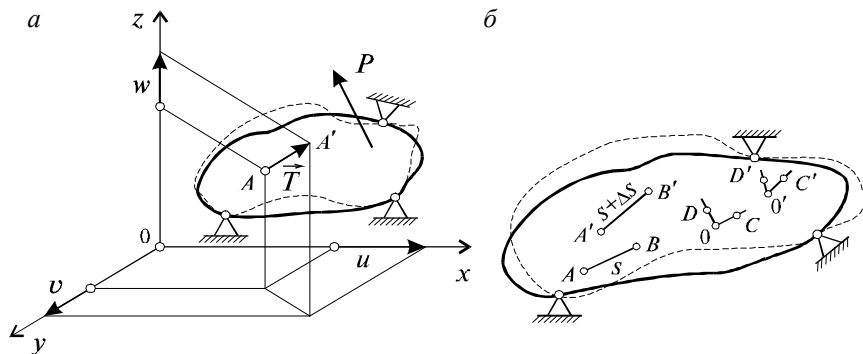


Рис. 1.5

Для того, чтобы охарактеризовать интенсивность изменения формы и размеров тела, рассмотрим точки A и B его недеформированного состояния, расположенные на расстоянии S друг от друга (рис.1.5,б).

Пусть в результате изменения формы тела эти точки переместились в положение A' и B' соответственно, а расстояние между ними увеличилось на величину ΔS и составило $S + \Delta S$. Величина

$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta \vec{S}}{S} \right) = \vec{\varepsilon}$ называется **линейной деформацией** в точке A по на-

правлению AB . Если рассматривать деформации по направлениям координатных осей xyz , то в обозначения соответствующих проекций линейной деформации вводятся индексы $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$.

Линейные деформации $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ характеризуют изменения объема тела в процессе деформирования, а формоизменения тела – **угловыми деформациями**. Для их определения рассмотрим прямой угол, образованный в недеформированном состоянии двумя отрезками OD и OC (рис.1.5,б). При действии внешних сил указанный угол DOC изменится и примет новое значение $D'O'C'$. Величина

$\lim_{OC \rightarrow 0, OD \rightarrow 0} (\angle DOC - \angle D'O'C') = \gamma$ называется **угловой деформацией**

или сдвигом в точке O в плоскости COD . Относительно координатных осей деформации сдвига обозначаются $\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$.

Совокупность линейных и угловых деформаций по различным направлениям и плоскостям в данной точке образует **деформированное состояние** в точке.

1.5. Закон Гука и принцип независимости действия сил

Многочисленные экспериментальные наблюдения за поведением деформируемых тел показывают, что в определенных диапазонах перемещения точек тела пропорциональны действующим на него нагрузкам. Впервые указанная закономерность была высказана в 1776 г. английским ученым Гуком и носит название **закона Гука**.

В соответствии с этим законом перемещение произвольно взятой точки A (см. рис.1.5,а) нагруженного тела по оси x может быть выражено

$$u = \delta_x P, \quad (1.4)$$

где P – сила, под действием которой происходит перемещение u ;

δ_x – коэффициент пропорциональности между силой и перемещением, зависящий от физико-механических свойств материала, взаимного расположения точки A и точки приложения и направления силы P , а также от геометрических особенностей системы.

Выражение (1.4) следует рассматривать как закон Гука для данной системы.

В современной трактовке закон Гука определяет линейную зависимость между напряжениями и деформациями, а не между силой и пе-

ремещением. Коэффициенты пропорциональности в этом случае представляют собой физико-механические характеристики материала и уже не связаны с геометрическими особенностями системы в целом.

Системы, для которых соблюдается условие пропорциональности между перемещениями и внешними силами, подчиняются **принципу суперпозиции** или **принципу независимости действия сил**: результат воздействия системы сил равен сумме результатов воздействия каждой силы в отдельности.

Принцип независимости действия сил является одним из основных способов при решении большинства задач механики линейных систем.

2. РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ

2.1. Внутренние силы и напряжения

Под растяжением (сжатием) понимают такой вид нагружения, при котором в поперечных сечениях стержня возникают только нормальные силы, а прочие силовые факторы отсутствуют.

Рассмотрим однородный прямолинейный стержень длиной l и площадью поперечного сечения F , на двух концах которого приложены две равные по величине и противоположно направленные центральные продольные силы P (рис. 2.1, а). Поместим начало плоской системы координат uz в центре тяжести левого сечения, а ось z направим вдоль продольной оси стержня.

Для определения величин внутренних усилий воспользуемся методом сечений. Задавая некоторое сечение на расстоянии z ($0 \leq z \leq l$) от начала системы координат и рассматривая равновесие левой, относительно заданного сечения, части стержня (рис. 2.1, б), приходим к следующему уравнению:

$$\sum z = 0 \rightarrow P + N_z = 0,$$

откуда следует, что

$$N_z = P = \text{const.}$$

Примем для N_z следующее правило знаков. Если N_z направлена от сечения, т.е. вызывает положительную деформацию (растяжение), то она считается положительной. В обратном случае – отрицательной.

Нормальная сила N_z приложена в центре тяжести сечения, является равнодействующей внутренних сил в сечении и определяется следующим образом:

$$N_z = \int_F \sigma dF. \quad (2.1)$$

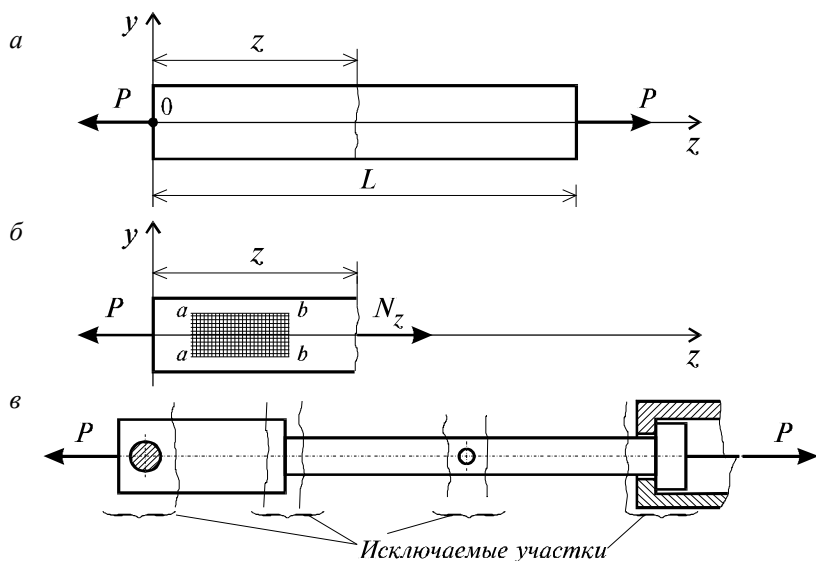


Рис.2.1

Но из (2.1) нельзя найти закон распределения нормальных σ напряжений в поперечных сечениях стержня. Для этого обратимся к анализу характера его деформирования.

Если на боковую поверхность стержня нанести прямоугольную сетку (см. рис. 2.1, б), то после нагружения поперечные линии $a-a$, $b-b$ и т.д. переместятся параллельно самим себе, откуда следует, что все поверхностные продольные волокна удлинятся одинаково. Если предположить также, что и внутренние волокна работают таким же образом, то можно сделать вывод о том, что поперечные сечения в центрально растянутом стержне смещаются параллельно начальным положениям, что соответствует **гипотезе плоских сечений**, введенной швейцарским ученым Д.Бернулли: **плоские сечения до деформации остаются плоскими и после деформации**.

Значит, все продольные волокна стержня находятся в одинаковых условиях, а следовательно, нормальные напряжения во всех точках поперечного сечения должны быть также одинаковы и равны

$$\sigma = \frac{N_z}{F}, \quad (2.2)$$

где F – площадь поперечного сечения стержня.

Высказанное предположение о равномерном распределении внутренних сил в поперечном сечении справедливо для участков, достаточно удаленных от мест: резкого изменения площади поперечного сечения (рис. 2.1, в); скачкообразного изменения внешних нагрузок; скачкообразного изменения физико-механических характеристик конструкций. Основанием для такого утверждения служит **принцип Сен-Венана**, справедливый для любого типа напряженного состояния: **особенности приложения внешних нагрузок проявляются на расстояниях, не превышающих характерных размеров поперечного сечения стержня.**

2.2. Удлинение стержня и закон Гука

Рассмотрим однородный стержень с одним концом, жестко заделанным, и другим – свободным, к которому приложена центральная продольная сила P (рис. 2.2). До нагружения стержня его длина равнялась l после нагружения она стала равной $l + \Delta l$ (рис. 2.2). Величину Δl называют абсолютным удлинением стержня.

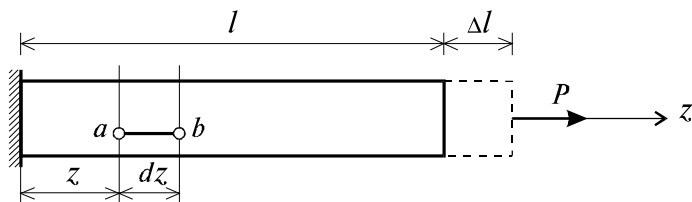


Рис. 2.2

Если в нагруженном стержне напряженное состояние является однородным, т.е. все участки стержня находятся в одинаковых условиях, деформация ε остается одной и той же по длине стержня и равной

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}. \quad (2.3)$$

Если же по длине стержня возникает неоднородное напряженное состояние, то для определения его абсолютного удлинения необходимо рассмотреть бесконечно малый элемент длиной dz (см. рис. 2.2). При растяжении он увеличит свою длину на величину Δdz и его деформация составит:

$$\varepsilon = \frac{\Delta dz}{dz}. \quad (2.4)$$

В пределах малых деформаций при простом растяжении или сжатии закон Гука записывается в следующем виде:

$$\sigma = E \varepsilon. \quad (2.5)$$

Величина E представляет собой коэффициент пропорциональности, называемый **модулем упругости материала первого рода**. Из совместного рассмотрения уравнений (2.4) и (2.5) получим

$$\Delta dZ = \sigma \frac{dZ}{E},$$

откуда с учетом (2.2) и $\Delta l = \int_0^l \Delta dz$ окончательно получим

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N}{EF} dz. \quad (2.6)$$

Если стержень изготовлен из однородного изотропного материала с $E = \text{const}$, имеет постоянное поперечное сечение $F = \text{const}$ и нагружен по концам силой P , то из (2.6) получим

$$\Delta l = \frac{Pl}{EF}. \quad (2.7)$$

При решении многих практических задач возникает необходимость, наряду с удлинениями, обусловленными действием механических нагрузок, учитывать также удлинения, вызванные температурным воздействием. В этом случае пользуются принципом независимости действия сил, и полные деформации рассматривают как сумму силовой и температурной деформаций

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha t, \quad (2.8)$$

где α – коэффициент температурного расширения материала;
 t – перепад температуры тела.

Для однородного стержня, нагруженного по концам продольными силами P и равномерно нагретого по длине, получим

$$\Delta l = \frac{Pl}{EF} + l\alpha t. \quad (2.9)$$

2.3. Пример расчета (задача № 1)

Для расчетной схемы на рис. 2.3 требуется определить нормальные напряжения σ и перемещения сечений (с построением эпюр N , σ , Δ).

Эта задача – прямая, т. е. в ней заданы внешние силы F (нагрузка); площади поперечных сечений стального стержня по участкам и их длины.

