



Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова»

Кафедра горных машин и транспортно-технологических комплексов

**К.В. Исмагилов**  
**В.С. Великанов**

# **ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ**

Конспект лекций

Магнитогорск  
ФГБОУ ВПО «МГТУ»  
2011

УДК 681.5.011. (075.8): 622.1  
ББК 33.1: 32

**Рецензенты:**

Заслуженный работник высшей школы Российской Федерации,  
действительный член Академии инженерных наук им. А.М.Прохорова,  
доктор технических наук, профессор,  
ФГБОУ ВПО «Магнитогорский государственный технический  
университет им. Г.И. Носова»

**Б. Н. Парсункин**

Директор Магнитогорского филиала НПО «Приводная техника»,  
кандидат технических наук, доцент

**Е. Я. Омельченко**

**Исмагилов К.В., Великанов В.С.**

Теория автоматического управления [Электронный ресурс]: Конспект лекций / Кагарман Валиахметович Исмагилов, Владимир Семенович Великанов; ФГБОУ ВПО «МГТУ». – Электрон. текстовые дан. (1,72 Мб). – Магнитогорск: ФГБОУ ВПО «МГТУ», 2011. – 1 электрон. опт. диск (CD-R). – Систем. требования: IBM PC, любой, более 1 GHz; 512 Мб RAM; 10 Мб HDD; MS Windows XP и выше; Adobe Reader 7.0 и выше; CD/DVD-ROM дисковод; мышь. – Загл. с контейнера.

Приведены основные понятия, термины и определения теории и практики автоматического управления; общая функциональная схема систем автоматического управления, принципы построения и классификация САУ.

Изложены методы математического описания линейных, нелинейных, импульсных и оптимальных систем автоматического управления. Приведены методы получения передаточных функций и структурных преобразований САУ, исследования САУ на устойчивость алгебраическими и частотными критериями. Рассмотрены показатели качества переходного процесса и способы улучшения качества САУ.

Даны основные методы расчета и анализа нелинейных и импульсных систем, а также общие сведения об оптимальных, экстремальных и адаптивных системах.

УДК 681.5.011. (075.8): 622.1  
ББК 33.1: 32

© Исмагилов К.В., Великанов В.С., 2011.  
© ФГБОУ ВПО «МГТУ», 2011.

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	6
1. ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ И КЛАССИФИКАЦИЯ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ.....	8
1.1. Основные понятия ТАУ. Функциональная схема САУ .....	8
1.2. Воздействия в САУ. Связи в САУ .....	10
1.3. Принципы построения САУ .....	12
1.4. Классификация САУ .....	16
2. МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОПИСАНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ И СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ .....	22
2.1. Общие свойства элементов САУ .....	22
2.2. Статические характеристики элементов .....	23
2.3. Статические характеристики разомкнутых САУ .....	25
2.4. Статические характеристики замкнутых САУ .....	30
2.5. Динамика САУ .....	34
2.6. Передаточные функции САУ .....	35
2.7. Структурная схема САУ .....	38
2.8. Временные функции САУ .....	38
2.9. Частотные характеристики САУ .....	42
3. ТИПОВЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗВЕНЬЯ.....	46
3.1. Классификация динамических звеньев .....	46
3.2. Безынерционное звено.....	47
3.3. Апериодическое звено первого порядка .....	50
3.4. Звено второго порядка.....	56
3.5. Дифференцирующее звено .....	67
3.6. Интегрирующее звено (астатическое, нейтральное).....	74
3.7. Запаздывающее звено (звено чистого запаздывания).....	79
4. ПРИМЕРЫ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ ЭЛЕМЕНТОВ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ.....	81
4.1. Двигатель постоянного тока независимого возбуждения.....	81
4.2. Генератор постоянного тока независимого возбуждения.....	86
4.3. Тиристорный преобразователь.....	89
4.4. Трехфазный асинхронный двигатель .....	90
4.5. Магнитный усилитель .....	97
4.6. Дифференцирующий трансформатор .....	99
4.7. Тахогенератор.....	100
5. ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ САУ.....	101
5.1. Передаточные функции разомкнутой САУ .....	101
5.2. Передаточные функции замкнутой САУ .....	103
5.3. Связь между передаточными функциями замкнутой .....	105
5.4. Передаточная функция САУ по ошибке .....	106

5.5. Структурные преобразования линейных САУ.....	106
6. УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ САУ .....	114
6.1. Общие сведения .....	114
6.2. Критерий Раussa .....	117
6.3. Критерий Гурвица .....	118
6.4. Принцип аргумента .....	119
6.5. Критерий Михайлова.....	121
6.6. Критерий Найквиста.....	122
6.7. Критерий устойчивости по обратной АФЧХ .....	128
6.8. Критический (предельный) коэффициент передачи разомкнутой ... системы.....	129
6.9. Суждение об устойчивости САУ по логарифмическим частотным характеристикам разомкнутой САУ .....	131
6.10. Приближенный способ построения логарифмических частотных характеристик одноконтурных систем .....	133
6.11. Метод Д – разбиения пространства коэффициентов характеристического уравнения .....	135
6.12. Д – разбиение в плоскости одного параметра.....	136
6.13. Структурно-неустойчивые САУ.....	139
7. ИССЛЕДОВАНИЕ КАЧЕСТВА САУ .....	140
7.1. Показатели качества САУ .....	140
7.2. Методы исследования качества САУ.....	143
7.3. Оценка качества по распределению корней.....	143
7.4. Диаграмма Вышнеградского .....	146
7.5. Метод интегральных оценок качества .....	149
7.6. Частотные методы оценки показателей качества .....	151
7.7. Определение показателей качества по вещественной частотной характеристике замкнутой САУ .....	154
7.8. Построение кривой переходного процесса по вещественной частотной характеристике замкнутой САУ .....	157
8. СПОСОБЫ УЛУЧШЕНИЯ КАЧЕСТВА И ОСНОВЫ СИНТЕЗА ЛИНЕЙНЫХ САУ .....	160
8.1. Общие сведения.....	160
8.2. Назначение и включение корректирующих устройств.....	161
8.3. Типовые корректирующие устройства.....	162
8.4. Последовательная коррекция .....	163
8.5. Параллельная коррекция .....	167
8.6. Синтез корректирующих устройств методом логарифмических частотных характеристик.....	175
8.7. Расчет регуляторов непрерывного действия.....	181
8.8. Основы расчета систем подчиненного регулирования.....	189

9. НЕЛИНЕЙНЫЕ САУ .....	203
9.1. Общие сведения .....	203
9.2. Типовые НЛН элементы .....	204
9.3. Метод фазового пространства .....	206
9.4. Метод гармонической линеаризации .....	213
9.5. Исследование устойчивости нелинейных САУ методом гармонической линеаризации .....	220
10. ИМПУЛЬСНЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ .....	221
10.1. Общие сведения .....	221
10.2. Понятие о дискретных (решетчатых) функциях .....	224
10.3. Уравнения и передаточные функции ИСАУ .....	226
10.4. Частотные характеристики ИСАУ .....	227
10.5. Устойчивость ИСАУ .....	228
10.6. Построение переходного процесса в ИСАУ .....	230
11. ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ И АДАПТИВНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ .....	231
11.1. Общая постановка задач оптимального управления .....	231
11.2. Системы, оптимальные по быстродействию .....	235
11.3. Адаптивные системы управления .....	242
11.4. Экстремальные системы управления .....	245
ТЕСТЫ ДЛЯ САМОАТТЕСТАЦИИ И АТТЕСТАЦИИ СТУДЕНТОВ .	250
ПО ТЕОРИИ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ .....	250

## ВВЕДЕНИЕ

Задачи по управлению тем или иным явлением или процессом, возникающие в практической деятельности человека, обширны и многообразны.

Сравнительно недавно сформировалась идея единства законов управления в живом и неживом объекте, социальной или технической системе. На основе этой идеи возникла **кибернетика** – наука об управлении. Раздел кибернетики, занимающийся вопросами управления в технических системах, называют технической кибернетикой.

Основными разделами технической кибернетики являются теория автоматического управления (ТАУ), теория функционирования элементов систем управления (датчиков, регуляторов и т.д.), исследование операций, системотехника, теория игр и др.

ТАУ – научная дисциплина, которая выявляет общие закономерности работы систем автоматического управления (САУ) различной физической природы и на основе этих закономерностей разрабатывает принципы построения и расчета высококачественных САУ.

### Краткий исторический обзор

В 1765 г Ползунов И.И. разработал САУ питанием водой парового котла; в 1766 г Джеймс Уатт создал центробежный регулятор скорости паровой машины; в 1854 г Константинов К.И. предложил электромагнитный регулятор скорости. С разработкой регуляторов развивалась и наука «автоматика». В 1823 г проф. Чижов Д.С. (С.-Петербургский ун-т) опубликовал работу «Теория регуляторов», в 1871г вышла в свет работа Чебышева П.А. «О центробежном регуляторе».

Профессор Петербургского технологического института И. А. Вышнеградский считается одним из основоположников ТАУ - в своих работах «Об общей теории регуляторов» и «О регуляторах прямого действия» (1876-78 гг.) он обобщил накопленный опыт создания и эксплуатации регуляторов и разработал инженерные методы их расчета как единой динамической системы.

Словацкий ученый Стодола впервые ввел понятие «постоянная времени». Раусс и Гурвиц разработали алгебраические критерии устойчивости, А.М. Ляпунов решил «Общую задачу об устойчивости движения», Чебышев П.Л. и М.Е. Жуковский создали математическую теорию САУ. Особо следует выделить работы Михайлова А.В., создавшего основы частотных методов исследования САУ и предложившего классификацию звеньев по динамическим свойствам.

Развитию классической теории и практики автоматического управления горными машинами, комплексами и технологическими процессами горных предприятий способствовали работы Волотковского С. А., Акутина Г. К., Тропа А. Е., Блажкина А. Г., Ломакина Я. П., Лукаса В. А. и др.

Основными методами ТАУ является математическое моделирование, теория дифференциальных уравнений, операционное исчисление (преобразования Лапласа) – передаточные функции, спектральный анализ (Фурье), методы оптимизации и др.

Автоматизация - это автоматическая сигнализация, автоматический контроль, автоматическая защита и блокировка, автоматическое регулирование, автоматическое управление.

Автоматизация позволяет вести процесс в оптимальном режиме с высокой точностью, освободить человека от тяжелого, опасного и монотонного труда, снизить аварии и простои, повысить общую культуру производства, увеличить производительность и эффективность производства, уменьшить себестоимость продукции.

Объектами автоматизации в горном производстве являются электрические, гидравлические или пневматические приводы горных машин и комплексов, а также технологические процессы открытых и подземных горных работ и обогащения полезных ископаемых.

ТАУ базируется на следующих дисциплинах:

- физика (электричество, магнетизм, физика твердого тела, электродинамика);

- математика (матрицы, линейная алгебра, дифференциальные уравнения линейные и нелинейные, разностные уравнения, преобразования Лапласа, Фурье, дискретные преобразования Лапласа, функции комплексного переменного, интегрирование функций комплексного переменного (формула Коши), гармоническая линеаризация нелинейностей, элементы теории вероятностей и математической статистики, спектральный анализ);

- теоретические основы электротехники (все разделы);

- электрические машины (все разделы);

- электрические аппараты и средства автоматизации (все разделы);

- промышленная электроника и преобразовательная техника.

В свою очередь, ТАУ является теоретической базой для курсов «Автоматизированный электропривод машин и установок горных производств» и « Автоматизация процессов горных производств».

Конспект лекций составлен в соответствии с Государственным образовательным стандартом РФ для студентов специальностей «Электрификация и автоматизация горных работ» и «Горные машины и оборудование».

# 1. ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ И КЛАССИФИКАЦИЯ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

## 1.1. Основные понятия ТАУ. Функциональная схема САУ

Всякий технологический процесс характеризуется совокупностью каких-либо физических величин. Для правильного протекания хода процесса эти величины должны поддерживаться постоянными во времени или изменяться по некоторому закону.

Физические величины, характеризующие состояние объекта управления ОУ (технологического процесса), приведены на рис. 1. 1.

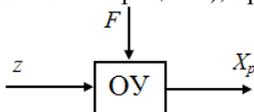


Рис. 1. 1. Общее обозначение объекта управления

Осуществление совокупности целенаправленных воздействий, выбранных из множества возможных, называется **управлением**.

Операция управления может осуществляться человеком (**ручное местное или дистанционное**) или специальным техническим устройством без непосредственного участия человека (**автоматическое управление (АУ) или регулирование (АР)**).

Операция управления, задачей которой является автоматическое поддержание в течение определенного промежутка времени с требуемой точностью заданное состояние технологического процесса или обеспечение хода этого процесса по заранее заданному или задаваемому в зависимости от каких-либо объективных внешних условий закону, называется **автоматическим регулированием (АР)**.

Техническое устройство, в котором происходит процесс, подлежащий управлению или регулированию, называется **объектом управления (ОУ) или регулированию (ОР)**.

Техническое устройство, предназначенное для осуществления операции управления без непосредственного участия человека, называется **автоматическим управляющим устройством (АУУ) или автоматическим регулирующим устройством (АРУ)**.

Совокупность **ОУ** и **АУУ (АРУ)** называется **системой автоматического управления (ОУ + АУУ = САУ)** или системой автоматического регулирования (ОУ + АРУ = САР).

Параметр технологического процесса, значение которого необ-

ходимо автоматически поддерживать или закономерно изменять во времени, называется **регулируемым параметром РмП ( $X_p$ )**.

Для обеспечения автоматического выполнения технологического процесса в САУ вводится извне какая-либо физическая величина, неизменная во времени или меняющаяся по нужному закону и которая обычно называется **заданием ( $X_o$  или  $X_3$ )**.

Технологический параметр, который непосредственно вырабатывается АРУ в ходе процесса регулирования для изменения состояния ОР, называется **регулирующим параметром РцП ( $z$ )**.

На САУ действуют факторы, нарушающие требуемую функциональную связь между  $X_o$  и  $X_p$  и называемые **возмущающими воздействиями** (нагрузка ОУ, изменение внешних условий – температуры, давления, влажности и т. д., изменение характеристик элементов во времени, нестабильность напряжения источников питания и т.п.).

Возмущающее воздействие, сильно влияющее на процесс управления и легко поддающееся измерению, называется **главным возмущающим воздействием  $F$** , остальные относятся к помехам  $f_i$ .

САУ любой сложности и физической природы можно представить в виде совокупности элементов, выполняющих определенные функции со связями между ними, т.е. **функциональной схемы САУ**

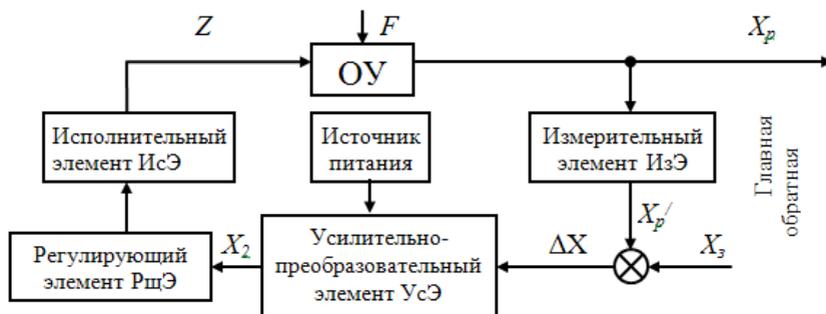


Рис. 1. 2. Общая функциональная схема САУ

Разность между заданием и измеренным значением регулируемой величины  $\Delta X = X_o - X_p' = X_3 - \kappa_u X_p$  называется рассогласованием, ошибкой регулирования, отклонением  $X_p$  от задания  $X_o$ .

В реальных САУ один и тот же элемент может выполнять различные функции, и наоборот, одна функция может выполняться несколькими физическими элементами.

## 1.2. Воздействия в САУ. Связи в САУ

Воздействия в САУ бывают:

- регулярные (детерминированные) и случайные;
- внутренние ( $z, \Delta X$ ), внешние ( $F, X_o$ , питание).

Управляемая величина  $X_p$  является выходной величиной ОУ и зависит от  $F$  (главного возмущающего внешнего воздействия) и  $z$  (управляющего внутреннего воздействия). Возмущающие воздействия  $F$  в свою очередь бывают координатными (которые обычно сами являются характеристиками состояния внешней среды или выходными воздействиями других технических устройств, не являющихся частью рассматриваемой САУ) и параметрическими (которые проявляются в изменениях параметров объекта или элементов САУ из-за нестабильности характеристик вследствие «старения» элементов, непостоянства напряжения источника питания и т.д.).

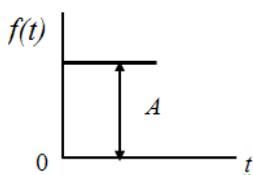
Процессы, происходящие в САУ, заключаются в преобразовании сигналов. Сигналы в САУ могут передаваться в прямом направлении от входа САУ (от  $X_3 (X_p)$ ) к выходу ( $X_p$ ), т.е. **прямая связь**, и в обратном направлении с выхода элемента (группы элементов) на вход – **обратная связь**. Обратная связь бывает главной и (или) местной.

### Типовые воздействия

Для исследования элементов и САУ следует выбирать такие типовые (стандартные) воздействия, которые соответствовали бы реальным внешним воздействиям на элементы и САУ.

**Ступенчатое воздействие** – внезапный сброс или наброс нагрузки, включение или отключение напряжения и т.п.

График и математическое выражение и ступенчатой функции представлены ниже.



$$f(t) = A(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ A & \text{при } t \geq 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

Если  $A = 1$ , то это **единичное ступенчатое воздействие  $1(t)$** .

Рис. 1. 3. График ступенчатой функции

**Импульсное воздействие** – воздействие определенной величины  $\Delta$  и бесконечно малой длительности  $\Delta t$  при условии  $\Delta \cdot \Delta t = A = const$ .

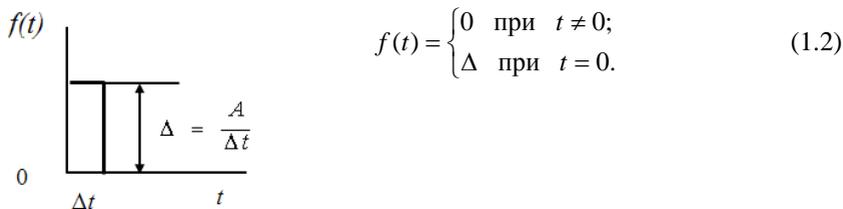


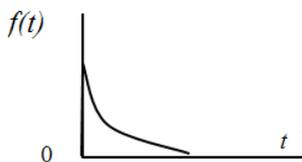
Рис. 1. 4. График импульсной функции

Если  $A = 1$ , то воздействие называется **единичным импульсным воздействием** или **дельта – функцией**  $\delta(t)$ , причём  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$ . (1.3)

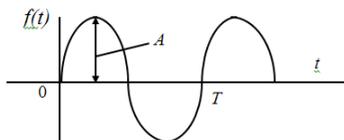
С другой стороны

$$\delta(t) = \frac{d1(t)}{dt} \quad (1.4)$$

В реальности, хотя передний фронт сигнала может быть абсолютно крутым, задний фронт вследствие явления рассеяния имеет вид падающей кривой.



**Гармоническое синусоидальное воздействие**



$$f(t) = A \sin \omega t, \quad (1.5)$$

$$\omega = 1/T. \quad (1.6)$$

Рис. 1. 5. График гармонической синусоидальной функции

**Степенные функции времени:**

$$\text{Линейная } f(t) = gt. \quad (1.7)$$

$$\text{Квадратичная } f(t) = gt^2. \quad (1.8)$$

### 1.3. Принципы построения САУ

САУ любой сложности может быть построена по одному из трех принципов:

1. По отклонению регулируемой величины  $X_p$  от задания  $X_0$ , это так называемый компенсационный принцип Ползунова – Уатта.
2. По возмущающему воздействию, это так называемый принцип Понселе – Чиколева.
3. Комбинированный принцип.

1. САУ, построенная по компенсационному принципу. Рассмотрим работу такой САУ по принципиальной схеме системы автоматического управления напряжением генератора постоянного тока независимого возбуждения (рис. 1.6).

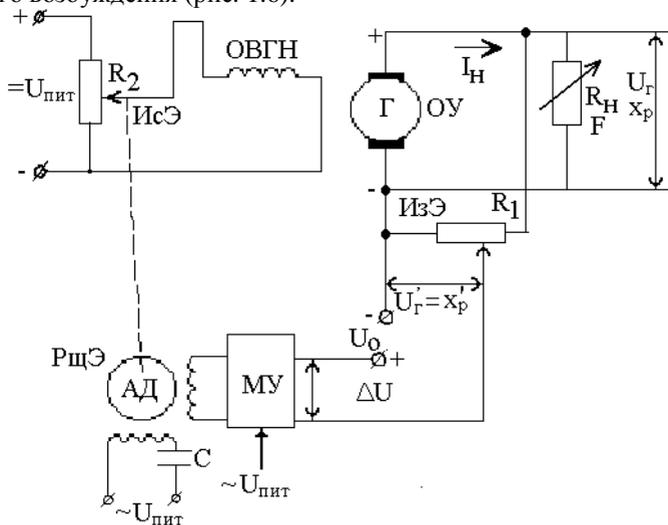


Рис. 1.6. Система автоматического управления напряжением генератора постоянного тока независимого возбуждения

Здесь объектом управления ОУ является генератор постоянного тока, выходное напряжение  $U_r$  которого является регулируемым параметром  $x_p$ . Регулирование напряжения генератора осуществляется изменением ампервитков обмотки независимого возбуждения, зависящих от положения движка делителя напряжения  $R_2$ , т.е. исполнительным эле-

ментом является  $R_2$ , а его выходное напряжение, определяющее ампервитки обмотки независимого возбуждения генератора ОВГН, является регулирующим воздействием  $z$ .

Правильному протеканию процесса стабилизации напряжения генератора при неизменных ампервитках обмотки независимого возбуждения мешает главное возмущающее воздействие  $F$  – ток нагрузки  $I_n$ , который в свою очередь меняется из-за изменения сопротивления нагрузки  $R_n$  – чем больше ток нагрузки, тем больше падение напряжения во внешней цепи генератора и тем меньше напряжение генератора  $U_G$ . Наоборот, при снижении тока нагрузки напряжение генератора увеличивается. И то, и другое отрицательно сказывается на работе электроприемников, поэтому желательно поддерживать напряжение генератора стабильным.

Регулирующим элементом является асинхронный серводвигатель АД, который в данном случае вырабатывает пропорциональный закон управления, так как скорость вращения вала серводвигателя, а следовательно, и скорость и величина перемещения движка потенциометра  $R_1$  прямо пропорциональна напряжению на обмотке управления, подаваемого с магнитного усилителя МУ (усилительного элемента).

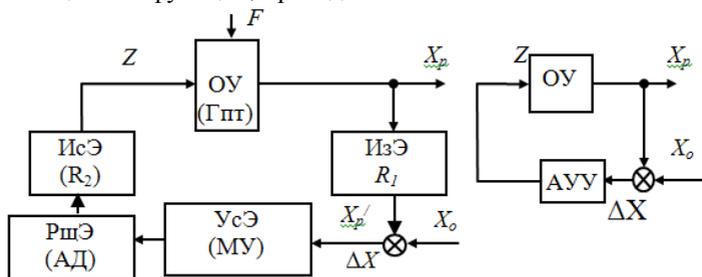
В свою очередь, МУ вырабатывает напряжение, пропорциональное напряжению на своем входе, равному отклонению регулируемой величины от задания  $\Delta U = U_o - U'_G$ , или в общем виде,  $\Delta X = X_o - X'_p$  ( $X'_p \equiv X_p$ ), т.е. измеренное значение регулируемой величины прямо пропорционально самой величине  $X'_p = \kappa_u X_p$ ). Элементом сравнения является часть схемы, в которой происходит вычитание измеренного с помощью потенциометра  $R_1$  значения  $U'_G$  регулируемой величины  $U_G$  от задания  $U_o$ . В данном случае напряжение задания считается неизменным.

В нормальном состоянии процесса при номинальной нагрузке и номинальном возбуждении движков потенциометра  $R_2$  находится в среднем положении, а напряжение генератора  $U_G$  равно номинальному значению, при этом отклонение регулируемой величины от задания равно нулю  $\Delta U = U_o - U'_G = 0$ .

При увеличении тока нагрузки напряжение генератора уменьшается, пропорционально уменьшается его измеренное значение, поэтому на выходе элемента сравнения появляется положительный сигнал ошибки  $\Delta U = U_o - U'_G > 0$ . Этот сигнал усиливается магнитным усилителем и подается на управляющую обмотку серводвигателя, который перемещает движок потенциометра  $R_2$  вверх. В результате начинает увеличи-

ваться напряжение, следовательно, и ампервитки обмотки возбуждения генератора и его выходное напряжение  $U_{\Gamma}$  до тех пор, пока измеренное значение  $U'_{\Gamma}$  не станет равным напряжению задания  $U_o$ . Тогда серводвигатель останавливается, движок потенциометра фиксируется в этом новом положении и наступает равновесное состояние системы до нового изменения нагрузки. При уменьшении тока нагрузки процесс управления происходит наоборот.

Функциональная схема САУ с указанием физических элементов, выполняющих эти функции, приведена ниже.



### 1.7 Общая функциональная схема САУ по первому принципу

Как видно из функциональной схемы САУ, система, построенная по компенсационному принципу, получается замкнутой одоктурной, так как выход всей системы через измерительный элемент ИзЭ подается обратно на ее вход.

2. САУ, построенная по возмущению. Рассмотрим такую САУ на аналогичном объекте по принципиальной схеме системы автоматического управления напряжением генератора, но с помощью дополнительной последовательной обмотки возбуждения.

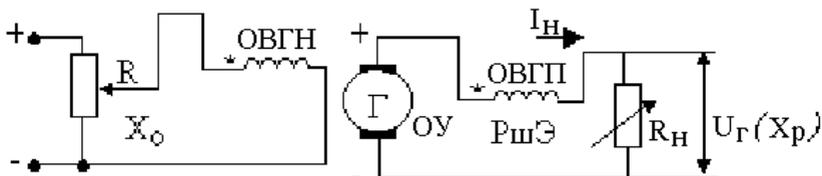
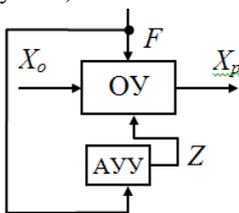


Рис. 1.8. Принципиальная схема САУ, построенной по возмущению

Как видно из схемы, обмотки независимого ОВГН и последова-

тельного ОВГП возбуждения генератора включены согласно, т. е. общие ампервитки возбуждения равны сумме ампервитков этих двух обмоток. Обмоткой независимого возбуждения создается основная, независимая от нагрузки, часть ампервитков возбуждения генератора. Можно рассчитать ампервитки ОВГП так, чтобы при номинальной нагрузке суммарные ампервитки обеспечат номинальное напряжение генератора. При увеличении тока нагрузки напряжение генератора снижается, но одновременно увеличение тока нагрузки увеличивает ампервитки ОВГП, следовательно, и суммарные ампервитки генератора. Это приводит к восстановлению напряжения генератора, степень восстановления определяется соотношением ампервитков ОВГН и ОВГП.

Функциональная схема этой САУ приведена ниже, откуда ясно видно, что САУ построенная по возмущению, получается разомкнутой, так как выходная (регулируемая) величина не подается на вход САУ.



1.9. Функциональная схема САУ по возмущению

### 3. САУ, построенная по комбинированному принципу

Эта САУ получается путем объединения двух предыдущих систем, при этом вначале действует часть САУ, построенная по возмущению (ОВГП) как более быстродействующая. В дальнейшем вступает в работу часть САУ, построенная по отклонению регулируемой величины от задания.

Функциональная схема САУ приведена ниже, откуда видно, что САУ получается двухконтурной, замкнутой.

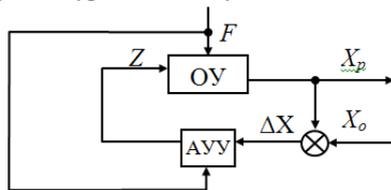


Рис. 1.10. САУ, построенная по комбинированному принципу

## 1.4. Классификация САУ

По действию измерительного элемента (ИзЭ) на регулирующий элемент (РцЭ) или по наличию вспомогательной энергии

1. САУ прямого действия, когда измерительный элемент ИзЭ имеет достаточную мощность для приведения в действие регулирующей элемент РцЭ вместе с исполнительным элементом ИсЭ. Схема САУ прямого действия приведена ниже.

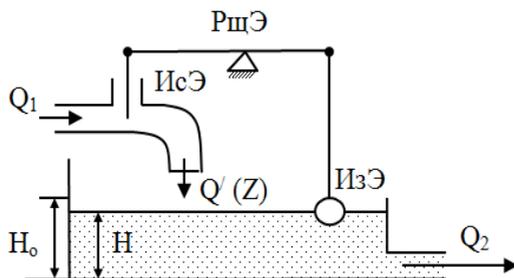


Рис. 1.11. Схема САУ прямого действия

Пусть из внешней магистрали по трубопроводу подается постоянное количество воды  $Q_1$ , а подача воды в резервуар регулируется рычагом с задвижкой – регулирующим и исполнительными элементами.

Как видно из схемы САУ, при увеличении расхода воды  $Q_2$  уровень воды понижается, поплавок движется вниз, противоположный конец рычага с задвижкой перемещается вверх, увеличивая подачу воды  $Q'$  в резервуар, что повышает уровень воды. Однако в системе всегда есть отклонение регулируемой величины от задания  $H_0 - H = \Delta H = \Delta X$ , называемое ошибкой регулирования.

- Достоинства:
1. Простота схемы системы автоматического управления.
  2. Нет необходимости в дополнительных источниках энергии.
  3. Высокое быстродействие САУ.

Недостатки:

1. Небольшая чувствительность из-за мощного поплавка.
2. Невысокое качество регулирования, так как всегда имеется ошибка регулирования.

2. САУ непрямого действия (с использованием электрической, гидравлической, пневматической энергии или комбинированной). Схема САУ непрямого (косвенного) действия приведена ниже.

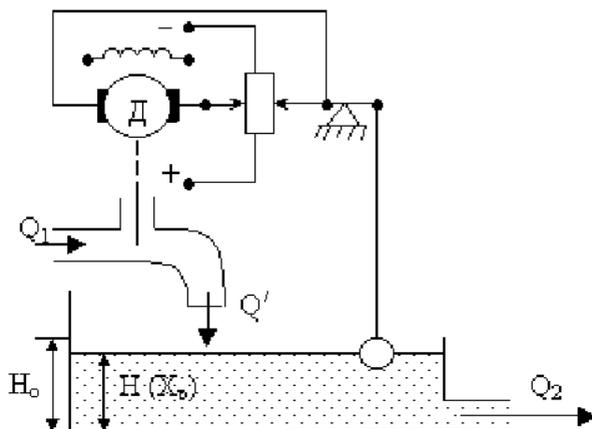


Рис. 1.12. Схема САУ непрямого действия

Для повышения чувствительности поплавок его делают меньших размеров, но при этом одновременно снижается его мощность, поэтому необходимо использовать усилительный элемент. Здесь серводвигатель выполняет функции как усилительного, так и регулирующего элемента.

Достоинства: 1. Высокая чувствительность; 2. Высокая точность регулирования – возникшая ошибка регулирования обрабатывается до нуля.

Недостатки: 1. САУ получается более сложной; 2. Требуется дополнительный источник энергии; 3. Система склонна к колебаниям, так как движок потенциометра от поплавка по инерции может «проскочить» через нейтральное положение напротив неподвижного движка от серводвигателя.

*По способу формирования задающего воздействия*

1. Система стабилизации – задание  $X_0$  длительное время остается неизменным, тогда  $X_p$  так или иначе стабилизируется при изменении возмущающего воздействия. В качестве примера можно указать рассмотренные выше системы автоматического регулирования уровня воды в резервуаре.

2. Программные системы – задание изменяется во времени по заранее известной программе, тогда  $X_p$  изменяется по тому же закону. Программной системой является, например, автоматическая система управления шахтной подъемной машиной для реализации принятой диаграммы скорости клетки.

3. Следящие системы – задание изменяется по заранее неизвестному закону (например, слежение за самолетом) или известному закону (заложеному, например, в копиере), поэтому  $X_p$  изменяется по тому же закону. Следящие системы применяются также для дистанционной передачи показаний измерительных устройств.

*По виду сигнала в САУ или по характеру управления во времени*

1 САУ непрерывного действия.

В этих системах все сигналы, в том числе и регулирующее воздействие, существуют непрерывно во времени.

2. САУ дискретного действия.

В этих системах регулирующее воздействие вырабатывается в определенные промежутки времени:

2.1. Релейные системы, у которых регулирующее воздействие вырабатывается лишь при достижении ошибкой регулирования определенной величины, на которую реагирует релейный элемент – пока ошибка регулирования меньше параметра срабатывания релейного элемента на объект управления действует прежнее регулирующее воздействие;

2.2. Импульсные системы, у которых имеется элемент, преобразующий непрерывный во времени сигнал в дискретный, т. е. осуществляющий квантование сигнала по уровню, по времени, по уровню и времени (совместно).

*По виду регулировочной характеристики или по свойствам в установленном режиме*

1. Статические САУ

Для статической САУ характерно наличие статической ошибки, которая представляет собой разность между заданным значением  $X_p$  и его

текущим значением. Эта разность существует всегда и нужно стремиться к его уменьшению, но без неё САУ становится неработоспособной.

Схема статической системы автоматического регулирования напряжения генератора постоянного тока приведена ниже.

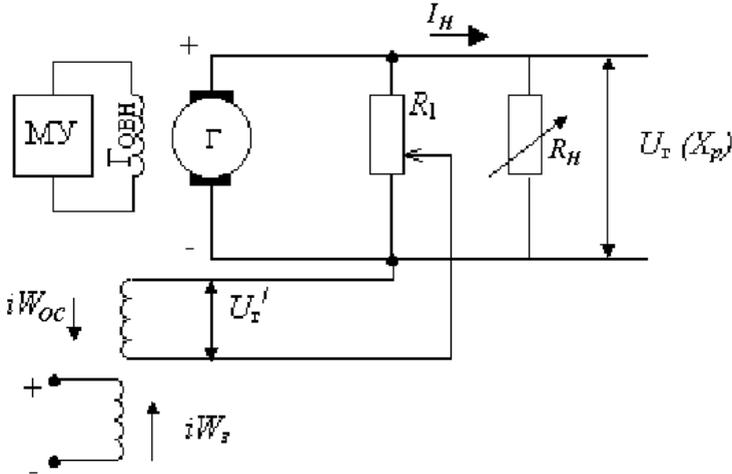


Рис. 1.13. Принципиальная схема статической САУ

Здесь  $U_2 = X_p$  – регулируемый параметр,  $iW_3 = X_o$  – задание,  $iW_{oc}$  – ампервитки обмотки МУ, осуществляющей главную обратную связь по напряжению генератора (ГЛОН).

Ошибка регулирования равна  $\Delta X \equiv U_o - U_\Gamma \equiv iW_3 - iW_{oc}$ . Если  $iW_3 - iW_{oc} = 0$ , то ампервитки обмоток управления и магнитный поток МУ равны нулю, следовательно, напряжение генератора равно нулю и система не работает, т. е. всегда должна быть ошибка.

Нагрузочная (регулирующая) характеристика САУ при  $U_o = const$  имеет вид наклонной прямой, поэтому САУ, в которой  $X_p = f(F)$  называется **статической**.

Обычно в качестве заданного значения  $X_p$  берут то значение, которое соответствует номинальной (или средней) нагрузке

$$X_{p \text{ ном}} \equiv X_o = \frac{X_{p \text{ max}} - X_{p \text{ min}}}{2}. \quad (1.9)$$

Регулировочная (а) и переходная (б) характеристики статической

САУ приведены ниже.

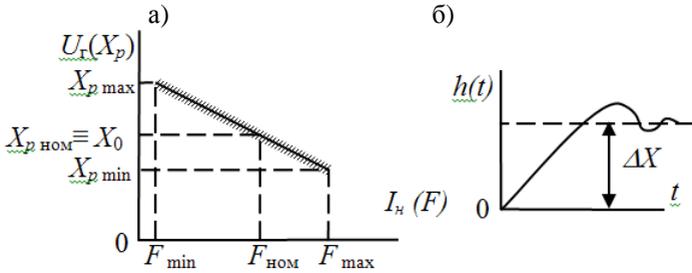


Рис. 1. 14. Регулировочная (а) и переходная (б) характеристики статической САУ

Учитывая, что САУ может иметь зону нечувствительности, регулировочная характеристика будет не линией, а полосой.

Величина статической ошибки может быть положительной или отрицательной по формуле

$$\Delta X_p = X_o - X_p .$$

Наклон регулировочной характеристики определяет **коэффициент неравномерности**

$$S = \frac{X_{p \max} - X_{p \min}}{X_o} \quad (1.10)$$

или **статизм** системы

$$\varepsilon = \frac{1}{1+k} \approx \frac{1}{k} , \quad (1.11)$$

где  $k$ - коэффициент передачи разомкнутой системы.

Чем круче идет регулировочная характеристика, тем больше  $S$  или  $\varepsilon$  и тем хуже качество процесса управления (большая ошибка регулирования  $\Delta X$ ).

Достоинства: 1. Простота схемы. 2. Надежность системы.

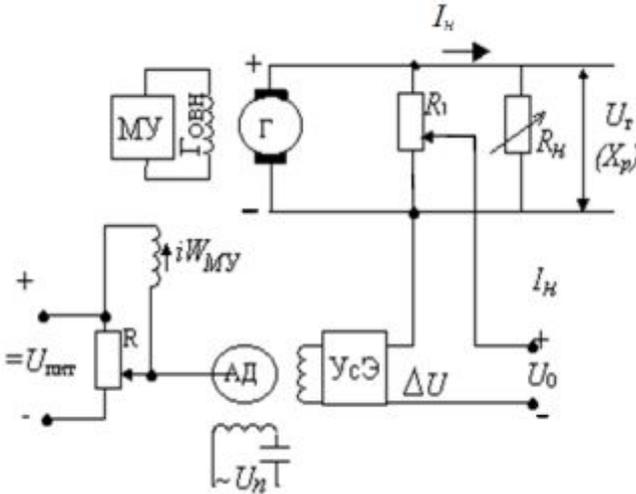
Недостаток: Наличие ошибки в статическом режиме.

## 2. Астатические САУ

Для астатической САУ характерно отсутствие статической ошибки. САУ должна быть построена так, чтобы появившаяся статическая ошибка обрабатывалась регулятором полностью до нуля.

Из-за изменения  $I_H$  ( $R_H$ ) изменяется  $U_T$  по отношению к заданному значению, появляется разность  $\Delta U$  такого знака, который, усиливаясь в УсЭ (АД), который в свою очередь переставляет движок потенциометра  $R$  так, чтобы наступило новое равновесие.

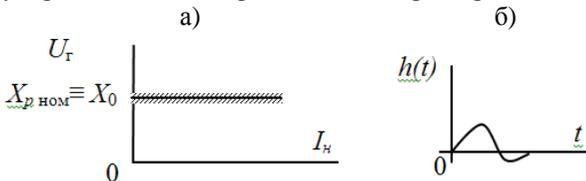
Схема астатической системы автоматического регулирования напряжения генератора постоянного тока показана ниже.



1.15. Принципиальная схема астатической САУ

АД остановится только тогда, когда  $\Delta U = 0$ , поэтому регулировочная характеристика имеет вид прямой, параллельной оси абсцисс, и САУ, у которой  $X_p \neq f(F)$ , называется **астатической**.

Регулировочная (а) и переходная (б) характеристики САУ



Достоинство: Отсутствие статической ошибки.

Недостатки: 1. Сложность САУ; 2. Склонность САУ к колебаниям.

## 2. МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОПИСАНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ И СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

### 2.1. Общие свойства элементов САУ

Любая САУ состоит из совокупности устройств различной физической природы, взаимодействующие и функционирующие по различным законам механики, электроники, гидравлики и т.п. Каждый элемент как-то преобразует входной сигнал, причем в отличие от многих физических систем, в автоматической системе передача сигналов строго ориентирована. Свойство однонаправленности обеспечивается благодаря наличию у одного или нескольких элементов САУ так называемого детектирующего свойства, которое заключается в том, что данный элемент не оказывает обратного воздействия на предыдущий элемент или пропускает сигнал (энергию) только от входа в выходу. Обычно этим свойством обладают измерительные и преобразовательные элементы, т.е. элементы, передающие информационные воздействия. Если в составе САУ нет хотя бы одного элемента, обладающего свойством однонаправленности, САУ является неработоспособной.

Большинство элементов САУ обладает свойством самовыравнивания, например, в электрическом двигателе при увеличении механической нагрузки устанавливается новая пониженная скорость вращения вала.

Элементы САУ обладают способностью накапливать энергию или вещество, мера емкости – постоянная времени.

Анализ процессов и решение задач расчета и проектирования САУ возможны лишь с применением математических методов.

Составление математического описания состоит из принятия исходных допущений, выбора входных и выходных величин, выбора системы отсчета для каждой переменной, применения физического принципа действия элемента в математической форме о закономерностях преобразования энергии или вещества.