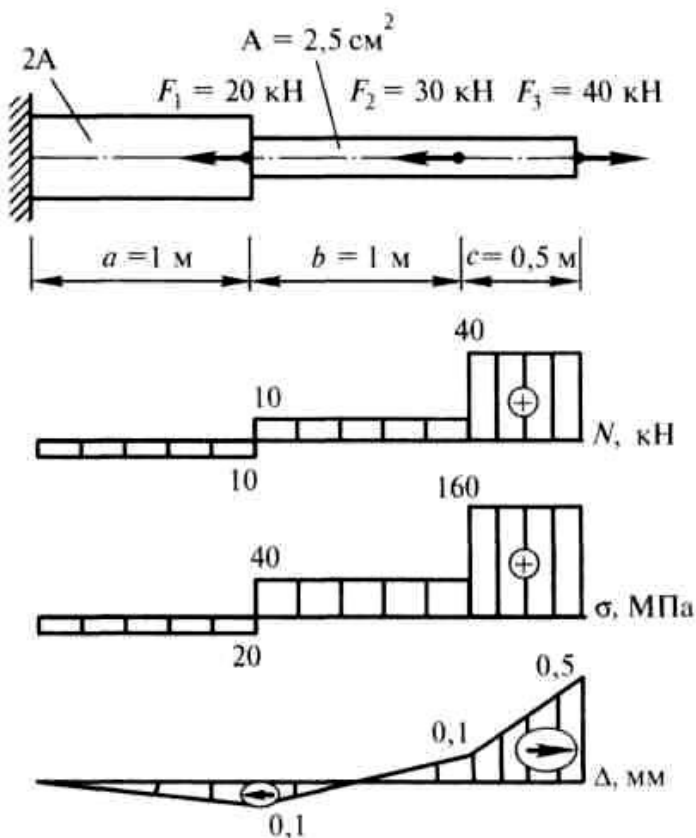


Рис. 2.3

Эпюра N строится согласно приведенному выше правилу. При этом определять реакцию в заделке нет смысла, так как при вычислении в любом сечении продольной силы N берем внешние силы только справа от сечения (со стороны свободного конца). Таким образом, продольные силы в поперечных сечениях стержня на участках «с», «b» и «a» будут равны соответственно:

$N_c = F_3 = 40 \text{ кН}$ (растяжение);

$N_b = F_3 - F_2 = 40 - 30 = 10 \text{ кН}$ (растяжение);

$N_a = F_3 - F_2 - F_1 = 40 - 30 - 20 = -10 \text{ кН}$ (сжатие).

Нормальные напряжения σ на участках «a», «b» и «с» равны соответственно:

$$\sigma_a = N_a/A_a = (-10000)/(5 \cdot 10^{-4}) = -20 \cdot 10^6 \text{ Па} = -20 \text{ МПа (сжатие)};$$

$$\sigma_b = N_b/A_b = 10000/(2,5 \cdot 10^{-4}) = 40 \text{ МПа (растяжение)};$$

$$\sigma_c = N_c/A_c = 40000/(2,5 \cdot 10^{-4}) = 160 \text{ МПа (растяжение)}.$$

Удлинения по участкам:

$$\Delta l_a = N_a a / (E_a A_a) = (-10000) \cdot 1 / (2 \cdot 10^{11} \times 5 \cdot 10^{-4}) = -0,1 \cdot 10^{-3} \text{ м} =$$

$$= 0,1 \text{ мм (укорочение)};$$

$$\Delta l_b = N_b b / (E_b A_b) = 10000 \times 1 / (2 \cdot 10^{11} \times 2,5 \cdot 10^{-4}) = 0,2 \cdot 10^{-3} \text{ м} =$$

$$= 0,2 \text{ мм (удлинение)};$$

$$\Delta l_c = N_c c / (E_c A_c) = 40000 \times 0,5 / (2 \cdot 10^{11} \times 2,5 \cdot 10^{-4}) = 0,4 \cdot 10^{-3} \text{ м} =$$

$$= 0,4 \text{ мм (удлинение)}.$$

Перемещения Δ точек приложения сил F можно вычислить как суммарное удлинение (укорочение) соответствующего участка, считая от неподвижного сечения, т.е. от заделки. Важно понять, что точка приложения силы (и соответствующее сечение) не может удлиняться или укорачиваться, а может только перемещаться вправо или влево.

Таким образом, для построения эпюры Δ вычисляем перемещения необходимых точек

$\Delta_1 = \Delta l_a = 0,1 \text{ мм (влево)}$, так как участок «а» укоротился, а его левая точка – неподвижна.

Далее ведем алгебраическое суммирование:

$$\Delta_2 = \Delta l_a + \Delta l_b = -0,1 + 0,2 = 0,1 \text{ мм (вправо)};$$

$$\Delta_3 = \Delta l_a + \Delta l_b + \Delta l_c = -0,1 + 0,2 + 0,4 = 0,5 \text{ мм (вправо)}.$$

Очевидно, что полное удлинение всего стержня также равно 0,5 мм.

2.4. Потенциальная энергия деформации

Внешние силы, приложенные к упругому телу и вызывающие изменение геометрии тела, совершают работу A на соответствующих перемещениях. Одновременно с этим в упругом теле накапливается потенциальная энергия его деформирования U . При действии динамических внешних нагрузок часть работы внешних сил превращается в кинетическую энергию движения частиц тела K . Приняв энергетическое состояние системы до момента действия данных сил равным нулю, и в условиях отсутствия рассеивания энергии, уравнение баланса энергии можно записать в следующем виде:

$$A = U + K. \quad (2.10)$$

При действии статических нагрузок $K = 0$, следовательно,

$$A = U. \quad (2.11)$$

Это означает, что при статическом нагружении работа внешних сил полностью преобразуется в потенциальную энергию деформации. При разгрузке тела производится работа за счет потенциальной энергии деформации, накопленной телом. Таким образом, упругое тело является

аккумулятором энергии. Это свойство упругого тела широко используется в технике, например, в заводных пружинах часовых механизмов, в амортизирующих рессорах и др. В случае простого растяжения (сжатия) для вывода необходимых расчетных зависимостей потенциальной энергии деформации рассмотрим решение следующей задачи.

На рис. 2.4, *а* изображен растягиваемый силой P стержень, удлинение которого соответствует отрезку Δl , ниже показан график изменения величины удлинения стержня Δl в зависимости от силы P (рис. 2.4, *б*). В соответствии с законом Гука этот график носит линейный характер.

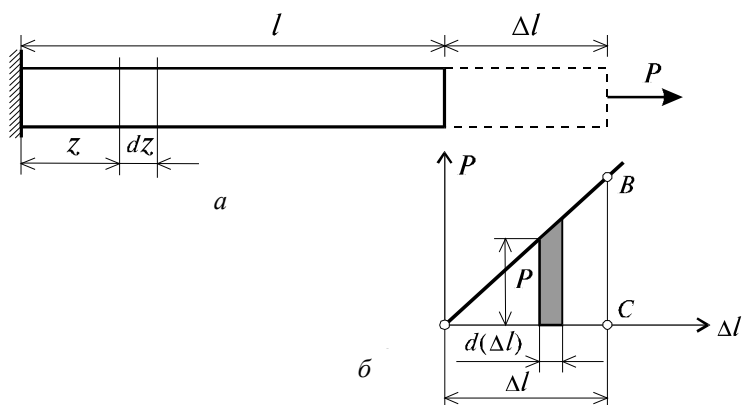


Рис. 2.4

Пусть некоторому значению силы P соответствует удлинение стержня Δl . Дадим некоторое приращение силе ΔP – соответствующее приращение удлинения составит $d(\Delta l)$. Тогда элементарная работа на этом приращении удлинения составит

$$dA = (P + dP) \cdot d(\Delta l) = P \cdot d(\Delta l) + dP \cdot d(\Delta l), \quad (2.12)$$

вторым слагаемым, в силу его малости, можно пренебречь, и тогда

$$dA = P \cdot d(\Delta l). \quad (2.13)$$

Полная работа равна сумме элементарных работ, тогда, при линейной зависимости “нагрузка – перемещение”, работа внешней силы P на перемещении Δl будет равна площади треугольника OCB (рис. 2.4), т.е.

$$A = 0,5 P \cdot \Delta l. \quad (2.14)$$

В свою очередь, когда σ и ϵ распределены по объему тела V равномерно (как в рассматриваемом случае), потенциальную энергию деформирования стержня можно записать в виде

$$U = V \int_0^{\varepsilon} \sigma d\varepsilon. \quad (2.15)$$

Поскольку $V = Fl$, $P = \sigma F$ и $\sigma = E\varepsilon$, то

$$U = Fl \int_0^{\varepsilon} E\varepsilon d\varepsilon = 0,5FlE\varepsilon^2 = 0,5E\varepsilon Fl = 0,5\sigma F l = 0,5P\Delta l. \quad (2.16)$$

С учетом (2.7) для однородного стержня с постоянным поперечным сечением и при $P = \text{const}$ из (2.16) получим

$$U = \frac{P^2 l}{2EF}. \quad (2.17)$$

2.5. Статически определимые и статически неопределимые системы

Статически определимой называется система, в которой все реакции в связях закрепления, а также внутренние усилия в ее элементах, можно определить только по методу сечений, без использования дополнительных условий.

Системы, в которых количество наложенных связей больше, нежели число независимых уравнений равновесия, называются **статически неопределимыми**.

По сравнению со статически определимыми системами, в статически неопределимых системах имеются дополнительные связи, которые называются **лишними**. Термин «лишние связи» является условным, с точки зрения расчетных предпосылок. В действительности же эти связи создают дополнительные резервы для конструкции, как в плане обеспечения её жесткости, так и прочности.

При расчете подобных систем одних лишь уравнений равновесия оказывается недостаточно, в связи с чем прибегают к дополнительным уравнениям, связанным с условиями деформирования конструкции.

На рис. 2.5,а изображен кронштейн, состоящий из двух стержней, шарнирно скрепленных между собой. В связи с тем, что на конструкцию действует лишь вертикальное усилие P , а система является плоской (т.е. все элементы конструкции и вектор внешних сил лежат в одной плоскости), получается, что усилия в стержнях легко определяются из условий равновесия узла A , т.е.

$$\sum X = 0, \quad \sum Y = 0. \quad (2.18)$$

Раскрывая эти уравнения, получаем замкнутую систему линейных уравнений относительно неизвестных усилий N_1 и N_2 , в которой количество уравнений равно количеству неизвестных

$$-N_1 - N_2 \sin \alpha = 0; \quad -N_2 \cos \alpha - P = 0. \quad (2.19)$$

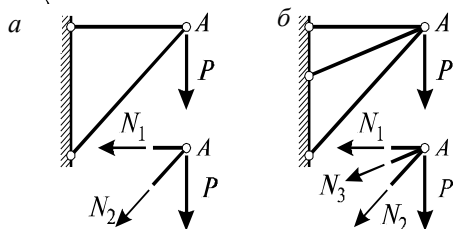


Рис. 2.5

Если конструкцию кронштейна усложнить, добавив еще один стержень (рис. 2.5, б), то усилия в стержнях N_1 , N_2 и N_3 прежним способом определить уже не удастся, так как при тех же двух уравнениях равновесия (2.18) имеются уже три неизвестных усилия в стержнях. В таких случаях говорят, что система один раз статически неопределима. Разность между числом неизвестных усилий и количеством независимых уравнений равновесия, связывающих эти усилия, называется **степенью статической неопределимости** рассматриваемой системы.

2.6. Напряженное и деформированное состояния при растяжении и сжатии

Определим напряжения, возникающие на некоторой наклонной площадке, составляющей угол α с плоскостью нормального сечения (рис. 2.6, а).