Наиболее распространенной формой описания передаточных свойств элементов и САУ является обыкновенное дифференциальное уравнение, называемое уравнением движения (УД)

$$\Phi \left[ X_{\text{вых}}(t), \frac{dX_{\text{вых}}(t)}{dt}, \dots, \frac{d^n X_{\text{вых}}(t)}{dt^n}, X_{\text{вх}}(t), \frac{dX_{\text{вх}}(t)}{dt}, \dots, \frac{d^m X_{\text{вх}}(t)}{dt^m}, t \right] = 0, \quad (2.1)$$

т.е. уравнение, связывающее неизвестную выходную  $X_{\text{вых}}(t)$  и её производные  $n$ -ой степени с известной (заданной) входной  $X_{\text{вх}}(t)$  и её производными ( $m$ ) и независимой переменной, например, временем  $t$ .

УД может быть линейным и нелинейным. В УД, кроме пере-

менных, входят постоянные величины и коэффициенты, зависящие от конструктивных данных элемента. Если  $X_{\text{вых}}(t)$ , кроме  $t$ , зависит ещё и от другой пространственной координаты, то элемент называется элементом с распределенными параметрами, тогда он описывается дифференциальным уравнением в частных производных.

## 2.2. Статические характеристики элементов

Если в УД отсутствуют производные  $X_{\text{вых}}(t)$  и  $X_{\text{вх}}(t)$ , то имеем установившийся (статический) режим элемента или САУ.

Статической характеристикой элемента называют зависимость его выходной величины  $X_{\text{вых}}$  от входной величины  $X_{\text{вх}}$  в установившемся режиме, т.е. с помощью статической характеристики описывают, как данный элемент передает сигнал с входа на выход, или как входной сигнал преобразуется элементом в выходной. Статическая характеристика записывается в виде уравнения (формулы)  $X_{\text{вых}} = f(X_{\text{вх}})$ , например,  $X_{\text{вых}} = k X_{\text{вх}}$ , таблицей соответствия значений или графиком.

По своим статическим характеристикам все элементы САУ можно разделить на 3 группы

1. **устойчивые** (статические) элементы;
2. **нейтральные** (астатические) элементы;
3. **неустойчивые** элементы

К первой группе относятся элементы, в установившемся состоянии которых определенному значению  $X_{\text{вх}}$  соответствует строго определенное значение  $X_{\text{вых}}$ . Например, магнитный усилитель, термopара, генератор, двигатель постоянного тока и т. п.

Из курса «Основы электропривода» («Электрические машины») известно, что для двигателя постоянного тока

$$\omega = \frac{U_{\text{я}} - I_{\text{я}} r_{\text{я}}}{C_e \Phi} . \quad (2.2)$$

При  $I_{\text{я}}$ ,  $C_e$  и  $\Phi = \text{const}$  скорость вращения  $\omega = f(U_{\text{я}})$  и приращение второго члена равно нулю, поэтому

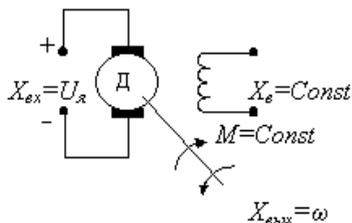
$$\omega = k_o^Z U_{\text{я}}, \text{ где } k_o^Z = \frac{1}{C_e \Phi} .$$

Таким образом

$$X_{\text{вых}} = k X_{\text{вх}} . \quad (2.3)$$

Аналогично из той же формулы (2.2) при  $U_{\text{я}}$ ,  $\Phi = \text{const}$  и  $M_c \equiv I_{\text{я}}$

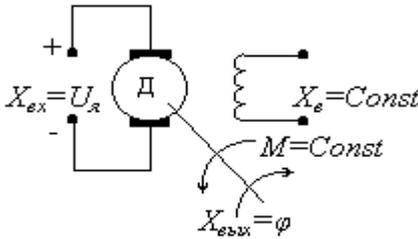
$$\omega = k_o^F I_{\text{я}}, \quad (2.4)$$



где

$$k_o^F = \frac{-r_{я}}{C_e \Phi}.$$

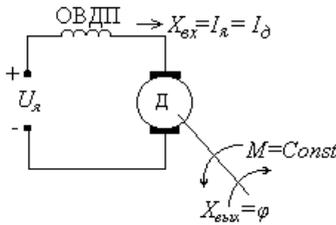
Ко второй группе относятся элементы, в установившемся состоянии которых определенному значению входного воздействия  $X_{ex}$  соответствует определенная скорость изменения выходной величины.



Например, если для двигателя постоянного тока независимого возбуждения принять в качестве выходного сигнала угол поворота вала, то

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = kU_{я}, \text{ т.е. } \frac{dX_{с_вых}}{dt} = kX_{ex}. \quad (2.5)$$

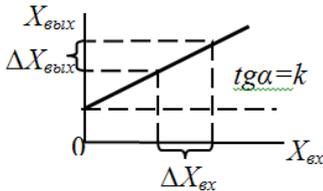
К третьей группе относятся элементы, в установившемся состоянии которых определенному входному сигналу  $X_{ex}$  соответствует определенное ускорение выходного параметра  $X_{с_вых}$ .



Например, если для двигателя последовательного возбуждения принять в качестве входного сигнала ток якоря, а выходного – угол поворота вала, то

$$M_o = J \frac{d\omega}{dt}; \quad c\Phi I_o = J \frac{d\omega}{dt}; \quad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{c\Phi}{J} I_o; \quad \frac{d^2 X_{с_вых}}{dt^2} = kX_{ex}. \quad (2.6)$$

По виду статических характеристик все элементы САУ можно разделить на линейные (ЛН) и нелинейные (НЛН).



Для ЛН элементов характерна пропорциональная зависимость

$$X_{с_вых} = f(X_{ex}),$$

$$\text{т. е. } X_{с_вых} = X_{с_вых,0} + k X_{ex},$$

где  $k = \text{tg } \alpha$  – коэффициент передачи элемента, определяемый как отношение приращения  $X_{с_вых}$  к приращению  $X_{ex}$  в установившемся режиме

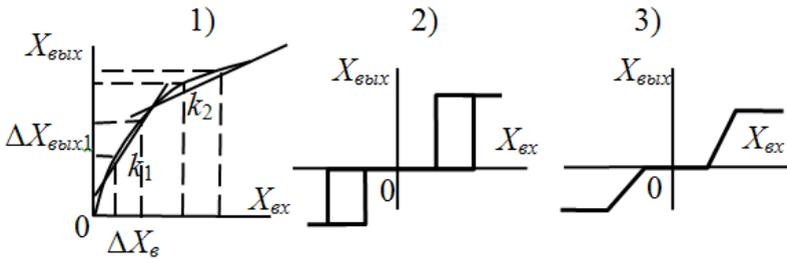
$$k = \frac{\Delta X_{с_вых}}{\Delta X_{ex}}. \quad (2.7)$$

Эту общую характеристику можно упростить переносом оси координат на величину  $X_{вых.0}$ , тогда

$$X_{вых} = k X_{ex} \quad (2.8)$$

К ЛН элементам относятся те, у которых  $k = const$ , однако таких элементов практически нет.

НЛН элементы могут быть самыми разнообразными:



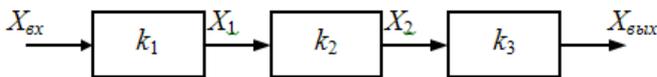
Криволинейную характеристику вида 1 можно представить линейной в начальной части или при малых приращениях  $X_{ex}$  в произвольном диапазоне, т.е. линеаризовать: методом касательной или секущей, разложением в ряд Тейлора, методом наименьших квадратов, но характеристики вида 2 и 3 относятся к существенно нелинейным.

Если в составе САУ есть хоть один элемент с НЛН характеристикой, то вся САУ становится нелинейной. Анализ и расчет таких систем может производиться лишь с применением специальных методов, например, методом гармонической линеаризации.

### 2.3. Статические характеристики разомкнутых САУ

Элементы в разомкнутых САУ могут соединяться друг с другом последовательно, параллельно и быть охваченными обратной связью (ОС). Считаем, что коэффициенты передачи элементов известны.

#### 1. Последовательное соединение элементов



При известном  $\Delta X_{ex}$  можно определить выходную величину первого элемента  $\Delta X_1 = k_1 \Delta X_{ex}$ , далее  $\Delta X_2 = k_2 \Delta X_1$ ,  $\Delta X_{вых} = k_3 \Delta X_2$ . Исключив промежуточные переменные получим

$$\Delta X_{вых} = k_1 k_2 k_3 \Delta X_{ex} . \quad (2.9)$$

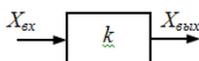
По определению статической характеристики из последнего уравнения

$$\frac{\Delta X_{вых}}{\Delta X_{ex}} = k = k_1 k_2 k_3$$

или, в общем виде,

$$k = \prod_{i=1}^n k_i . \quad (2.10)$$

Поэтому эту часть схемы можно заменить одним эквивалентным



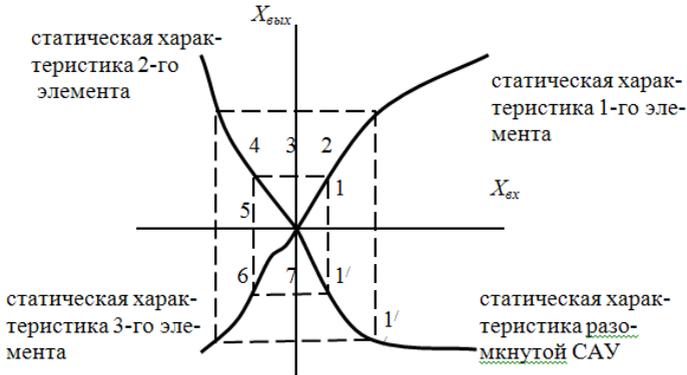
Таким образом, *n* последовательно соединенных элементов можно заменить одним эквивалентным элементом с коэффициентом передачи *k*, равным произведению коэффициентов передачи этих элементов.

В том случае, если статические характеристики заданы графически или они нелинейны, то проще всего надо воспользоваться графическим методом, который основан на том, что входная величина последующего элемента является выходом предыдущего.

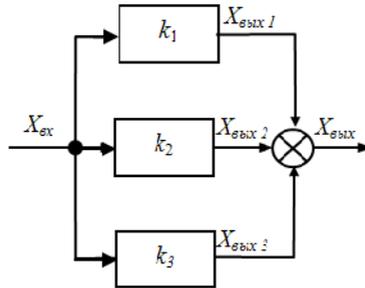
С I по III квадрантах строят статические характеристики трех последовательных элементов, а в IV-ом графическим сложением получают общую статическую характеристику разомкнутой САУ.

Если элементов всего два, то в III-ем квадранте вместо характеристики третьего элемента необходимо провести биссектрису, а если элементов больше трех, то необходимо сначала построить для первых трех элементов и получить суммарную характеристику, перестроить её в I-квадрант, во II и III ещё 2, а в IV – суммарную и т.д.

Порядок графического получения суммарной статической характеристики разомкнутой САУ приведен ниже.



## 2. Параллельное соединение элементов



Рассуждая аналогично предыдущему, с учетом суммирования сигналов, получим

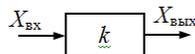
$$\Delta X_{\text{вых } 1} + \Delta X_{\text{вых } 2} + \Delta X_{\text{вых } 3} = \Delta X_{\text{вых}} = (k_1 + k_2 + k_3) \Delta X_{\text{вх}} .$$

По определению, отношение  $\frac{\Delta X_{\text{вых}}}{\Delta X_{\text{вх}}} = k = k_1 + k_2 + k_3$ ,

или в общем виде

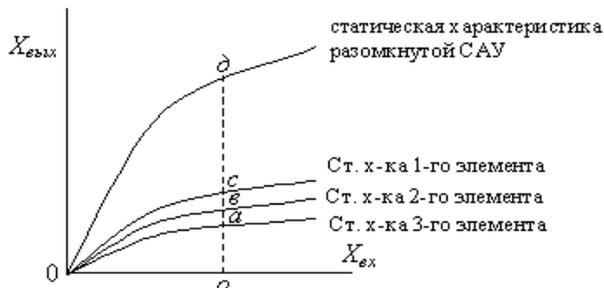
$$k = \sum_{i=1}^n k_i , \quad (2.11)$$

поэтому эту часть схемы также можно заменить одним эквивалентным элементом



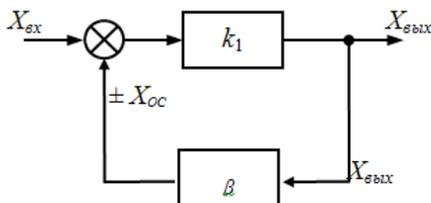
Таким образом,  $n$  параллельно соединенных элементов можно заменить эквивалентным элементом с  $k$ , равным сумме  $k_i$  элементов.

В случае нелинейных статических характеристик элементов применяют графический метод сложения ординат



Правило сложения ординат  $od = oa + ob + oc$ .

3. Основной передающий элемент охвачен обратной связью ОС (положительной или отрицательной). Здесь рассматривается ОС, действующая как в установившемся, так и в переходном режимах. Такая ОС называется **жесткой**, причем она может быть положительной, когда  $X_{oc}$  складывается с  $X_{вх}$  или отрицательной.



Выходное воздействие равно, как видно из рисунка, произведению коэффициента передачи первого звена на его входной сигнал, который в свою очередь определяется суммой (при положительной обратной связи) или разностью (при отрицательной ОС) входного сигнала и сигнала обратной связи

$$\Delta X_{вых} = k_1(\Delta X_{вх} \pm \beta \Delta X_{вых});$$

$$\Delta X_{вых} \mp \beta k_1 \Delta X_{вых} = k_1 \Delta X_{вх};$$

$$\Delta X_{вых}(1 \mp \beta k_1) = k_1 \Delta X_{вх}.$$

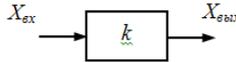
По определению коэффициента передачи из последнего уравнения получим

$$\frac{\Delta X_{\text{вых}}}{\Delta X_{\text{ex}}} = k = \frac{k_1}{1 \mp \beta k_1}.$$

Таким образом, элемент, охваченный ОС, можно заменить одним эквивалентным звеном с коэффициентом передачи  $k$ , равным

$$k = \frac{k_1}{1 \mp \beta k_1}. \tag{2.12}$$

Знак «-» относится к положительной ОС, а «+» к отрицательной ОС, в любом случае такое соединение звеньев можно заменить эквивалентным звеном



Графический метод и порядок построения суммарной статической характеристики для нелинейных элементов приведен ниже.



Рис.2.1. Графический метод построения суммарной статической характеристики при отрицательной обратной связи

$$k = \frac{k_1}{1 + \beta k_1}, \quad k < k_1.$$

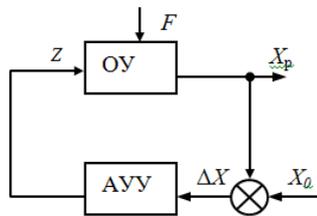


Рис.2.2. Графический метод построения суммарной статической характеристики при положительной обратной связи:

$$k = \frac{k_1}{1 - \beta k_1}, \quad k > k_1$$

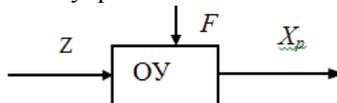
#### 2.4. Статические характеристики замкнутых САУ

Одноконтурные замкнутые САУ являются наиболее простыми и распространенными. Любую одноконтурную замкнутую САУ можно представить следующей функциональной схемой.



Такую схему можно получить, если ИзЭ отнести к ОУ и фактический  $X_p$  представить его измеренной величиной, а все элементы АУУ представить одним эквивалентным элементом АУУ.

Рассмотрим объект управления



ОУ в простейшем случае имеет два передаточных коэффициента:  
-коэффициент передачи объекта по управляющему воздействию

$$k_0^z = \frac{\Delta X_p}{\Delta z} \text{ при } \Delta F = 0 (F = const); \quad (2.13)$$

- коэффициент передачи объекта по возмущающему воздействию

$$k_0^F = \frac{\Delta X_p}{\Delta F} \text{ при } \Delta z = 0 (z = const). \quad (2.14)$$

Автоматическое управляющее устройство АУУ (регулятор)

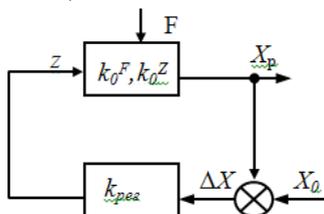


имеет один передаточный коэффициент

$$k_{per} = \frac{\Delta z}{\Delta X_p} \text{ при } \Delta X_0 = 0 (X_0 = const). \quad (2.15)$$

Чтобы получить статическую характеристику замкнутой САУ необходимо решить совместно приведенные выше уравнения относительно интересующих нас величин. При этом возможны четыре комбинации статических характеристик элементов.

### 1) ОУ – статический, АУУ – статическое



Для ОУ уравнение статической характеристики

$$X_p = k_0^z z - k_0^F F, \quad (2.16)$$

Знак (-) стоит потому, что  $F$  действует противоположно  $z$ , т.е. возмущающее воздействие стремится противодействовать  $z$ .

Для АУУ уравнение статической характеристики

$$z = k_{per} \Delta X, \quad (2.17)$$

Решим (2.16) и (2.17) совместно, для чего (2.17) подставим в (2.16)

$$X_p = k_0^z k_{per} \Delta X - k_0^F F.$$

Учитывая, что  $\Delta X = X_0 - X_p$ , исключим промежуточную переменную  $\Delta X$

$$X_p = k_0^Z k_{pez} X_0 - k_0^Z k_{pez} X_p - k_0^F F$$

или

$$X_p = \frac{k_0^Z k_{pez}}{1 + k_0^Z \cdot k_{pez}} \cdot X_0 - \frac{k_0^F}{1 + k_0^Z \cdot k_{pez}} \cdot F. \quad (2.18)$$

Уравнение (2.18) – аналитическое выражение регулировочной характеристики замкнутой одноконтурной САУ.

Выводы:

1. Регулируемая величина  $X_p$  зависит от величины возмущающего воздействия  $F$ , поэтому САУ – **статическая**.

Если разорвать главную ОС, то получим разомкнутую САУ, состоящую из двух последовательно соединенных элементов (ОУ и АУУ), поэтому произведение  $k_0^Z k_{pez} = k$  представляет собой коэффициент передачи разомкнутой САУ. Тогда (2.18) можно переписать

$$X_p = \frac{k}{1+k} X_0 - \frac{k_0^F}{1+k} F. \quad (2.19)$$

2. Определим величину статической ошибки при  $F = var$  и  $X_0 = const$

$$X_{p1} = \frac{k}{1+k} X_0 - \frac{k_0^F}{1+k} F_1; \quad X_{p2} = \frac{k}{1+k} X_0 - \frac{k_0^F}{1+k} F_2.$$

Вычтем 2-ое уравнение из 1-го

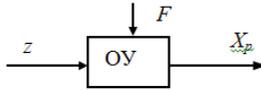
$$\Delta X_p = \pm \Delta X = \mp \frac{k_0^F}{1+k} \Delta F, \quad (2.20)$$

т.е.  $\Delta X = f(\Delta F)$  и знак ошибки определяются знаком  $\Delta F$ .

Величину ошибки  $\Delta X$  стараются уменьшить, однако это можно осуществить только за счет  $k_{pez}$ , т.к.  $k_0^Z, k_0^F$  определяются внутренними (конструктивными) свойствами объекта, который в общем случае менять нельзя, иначе изменится сам объект.

$\Delta X$  уменьшится, если увеличить  $k_{pez}$ , однако чрезмерное увеличение  $k_{pez}$  приводит к ухудшению динамических свойств, в частности, устойчивости, т.к. есть предельное значение коэффициента передачи разомкнутой САУ, после которой САУ становится неустойчивой.

3. Оценим влияние АУУ на  $\Delta X$ , для чего рассмотрим сначала ОУ без АУУ и получим уравнение регулировочной характеристики при  $F_1$  и  $F_2$  при неизменном  $Z$



$$\begin{aligned}
 X_{p1} &= k_0^Z z - k_0^F F_1; \\
 X_{p2} &= k_0^Z z - k_0^F F_2; \\
 \Delta X' &= X_{p2} - X_{p1} = k_0^F \Delta F.
 \end{aligned}$$

Подставим значение  $k_0^F \Delta F$  в предыдущее уравнение для  $\Delta X$  (2.20)

$$\Delta X = \pm \frac{\Delta X'}{1+k}. \quad (2.21)$$

Таким образом, статическая ошибка  $\Delta X$  при наличии регулятора (АУУ) меньше статической ошибки  $\Delta X'$  объекта управления ОУ (без регулятора) в  $(1+k)$  раз.

## 2) ОУ – астатический, АУУ – статическое

Для астатического ОУ скорость изменения регулируемой величины

$$\dot{X}_p = k_0^Z z - k_0^F F,$$

а для АУУ  $z = k_{пер} \Delta X = k_{пер} (X_0 - X_p)$ .

Тогда  $\dot{X}_p = k_0^Z k_{пер} X_0 - k_0^Z k_{пер} X_p - k_0^F F$  или

$$\dot{X}_p + k_0^Z k_{пер} X_p = k_0^Z k_{пер} X_0 - k_0^F F.$$

В установившемся режиме производная  $\dot{X}_p = 0$ , поэтому

$$k_0^Z k_{пер} X_p = k_0^Z k_{пер} X_0 - k_0^F F$$

$$\text{Отсюда} \quad X_p = X_0 - \frac{k_0^F}{1 + k_0^Z k_{пер}} F, \quad (2.22)$$

т.е.  $\Delta X = f(F)$  и САУ статическая со всеми предыдущими выводами.

## 3) ОУ- статический, АУУ – астатическое

Уравнения движения

$$X_p = k_0^Z z - k_0^F F; \quad \dot{z} = k_{пер} (X_0 - X_p).$$

Но в установившемся режиме  $\dot{z} = 0$ , поэтому  $X_p = X_0$ , (2.23)  
 т.е.  $\Delta X \neq f(F)$  и САУ - астатическая.

#### 4) ОУ – астатический, АУУ – астатическое

Как и в предыдущем случае САУ – астатическая.

*Таким образом, чтобы САУ в целом была астатической, необходимо и достаточно, чтобы автоматическое управляющее устройство АУУ было астатическим.*

### 2.5. Динамика САУ

#### *Линейные дифференциальные уравнения*

Для большинства реальных элементов УД оказывается нелинейным, что сильно усложняет расчеты. Поэтому всегда стремятся линеаризовать УД и тогда УД записывают в общем виде

$$\begin{aligned} a_0 \frac{d^n X_{\text{вых}}(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} X_{\text{вых}}(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_n X_{\text{вых}}(t) \\ = b_0 \frac{d^m X_{\text{вх}}(t)}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} X_{\text{вх}}(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_m X_{\text{вх}}(t). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Более удобной формой записи линейных дифференциальных уравнений является операторная форма, переход к которой производится путем замены соответствующей степени дифференциала  $\frac{d}{dt}$  на  $p$ :

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n) X_{\text{вых}}(t) = (b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_n) X_{\text{вх}}(t), \quad (2.25)$$

где  $a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n = D(p)$  – собственный оператор;

$b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_n = M(p)$  – входной оператор,

Название  $D(p)$  обусловлено тем, что он характеризует собственное движение элемента или САУ, т.е. при отсутствии или постоянных значениях внешних воздействий. Оператор  $D(p)$  также называют **характеристическим полиномом**.

У всех реальных систем  $n \geq m$ .

Уравнение элементов невысокого порядка ( $n \leq 2$ )

$$(a_0 p^2 + a_1 p + a_2) X_{\text{вых}}(t) = (b_0 p + b_1) X_{\text{вх}}(t) \quad (2.26)$$

в ТАУ принято записывать в стандартной форме путем деления на  $a_2$

$$\left(\frac{a_0}{a_2} p^2 + \frac{a_1}{a_2} p + 1\right) X_{\text{вых}}(t) = \left(\frac{b_0}{a_2} p + \frac{b_1}{a_2}\right) X_{\text{вх}}(t),$$

и после введения обозначений

$$k = \frac{b_1}{a_2}; T_1 = \frac{a_1}{a_2}; T_2 = \sqrt{\frac{a_0}{a_2}}; T = \frac{b_0}{b_1}$$

Окончательно запишется как

$$(T_2^2 p^2 + T_1 p + 1) X_{\text{вых}}(t) = k(Tp + 1) X_{\text{вх}}(t). \quad (2.27)$$

Далее можно перейти к безразмерному времени  $\dot{t} = \frac{t}{T_M}$ . В качестве  $T_M$

можно принять постоянную времени  $T$  одного из элементов или вычис-

лить по формуле  $T_M = \sqrt{\frac{a_0}{a_n}}$ . Величина, обратная  $T_M$ , называется **мас-**

**штабом времени**  $m_t = \frac{1}{T_M}$ . При этом  $p^k = \frac{p}{T_M^k}$ . Тогда так называемая

форма Вышнеградского записывается как

$$((\bar{p})^2 + A_1 \bar{p} + 1) X_{\text{вых}}(t) = (B_0 \bar{p} + B_1) X_{\text{вх}}(t), \quad (2.28)$$

где

$$A_1 = \frac{a_1}{\sqrt{a_0 a_2}}; B_0 = \frac{b_0}{\sqrt{a_0 a_2}}; B_1 = \frac{b_1}{a_2}.$$

## 2.6. Передаточные функции САУ

Наиболее распространенным методом описания и анализа элементов САУ является операционный метод, в основе которого лежит прямое интегральное преобразование Лапласа

$$X(p) = L[x(t)] = \int_0^{\infty} x(t) e^{-pt} dt.$$

Формально преобразование по Лапласу исходного дифференциального уравнения (2.24) сводится к замене  $p \rightarrow \frac{d}{dt}$  и  $x(t)$  на  $X(p)$

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n) X_{\text{вых}}(p) = (b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_n) X_{\text{вх}}(p), \quad (2.29)$$

В отличие от (2.25) здесь  $p$  обозначает не операцию дифференцирования, а представляет собой комплексную переменную  $p = \alpha + j\omega$ .

Используя предыдущие обозначения многочленов можно записать

$$D(p) X_{\text{вых}}(p) = M(p) X_{\text{вх}}(p), \quad (2.30)$$

Передаточная функция  $W(p)$  представляет собой отношение изображения выходной величины к изображению входной величины при нулевых начальных условиях:

$$W(p) = \frac{X_{\text{вых}}(p)}{X_{\text{вх}}(p)} = \frac{M(p)}{D(p)}, \quad (2.31)$$

или

$$W(p) = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_n}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n}, \quad (2.32)$$

т.е. это дробно-рациональная функция.

Из (2.32) видно, что  $W(p)$  не зависит от вида  $X_{\text{вх}}(t)$  и характеризует собственные динамические свойства элемента или системы

$$X_{\text{вых}}(p) = W(p) X_{\text{вх}}(p), \quad (2.33)$$

т.е.  $W(p)$  показывает, как передается входной сигнал через данное звено в динамике.

Основные свойства передаточной функции.

1. В физически реализуемых инерционных элементах или системах  $n \geq m$ .

2. При  $p \rightarrow 0$  ( $t \rightarrow \infty$ ),  $W(0) = \frac{b_m}{a_n} = k$ , т.е. имеет место установившийся режим.

3. Корни  $M(P)$  называют **нулями**, а корни  $D(P)$  - **полюсами** передаточной функции. Если эти корни известны, то (2.32) можно представить

$$W(p) = \frac{b_0(p - q_1)(p - q_2)\dots(p - q_m)}{a_0(p - p_1)(p - p_2)\dots(p - p_n)}, \quad (2.34)$$

т.е. конкретной  $W(p)$  с заданными коэффициентами соответствует вполне определенное сочетание нулей и полюсов, по распределению которых можно судить о динамических свойствах элемента или САУ, в том числе и об устойчивости (нули обращают  $W(p)$  в нуль, а полюсы – в бесконечность).

4. Передаточная функция (2.34) имеет полюсы в  $p=0$ , когда один или несколько младших коэффициентов  $D(P)$  равны нулю. Такую передаточную функцию можно представить в виде

$$W(p) = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-v} p^v}, \quad (2.35)$$

или после вынесения за скобки  $p^v$  и деления на свободный член

$$W(p) = \frac{k}{p^v} \frac{B_0 p^m + B_1 p^{m-1} + \dots + 1}{A_0 p^n + A_1 p^{n-1-v} + \dots + 1}, \quad (2.36)$$

где  $B_i = \frac{b_i}{b_m}$ ;  $A_j = \frac{a_j}{a_{n-v}}$ ;  $k = \frac{b_m}{a_{n-v}}$ ;  $i = 0; 1; \dots; m$ ;  $j = 0; 1; \dots; n - v$ .

Величину  $v$  называют **порядком астатизма**.

Коэффициент  $k$  имеет размерность  $\frac{[X_{\text{вых}}(t)]}{[X_{\text{вх}}(t)][t]}$ , его с некоторой условностью называют **передаточным коэффициентом**. Условность заключается в том, что  $k$  было введено в качестве характеристики статического режима, а у элементов или САУ с  $v \neq 0$  статического режима работы не существует.

Передаточная функция (2.36) может быть представлена в виде

$$W(p) = \frac{k}{p^v} W^*(p), \quad (2.37)$$

где  $W^*(p)$  при  $p \rightarrow 0$  стремится к 1.

## 2.7. Структурная схема САУ

При операторном методе исследований, т.е. методе передаточных функций, исследуемая система разбивается на части – динамические звенья направленного действия, описываемые дифференциальным уравнением не выше 2-го порядка.

Совокупность динамических звеньев совместно с линиями связи между ними образуют структурную схему САУ. Таким образом, структурная схема математически описывает динамические свойства рассматриваемой САУ.

По сравнению с общей формой записи дифференциального уравнения весьма важным преимуществом структурных схем является их физическая наглядность передачи и переработки сигналов.

## 2.8. Временные функции САУ

Динамические свойства элементов и САУ наиболее наглядно передается временными функциями – переходной функцией и весовой функцией (импульсной переходной функцией).

**Переходной функцией** (характеристикой)  $h(t)$  называется функция (график), описывающая изменение  $X_{\text{вых}}(t)$  во времени, возникающее при подаче на вход элемента или САУ единичного ступенчатого воздействия  $1(t)$  как суммы вынужденного и свободного составляющих  $h(t) = h_{\text{с}}(t) + h_{\text{св}}(t)$ ,

$$h_{\text{с}}(t) = X_{\text{вых}}(\infty) = \frac{b_m}{a_n} = k; \quad h_{\text{св}}(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{p_i t}, \quad (2.38)$$

где  $p_i$  – корни характеристического уравнения  $D(P) = 0$ .

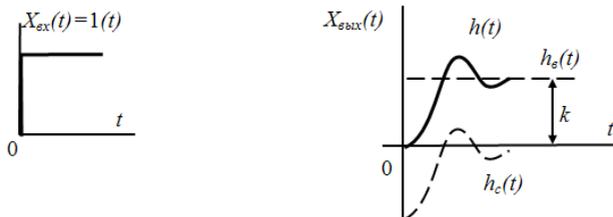


Рис. 2.3. Переходная характеристика

В общем виде  $D(p)X_{\text{вых}}(p) = M(p)X_{\text{вх}}(p)$ .

Если на вход подать единичное ступенчатое воздействие  $1(t)$ , то по определению на выходе имеем переходную функцию  $h(t)$ , т. е. при  $X_{\text{вх}}(t) = 1(t)$  изображение  $X_{\text{вх}}(p) = L[1(t)] = \frac{1}{p}$ , а изображение

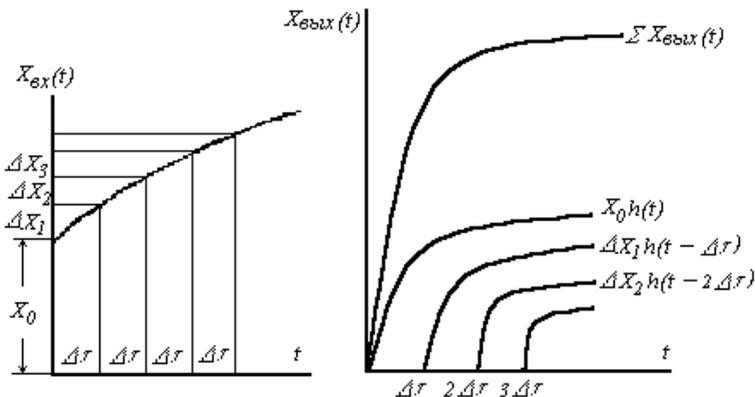
$$X_{\text{вых}}(p) = H(p), \text{ тогда } D(p)H(p) = M(p) \frac{1}{p}; \quad H(p) = \frac{D(p)}{M(p)} \frac{1}{p},$$

$$H(p) = W(p) \frac{1}{p}. \quad (2.39)$$

Применив обратное преобразование Лапласа, можно определить оригинал  $h(t)$ .

Если на вход подать произвольное ступенчатое воздействие  $a1(t)$ , то на выходе  $X_{\text{вых}}(t) = a h(t)$ , что широко используется при исследовании САУ.

Зная переходную характеристику элемента можно определить его реакцию на произвольное входное воздействие, используя принцип суперпозиции, как показано ниже.



$$\begin{aligned} \sum X_{\text{вых}}(t) &= X_0 h(t) + \Delta X_1 h(t - \Delta \tau) + \Delta X_2 h(t - 2 \Delta \tau) + \dots = \\ &= X_0 h(t) + \sum_{\Delta \tau}^i \frac{\Delta X_i}{\Delta \tau} h(t - \Delta \tau) \Delta \tau, \end{aligned}$$

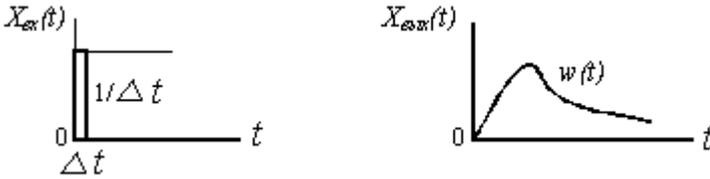
или, переходя к пределу, имеем

$$X_{\text{вых}}(t) = X_0 h(t) + \int_0^t \frac{dX_{\text{вх}}}{d\tau} h(t - \tau) d\tau . \quad (2.40)$$

Это - интеграл Дюамеля –Карсона.

**Импульсной переходной функцией или функцией веса  $w(t)$**  называют изменение  $X_{\text{вых}}(t)$ , возникающее после подачи на вход единичной импульсной функции  $\delta(t)$ .

Функция веса может быть получена дифференцированием по времени  $h(t)$  и равна



$$w(t) = \frac{dh(t)}{dt} , \quad (2.41)$$

и, наоборот, переходная функция  $h(t)$  равна интегралу от импульсной переходной функции  $w(t)$

$$h(t) = \int_0^t w(t) dt , \quad (2.42)$$

С другой стороны,  $W(p)$  есть изображение функции веса т.е.

$$W(p) = \int_0^{\infty} w(t) e^{-pt} dt , \quad (2.43)$$

а  $W(p)$  и  $h(t)$  связаны между собой следующим уравнением

$$W(p) = p \int_0^{\infty} h(t) e^{-pt} dt , \quad (2.44)$$

Переходные характеристики можно определить по  $W(p)$  методом обратного преобразования Лапласа или по формулам:

а) корни характеристического уравнения вещественные, разные;  $F = 0$ ; могут быть ненулевые начальные условия

$$h(t) = X_{\text{вых}}(t) = \sum_{i=1}^n \frac{M(p_i)}{D'(p_i)} e^{p_i t}; \quad (2.45)$$

б) среди корней характеристического уравнения имеются комплексные вида  $p_{i,i+1} = \alpha \pm j\beta$

$$X_{\text{вых}}(t) = \sum_{i=1}^r \frac{M(p_i)}{D'(p_i)} e^{p_i t} + \sum_{i=1}^s 2A_i e^{\alpha_i t} \cos(\beta_i t + \varphi_i); \quad (2.46)$$

в) нулевые начальные условия и  $F \neq 0$ , корни вещественные

$$X_{\text{вых}}(t) = \sum_{i=1}^m \frac{R(p_i)}{D'(p_i)} e^{p_i t}; \quad (2.47)$$

г) нулевые корни, т.е.  $D(p) = pD_1(p)$  и нет равных корней

$$X_{\text{вых}}(t) = \frac{R(0)}{D_1(0)} + \sum_{i=1}^{m-1} \frac{R(p_i)}{p_i D_1'(p_i)} e^{p_i t}. \quad (2.48)$$

Последнее уравнение носит название формулы Хевисайда.

Обозначения в формулах (2.45) – (2.48):

$p_i$  – корни характеристического уравнения  $D(p)$ ;

$m$  – степень входного оператора  $M(p)$ ;

$r$  – число вещественных корней;

$s$  – число пар комплексных корней;

$n$  – степень характеристического уравнения  $D(p)$ ;

$D_i(p)$  – полином после вынесения  $p$  за  $D(p)$ ;

$D'(p_i)$  – значение производной от знаменателя передаточной функции при  $p = p_i$ ;

$M(p_i), R(p_i)$  – значения числителя передаточной функции при  $p = p_i$ .

Справедливы следующие соотношения:

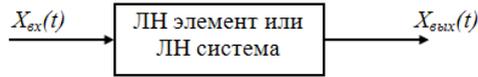
$$A = \sqrt{\delta^2 + \sigma^2}; \quad \varphi = \arctg \frac{\delta}{\sigma}, \quad (2.49)$$

тогда передаточная функция представляется вещественной и мнимой составляющими и переходит в АФЧХ

$$\frac{M(p_i)}{D'(p_i)} = \frac{a + jb}{c + jd} = \delta + j\sigma. \quad (2.50)$$

## 2.9. Частотные характеристики САУ

Частотные характеристики описывают передаточные свойства элементов и систем в режиме установившихся гармонических колебаний, вызванных внешним (входным) гармоническим воздействием



Пусть на вход линейного элемента в момент  $t=0$  подано синусоидальное воздействие

$$X_{\text{вх}}(t) = A_{\text{вх}} \sin(\omega t + \varphi_{\text{вх}}), \quad \varphi_{\text{вх}} = \text{Const} \text{ и может быть равна } 0.$$

После переходных процессов на выходе установятся синусоидальные колебания той же частоты, но другой амплитуды  $A_{\text{вых}}$  и фазы  $\varphi_{\text{вых}}$ :

$$X_{\text{вых}}(t) = A_{\text{вых}} \sin(\omega t + \varphi_{\text{вых}}).$$

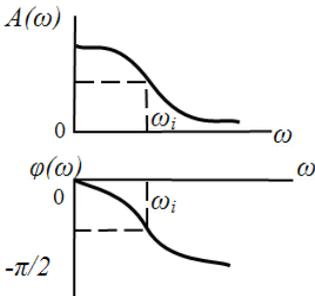
Если изменять частоту  $\omega$  от 0 до  $\infty$ , то можно установить, что  $A_{\text{вых}}$  и  $\varphi_{\text{вых}}$  конкретного элемента зависят от  $\omega$ .

Представим  $X_{\text{вх}}(t)$  и  $X_{\text{вых}}(t)$  в векторной форме

$$\bar{X}_{\text{вх}} = A_{\text{вх}} e^{j(\omega t + \varphi_{\text{вх}})}; \quad \bar{X}_{\text{вых}} = A_{\text{вых}} e^{j(\omega t + \varphi_{\text{вых}})}.$$

Возьмем отношение вектора выходного сигнала к вектору входного

$$\frac{\bar{X}_{\text{вых}}}{\bar{X}_{\text{вх}}} = \frac{A_{\text{вых}} e^{j(\omega t + \varphi_{\text{вх}})}}{A_{\text{вх}} e^{j(\omega t + \varphi_{\text{вых}})}} = \frac{A_{\text{вых}}}{A_{\text{вх}}} e^{j(\varphi_{\text{вых}} - \varphi_{\text{вх}})}. \quad (2.51)$$



Отношение амплитуд  $\frac{A_{\text{вых}}}{A_{\text{вх}}}$  при

изменении  $\omega$  от 0 до  $\infty$  зависит от частоты и называется **амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ)** и обозначается  $A(\omega)$ .

Разность фаз ( $\varphi_{\text{вых}} - \varphi_{\text{вх}}$ ), несмотря на  $\varphi_{\text{вх}} = \text{const}$ , при изменении  $\omega$  от 0 до  $\infty$  также зависит от частоты и называется **фазо-частотной характеристикой (ФЧХ)** и

обозначается  $\varphi(\omega)$ .

АЧХ размерность, равную отношению размерности выходного сигнала к размерности входного, а размерность ФЧХ – градус или радиан.

Общее отношение векторов выходного воздействия к векторам входного, обозначаемое  $W(j\omega)$ , также зависит от частоты  $\omega$

$$\frac{\overline{X_{\text{вых}}}}{\overline{X_{\text{вх}}}} = W(j\omega) \quad (2.52)$$

и называется **амплитудно-фазовой частотной характеристикой АФЧХ**, или **частотной передаточной функцией**, или **комплексным коэффициентом передачи**, т.е.

$$W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}. \quad (2.53)$$

Каждому фиксированному значению  $\omega_i$  соответствует комплексное число  $W(j\omega_i)$ , которое можно изобразить на комплексной плоскости в виде вектора. Модуль (длина) этого вектора на этой частоте равна  $A(\omega_i)$ , а аргумент (угол) равен  $\varphi(\omega_i)$ , причем отрицательное значение угла, соответствующее отставанию выходного сигнала от входного, принято откладывать по часовой стрелке от положительного направления вещественной оси.