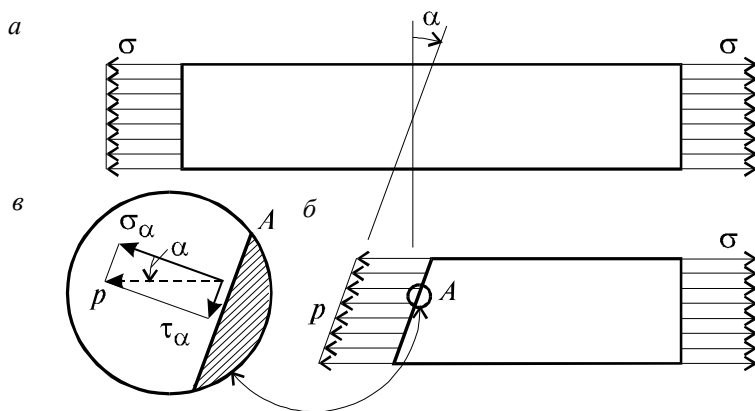


Рис. 2.6

Из условия $\sum z = 0$, записанного для отсеченной части стержня (рис. 2.6, б), получим

$$p F_{\alpha} = \sigma F, \quad (2.20)$$

где F – площадь поперечного сечения стержня, $F_{\alpha} = F/\cos \alpha$ – площадь наклонного сечения. Из (2.20) легко установить

$$p = \sigma \cos \alpha. \quad (2.21)$$

Раскладывая напряжение p по нормали и касательной к наклонной площадке (рис. 2.6, в), с учетом (2.18) получим

$$\sigma_{\alpha} = p \cos \alpha = \sigma \cos^2 \alpha; \quad \tau_{\alpha} = p \sin \alpha = \frac{1}{2} \sigma \sin 2 \alpha. \quad (2.22)$$

Полученные выражения показывают, что для одной и той же точки тела величины напряжений, возникающих в сечениях, проходящих через эту точку, зависят от угла α . При $\alpha = 0$ из (2.22) следует, что $\sigma_{\alpha} = \sigma$,

$\tau_{\alpha} = 0$. При $\alpha = \frac{\pi}{2}$, т.е. на продольных площадках, $\sigma_{\alpha} = \tau_{\alpha} = 0$. Это озна-

чает, что продольные слои растянутого стержня не взаимодействуют друг с другом. Касательные напряжения τ_{α} принимают наибольшие значения

при $\alpha = \frac{\pi}{4}$, и их величина составляет $\tau_{\max} = \frac{\sigma}{2}$. Важно отметить, как это

следует из (2.22), что $\left| \tau_{\alpha} \right| = \left| \tau_{(\alpha+\pi/2)} \right|$. Следовательно, в любой точке

тела на двух взаимно перпендикулярных площадках касательные напряжения равны между собой по абсолютной величине. Это условие является общей закономерностью любого напряженного состояния и носит название **закона парности касательных напряжений**.

Наблюдения показывают, что удлинение стержня в продольном направлении сопровождается пропорциональным уменьшением поперечных размеров стержня (рис. 2.7).

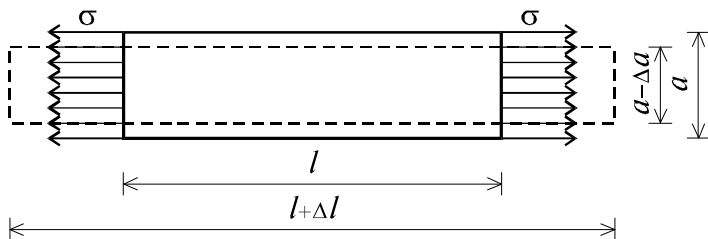


Рис. 2.7

Если обозначить

$$\varepsilon_{\text{прод}} = \frac{\Delta l}{l};$$

$$\varepsilon_{\text{попер}} = -\frac{\Delta a}{a},$$

$$\mu = -\frac{\varepsilon_{\text{попер}}}{\varepsilon_{\text{прод}}},$$

то, как показывают эксперименты, $\mu = \text{const}$ для данного материала и является безразмерным **коэффициентом Пуассона**. Величина μ является важной характеристикой материала и определяется экспериментально. Для реальных материалов μ принимает значения $0,1 \div 0,45$.

При растяжении стержня возникают не только линейные, но и угловые деформации. Рассмотрим прямой угол ABC (рис. 2.8, а), образованный отрезками AB и AC , в недеформированном состоянии.

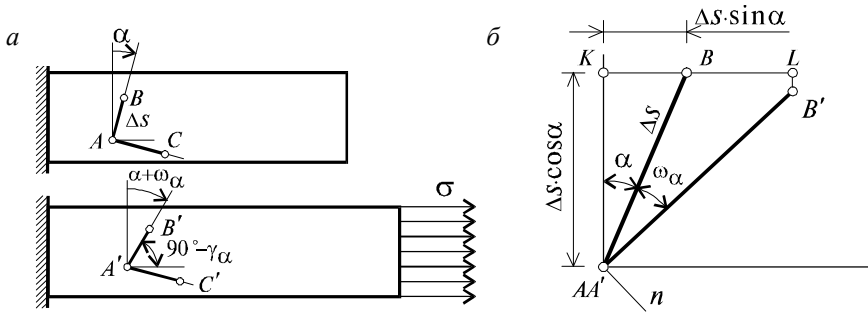


Рис. 2.8

При растяжении стержня точки A , B и C займут положения A' , B' , C' соответственно. Величина $\gamma_\alpha = \angle BAC - \angle A'B'C'$ называется **угловой деформацией** или **угловым сдвигом** в точке A .

Совместим точки A и A' и рассмотрим взаимное расположение отрезков AB и $A'B'$, вспомогательные точки K и L и прямую n , перпендикулярную отрезку $A'B'$ (рис. 2.8, б). Тогда $\varepsilon_{\text{прод}} = \frac{BL}{KB}$;

$$\varepsilon_{\text{попер}} = \frac{LB'}{AK};$$

$$\text{пер} = \frac{LB'}{AK}, \text{ откуда с учетом } \varepsilon_{\text{прод}} = \frac{\sigma}{E} \text{ получим}$$

$$BL = \frac{\sigma}{E} \Delta S \sin \alpha; \quad LB' = \mu \frac{\sigma}{E} \Delta S \cos \alpha. \quad (2.23)$$

Для определения ω_α спроектируем ломаную $BLB'A'$ на ось n . $\Delta S \sin \omega_\alpha = BL \cos(\alpha + \omega_\alpha) + LB' \sin(\alpha + \omega_\alpha)$, откуда, учитывая малость угла ω_α , т.е. $\sin \omega_\alpha \approx \omega_\alpha$, $\cos \omega_\alpha \approx 1$, получим

$$\omega_{\alpha} = \frac{BL\cos\alpha + LB'\sin\alpha}{\Delta S}. \quad (2.24)$$

В результате совместного рассмотрения (2.23) и (2.24) получим

$$\omega_{\alpha} = \frac{\sigma}{2E}(1+\mu)\sin 2\alpha. \quad \text{Откуда} \quad \omega_{\alpha+\pi/2} = -\frac{\sigma}{2E}(1+\mu)\sin 2\alpha.$$

Следовательно,

$$\gamma_{\alpha} = \omega_{\alpha} - \omega_{\alpha+\pi/2} = \frac{\sigma}{E}(1+\mu)\sin 2\alpha. \quad (2.25)$$

Окончательно получим закон Гука для сдвига

$$\gamma = \frac{\tau}{G}, \quad (2.26)$$

где $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$ – **модуль сдвига** или модуль упругости материала второго рода.

2.7. Основные механические характеристики материалов

Для количественной оценки основных свойств материалов строят условную диаграмму растяжения в координатах σ и ε (рис. 2.9). Условность состоит в том, что при расчете σ все силы относятся к первоначальной площади поперечного сечения стержня F_0 , в действительности же площадь поперечного сечения образца уменьшается.

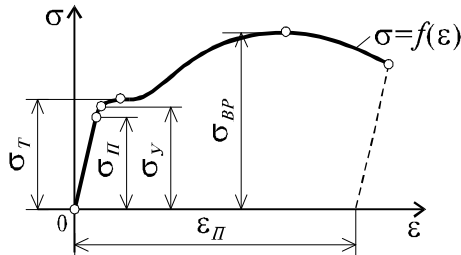


Рис. 2.9

Прочностные характеристики материала:

- наибольшее напряжение, до которого материал следует закону Гука – **предел пропорциональности $\sigma_{\text{П}}$** . В пределах закона Гука тангенс угла наклона прямой $\sigma = f(\varepsilon)$ к оси ε определяется величиной E ;

- **предел упругости σ_y** - наибольшее напряжение, до которого материал не получает остаточных деформаций;
- **предел текучести σ_T** - напряжение, при котором происходит рост деформаций без заметного увеличения нагрузки. Если необходимо различать предел текучести при растяжении и сжатии σ_T соответственно заменяется на σ_{TP} и $\sigma_{ТС}$. При напряжениях, больших σ_T , в теле конструкции развиваются пластические деформации ϵ_D , которые не исчезают при снятии нагрузки;
- **σ_B временное сопротивление разрыву** (для пластичных материалов), или **предел прочности** (для хрупких материалов) - отношение максимальной силы, которую способен выдержать образец, к его начальной площади поперечного сечения.

Способность материалов получать остаточные деформации носит название **пластичности**. Характеристики пластичности:

- относительное остаточное удлинение – $\delta = \frac{l_k - l_0}{l_0} 100\%$;
- относительное остаточное сужение после разрыва – $\Psi = \frac{F_k - F_0}{F_0} 100\%$;
- ударная вязкость – способность материала поглощать механическую энергию в процессе деформации и разрушения под действием ударной нагрузки.

Противоположным свойству пластичности является свойство **хрупкости**, т.е. способность материала разрушаться без образования заметных остаточных деформаций. К хрупким материалам относятся чугун, высокоуглеродистая сталь, стекло, кирпич, бетон, природные камни.

На рис. 2.10 изображена характерная диаграмма растяжения хрупких материалов. Диаграмма сжатия этих материалов сохраняет качественные особенности диаграммы растяжения.

Сопоставление предела прочности хрупких материалов при растяжении σ_{BP} с пределом прочности при сжатии σ_{BC} показывает, что эти материалы обладают, как правило, более высокими прочностными показателями при сжатии, нежели при растяжении. Величина отношения

$\frac{\sigma_{BP}}{\sigma_{BC}}$ для чугуна составляет 0.2–0.4, для керамических материалов

0.1–0.2. Для пластичных материалов установлено, что $\sigma_{BP} \approx \sigma_{BC}$.

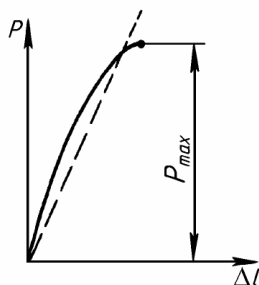


Рис. 2.10

2.8. Общие принципы расчета конструкций на прочность и жесткость

В результате расчета нужно получить ответ на вопрос, удовлетворяет или нет конструкция тем требованиям прочности и жесткости, которые к ней предъявляются.

Наиболее распространенным методом расчета деталей машин и элементов сооружений на прочность является **расчет по напряжениям**. В основу этого метода положено предположение, что определяющим параметром надежности конструкции является напряженное состояние в точке. Расчет выполняется в следующем порядке.

На основании анализа напряженного состояния конструкции выявляется та точка сооружения, где возникают наибольшие напряжения. Расчетная величина напряжений сопоставляется с предельно допустимой величиной напряжений для данного материала, полученной на основе предварительных лабораторных испытаний. Из сопоставления найденных расчетных напряжений и предельных напряжений (условие прочности) делается заключение о прочности конструкции

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma], \quad (2.27)$$

где $\sigma_{\max}$ – расчетное значение напряжения в точке, где возникают наибольшие напряжения;

$$[\sigma] - \text{допускаемое напряжение, определяемое как } [\sigma] = \frac{\sigma_{\alpha}}{n},$$

где n – коэффициент запаса прочности.