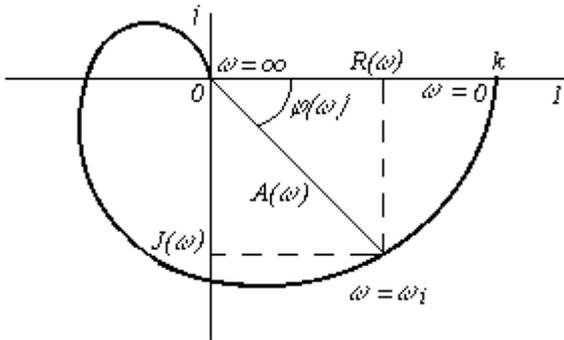


Рис. 2.4. Годограф АФЧХ

Концы векторов  $W(j\omega_i)$  при изменении  $\omega_i = 0 \dots \infty$  описывают в плоскости ( $j; I$ ) кривую, которая называется **годографом АФЧХ**. Вектор  $W(j\omega_i)$  можно проецировать на вещественную и мнимую оси

$$W(j\omega) = R(\omega) + jJ(\omega), \quad (2.54)$$

$$\text{где } R(\omega) = A(\omega)\cos\varphi(\omega) - \quad (2.55)$$

- вещественная частотная характеристика;

$$J(\omega) = A(\omega)\sin\varphi(\omega) - \quad (2.56)$$

- мнимая частотная характеристика.

Таким образом, модуль АФЧХ

$$|W(j\omega)| = A(\omega) = \sqrt{(R(\omega))^2 + (J(\omega))^2} = \frac{|M(j\omega)|}{|D(j\omega)|}, \quad (2.57)$$

является дробно-рациональной функцией, а аргумент АФЧХ равен

$$\text{Arg}W(j\omega) = \varphi(\omega) = \arctg \frac{J(\omega)}{R(\omega)} = \arg M(j\omega) - \arg D(j\omega), \quad (2.58)$$

т.е. разности аргументов входного и собственного операторов.

По виду частотных характеристик все элементы и системы делятся на 2 группы:

**Минимально – фазовые** вида  $\frac{k}{Tp+1}$ , у которых все полюсы и ну-

ли  $W(p)$  имеют отрицательные или нулевые вещественные части, что дает минимальный фазовый сдвиг по сравнению с другими элементами, имеющими такую же  $A(\omega)$ , но у которой вещественная часть хотя бы одного полюса или нуля положительна и называемыми

**неминимально-фазовыми** и имеют вид  $\frac{k}{Tp-1}$ .

При практических расчетах удобно пользоваться следующими свойствами АФЧХ:

1. При  $\omega = 0$  вектор АФЧХ  $W(j\omega) = \frac{b_m}{a_n} = k$  - годограф начинается с  $k$ .
2. Вектор АФЧХ можно разложить на вещественную и мнимую составляющие (частотные характеристики см. рисунок выше).
3. При  $a_n = 0$  (см. п.1)  $k = \frac{b_m}{0} = \infty$ . Это характерно для астатических элементов. В этом случае годограф начинается с  $\infty$ .
4. При  $b_m = 0$  годограф начинается с начала координат.

На практике часто пользуются **логарифмическими частотными характеристиками**, которые допускают простую линейную аппроксимацию и за счет этого разместить на странице частоты и амплитуды больших диапазонов. За единицу длины по оси частот принимают декаду – интервал десятикратных частот  $\lg 10\omega - \lg \omega = \lg 10 = 1$  в произвольном масштабе  $r$  с учетом диапазона частот в конкретном случае. При этом ось ординат (ось логарифмической амплитудной частотной характеристики  $L(\omega)$ ) может пересекать ось частот  $\lg \omega$  в произвольном месте, так как точка  $\omega = 0$  лежит на оси частот слева в бесконечности ( $\lg 0 = -\infty$ ).

Разбиение отрезка произвольной длины по логарифмической шкале приведена ниже, откуда видно, что нуля на этой шкале нет.



По оси ординат откладывается  $20\lg A(\omega) = L(\omega)$  – **логарифмическая амплитудная частотная характеристика ЛАЧХ**. Единицей измерения является **децибелл**.

Если мощность одного сигнала больше мощности другого в 10 раз, то эти мощности отличаются на 1 Белл ( $\lg \frac{N_2}{N_1} = \lg 10 = 1$ ); мощность гармонического сигнала пропорциональна квадрату амплитуды, поэтому перед  $\lg$  появляется 2; 10 дБ равняется 1Б, всего  $2 \cdot 10 = 20$ . Ось ординат  $L(\omega)$  должна пересекать ось частот при  $L(\omega) = 0$ , это соответствует  $A(\omega) = 1$ , так как  $20\lg 1 = 0$ .

Примерное соответствие значений АЧХ и ЛАЧХ приведено ниже.

$A(\omega)$	1	2	10	100	0,2	0,1	0,01
$L(\omega)$	0	6	20	40	-14	-20	-40

### 3. ТИПОВЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗВЕНЬЯ

#### 3.1. Классификация динамических звеньев

Функциональные элементы, входящие в состав САУ, могут иметь самую различную физическую природу, конструкцию, исполнение и принцип действия. Однако общность математических выражений, связывающих входные и выходные величины элементов, позволяют выделить типовые динамические звенья, описываемые дифференциальным уравнением не выше 2-го порядка:

$$a_0 \frac{d^2 X_{\text{вых}}(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dX_{\text{вых}}(t)}{dt} + a_2 X_{\text{вых}}(t) = b_0 \frac{dX_{\text{вх}}(t)}{dt} + b_1 X_{\text{вх}}(t), \quad (3.1)$$

Звенья, у которых  $a_2 \neq 0$  и  $b_1 \neq 0$ , обладают однозначной связью выходной величины от входной в статическом режиме, т.е. обладают **статизмом**. Поэтому к их названиям часто добавляют термины «**позиционные**» или «**статические**». Звенья, у которых  $a_2 \neq 0$ ,  $a_1 \neq 0$  и  $a_0 \neq 0$ , обладают инерционностью - замедлением, если  $b_0 \neq 0$ , то опережением. Если один из коэффициентов левой части (1) отрицателен, то звено будет неустойчивым и неминимально-фазовым. Звенья, у которых только два коэффициента не равны нулю, называются **простейшими** или **элементарными**. Остальные звенья могут быть получены из элементарных путем последовательного, параллельного и встречно-параллельного соединения (охвата ОС).

Обычно выделяют 6 типовых динамических звеньев:

1. Безынерционное (усилительное, пропорциональное, звено нулевого порядка);
2. Аperiodическое звено первого порядка (инерционное 1-го порядка);
3. Звено второго порядка (инерционное, релаксационное звено; в зависимости от соотношения постоянных времени – аperiodическое 2-го порядка, колебательное или консервативное);
4. интегрирующее звено (идеальное и реальное);
5. дифференцирующее звено (идеальное и реальное, первого и второго порядка);
6. запаздывающее звено (звено чистого запаздывания, транспортное звено).

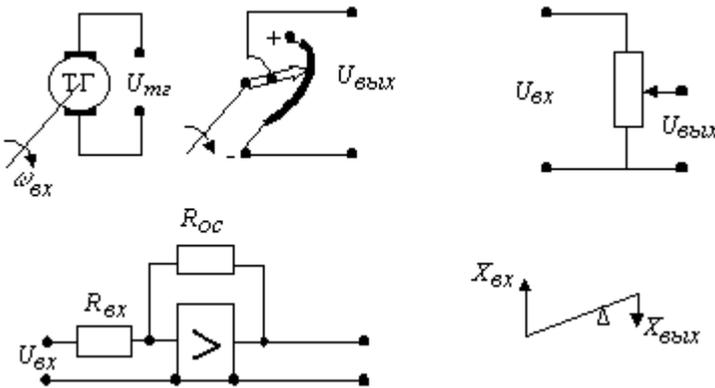
В дальнейшем используется следующая форма дифференциального уравнения (1)

$$T_2^2 \frac{d^2 X_{\text{вых}}(t)}{dt^2} + T_1 \frac{dX_{\text{вых}}(t)}{dt} + X_{\text{вых}}(t) = kT \frac{dX_{\text{вх}}(t)}{dt} + kX_{\text{вх}}(t), \quad (3.2)$$

### 3.2. Безынерционное звено

Является простейшим звеном, передающим входной сигнал на выход мгновенно, без искажения формы, только усиливая или ослабляя входной сигнал. К таким звеньям относятся те, у которых отсутствует инерция или инерцией которых можно пренебречь по сравнению с инерцией других звеньев.

Примеры:



Все эти звенья описываются вырожденным дифференциальным уравнением (3.2)

$$X_{\text{вых}}(t) = kX_{\text{вх}}(t), \quad (3.3)$$

т.е. линейным алгебраическим уравнением, например, напряжение тахогенератора пропорционально частоте вращения вала  $U_{\text{мг}} = k_{\text{тг}} \omega_{\text{вх}}$ , где

$$k_{\text{тг}} = \frac{pN}{a} \Phi, \quad \left[ \frac{B}{c^{-1}} \right].$$

Определим все характеристики звена, для чего применим к уравнению (3.3) прямое преобразование Лапласа:

$$X_{\text{вых}}(p) = kX_{\text{вх}}(p).$$

Отсюда можно найти выражение для передаточной функции

$$\frac{X_{\text{вых}}(p)}{X_{\text{вх}}(p)} = W(p) = k, \quad (3.4)$$

т.е. передаточные свойства определяются лишь коэффициентом передачи.

Изображение переходной характеристики

$$H(p) = W(p) \frac{1}{p} = k \frac{1}{p}. \quad (3.5)$$

Применим обратное преобразование Лапласа, тогда  $h(t) = k1(t)$ , т.е. при подаче  $1(t)$  на вход звена переходная характеристика имеет вид

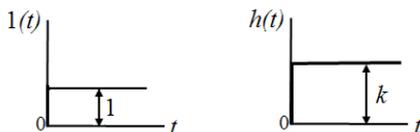


Рис. 3.1. Переходная характеристика безынерционного звена

Таким образом, безынерционное звено передает сигнал без искажения, только в  $k$  раз усиливая или ослабляя его.

Зная  $W(p)$  можно определить АФЧХ путем замены  $p \rightarrow j\omega$ :

$$W(j\omega) = k. \quad (3.6)$$

т.е. при  $\omega = \text{var}$  годограф лежит в одной точке, равной  $k$ .

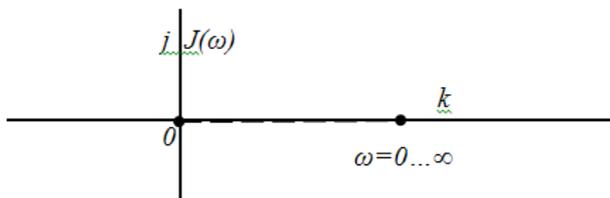


Рис. 3.2. Годограф АФЧХ безынерционного звена

Выделим вещественную и мнимую части:  $R(\omega) = k$ ;  $J(\omega) = 0$  и найдем амплитудную и фазовую частотные характеристики

$$A(\omega) = \sqrt{R(\omega)^2 + J(\omega)^2} = \sqrt{k^2 + 0^2} = k,$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{J(\omega)}{R(\omega)} = \operatorname{arctg} \frac{0}{k} = 0.$$

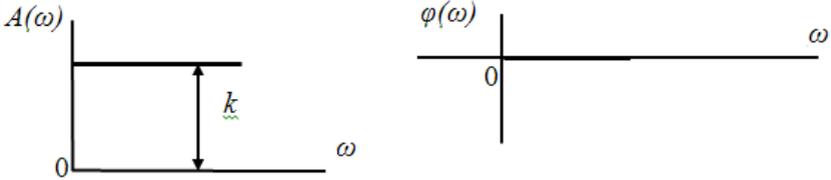


Рис. 3.3. Амплитудная и фазовая частотные характеристики безынерционного звена

Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика не зависит от частоты и приведена на рис. 3.4.

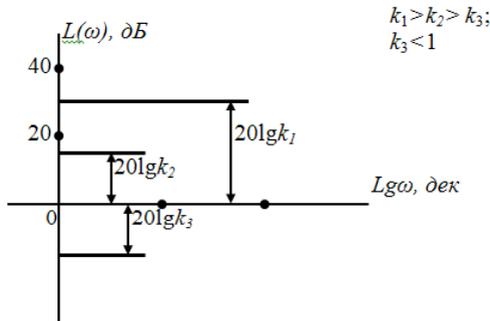
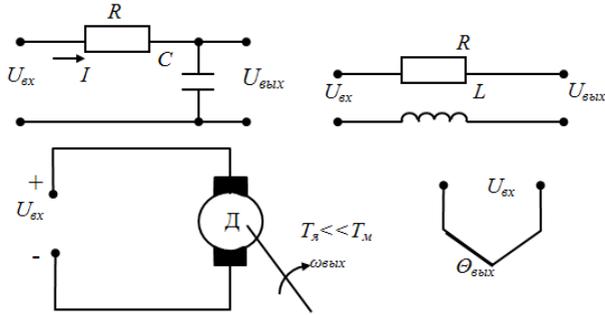


Рис. 3.4. Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика (ЛАЧХ) безынерционного звена

Следует отметить, что рассмотренные выше звенья не всегда могут считаться безынерционными. Например, шестерни редуктора могут иметь большую массу (т.е. инерцию) и зазор между зубьями (т.е. запаздывание в передаче движения), рычаг может не быть абсолютно жестким (т.е. проявляются упругие свойства) и т.п.

### 3.3. Аперидическое звено первого порядка

Обычно аперидическое звено первого порядка можно представить в виде двух элементов, один из которых способен накапливать энергию (вещество), а другой препятствует прохождению энергии (вещества) к первому. Примеры:



Процессы, происходящие в таких звеньях, описываются дифференциальным уравнением первого порядка

$$T \frac{dX_{\text{вых}}(t)}{dt} + X_{\text{вых}}(t) = k X_{\text{вх}}(t). \quad (3.7)$$

Например, получим дифференциальное уравнение для первого звена (R-C цепочки)

$$1 \cdot U_{\text{вх}}(t) = iR + U_c; \quad U_{\text{вых}}(t) = U_c; \quad i = C \frac{dU_{\text{вых}}(t)}{dt} = C \frac{dU_c}{dt}.$$

Исключая промежуточные переменные, получим

$$U_{\text{вх}}(t) = RC \frac{dU_{\text{вых}}(t)}{dt} + U_{\text{вых}}(t).$$

При  $U_{\text{вх}}$  для общности положим  $1 = k$  и обозначим  $RC = T$ . Тогда

$$kU_{\text{вх}}(t) = T \frac{dU_{\text{вых}}(t)}{dt} + U_{\text{вых}}(t),$$

где  $k$  – коэффициент передачи;  $T$  – постоянная времени звена.

Применим к уравнению в общем виде (3.7) преобразование Лапласа и вынесем  $X_{\text{вых}}(p)$  за скобки

$$(Tp + 1)X_{\text{вых}}(p) = kX_{\text{вх}}(p).$$

Возьмем отношение  $X_{\text{вых}}(p)$  к  $X_{\text{вх}}(p)$  при нулевых начальных условиях

$$\frac{X_{\text{вых}}(p)}{X_{\text{вх}}(p)} = W(p) = \frac{k}{Tp + 1}. \quad (3.8)$$

Это – передаточная функция апериодического звена первого порядка.

Имея  $W(p)$  можно получить все остальные характеристики звена. Для получения  $h(t)$  воспользуемся формулой Хевисайда (т.к. один корень исходного уравнения 2-го порядка равен нулю). Характеристическое уравнение по (3.8)

$$Tp + 1 = 0$$

имеет один корень  $p_1 = -\frac{1}{T}$ .

Для формулы Хевисайда

$$h(t) = W(0) + \sum_{i=1}^n \frac{R(p_i)}{p_i \cdot D'(p_i)} e^{p_i t}$$

найдем составляющие  $W(0)=k$ ;  $R(p_i)=k$ ;  $D(p_i)=(Tp+1)$ ;  $D'(p_i)=T$ . Таким образом, переходная функция

$$h(t) = k + \frac{k}{-\frac{1}{T}} e^{-\frac{1}{T}t} = k(1 - e^{-\frac{t}{T}}).$$

Построим эту характеристику по асимптотам:

$$\text{При } \begin{cases} t = 0 & h(t) = 0; \\ t = \infty & h(t) = k. \end{cases}$$

Между этими точками график идет по экспоненте.

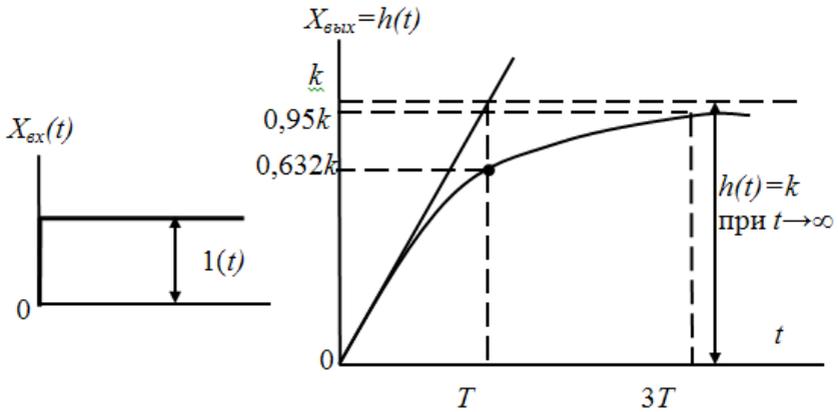


Рис. 3.5 Переходная характеристика аperiodического звена первого порядка

Таким образом, если экспериментально снять  $h(t)$  звена, то можно определить  $k$  и  $T$ , даже не зная свойств его внутренних элементов.

При  $t = T$ ;  $h(t) = 0,632 \cdot k$ ,  
где  $T$  – мера инерции (постоянная времени) звена.

Из  $h(t)$  видно также, что аperiodическое звено 1-го порядка после нанесения воздействия на входе (управляющего или возмущающего) самостоятельно приходит к новому установившемуся состоянию, поэтому такие звенья называют **звеньями с самовыравниванием** и они характеризуются коэффициентом самовыравнивания

$$\rho = \frac{1}{k}.$$

Для получения АФЧХ надо в передаточной функции заменить  $p \rightarrow j\omega$

$$W(j\omega) = \frac{k}{Tj\omega + 1}.$$

Освободимся от мнимости (иррациональности) в знаменателе (для чего числитель и знаменатель умножим на комплексно-сопряженный знаменатель) и выделим вещественные и мнимые частотные характеристики:

$$W(j\omega) = \frac{k(-Tj\omega + 1)}{(Tj\omega + 1)(-Tj\omega + 1)} = \frac{k - kTj\omega}{T^2\omega^2 + 1} = \frac{k}{T^2\omega^2 + 1} - j \frac{kT\omega}{T^2\omega^2 + 1} = R(\omega) - jJ(\omega);$$

$$R(\omega) = \frac{k}{T^2\omega^2 + 1}; \quad J(\omega) = -\frac{kT\omega}{T^2\omega^2 + 1}. \quad (3.9)$$

Для построения характеристики найдем асимптоты:

$$\text{При } \begin{cases} \omega = 0; & R(\omega) = k; & J(\omega) = 0; \\ \omega = \infty; & R(\omega) = 0; & J(\omega) = 0. \end{cases}$$

Между этими точками годограф идет по полуокружности.

Задаваясь  $\omega = 0 \dots \infty$  построим годограф АФЧХ, откуда видно, что апериодическое звено первого порядка является запаздывающим звеном, т.е. при  $\omega$ , меняющемся от 0 до  $\infty$  фаза  $\varphi_{\text{вых}}$  отстает от фазы  $\varphi_{\text{вх}}$ , изменяясь при этом от 0 до  $-\pi/2$ .

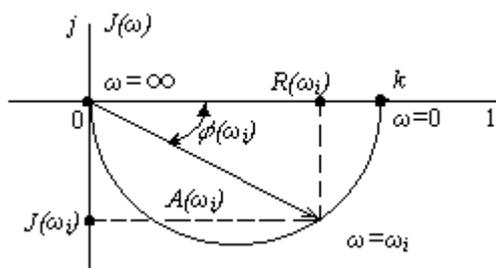


Рис. 3.6. Годограф АФЧХ аperiодического звена первого порядка

АЧХ

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \sqrt{(R(\omega))^2 + (J(\omega))^2} = \sqrt{\frac{k^2}{(T^2\omega^2 + 1)^2} + \frac{(-Tk\omega)^2}{(T^2\omega^2 + 1)^2}} = \\ &= \frac{k}{T^2\omega^2 + 1} \sqrt{1 + T^2\omega^2} = \frac{k}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}}. \end{aligned}$$

Задаваясь  $\omega = 0 \dots \infty$  можно построить график АЧХ  $A(\omega)$

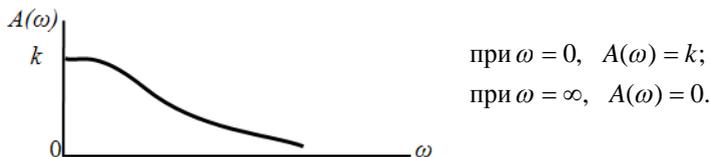


Рис. 3.7. График АЧХ аperiодического звена первого порядка

ФЧХ

$$\begin{aligned} \varphi(\omega) &= \arctg \frac{J(\omega)}{R(\omega)} = \arctg(-T\omega) = \arctg \frac{-\frac{kT\omega}{T^2\omega^2 + 1}}{\frac{k}{T^2\omega^2 + 1}} = \\ &= \arctg(-T\omega) = -\arctg T\omega. \end{aligned}$$

Знак (-) указывает, что вектор  $X_{\text{вых}}$  отстает по фазе от  $X_{\text{вх}}$ .

Задавая  $\omega = 0 \dots \infty$  можно построить график ФЧХ. Как видим, звено является минимально-фазовым.

Таким образом, при частоте

$$\omega = 0 \quad \varphi(\omega) = 0;$$

$$\omega = \infty \quad \varphi(\omega) = -\pi/2.$$

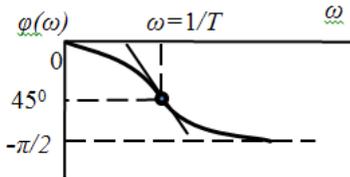


Рис. 3.8. График ФЧХ апериодического звена первого порядка

Расчетное выражение АФЧХ можно представить в виде

$$W(j\omega) = \frac{k}{\sqrt{1+T^2\omega^2}} e^{-\arctg T\omega}. \quad (3.10)$$

Выражение ЛАЧХ

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg \frac{k}{\sqrt{1+T^2\omega^2}}.$$

Построение ЛАЧХ проведем по двум асимптотам:

1. На низких частотах, т.е. когда  $T^2\omega^2 \ll 1$ , тогда  $L_1(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg 1 = 20 \lg k = f(\omega)$  - горизонтальная прямая, параллельная оси частот на расстоянии  $20 \lg k$ .

2. На высоких частотах, т.е. при  $T^2\omega^2 \gg 1$ , тогда  $L_2(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg T\omega = f(\omega)$  - наклонная прямая.

Определим наклон ЛАЧХ на одну декаду

$$\begin{aligned} \text{Наклон} &= L_2(10\omega) - L_2(\omega) = 20\lg k - 20\lg T10\omega - 20\lg k + 20\lg T\omega = \\ &= -20\lg 10 - 20\lg T\omega + 20\lg T\omega = -20\lg 10 = -20 \text{ дБ/дек}. \end{aligned}$$

Найдем частоту сопряжения  $\omega_1$  низкочастотной асимптоты с высокочастотной, т.е.  $\omega_1$ , при которой  $L_1(\omega_1) = L_2(\omega_1)$ :

$$20\lg k = 20\lg \frac{k}{T\omega_1}; \quad 20\lg k = 20\lg k - 20\lg T\omega_1$$

После сокращения имеем  $20\lg T\omega_1 = 20\lg 1$ , т.е.  $T\omega_1 = 1$  и  $\omega_1 = \frac{1}{T}$ .

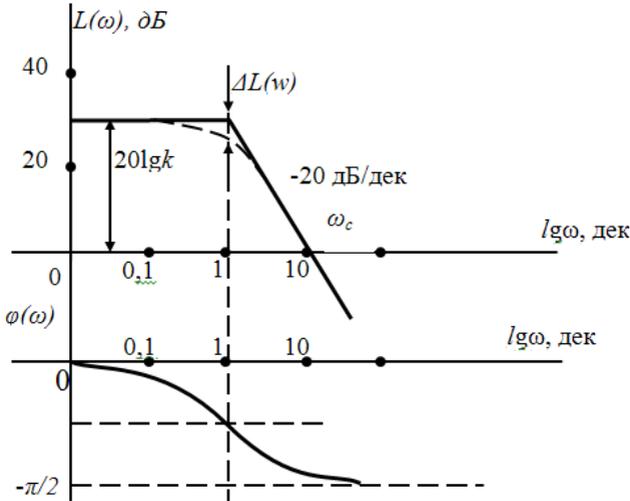


Рис. 3.9. Логарифмические частотные характеристики аperiodического звена первого порядка

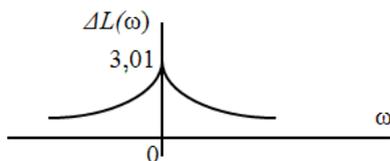
Определим частоту, при которой  $L(\omega)$  пересекает ось частот, т.е. так называемую **частоту среза**  $\omega_c$ , при которой  $L_2(\omega_c) = 0$ .

$$20\lg k - 20\lg T\omega_c = 0; \quad k = T\omega_c, \text{ откуда } \omega_c = \frac{k}{T}.$$

Фактическая ЛАЧХ будет плавной, максимальная ошибка будет при  $\omega = \omega_1$ . Оценим величину этой ошибки:

$$\begin{aligned} \Delta L(\omega_1) &= 20 \lg k - 20 \lg T \omega_1 - 20 \lg \frac{k}{\sqrt{T^2 \omega^2 + 1}} = \\ &= 20 \lg k - 20 \lg T \frac{1}{T} - 20 \lg \frac{k}{\sqrt{T^2 \left(\frac{1}{T}\right)^2 + 1}} = \\ &= 20 \lg k - 20 \lg 1 - 20 \lg k + 20 \lg \sqrt{2} = 3,01 \text{ дБ/дек.} \end{aligned}$$

В литературе имеется кривая поправок, где за условный ноль оси

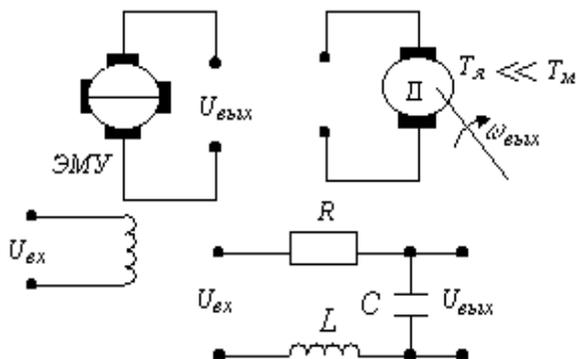


частот принята частота перехода  $\omega_1$ .

### 3.4. Звено второго порядка

Такие звенья состоят из трех элементов, два из которых способны накапливать энергию (вещество) и обмениваться между собой, а третий элемент препятствует этому обмену.

Примеры приведены ниже.



Получим дифференциальное уравнение звена на примере пассивного четырехполюсника (для упрощения записи опуская  $(t)$ ).

По второму закону Кирхгофа

$$U_{\text{ex}} = L \frac{di}{dt} + R \cdot i + U_c; U_{\text{вблх}} = U_c.$$

Ток, протекающий через конденсатор и его производная

$$i = C \frac{dU_{\text{вблх}}}{dt}; \frac{di}{dt} = C \frac{d^2 U_{\text{вблх}}}{dt^2}.$$

Обозначив  $\sqrt{LC} = T_2$ ,  $RC = T_1$ ,  $1 = k$ , получим

$$T_2^2 \frac{d^2 U_{\text{вблх}}}{dt^2} + T_1 \frac{dU_{\text{вблх}}}{dt} + U_{\text{вблх}} = U_{\text{ex}}.$$

Применим преобразование Лапласа и запишем в общих обозначениях

$$T_2^2 p^2 X_{\text{вблх}}(p) + T_1 p X_{\text{вблх}}(p) + X_{\text{вблх}}(p) = k X_{\text{ex}}(p);$$

$$(T_2^2 p^2 + T_1 p + 1) X_{\text{вблх}}(p) = k X_{\text{ex}}(p). \quad (3.11)$$

Тогда передаточная функция звена

$$W(p) = \frac{X_{\text{вблх}}(p)}{X_{\text{ex}}(p)} = \frac{k}{T_2^2 p^2 + T_1 p + 1}, \quad (3.12)$$

Характеристическое уравнение  $T_2^2 p^2 + T_1 p + 1 = 0$  имеет два корня

$$p_{1,2} = -\frac{T_1}{2T_2^2} \pm \sqrt{\frac{T_1^2}{(2T_2^2)^2} - \frac{1}{T_2^2}} = -\frac{T_1}{2T_2^2} \pm \frac{\sqrt{T_1^2 - (2T_2)^2}}{2T_2^2}. \quad (3.13)$$

В зависимости от соотношения  $2T_2$  и  $T_1$  корни характеристического уравнения и свойства звена будут различными.

1.  $2T_2 < T_1$  - корни характеристического уравнения вещественные, отрицательные, разные. В этом случае звено называется **аперио-**

дическим звеном 2-го порядка и характеристическое уравнение можно переписать в виде

$$(T_3 p + 1)(T_4 p + 1) = 0,$$

где  $T_2^2 = T_3 T_4$ ;  $T_1 = T_3 + T_4$ , т.е., апериодическое звено 2-го порядка получается как бы путем последовательного соединения двух апериодических звеньев 1-го порядка:

$$W(p) = \frac{k_1}{T_3 p + 1} \frac{k_2}{T_4 p + 1} = \frac{k}{(T_3 p + 1)(T_4 p + 1)} \quad \text{или} \quad (3.14)$$

$$W(p) = \frac{k}{T_3 T_4 p^2 + (T_3 + T_4) p + 1}. \quad (3.15)$$

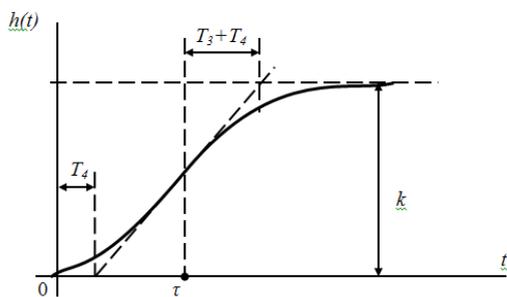
Примером такого звена может служить двигатель постоянного тока независимого возбуждения при  $4T_{я} < T_m$ , ЭМУ с постоянными времени управляющих обмоток  $T_y$  и короткозамкнутой обмотки  $T_k$ .

Иногда эти звенья представляют в виде параллельного соединения двух звеньев

$$W(p) = \frac{T_3}{T_3 - T_4} \frac{k}{T_3 p + 1} - \frac{T_4}{T_3 - T_4} \frac{k}{T_4 p + 1}. \quad (3.16)$$

Переходная характеристика (без вывода)

$$h(t) = k \left( 1 - \frac{T_3}{T_3 - T_4} e^{-\frac{t}{T_3}} + \frac{T_4}{T_3 - T_4} e^{-\frac{t}{T_4}} \right).$$



По экспериментально снятой  $h(t)$  можно определить  $T_2$  и  $T_1$  по специальной номограмме (Попов, с. 57) или решая систему

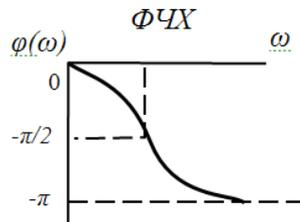
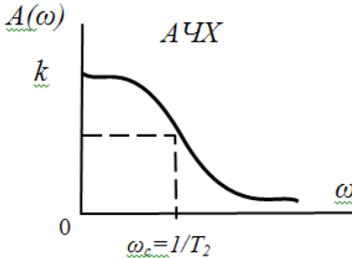
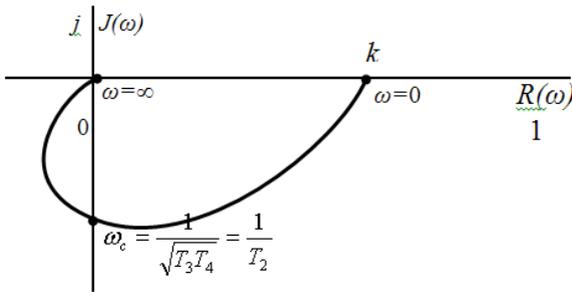
$$\begin{cases} T_2^2 = T_3 T_4 \\ T_1 = T_3 + T_4 \end{cases}$$

можно найти  $T_1$  и  $T_2$ , используя значение  $T_3 + T_4 = T_1$  из графика. Отсюда  $T_3 = T_1 - T_4$ , тогда  $T_2^2 = T_3 T_4$ .

Выражение АФЧХ

$$W(j\omega) = \frac{k}{T_3 T_4 (j\omega)^2 + (T_3 + T_4) j\omega + 1} = \frac{k[(1 - T_3 T_4 \omega^2) - j(T_3 T_4)^2 \omega^2]}{(1 - T_3 T_4 \omega^2)^2 + (T_3 T_4)^2 \omega^2}$$

Годограф АФЧХ



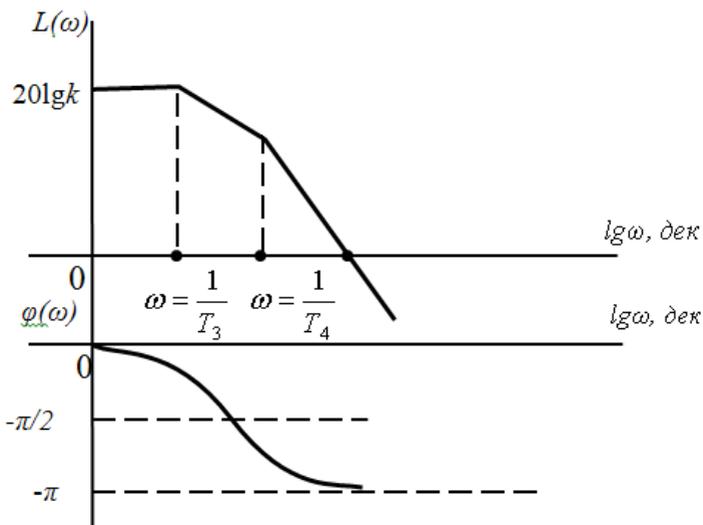
Уравнение ЛАЧХ  $L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg \frac{k}{\sqrt{1 + \omega^2 T_3^2} \sqrt{1 + \omega^2 T_4^2}}$ .

Построение ЛАЧХ также как для звена 1-го порядка проведем по асимптотам на низких, средних и высоких частотах.

При  $\omega < \frac{1}{T_3}$   $L(\omega) \approx 20 \lg k$  - 1-я асимптота.

При  $\frac{1}{T_3} < \omega < \frac{1}{T_4}$   $L(\omega) \approx \frac{k}{\omega T_3}$  - 2-я асимптота с наклоном -20 дБ/дек.

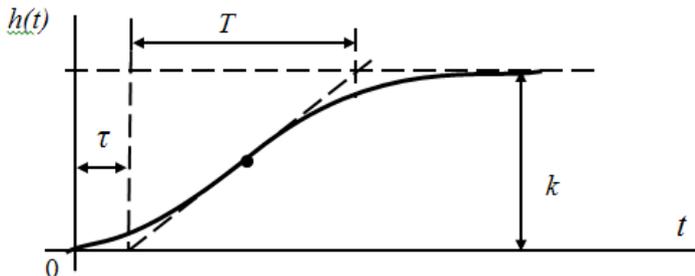
При  $\omega > \frac{1}{T_4}$   $L(\omega) \approx \frac{k}{\omega T_3 T_4}$  - 3-я асимптота с наклоном -40 дБ/дек.



В некоторых случаях апериодическое звено 2-го порядка представляют как последовательное соединение апериодического звена 1-го порядка и звена чистого запаздывания с передаточной функцией

$$W_2(p) = e^{-p\tau} \cdot \text{т.е. } W(p) = \frac{k}{Tp+1} e^{-p\tau}, \quad (3.17)$$

где  $\tau$  – время чистого запаздывания см. рис. ниже).



2.  $2T_2 > T_1$  – корни характеристического уравнения комплексно-сопряженные с отрицательной вещественной частью, т.е. общего вида.

В этом случае звено называется **колебательным звеном**.

Передаточная функция имеет общий вид

$$W(p) = \frac{k}{T_2^2 p^2 + T_1 p + 1}. \quad (3.18)$$

Характеристическое уравнение  $T_2^2 p^2 + T_1 p + 1 = 0$  имеет два корня

$$p_1 = -\delta + j\omega, \quad p_2 = -\delta - j\omega,$$

где  $\delta = -\frac{T_1}{2T_2^2}$ ;  $\omega = \frac{\sqrt{T_1^2 - (2T_2)^2}}{2T_2^2}$  (из уравнения (3.13)).

Переходная функция

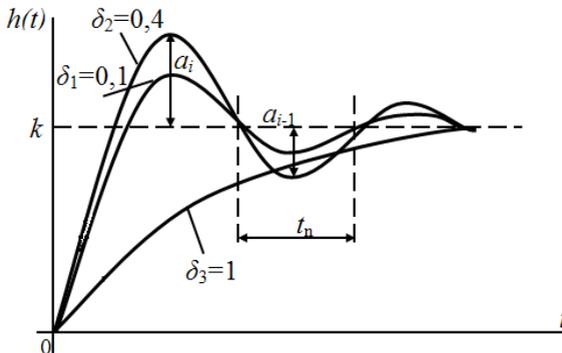
$$h(t) = k \left[ 1 - \frac{\omega_0}{\omega} \cdot e^{-\delta t} \sin(\omega t + \arctg \frac{\omega}{\delta}) \right],$$

где  $\omega_0 = \frac{1}{T_2}$  - собственная (резонансная) частота;

$\omega$  - частота затухающих колебаний;

$\delta$  - коэффициент затухания.

Задаваясь  $t = 0 \dots \infty$ , можно построить функцию  $h(t)$ , которая в зависимости от  $\delta$  имеет разные амплитуды и количество колебаний.



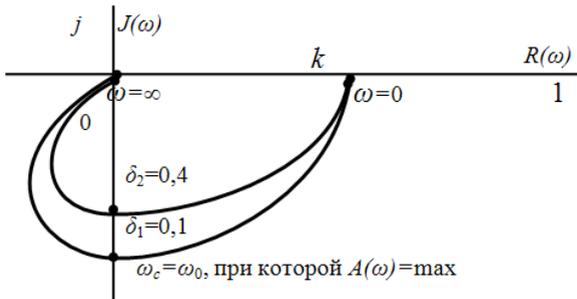
На рисунке  $t_n$  – время половины периода затухающих колебаний одной и той же частоты.

Если для звена неизвестны  $T_2$  и  $T_1$ , то, сняв экспериментально  $h(t)$ , можно определить  $T_2$  и  $T_1$  по следующим формулам

$$\omega = \frac{\pi}{t_n}; \quad \delta = \frac{\ln \frac{a_i}{a_{i-1}}}{t_n}; \quad T_1 = \frac{2\delta}{\omega^2 + \delta^2}; \quad T_1 = 2T_2^2\delta;$$

Годограф АФЧХ

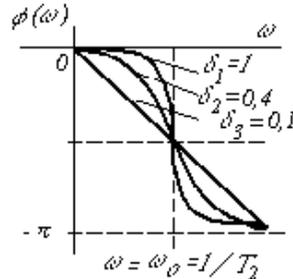
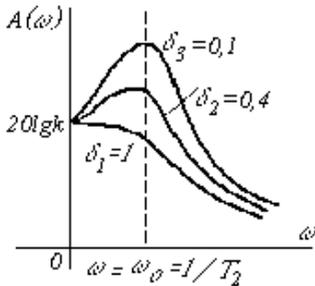
$$W(j\omega) = \frac{k}{T_2^2(j\omega)^2 p^2 + T_1 j\omega + 1} = \frac{k(1 - T_2^2\omega^2) - jkT_1\omega}{(1 - T_2^2\omega^2)^2 + T_1^2\omega^2}.$$



Таким образом, колебательное звено является звеном, создающим отстающий сдвиг по фазе в диапазоне  $\varphi(\omega) = 0 \dots -\pi$ .

Если при расчете  $T_2^2\omega^2 > 1$  (при больших  $\omega$ )  $\varphi(\omega) > 0$ , то надо искусственно ставить знак «-».

$$\text{АЧХ } A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{(1 - T_2^2\omega^2)^2 + (T_1\omega)^2}}. \quad \text{ФЧХ } \varphi(\omega) = \arctg \frac{k}{1 - T_2^2\omega^2}.$$





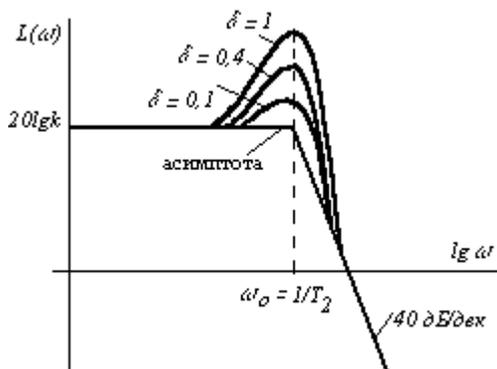
Расчетное уравнение АФЧХ

$$W(j\omega) = \frac{k}{\sqrt{(1-T_2^2\omega^2)^2 + (T_1\omega)^2}} e^{-\arctg \frac{T_1\omega}{1-T_2^2\omega^2}} \quad (3.19)$$

$$\text{ЛАЧХ } L(\omega) = 20 \lg \frac{k}{\sqrt{(1-T_2^2\omega^2)^2 + (T_1\omega)^2}}$$

Имеет асимптоты  $L(\omega) = 20 \lg k$  при  $\omega \ll \frac{1}{T_2}$ ;

$$L(\omega) = 20 \lg k - 40 \lg T_2 \omega \quad \text{при } \omega \gg \frac{1}{T_2}.$$



Точную ЛАЧХ можно заменить асимптотами, если  $0,38 < \delta < 0,71$ .

Дифференциальное уравнение колебательного звена иногда записывают

$$T^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\xi T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = kx(t), \quad (3.20)$$

где  $T = T_2$  - постоянная времени, характеризующая инерционность звена;

$$\xi = \frac{T_1}{2T_2} - \text{относительный коэффициент демпфирования } (0 \leq \xi \leq 1).$$

$$\text{Корни характеристического уравнения } p_{1,2} = -\delta \pm j \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T},$$

где  $\delta = \frac{\xi}{T}$  - декремент затухания (коэффициент затухания);

$$\omega = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T} - \text{угловая частота затухающих колебаний.}$$

Отношение  $\frac{\omega}{\delta}$  называется **степенью колебательности**

$$\mu = \frac{\omega}{\delta} = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}. \quad (3.21)$$

Максимальное значение  $h(t)$ , равное  $A_m(\omega) = \frac{k}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \approx \frac{k}{2\xi}$ , имеет

место при  $\omega = \omega_o = \omega_c \sqrt{1-2\xi^2}$ , т.е. максимум существует, если  $1-2\xi^2 > 0$ , т.е. при  $\xi < 0,707$ .

Отсюда следует, что чем меньше  $\xi$ , тем ближе  $\omega_o$  к  $\omega_c$  (собственной резонансной частоте), равной  $\frac{1}{T}$ .

Если  $W(p) = \frac{k}{T_1 T_2 p^2 + T_2 p + 1}$ , то параметры

$$\omega_o^2 = \frac{1}{T_1 T_2}; \quad 2\xi = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}.$$

Тогда ЛАЧХ

$$L(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \omega_o^2 - 20 \lg \sqrt{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + (2\xi \omega_o \omega)^2}.$$

Если  $\xi = 0,35 \div 0,71$ , то при  $\begin{cases} \omega < \omega_0; & L(\omega) = 20 \lg k; \\ \omega > \omega_0; & L(\omega) = -40 \text{ дБ/дек.} \end{cases}$

3.  $2T_2 = T_1$  – корни характеристического уравнения равные, отрицательные, вещественные.

В этом случае звено занимает промежуточное положение между апериодическим звеном 2-го порядка и колебательным звеном. Корни характеристического уравнения

$$p_1 = p_2 = -\frac{T_1}{2T_2^2} = -\frac{2T_2}{2T_2^2} = -\frac{1}{T_2};$$

При самом незначительном увеличении  $T_2$  или уменьшении  $T_1$  звено становится колебательным или наоборот, апериодическим 2-го порядка.

Переходная характеристика

$$h(t) = k \left[ 1 - e^{-\frac{t}{T_2}} \left( 1 + \frac{t}{T_2} \right) \right],$$

остальные уравнения те же, что и для случая 2.

4.  $T_1 = 0$  – корни мнимые.

В этом случае звено называется **консервативным звеном** с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{k}{T_2^2 p^2 + 1} = \frac{k}{1 + \frac{p^2}{\omega_0^2}}, \quad (3.22)$$

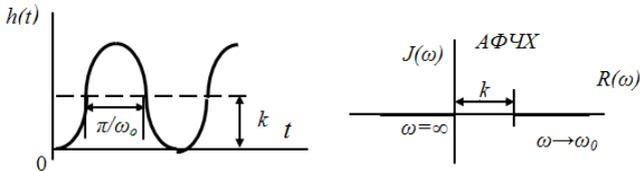
где  $\omega_0 = \frac{1}{T_2}$ .

Консервативное звено представляет собой идеализированный случай, когда можно пренебречь энергией рассеяния в звене (например, четырехполюсник при  $R \rightarrow 0$ ; синхронный двигатель СД с уравнением

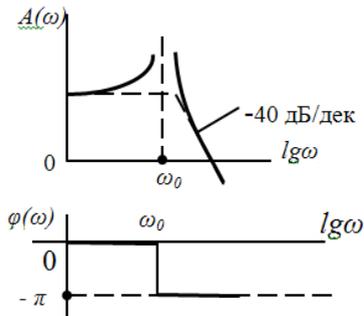
$$J \frac{d^2 \Delta \Theta}{dt^2} + \mu_0 \Delta \Theta = \mu_c).$$

Переходная характеристика

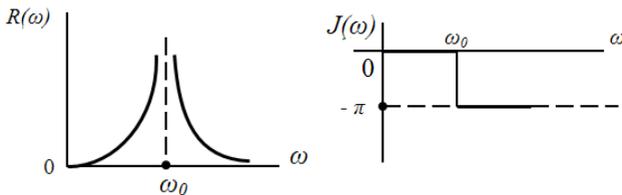
$$h(t) = k(1 - \cos \omega_0 t).$$



АЧХ и ФЧХ приведены ниже, причем  $A(\omega) = \frac{1}{|1 - \omega^2 T_2^2|}$ .



Вещественная и мнимая частотные характеристики имеют вид



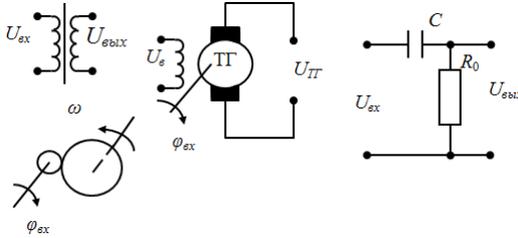
Таким образом, звено второго порядка хорошо пропускает низкочастотные сигналы и плохо – сигналы высокой частоты.

### 3.5. Дифференцирующее звено

#### Идеальное дифференцирующее звено

**Идеальным дифференцирующим звеном** называется звено, у которого выходная величина пропорциональна производной от входной, т.е. пропорциональна скорости изменения входной величины.

Примеры.



На примере трансформатора в цепи постоянного тока (без учета индуктивностей обмоток  $L$  и их взаимоиндуктивности  $M$ )

$$U_{\text{вых}}(t) = k \frac{dU_{\text{вх}}}{dt}, \quad (3.23)$$

где  $k$  – коэффициент трансформации, равный коэффициенту передачи звена.

Для тахогенератора  $U_{\text{ТГ}} = k\omega = k \frac{d\varphi}{dt}$ , т.е. если за вход ТГ считать частоту вращения  $\omega$ , то это безынерционное звено, а если угол поворота  $\varphi$  – то дифференцирующее звено.

Применим к УД преобразование Лапласа и запишем в общих обозначениях

$$X_{\text{вых}}(p) = kpX_{\text{вх}}(p).$$

По определению

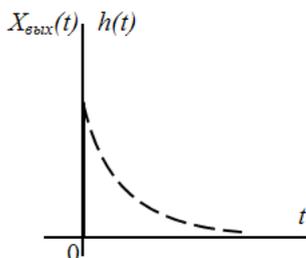
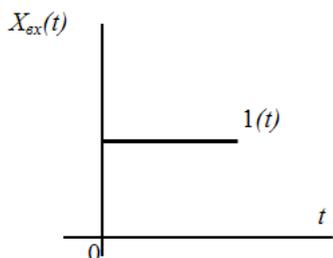
$$\frac{X_{\text{вых}}(p)}{X_{\text{вх}}(p)} = W(p) = k p. \quad (3.24)$$

Если подать на вход  $1(t)$ , то на выходе имеем переходную функцию  $h(t) = k \frac{d1(t)}{dt} = k \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Delta X_{\text{вх}}(t)}{\Delta t}$ .

Построение проведем по асимптотам

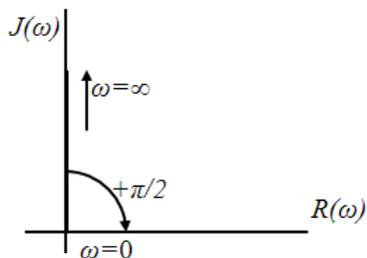
$$\text{При } t = 0 \quad h(t) = k \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} = \infty;$$

$$\text{При } t = \infty \quad h(t) = k \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{0}{\Delta t} = 0.$$



Таким образом, в начальный момент на выходе имеется бесконечно большой сигнал.

АФЧХ



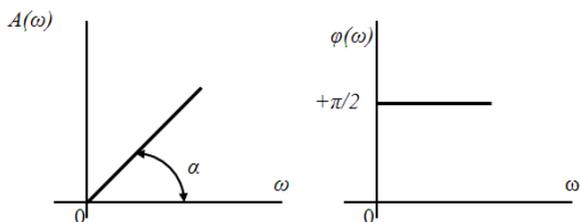
$$W(j\omega) = kj\omega ; R(\omega) = 0 ; J(\omega) = k\omega .$$

Уравнения амплитудной и фазовой частотных характеристик

$$\text{АЧХ } A(\omega) = \sqrt{(R(\omega))^2 + (J(\omega))^2} = \sqrt{0^2 + (k\omega)^2} = k\omega .$$

$$\text{ФЧХ } \varphi(\omega) = \arctg \frac{k\omega}{0} = +\frac{\pi}{2} ,$$

откуда видно, что дифференцирующее звено является опережающим. Графики АЧХ и ФЧХ приведены ниже.



Из АЧХ видно, что дифференцирующие свойства звена хорошо проявляются на высоких частотах.

ЛАЧХ, равный  $L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg k\omega$ , имеет наклон

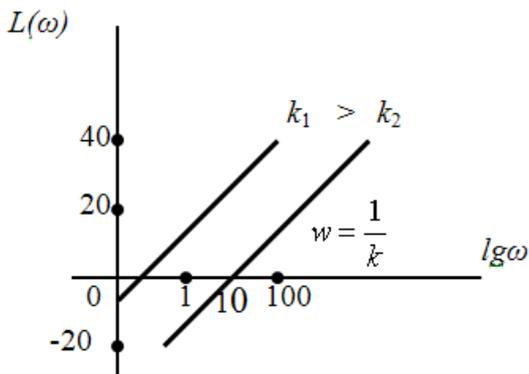
$$L(10\omega) - L(\omega) = 20 \lg k10\omega - 20 \lg k\omega = 20 \lg 10 = 20 \text{ дБ/дек} .$$

Найдем частоту среза, при которой  $L(\omega_c) = 0$ .

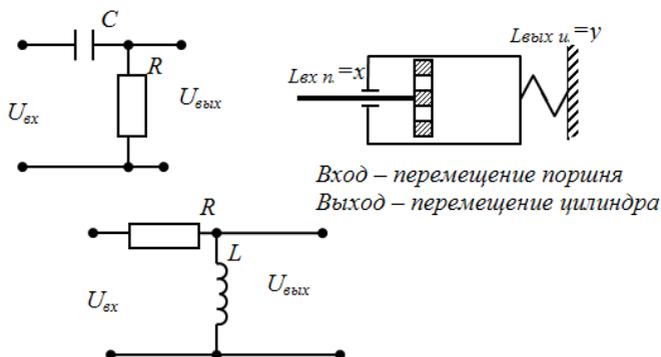
$$20 \lg k\omega_c = 0 = 20 \lg 1; k\omega_c = 1; \omega_c = \frac{1}{k} .$$

Если  $k = 1$ , то  $\omega_c = 1$ .

Таким образом, график ЛАЧХ имеет вид возрастающей прямой со сдвигом в зависимости от значения коэффициента передачи.



Реальное дифференцирующее звено



Для R-C цепочки  $U_{\text{вых}} = U_R$ ;  $U_{\text{вх}} = U_C + U_R$ ;

$$i = C \frac{dU_C}{dt} = C \frac{d(U_{\text{вх}} - U_{\text{вых}})}{dt} = C \frac{dU_{\text{вх}}}{dt} - C \frac{dU_{\text{вых}}}{dt} = \frac{U_{\text{вых}}}{R};$$

$$RC \frac{dU_{\text{вых}}}{dt} + U_{\text{вых}} = RC \frac{dU_{\text{вх}}}{dt}.$$

В общем виде обозначим  $RC = T$ ;  $1 = k$ , тогда

$$T \frac{dU_{\text{вых}}}{dt} + U_{\text{вых}} = kT \frac{dU_{\text{вх}}}{dt};$$

$$(Tp + 1)U_{\text{вых}}(p) = kTpU_{\text{вх}}(p).$$

Тогда передаточная функция звена

$$W(p) = \frac{kTp}{Tp + 1}. \quad (3.25)$$

Характеристическое уравнение  $Tp + 1 = 0$  имеет корень  $p = -\frac{1}{T}$ .

Получим уравнение движения для поршня с цилиндром.

При перемещении поршня жидкость перетекает через отверстие в поршне из одной полости в другую. Сила сопротивления (сила вязкого трения)  $F_g$  тождественно равна относительной скорости поршня и цилиндра

$$F_g = k_g \left( \frac{dy}{dt} - \frac{dx}{dt} \right),$$

где  $k_g$  – коэффициент сопротивления, Н/(м/с).

Сила упругости пружины

$$F_n = C_n y,$$

где  $C_n$  – коэффициент жесткости пружины, Н/м.

Пренебрегая силами трения и инерции подвижных масс и приравнивая  $F_g = F_n$ , получим уравнение свободного движения цилиндра

$$k_g \frac{dy}{dt} = C_n y = k_g \frac{dx}{dt},$$

которое совпадает с (3.23), если обозначить  $\frac{k_g}{C_n} = T = k$ .

Отметим, что  $k$  может быть равно  $T$ , но в общем случае они могут не совпадать.

Применим формулу Хевисайда для определения  $h(t)$

$$h(t) = W(0) + \sum \frac{R(p_i)}{p_i D'(p_i)};$$

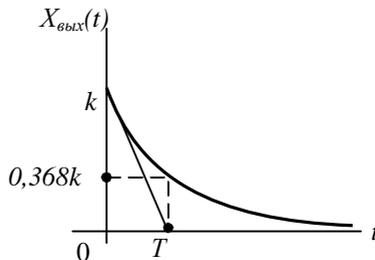
$$W(0) = 0. \quad h(t) = 0 + \frac{kT \left( -\frac{1}{T} \right)}{-\frac{1}{T}} e^{\frac{t}{T}}, \text{ т.е. } h(t) = ke^{\frac{t}{T}}.$$

Найдем асимптоты и построим переходную характеристику:

При  $t=0$ ;  $h(t)=k$ ; при  $t=\infty$ ;  $h(t)=0$ ;

При  $t=T$ ;  $h(t)=0,368 \cdot k$ .

Комплексная передаточная функция (АФЧХ)



$$W(j\omega) = \frac{kTj\omega}{Tj\omega + 1}.$$

Освободимся от иррациональности в знаменателе и найдем  $R(\omega)$  и  $J(\omega)$ :

$$W(j\omega) = \frac{kTj\omega(-Tj\omega + 1)}{(Tj\omega + 1)(-Tj\omega + 1)} = \frac{kT^2\omega^2}{T^2\omega^2 + 1} + j \frac{kT\omega}{T^2\omega^2 + 1}.$$

Отсюда вещественная и мнимая частотные характеристики

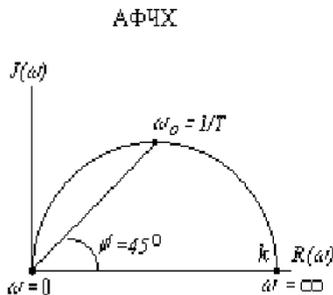
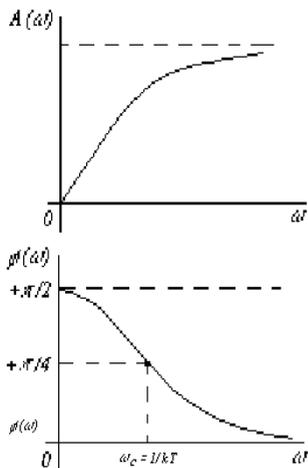
$$R(\omega) = \frac{kT^2\omega^2}{T^2\omega^2 + 1}; \quad J(\omega) = \frac{kT\omega}{T^2\omega^2 + 1}.$$

При  $\omega = 0$ ;  $R(\omega) = 0$ ;  $J(\omega) = 0$ ;  
 при  $\omega = \infty$ ;  $R(\omega) = k$ ;  $J(\omega) = 0$ ,

т.е. АФЧХ лежит в 1-м квадрате (см. для идеального дифференцирующего звена), т.к. положительный фазовый угол  $\varphi$  откладывается против часовой стрелки. Амплитудные и фазовые характеристики

$$\text{АЧХ } A(\omega) = \frac{kT\omega}{\sqrt{T^2\omega^2 + 1}},$$

$$\text{ФЧХ } \varphi(\omega) = \text{arctg} \frac{1}{T\omega}.$$



ЛАЧХ

$$L(\omega) = 20 \lg \frac{kT\omega}{\sqrt{T^2\omega^2 + 1}} = 20 \lg kT\omega - 20 \lg \sqrt{T^2\omega^2 + 1}.$$

Построение проведем по асимптотам:

1.  $T^2\omega^2 \ll 1$ ;  $L_1(\omega) = 20 \lg kT\omega = f(\omega)$ .

Наклон =  $20 \lg kT10\omega - 20 \lg kT\omega = 20 \lg 10 = 20$  дБ/дек.

2.  $T^2\omega^2 \gg 1$ ;  $L(\omega) = 20 \lg kT\omega - 20 \lg T\omega = 20 \lg k$  дБ.

Частота сопряжения  $L_1(\omega) = L_2(\omega)$ ;  $20 \lg kT\omega = 20 \lg k$ .

Отсюда  $\omega_1 = \frac{1}{T}$ .

Частота среза находится при  $L_1(\omega) = 0$ :  $20 \lg kT\omega = 0$ .

Отсюда  $\omega_c = \frac{1}{kT}$ .

Реальная ЛАЧХ идет плавно, ошибка не больше 3,01 дБ.

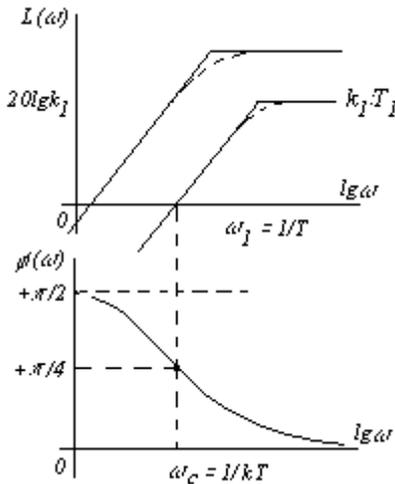


Рис. 3.10. Логарифмические частотные характеристики реального дифференцирующего звена

### 3.6. Интегрирующее звено (а статическое, нейтральное)

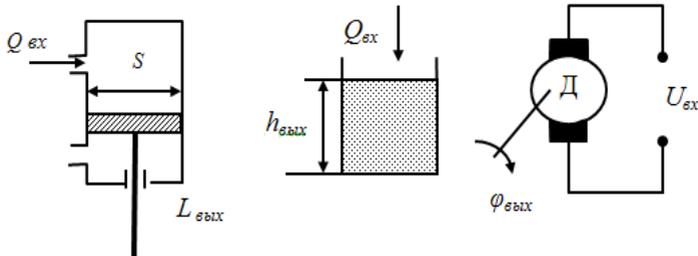
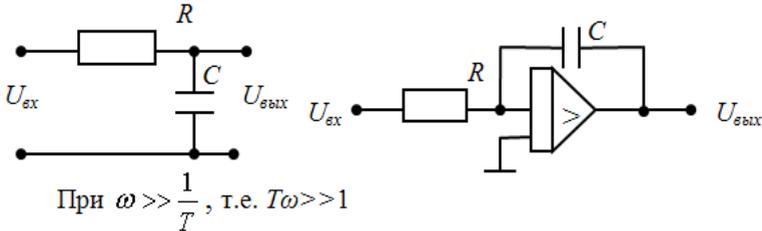
#### Идеальное интегрирующее звено

Описывается уравнением

$$\frac{dX_{\text{вых}}(t)}{dt} = kX_{\text{вх}}(t), \quad (3.26)$$

проинтегрировав которое выясним, что это - звено, у которого выходная величина пропорциональна интегралу от входной величины

$$X_{\text{вых}}(t) = k \int X_{\text{вх}}(t) dt .$$



Для гидроцилиндра:  $SdL_{\text{вых}}(t) = Q_{\text{вх}}(t)dt$ , т.е.  $\frac{dL_{\text{вых}}(t)}{dt} = \frac{1}{S}Q_{\text{вх}}(t)$ ,

где  $S$ - площадь поршня,  $\text{м}^2$ .

Для двигателя:  $\omega = \frac{d\varphi_{\text{вых}}}{dt} = kU_{\text{вх}}$ ,

где  $k \approx 360 \frac{2\pi n_n}{U_{\text{дн}}}$ ,  $\frac{\text{град}}{(\text{В} \cdot \text{с})}$ ; При необходимости можно учитывать посто-

янную времени  $T = J \frac{2\pi n_n}{M_n}$ , с.

Применим преобразование Лапласа к исходному уравнению

$$pX_{\text{вых}}(p) = kX_{\text{вх}}(p).$$

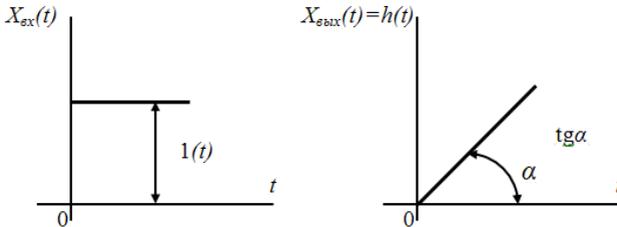
По определению передаточной функции  $W(p)$

$$\frac{X_{\text{вых}}(p)}{X_{\text{вх}}(p)} = W(p) = \frac{k}{p}. \quad (3.27)$$

Переходная функция:

$$H(p) = W(p) \frac{1}{p} = \frac{k}{p^2}.$$

Применив обратное преобразование Лапласа, найдем  $h(t)=k \cdot t$ , т.е. имеется  $k$  - условный коэффициент передачи звена, а  $X_{\text{вых}}(t) \rightarrow \infty$ .



АФЧХ

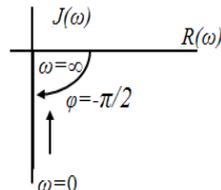
$$W(j\omega) = \frac{k}{j\omega}.$$

Найдем вещественную и мнимую частотную характеристики

$$W(j\omega) = \frac{k(-j\omega)}{j\omega(-j\omega)} = -j \frac{k\omega}{\omega^2} = -\frac{k}{\omega},$$

т.е.  $R(\omega)=0$ ;  $J(\omega) = -\frac{k}{\omega}$ .

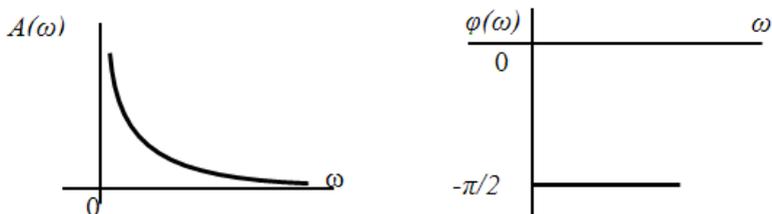
При  $\omega=0$ ;  $R(\omega)=0$ ;  $J(\omega)=-\infty$ ;  
 при  $\omega=\infty$ ;  $R(\omega)=0$ ;  $J(\omega)=0$ ,  
 т.е. график мнимой оси ( $-j$ ).



Таким образом, интегрирующее звено является запаздывающим и для идеального интегрирующего звена сдвиг фазы не зависит от частоты

и равен  $\varphi(\omega) \neq f(\omega) = -\frac{\pi}{2}$ .

АЧХ  $A(\omega) = \sqrt{0^2 + (-\frac{k}{\omega})^2} = k/\omega$ , т.е. пропускает сигнал тем сильнее, чем меньше его частота;



$$\text{ФЧХ } \varphi(\omega) = \text{arctg} \frac{-\frac{k}{\omega}}{0} = \text{arctg}(-\infty) = -\frac{\pi}{2},$$

$$\text{Общая форма АФЧХ } W(j\omega) = \frac{k}{\omega} e^{-j\frac{\pi}{2}}.$$

$$\text{ЛАЧХ } L(\omega) 20 \lg \frac{k}{\omega}.$$

$$\text{Наклон} = 20 \lg \frac{k}{10\omega} - 20 \lg \frac{k}{\omega} = -20 \text{ дБ/дек}$$

Частота среза  $L(\omega) = 0$ ;  $20 \lg \frac{k}{\omega} = 0$ ;  $20 \lg k = 20 \lg \omega$ ;  $\omega_c = k$ .

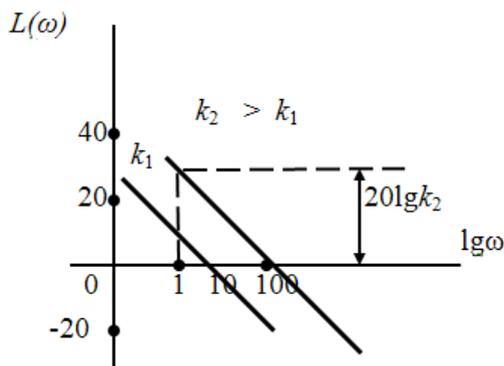


Рис. 3.11. Логарифмические частотные характеристики

### Реальное интегрирующее звено

Учитывает инерционность звена и описывается дифференциальным уравнением

$$T \frac{d^2 X_{\text{вых}}(t)}{dt^2} + \frac{dX_{\text{вых}}(t)}{dt} = k X_{\text{вх}}(t); \quad (3.28)$$

$$(Tp^2 + p)X_{\text{вых}}(p) = kX_{\text{вх}}(p).$$

Передаточная функция звена

$$W(p) = \frac{k}{p(Tp + 1)}, \quad (3.29)$$

т.е. реальное интегрирующее звено можно рассматривать как последовательное соединение идеального интегрирующего звена с апериодическим звеном 1-го порядка.

$H(p) = W(p) \frac{1}{p}$  – изображение переходной функции

$$H(p) = \frac{k}{p(Tp + 1)} \frac{1}{p}.$$

Обратное преобразование Лапласа дает переходную функцию

$$h(t) = kt - kT(1 - e^{-\frac{t}{T}}).$$

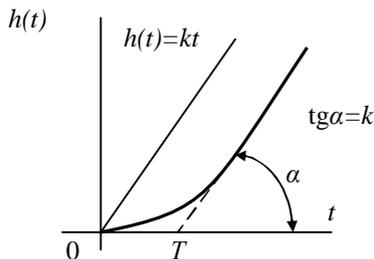


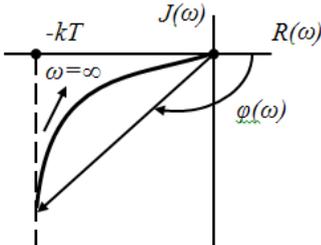
Рис. 3.12. Переходные характеристики идеального и реального интегрирующего звена

При больших значениях  $t$  реальное интегрирующее звено приближается по своим интегрирующим свойствам к идеальному звену.

АФЧХ

$$W(j\omega) = \frac{k}{j\omega(Tj\omega+1)} = \frac{k}{j\omega - T\omega^2} = \frac{k(-j\omega - T\omega^2)}{(j\omega - T\omega^2)(-j\omega - T\omega^2)} = -\frac{kT\omega^2}{\omega^2 + T^2\omega^4} - j\frac{k\omega}{\omega^2 + T^2\omega^4}.$$

$$R(\omega) = -\frac{kT\omega^2}{\omega^2 + T^2\omega^4}; \quad J(\omega) = -\frac{k\omega}{\omega^2 + T^2\omega^4}.$$



При  $\omega = 0$   
 $R(\omega) = -kT; J(\omega) = -\infty;$   
 при  $\omega = \infty$   
 $R(\omega) = 0; J(\omega) = 0,$   
 т.е. АФЧХ лежит в III квадранте.

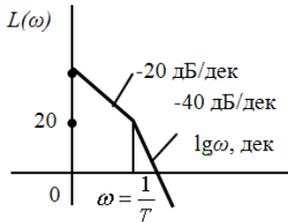
АЧХ  $A(\omega) = \sqrt{\frac{k^2 T^2 \omega^4 + k^2 \omega^2}{(\omega^2 + T^2 \omega^4)^2}} = \frac{k}{\omega \sqrt{1 + T^2 \omega^2}}.$

ФЧХ  $\varphi(\omega) = \text{arctg} \frac{-\frac{k\omega}{\omega \sqrt{1 + T^2 \omega^2}}}{-\frac{kT\omega^2}{\omega \sqrt{1 + T^2 \omega^2}}} = -\text{arctg} \frac{1}{T\omega}.$

Знак «-» учитывает отстающий сдвиг фаз.

ЛАЧХ

$$L(\omega) = 20 \lg \frac{k}{\omega \sqrt{1 + T^2 \omega^2}}.$$



### 3.7. Запаздывающее звено (звено чистого запаздывания)

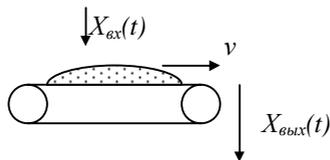
Звено передает входной сигнал на выход без искажения, но с некоторым запаздыванием (транспортирующие устройства и технологические аппараты типа конвейеров, шаровых мельниц и др.)

Уравнение движения запаздывающего звена

$$X_{\text{вых}}(t) = X_{\text{вх}}(t - \tau), \quad (3.30)$$

где  $\tau$  - время чистого (транспортного) запаздывания  $\tau = \frac{L}{v}$ , с.

Рассмотрим свойства звена на примере конвейера.

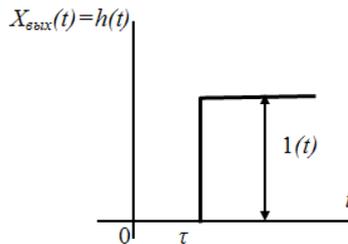
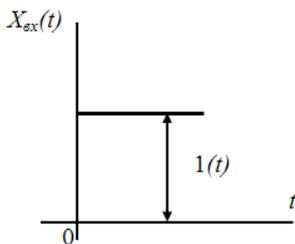


Если на вход подать воздействие  $1(t)$ , то на выходе получится тот же сигнал  $1(t)$ , но со сдвигом во времени на величину  $\tau$ , поэтому

$$h(t) = 1(t - \tau).$$

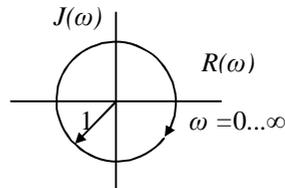
Если на вход запаздывающего звена подать синусоидальное воздействие, то на выходе получится то же самое синусоидальное воздействие, но с отставанием во времени на величину  $\tau$

$$X_{\text{вх}} = Ae^{j\omega t}, \quad X_{\text{вых}} = Ae^{j\omega(t-\tau)}.$$

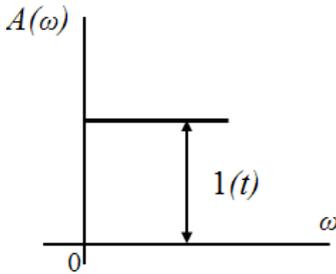


АФЧХ

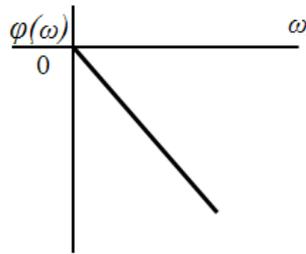
$$W(j\omega) = \frac{Ae^{j\omega(t-\tau)}}{Ae^{j\omega t}} = e^{-j\omega\tau}.$$



АЧХ  $A(\omega) = 1 \neq f(\omega)$ .



ФЧХ  $\varphi(\omega) = -\omega\tau$ .

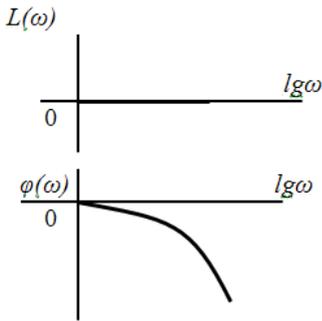


Из выражения для АФЧХ  $W(j\omega)$  обратной подстановкой получим передаточную функцию

$$W(p) = e^{-p\tau}. \quad (3.31)$$

ЛАЧХ  $L(\omega) = 20 \lg 1 = 0$ .

ФЧХ  $\varphi(\omega) = -\omega\tau$ .



Если запаздывающее звено входит в контур САУ, то характеристическое уравнение системы будет уже не простым алгебраическим, а трансцендентным, что усложняет их математическое описание и расчеты. Поэтому выражение  $W(p) = e^{-p\tau}$  раскладывают в ряд Пада и, учитывая только первые два члена ряда, приближенно заменяют обычной дробно-рациональной передаточной функцией

$$W(p) \approx \frac{\frac{1}{12} \tau^2 p^2 - \frac{6}{12} \tau p + 1}{\frac{1}{12} \tau^2 p^2 + \frac{6}{12} \tau p + 1} \approx \frac{1 - 0,5\tau p}{1 + 0,5\tau p}, \quad (3.32)$$

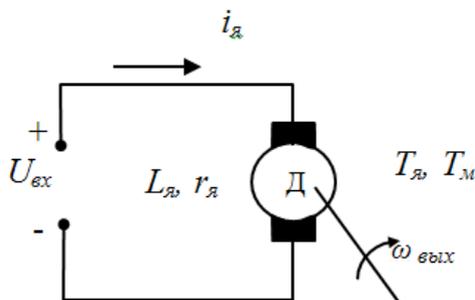
или в виде последовательного соединения  $n$  инерционных звеньев первого порядка с постоянными времени  $T_i = \tau/n$

$$W(p) \approx \frac{1}{\left(\frac{\tau}{n} p + 1\right)^n}. \quad (3.33)$$

#### 4. ПРИМЕРЫ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ ЭЛЕМЕНТОВ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Функциональные элементы, входящие в состав САУ, могут иметь самую различную физическую природу, конструкции, исполнение и принцип действия. Однако общность математических выражений, связывающих входные и выходные величины элементов, позволяет получить их математическое описание в виде передаточных функций.

##### 4.1. Двигатель постоянного тока независимого возбуждения



Уравнения баланса электромагнитной и электромеханической энергий двигателя

$$U_я = r_я i_я + L_я \frac{di_я}{dt} + E; \quad (4.1)$$

$$J \frac{d\omega}{dt} = M_д - M_с = c_м i_я - M_с. \quad (4.2)$$

где  $E = c_e \omega$  - противоЭДС двигателя;

$M_д = c_м i_я$  - момент, развиваемый двигателем.

Решим совместно уравнения (4.1) и (4.2), для чего выразим из (4.2) ток якоря

$$i_я = \frac{J}{c_м} \frac{d\omega}{dt} + \frac{1}{c_м} M_с,$$

найдем первую производную  $\frac{di_{я}}{dt} = \frac{J}{c_m} \frac{d^2\omega}{dt^2} + \frac{1}{c_m} \frac{dM_c}{dt}$

и подставим полученные выражения в (4.1)

$$U_{я} = \frac{r_{я}J}{c_m} \frac{d\omega}{dt} + \frac{r_{я}}{c_m} M_c + \frac{L_{я}J}{c_m} \frac{d^2\omega}{dt^2} + \frac{L_{я}}{c_m} \frac{dM_c}{dt} + c_e \omega.$$

Перенесем входные переменные вправо и перепишем в виде

$$\frac{L_{я}J}{c_m} \frac{d^2\omega}{dt^2} + \frac{r_{я}J}{c_m} \frac{d\omega}{dt} + c_e \omega = U_{я} - \left( \frac{L_{я}}{c_m} \frac{dM_c}{dt} + \frac{r_{я}}{c_m} M_c \right).$$

Разделим почленно обе части на  $c_e$

$$\frac{L_{я}J}{c_e c_m} \frac{d^2\omega}{dt^2} + \frac{r_{я}J}{c_e c_m} \frac{d\omega}{dt} + \omega = \frac{1}{c_e} U_{я} - \left( \frac{L_{я}}{c_e c_m} \frac{dM_c}{dt} + \frac{r_{я}}{c_e c_m} M_c \right),$$

первый член левой части умножим и разделим на  $r_{я}$

$$\frac{L_{я}}{r_{я}} \frac{r_{я}J}{c_e c_m} \frac{d^2\omega}{dt^2} + \frac{r_{я}J}{c_e c_m} \frac{d\omega}{dt} + \omega = \frac{1}{c_e} U_{я} - \frac{r_{я}}{c_e c_m} \left( \frac{L_{я}}{r_{я}} \frac{dM_c}{dt} + M_c \right)$$

и далее введем обозначения

$$\frac{L_{я}}{r_{я}} = T_{я} - \text{электромагнитная постоянная времени двигателя, с;}$$

$$\frac{r_{я}J}{c_e c_m} = T_m - \text{электрохимическая постоянная времени, с;}$$

$$\frac{1}{c_e} = k_o^U - \text{коэффициент передачи двигателя по управляющему воздействию,}$$

вию, 1/(В с);

$\frac{r_{я}}{c_e c_m} = k_o^M$  - коэффициент передачи двигателя по возмущающему воздействию, 1/(Н м с).

Конструктивные постоянные двигателя определяются по номинальным данным по приведенным ниже формулам.

Применим прямое преобразование Лапласа и получим передаточные функции двигателя:

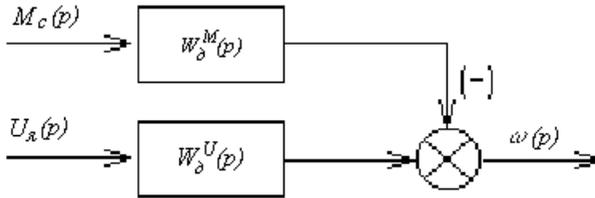
по управляющему воздействию (при  $M_c = const$ )

$$W_{\delta}^U(p) = \frac{k_{\delta}^U}{T_{я}T_{м}p^2 + T_{м}p + 1}; \quad (4.3)$$

по возмущающему воздействию (при  $U_{я} = const$ )

$$W_{\delta}^M(p) = \frac{-k_{\delta}^M(T_{я}p + 1)}{T_{я}T_{м}p^2 + T_{м}p + 1}. \quad (4.4)$$

Структурная схема двигателя



В тех случаях, когда САУ, кроме контура регулирования скорости вращения, содержит еще обратную связь по току якорной цепи, приходится учитывать внутреннюю обратную связь по ЭДС. Исходные уравнения равновесия (1) и (2) перепишем в виде

$$r_{я}i_{я} + L_{я} \frac{di_{я}}{dt} = U_{я} - c_e\omega; \quad (4.5)$$

$$J \frac{d\omega}{dt} = c_m i_{я} - M_c. \quad (4.6)$$

Вынесем  $r_{я}$  в (4.5) за скобки и проинтегрируем (4.6)

$$r_{я} \left( i_{я} + \frac{L_{я}}{r_{я}} \frac{di_{я}}{dt} \right) = U_{я} - c_e\omega; \quad (4.7)$$

$$\omega = c_m \int_0^t (i_{я} - \frac{1}{c_m} M_c) dt . \quad (4.8)$$

$$(T_{я} \frac{di_{я}}{dt} + i_{я}) = \frac{1}{r_{я}} (U_{я} - c_e \omega); \quad (4.9)$$

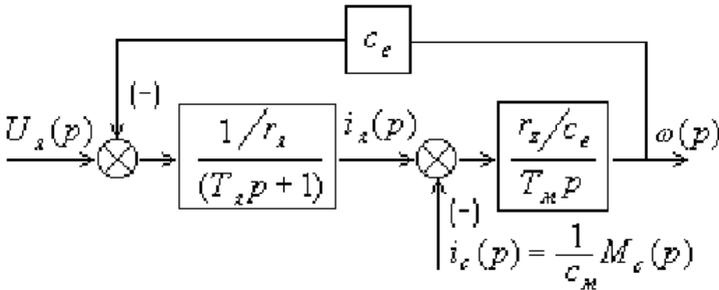
$$\omega = \frac{c_m}{J} \frac{r_z c_e}{r_z c_e} \int_0^t (i_{я} - \frac{1}{c_m} M_c) dt = \frac{1}{T_m} \frac{r_z}{c_e} \int_0^t (i_{я} - \frac{1}{c_m} M_c) dt . \quad (4.10)$$

Применим прямое преобразование Лапласа и разрешим уравнения (4.8) - (4.10) относительно регулируемых координат

$$i_{я}(p) = \frac{1/r_{я}}{(T_{я}p + 1)} [U_{я}(p) - c_e \omega(p)]; \quad (4.11)$$

$$\omega = \frac{1}{p} \frac{r_z}{T_m c_e} [i_{я}(p) - \frac{1}{c_m} M_c(p)]. \quad (4.12)$$

В этом случае двигатель представляется следующей структурной схемой



Конструктивные постоянные можно определить по номинальным данным двигателя

$$c_e = 2\pi c_m = \frac{U_{ян} - r_{я} i_{ян}}{\Phi_n n_n}, \quad (4.13)$$

где  $\Phi_n$  - номинальное значение магнитного потока, определяемое по формуле

$$\Phi_n = \frac{2a30(U_{ян} - r_{я} i_{ян})}{2pw_{я}n_n}, \quad (4.14)$$

где  $p$ ,  $a$ ,  $w_{я}$  - число пар полюсов, число активных проводников и число витков обмоток якоря двигателя.