Для особо ответственных конструкций, для которых требуется не допускать возникновения пластических деформаций, за величину σ_{α} принимается $\sigma_{\alpha} = \sigma_y$. В тех случаях, когда допустимо возникновение пластических деформаций, как правило, принимается $\sigma_{\alpha} = \sigma_T$. Для хруп-

ких материалов и умеренно пластичных материалов принимается $\sigma_{\alpha} = \sigma_B$.

Указанный метод является не единственным. Например, на практике используется метод расчета конструкций по **разрушающим нагрузкам**. В этом методе путем расчета определяется предельная нагрузка $P_{\max}$, которую может выдержать конструкция, не разрушаясь и не изменяя существенно свою форму. Предельная (разрушающая) нагрузка сопоставляется с проектной нагрузкой, и на этом основании делается вывод о несущей способности конструкции в эксплуатационных условиях

$$P_{\max} \leq [P], \quad (2.28)$$

где $[P]$ – допускаемая сила, которая определяется по формуле

$$[P] = \frac{P_{\alpha}}{n_1}, \quad (2.29)$$

где P_{α} – значение внешних нагрузок, при которых происходит разрушение конструкции;

n_1 – коэффициент запаса.

При подборе сечений определяют требуемые площади $[F]$ поперечных сечений элемента (по известным продольным силам N и допускаемому напряжению $[\sigma]$). Принимаемые площади сечений F должны удовлетворять условию прочности, выраженному в виде

$$F \geq [F] = \frac{N}{[\sigma]}. \quad (2.30)$$

Под проверкой жесткости элемента конструкции, находящегося в состоянии чистого растяжения–сжатия, понимается поиск ответа на вопрос: достаточны ли значения жесткостных характеристик элемента (модуля упругости материала E и площади поперечного сечения F), чтобы максимальное из всех значений перемещений точек элемента, вызванных внешними силами, $l_{\max}$ не превысило некоторого заданного предельно допустимого значения $[l]$.

$$l_{\max} \leq [l], \quad (2.31)$$

При нарушении неравенства (2.31) конструкция переходит в предельное состояние.

3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЙ БРУСА

3.1. Статические моменты сечения

При решении практических задач возникает необходимость в использовании геометрических характеристик поперечных сечений бруса.

Рассмотрим некоторое поперечное сечение в системе координат x, y (рис. 3.1) и два следующих интегральных выражения

$$S_x = \int_F y dF; \quad S_y = \int_F x dF, \quad (3.1)$$

где нижний индекс у знака интеграла указывает на то, что интегрирование ведется по всей площади сечения F . Каждый из этих интегралов представляет собой сумму произведений элементарных площадок dF на расстояние до соответствующей оси (x или y). Первый интеграл называется статическим моментом сечения относительно оси x , а второй – относительно оси y .

При выполнении практических расчетов важно знать, как меняются статические моменты сечения при параллельном переносе координатных осей (рис 3.2).

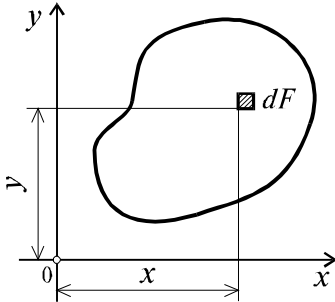


Рис. 3.1

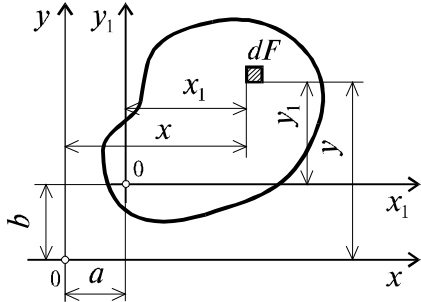


Рис. 3.2

Очевидно, что

$$x = x_1 + a; \quad y = y_1 + b. \quad (3.2)$$

Подставляя (3.2) в (3.1) получим

$$\begin{aligned} S_x &= \int_F (y_1 + b) dF = \int_F y_1 dF + bF; \\ S_y &= \int_F (x_1 + a) dF = \int_F x_1 dF + aF. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Величины a и b можно подобрать (причем единственным образом) так, чтобы выполнялись следующие равенства:

$$b \cdot F = S_x; \quad a \cdot F = S_y, \quad (3.4)$$

тогда статические моменты $S_{x_1} = S_{y_1} = 0$.

Ось, относительно которой статический момент равен нулю, называется **центральной**. Точка $C(x_C, y_C)$ пересечения центральных осей называется **центром тяжести сечения** в системе координат (x, y) и определяется из (3.4).

$$x_c = a = \frac{S_y}{F}; \quad y_c = b = \frac{S_x}{F}. \quad (3.5)$$

Далее предположим, что брус имеет составное сечение (рис. 3.3) с общей площадью F . Обозначим через F_k ($k = 1, 2, 3, \dots, n$) площадь k -й области, принадлежащей к составному сечению бруса. Тогда выражение (3.1) можно преобразовать в следующем виде:

$$S_x = \sum_{k=1}^n \int_{F_k} y dF = \sum_{k=1}^n S_x^{(k)}; \quad S_y = \sum_{k=1}^n \int_{F_k} x dF = \sum_{k=1}^n S_y^{(k)}, \quad (3.6)$$

где $S_x^{(k)}, S_y^{(k)}$ – статические моменты k -й области относительно осей x и y . Следовательно, статический момент составного сечения равен сумме статических моментов составляющих областей.

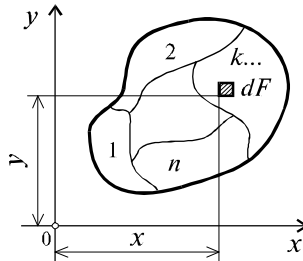


Рис. 3.3

3.2. Моменты инерции сечения

В системе координат xOy (см. рис. 3.1) рассмотрим три интегральных выражения

$$I_x = \int_F y^2 dF; \quad I_y = \int_F x^2 dF; \quad I_{xy} = \int_F xy dF. \quad (3.7)$$

Первые два интегральных выражения называются осевыми моментами инерции относительно осей x и y , а третье – центробежным моментом инерции сечения относительно осей x, y .

Для сечений, состоящих из n -числа областей (см. рис. 3.3), формулы (3.7) по аналогии с (3.6) будут иметь вид

$$I_x = \sum_{k=1}^n \int_{F_k} y^2 dF = \sum_{k=1}^n I_x^{(k)}; I_y = \sum_{k=1}^n \int_{F_k} x^2 dF = \sum_{k=1}^n I_y^{(k)};$$

$$I_{xy} = \sum_{k=1}^n \int_{F_k} xy dF = \sum_{k=1}^n I_{xy}^{(k)}.$$

Рассмотрим, как изменяются моменты инерции сечения при параллельном переносе координатных осей x и y (см. рис. 3.2). Преобразуя формулы (3.7) с учетом выражения (3.2), получим:

$$I_x = I_{x_1} + 2bS_{x_1} + b^2 F;$$

$$I_y = I_{y_1} + 2aS_{y_1} + a^2 F;$$

$$I_{xy} = I_{x_1 y_1} + aS_{x_1} + bS_{y_1} + abF.$$
(3.8)

Если предположить, что оси x_1 и y_1 (см. рис. 3.2) являются центральными, тогда $S_{x_1} = S_{y_1} = 0$ и выражения (3.8) упрощаются и принимают вид

$$I_x = I_{x_1} + b^2 F; I_y = I_{y_1} + a^2 F; I_{xy} = I_{x_1 y_1} + abF. \quad (3.9)$$

Определим осевые моменты инерции прямоугольника относительно осей x и y , проходящих через его центр тяжести (рис. 3.4).

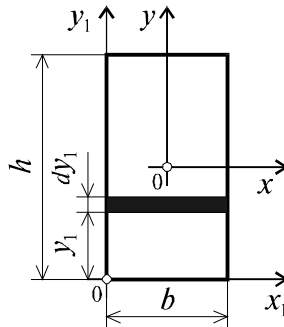


Рис. 3.4

В качестве элементарной площадки dF возьмем полоску шириной b и высотой dy (см. рис. 3.4). Тогда будем иметь

$$I_x = \int_F y^2 dF = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 dF b dy = \frac{b}{3} \left(\frac{h^3}{8} + \frac{h^3}{8} \right) = \frac{bh^3}{12}.$$

Аналогичным образом можно установить, что $I_y = \frac{hb^3}{12}$.

Для систем, рассматриваемых в полярной системе координат (рис. 3.5, а), вводится также полярный момент инерции $I_\rho = \int_F \rho^2 dF$,

где ρ – радиус–вектор точки тела в заданной полярной системе координат.

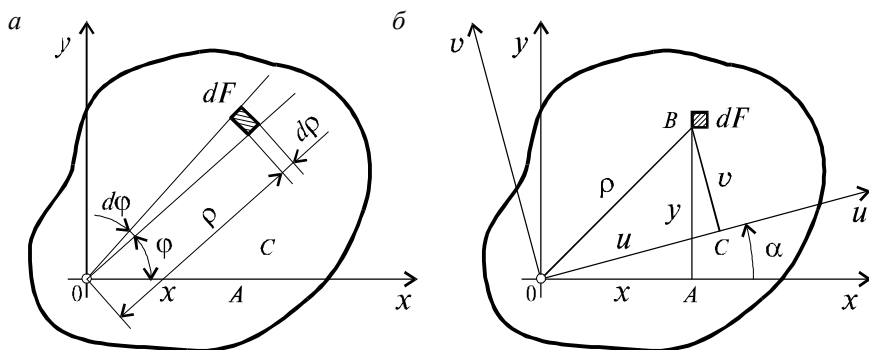


Рис. 3.5

Вычислим полярный момент инерции круга радиуса R . На рис. 3.5, а показана элементарная площадка, очерченная двумя радиусами и двумя concentric surfaces, площадью $dF = \rho d\rho d\phi$.

Интегрирование по площади заменим двойным интегрированием

$$I_\rho = \int_F \rho^2 dF = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R \rho^3 d\rho = \frac{R^4}{4} \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{\pi R^4}{2}.$$

Найдем зависимость между полярным и осевыми моментами инерции для круга. Из геометрии видно (рис. 3.5, б), что $\rho^2 = x^2 + y^2$, следовательно,

$$I_\rho = \int_F \rho^2 dF = \int_F (x^2 + y^2) dF = \int_F x^2 dF + \int_F y^2 dF = I_x + I_y.$$

Так как оси x и y для круга равнозначны, то $I_x = I_y = \frac{\pi R^4}{4}$.

Полярный момент инерции кольца может быть найден как разность моментов инерции двух кругов: наружного (радиусом R) и внутреннего (радиусом r)

$$I_{\rho}^{\kappa} = \frac{\pi R^4}{2} - \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi}{2}(R^4 - r^4).$$

3.3. Главные оси и главные моменты инерции

Рассмотрим, как изменяются моменты инерции плоского сечения при повороте осей координат из положения x и y к положению u и v . Из рис. 3.5, б легко установить, что

$$u = y \sin \alpha + x \cos \alpha; \quad v = y \cos \alpha - x \sin \alpha. \quad (3.10)$$

Из выражений

$$I_u = \int_F v^2 dF; I_v = \int_F u^2 dF; I_{uv} = \int_F uv dF$$

с учетом (3.10), после несложных преобразований получим:

$$\begin{aligned} I_u &= I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha + I_{xy} \sin 2\alpha; \\ I_v &= I_x \sin^2 \alpha + I_y \cos^2 \alpha - I_{xy} \sin 2\alpha; \\ I_{uv} &= 0,5(I_x - I_y) \sin 2\alpha + I_{xy} \cos 2\alpha. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Складывая первые два уравнения, получим

$$I_u + I_v = I_x + I_y = I_{\rho}, \quad (3.12)$$

где $\rho^2 = x^2 + y^2$;

I_{ρ} – полярный момент инерции сечения, величина которого не зависит от угла поворота координатных осей.

Дифференцируя в (3.11) выражение I_u по α и приравнявая его нулю, находим значение $\alpha = \alpha_0$, при котором функция I_u принимает экстремальное значение

$$\alpha_0 = \frac{1}{2} \arctg \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x}. \quad (3.13)$$

С учетом (3.12) можно утверждать, что при $\alpha = \alpha_0$ один из осевых моментов I_u или I_v будет наибольшим, а другой наименьшим. Одновременно при $\alpha = \alpha_0$ I_{uv} обращается в нуль, что легко установить из третьей формулы (3.11).

Декартовы оси координат, относительно которых осевые моменты инерции принимают экстремальные значения, называются **главными осями инерции**. Осевые моменты инерции относительно главных осей называются главными и определяются из (3.11) с учетом (3.13) и имеют вид

$$I_{\frac{\max}{\min}} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_y - I_x}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}. \quad (3.14)$$

В заключение введем понятие **радиуса инерции** сечения относительно координатных осей x и y – i_x и i_y , соответственно, которые определяются по формулам:

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{F}}; i_y = \sqrt{\frac{I_y}{F}}. \quad (3.15)$$

3.4. Пример расчета (задача № 2)

Для сечения, составленного из полукруга $d = 80$ мм, прямоугольника (300×12) мм, равнобокого уголка $(90 \times 90 \times 9)$ мм и швеллера № 24 (рис. 3.6) требуется определить геометрические характеристики в соответствии с содержанием лекции.

Определение положения центра тяжести составной фигуры.

Заданную фигуру вычерчиваем в масштабе и относим к осям z и y , параллельным сторонам ее элементов. Через центры тяжести каждого элемента проводим оси z_i , y_i , параллельные осям z , y .

Положение центров тяжести элементов определяем по их координатам в осях zOy :

- элемент 1 (полукруг) $z_1 = -1,69$ см; $y_1 = 30 - 4 = 26$ см;
- элемент 2 (прямоугольник) $z_2 = 0,6$ см; $y_2 = 15$ см;
- элемент 3 (уголок $90 \times 90 \times 9$) $z_3 = 1,2 + 2,55 = 3,75$ см; $y_3 = 30 - 9 + 2,55 = 23,55$ см;
- элемент 4 (швеллер № 24) $z_4 = 1,2 + 12 = 13,2$ см; $y_4 = 9 - 2,42 = 6,58$ см.

Подсчитываем и записываем площади элементов составной фигуры: $F_1 = 25,12$ см²; $F_2 = 36$ см²; $F_3 = 15,6$ см²; $F_4 = 30,6$ см² (F_3 и F_4 взяты из сортамента).

Общая площадь фигуры составит $F_5 = 107,3$ см².

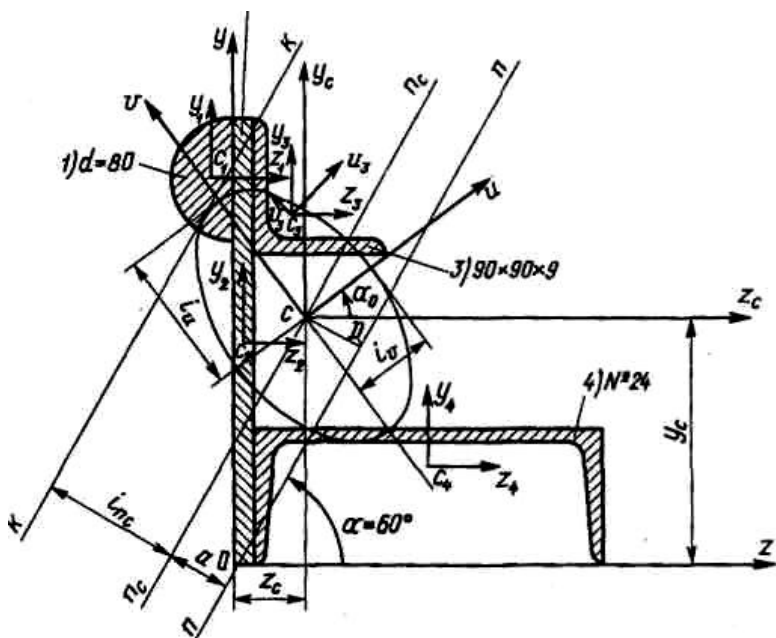


Рис. 3.6

Переходим к определению координат центра тяжести составной фигуры

$$\begin{aligned}
 Z_c &= \frac{S_y}{F} \frac{F_1 z_1 + F_2 z_2 + F_3 z_3 + F_4 z_4}{F} = \\
 &= \frac{25,12(-1,69) + 36 \cdot 0,6 + 15,6 \cdot 3,75 + 30,6 \cdot 13,2}{107,3} = \frac{441,6}{107,3} = 4,11 \text{ см}; \\
 y_c &= \frac{S_z}{F} \sum_1^4 \frac{F_i y_i}{F} = \frac{1762}{107,3} = 16,42 \text{ см}.
 \end{aligned}$$

По найденным координатам наносим на чертеж центр тяжести всей фигуры и через него проводим центральные оси z_c и y_c , параллельные осям z , y .

Определение моментов инерции относительно центральных осей фигуры

Сначала определяем моменты инерции относительно собственных (центральных) осей каждого элемента сечения:

- для полуokrуга с диаметром $d_1 = 80$ мм имеем

$$J_{Z_1}^I = \frac{\pi d_1^4}{128} = 100,5 \text{ см}^4; J_{Z_1 Y_1}^I = 0;$$

$$J_{Y_1}^I = \frac{\pi d_1^4}{128} - \frac{\pi d_1^2}{8} \left(\frac{2d_1}{3\pi} \right)^2 \approx 28,76 \text{ см}^4;$$

- для прямоугольника (300 × 12)

$$J_{Z_2}^{II} = \frac{1,2 \cdot 30^3}{12} = 2700 \text{ см}^4; J_{Y_2}^{II} = \frac{1,2 \cdot 30^3}{12} = 4,32 \text{ см}^4;$$

- для уголка 90 × 90 × 9 из сортамента (ГОСТ 8509 - 72) имеем

$$J_{Z_3}^{III} = J_{Y_3}^{III} = 118 \text{ см}^4; J_{u_3}^{III} = 186 \text{ см}^4; J_{v_3}^{III} = 48,6 \text{ см}^4;$$

$$J_{z_3 y_3}^{III} = \frac{1}{2} (J_{u_3}^{III} - J_{v_3}^{III}) \sin(-2 \cdot 45^\circ) = -68,7 \text{ см}^4;$$

- для швеллера № 24 (ГОСТ 8240 - 72)

$$J_{Z_4}^{VI} = 208 \text{ см}^4; J_{Y_4}^{VI} = 2900 \text{ см}^4; J_{z_4 y_4}^{VI} = 0 \text{ см}^4.$$

Вычисляем координаты центров тяжести элементов фигуры z_{i_c} и

y_{i_c} в осях z_c, y_c в соответствии с формулой $z_{i_c} = z_i - z_c, y_{i_c} = y_i - y_c$:

- полукруг

$$z_{1c} = -1,69 - 4,11 = -5,80 \text{ см}; y_{1c} = 26 - 16,42 = 9,58 \text{ см};$$

- прямоугольник

$$z_{2c} = 0,6 - 4,11 = -3,51 \text{ см}; y_{2c} = 15 - 16,42 = -1,42 \text{ см};$$

- уголок

$$z_{3c} = 3,75 - 4,11 = -0,36 \text{ см}; y_{3c} = 23,55 - 16,42 = 7,13 \text{ см};$$

- швеллер

$$z_{4c} = 13,2 - 4,11 = 9,09 \text{ см}; y_{4c} = 6,58 - 16,42 = -9,84 \text{ см}.$$

Переходим к определению моментов инерции всей фигуры относительно ее центральных осей. Каждое из слагаемых находим из формул параллельного переноса осей (3.9):

- полукруг

$$J_{Z_c}^I = J_{Z_1}^I + F_I y_{1c}^2 = 100,5 + 25,12 \cdot 9,58^2 = 2406,5 \text{ см}^4;$$

$$J_{Y_c}^I = J_{Y_1}^I + F_I z_{1c}^2 = 28,76 + 25,12 \cdot (-5,80)^2 = 872,8 \text{ см}^4;$$

$$J_{Z_c Y_c}^I = J_{Z_1 Y_1}^I + F_I y_{1c} z_{1c} = 0 + 25,12 \cdot (-5,80) \cdot (9,58) = -1396 \text{ см}^4;$$

- прямоугольник

$$J_{Z_c}^{II} = 2773 \text{ см}^4, J_{y_c}^{II} = 447,8 \text{ см}^4, J_{y_c z_c}^{II} = 179,4 \text{ см}^4;$$

- уголок

$$J_{Z_c}^{III} = 911 \text{ см}^4, J_{y_c}^{III} = 120 \text{ см}^4, J_{y_c z_c}^{III} = -108,7 \text{ см}^4;$$

- швеллер

$$J_{Z_c}^{VI} = 3171 \text{ см}^4, J_{y_c}^{VI} = 5422 \text{ см}^4, J_{y_c z_c}^{VI} = -2737 \text{ см}^4.$$

Общие моменты инерции для всей фигуры будут равны

$$J_{Z_c} = 9261 \text{ см}^4, J_{y_c} = 6863 \text{ см}^4, J_{y_c z_c} = -4062 \text{ см}^4.$$

Определение положения главных центральных осей

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2J_{y_c z_c}}{J_{y_c} - J_{Z_c}} = \frac{2(-4062)}{6863 - 9261} = -3,388; \quad 2\alpha_0 = 73^\circ 34'; \quad \alpha_0 = 36^\circ 47'.$$

Здесь $2\alpha_0$ – угол, на который надо повернуть оси z_c, y_c , чтобы они стали главными (u, v). Так как $\alpha_0 > 0$, то откладываем угол α_0 от оси z против часовой стрелки и проводим главные центральные оси u и v .

Полученные значения целесообразно скомпоновать в сводную таблицу, удобную для самопроверки вычислений.

Но- мер эле- мен- та	Пло- щадь эле- мента F_i	Коорди- наты центров тяжести элементов в централь- ных осях z_c, y_c		Моменты инерции элементов относи- тельно их цен- тральных осей z_i, y_i			Произведения			Моменты инерции элементов отно- сительно цен- тральных осей фигуры z_c, y_c		
		z_{ic}	y_{ic}	$J_{i_{z_i}}$	$J_{i_{y_i}}$	$J_{i_{z_i y_i}}$	$F_i z_{ic}^2$	$F_i y_{ic}^2$	$F_i z_{ic}^2 y_{ic}^2$	$J_{i_{z_c}}$	$J_{i_{y_c}}$	$J_{i_{z_c y_c}}$
	см ²	см		см ⁴								
1	25,12	-5,8	9,58	100,5	28,76	0	844,1	2306	-1396	2406	872,8	-1396
2	36,0	-3,51	-1,42	2700	4,32	0	433,5	72,72	179,4	2773	447,8	179,4
3	15,6	-0,36	7,13	118	118	-68,7	2,04	793,1	-40,03	911,1	120	-108,7
4	30,6	9,09	-9,84	208	2900	0	2522	2963	-2737	3171	5422	-2737
$F = 107,3$										9261	6863	-4062

Определение главных центральных моментов инерции
согласно (3.11)

$$J_u = 9261 \cos^2 36^\circ 47' + 6863 \sin^2 36^\circ 47' - (-4062) \sin 73^\circ 34' = 12310 \text{ см}^4;$$

$$J_v = 9261 \cos^2 36^\circ 47' + 6863 \sin^2 38^\circ 47' + (-4062) \sin 73^\circ 34' = 3810 \text{ см}^4.$$

Подсчет главных центральных радиусов инерции фигуры

$$i_{\max} = i_u \sqrt{\frac{J_u}{F}} \sqrt{12300 / 107,3} \approx 10,7 \text{ см};$$

$$i_{\max} = i_v \sqrt{\frac{J_v}{F}} \sqrt{3827 / 107,3} \approx 5,96 \text{ см}.$$

Откладывая найденные значения i_u и i_v на главных центральных осях инерции, строим на них, как на полуосях, эллипс инерции (см. рис. 3.6), при этом i_u откладывается по оси v , а i_v - на оси u . Эллипс инерции имеет вспомогательное значение: он лишь позволяет геометрически представить изменение моментов инерции сечения при повороте осей.