Поскольку в технических характеристиках двигателя значение индуктивности якоря не приводится, то его приходится вычислять по приближенной формуле

$$L_{я} = \beta \frac{U_{ян}}{2\pi r n_n i_{ян}} = k \frac{U_{ян}}{2 p n_n i_{ян}}, \quad (4.15)$$

где  $\beta$  принимается равным 0,25 для компенсированных двигателей, 0,6 – для некомпенсированных двигателей, а значение  $k$  принимается из диапазона (6-8) для быстроходных некомпенсированных машин, (8-12) – для нормальных некомпенсированных машин и (5-6) – для компенсированных машин.

Значение электромагнитной постоянной времени можно определить по формуле

$$T_{я} = \beta \frac{U_{ян}}{2\pi r n_n i_{ян} r_{я}} \quad (4.16)$$

и она составляет 0,01 – 0,5 с, а значение электромеханической постоянной времени составляет от 0,5 до 5,0 с в зависимости от мощности двигателя.

Электродвигатели постоянного тока независимого возбуждения небольшой мощности широко применяют в качестве серводвигателей или интегрирующих устройств. В этих случаях можно пренебречь электромагнитной и электромеханической инерциями двигателя. Тогда можно пренебречь обеими постоянными времени и рассматривать серводвигатель как простое усилительное звено.

Уравнение движения двигателя относительно угла поворота вала

$$\varphi = \int_0^t \omega dt = k_{\varphi} \int_0^t U_{я} dt. \quad (4.17)$$

Применим преобразование Лапласа и получим передаточную функцию двигателя как идеального интегрирующего звена

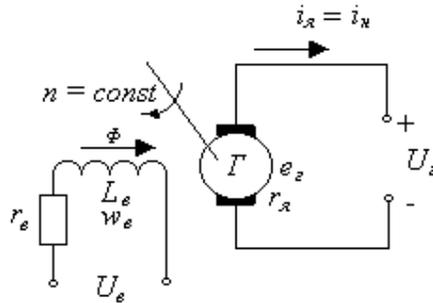
$$W(p) = \frac{\varphi(p)}{U_{я}(p)} = \frac{k_{\varphi}}{p}. \quad (4.18)$$

Здесь условный коэффициент передачи (т.к. интегрирующее звено не имеет установившегося режима) можно определить по номинальным данным двигателя

$$k_{\varphi} \approx 360 \frac{n_n}{U_{ян}} \text{ град}/(B.c). \quad (4.19)$$

#### 4.2. Генератор постоянного тока независимого возбуждения

Принципиальная схема генератора при постоянной скорости вращения вала и управлении напряжением возбуждения приведена ниже. Следует иметь в виду, что под величиной  $r_a$  понимается полное сопротивление якорной цепи, равное сумме сопротивлений обмоток якоря генератора и нагрузки.



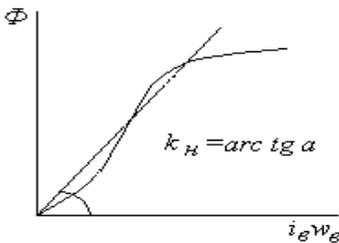
Как известно, выходное напряжение генератора равно

$$U_2 = e_2 - i_a r_a. \quad (4.20)$$

$$\text{Эдс генератора вычисляется как } e_2 = c_e n \Phi, \quad (4.21)$$

где  $c_e = pN/a$  – конструктивная постоянная, определяемая числом пар полюсов  $p$ , числом параллельных ветвей обмотки якоря  $p$  и числом активных проводников якоря  $N$ , равным удвоенному числу витков обмотки якоря;

$\Phi$  – магнитный поток генератора, являющийся функцией намагничивающих сил, т.е. ампервитков  $i_e W_e$  обмотки возбуждения, которая, как известно, имеет следующий нелинейный вид.



Эту зависимость можно линеаризовать, как показано на рисунке, т.е.  $\Delta \Phi = k_H \Delta(i_e W_e)$ .

У серийных генераторов постоянного тока коэффициент наклона составляет  $k_H = 10^{-4} - 10^{-5}$  Вб/А.

С другой стороны есть уравнение баланса электромагнитной энергии обмотки возбуждения генератора

$$U_e = i_e r_e - e_L, \quad (4.22)$$

где  $U_e$  – напряжение, приложенное к обмотке возбуждения;

$i_g, r_g$  – ток и активное сопротивление возбуждения генератора;

$e_L$  – ЭДС самоиндукции, определяемая скоростью изменения полного потокосцепления  $\Psi$  между витками обмотки возбуждения и проводниками якоря

$$e_L = -\frac{d\Psi}{dt} = -2p\sigma w_g \frac{d\Phi}{dt}, \quad (4.23)$$

где  $\sigma = 1,2$  – коэффициент, учитывающий рассеяние магнитного потока при современных материалах и конструкциях.

Линейризованной характеристике намагничивания соответствует постоянное значение индуктивности

$$L = \frac{\Delta\Psi}{\Delta i_g} = \frac{2p\sigma w_g \Phi}{i_g} = 2p\sigma w_g^2 k_n. \quad (4.24)$$

Решим совместно уравнения (4.20 – 4.24) относительно выходной  $U_z$  и входной  $U_g$  величин, для чего подставим (4.21) в (4.20)

$$U_z = c_e n \Phi - i_n r_n, \quad (4.25)$$

далее найдем значение потока из характеристики намагничивания

$$U_z = c_e n k_n w_g i_g - i_n r_n, \quad (4.26)$$

а в (4.22) подставим значение ЭДС самоиндукции с учетом выражения для индуктивности

$$U_g = i_g r_g + L_g \frac{di_g}{dt} \quad (4.27)$$

и применим к ним прямое преобразование Лапласа

$$U_z(p) = c_e n k_n w_g i_g(p) - r_n i_n(p); \quad (4.28)$$

$$U_g(p) = r_g i_g(p) + L_g p i_g(p). \quad (4.29)$$

Обозначим в (4.28)  $c_e n k_n w_g / r_g = k_z$  - коэффициент передачи генератора по управляющему воздействию,  $r_n = k_z^f$  - коэффициент передачи генератора по возмущающему воздействию, а в (4.29)  $L_g / r_g = T_z$  - постоянная времени генератора и получим преобразованное по Лапласу уравнение движения генератора постоянного тока

$$U_z(p) = \frac{k_z}{T_z p + 1} U_g(p) - k_z^f i_n(p), \quad (4.30)$$

т.е. структурная схема генератора такая же, как и двигателя постоянного тока по первому варианту.

Если принять ток нагрузки постоянным, то  $i_n(p) = 0$ , тогда можно получить передаточную функцию генератора по управляющему воздействию

$$W(p) = \frac{U_z(p)}{U_g(p)} = \frac{k_z}{T_z p + 1}, \quad (4.31)$$

а если принять напряжение возбуждения постоянным, т.е.  $U_g(p) = 0$ , то получим передаточную функцию генератора по возмущающему воздействию

$$W_z^f(p) = \frac{U_z(p)}{i_z(p)} = -k_z^f. \quad (4.32)$$

Ориентировочные значения коэффициента передачи  $k_z$  и постоянной времени  $T_z$  можно определить по формулам

$$k_z = \frac{U_{zn} - i_{ян} r_{ян}}{0,7 U_{zn}}, \quad T_z = 0,4 \sqrt[3]{P_n / n_n}, \quad (4.33)$$

причем величина  $T_z$  составляет от 0,5 – 3,0 с.

При более глубоком анализе генератора постоянного тока следует отказаться от того, что ток нагрузки является координатным возмущением и принять, что причиной изменения тока нагрузки является изменение сопротивления нагрузки, который рассматривается как параметрическое возмущение. Поэтому в уравнении (4.20) необходимо использовать

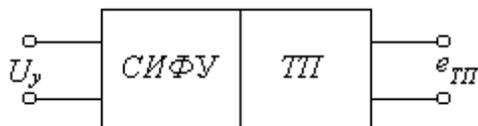
$$U_z = \frac{r_n}{r_y + r_n} e_z. \quad (4.34)$$

Тогда коэффициент передачи генератора по возмущающему воздействию нужно определить линеаризацией функции (4.23) в точке, соответствующей фиксированным значениям  $e_{z0}$  и  $r_{n0}$

$$k_z^f = \left( \frac{dU_z}{dr_n} \right)_{r_n=r_{n0}, e_z=e_{z0}} = \frac{r_y}{(r_y + r_n)^2} e_{z0}. \quad (4.35)$$

### 4.3. Тиристорный преобразователь

Принципиальная блок-схема тиристорного преобразователя приведена ниже.



Статическая характеристика тиристорного преобразователя (ТП) независимо от вида СИФУ в рабочем диапазоне описывается линейной зависимостью

$$e_{ТП} = k_{ТП} U_y, \quad (4.36)$$

где  $e_{ТП}$ ,  $k_{ТП}$ ,  $U_y$  – соответственно выходное напряжение ТП, коэффициент передачи ТП и напряжение управления, подаваемое на СИФУ.

Динамические свойства ТП отличаются своеобразием, связанным с дискретностью импульсно-фазового управления открыванием тиристоров. Быстродействие ТП определяется в основном инерционностью его СИФУ и, в большинстве случаев, представляется аperiodическим звеном первого порядка с постоянной времени  $T_{ТП}$

$$W_{ТП}(p) = \frac{k_{ТП}}{T_{ТП}p + 1}. \quad (4.37)$$

Величина  $T_{ТП}$  составляет для полупроводниковых СИФУ составляет в среднем 0,01 с, а для СИФУ с магнитными усилителями и дросселями насыщения от 0,01 до 0,05 с. При этом надо учитывать, что для устойчивости систем подчиненного регулирования необходимо, чтобы  $T_{ТП}$  была не более 0,0016 с для трехфазных мостовых схем ТП и 0,008 с для эквивалентных мостовых схем ТП.

При необходимости построения более быстродействующих САУ необходимо учитывать уже при выборе структуры и вида передаточной функции регуляторов дискретность работы ТП и перейти к методам дискретных (импульсных) САУ.

В некоторых случаях можно пренебречь инерционностью тиристорного преобразователя по сравнению инерционностями других элементов САУ. Тогда ТП можно рассматривать как простое безинерционное звено с коэффициентом передачи  $k_{ТП}$ . Более точно для этого необходимо выполнение следующих условий:

- суммарная индуктивность нагрузки такова, что в установившихся режимах ток двигателя находится в пределах (0,05 – 1,07) от но-

минального значения. При необходимости это условие выполняется с помощью сглаживающих реакторов;

- тиристорный преобразователь работает в режимах непрерывного тока;

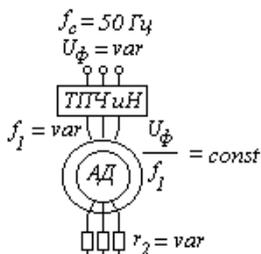
- изменение напряжения задания и эдс цепи нагрузки происходит не слишком быстро по сравнению с продолжительностью такта СИФУ и ТП.

#### 4.4. Трехфазный асинхронный двигатель

Управление трехфазным асинхронным двигателем может осуществляться:

1. Изменением фазного напряжения статора  $U_\phi$ ;
2. Изменением сопротивления ротора  $r_2$ ;
3. Изменением частоты питающей сети  $f_c$  совместно с  $U_\phi$ .

Общая принципиальная схема управления приведена ниже.



Движение ротора описывается таким же уравнением, как и для двигателя постоянного тока

$$J \frac{d\omega}{dt} = M_\delta - M_c. \quad (4.38)$$

При управлении по **первому способу** момент, развиваемый на валу двигателя

$$M_\delta = \frac{2M_k}{\frac{s}{s_k} + \frac{s_k}{s}}, \quad (4.39)$$

где  $M_k = k_{m1} U_\phi^2$  - критический момент двигателя, нм;

$$k_{m1} = \frac{1,5}{\omega_0 (r_1 + \sqrt{r_1^2 + x_k^2})} - \text{конструктивная постоянная, с/Ом};$$

$U_\phi$  - фазное напряжение сети статора, В;

$$s_k = \frac{r_2}{\sqrt{r_1^2 + x_k^2}} - \text{критическое скольжение};$$

$s = \frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0}$  - текущее скольжение;

$\omega_0, \omega$  - синхронная и текущая угловая скорость вращения, рад/с;

$r_1, r_2$  - активные сопротивления соответственно статора и ротора, подведенное к статору;

$x_k$  - реактивное сопротивление короткого замыкания.

Для асинхронного двигателя отношение  $s/s_k \approx 0$  и в нормальном (рабочем) режиме он работает на прямолинейном участке нагрузочной характеристики, поэтому момент двигателя можно определить из выражения

$$M_o = \frac{2M_k}{s_k} s = \frac{2k_{m1}}{s_k \omega_o} (\omega_o - \omega) U_\phi^2. \quad (4.40)$$

Подставим полученное выражение для момента двигателя в уравнение (4.38) при условии  $M_c = const$  ( $\Delta M_c = 0$ )

$$J \frac{d\omega}{dt} = \frac{2k_{m1}}{s_k \omega_o} (\omega_o - \omega) U_\phi^2, \quad (4.41)$$

Последнее уравнение после преобразований примет вид

$$\frac{Js_k \omega_o}{2k_{m1} U_\phi^2} \frac{d\omega}{dt} + \omega = \frac{\omega_o}{U_\phi} U_\phi. \quad (4.42)$$

Введем обозначения

$$\frac{Js_k \omega_o}{2k_{m1} U_\phi^2} = T_1 - \text{постоянная времени АД, с;}$$

$$\frac{\omega_o}{U_\phi} = k_1 - \text{коэффициент передачи, рад/(сВ)}$$

и получим дифференциальное уравнение АД при данном способе управления

$$T_1 \frac{d\omega}{dt} + \omega = k_1 U_\phi. \quad (4.43)$$

Заметим, что параметры  $T_I$  и  $k_I$  двигателя являются функцией  $U_\phi$ .

Применив прямое преобразование Лапласа к последнему уравнению

$$(T_I p + 1)\omega(p) = k_I U_\phi(p) \quad (4.44)$$

и, взяв отношение изображений выходной величины к входной, получим передаточную функцию АД при управлении изменением напряжения статора

$$W(p) = \frac{k_I}{T_I p + 1}. \quad (4.45)$$

При *втором способе* управления АД изменением активного сопротивления в цепи ротора изменяется величина критического скольжения  $s_\kappa$ , а напряжение  $U_\phi$  остается постоянной, поэтому момент, развиваемый на валу двигателя

$$M_\delta = 2M_\kappa \frac{s}{s_\kappa}, \quad (4.46)$$

или, с учетом выражения для текущего скольжения,

$$M_\delta = \frac{2k_{m1}U_\phi^2}{s_\kappa\omega_o} \omega_o - \frac{2k_{m1}U_\phi^2}{s_\kappa\omega_o} \omega. \quad (4.47)$$

Подставим выражения для момента  $M_\delta$ , критического скольжения  $s_\kappa$ , полного сопротивления роторной цепи  $r_2 = \frac{r_2'}{k_i k_e}$ , отношения полного сопротивления роторной цепи  $r_2$  к сопротивлению  $r_{pom}$  обмотки ротора в уравнение равновесия (4.38) при том же условии  $M_c = const$  ( $\Delta M_c = 0$ ) для линейной части механической характеристики запишется в виде

$$J \frac{d\omega}{dt} + \frac{2k_{m1}U_\phi^2 \sqrt{r_1^2 + x_\kappa^2}}{r_{2\delta} r_{pom} \omega_o} \omega = \frac{2k_{m1}U_\phi^2 \sqrt{r_1^2 + x_\kappa^2}}{r_{2\delta} r_{pom} \omega_o}. \quad (4.48)$$

Освободимся от коэффициента при  $\omega$

$$J \frac{r_{2\delta} r_{\text{пот}} \omega_o}{2k_{\text{м1}} U_{\phi}^2 \sqrt{r_1^2 + x_{\kappa}^2}} \frac{d\omega}{dt} + \omega = \frac{r_{2\delta} r_{\text{пот}} \omega_o 2k_{\text{м1}} U_{\phi}^2 \sqrt{r_1^2 + x_{\kappa}^2}}{2k_{\text{м1}} U_{\phi}^2 \sqrt{r_1^2 + x_{\kappa}^2} r_{2\delta} r_{\text{пот}} \omega_o}.$$

После сокращений введем обозначения

$$J \frac{r_{2\delta}}{k_{\text{м2}}} = T_2 - \text{постоянная времени двигателя, с;}$$

$$\frac{2k_{\text{м1}} U_{\phi}^2 \sqrt{r_1^2 + x_{\kappa}^2}}{r_{\text{пот}} \omega_o} = k_{\text{м2}};$$

$$\frac{\omega_o}{r_{2\delta}} = k_2 - \text{коэффициент передачи двигателя при втором способе}$$

управления.

Тогда дифференциальное уравнение двигателя

$$T_2 \frac{d\omega}{dt} + \omega = k_2 r_{2\delta}. \quad (4.49)$$

Заметим, что параметры  $T_2$  и  $k_2$  двигателя являются функцией  $r_{2\delta}$ .

Применим прямое преобразование Лапласа к последнему уравнению

$$(T_2 p + 1) \omega(p) = k_2 r_{2\delta}(p) \quad (4.50)$$

и, взяв отношение изображения выходной величины к изображению входной, получим передаточную функцию АД при управлении изменением сопротивления в цепи ротора

$$W(p) = \frac{k_2}{T_2 p + 1}. \quad (4.51)$$

При *третьем способе* управлении АД с помощью частотных преобразователей напряжения статора независимой переменной является синхронная скорость

$$\omega_o = \frac{2\pi}{n} f_1. \quad (4.52)$$

Уравнение для момента двигателя запишем в виде

$$\begin{aligned}
 M_{\delta} &= \frac{3U_{\phi}^2 \left( \frac{2\pi}{n} f_1 - \omega \right)}{\frac{2\pi}{n} f_1 \frac{\dot{r}_2}{\sqrt{r_1^2 + x_{\kappa}^2}} \frac{2\pi}{n} f_1 (r_1 + \sqrt{r_1^2 + x_{\kappa}^2})} = \\
 &= \frac{3U_{\phi}^2 \frac{2\pi}{n} f_1}{\frac{2\pi}{n} f_1 \frac{\dot{r}_2}{\sqrt{r_1^2 + x_{\kappa}^2}} \frac{2\pi}{n} f_1 (r_1 + \sqrt{r_1^2 + x_{\kappa}^2})} = \frac{3U_{\phi}^2 \omega}{\left( \frac{2\pi}{n} f_1 \right)^2 \frac{\dot{r}_2}{\sqrt{r_1^2 + x_{\kappa}^2}} (r_1 + \sqrt{r_1^2 + x_{\kappa}^2})} ;
 \end{aligned}$$

Тогда уравнение (4.38) запишется в виде

$$J \frac{\left( \frac{2\pi}{n} f_1 \right)^2 \frac{\dot{r}_2}{\sqrt{r_1^2 + x_{\kappa}^2}} (r_1 + \sqrt{r_1^2 + x_{\kappa}^2})}{3U_{\phi}^2 \omega \sqrt{r_1^2 + x_{\kappa}^2}} \frac{d\omega}{dt} + \omega = \frac{3U_{\phi}^2 \frac{2\pi}{n} f_1 \frac{\dot{r}_2}{\sqrt{r_1^2 + x_{\kappa}^2}} (r_1 + \sqrt{r_1^2 + x_{\kappa}^2})}{\frac{\dot{r}_2}{\sqrt{r_1^2 + x_{\kappa}^2}} (r_1 + \sqrt{r_1^2 + x_{\kappa}^2}) 3U_{\phi}^2} .$$

Исключим промежуточную переменную  $U_{\phi}$  с учетом того, что значение ЭДС двигателя примерно равно напряжению сети

$$U_{\phi} \approx E = k_e \Phi \omega_0 = k_e \Phi \frac{2\pi}{n} f_1 . \quad (4.53)$$

Из последнего выражения видно, что если изменять частоту по закону  $\frac{f_1}{U_{\phi}} = const$ , то магнитный поток двигателя  $\Phi$  остается постоянным.

Полагая  $(\omega_0 - \omega) \ll s_{\kappa} \omega$  и, как и раньше,  $M_c = const$  ( $\Delta M_c = 0$ ), получим выражение для коэффициента при первой производной – постоянной времени трехфазного асинхронного двигателя при третьем способе управления  $T_3$

$$J \frac{\left( \frac{2\pi}{n} f_1 \right)^2 \dot{r}_2 (r_1 + \sqrt{r_1^2 + x_{\kappa}^2})}{3U_{\phi}^2 \omega \sqrt{r_1^2 + x_{\kappa}^2}} = J \frac{\left( \frac{2\pi}{n} f_1 \right)^2 \dot{r}_2 (r_1 + \sqrt{r_1^2 + x_{\kappa}^2})}{3k_e^2 \Phi^2 \left( \frac{2\pi}{n} f_1 \right)^2 \sqrt{r_1^2 + x_{\kappa}^2}} =$$

$$J \frac{r_2}{3k_e^2 \Phi^2} \left( \frac{r_1}{\sqrt{r_1^2 + x_k^2}} + 1 \right) = T_3 \text{ постоянная времени;}$$

$\frac{2\pi}{n} = k_3$  - коэффициент передачи двигателя при этом способе регулирования скорости двигателя.

Тогда дифференциальное уравнение двигателя

$$T_3 \frac{d\omega}{dt} + \omega = k_3 f_1. \quad (4.54)$$

Заметим, что параметры  $T_3$  и  $k_3$  двигателя являются функцией частоты питающего напряжения  $f_1$ .

Применим прямое преобразование Лапласа к последнему уравнению

$$(T_3 p + 1)\omega(p) = k_3 f_1(p) \quad (4.55)$$

и, взяв отношение изображений выходной величины к входной, получим передаточную функцию АД при управлении изменением сопротивления в цепи ротора

$$W(p) = \frac{k_3}{T_3 p + 1}. \quad (4.56)$$

*Передаточная функция асинхронного двигателя по каналу возмущающего воздействия* получается при условии постоянства управляющего воздействия (по любому из трех выше приведенных способов управления) и работе двигателя на устойчивой части механической характеристики.

Тогда из основного соотношения

$$\frac{M_o}{s} = \frac{M_n}{s_n}$$

получим

$$M_o = M_n \frac{s}{s_n} = \frac{M_n}{s_n} \frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0} = \frac{M_n}{s_n} \frac{(-\Delta\omega)}{\omega_0}. \quad (4.57)$$

Исходное уравнение (4.38) с учетом последнего уравнения запишем в приращениях

$$J \frac{d\Delta\omega}{dt} = \frac{M_n}{s_n} \frac{(-\Delta\omega)}{\omega_0} - \Delta M_c,$$

или, после преобразований, получим

$$J \frac{s_n \omega_0}{M_n} \frac{d\Delta\omega}{dt} + \Delta\omega = -\frac{s_n \omega_0}{M_n} \Delta M_c.$$

Введем обозначения:

$$J \frac{s_n \omega_0}{M_n} = T_m - \text{электромеханическая постоянная времени АД, с;}$$

$\frac{s_n \omega_0}{M_n} = k_{om}$  - коэффициент передачи асинхронного двигателя по возмущающему воздействию.

Тогда дифференциальное уравнение двигателя имеет вид

$$T_m \frac{d\Delta\omega}{dt} + \Delta\omega = -k_{om} \Delta M_c, \quad (4.58)$$

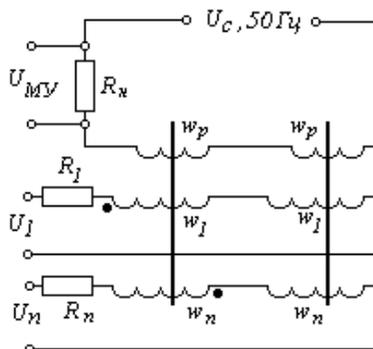
из которого после применения прямого преобразования Лапласа получим передаточную функцию АД по возмущающему воздействию

$$W^F(p) = \frac{-k_{om}}{T_m p + 1}. \quad (4.59)$$

Таким образом, при принятых допущениях асинхронный двигатель при любом способе управления можно рассматривать как апериодическое звено первого порядка с параметрами передаточной функции, зависящими от управляющего воздействия. Передаточная функция по каналу возмущающего воздействия также представляется апериодическим звеном первого порядка, общая структурная схема аналогична структуре двигателя постоянного тока.

#### 4.5. Магнитный усилитель

Для составления уравнения переходных процессов МУ воспользуемся уравнением для магнитно-связанных контуров, как показано на схеме двухтактного магнитного усилителя



$$\sum_{i=1}^n U_i \frac{w_i}{r_i} + F_n = F + \frac{d\Phi}{dt} \sum_{i=1}^n \frac{w_i^2}{r_i}, \quad (4.60)$$

где  $F_n$  – намагничивающая сила, обусловленная влиянием тока цепи нагрузки;

$w_n$  - число витков рабочей обмотки нагрузочной цепи;

$U_i, w_i, r_i$  - соответственно напряжение, число витков и активное сопротивление  $i$ -го контура обмотки управления;

$\sum_{i=1}^n U_i \frac{w_i}{r_i}$  - суммарная входная н.с. контуров;

$F$  – результирующее значение н.с.;

$\Phi$  – магнитный поток, сцепленный со всеми обмотками.

На основании уравнения (4.60) можно записать

$$\sum_{i=1}^n U_i \frac{w_i}{r_i} = F_y + \frac{dB_0}{dt} \cdot m \cdot S_C \cdot \sum_{i=1}^n \frac{w_i^2}{r_i}, \quad (4.61)$$

где  $B_0$  – постоянная составляющая индукции магнитного поля МУ, зависящая от н.с. уравнения и тока нагрузки;

$m$  – число пакетов сердечника;

$S_C$  – площадь поперечного сечения одного пакета стального сердечника.

Для расчетов вместо семейства магнитных характеристик ограничимся одной зависимостью  $B_0 = f(F_y)$  соответствующей активной нагрузке. Тогда получим:

$$\sum_{i=1}^n U_i \frac{w_i}{r_i} = F_y + T_{MV} \frac{dF_y}{dt}, \quad (4.62)$$

где  $T_{MV} = \frac{k_{MV}}{4f\omega_p} \sum_{i=1}^n \frac{w_i^2}{r_i}$  – постоянная времени МУ;

$k_{MV}$  – отношение изменения выходного напряжения к н.с. управления, его обусловившей, В / а.в;

$w_p$  – число витков рабочей обмотки на одном стержне МУ;

$f$  – частота питающей сети, Гц;

$w_i, r_i$  – соответственно число витков и сопротивление цепей обмотки управления.

Напряжение на выходе МУ определяется семейством регулировочных характеристик  $U_{MV} = f(F_y, I_n)$ . Для приближенных расчетов вместо семейства регулировочных характеристик используем одну, соответствующую активному сопротивлению цепей нагрузки МУ, при этом  $U_{MV} = k_{MV} F_y$ . Тогда уравнение (4.62) запишем в виде:

$$k_{MV} \sum_{i=1}^n U_i' = (T_{MV} p + 1) U_{MV}(p), \quad (4.63)$$

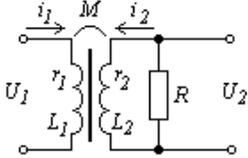
где  $U_i'$  – напряжение  $i$ -ой обмотки управления, приведенное к параметрам задающей обмотки.

Из последнего выражения выводится передаточная функция магнитного усилителя

$$W_{MV}(p) = \frac{U_{MV}(p)}{\sum U_i(p)} = \frac{k_{MV}}{T_{MV} p + 1}. \quad (4.64)$$

#### 4.6. Дифференцирующий трансформатор

Принципиальная схема трансформатора приведена ниже. Как видно из рисунка, на первичную обмотку подается входное напряжение  $U_1$ , активные сопротивления и индуктивности обмоток трансформатора и взаимная индуктивность катушек считаются заданными. Выходное напряжение снимается в виде падения напряжения на нагрузочном сопротивлении  $R$



$$U_2 = Ri_2. \quad (4.65)$$

сокращенно без  $(t)$ )

Уравнение баланса первичной и вторичной обмоток трансформатора (со-

$$U_1 = r_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}; \quad (4.66)$$

$$0 = r_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} + Ri_2. \quad (4.67)$$

Применим к исходным дифференциальным уравнениям прямое преобразование Лапласа

$$U_2(p) = Ri_2(p); \quad (4.68)$$

$$U_1(p) = r_1 i_1(p) + L_1 p i_1(p) + M p i_2(p); \quad (4.69)$$

$$0 = r_2 i_2(p) + L_2 p i_2(p) + M p i_1(p) + R i_2(p). \quad (4.70)$$

Решим совместно эти уравнения относительно входной и выходной величин путем исключения промежуточных переменных, для чего из (4.69) выразим  $i_1(p)$  подставим в (4.70) с учетом (4.68). После преобразований получим

$$\left[ \frac{L_1 L_2 - M^2}{r_1(R+r_2)} p^2 + \frac{L_2 r_1 + L_1(R+r_2)}{r_1(R+r_2)} p + 1 \right] U_2(p) = \frac{-MR}{r_1(R+r_2)} p U_1(p).$$

Введем обозначения

$$\frac{L_1}{r_1} = T_1; \quad \frac{L_2}{R+r_2} = T_2; \quad \frac{M}{r_1} = \tau; \quad \sqrt{\frac{M^2}{r_1(R+r_2)}} = T_3; \quad \frac{R}{R+r_2} = k$$

и получим уравнение трансформатора

$$[(T_1 T_2 - M^2)p^2 + (T_1 + T_2)p + 1]U_2(p) = -k\tau p U_1(p). \quad (4.71)$$

Так как коэффициент связи  $\frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$  для трансформатора со стальным сердечником близок к единице, то  $M \approx \sqrt{L_1 L_2}$ , т.е.  $L_1 L_2 - M^2 \approx 0$  или  $T_1 T_2 - T_3^2 \approx 0$ . Тогда уравнение (4.71) упрощается

$$[(T_1 + T_2)p + 1]U_2(p) = -k\tau p U_1(p), \quad (4.72)$$

отсюда можно получить передаточную функцию трансформатора

$$W(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{-k\tau p}{(T_1 + T_2)p + 1}, \quad (4.73)$$

откуда видно, что при принятых величинах входа и выхода трансформатор является реальным дифференцирующим звеном, состоящим из последовательного соединения идеального дифференцирующего звена с апериодическим звеном первого порядка. Знак (-) показывает, что выходной сигнал отстает по фазе на  $180^\circ$  от входного сигнала. При пренебрежении всеми инерционностями

$$W(p) = kp. \quad (4.74)$$

#### 4.7. Тахогенератор

Выходной параметр тахогенератора можно записать:

$$U_{ТГ} = K_{ТГ} \cdot \omega_{ТГ}; \quad (4.75)$$

где  $U_{ТГ}$  - напряжение на выходе тахогенератора;

$K_{ТГ}$  - конструктивная постоянная;

$\omega_{ТГ}$  - частота вращения вала.

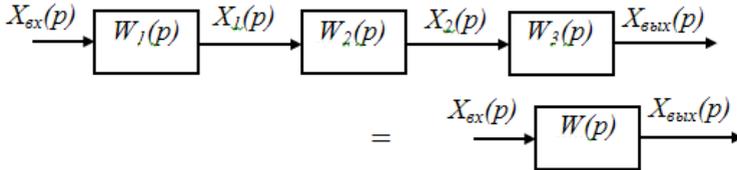
Применив прямое преобразование Лапласа к последнему уравнению и взяв отношение изображения выходной величины к изображению входной получим передаточную функцию тахогенератора

$$W_{ТГ}(p) = k_{ТГ}. \quad (4.76)$$

## 5. ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ САУ

### 5.1. Передаточные функции разомкнутой САУ

Последовательное соединение звеньев с известными  $W_i(p)$



Зная изображение входного воздействия и передаточную функцию звена можно найти изображение каждого выходного воздействия

$$X_{\text{вых}}(p) = W_3(p)X_2(p);$$

$$X_2(p) = W_2(p)X_1(p);$$

$$X_1(p) = W_1(p)X_{\text{ex}}(p).$$

Исключая промежуточные переменные получим

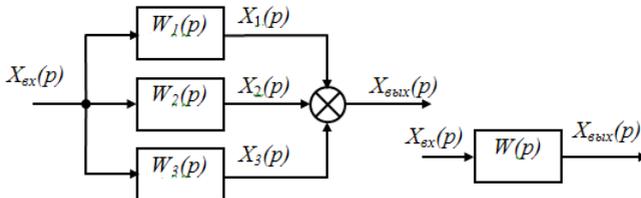
$$X_{\text{вых}}(p) = W_1(p)W_2(p)W_3(p)X_{\text{ex}}(p).$$

По определению  $W(p)$

$$\frac{X_{\text{вых}}(p)}{X_{\text{ex}}(p)} = W(p) = W_1(p)W_2(p)W_3(p).$$

$$\text{В общем случае } W(p) = \prod_{i=1}^n W_i(p) \quad (5.1)$$

Параллельное соединение звеньев с известными  $W_i(p)$



Найдем выходные воздействия отдельных звеньев

$$X_1(p) = W_1(p)X_{\text{вх}}(p);$$

$$X_2(p) = W_2(p)X_{\text{вх}}(p);$$

$$X_3(p) = W_3(p)X_{\text{вх}}(p).$$

Выходное воздействие всей системы равно сумме выходных воздействий, поэтому

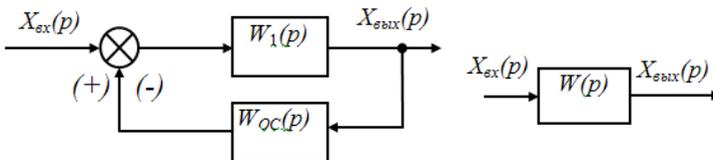
$$X_{\text{вых}}(p) = X_1(p) + X_2(p) + X_3(p) = [W_1(p) + W_2(p) + W_3(p)]X_{\text{вх}}(p).$$

По определению  $W(p)$

$$\frac{X_{\text{вых}}(p)}{X_{\text{вх}}(p)} = W(p) = W_1(p) + W_2(p) + W_3(p).$$

В общем случае 
$$W(p) = \sum_{i=1}^n W_i(p). \quad (5.2)$$

Основное звено охвачено обратной связью



Как видно из схемы

$$X_{\text{вых}}(p) = W_1(p)[X_{\text{вх}}(p) \pm W_{\text{OC}}(p)X_{\text{вых}}(p)]$$

или 
$$W(p) = \frac{W_1(p)}{1 \pm W_{\text{OC}}(p) \cdot W_1(p)}. \quad (5.3)$$

В формуле (3) знак

«+» - для отрицательной ОС;

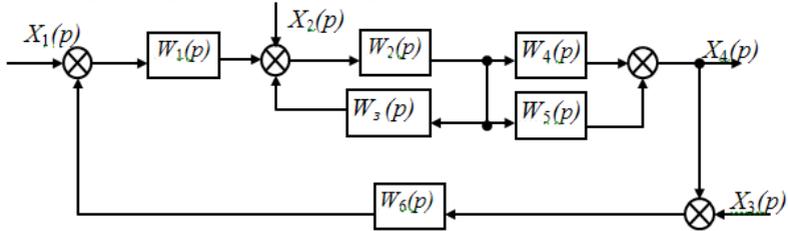
«-» - для положительной ОС.

## 5.2. Передаточные функции замкнутой САУ

Замкнутые САУ могут иметь несколько передаточных функций по числу входных воздействий относительно числа выходных воздействий, зависящих от входных.

$W_3(p)$  - осуществляет местную ОС;

$W_6(p)$  – осуществляет главную ОС.



Здесь входных переменных –3; выходных –1, поэтому передаточных функций САУ всего три:

- 1) передаточная функция САУ по  $X_1(p)$  относительно  $X_4(p)$ ;
- 2) передаточная функция САУ по  $X_2(p)$  относительно  $X_4(p)$ ;
- 3) передаточная функция САУ по  $X_3(p)$  относительно  $X_4(p)$ .

Применяя предыдущие правила, производим последовательную свертку схемы так, чтобы между воздействиями осталось не более одного звена.

Заменим параллельно соединенные  $W_4(p)$  и  $W_5(p)$  одним эквивалентным звеном

$$W'(p) = W_4(p) + W_5(p)$$

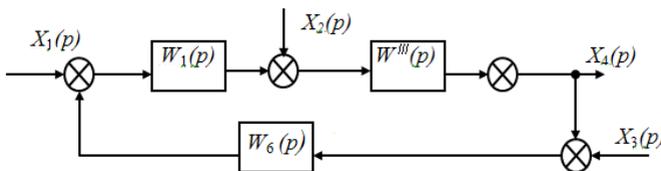
и звено  $W_2(p)$ , охваченное местной ОС  $W_3(p)$  эквивалентным звеном

$$W''(p) = \frac{W_2(p)}{1 + W_3(p)W_2(p)}.$$

Между собой эти эквивалентные звенья соединены последовательно, поэтому

$$W'''(p) = W'(p)W''(p).$$

Тогда структурная схема имеет вид



Предположим, что мы ищем передаточную функцию по  $X_1(p)$  относительно выхода  $X_4(p)$ , тогда все остальные воздействия предполагаются неизменными, т.е. их изображения равны нулю. Тогда  $W_1(p)$  и  $W^{III}(p)$  соединены последовательно и их можно заменить одним эквивалентным

$$W^{IV}(p) = W_1(p)W^{III}(p).$$

В итоге остается звено  $W^{IV}(p)$ , охваченное главной ОС  $W_6(p)$ , причем  $W^{IV}(p)$  называют передаточной функцией разомкнутой САУ и последняя свертка дает передаточную функцию замкнутой САУ по  $X_1$ :

$$W_3^{X_1}(p) = \frac{X^{IV}(p)}{1 + W_6(p)W^{IV}(p)}.$$

После подстановки и упрощений получим

$$\begin{aligned} W_3^{X_1}(p) &= \frac{W_1(p)[W_4(p) + W_5(p)] \frac{W_2(p)}{1 + W_3(p)W_2(p)}}{1 + W_6(p)W_1(p)[W_4(p) + W_5(p)] \frac{W_2(p)}{1 + W_3(p) \cdot W_2(p)}} = \\ &= \frac{W_1(p)W_2(p)[W_4(p) + W_5(p)]}{1 + W_2(p)W_3(p) + W_1(p)W_6(p)[W_4(p) + W_5(p)]W_2(p)} \end{aligned} \quad (5.4)$$

Пусть теперь нужно определить  $W^{X_2}(p)$ . Из последней схемы видно, что при  $X_1(p) = 0$  звенья  $W_1(p)$  и  $W_6(p)$  соединены последовательно, поэтому эквивалентное звено имеет передаточную функцию

$$W^*(p) = W_1(p)W_2(p)$$

и оно находится в цепи главной ОС.

Тогда передаточная функция замкнутой САУ по  $X_2$

$$\begin{aligned} W_3^{X_2}(p) &= \frac{X^{III}(p)}{1 + W^*(p)W^{III}(p)} = \\ &= \frac{W_2(p)W_2(p)[W_4(p) + W_5(p)]}{1 + W_2(p)W_3(p) + W_1(p)W_6(p)[W_4(p) + W_5(p)]W_2(p)}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

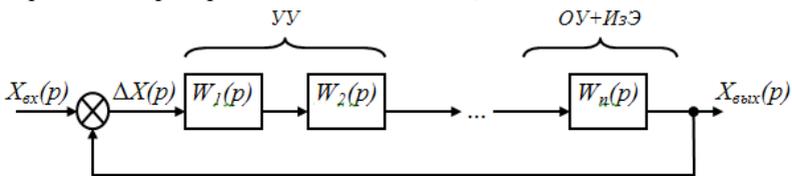
Как видно из сравнения (5.4) и (5.5), знаменатели передаточных функций совпадают, т.е. в знаменатели всегда записывают

$$1 + [\text{ПФ разомкнутой САУ}] \cdot [\text{ПФ звена главной ОС}],$$

а в числителях записывают передаточную функцию той части системы, которая расположена между воздействиями, относительно которых и по которым определяют данную передаточную функцию.

### 5.3. Связь между передаточными функциями замкнутой и разомкнутой САУ

Путем переноса звена главной ОС в основную цепь можно замкнутую САУ представить в виде САУ с единичной обратной связью. В этом случае реальная выходная величина системы представляется выходной величиной звена, осуществляющего главную ОС (как правило, это измерительно-преобразовательный элемент).



Передаточная функция разомкнутой САУ при последовательном соединении звеньев

$$W(p) = \prod_{i=1}^n W_i(p)$$

Уравнение ошибки  $\Delta X(p) = X_{\text{вх}}(p) - X_{\text{вых}}(p)$  ;

$$X_{\text{вых}}(p) = W(p)\Delta X(p) = W(p)[X_{\text{вх}}(p) - X_{\text{вых}}(p)] ;$$

$$X_{\text{вых}}(p) + W(p)X_{\text{вых}}(p) = W(p)X_{\text{вх}}(p) ;$$

$$X_{\text{вых}}(p)[1 + W(p)] = X_{\text{вх}}(p)W(p) .$$

По определению передаточной функции  $W(p)$

$$\frac{X_{\text{вых}}(p)}{X_{\text{вх}}(p)} = W_3(p) = \frac{W(p)}{1 + W(p)} . \quad (5.6)$$

Если положить  $p = 0$  (установившейся процесс), то

$$k_3 = \frac{k}{1+k}. \quad (5.7)$$

Отсюда видно, что коэффициент передачи замкнутой САУ в  $(1+k)$  раз меньше коэффициента передачи разомкнутой САУ.

#### 5.4. Передаточная функция САУ по ошибке

В некоторых случаях (при исследовании, например, следящих систем) требуется найти связь между рассогласованием или ошибкой  $\Delta X(p)$ , обозначаемой  $\varepsilon(p)$  и входной величиной

$$\begin{aligned} \Delta X(p) = \varepsilon(p) &= X_{\text{ex}}(p) - X_{\text{вых}}(p) = X_{\text{ex}}(p) - W_3(p)X_{\text{ex}}(p) = \\ &= [1 - W_3(p)]X_{\text{ex}}(p). \end{aligned}$$

Из этого выражения находят так называемую **передаточную функцию по ошибке**

$$W_{\text{ош}}(p) = \frac{\varepsilon(p)}{X_{\text{ex}}(p)} = 1 - W_3(p) = \frac{1}{1 + W(p)}. \quad (5.8)$$

При  $p = 0$ , т.е. в установившемся режиме, величину  $\delta = \frac{1}{1+k}$  называют **статизмом системы**.

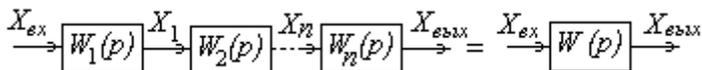
При более подробном анализе этой передаточной функции необходимо иметь в виду, что фактически сигнал ошибки представляет собой сумму двух составляющих, обусловленных соответственно изменениями задающего и возмущающего воздействий. Для каждого из составляющих сигнала ошибки можно записать свои передаточные функции и в дальнейшем применить общеизвестный принцип суперпозиции.

#### 5.5. Структурные преобразования линейных САУ

В некоторых случаях последовательная свертка структурных схем

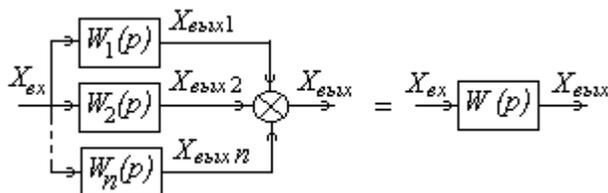
невозможна из-за наличия дополнительных узлов или сумматоров, перекрестно включенных в основные цепи. Поэтому при расчетах и анализах САУ производятся структурные преобразования, основанные на правиле равенства сигналов или передаточных функций до и после преобразования.

1. Последовательно соединенные звенья можно заменить одним эквивалентным звеном с передаточной функцией, равной произведению передаточных функций звеньев.



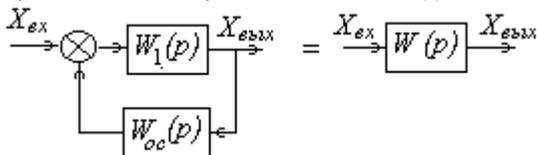
$$W(p) = \prod W_i(p).$$

2. Параллельно соединенные звенья можно заменить одним эквивалентным звеном передаточной функцией, равной сумме передаточных функций звеньев.



$$W(p) = \sum W_i(p).$$

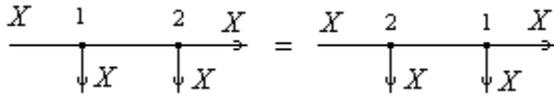
3. Звено, охваченное ОС, можно заменить одним звеном.



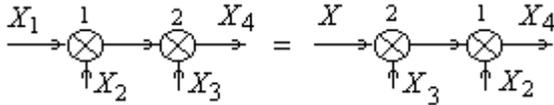
$$W(p) = \frac{W_1(p)}{1 \pm W_1(p)W_{oc}(p)}.$$

Здесь знак + ставится при отрицательной обратной связи и наоборот.

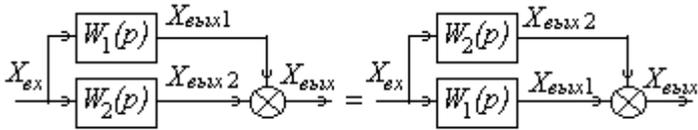
4. Два узла разветвления можно поменять местами.



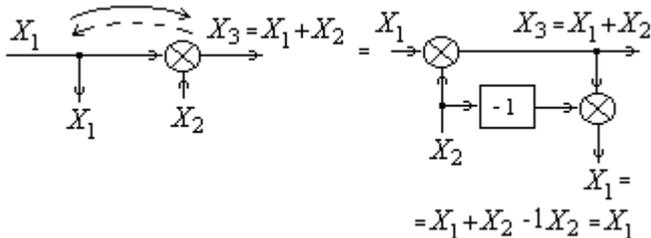
5. Два сумматора можно поменять местами.



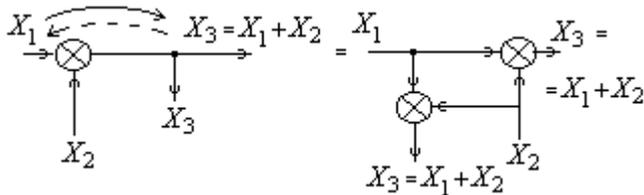
6. Ветви параллельного соединения можно поменять местами.



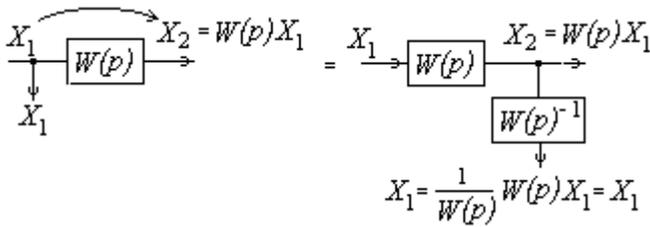
7. Перенос узла через сумматор по ходу сигнала или сумматора через узел против хода сигнала



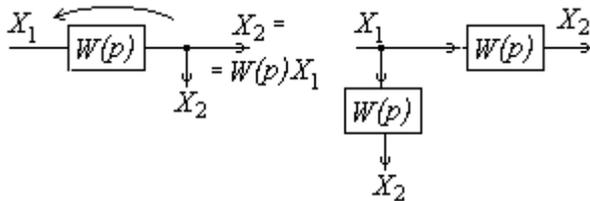
8. Перенос сумматора через узел по ходу сигнала или узла через сумматор против хода сигнала



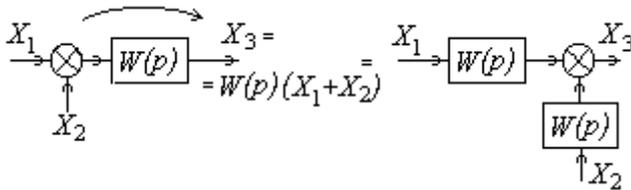
9. Перенос узла через звено по ходу сигнала



10. Перенос узла через звено против хода сигнала

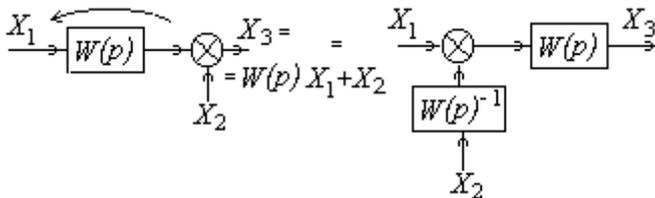


11. Перенос сумматора через звено по ходу сигнала



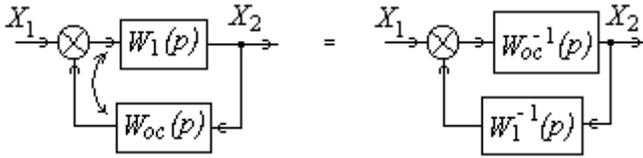
$$X_3(p) = W(p)X_1 + W(p)X_2 = W(p)(X_1 + X_2) .$$

12. Перенос сумматора через звено против хода сигнала



$$X_3 = W(p)(X_1 + W(p)^{-1} X_2) = W(p)X_1 + X_2 .$$

13. Замена местами основного элемента и элемента обратной связи



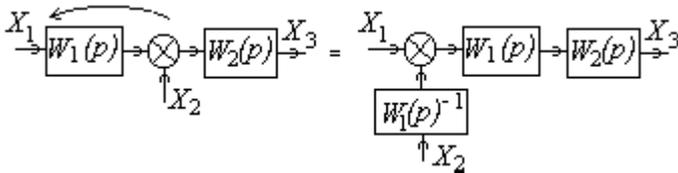
Для исходной схемы передаточная функция равна

$$W(p) = \frac{W_1(p)}{1 \pm W_1(p)W_{oc}(p)}.$$

Для преобразованной схемы

$$\begin{aligned} W(p) &= \frac{W_{oc}(p)^{-1}}{1 \pm W_1(p)^{-1}W_{oc}(p)^{-1}} = \frac{\frac{1}{W_{oc}(p)}}{1 \pm \frac{1}{W_1(p)} \frac{1}{W_{oc}(p)}} = \\ &= \frac{\frac{1}{W_{oc}(p)}}{\frac{W_1(p)W_{oc}(p) \pm 1}{W_1(p)W_{oc}(p)}} = \frac{W_1(p)}{1 \pm W_1(p)W_{oc}(p)}. \end{aligned}$$

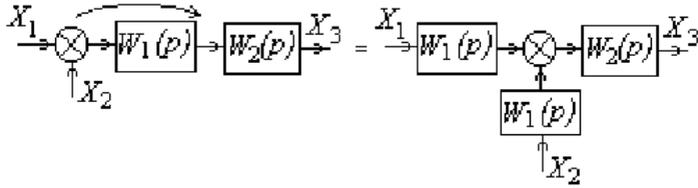
#### 14. Перенос внешнего воздействия на вход предыдущего звена



Для исходной схемы  $X_3 = W_2(p)(X_2 + W_1(p)X_1)$ .

Для преобразованной схемы  $X_3 = W_2(p)W_1(p)(X_1 + W_1(p)^{-1}X_2) =$   
 $= W_2W_1(p)X_1 + W_2W_1(p)W_1(p)^{-1}X_2 = W_2(X_2 + W_1(p)X_1)$ .

#### 15. Перенос внешнего воздействия на вход последующего звена

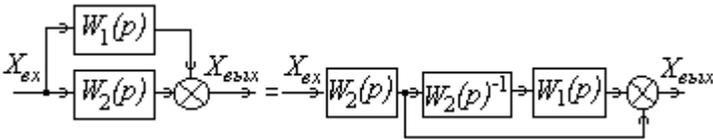


Для исходной схемы  $X_3 = W_1(p)W_2(p)(X_1 + X_2)$ .

Для преобразованной схемы

$$X_3 = W_2(p)(W_1(p)X_2 + W_1(p)X_1) = W_1(p)W_2(p)(X_1 + X_2).$$

16. Удаление элемента из прямой связи

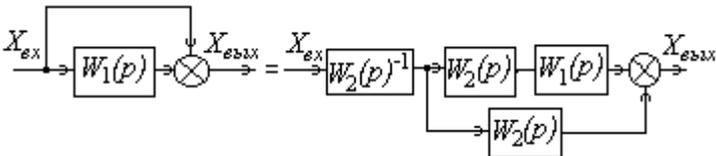


Для исходной схемы  $X_{вых}(p) = (W_1(p) + W_2(p))X_{ex}$ .

Для преобразованной схемы

$$X_{вых}(p) = W_1(p)W_2(p)^{-1}W_2(p)X_{ex} + W_2(p)X_{ex} = (W_1(p) + W_2(p))X_{ex}.$$

17. Добавление элемента в прямую связь

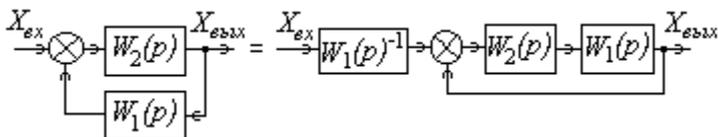


Для исходной схемы  $X_{вых}(p) = X_{ex} + W_1(p)X_{ex}$ .

Для преобразованной схемы

$$X_{вых}(p) = (W_1(p)W_2(p) + W_2(p))W_2(p)^{-1}X_{ex} = X_{ex} + W_1(p)X_{ex}.$$

18. Удаление элемента из обратной связи



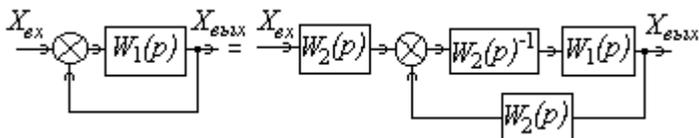
Для исходной схемы передаточная функция определяется по правилу 3,

$$W(p) = \frac{W_1(p)W_2(p)W_1(p)^{-1}}{1 + W_1(p)W_2(p)},$$

а для преобразованной схемы

$$W(p) = \frac{W_1(p)W_2(p)W_1(p)^{-1}}{1 + W_1(p)W_2(p)}.$$

### 19. Введение элемента в обратную связь

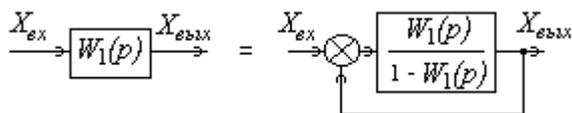


Для исходной схемы  $W(p) = \frac{W_1(p)}{1 + W_1(p)}$ .

Для преобразованной схемы

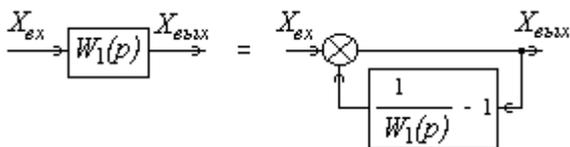
$$W(p) = \frac{W_1(p)W_2(p)^{-1}}{1 + W_1(p)W_2(p)^{-1}W_2(p)} W_2(p) = \frac{W_1(p)}{1 + W_1(p)}.$$

20. Введение единичной обратной связи



$$W(p) = \frac{\frac{W_1(p)}{1 - W_1(p)}}{1 + \frac{W_1(p)}{1 - W_1(p)}} = \frac{W_1(p)}{1 - W_1(p) + W_1(p)} = W_1(p).$$

21. Введение обратной связи с удалением элемента из прямой связи



$$W(p) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{W_1(p)} - 1\right)} = \frac{1}{1 + \frac{1 - W_1(p)}{W_1(p)}} = \frac{1}{\frac{W_1(p) + 1 - W_1(p)}{W_1(p)}} = W_1(p).$$

## 6. УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ САУ

### 6.1. Общие сведения

Всякая САУ должна обладать определенными статическими и динамическими свойствами. Наиболее важным свойством, определяющим работоспособность САУ, является устойчивость.

Под **устойчивостью** понимают способность САУ возвращаться в состояние установившегося равновесия после нанесения или снятия внешних воздействий, нарушивших это равновесие. На устойчивость проверяются все САУ, за исключением разомкнутых.

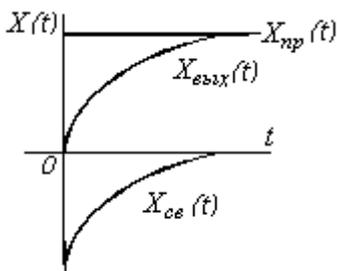
Как известно, процесс регулирования в линейной САУ описывается дифференциальным уравнением

$$a_0 \frac{d^n X_{\text{вых}}(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} X_{\text{вых}}(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dX_{\text{вых}}(t)}{dt} + a_n X_{\text{вых}}(t) = f(t), \quad (6.1)$$

где  $f(t)$  - функция управляющего или возмущающего воздействия, но в любом случае левая часть (1) остается неизменной.

Процесс регулирования определяется решением дифференциального уравнения (1) как суммы 2-х решений – **частного** решения неоднородного уравнения с правой частью и **общего** решения однородного уравнения с правой частью, равной нулю  $f(t) = 0$ :

$$X_{\text{вых}}(t) = X_{\text{част}}(t) + X_{\text{общ}}(t) \quad (6.2)$$



Частное решение имеет такой же вид, что и правая часть (1), т.е. при подаче на вход ступенчатого воздействия  $X_{\text{част}}(t) = X_{\text{нр}}(t)$  тоже ступенчато и иногда называется **вынужденной (принужденной) составляющей**, т.к. характеризует принужденное движение системы. Общее решение определяет свободное движение системы и называется

**переходной составляющей.**

Система называется устойчивой, если при  $t \rightarrow \infty$  переходная (свободная) составляющая стремится к нулю  $X_{\text{св}}(t) \rightarrow 0$ , т.е. переходный про-

песс в САУ определяется общим решением дифференциального уравнения (1), точнее его левой частью.

Применим преобразование Лапласа и получим из левой части уравнения (1) характеристическое уравнение

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n = 0, \quad (6.3)$$

Решение (6.3) будем искать в общем виде

$$X_{общ}(t) = X_n(t) = \sum_{i=1}^r C_i e^{p_i t} + \sum_{k=1}^S A_k e^{\alpha_k t} \text{Sin}(\omega_k t + \varphi_k), \quad (6.4)$$

где  $C_i, A_k, \varphi_k$  - постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий;

$p_i, \alpha_i, \omega_i$  - корни характеристического уравнения.

Могут встретиться следующие случаи.

1. Среди корней характеристического уравнения есть вещественный  $p_i$ , которому соответствует составляющая (6.4):

$$X_{ni}(t) = C_i e^{p_i t}.$$

Тогда в зависимости от знака корня возможны три случая

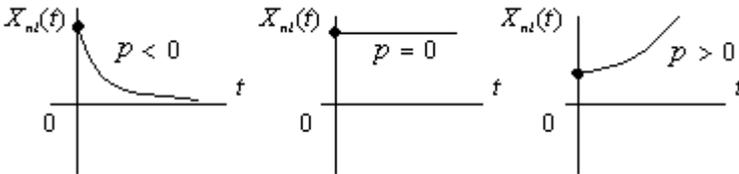


Рис.6.1. Свободные составляющие при вещественном корне

2. Среди корней есть комплексно-сопряженные, каждой паре которых  $p_k = \alpha + j\omega$  и  $p_{k+1} = \alpha - j\omega$  соответствует составляющая (6.4)

$$X_k(t) = A_k e^{\alpha t} \text{Sin}(\omega t + \varphi_k),$$

где  $A_k$  и  $\varphi_k$  - постоянные интегрирования.

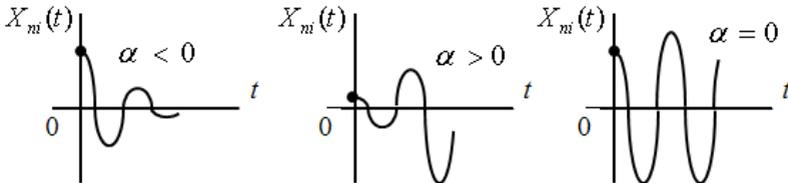


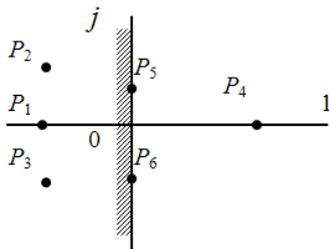
Рис.6.2. Свободные составляющие при комплексном корне

Если объединить пару, то  $A'_k = 2A_k$ .

Таким образом, как видно из предыдущих рисунков:

- 1) если все вещественные корни и вещественные части комплексных корней отрицательны, то САУ устойчива;
- 2) если хотя бы один вещественный корень или вещественная часть комплексного корня положительна, то САУ неустойчива;
- 3) если вещественный корень или вещественная часть комплексного корня равны 0, то САУ находится на границе устойчивости.

Корни характеристического уравнения можно изобразить на комплексной плоскости ( $j; 1$ ):



Таким образом, для того, чтобы САУ была устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы корни характеристического уравнения находились левее мнимой оси, т. е. устойчивость САУ определяется полностью знаком корней характеристического уравнения. Но не всегда бывает удобно вычислять корни, особенно для характе-

ристических уравнений высокого порядка. Признаки, позволяющие судить о знаках корней характеристического уравнения без решения самого уравнения, получили в ТАУ название «**критерии устойчивости**». Простейшим критерием устойчивости является **условие Стодолы**: *для устойчивости САУ необходимо, но недостаточно, чтобы все коэффициенты характеристического уравнения имели одинаковые знаки.*

Необходимые условия устойчивости характеристического уравнения  $a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n = 0$ :

$$a_i > 0; \quad a_{i+1} a_{i+2} \geq a_i a_{i+3}, \quad \text{где } 0 \leq i \leq n-3;$$

$$\left. \begin{array}{l} a_i a_{i+1} \geq a_{i-1} a_{i+2} \\ a_{i-1} a_{i+2} \geq a_{i-2} a_{i+3} \\ a_{i-2} a_{i+3} \geq a_{i-3} a_{i+4} \end{array} \right\} \begin{array}{l} > - \text{для устойчивой САУ.} \\ \geq - \text{САУ на границе устойчивости.} \end{array}$$

Критерии устойчивости:

*алгебраические Раussa, Гурвица;*

*частотные Михайлова, Найквиста.*

## 6.2. Критерий Раусса

По характеристическому уравнению замкнутой САУ

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n = 0$$

составляют так называемую таблицу Раусса.

№ строки $i$	№ столбца $k$			
	1	2	3	...
1	$a_0$	$a_2$	$a_4$	...
2	$a_1$	$a_3$	$a_5$	...
3	$a_{31}$	$a_{32}$	$a_{33}$	
4	$a_{41}$	$a_{42}$	...	
5	$a_{51}$			
...	...			

Коэффициенты таблицы вычисляют по формулам

$$a_{31} = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}; \quad a_{32} = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}; \quad a_{33} = \frac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1};$$

$$a_{41} = \frac{a_{31} a_3 - a_1 a_{32}}{a_{31}}; \quad a_{43} = \frac{a_{31} a_7 - a_1 a_{34}}{a_{31}};$$

$$a_{51} = \frac{a_{41} a_{32} - a_{31} a_{42}}{a_{41}}; \quad a_{52} = \frac{a_{41} a_{33} - a_{31} a_{43}}{a_{41}}$$

или в общем виде

$$a_{i,k} = a_{i-2,k+1} - \frac{a_{i-2,1} \cdot a_{i-1,k+1}}{a_{i-1,1}}. \quad (6.5)$$

Практическая формулировка критерия **Раусса**:

*Для устойчивости САУ необходимо и достаточно, чтобы все элементы 1-го столбца были больше нуля.*

### 6.3. Критерий Гурвица

Швейцарский ученый-математик А. Гурвиц по просьбе словацкого ученого Стодолы, занимавшегося вопросами регулирования турбин, разработал следующий критерий устойчивости.

САУ, описываемая характеристическим уравнением

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n = 0$$

устойчива, если при  $a_0 > 0$  все диагональные определители матрицы коэффициентов  $\Delta_n$  больше нуля.

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_{n-2} & a_n \end{vmatrix} \quad (6.6)$$

$$\Delta_1 = a_1;$$

$$\Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3;$$

$$\Delta_3 = a_1 a_2 a_3 + a_5 a_0 a_1 + 0 a_3 a_4 -$$

$$0 a_2 a_5 - a_1 a_1 a_4 - a_0 a_3 a_3 =$$

$$= a_1 a_2 a_3 + a_5 a_0 a_1 - a_1^2 a_4 + a_0 a_3^2;$$

...

$$\Delta_n = \Delta_{n-1} a_n.$$

Если  $\Delta_n = 0$ , то САУ на границе устойчивости

Частной формой критерия Гурвица является критерий (диаграмма) **Вышнеградского** (см. п. 7.4).

#### 6.4. Принцип аргумента

Рассмотрим характеристическое уравнение

$$F(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n = 0.$$

Разделим на  $a_0$  и обозначим  $\frac{a_1}{a_0} = b_1$ ;  $\frac{a_2}{a_0} = b_2$ .

Тогда  $F(p) = p^n + b_1 p^{n-1} + \dots + b_{n-1} p + b_n = 0$ .

Предположим, что корни  $p_i$  известны, тогда можно воспользоваться теоремой Безу и представить характеристическое уравнение

$$F(p) = (p - p_1)(p - p_2)\dots(p - p_n) = 0. \quad (6.7)$$

Любое число можно изобразить на комплексной плоскости, в том числе произвольные корни  $p_i$ , при этом модуль корня – длина вектора, а аргумент – угол между осью  $+1$  и направлением вектора против часовой стрелки.

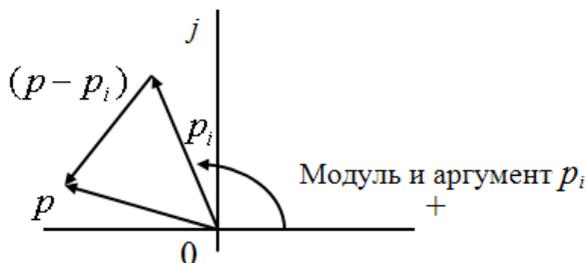


Рис.6.3. Изображение корня  $p_i$  на комплексной плоскости

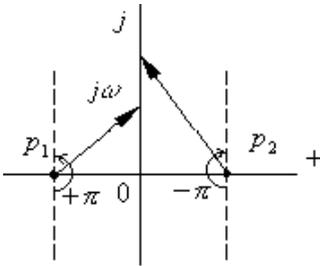
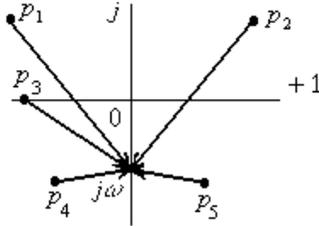
$p$  – произвольный оператор – тоже комплексное число, следовательно, каждый из сомножителей  $(p - p_i)$  можно изобразить на комплексной плоскости. Таких векторов будет  $n$ , причем конец вектора разности  $(p - p_i)$  может располагаться в любой точке в зависимости от произвольного оператора  $p$ .

Заменим  $p \rightarrow j\omega$ , т.е. примем, что  $p$  – чисто мнимое число (расположено на мнимой оси).

Тогда уравнение (6.7) можно переписать

$$F(j\omega) = (j\omega - p_1)(j\omega - p_2) \cdot \dots \cdot (j\omega - p_n) = 0. \quad (6.8)$$

Зададимся произвольным значением  $j\omega$ , изобразим полученные разности и увидим, что все векторы упираются на мнимую ось в т.  $j\omega$ .



Если менять  $\omega$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ , то конец каждого вектора  $(j\omega - p_i)$  будет скользить по мнимой оси, при этом угол будет изменяться от 0 до  $\pi$ . Таких векторов у нас  $n$ , причем часть из них расположена в общем случае в правой полуплоскости. Вращение вектора против часовой стрелки будем считать положительным. Тогда вектор  $(j\omega - p_i)$  для корня, расположенного в

левой полуплоскости, при  $\omega$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ , будет вращаться против часовой стрелки и его угол будет изменяться от 0 до  $+\pi$ ., а для корня, расположенного в правой полуплоскости - по часовой стрелке и угол 0 до  $-\pi$ .

Примем, что  $m$  – число правых корней, т.е. число пар комплексных корней с положительной вещевой частью или чисто положительных вещественных корней, тогда  $(n - m)$  – число левых корней.

Суммарный угол поворота правых корней равен  $-m\pi$  и обозначается как приращение аргументов всех правых корней  $\Delta \arg(j\omega - p_m) = -m\pi$ , а левых корней равен  $+(n - m)\pi$ , т.е.

$$\Delta \arg(j\omega - p_{(n-m)}) = (n - m)\pi.$$

Общий угол поворота всех векторов  $(j\omega - p_i)$ , т.е. изменение аргумента характеристического вектора  $F(j\omega)$  при  $\omega$  от  $-\infty$  до  $+\infty$

$$\Delta \arg F(j\omega) = (n - m)\pi - m\pi = (n - 2m)\pi. \quad (6.9)$$

Эта формула носит название “**принципа аргумента**”.

Практически достаточно изменять  $\omega$  от 0 до  $+\infty$  (ввиду симметричности  $F(j\omega)$ ), в этом случае каждый вектор  $(j\omega - p_i)$  будет поворачиваться на угол  $\frac{\pi}{2}$  и формула принципа аргумента имеет вид

$$\Delta \arg F(j\omega) = (n - 2m) \frac{\pi}{2} . \quad (6.10)$$

### 6.5. Критерий Михайлова

Критерий Михайлова, разработанный в 1936 г, основывается на принципе аргумента (6.10): *для устойчивости САУ все  $n$  корней должны быть левыми*, т.е.  $m=0$ , следовательно, должно выполняться условие

$$\Delta \arg F(j\omega) = n \frac{\pi}{2} . \quad (6.11)$$

**Порядок исследования САУ на устойчивость по этому критерию.**

1. Получаем характеристическое уравнение замкнутой САУ

$$F(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n = 0 .$$

2. Заменяем  $p \rightarrow j\omega$

$$F(j\omega) = a_0 (j\omega)^n + a_1 (j\omega)^{n-1} + \dots + a_{n-1} (j\omega) + a_n = 0 .$$

3. Выделяем из  $F(j\omega)$  вещественную  $R(\omega)$  и мнимую  $J(\omega)$  части

$$F(j\omega) = R(\omega) + jJ(\omega) .$$

4. Задавая  $\omega$  от 0 до  $+\infty$  строим характеристическую кривую (**годограф Михайлова**) на комплексной плоскости  $R(\omega) - J(\omega)$ .

5. По виду этой кривой судим об устойчивости САУ.

Практическая формулировка критерия Михайлова: *замкнутая САУ будет устойчивой, если годограф Михайлова при изменении  $\omega$  от 0 до  $+\infty$ , начинаясь с вещественной положительной полуоси, проходит последовательно в положительном направлении  $n$  квадрантов, где  $n$  – порядок (степень) характеристического уравнения замкнутой САУ.*

Примеры устойчивых замкнутых САУ приведены ниже.

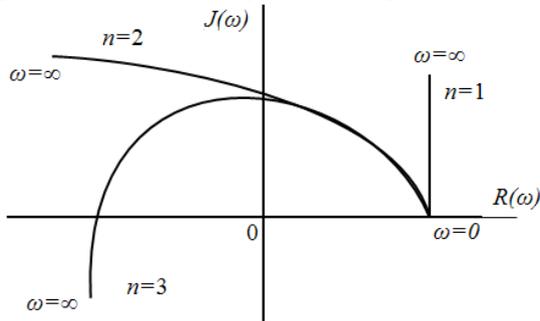


Рис.6.4. Годографы Михайлова для устойчивой САУ

Если годограф проходит через начало координат, то САУ на границе устойчивости. Если нарушается направление или порядок прохождения квадрантов, то САУ неустойчива.

### 6.6. Критерий Найквиста

Критерий разработан американским физиком Х. Найквистом в 1932 г. для исследования электронных усилителей с ОС.

Согласно этому критерию об устойчивости замкнутых систем судят по АФЧХ разомкнутой САУ, представленной в виде САУ с единичной главной обратной связью.

**Порядок проверки замкнутой САУ на устойчивость по критерию Найквиста:**

1. Получаем передаточную функцию разомкнутой САУ с единичной главной обратной связью.
2. Заменой  $p$  на  $j\omega$  получаем выражение для АФЧХ разомкнутой САУ.
3. Освобождаясь от иррациональности в знаменателе выделяем вещественную и мнимую частотные функции.
4. Задавая  $\omega$  от 0 до  $\infty$  строим годограф АФЧХ.
5. По виду годографа АФЧХ разомкнутой САУ судим об устойчивости замкнутой САУ.

При доказательстве частотного критерия Найквиста также используется принцип аргумента.

При применении критерия Найквиста возможны три случая.

1. САУ в разомкнутом состоянии устойчива.

В общем случае передаточная функция разомкнутой САУ представляет собой дробно рациональную функцию

$$W(p) = \frac{K(p)}{D(p)}.$$

Тогда при единичной обратной связи ПФ замкнутой САУ

$$W_3(p) = \frac{W(p)}{1+W(p)},$$

т.е.  $1+W(p)$  – характеристический полином замкнутой САУ.

$$\text{Обозначим } F(p) = 1+W(p) = 1 + \frac{K(p)}{D(p)} = \frac{K(p)+D(p)}{D(p)},$$

где  $K(p)+D(p)$  – характеристический полином замкнутой САУ;

$D(p)$  – характеристический полином разомкнутой САУ.

Как указывалось ранее, заменим  $p \rightarrow j\omega$ :

$$F(j\omega) = \frac{K(j\omega) + D(j\omega)}{D(j\omega)}$$

Определим суммарное приращение аргумента полинома  $F(j\omega)$

$$\Delta \arg F(j\omega) = \Delta \arg [K(j\omega) + D(j\omega)] - \Delta \arg D(j\omega),$$

$0 \leq \omega \leq \infty$                        $0 \leq \omega \leq \infty$                        $0 \leq \omega \leq \infty$

т.е. разность изменения аргументов числителя и знаменателя. Пусть  $D(p)$  имеет степень  $n$ , а  $K(p) - m$  (для реальных систем  $n > m$ ).

Запишем условие устойчивости для полинома  $D(j\omega)$ :

$$\Delta \arg D(j\omega) = n \frac{\pi}{2},$$

т.е. все корни  $p_i$  должны располагаться левее мнимой оси,

и для полинома  $D(p) + K(p)$

$$\Delta \arg[D(p) + K(p)] = n \frac{\pi}{2},$$

так как степени характеристических уравнений разомкнутой и замкнутой САУ одинаковы и равны  $n$ .

Таким образом, должно быть выполнено условие

$$\Delta \arg F(j\omega) = 0. \tag{6.12}$$

Это - условие устойчивости по критерию Найквиста.

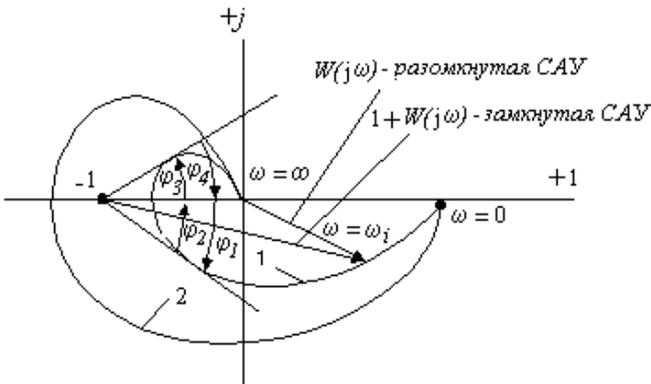


Рис.6.5. Доказательство устойчивости по критерию Найквиста

Как видно из рисунка, суммарный угол поворота векторов годографа  $1 + W(j\omega)$  при изменении  $\omega$  от 0 до  $\infty$  равна 0, т.к. по рисунку видно, что  $(\varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3 + \varphi_4) = 0$ , а для второго годографа суммарный угол равен  $360^\circ$ , поэтому эта замкнутая САУ неустойчива.

Практическая формулировка критерия по виду годографа АФЧХ разомкнутой САУ:

*если разомкнутая САУ устойчива, то для устойчивости замкнутой САУ необходимо и достаточно, чтобы АФЧХ разомкнутой САУ при изменении  $\omega$  от 0 до  $\infty$  не охватывала точку  $(-1; j0)$ .*

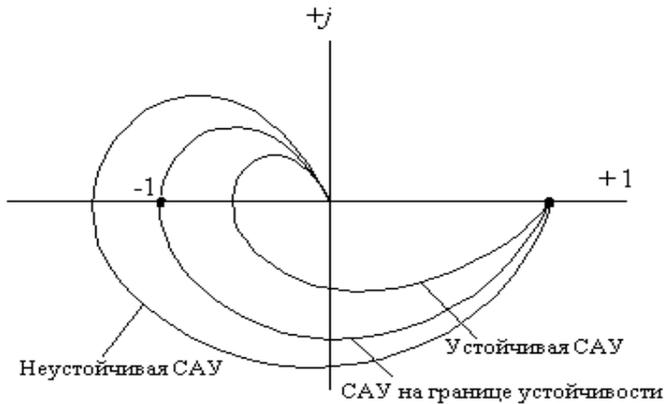


Рис. 6.6. Примеры годографов разомкнутой САУ, при которых замкнутая САУ будет устойчивой, на границе устойчивости или неустойчивой

2. САУ в разомкнутом состоянии на границе устойчивости.

В этом случае

$$W(p) = \frac{K(p)}{p^v D_1(p)},$$

где  $v$  – число интегрирующих звеньев, т.е. порядок астатизма САУ.

$D_1(p)$  – полином от  $p$ , причем не имеющий нулей в правой полуплоскости и на мнимой оси.

АФЧХ

$$W(j\omega) = \frac{K(j\omega)}{(j\omega)^v D_1(j\omega)} \rightarrow \infty \text{ при } \omega \rightarrow 0,$$

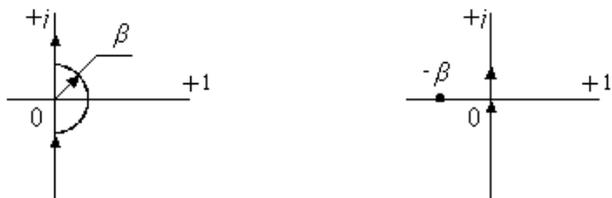
поэтому необходимо специальное исследование годографа вблизи точки, соответствующей  $\omega = 0$ .

Примем порядок астатизма  $v = 1$ , тогда

$$W(j\omega) = \frac{K(j\omega)}{j\omega D_1(j\omega)} \rightarrow \infty \text{ при } \omega \rightarrow 0,$$

поэтому для сохранения формулировки критерия для случая 1, при построении годографа, обходя мнимую ось от  $-\infty$  до  $+\infty$ , огибают т.(0;0) справа по полуокружности бесконечно малого радиуса  $\beta$  (т.(0;0) при этом как бы оказывается отрицательной) либо рассматривают нулевой корень как предел отрицательного вещественного корня  $p_n = -\beta$ , при

$\beta \rightarrow 0$ , т.е. как изображено на рисунке ниже.



Вспользуемся второй возможностью предельного перехода, как наиболее наглядной и простой при доказательстве, тогда АФЧХ

$$W(j\omega) = \frac{K(j\omega)}{(j\omega + \beta)D_1(j\omega)},$$

имеет предел, равный какому-то числу (радиусу)  $R$ . При  $\omega \rightarrow 0$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} W(j\omega) = \frac{k_0}{\beta d_0} = R,$$

Причем  $R \rightarrow \infty$  при  $\beta \rightarrow 0$  в первой четверти окружности.

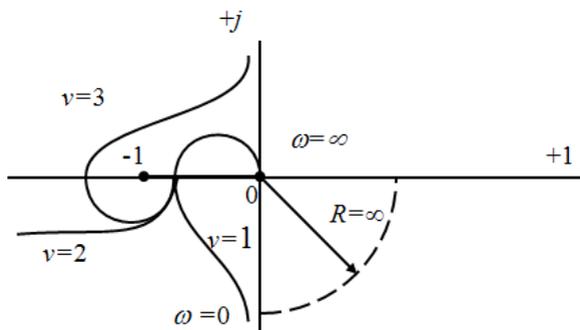


Рис. 6.7. Годограф Найквиста для астатической САУ первого порядка

При  $v = 2$ , очевидно, потребуется дополнение в двух четвертях и т.д. до  $v$  четвертей.

#### Формулировка критерия:

САУ, нейтральная в разомкнутом состоянии, устойчива в замкнутом состоянии, если годограф АФЧХ разомкнутой САУ с его дополнением в  $\infty$  не охватывает т.  $(-1; j0)$  при изменении  $\omega$  от 0 до  $\infty$ .

### 3. САУ в разомкнутом состоянии неустойчива

САУ, содержащая нейтральные или неустойчивые звенья, в разомкнутом состоянии может оказаться неустойчивой, т.е. характеристическое уравнение разомкнутой САУ может иметь  $m$  корней в правой полуплоскости и поэтому приращение аргумента составляет

$$\Delta \arg D(j\omega) = (n - 2m) \frac{\pi}{2}.$$

Если потребовать, чтобы система в замкнутом состоянии была устойчивой, то должно выполняться условие

$$\Delta \arg [D(j\omega) + K(j\omega)] = n \frac{\pi}{2},$$

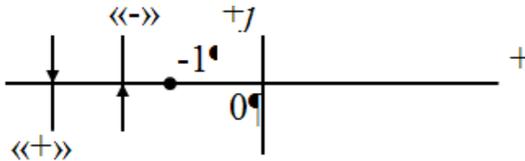
тогда суммарное приращение аргумента

$$\begin{aligned} \Delta \arg F(j\omega) &= \Delta \arg [D(j\omega) + K(j\omega)] - \Delta \arg D(j\omega) = \\ &= n \frac{\pi}{2} - (n - 2m) \frac{\pi}{2} = 2m \frac{\pi}{2} = 2\pi \frac{m}{2}. \end{aligned} \quad (6.13)$$

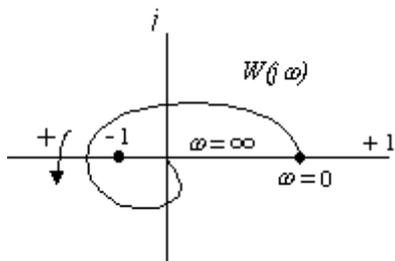
#### Формулировка критерия:

САУ, неустойчивая в разомкнутом состоянии, будет устойчива в замкнутом состоянии, если при изменении  $\omega$  от 0 до  $\infty$  годограф АФЧХ разомкнутой САУ охватывает  $m/2$  раз точку  $(-1; j0)$  в положительном направлении, где  $m$  - число правых корней характеристического уравнения разомкнутой САУ.