4. КРУЧЕНИЕ

4.1. Основные понятия. Крутящий момент

Кручением называется такой вид деформации, при котором в поперечных сечениях бруса возникает только один внутренний силовой фактор – крутящий момент M_k (крутящий момент можно также обозначить M_z , так как это момент внутренних сил относительно продольной оси бруса – оси z).

Кручение возникает в валах, винтовых пружинах и других элементах конструкций. Кручение прямого бруса происходит при нагружении его внешними скручивающими моментами (парами сил - m), плоскости действия которых перпендикулярны к его продольной оси.

Если прямой брус находится в состоянии покоя или равномерного вращения, то алгебраическая сумма всех внешних скручивающих моментов, приложенных к брусу, равна нулю.

При расчете валов в ряде случаев величины внешних скручивающих моментов определяются по величине потребляемой мощности и по скорости вращения вала. Если вал делает в минуту n оборотов, то угол поворота вала за одну секунду, выраженный в радианах, равен $(n/60)2\pi$ или $\pi n/30$. Работа скручивающего момента m за одну секунду, т.е. мощность N , передаваемая валом, равна произведению величины момента на угол поворота вала (в радианах) за одну секунду

$$N = m \frac{\pi n}{30},$$

откуда

$$m = \frac{30N}{\pi n} \text{ кгс} \cdot \text{м}, \quad (4.1)$$

где мощность N выражена в кгс·м/с.

Если мощность N задана в лошадиных силах (л.с.), то

$$m = \frac{30 \cdot 75 N}{\pi n} = 716,2 \frac{N}{n} \text{ кгс} \cdot \text{м}. \quad (4.2)$$

Если мощность N задана в киловаттах, то, учитывая, что 1 л.с. равна 0,736 кВт, получаем:

$$m = 973,6 \frac{N}{n} \text{ кгс} \cdot \text{м}. \quad (4.3)$$

Крутящие моменты, возникающие в поперечных сечениях брусев, определяются по внешним скручивающим моментам с помощью метода сечений. В простейшем случае, когда вал нагружен только двумя внешними моментами (эти моменты из условия равновесия бруса $\sum M_z = 0$ всегда равны друг другу по величине и направлены в противоположные стороны), как показано на рис. 4.1, а, крутящий момент M_k в любом поперечном сечении бруса (на участке между внешними моментами) по величине равен внешнему моменту $m_1 = m_2$.

Если размеры поперечного сечения вдоль оси бруса неизменны, то опасными считаются сечения с максимальным крутящим моментом. Следует учитывать, что наибольший внешний скручивающий момент, приложенный к брусу, не всегда равен наибольшему крутящему моменту, по которому ведется расчет бруса на прочность и жесткость.

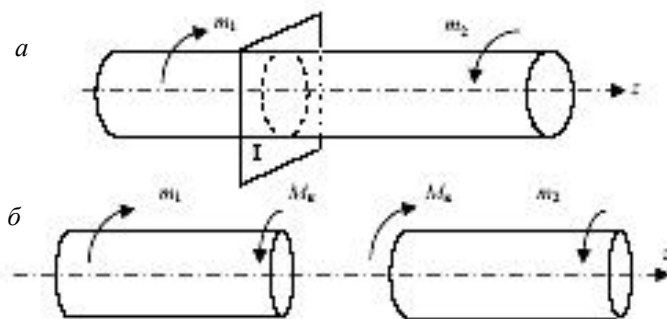


Рис. 4.1

Для нахождения опасных сечений строятся эпюры крутящих моментов (графики изменения крутящих моментов по длине вала). Каждая ордината эпюры крутящих моментов в принятом масштабе равна величине крутящего момента, действующего в том поперечном сечении вала, которому соответствует эта ордината. В сечении, в котором к валу при-

ложен внешний скручивающий момент, ордината эпюры изменяется скачкообразно на величину, равную значению этого момента.

Для удобства построения эпюр M_z действует следующее правило знаков: *крутящий момент считается положительным, если при взгляде в торец отсеченной части бруса действующий на него момент представляется направленным по движению часовой стрелки* (рис. 4.2). Это предположение условно, так как знак крутящего момента не имеет физического смысла.

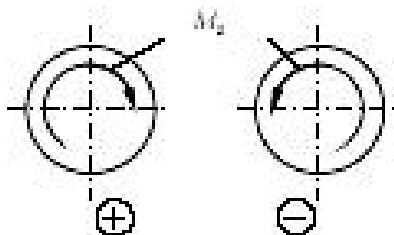


Рис. 4.2

В поперечных сечениях вала при кручении возникают только касательные напряжения, нормальные силы параллельны продольной оси бруса и их моменты равны нулю. Следовательно, крутящий момент - это результирующий момент внутренних касательных сил, возникающих в поперечном сечении бруса относительно его продольной оси.

4.2. Кручение вала круглого поперечного сечения

Рассмотрим кручение участка бруса круглого сечения с радиусом r длиной dz . Один из концов будем считать неподвижно закрепленным (рис.4.3).

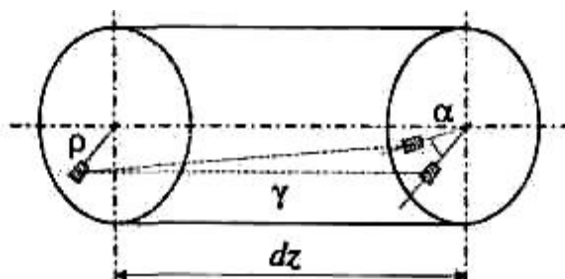


Рис. 4.3

При повороте на угол α в поперечном сечении угол сдвига, лежащий на поверхности такого вала, определяется по формуле

$$\gamma = r \frac{d\alpha}{dz}. \quad (4.4)$$

Отношение полного угла закручивания на участке вала к его длине называется относительным **углом закручивания**

$$\theta = \frac{d\alpha}{dz}. \quad (4.5)$$

Между крутящим моментом и касательными напряжениями, возникающими в поперечном сечении вала, устанавливается зависимость

$$\tau = \frac{M_{\kappa}}{J_{\rho}} \rho = \frac{M_{\kappa}}{W_{\rho}}. \quad (4.6)$$

Таким образом, при кручении касательные напряжения прямо пропорциональны расстоянию от центра тяжести сечения, причем у центра тяжести касательные напряжения равны нулю. Приближаясь к поверхности вала, они принимают свои максимальные значения.

Угол φ представляет собой взаимный угол поворота концевых сечений участка.

Если крутящий момент во всех поперечных сечениях вала имеет одно и то же значение, а размеры сечения постоянны по всей его длине, то полный угол закручивания определяется из выражения

$$\varphi = \frac{M_{\kappa} l}{GJ_{\rho}}. \quad (4.7)$$

Значения напряжений при кручении не зависят от физических свойств материала бруса, так как величина G в формулу напряжений (4.6) не входит. Значения же деформаций (4.7) зависят от свойств материала.

Произведение GJ_{ρ} называется жесткостью сечения при кручении. Оно выражается в кгс/мм^2 . Величины относительных и полных углов закручивания вала обратно пропорциональны жесткости его поперечных сечений.

4.3. Расчет вала круглого поперечного сечения на прочность и жесткость

Наибольшие касательные напряжения, возникающие в скручиваемом бруссе, не должны превышать соответствующих допускаемых напряжений

$$\tau_{\max} \leq [\tau]. \quad (4.8)$$

Это требование называется условием прочности. Допускаемое напряжение при кручении $[\tau]$ (так же, как и при других видах деформаций)

зависит от свойств материала рассчитываемого бруса и от принятого коэффициента запаса прочности.

$$[\tau] = \frac{\tau_{пред}}{[n]}. \quad (4.9)$$

В случае пластичного материала в качестве опасного (предельного) напряжения $\tau_{пред}$ принимается τ_t – предел текучести при сдвиге, а в случае хрупкого материала – τ_b – предел прочности.

В связи с тем, что механические испытания материалов на кручение производятся значительно реже, чем на растяжение, не всегда имеются экспериментально полученные данные об опасных (предельных) напряжениях при кручении. Поэтому в большинстве случаев допускаемые напряжения на кручение принимают в зависимости от допускаемых напряжений на растяжение для того же материала. Например, для стали $[\tau] \approx 0,5[\sigma]$; для чугуна $[\tau] \approx [\sigma_p]$, где $[\sigma_p]$ – допускаемое напряжение при растяжении чугуна.

Следует стремиться к тому, чтобы материал бруса был по возможности полностью использован: наибольшие расчетные напряжения, возникающие в брусе, равнялись допускаемым напряжениям.

Величина τ_{max} в условии прочности (4.8) представляет собой значение наибольшего касательного напряжения в опасном сечении бруса в непосредственной близости к его внешней поверхности. Опасным сечением бруса является сечение, для которого абсолютная величина отношения $M_k / W\rho$ имеет наибольшее значение. Для бруса постоянного сечения наиболее опасным является сечение, в котором крутящий момент имеет наибольшее абсолютное значение.

При расчете скручиваемых брусьев на прочность, как и при расчете других конструкций, возможны следующие три вида задач, различающихся формой использования условия прочности (4.8):

- а) проверка напряжений (проверочный расчет);
- б) подбор сечения (проектный расчет);
- в) определение допускаемой нагрузки.

При проверочном расчете по заданным нагрузке и размерам бруса определяются наибольшие касательные напряжения, возникающие в нем. При этом во многих случаях предварительно следует построить эпюру M_k , наличие которой облегчает определение опасного сечения бруса. Наибольшие касательные напряжения в опасном сечении затем сравниваются с допускаемыми напряжениями. Если при этом условие (4.8) не удовлетворяется, то требуется изменить размеры сечения бруса или уменьшить действующую на него нагрузку, или применить материал более высокой прочности. Конечно, незначительное ($\sim 5\%$) превышение максимальных расчетных напряжений над допускаемыми неопасно.

При проектировочном расчете по заданной нагрузке определяются крутящие моменты в поперечных сечениях бруса (обычно строится эпюра M_k), а затем по формуле (4.10) определяется необходимый полярный момент сопротивления поперечного сечения бруса для каждого его участка, на котором сечение принимается постоянным.

$$W_p \geq \frac{M_{\max}}{[\tau]}. \quad (4.10)$$

По величине полярного момента сопротивления определяется диаметр сплошного круглого или – наружный и внутренний диаметры кольцевого сечения бруса.

При определении допускаемой нагрузки с помощью формулы (4.6) по известному допускаемому напряжению $[\tau]$ и полярному моменту сопротивления W_p определяется величина допускаемого крутящего момента $M_{\max}$, затем устанавливаются величины допускаемых внешних нагрузок, от действия которых возникающий в сечениях бруса наибольший крутящий момент равняется допускаемому моменту.

Расчет вала на прочность не исключает возможности возникновения деформаций, недопустимых при его эксплуатации. Большие углы закручивания вала особенно опасны при передаче им переменного во времени момента, так как при этом возникают опасные для его прочности крутильные колебания. В технологическом оборудовании, например, металло-режущих станках, недостаточная жесткость на кручение некоторых элементов конструкции (в частности, ходовых винтов токарных станков) приводит к нарушению точности обработки изготавливаемых на этом станке деталей. Поэтому в необходимых случаях валы рассчитывают не только на прочность, но и на жесткость.