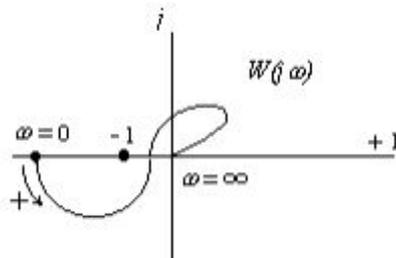
**Напоминание:** положительным считается переход вещественной оси сверху вниз левее точки  $(-1; j0)$  при  $\omega$  от 0 до  $\infty$ , а отрицательным – снизу вверх.



Примеры годографов для этого случая приведены ниже.



Как видно из рисунка, годограф охватывает  $\pi$   $(-1; j0)$  в «+» направлении 1 раз, т.е.  $\frac{m}{2} = 1$  и, если  $m = 2$ , то САУ в замкнутом состоянии будет устойчивой.



Здесь годограф АФЧХ охватывает  $(-1; j0)$  пол-раза, т. е.  $\frac{m}{2} = 0,5$ . Тогда при одном положительном корне  $m = 1$  замкнутая САУ будет устойчивой.

### 6.7. Критерий устойчивости по обратной АФЧХ

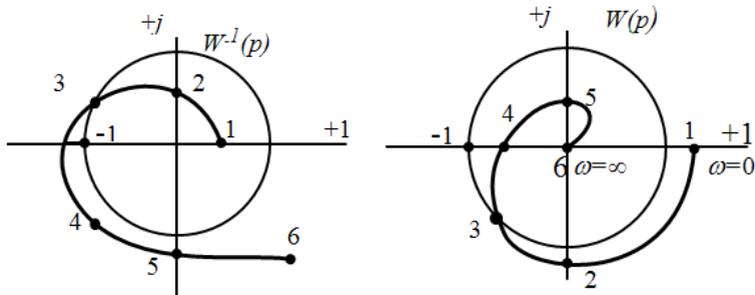
В расчетной практике часто пользуются методом построения обратной АФЧХ разомкнутой САУ

$$W^{-1}(p) = \frac{1}{W(p)} = \frac{D(p)}{K(p)},$$

т.е. обратная АФЧХ имеет вид

$$W(j\omega) = \frac{1}{A(\omega)} e^{-j\varphi(\omega)}.$$

Графическое соответствие изображено ниже, откуда видно, что точкам, лежащим внутри (вне) окружности единичного  $R$ . на плоскости  $W(p)$  соответствуют точки, лежащие вне (внутри) окружности единичного  $R$  на плоскости  $W^{-1}(p)$ , а знак перехода и его место будут обратными.



Формулировка критерия:

САУ устойчива, если разность между числами отрицательных и положительных переходов обратным частотным годографом разомкнутой системы отрезка вещественной оси  $(0; -1)$  равна  $\frac{m}{2}$ ,

где  $m$  – число правых корней характеристического уравнения разомкнутой САУ.

### 6.8. Критический (предельный) коэффициент передачи разомкнутой системы

Пусть разомкнутая система автоматического управления имеет передаточную функцию

$$W(p) = \frac{K}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)(T_3 p + 1)}.$$

При различных  $K$  годографы АФЧХ имеют вид

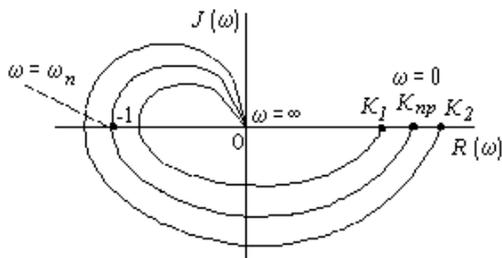


Рис. 6.8. К выводу критического коэффициента передачи разомкнутой САУ

Тогда при  $K_1$  – замкнутая САУ устойчивая, при  $K_{np}$  – САУ находится на границе устойчивости, т.к. годограф проходит через т.(-1;0) при предельной частоте  $\omega_n$ , а при  $K_2$  САУ неустойчива (см. выше).

На границе устойчивости модуль АФЧХ имеет значение, равное (-1), т.е

$$W(j\omega_n) = \frac{K_{np}}{(T_1 j\omega_n + 1)(T_2 j\omega_n + 1)(T_3 j\omega_n + 1)} = -1,$$

или

$$(T_1 j\omega_n + 1)(T_2 j\omega_n + 1)(T_3 j\omega_n + 1) = -K_{np}.$$

$$-jT_1T_2T_3\omega_n^3 - (T_1T_2 + T_2T_3 + T_3T_1)\omega_n^2 + j(T_1 + T_2 + T_3)\omega_n + 1 + K_{np} = 0.$$

Так как коэффициент передачи равен предельному  $K = K_{np}$  при частоте  $\omega = \omega_n$ , то мнимая часть АФЧХ при этом равна нулю, т.е.

$$\omega_n[(T_1 + T_2 + T_3) - T_1T_2T_3\omega_n^2] = 0,$$

откуда

$$\omega_n = \sqrt{\frac{T_1 + T_2 + T_3}{T_1T_2T_3}}.$$

Подставим в вещественную часть

$$-(T_1T_2 + T_2T_3 + T_3T_1) \left[ \sqrt{\frac{T_1 + T_2 + T_3}{T_1T_2T_3}} \right]^2 + 1 + K_{np} = 0,$$

откуда

$$K_{np} = (T_1T_2 + T_2T_3 + T_3T_1) \frac{T_1 + T_2 + T_3}{T_1T_2T_3} - 1,$$

или

$$K_{np} = \left( \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} + \frac{1}{T_3} \right) (T_1 + T_2 + T_3) - 1,$$

или после почленного перемножения

$$K_{np} = \frac{T_1}{T_2} + \frac{T_3}{T_2} + \frac{T_2}{T_1} + \frac{T_3}{T_1} + \frac{T_1}{T_3} + \frac{T_2}{T_3} + 2. \quad (6.14)$$

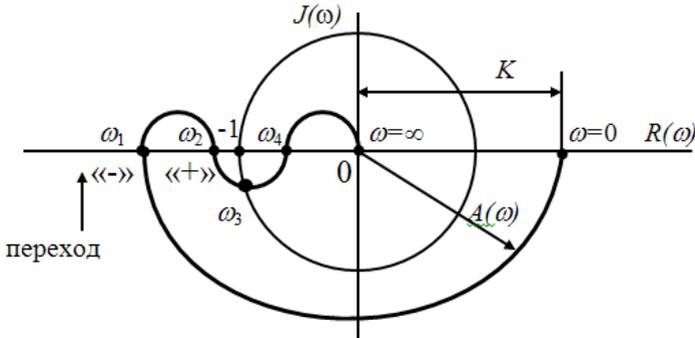
Минимальное значение критического коэффициента передачи для САУ третьего порядка получается при  $T_1 = T_2 = T_3$ , равное  $\underline{K_{np}} = 8$ .

Для увеличения  $K_{np}$  необходимо либо увеличить наибольшую, либо уменьшить наименьшую постоянную времени  $T$ , в большинстве случаев принимают последнее, т.к. при этом повышается быстродействие САУ.

Критический коэффициент передачи  $K_{np}$  тем больше, чем больше разность между двумя наиболее отличающимися  $T$  и чем ближе третья (средняя по величине)  $T$  к среднеарифметическому значению двух первых.

### 6.9. Суждение об устойчивости САУ по логарифмическим частотным характеристикам разомкнутой САУ

Критерий устойчивости Найквиста может быть сформулирован применительно к ЛЧХ системы в разомкнутом состоянии. Пусть АФЧХ имеет вид



Точкам пересечения годографа АФЧХ разомкнутой САУ с отрезком вещественной оси  $(-\infty; -1)$  соответствуют точки ЛАЧХ, для которых

$$L(\omega) = 20 \lg |W(j\omega)| > 0 \quad (A(\omega) > 1);$$

$$\text{и } \varphi(\omega) = \arg W(j\omega) = -\pi, -3\pi, \dots$$

Примем точки ЛФЧХ, для которой  $L(\omega) > 0$  и в которой она пересекает при увеличении  $\omega$  прямые  $-\pi, -3\pi, \dots$  снизу вверх – положительными; сверху вниз – отрицательными переходами.

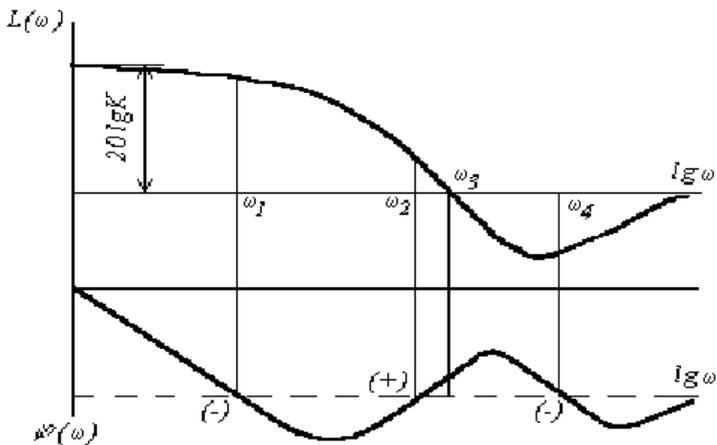
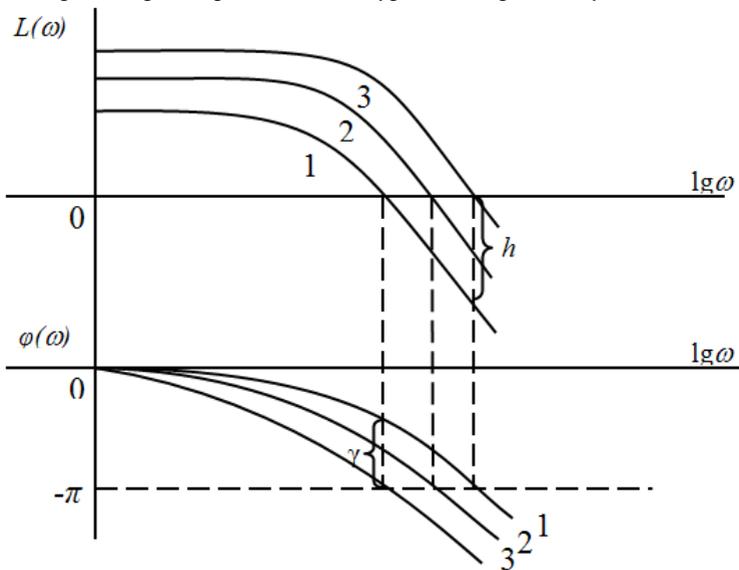


Рис. 6.9. Логарифмические частотные характеристики

**Формулировка критерия:**

САУ устойчива, если разность между числами положительных (+) и отрицательных (-) переходов ЛФЧХ при  $L > 0$  равна  $\frac{m}{2}$ , где  $m$  – число правых корней характеристического уравнения разомкнутой САУ.



На семействе графиков логарифмических частотных характеристик, изображенных на рисунке выше, видно, что пара

- 1 - устойчивая САУ;
- 2 – САУ на границе устойчивости;
- 3 -неустойчивая САУ.

Только для устойчивой САУ (паре 1) можно указать

$h$  – запас устойчивости по амплитуде;  
 $\gamma$  - запас устойчивости по фазе.

*6.10. Приближенный способ построения логарифмических частотных характеристик одноконтурных систем*

Пусть передаточная функция

$$W(p) = \frac{100(1,25p + 1)}{p(5p + 1)^2(0,02p + 1)(0,005p + 1)}.$$

Построение ЛАЧХ производим по асимптотам в следующей последовательности

1. Определяем частоты сопряжения, начиная с наибольшей постоянной времени

$$\omega_1 = \frac{1}{5} = 0,2; \omega_2 = \frac{1}{1,25} = 0,8; \omega_3 = \frac{1}{0,02} = 50; \omega_4 = \frac{1}{0,005} = 200.$$

2. Отмечаем эти сопрягающие частоты на логарифмической оси частот  $lg \omega$ .

3. Проводим низкочастотную асимптоту  $L(\omega)$  при  $\omega < \omega_1$ . Эта асимптота есть прямая с наклоном  $-20\nu$  дБ/дек, где  $\nu$  - порядок астатизма САУ (в данном примере из передаточной функции видно, что САУ содержит одно идеальное интегрирующее звено, поэтому  $\nu=1$ ). При  $\omega=1$  эта прямая должна иметь ординату при  $k=100$

$$L(\omega) = 20 \lg k = 40 \text{ дБ};$$

4. После каждой частоты сопряжения наклон ЛАЧХ изменяется по сравнению с предыдущим наклоном на:

- 20 дБ/дек в случае апериодического звена 1-го порядка;
- 40 дБ/дек для колебательного звена и звена 2-го порядка;
- +20 дБ/дек для дифференцирующего звена 1-го порядка;

+40 дБ/дек для дифференцирующего звена 2-го порядка.

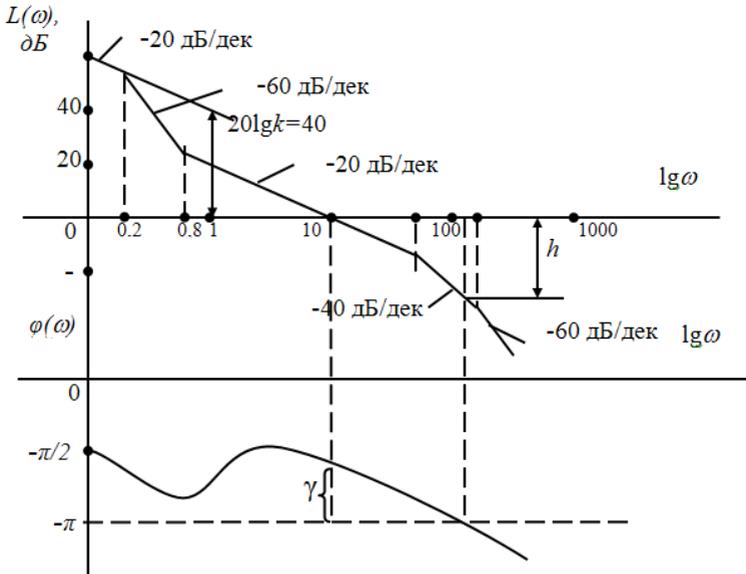


Рис. 6.10. Логарифмические частотные характеристики

Для проверки: высокочастотная асимптота ( $\omega > \omega_{наив}$ )  $L(\omega)$  имеет наклон  $-20(n - m) = -20(5 - 2) = -60$  дБ/дек, где  $n$  – порядок знаменателя;  $m$  – порядок числителя.

Построение ЛФЧХ.

ЛФЧХ строят сложением ординат ЛФЧХ отдельных звеньев с учетом вида соединения или по специальным номограммам.

Логарифмические частотные характеристики многоконтурных систем проще строят по специальным номограммам.

На рис.6.10 показаны:

$h$  – запас устойчивости по амплитуде;

$\gamma$  – запас устойчивости по фазе.

Для технических систем автоматики величины запасов должны быть не менее  $h_{треб} \geq 6$  дБ,  $\gamma_{треб} \geq 30^\circ$ .

### 6.11. Метод Д – разбиения пространства коэффициентов характеристического уравнения

Метод Д – разбиения разработан учеными Соколовым и Неймарком.

В некоторых случаях необходимо выяснить, в каких пределах можно менять те или иные параметры элементов устойчивой САУ, чтобы она сохраняла свое состояние устойчивости.

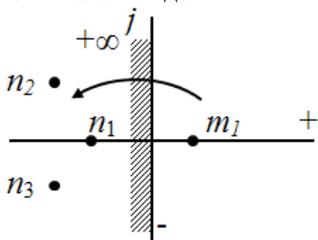
Пусть характеристическое уравнение замкнутой САУ

$$F(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n = 0, \quad (6.15)$$

В общем случае оно имеет  $m$  корней правых и  $(n-m)$  левых корней, однако если менять коэффициенты  $a_0$ , или  $a_1$  и т.п., то корни перемещаются в плоскости корней. При некоторых значениях коэффициентов вещественный корень может попасть в начало координат, а пара мнимых – на мнимую ось и тогда

$$F(j\omega) = a_0 (j\omega)^n + a_1 (j\omega)^{n-1} + \dots + a_{n-1} (j\omega) + a_n = 0. \quad (6.16)$$

Уравнению (6.16) в  $(n-1)$ -мерном пространстве коэффициентов  $a_1, \dots, a_n$  соответствует одна точка при  $\omega = \omega_1$  и гиперповерхность при изменении  $\omega$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ .



При  $a_i = \text{var}$  корень  $m_1$  может перейти в левую полуплоскость, этому в пространстве коэффициентов соответствует переход изображающей точки  $M$  в  $N$ , т.е. при четырех корнях в т.  $M$  3 левые корни  $n_1, n_2, n_3$  и один правый  $m_1$ , а в т.  $N$  – все корни становятся левыми  $n_1, n_2, n_3, m_1$ .

Таким образом, если менять коэффициенты уравнения, то при некотором их сочетании значений один вещественный корень или пара комплексных корней характеристического уравнения будет пересекать мнимую ось справа налево (или наоборот). При этом изображающая точка будет пересекать гиперповерхность  $F(j\omega) = 0$ , как показано на рисунке ниже.

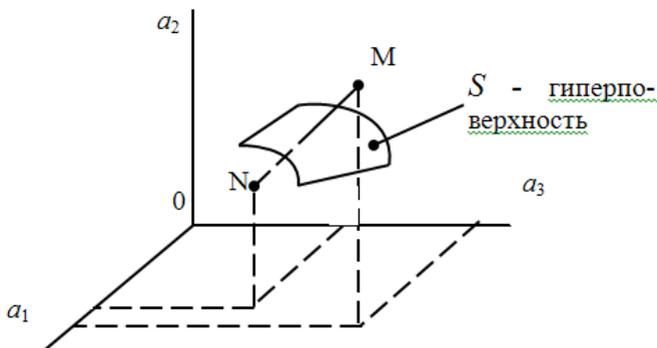


Рис. 6.11. Пространство коэффициентов уравнения

Как мнимая ось является границей устойчивости в плоскости корней, определяющей устойчивость или неустойчивость САУ, так и гиперповерхность  $S$  является границей области устойчивости в пространстве коэффициентов, разделяющей значения коэффициентов, обеспечивающие устойчивость САУ.

Такое разбиение пространства коэффициентов уравнения третьей степени называется  $\mathcal{D}$  – **разбиением** на области  $\mathcal{D}(3;0)$ ,  $\mathcal{D}(2;1)$ ,  $\mathcal{D}(1;2)$ ,  $\mathcal{D}(0;3)$  соответственно с тремя, двумя и т.п. корнями в левой полуплоскости.

Аналогично можно построить  $\mathcal{D}$ - разбиение не в пространстве коэффициентов, а в пространстве параметров САУ, от которой зависят эти коэффициенты, например в координат  $T_1, T_2, T_3$  и  $k$  или только одного из них.

### 6.12. $\mathcal{D}$ – разбиение в плоскости одного параметра

Пусть нас интересует влияние параметра  $\mu$  на устойчивость САУ. Для выяснения вопроса, в каких пределах можно менять  $\mu$ , чтобы САУ оставалась устойчивой, необходимо разрешить характеристическое уравнение (6.15) относительно  $\mu$ , т.е. объединить все члены, зависящие от  $\mu$  и не зависящие от него:

$$F(p) = P(p) + \mu Q(p) = 0, \quad (6.17)$$

Границы  $\mathcal{D}$  - разбиения определяются согласно (6.17) путем заме-

ны  $p \rightarrow j\omega$ , и далее выделяют вещественную и мнимую части

$$F(j\omega) = P(j\omega) + \mu Q(j\omega).$$

Отсюда

$$\mu = -\frac{P(j\omega)}{Q(j\omega)} = \alpha(\omega) + j\beta(\omega).$$

Затем, задаваясь частотой от 0 до  $\infty$  (т.к. функция  $\alpha(\omega)$  – четная, а  $\beta(\omega)$  – нечетная), строят половину кривой Д - разбиения, которую дополняют зеркальным отражением относительно оси  $\alpha$ .

Затем наносят штриховку кривой Д – разбиения: обходя кривую Д - разбиения от  $-\infty$  до  $+\infty$ , штрихуют так называемой одинарной штриховкой левую сторону (т.к. в левой полуплоскости корни отрицательные) и выделяют участки – области с различным числом левых и правых корней. Та область, где число левых корней наибольшее, является претендующей на область устойчивости. Взяв произвольное значение  $\mu$  из этой области, определяют устойчивость САУ по одному из критериев. Если САУ устойчива, то она будет устойчива и при любом значении  $\mu$ , взятым из этой области.

Практически интересуются не всей областью Д-разбиения, а лишь её действительной (вещественной) частью, которая соответствует вещественным значениям  $\mu$  (т.к. параметры САУ – вещественные числа).

Для структурно-неустойчивой САУ ни одна из областей не будет областью устойчивости. Поэтому сначала нужно скорректировать САУ и сделать её структурно-устойчивой.

Пример. Построить кривую Д - разбиения для САУ с характеристическим уравнением

$$F(p) = p^3 + b_1 p^2 + b_2 p + b_3 = 0.$$

Пусть нас интересует параметр  $b_3 = \mu$ .

Тогда

$$P(p) = p^3 + b_1 p^2 + b_2 p + b_3; \quad Q(p) = 1.$$

Заменим  $p \rightarrow j\omega$ , т.е. чисто мнимые корни, и получим

$$\begin{aligned} \mu &= -\frac{P(j\omega)}{Q(j\omega)} = -\frac{(j\omega)^3 + b_1(j\omega)^2 + b_2(j\omega)}{1} = \\ &= j\omega^3 + b_1\omega^2 - b_2j\omega = b_1\omega^2 + j(\omega^3 - b_2\omega) = \\ &= \alpha + j\beta. \end{aligned}$$

Как видно из рис., в данном случае выделяются три области. Зададимся произвольным числом правых и левых корней в любой из областей.

Допустим, что число положительных и отрицательных корней в области III  $D(m, n)$ , тогда в области II  $D(m-1, n+1)$  а области I  $D(m+1, n-1)$ , т.е. левых корней больше в области II. (Число корней в скобках можно записывать в другой последовательности: сначала число левых корней, а затем – число правых)

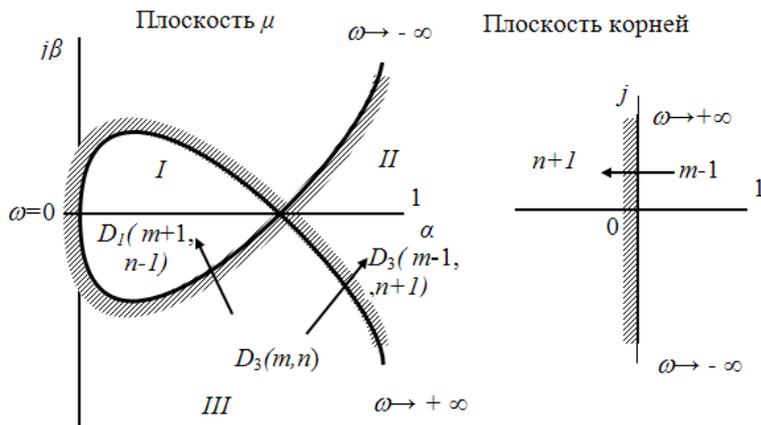


Рис. 6.12. Построение кривой Д - разбиения

Наибольшее число левых корней содержится в области II. Следовательно, область II претендует на область устойчивости.

### 6.13. Структурно-неустойчивые САУ

Ранее было доказано, что устойчивость системы зависит как от вида характеристического уравнения, так и конкретных числовых значений коэффициентов этого уравнения, изменяя которые можно добиться устойчивости САУ. Однако имеются системы, которые неустойчивы при любых значениях коэффициентов – это так называемые **структурно-неустойчивые системы**.

Для того, чтобы структурно-неустойчивую систему сделать устойчивой, необходимо ввести в систему дополнительные элементы и связи, т.е. изменить структуру.

Как показал анализ, к структурно-неустойчивым системам относятся САУ, содержащие более 1 интегрирующего звена, более 1 неустойчивого звена, одновременно интегрирующее  $\frac{k}{p}$  и неустойчивое звено  $\frac{k}{Tp-1}$ .

Если в САУ будут  $m$  консервативных звеньев  $\frac{k}{T^2 p^2 + 1}$ , то при

$$n \leq 4m$$

САУ будет структурно-неустойчивой, где  $n$ - степень характеристического уравнения системы.

Например, в САУ имеется одно консервативное звено, тогда для того чтобы САУ была структурно-устойчивой, необходимо, чтобы она описывалась дифференциальным уравнением не ниже 5-го порядка.

Звеньями, улучшающими устойчивость системы, являются **форсирующие (дифференцирующие) звенья** с передаточной функцией вида  $(1 + kp)$ .

## 7. ИССЛЕДОВАНИЕ КАЧЕСТВА САУ

### 7.1. Показатели качества САУ

Качество автоматической системы, как и любого технического устройства, может быть оценено такими общими показателями, как масса, габариты, стоимость, надежность и т.п. Однако в ТАУ используется понятие «качество» в более узком смысле – точность поддержания управляемой величины в статистике и динамике, быстродействие и т. п. Поэтому вместо термина «качество» в САУ чаще употребляют «качество процесса управления (переходного процесса)».

**Качеством процесса управления** называют характер и количественные оценки переходного процесса устойчивой системы, зависящие от параметров САУ и характера управляющих и возмущающих воздействий.

**Показателями качества** называют величины, характеризующие поведение САУ в переходном режиме, вызванным каким-либо входным воздействием (чаще единичным ступенчатым  $1(t)$ ). К показателям качества относятся также и показатели точности в статическом режиме.

#### Основные показатели качества

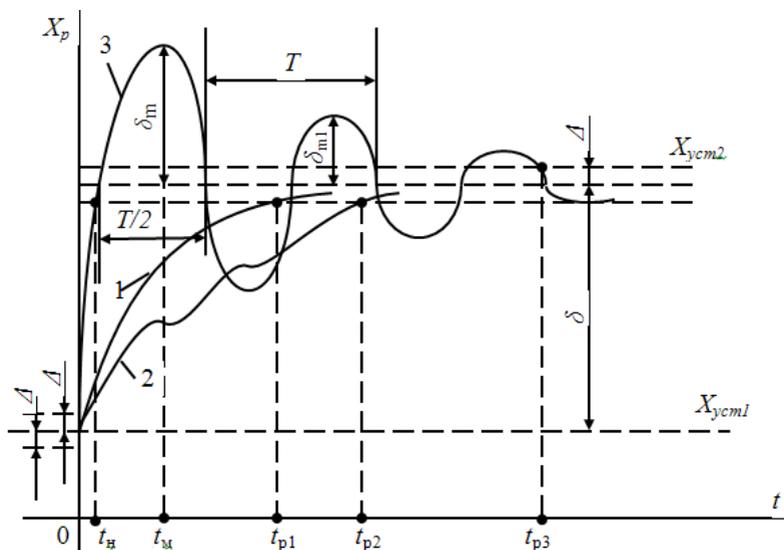


Рис. 7.1. Кривые переходных процессов САУ

1. Характер затухания переходного процесса:

- 1-апериодический;
- 2 -монотонный;
- 3 -колебательный.

2. Время регулирования  $t_p$  - это время ( $t_{p1}, t_{p2}, t_{p3}$ ) от момента приложения ступенчатого воздействия до момента, после которого регулируемая величина отклоняется от нового установившегося значения меньше наперед заданного малого числа  $\Delta$ . Требуется

$$t_p \leq t_{p \text{ доп}}, \quad (7.1)$$

т.к.  $t_p$  характеризует быстрдействие САУ.

3. Время нарастания  $t_n$  - для колебательных процессов - это время, за которое регулируемая величина в первый раз становится равной новому установившемуся значению.

4. Время достижения первого максимума  $t_M$ .

5. Установившееся отклонение  $\Delta$  - наперед заданная величина отклонения регулируемой величины от нового установившегося значения (при  $t \rightarrow \infty$ )

$$\Delta \leq \Delta_{\text{доп}} \text{ и обычно } \Delta_{\text{доп}} = 5\% \text{ ,т.е.} \quad (7.2)$$

$$\Delta_{\text{доп}} = 0,05 X_{\text{уст}1}, \Delta_{\text{доп}} = 0,05 X_{\text{уст}2}. \quad (7.3)$$

6. Статическая ошибка  $\delta$  - разность между начальным и новым установившимися значениями регулируемой величины при ступенчатом входном воздействии. Если  $\delta = 0$ , то САУ – астатическая. Должно соблюдаться условие  $\delta \leq \delta_{\text{доп}}$ .

$$\text{Обычно } \delta\% = \frac{\delta}{X_{\text{уст}1}} 100\% . \quad (7.4)$$

7. Величина перерегулирования  $\delta_m$  - максимальное (первое) отклонение  $X_p$  от нового установившегося значения в сторону, противоположную от начального значения. У монотонных и апериодических переходных процессов  $\delta_m = 0$ . Величина  $\delta_m$  характеризует динамическую точность САУ. Иногда берут относительное перерегулирование

$$\delta_m \% = \frac{\delta_m}{\delta} 100\% . \quad (7.5)$$

$$\text{Должно соблюдаться условие } \delta_m \% \leq \delta_{m \text{ доп}}, \quad (7.7)$$

причем  $\delta_{m \text{ доп}} = 20 - 30\%$  % или вычисляют

$$\frac{\delta_m}{\Delta} = m \text{ для разных САУ и сравнивают их по быстрдействию.}$$

#### 8. Период колебаний колебательных переходных процессов

$$T = \frac{2\pi}{\omega_i}, \quad (7.8)$$

где  $\omega_i$  - угловая частота колебаний,  $c^{-1}$ , численно равна комплексной части корня  $X(p)$ .

#### 9. Отношение между двумя соседними отклонениями

$$m = \frac{\delta_m}{\delta_{m_1}} = e^{\frac{2\pi}{\omega} \alpha_i} = e^{T \alpha_i}, \quad (7.9)$$

где  $\alpha_i$  - значение вещевой части комплексного корня  $p_i$ .

10. Логарифмический декремент затухания - натуральный логарифм предыдущего отношения  $\ln m = T \alpha_i$ .

11. Колебательность  $\mu$  переходного процесса - число колебаний  $X_p$  около нового установившегося значения до окончания переходного процесса, должно быть  $\mu \leq \mu_{\text{доп}} = 2 \dots 3$ .

#### 12. Показатель колебательности

$$\mu = \frac{\omega}{\alpha}, \quad (7.10)$$

причем  $\alpha$  - вещественная часть ближайшего к мнимой оси комплексного корня.

13. Степень устойчивости  $\alpha$  - характеризует быстроту затухания переходного процесса и выражается, как и выше, абсолютным значением вещественной части комплексного корня, расположенного на наименьшем расстоянии от мнимой оси.

Размерность  $\alpha = [c^{-1}]$ .

Могут быть и другие требования, обусловленные конкретными условиями.

## 7.2. Методы исследования качества САУ

Чтобы установить, в какой мере показатели САУ удовлетворяют предъявленным требованиям, необходимо решить дифференциальное уравнение системы при заданных воздействиях на входе и построить кривую переходного процесса. Это так называемый **прямой метод** исследования качества.

Однако он не дает возможности для систем выше 3-го порядка судить о влиянии параметров САУ на переходный процесс и о целесообразном направлении изменения этих параметров для того, чтобы исправить (скорректировать) неудовлетворительные переходные процессы.

В связи с этим разработаны **косвенные методы** оценки:

- 1) метод распределения корней;
- 2) метод интегральных оценок;
- 3) частотный метод.

После того, как косвенными методами подобраны параметры, обеспечивающие заданные показатели качества, полезно построить кривую переходного процесса прямым или иным методом, чтобы убедиться в удовлетворении требуемых показателей качества.

Некоторые показатели качества переходного процесса существенно зависят от вида возмущающего воздействия, следствием которой является данный переходной процесс. Поэтому при анализе качества переходного процесса в ряде случаев рассматривается полное уравнение (с правой частью) САУ.

## 7.3. Оценка качества по распределению корней

Один из простых методов определения корней характеристического уравнения заключается в следующем.

Пусть имеется характеристическое уравнение системы

$$p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n = 0. \quad (7.11)$$

Если  $a_0 \neq 1$ , то, поделив все уравнение на  $a_0$ , приводим исходное уравнение к виду (7.11).

Из трех последних членов составляем квадратичное уравнение

$$a_{n-2} p^2 + a_{n-1} p + a_n = 0 \quad (7.12)$$

и, решая его, определяем корни. Могут быть следующие случаи.

- а) Если корни вещественные, то первым приближением вещест-

венного корня считаем

$$p_1' = -\frac{a_n}{a_{n-1}}$$

и производим деление левой части (7.11) на двучлен  $p + \frac{a_n}{a_{n-1}}$  до получения остатка  $b_{n-1}p + a_n$  и в качестве второго приближения берем

$$p_1'' = -\frac{a_n}{b_{n-1}}.$$

Далее делим левую часть (7.11) на двучлен  $p + \frac{a_n}{b_{n-1}}$  до получения остатка  $c_{n-1}p + a_n$  и в качестве третьего приближения берем

$$p_1''' = -\frac{a_n}{c_{n-1}}.$$

Приближения заканчиваются, если остаток практически перестает изменяться (с наперед заданной точностью).

б) Если корни (7.11) комплексные, то для первого приближения левую часть (7.11) нужно делить на трехчлен

$$p^2 + \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}p + \frac{a_n}{a_{n-2}}$$

до получения остатка  $b_{n-2}p^2 + b_{n-1}p + a_n = 0$ . Корни этого трехчлена будут вторым приближением пары комплексных корней.

Деля левую часть (7.11) на трехчлен

$$p^2 + \frac{b_{n-1}}{b_{n-2}}p + \frac{a_n}{b_{n-2}}$$

до остатка  $c_{n-2}p^2 + c_{n-1}p + a_n = 0$  найдем третье приближение и т.д.

Нахождение следующих корней проводим по тому же правилу по новому многочлену – частному при последнем приближении.

Тогда, при известных корнях, можно определить следующие показатели качества.

Среднегеометрический корень равен

$$\alpha_0 = \sqrt[n]{\frac{a_n}{a_0}} \quad (7.13)$$

и чем больше  $\alpha_0$ , тем больше  $t_p$ .

Степень устойчивости  $\alpha = -\dots \left[ \frac{1}{c} \right]$  – расстояние от мнимой оси до ближайшего комплексного корня.

По величине  $\alpha$  можно определить время регулирования

$$t_p = \frac{\ln m}{\alpha}, \quad (7.14)$$

где  $\ln m = T \cdot \alpha$ . В свою очередь  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ ,

где  $\omega$  – мнимая часть того же корня.

Показатель колебательности  $\mu = \frac{\omega}{\alpha}$  определяется по корню с наименьшей вещественной частью, которая дает наиболее медленно затухающую составляющую ( $\mu$  округляется до целого числа). Чтобы  $\mu$  не превышало определенную величину, можно выделить запретную зону вне сектора

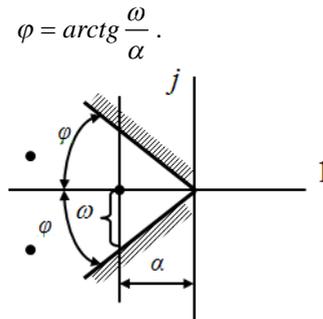


Рис.7.2. Запретная зона в плоскости корней

Затухание за период

$$\xi = \frac{\delta_m - \delta_{m_1}}{\delta_m} 100\% \quad (7.15)$$

или

$$\xi = \left[ 1 - e^{-\frac{2\pi}{\omega}} \right] \cdot 100\% . \quad (7.16)$$

Для технических систем  $\xi_{\text{отн}} \geq 90 \dots 98\%$  .

Эти показатели не учитывают влияние правой части дифференциального уравнения. Более полную картину можно получить при рассмотрении влияния на показатели качества распределения нулей и полюсов передаточных функций САУ  $W_3(p)$ .

Влияние распределения корней на характер переходного процесса в системе третьего порядка дает **диаграмма Вышнеградского**.

#### 7.4. Диаграмма Вышнеградского

Характеристическое уравнение

$$a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = 0 . \quad (7.17)$$

Делением на  $a_0$  всех членов и введением новой переменной

$$q = p \sqrt[3]{\frac{a_0}{a_n}} = \frac{p}{p_0} , \quad (7.18)$$

где  $p_0 = \sqrt[3]{p_1 p_2 \dots p_n} = \sqrt[3]{\frac{a_n}{a_0}} = \sqrt[3]{\frac{a_3}{a_0}}$  ,

приводится к нормированному виду

$$p^3 + Aq^2 + Bq + 1 = 0 , \quad (7.19)$$

где коэффициенты  $A = \frac{a_1 p_0^2}{a_3} = \frac{a_1}{\sqrt[3]{a_0^2 a_3}}$  ;  $B = \frac{a_2 p_0}{a_3} = \frac{a_2}{\sqrt[3]{a_0 a_3^2}}$  - называются

параметрами Вышнеградского.

Вышнеградский в 1876 г. сформулировал условия устойчивости для систем 3-го порядка:

$$A > 0 ; B > 0 ; AB > 1 , \quad (7.20)$$

т.е. уравнение границы устойчивости  $AB = 1$  при  $A > 0 ; B > 0$  . Это рав-

нобокая гипербола, асимптотами которой являются оси координат.

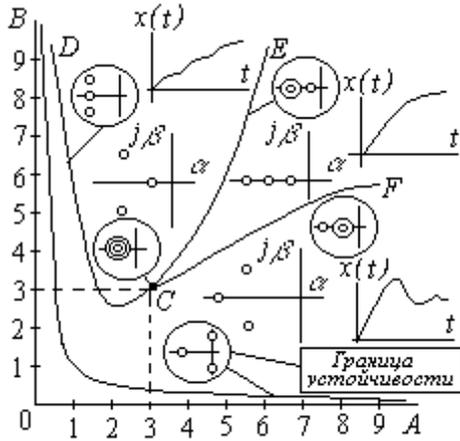


Рис. 7.3. Диаграмма Вышнеградского

Область устойчивости (выше границы) можно разбить на отдельные части, соответствующие различному расположению корней. При  $A = 3$  и  $B = 3$  характеристическое уравнение принимает вид

$$(q+1)^3 = 0.$$

В этой точке  $C$  корни  $q_1 = q_2 = q_3 = -1$ . Для исходного уравнения (7.19)

$$p_1 = p_2 = p_3 = -\sqrt[3]{\frac{a_3}{a_0}}.$$

В общем же случае возможны случаи

- 1) все корни вещественные;
- 2) один корень вещественный и пара комплексных корней.

Граница между этими случаями определяется равенством нулю дискриминанта уравнения 3-й степени, который может быть получен, например, из формулы Кардана

$$A^2B^2 - 4(A^2 + B^2) + 18AB - 27 = 0. \tag{7.21}$$

Это уравнение дает две кривые  $CE$  и  $CF$ . Внутри области  $ECF$  дискриминант положительный, т.е. все корни вещественные, а вне – отрицательный, т.е. один вещественный и пара комплексных корней.

Кроме того, вне области  $ECF$  имеет значение взаимное расположение вещественного и пары комплексных корней, границей которой является линия, определяемая из условия равенства расстояния всех корней от мнимой оси:

$$q_1 = -\alpha ; q_{1,2} = -\alpha \pm j\omega .$$

Тогда нормированное характеристическое уравнение

$$q^3 + Aq^2 + Bq + 1 = (q + \alpha)(q + \alpha + j\omega)(q + \alpha - j\omega) = 0$$

или 
$$q^3 + 3\alpha q^2 + (3\alpha^2 + \omega^2)q + \alpha(\alpha^2 + \omega^2) = 0 ,$$

где условие равенства коэффициентов характеристического уравнения дает

$$A = 3\alpha ;$$

$$B = 3\alpha^2 + \omega^2 ;$$

$$1 = \alpha(\alpha^2 + \omega^2) .$$

Решая совместно эти уравнения (исключая  $\alpha$  и  $\omega$ ) получим уравнение

$$2A^3 - 9AB + 27 = 0 , A < 3 ,$$

которое дает искомую линию  $CD$ .

В результате плоскость  $AB$  разбивается на области с различным расположением корней, следовательно, с различным видом переходного процесса системы третьего порядка.

Дополнительно еще наносят (на рисунке не показано) кривые равной степени устойчивости и линии равного затухания  $\xi$ . По  $A$  и  $B$  определяют значение  $\eta_0$  и тогда можно оценить

$$\alpha = \eta_0 \sqrt[3]{\frac{a_3}{a_0}} \text{ и } tp \approx \ln \frac{1}{\Delta} , \text{ тогда } \Delta \approx 0,05 \text{ и } t_p \approx \frac{3}{\alpha} .$$

### 7.5. Метод интегральных оценок качества

Метод интегральных оценок качества дает возможность оценить  $t_p$  и величину  $\varepsilon$  отклонения  $X_p$  от  $X_0$ .