Условие жесткости бруса при кручении имеет вид

$$\theta_{\max} \leq [\theta], \quad (4.11)$$

где $\theta_{\max} = \frac{M_k}{GJ_p}$ – наибольший относительный угол закручивания бруса;

$[\theta]$ – допускаемый относительный угол закручивания, принимаемый для разных конструкций и разных видов нагрузки равным от 0,15 до 2° на 1 м длины стержня (от 0,0015 до 0,02° на 1 см длины или от 0,000026 до 0,00035 рад на 1 см длины вала).

5. ИЗГИБ

5.1. Общие понятия

Изгиб представляет собой такую деформацию, при которой происходит искривление осей прямых брусьев или изменение кривизны осей кривых брусьев.

Изгибающий момент – внутренний силовой фактор (внутреннее усилие), возникающий в поперечном сечении бруса, а именно, момент относительно оси, расположенной в плоскости поперечного сечения и проходящей через его центр тяжести; он действует в плоскости, перпендикулярной к поперечному сечению бруса.

Прямой изгиб возникает в случае, когда изгибающий момент в данном поперечном сечении бруса действует в плоскости, проходящей через одну из главных центральных осей инерции этого сечения. Например, когда на прямой брус действует нагрузка в виде системы сосредоточенных сил, расположенных в одной плоскости, проходящей через одну из главных центральных осей инерции каждого поперечного сечения бруса.

Случай, когда плоскость действия изгибающего момента в данном поперечном сечении бруса не проходит ни через одну из главных центральных осей инерции этого сечения, называется косым изгибом.

В зависимости от вида нагрузки различают поперечный изгиб, вызванный поперечной нагрузкой, и продольный изгиб, вызванный продольной нагрузкой. Встречается продольно-поперечный изгиб.

По количеству внутренних силовых факторов, возникающих в поперечном сечении балки, различают чистый и поперечный изгибы.

5.2. Внутренние усилия

Внешние нагрузки, действующие на сооружение, вызывают появление в нем внутренних усилий.

В случае плоского действия на балку внешних нагрузок в каждом поперечном сечении бруса возникают внутренние силовые факторы, действующие в этой же плоскости (рис. 5.1):

- а) продольная сила N , приложенная в центре тяжести сечения, действующая перпендикулярно к сечению;
- б) поперечная сила Q , действующая в плоскости поперечного сечения, проходящая через его центр тяжести;
- в) изгибающий момент M , действующий в плоскости, перпендикулярной к поперечному сечению.

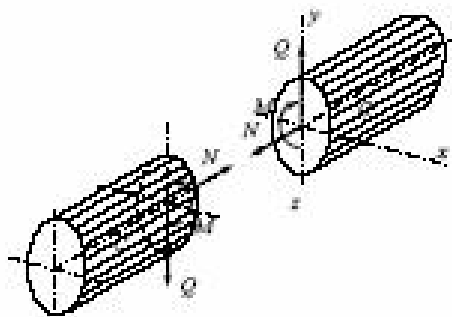


Рис. 5.1

Изгибающий момент обозначается также M_y , M_x (где индекс y или x указывает на ось, расположенную в поперечном сечении бруса, относительно которой действует момент) или просто M .

Изгибающий момент M_i в поперечном сечении считается положительным, когда на левом торце правой части бруса он направлен по часовой стрелке, а на правом торце левой части – против часовой стрелки. Продольная сила N в сечении положительна при растяжении.

Поперечная сила Q положительна, когда на левом торце правой части бруса она направлена снизу вверх, а на правом торце левой части – сверху вниз; положительная поперечная сила стремится вращать отсеченную часть бруса (на которую она действует) по часовой стрелке – относительно любой точки C , расположенной на внутренней нормали к поперечному сечению. Положительные направления внутренних усилий показаны на рис. 5.1 (в аксонометрии) и 5.2.

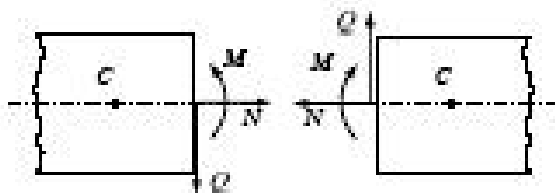


Рис. 5.2

Из рис. 5.2 следует, что при положительном изгибающем моменте верхние волокна бруса испытывают сжатие (укорочение), а нижние – растяжение (удлинение).

Изгибающий момент, продольная сила и поперечная сила, действующие в каждом поперечном сечении, связаны с напряжениями, возникающими в этом сечении, следующими зависимостями:

$$\begin{aligned} M_z &= \int_y \sigma y dF; \\ Q &= \int_y \tau_y dF; \\ N &= \int_y \sigma dF. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Для определения проекции на какую-либо ось внутренних сил в сечении, действующих со стороны левой части бруса на правую, на эту ось надо спроектировать все внешние силы, приложенные к левой части. Аналогично, чтобы определить момент (относительно какой-либо оси) внутренних сил в сечении, действующих со стороны левой части бруса на правую, надо вычислить момент (относительно этой оси) всех внешних сил, приложенных к левой части.

Определение внутренних сил, действующих со стороны левой части бруса на правую, можно производить по внешним силам, приложенным не к левой части, а к правой. В этом случае проекции внешних сил на выбранные оси и их моменты относительно этих осей необходимо взять с обратными знаками.

Эти положения позволяют сформулировать следующие правила определения внутренних усилий, возникающих в поперечном сечении бруса, для случаев, когда все внешние силы расположены в одной плоскости.

Изгибающий момент M_x относительно центральной оси x поперечного сечения по величине и знаку равен сумме моментов относительно этой оси всех внешних сил, приложенных к левой части бруса, или сумме моментов (относительно той же оси), взятой с обратным знаком, всех внешних сил, приложенных к правой части,

$$M_x = \sum_{\text{лев.}} M_x = - \sum_{\text{прав.}} M_x, \quad (5.2)$$

при этом моменты внешних сил положительны, когда они действуют по часовой стрелке.

Поперечная сила Q по величине и знаку равна сумме проекций всех внешних сил, приложенных к левой части бруса, на нормаль к его продольной оси, проведенную в рассматриваемом поперечном сечении, или сумме проекций (на ту же нормаль), взятой с обратным знаком, всех внешних сил, приложенных к правой части бруса,

$$Q_x = \sum_{\text{лев.}} Y = - \sum_{\text{прав.}} Y, \quad (5.3)$$

при этом проекции внешних сил на нормаль положительны, когда они направлены снизу вверх.

Продольная сила N по величине и знаку равна сумме проекций всех внешних сил, приложенных к левой части бруса, на его продольную ось, или сумме проекций (на ту же ось), взятой с обратным знаком, всех внешних сил, приложенных к правой части бруса,

$$N = \sum_{\text{лев.}} Z = - \sum_{\text{прав.}} Z, \quad (5.4)$$

при этом проекции внешних сил на ось бруса положительны, когда они направлены справа налево.

При определении внутренних усилий моменты и проекции вычисляются от всех внешних сил, приложенных к брусу только по одну сторону от рассматриваемого поперечного сечения (т.е. или слева, или справа от сечения).

С невыполнением этого условия связано большинство ошибок при определении внутренних усилий.

5.3. Основные дифференциальные зависимости в теории изгиба

Рассмотрим балку, находящуюся под действием плоской системы сил (рис. 5.3, а). Двумя поперечными сечениями, отстоящими на расстоянии dz друг от друга, выделим из балки элемент так, чтобы на него не действовали внешние сосредоточенные силы и моменты. На левый торец элемента действуют внутренние усилия M и Q (рис. 5.3, б), а на правый $M+dM$ и $Q+dQ$. Здесь dM и dQ представляют собой приращения величин внутренних усилий на участке dz балки. Кроме того, на элемент действует распределенная нагрузка, перпендикулярная к оси балки; интенсивность ее у левого конца элемента равна q , а у правого $q + dq$ (рис. 5.3, б).

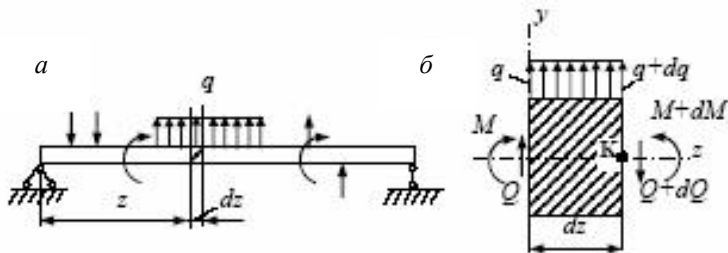


Рис. 5.3

Так как вся балка в целом находится в равновесии, то в равновесии находится и ее элемент dz . Уравнение равновесия элемента dz в виде суммы проекций на ось y всех действующих на него сил (см. рис. 5.3)

$$\sum Y = Q + qdz - (Q + dQ) = 0,$$

откуда

$$q = \frac{dQ}{dz}. \quad (5.5)$$

Первая производная от поперечной силы по абсциссе сечения равна интенсивности распределенной нагрузки, перпендикулярной к оси балки.

Уравнение равновесия элемента dz в виде суммы моментов действующих на него сил относительно точки K (см. рис. 5.3.б)

$$\sum M = M + Qdz - (M + dM) + qdz \frac{dz}{2} = 0,$$

откуда

$$Q = \frac{dM}{dz}. \quad (5.6)$$

Первая производная от изгибающего момента по абсциссе сечения равна поперечной силе. Эта зависимость называется теоремой Журавского.

Зависимости (5.5) и (5.6) действительны, когда абсцисса поперечного сечения возрастает от левого конца балки к правому. Если, наоборот, абсцисса z возрастает от правого конца балки к левому, то в правых частях формул (5.5) и (5.6) перед q и Q должен стоять знак «минус».

Геометрический смысл первой производной dy/dz : при любом значении аргумента z она равна тангенсу угла между касательной к кривой $y = f(z)$ (в точке с координатами z, y) и положительным направлением оси z , т.е. $\operatorname{tg} \alpha = dy/dz$.

Если первая производная (следовательно и угол α) положительна, то функция $y = f(z)$ возрастает, а если она отрицательна, – то убывает. Экстремум (максимум или минимум) функции $y = f(z)$ имеется при тех значениях z , при которых производная dy/dz равна нулю и, следовательно, угол α также равен нулю, т.е. касательная к кривой $y = f(z)$ параллельна оси z .

Используя изложенные зависимости между функцией и ее первой производной, из теоремы Журавского можно сделать ряд важных выводов:

1. Тангенс угла α между касательной к линии, ограничивающей эпюру M , и осью эпюры равен поперечной силе Q .

2. На участках балки, на которых поперечная сила положительна, изгибающий момент возрастает (слева направо), а на участках, на которых она отрицательна, – убывает.
3. Чем больше по абсолютной величине значение поперечной силы Q , тем круче линия, ограничивающая эпюру M .
4. На участке балки, на котором поперечная сила имеет постоянное значение, эпюра M ограничена прямой линией.
5. Если на границе соседних участков балки эпюра Q не имеет скачка, то линии, ограничивающие эпюру M на этих участках, сопрягаются без перелома, т.е. имеют в точке сопряжения общую касательную.
6. Если на границе соседних участков балки в эпюре Q имеется скачок, то линии, ограничивающие эпюру M на этих участках, сопрягаются с переломом, т.е. не имеют в точке сопряжения общей касательной.
7. Изгибающий момент достигает максимума или минимума в сечениях балки, в которых поперечная сила равна нулю; касательная к линии, ограничивающей эпюру M , в этом сечении параллельна оси эпюры.

5.4. Расчеты на прочность при изгибе

Расчет балок на прочность обычно ведется по наибольшим нормальным напряжениям, возникающим в их поперечных сечениях. Обозначая эти напряжения $\sigma_{\max}$, получаем условие прочности в виде

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma], \quad (5.7)$$

где $[\sigma]$ – допускаемое напряжение, зависящее в основном от материала балки и ее назначения.

При расчете на прочность элементов конструкций, работающих на изгиб, возможны три вида задач, различающихся формой использования условия прочности (5.7):

- а) проверка напряжений (проверочный расчет);
- б) подбор сечения (проектный расчет);
- в) определение допускаемой нагрузки (определение грузоподъемности).

Методика решения этих задач для балок из пластичных и хрупких материалов различна, так как балки из пластичных материалов одинаково работают на растяжение и сжатие, а из хрупких материалов лучше работают на сжатие, чем на растяжение. Это влияет на применяемые формы поперечных сечений балок и на способ определения опасного сечения.

Проверка прочности по нормальным напряжениям

Для балок из пластичного материала, при равенстве по величине пределов текучести, при растяжении и сжатии, наибольшие расчетные напряжения возникают в опасных точках, наиболее удаленных от ней-

тральной оси. Эти напряжения сравниваются с допускаемым напряжением, после чего делается заключение о прочности балки: прочность балки обеспечена, если наибольшие по абсолютному значению σ , возникающие в опасном сечении, не превышают допускаемых.

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{J_x} y_{\max} \leq [\sigma]. \quad (5.8)$$

Для балок из хрупкого материала, различно сопротивляющихся растяжению и сжатию, наибольшие нормальные напряжения в опасном сечении определяются и в растянутых, и в сжатых зонах поперечного сечения, и путем сравнения их с соответствующими допускаемыми напряжениями решается вопрос о прочности балки:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{J_x} y_{\text{раст.}} \leq [\sigma_p] - \text{область растяжения}; \quad (5.9)$$

$$\sigma_{\max} = \left| \frac{M_{\min}}{J_x} \right| y_{\text{сжатия}} \leq [\sigma_c] - \text{область сжатия};$$

$y_{\text{раст.}}$ – расстояние от нейтральной оси до наиболее удаленной точки на выпуклой части балки (протяженность области растяжения);

$y_{\text{сжатия}}$ – расстояние от нейтральной оси до наиболее удаленной точки на вогнутой части балки (протяженность области сжатия).

В случае симметричного сечения (прямоугольник, круг и т.д.) вид условия прочности упрощается

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_{n-n}} \leq [\sigma]. \quad (5.10)$$

Проверка прочности по касательным напряжениям заключается в использовании формулы Журавского

$$\tau = \frac{QS_{\text{отсеч.н.}}}{J_x b} \leq [\tau], \quad (5.11)$$

где $[\tau]$ – допускаемое касательное напряжение:

для стали $[\tau] = 0,6 \cdot [\sigma] = 100 \text{ МПа}$;

для дерева $[\tau] = 2 \text{ МПа}$.

Обычно τ невелики и сечение балки подбирают по σ , а затем уже проверяют по τ .

Известные различия имеются также в расчетах балок постоянного по всей длине и переменного поперечного сечения.

Кроме того, следует иметь в виду, что в некоторых (сравнительно редких) случаях расчет на прочность только по наибольшим нормальным

напряжениям, действующим в поперечном сечении балки, недостаточен, и приходится дополнительно производить проверку прочности также по главным напряжениям, возникающим в наклонных сечениях, и по максимальным касательным напряжениям.

5.5. Напряжения при изгибе. Эпюры напряжений

Во всех точках поперечного сечения балки при поперечном изгибе возникают нормальные σ и касательные τ напряжения.

Для произвольной точки поперечного сечения с координатами (x,y) напряжения определяются по формулам

$$\sigma = \frac{M_x}{J_x} y; \quad (5.12)$$

$$\tau = \frac{Q S_x^{\text{отсеч.ч.}}}{J_x b}, \quad (5.13)$$

где M_x , Q – внутренние усилия в «опасном» сечении (наибольшие по абсолютной величине значения внутренних силовых факторов);

y – координата точки поперечного сечения, в котором определяется напряжение;

b – ширина сечения в месте определения касательных напряжений;

J_x – главный центральный момент инерции всей площади поперечного сечения (относительно оси X);

$S_x^{\text{отсеч.ч.}}$ – статический момент относительно оси X отсеченной части поперечного сечения: $S_x^{\text{отсеч.ч.}} = F_x^{\text{отсеч.ч.}} * X_C$ (X_C – абсцисса центра тяжести отсеченной части);

Формула Журавского (5.13) была получена для узких прямоугольных сечений ($h/b > 2$), на практике ее можно использовать для определения τ любых сечений, но при условии, что силовая плоскость перпендикулярна одной из главных центральных осей.

Анализируя формулы (5.12), (5.13), можно сделать следующие выводы:

1. Напряжения, определяемые в произвольных точках поперечного сечения, не зависят от координаты X (от абсциссы), а зависят от ординаты точки Y, т.е. меняются по высоте сечения.
2. Если $y=0$, то и $\sigma=0$. Геометрическое место точек поперечного сечения балки, в котором $\sigma=0$, называется нейтральной осью (нулевой линией).
3. Максимальные нормальные напряжения возникают в наиболее удаленных то нейтральной линии точках (с увеличением координаты y

нормальные напряжения увеличиваются). Изменяются σ по линейному закону.

4. Касательные напряжения достигают наибольших значений в области нейтральной линии (там, где $S_{хотсеч.ч.}$ максимально), а в наиболее удаленных от нейтральной оси точках обращаются в ноль.

График распределения нормального и касательного напряжений по высоте поперечного сечения называется эпюрой.

Для сплошного поперечного сечения эпюры распределения σ и τ выглядят следующим образом (рис. 5.4).

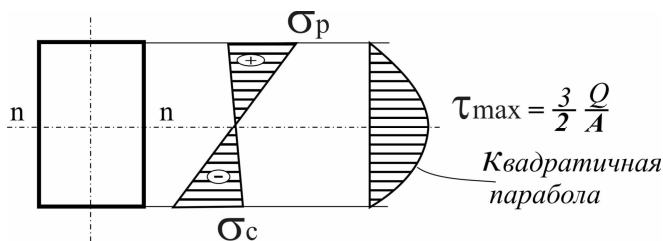


Рис. 5.4

Для поперечного сечения с «переходами» от стенки в полку (коробка, двутавр, швеллер) эпюры распределения σ и τ выглядят следующим образом (рис. 5.5).

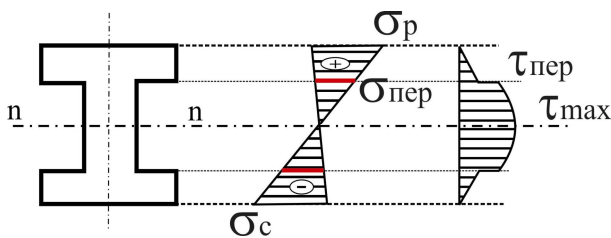


Рис. 5.5

$$\tau_{\text{перехода}} = \frac{QS_{x_{\text{полки}}}}{J_x b};$$

$$\sigma_{\text{перехода}} = \frac{M_x}{J_x} y_{\text{перехода}}.$$

5.6. Анализ напряженного состояния при изгибе

В случае, когда σ и τ значительны, или в случае, когда в поперечном сечении балки несплошного поперечного сечения необходимо про-

верить прочность в точке перехода от стенки к полке (где присутствуют и σ , и τ), определяют эквивалентное напряжение по III или IV гипотезам прочности

$$\sigma_{\text{экв. III}} = \sqrt{\sigma_{\text{пер}}^2 + 4\tau_{\text{пер}}^2} \leq [\sigma];$$

$$\sigma_{\text{экв. IV}} = \sqrt{\sigma_{\text{пер}}^2 + 3\tau_{\text{пер}}^2} \leq [\sigma]$$

Проверка по $\sigma_{\text{экв}}$ называется полной проверкой прочности или проверкой по главным напряжениям.

5.7. Рациональное расположение сечений при изгибе

Обычно для балки из пластичного материала используют сечения, симметричные относительно нейтральной линии (круг, двутавр, прямоугольник), поскольку для них расчетные $\sigma_p = \sigma_c$.

Для рационального расположения сечения при изгибе балки из пластичного материала следует стремиться к тому, чтобы при данной затрате материала момент сопротивления был максимален.

При заданной длине балки ее масса прямо пропорциональна площади поперечного сечения. Следовательно, чем больше W_x и меньше A , тем рациональнее форма сечения балки.

Для количественной оценки рациональности сечения удобна безразмерная характеристика – удельный осевой момент сопротивления

$$w_x = \frac{W_x}{\sqrt{A^3}}. \quad (5.14)$$

Например, для круга $w_x=0,141$; для двутавра № 10 $w_x=0,955$.

При изменении положения сечения по отношению к действующей нагрузке прочность балки существенно изменяется, хотя площадь сечения остается неизменной.

Сечение надо располагать таким образом, чтобы силовая линия совпадала с той из главных осей, относительно которой момент инерции минимален, т.е. следует стремиться к тому, чтобы изгиб балки происходил в плоскости его наибольшей жесткости.

Для балок, изготовленных из хрупких материалов, различно сопротивляющихся растяжению и сжатию, целесообразно применять сечения, несимметричные относительно нейтральной линии, например, тавровое, несимметричное двутавровое, П-образное.

При этом необходимо располагать сечение таким образом, чтобы большая часть балки находилась в сжатой зоне.

Для рационального использования материала сечения должно соблюдаться условие

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{\sigma_p}{\sigma_c}. \quad (5.15)$$

Если $\frac{y_1}{y_2} > \frac{\sigma_p}{\sigma_c}$, опасными являются точки растянутой зоны, максимально удаленные от нейтральной линии, и для расчета на прочность достаточно использовать условие прочности для растянутых волокон.

При $\frac{y_1}{y_2} < \frac{\sigma_p}{\sigma_c}$ достаточно выполнить расчет по условию прочности для сжатых волокон.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
Задачи и методы сопротивления материалов	3
1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ	3
1.1. Гипотезы СМ, реальный объект и расчетная схема	3
1.2. Классификация сил. Метод сечений	5
1.3. Порядок построения эпюр	8
1.4. Напряжения и деформации	8
1.5. Закон Гука и принцип независимости действия сил	10
2. РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ	11
2.1. Внутренние силы и напряжения	11
2.2. Удлинение стержня и закон Гука	13
2.3. Пример расчета (задача № 1)	14
2.4. Потенциальная энергия деформации	16
2.5. Статически определимые и статически неопределимые системы	18
2.6. Напряженное и деформированное состояния при растяжении и сжатии	19
2.7. Основные механические характеристики материалов	22
2.8. Общие принципы расчета конструкций на прочность и жесткость	24
3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЙ БРУСА	26
3.1. Статические моменты сечения	26
3.2. Моменты инерции сечения	27
3.3. Главные оси и главные моменты инерции	30
3.4. Пример расчета (задача № 2)	31
4. КРУЧЕНИЕ	35
4.1. Основные понятия. Крутящий момент	35
4.2. Кручение вала круглого поперечного сечения	37
4.3. Расчет вала круглого поперечного сечения на прочность и жесткость	38
5. ИЗГИБ	41
5.1. Общие понятия	41
5.2. Внутренние усилия	41
5.3. Основные дифференциальные зависимости в теории изгиба	44
5.4. Расчеты на прочность при изгибе	46
5.5. Напряжения при изгибе. Эпюры напряжений	48
5.6. Анализ напряженного состояния при изгибе	49
5.7. Рациональное расположение сечений при изгибе	50