Пусть кривая переходного процесса – аperiодическая (как показано ниже)

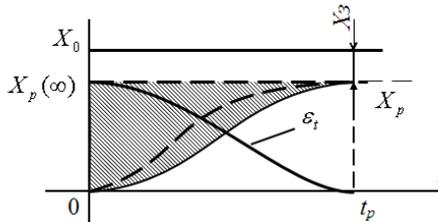


Рис.7.4. Линейная квадратичная оценка

Простейшей интегральной оценкой является линейная оценка

$$I = \int_0^{\infty} \varepsilon dt . \quad (7.22)$$

Чем меньше  $t_p$ , тем меньше будет заштрихованная площадь, т.е. меньше интеграл  $I$ .

Для вычисления  $I$  нет необходимости в отыскании  $\varepsilon$ , т.к. её можно вычислить по коэффициентам передаточной функции ошибки

$$W_{ou}(p) = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n} , \quad (7.23)$$

пользуясь функцией предельного перехода

$$I = \lim \left\{ [W_{ou}(p) - W_{ou}(0)] \frac{1}{p} \right\}$$

получим

$$I_1 = \frac{b_m a_{n-1} - a_n b_{m-1}}{a_n^2} . \quad (7.24)$$

Если имеет место перерегулирование, то ошибка  $\varepsilon$  меняет знак, поэтому надо использовать квадратичную интегральную оценку

$$I_2 = \int_0^{\infty} \varepsilon^2 dt , \quad (7.25)$$

учитывающую сумму абсолютных площадей.

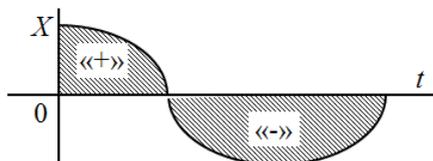


Рис.7.5. Квадратичная интегральная оценка

Для учета влияния скорости переходного процесса на качество регулирования в интегральную оценку вводится значение производной от отклонения  $\varepsilon$  с коэффициентом  $\tau$  размерности  $[c]$ :

$$I_3 = \int_0^{\infty} [\varepsilon^2 + \tau^2 (\varepsilon')^2] dt. \quad (7.26)$$

Такая форма целесообразна потому, что величина интеграла  $I_2$  никак не отражает плавности процесса регулирования. Интеграл  $I_3$  минимален, если  $\varepsilon$  удовлетворяет условию

$$\varepsilon + \tau \varepsilon' = 0.$$

Отсюда следует, что наилучшее качество переходного процесса имеет место в случае, если он имеет вид экспоненты

$$\varepsilon = \varepsilon_0 e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Существуют и более сложные интегральные оценки.

Интегральная оценка используется в следующем порядке:

- 1) выбирают интуитивно тип оценки;
- 2) получают выражение  $I$  через те параметры САУ, которые можно менять;
- 3) определяют такие значения этих параметров, которые доставляют минимум интегральной оценки  $I$ ;
- 4) для проверки одним из известных методов строится кривая переходного процесса и производится оценка показателей качества.

### 7.6. Частотные методы оценки показателей качества

Частотный метод исследования качества основан на том, что между частотными характеристиками и переходной функцией существует определенная связь:

$$h(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{R_3(\omega)}{\omega} \sin \omega t dt \quad ; \quad t > 0, \quad (7.27)$$

или

$$h(t) = \frac{2}{\pi} \int \frac{J_3(\omega)}{\omega} \text{Cos} \omega t d\omega + R_3(0). \quad (7.28)$$

На практике, ввиду большей простоты, используется (7.27).

По АФЧХ разомкнутой САУ для общего случая годографа запас устойчивости по амплитуде определяется точками  $a$  и  $c$  по их удалению от т.(-1;0):

$$L_1 = 20 \lg \beta_1 = 20 \lg \frac{1}{R_1} \quad \text{и} \quad L_2 = 20 \lg \beta_2 = 20 \lg R_2.$$

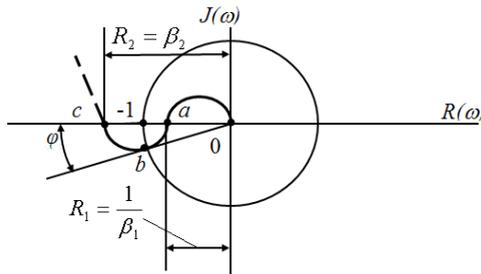


Рис. 7.6. Фрагмент годографа АФЧХ

Запас устойчивости по амплитуде тем больше, чем больше  $L_1$  и  $L_2$ , которые должны быть в пределах 6...20 дБ (2 - 10 единиц в линейном масштабе). В случае абсолютной устойчивости имеет смысл только  $L_1$ , т.к.  $L_2 = \infty$ .

Запасом устойчивости по фазе называется угол  $\varphi = \arg|W(j\omega)| - 180^\circ$ , образуемый лучом  $Ob$  и отрицательной вещественной полуосью.

В некоторых случаях вместо задания дискретных значений запасов (т.  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ) задают запретную область для АФЧХ разомкнутой САУ, т.е. годограф не должен заходить в запретную область, заданную величинами  $\beta_1$ ;  $\beta_2$  и  $\varphi$  (см. ниже).

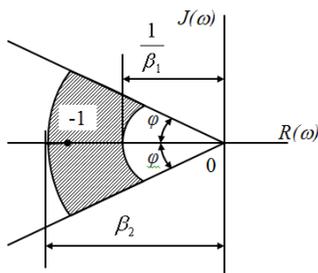


Рис.7.7. Запретная область для годографа АФЧХ

По АЧХ замкнутой САУ можно также определить запас устойчивости по амплитуде.

Для этого используют показатель колебательности  $M = \frac{A_m(\omega)}{A(0)}$ ,

который является косвенным показателем склонности системы к колебательному переходному процессу: чем больше величина  $M$ , тем больше колебательность САУ, т.е.  $M$  показывает наличие перерегулирования в переходном процессе.

Показатель колебательности должен быть приблизительно равен 1,3...1,5, в некоторых случаях допускается до 2...2,5 исходя из опытных данных аналогичных систем. При наличии чисто мнимых корней в характеристическом уравнении значение  $M$  равно бесконечности. Чем ближе значение  $M$  к единице, тем менее система склонна к перерегулированию.

На рисунке для АФЧХ, приведенной ниже:

$\omega_p$  - резонансная частота;

$\omega_n$  - полоса пропускания (интервал положительности);

$\omega_c$  - частота среза;

$\omega_s$  - эквивалентная частота, при которой амплитуда выходного воздействия не меньше наперед заданного значения.

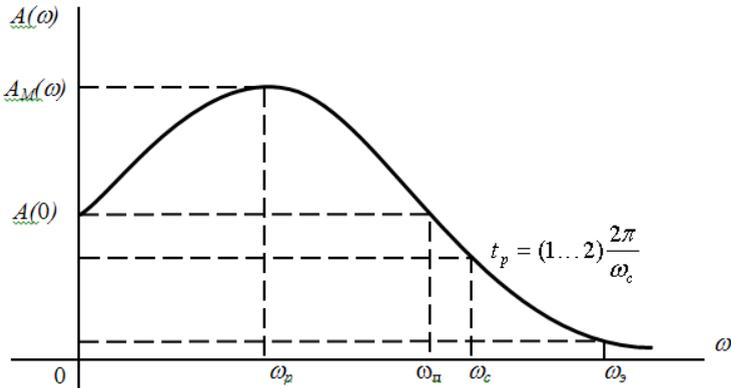
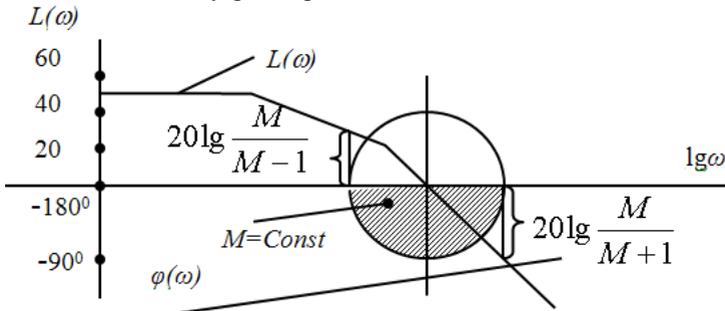


Рис.7.8. Амплитудно-частотная характеристика замкнутой САУ

Величину  $M$  можно определить также по АФЧХ разомкнутой САУ, пользуясь специальными номограммами, на которые нужно наложить в соответствующем масштабе построенную АФЧХ данной САУ. И наоборот, задаваясь при проектировании допустимым  $M$ , нужно затребовать, чтобы АФЧХ разомкнутой САУ не заходила в круг, имеющий значение  $M$ , равное заданному (см. рисунок ниже).

Круг строится по величинам  $20 \lg \frac{M}{M-1}$  и  $20 \lg \frac{M}{M+1}$ , двигая АФЧХ разомкнутой САУ по специальной номограмме. Тогда, чтобы показатель колебательности была не больше заданного значения, ФЧХ  $\varphi(\omega)$  не должна заходить внутрь запретной области.



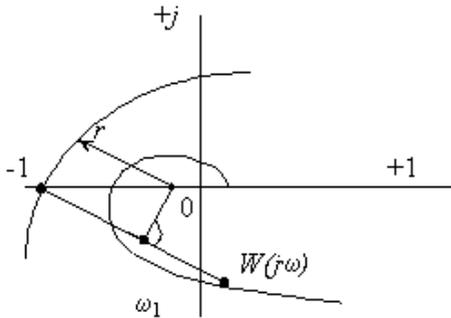
$$\text{Время достижения первого максимума } t_m \approx \frac{\pi}{\omega_p} \approx \frac{\pi}{\omega_c}.$$

7.7. Определение показателей качества по вещественной частотной характеристике замкнутой САУ

Вещественную частотную характеристику замкнутой САУ  $R_3(\omega)$  можно определить:

- 1) выделением из выражения для АФЧХ  $W_3(j\omega)$ ;
- 2) из  $W(j\omega)$  при помощи круговых диаграмм (графические построения см «Егоров, Основы теории регулирования, с. 343» и др.);
- 3) по графику  $W(j\omega)$  пользуясь формулой (см. построения на рисунке ниже)

$$R_3(\omega) = \frac{2r-1}{2r}.$$



Пусть вещественная частотная характеристика  $R_3(\omega)$  имеет следующие виды 1, 2, 3, 4, 5.

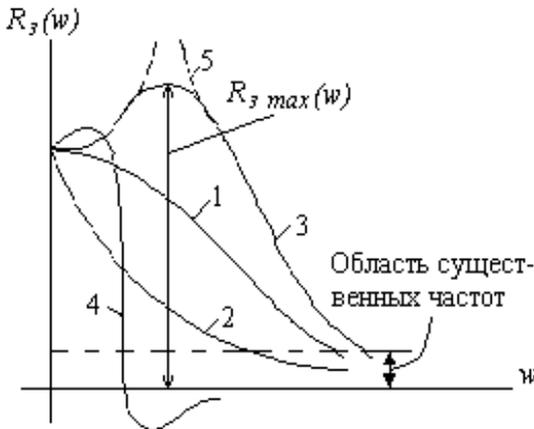


Рис. 7.9. Вещественные частотные характеристики

Учитывая формулу (7.27) и теорему Лапласа, можно отметить следующие свойства  $R_3(\omega)$ , характеризующие качество САУ.

1. Приблизительно одинаковым переходным процессам соответствуют приблизительно одинаковые  $R_3(\omega)$ ; это позволяет находить  $h(t)$  по типовым частотным характеристикам, для которых переходные процессы известны (заранее вычислены).

2. При изучении САУ можно ограничиваться рассмотрением  $R_3(\omega)$  лишь в области существенных частот, т.к. на высоких частотах  $R_3(\omega)$  соответствует начальному участку переходного процесса  $h(t)$ .

3. Если имеются две сходные  $R_3(\omega)$ , отличающиеся только масштабом по оси частот  $\omega$ , т.е.

$$R_{32}(n\omega) = R_{31}(\omega),$$

то переходный процесс  $X_1(t)$  протекает в  $n$  раз медленнее, чем  $X_2(t)$ .

Если  $R_{32} = nR_{31}$ , т.е. отличаются масштабом по оси  $R_3(\omega)$ , то соответственно  $X_2(t)$  в  $n$  раз выше  $X_1(t)$ .

4. Если при некоторой частоте, не равной нулю,  $R_3(\omega)$  имеет разрыв (кривая 5), это означает, что САУ находится на границе устойчивости, т.е. если характеристическое уравнение имеет нулевой корень, то это означает, что  $R_3(\omega)$  имеет разрыв при  $\omega = \omega_c$ .

5. Значение переходной характеристики  $X_p(t)$  в установившемся состоянии

$$X_p(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} X_p'(t) = \lim_{\omega \rightarrow 0} R_3(\omega) = R_3(0), \quad (7.29)$$

что следует из теоремы о конечном значении оригинала.

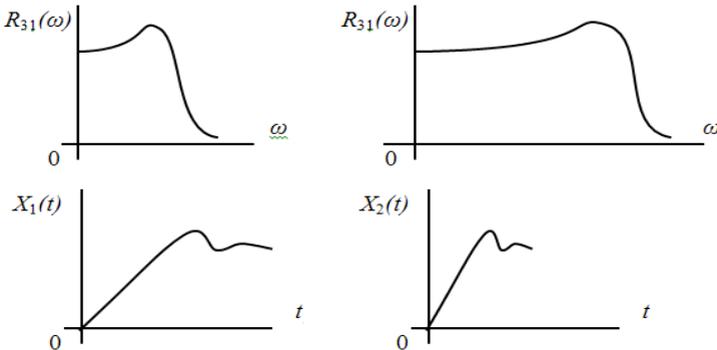


Рис. 7.10. Соотношения между вещественной и переходной характеристиками

6. Начальное значение переходной характеристики  $X_p(t)$

$$X_p(0) = \lim_{t \rightarrow 0} X_p(t) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} R_3(\omega). \quad (7.30)$$

7. Если  $R_3(\omega) > 0$  и является невозрастающей функцией  $\omega$ , т.е.

$$\frac{dR_3(\omega)}{d\omega} \leq 0$$

при любых  $\omega$ , то перерегулирование не превышает 18% от начального отклонения (кривые 1, 2).

Если  $R_3(\omega)$  имеет вид кривой 4, то перерегулирование  $\delta_m$

$$\delta_m < \frac{1,18R_{3 \max}(\omega) - R_3(0)}{R_3(0)}. \quad (7.31)$$

8. Для того, чтобы  $X_p(t)$  стремилась к установившемуся значению  $X_p(\infty)$  необходимо, но недостаточно соблюдение при всех значениях  $\omega$  следующего неравенства

$$|R_3(\omega)| < R_3(0).$$

Если  $R_3(\omega)$  изменяется по монотонно убывающей кривой 2, это означает, что  $X_p$  не имеет перерегулирования и

$$t_p \geq \frac{4\pi}{\omega_2}, \quad (7.32)$$

где  $\omega_2$  - область существенных частот кривой 2.

9. Продолжительность переходного процесса будет тем меньше, чем более пологим будет  $R_3(\omega)$ .

### 7.8. Построение кривой переходного процесса по вещественной частотной характеристике замкнутой САУ

Если требуется уточнить представление о качественных показателях системы, то следует аналитически или графически определить характер переходного процесса. Точный метод построения сопряжен с большим объемом вычислений, поэтому часто используется приближенный метод ВЧХ замкнутой САУ.

Метод построения предложен Солодовниковым В. В. и называется **методом h – функций**.

Практически метод реализуется в следующей последовательности.

1. Предварительно САУ делают устойчивой и записывают АФЧХ  $W_3(j\omega)$  устойчивой замкнутой системы.

2. Выделяют из АФЧХ вещественную частотную характеристику  $R_3(\omega)$  и, задаваясь  $\omega$  от 0 до  $\infty$ , строят график  $R_3(\omega)$ .

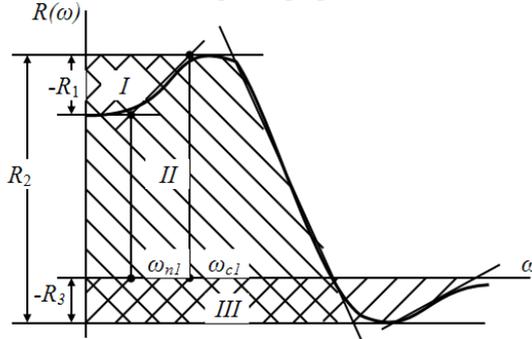


Рис. 7.11. Вещественная частотная характеристика

3. Заменяют плавную  $R_3(\omega)$  ломаными линиями (касательными) на трапецидальные частотные функции (на графике их три – I, II, III).

В некоторых случаях трапеция вырождается в треугольник, тогда его коэффициент наклона равен 0.

4. Для единичной трапецидальной функции ( $R(\omega)=1$ ,  $\omega_c = 1$ ) при различных коэффициентах наклона  $k_n$  в литературе имеются таблицы h-функций. Коэффициент наклона

$$k_n = \frac{\omega_n}{\omega_c} = 0 \dots 1.$$

Для каждой трапеции выписывают величины  $R_i$ ,  $\omega_{ni}$  и  $\omega_{ci}$  (из графика  $R_3(\omega)$ ), определяют  $k_n$ , из таблицы  $h$ -функций вписывают первую колонку и колонку, соответствующую полученному коэффициенту наклона, а затем вычисляют реальное время  $t$  и  $h_i(t)$  (для  $i$ -ой трапеции) по формулам строк 3 и 4.

Таблица

$I$ -трапеция:  $R_1 = \dots; \omega_{c1} = \dots; \omega_{n1} = \dots$

$\tau$	Данные таблицы $h$ -функций
$h_k(t)$	для данного коэффициента наклона $k_n$
$t, c$	$t = \frac{\tau}{\omega_{ci}}$
$h_i(t)$	$h_i(t) = h_k(t) \cdot R_i$

5. Строят для каждой трапеции составляющую переходного процесса с учетом знака и, путем графического сложения ординат трех трапеций, находят искомую кривую переходного процесса.

Здесь же по суммарному графику  $h(t)$ , или построив  $h(t)$  на отдельном графике, определяют и наносят на рисунке показатели качества переходного процесса САУ.

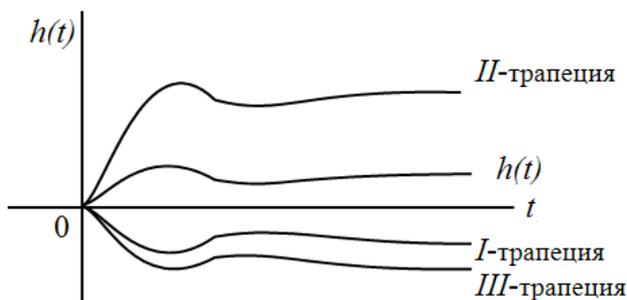


Рис. 7.12. Построение переходной характеристики

Ниже приведена выписка из таблицы  $h$  – функций.

Таблица  $h$  – функций\*

$\tau$ , о.е	Значения $h$ – функции $h(\tau)$ при коэффициентах наклона $k_n$										
	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0,0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,5	0,14	0,18	0,19	0,21	0,22	0,24	0,25	0,27	0,28	0,30	0,31
1,0	0,31	0,40	0,37	0,40	0,43	0,46	0,49	0,52	0,55	0,58	0,60
1,5	0,50	0,50	0,57	0,60	0,62	0,67	0,71	0,74	0,78	0,81	0,84
2,0	0,57	0,63	0,68	0,68	0,79	0,83	0,89	0,92	0,96	0,99	1,02
2,5	0,67	0,79	0,80	0,86	0,92	0,97	1,01	1,05	1,08	1,10	1,02
3,0	0,76	0,83	0,90	0,96	1,03	1,06	1,10	1,13	1,15	1,17	1,18
3,5	0,78	0,90	0,96	1,02	1,10	1,11	1,15	1,16	1,17	1,18	1,18
4,0	0,86	0,94	1,01	1,06	1,11	1,14	1,16	1,16	1,16	1,14	1,12
4,5	0,88	0,96	1,03	1,08	1,12	1,14	1,13	1,13	1,11	1,09	1,05
5,0	0,89	0,98	1,04	1,09	1,11	1,12	1,11	1,08	1,05	1,02	0,99
5,5	0,90	0,99	1,05	1,08	1,10	1,09	1,07	1,03	0,99	0,96	0,93
6,0	0,90	0,98	1,04	1,07	1,07	1,05	1,02	0,98	0,95	0,92	0,91
6,5	0,90	0,98	1,03	1,05	1,04	1,02	0,98	0,95	0,92	0,90	0,90
7,0	0,90	0,98	1,02	1,04	1,02	0,99	0,96	0,93	0,91	0,91	0,93
7,5	0,91	0,98	1,02	1,03	1,01	0,97	0,94	0,92	0,92	0,93	0,96
8,0	0,91	0,99	1,02	1,02	1,00	0,97	0,94	0,93	0,97	0,97	1,00
8,5	0,92	0,99	1,02	1,02	0,99	0,97	0,94	0,95	0,97	1,01	1,04
9,0	0,92	1,00	1,03	1,02	0,99	0,97	0,96	0,98	1,01	1,04	1,06
9,5	0,93	1,00	1,03	1,02	0,99	0,98	0,98	1,00	1,03	1,06	1,07
10,0	0,94	1,01	1,03	1,02	0,99	0,98	0,93	1,02	1,05	1,06	1,06
10,5	0,95	1,01	1,03	1,02	0,99	0,99	1,01	1,03	1,05	1,06	1,03
11,0	0,95	1,02	1,03	1,01	0,99	0,99	1,01	1,03	1,05	1,03	1,01
11,5	0,95	1,02	1,03	1,01	0,99	0,98	1,02	1,04	1,03	1,01	1,00
12,0	0,95	1,02	1,02	1,00	0,99	1,00	1,02	1,03	1,02	0,98	0,96
12,5	0,95	1,01	1,02	1,00	0,99	1,00	1,02	1,02	1,00	0,97	0,95
13,0	0,95	1,01	1,02	0,99	0,98	1,00	1,01	1,00	0,97	0,95	0,97
13,5	0,95	1,01	1,01	0,99	0,98	1,00	1,01	1,00	0,97	0,95	0,97
14,0	0,95	1,01	1,01	1,00	0,96	1,00	1,01	0,99	0,97	0,97	0,99
14,5	0,95	1,01	1,01	0,99	0,99	1,00	1,01	0,98	0,97	0,98	1,01
15,0	0,96	1,01	1,01	0,99	0,99	1,01	1,00	0,98	0,98	1,00	1,03
15,5	0,96	1,01	1,01	0,99	1,00	1,01	1,01	0,99	0,97	0,95	0,97
16,0	0,96	1,02	1,01	0,99	0,99	1,01	1,00	0,99	1,00	1,03	1,04
16,5	0,96	1,02	1,01	0,99	1,00	1,01	1,00	1,00	1,01	1,04	1,03
17,0	0,97	1,02	1,01	0,99	1,01	1,01	1,00	1,00	1,02	1,03	1,01
17,5	0,97	1,02	1,00	0,99	1,01	1,01	1,00	1,00	1,02	1,02	0,99
18,0	0,97	1,02	1,00	1,00	1,01	1,01	1,00	1,00	1,02	1,01	0,99
18,5	0,97	1,02	1,00	1,00	1,01	1,01	1,00	1,00	1,01	0,99	0,97
19,0	0,97	1,02	1,00	1,00	1,01	1,00	0,99	1,00	1,01	0,98	0,96
20,0	0,97	1,01	0,99	1,00	1,00	1,00	0,99	1,00	0,99	0,97	0,96
21,0	0,97	1,01	0,99	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,98	0,94	1,02
22,0	0,97	1,01	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,01	1,03
23,0	0,97	1,01	1,00	1,00	1,00	1,00	1,01	1,00	1,00	1,03	1,02
24,0	0,96	1,01	1,00	1,00	1,00	1,00	1,01	1,00	1,01	1,02	0,99

\* - при  $\tau \rightarrow \infty$   $h(\tau)$  стремится к 1.

## 8. СПОСОБЫ УЛУЧШЕНИЯ КАЧЕСТВА И ОСНОВЫ СИНТЕЗА ЛИНЕЙНЫХ САУ

### 8.1. Общие сведения

Все задачи, решаемые в ТАУ, можно объединить в два больших класса – задачи анализа и синтеза.

В **задачах анализа** известна структура САУ. Заданы, как правило, все параметры системы и требуется определить статические и динамические свойства САУ.

Задачи синтеза можно рассматривать как обратные по отношению к задачам анализа. **Синтезом САУ** называют процедуру определения структуры и параметров системы по заданным показателям качества, т.е. является важнейшим этапом проектирования САУ. При этом, в общем случае, необходимо определить не только структурную схему теоретическим синтезом, но и конструктивную схему инженерными методами. При определении конструктивной схемы системы прежде всего согласовывают статические, динамические и энергетические характеристики смежных элементов, выбранных по соображениям их надежности, простоте, стоимости и т. п.

Последовательность решения задачи полного синтеза может быть различной, лишь в простых случаях удается сначала при помощи математических методов ТАУ определить структурную схему, а затем подобрать соответствующие конструктивные элементы. Поэтому в большинстве случаев задачу синтеза решают следующим образом.

Сначала, исходя из требований к назначению САУ, по каталогам выбирают серийное оборудование, обеспечивающее работоспособную функциональную схему регулятора – ИсЭ, ИзЭ, РцЭ, которые совместно с ОУ составляют неизменяемую часть САУ. Затем, на основании требований к статическим и динамическим свойствам, определяют её изменяемую часть, куда входят различные усилительно-преобразовательные блоки, корректирующие устройства, компенсирующие устройства (для улучшения динамических свойств и повышения точности САУ) и др.

Улучшение динамических свойств достигается стабилизацией (достижение устойчивости или определенного запаса устойчивости) и коррекцией (обеспечение заданного быстродействия и снижение колебательности переходного процесса).

Стабилизация и коррекция тесно взаимосвязаны между собой: изменение  $\gamma$ ,  $\varphi$  всегда приводит к изменению  $t_p$ ,  $\delta$ ,  $\mu$ .

## 8.2. Назначение и включение корректирующих устройств

Корректирующие устройства применяются с целью:

- 1) сделать устойчивой неустойчивую в данных условиях структурно - устойчивую САУ;
- 2) сделать структурно - неустойчивую САУ структурно - устойчивой;
- 3) обеспечить системе определенные динамические свойства, т.е. получить определенные (требуемые) показатели качества процесса управления.

Корректирующие свойства (КУ) бывают:

- по наличию вспомогательного источника энергии  
**активные** (требующие дополнительного источника энергии);  
**пассивные** (не требующие дополнительного источника энергии);
- по способу включения в состав системы  
**последовательные** ( в виде регуляторов);  
**параллельные** ( в виде местных обратных связей ОС).

Последовательные КУ проще включить в контур регулирования, т.к. не нужно иметь суммирующее устройство или дополнительные входы у суммирующего устройства. Но этот вид коррекции ослабляет основной сигнал (в КУ происходит определенная потеря мощности) и поэтому требует применения последующего дополнительного усиления. Кроме того, качество системы сильно зависит от стабильности характеристик КУ, а при выходе КУ из строя вся система становится неработоспособной. Вследствие этого к надежности и аппаратному исполнению этих КУ предъявляются особо жесткие требования.

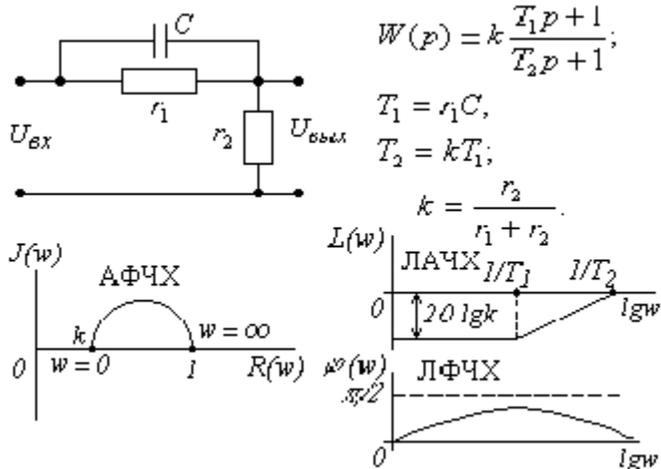
Параллельные КУ уменьшают влияние координатных и параметрических возмущений, которые действуют в охватываемых обратной связью элементах системы. При включении КУ в контур не возникают трудностей согласования мощности сигналов, т.к. КУ подключается к выходу более мощного элемента и передает сигнал на вход впереди стоящего менее мощного элемента.

Но такое корректирующее устройство при отрицательной обратной связи уменьшает общий коэффициент передачи охватываемого участка системы и, следовательно, всей разомкнутой САУ. Вследствие этого, возможно, потребуются применение дополнительного усилительного элемента во избежание чрезмерного повышения уровня задающего воздействия.

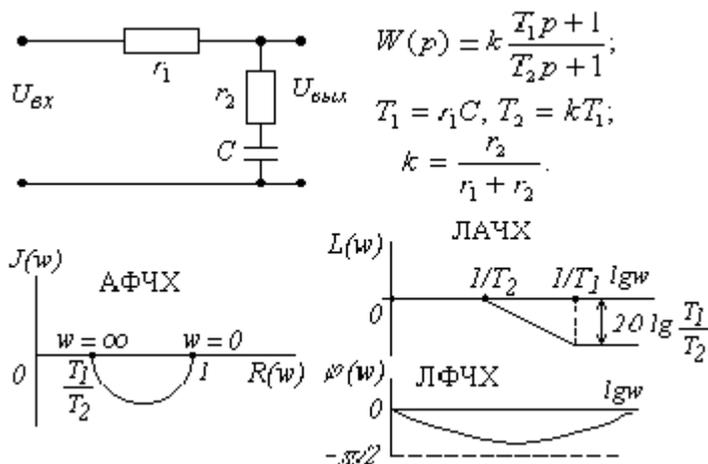
### 8.3. Типовые корректирующие устройства

Типовые корректирующие устройства выполняются в виде **интегро-дифференцирующих** пассивных RC – цепей, схемы, передаточные функции и характеристики которых приведены ниже.

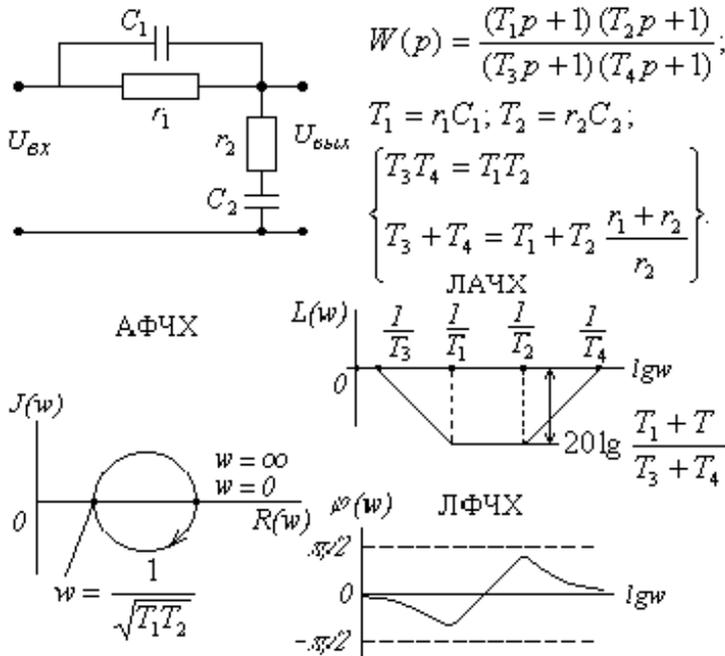
1. КУ с преобладанием дифференцирующих свойств, применяется для подавления низких частот.



2. КУ с преобладанием интегрирующих свойств, применяется для подавления высоких частот.



3. Схема КУ, применяемой для подавления средних частот.



8.4. Последовательная коррекция

С помощью последовательных КУ, входящих в состав АУУ, можно выработать управляющий сигнал  $z$ , который не только пропорционален величине рассогласования  $\varepsilon$ , но и интегралу, двойному и т.д. интегралу, производной от рассогласования, т.е. получить определенный закон управления. В общем случае управляющее воздействие

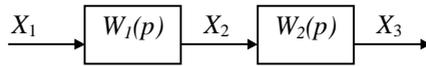
$$Z(t) = k_{-1} \int_0^t \varepsilon(t) dt + k_0 \varepsilon(t) + k_1 \frac{d\varepsilon(t)}{dt}. \quad (8.1)$$

В зависимости от присутствия членов уравнения законы регулирования называются П - регулирование, ПД - регулирование, ПИ-регулирование, ПИД - регулирование и т.п.

Промышленностью выпускаются типовые регуляторы, позволяющие осуществить практически любой закон регулирования.

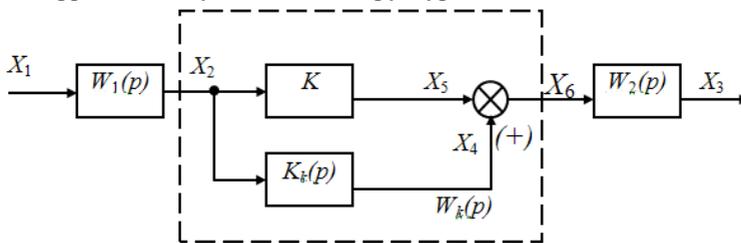
## Введение в закон управления производной

Пусть до коррекции часть системы имеет вид



$$W(p) = W_1(p)W_2(p).$$

Для введения в закон управления производной необходимо на вход второго звена, кроме  $X_2$ , подать сигнал, пропорциональный скорости изменения  $X_2$  с помощью идеального дифференцирующего звена, тогда после коррекции получится такая структура:



Передаточная функция КУ с идеальным дифференцирующим звеном

$$W_k(p) = k + K_k p. \quad (8.2)$$

Как видно из структурной схемы, передаточная функция скорректированной системы

$$W_{ck}(p) = W_1(p)[k + K_k p]W_2(p)$$

или

$$W_{ck}(p) = W(p)(k + K_k p).$$

Оставим прямую связь без изменений, т.е. положим  $k = 1$ , тогда корректирующее устройство имеет передаточную функцию

$$W_k(p) = (1 + K_k p). \quad (8.3)$$

Звено с такой передаточной функцией называется **форсирующим звеном**.

Зная передаточную функцию скорректированного звена  $W_{ck}(p)$  определим выражение для амплитудно-фазовой частотной характеристики АФЧХ  $W_{ck}(j\omega)$

$$\begin{aligned}
 W_{ck}(p) &= W(p)(1 + K_k j\omega) = A(\omega)e^{-j\varphi(\omega)}(1 + K_k \omega e^{j\frac{\pi}{2}}) = \\
 &= A(\omega)e^{-j\varphi(\omega)} + K_k A(\omega)e^{-j\left[\varphi(\omega) - \frac{\pi}{2}\right]}.
 \end{aligned}$$

Проанализируем графически свойства на средних частотах вблизи критической точки  $(-1; j0)$ .

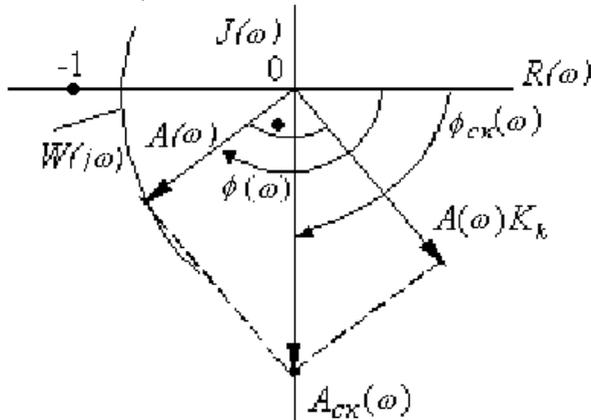


Рис. 8.1. Фрагмент годографа АФЧХ

1. Вектор  $A_{ck}(\omega) > A(\omega)$ , это равносильно увеличению коэффициента передачи на этих частотах, следовательно, улучшается динамическая точность САУ.

2. Фаза  $\varphi_{ck}(\omega) < \varphi(\omega)$ , т.е. вектор лежит дальше от т.  $(-1; j0)$ , следовательно, улучшается устойчивость (запас устойчивости по фазе). Кроме того, АФЧХ может лежать в меньшем числе квадрантов (за счет деформации). Следовательно, повышается быстродействие контура.

3. При  $\omega = 0$   $W_{ck}(j0) = W(j0)$ , т.е. при нулевой частоте КУ не оказывает никакого действия, т.е. не влияет на статические свойства.

Введение в закон регулирования производных второго и более высоких порядков, хотя и дает большее улучшение качества САУ, встречает большие технические трудности, т.к. реальные дифференцирующие звенья обладают инерционностью и у  $W_k(p)$  появляются знаменатели, повышающие порядок характеристического уравнения скорректированной системы.

На идее введения в закон управления производной строятся **системы подчиненного регулирования**.

Пример:

Пусть САУ состоит из трех апериодических звеньев, соединенных последовательно

$$W_1(p) = \frac{k_1}{T_1 p + 1}; \quad W_2(p) = \frac{k_2}{T_2 p + 1}; \quad W_3(p) = \frac{k_3}{T_3 p + 1}.$$

Пусть  $T_3 > T_2 > T_1$ .

Осуществим последовательную коррекцию

$$W_k(p) = 1 + K_k p$$

Передаточная функция до коррекции

$$W(p) = \frac{k_1 k_2 k_3}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)(T_3 p + 1)}.$$

Передаточная функция после коррекции, если подобрать  $K_k = T_3$ ,

$$\text{то } W(p) = \frac{k_1 k_2 k_3 (K_k p + 1)}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)(T_3 p + 1)} = \frac{k_1 k_2 k_3}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)},$$

т. е. избавились от самой большой инерционности путем её компенсации с помощью последовательного КУ и повысили быстродействие САУ.

### *Введение в закон регулирования интеграла*

Структурная схема до и после коррекции те же, только передаточная функция КУ с идеальным интегрирующим звеном имеет вид

$$W_k(p) = \left(k + \frac{K_k}{p}\right). \quad (8.4)$$

Примем, как и ранее,  $k = 1$ . Тогда для скорректированной системы

$$W_{ck}(p) = W_1(p) \left[1 + \frac{K_k}{p}\right] W_2(p). \quad (8.5)$$

$$\text{АФЧХ } W_{ck}(j\omega) = \left(1 + \frac{K_k}{j\omega}\right) = A(\omega)e^{-j\varphi(\omega)} + \frac{K_k}{\omega} A(\omega)e^{-j\left[\varphi(\omega) + \frac{\pi}{2}\right]}.$$

Построим годограф АФЧХ.

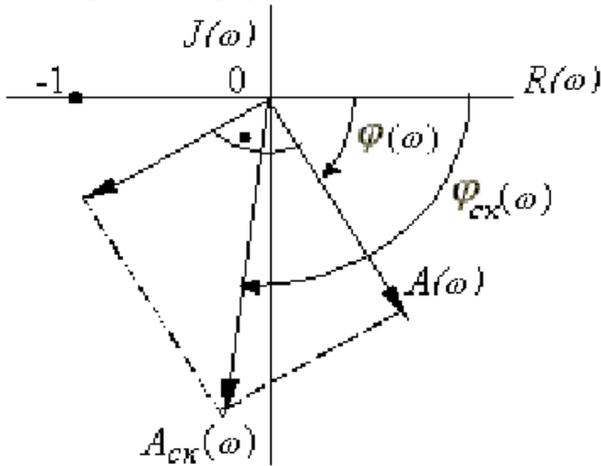


Рис. 8.2. Фрагмент годографа АФЧХ

Как видно из рисунка, произошел поворот вектора АФЧХ в сторону т.(-1;  $j0$ ) со всеми последствиями: увеличилось число квадрантов, ухудшилась устойчивость, уменьшилось быстродействие, уменьшилась динамическая точность, т. е. динамические свойства в целом ухудшились. Однако на нулевой частоте АФЧХ

$$W(j0) = K_1 K_2; W_{ck}(j0) = \infty.$$

Это равносильно увеличению до бесконечности коэффициента передачи в установившемся режиме, т.е. получим по сути астатическую САУ. Таким образом, введение в закон управления интеграла применяется для улучшения статических свойств САУ.

Если в закон управления ввести одновременно дифференциал и интеграл, то можно добиться улучшения как статических, так и динамических свойств.

### 8.5. Параллельная коррекция

Параллельные КУ включаются в виде обратных связей (ОС), охватывающих один или несколько функционально необходимых элементов САУ. В отличие от главной обратной связи, корректирующие ОС называются **местными или внутренними**.

ОС может быть отрицательной ООС или положительной ПОС,

каждая из которых бывает жесткой ЖОС или гибкой ГОС.

ЖОС осуществляется через простое безынерционное или инерционное статическое звено, у которого  $W_{oc}(0) \neq 0$ , что означает, что такая связь действует как в динамическом, так и в статическом режимах охватываемого участка основного контура. ГОС выполняют с помощью дифференцирующего звена, у которого  $W_{oc}(0) = 0$ , т.е. сигнал ГОС действует только в динамическом режиме.

Рассмотрим влияние обратных связей на свойства отдельных типовых звеньев.

*ЖОС охватывает звено 2-го порядка*



Звено 2-го порядка при:  $2T_2 > T_1$  - колебательное звено;

$2T_2 < T_1$  - аperiodическое звено 2-го порядка.

Получим выражение для АФЧХ после коррекции

$$W_{ck}(p) = \frac{k}{T_2^2 p^2 + T_1 p + 1} \cdot \frac{1}{1 \pm \frac{k}{T_2^2 p^2 + T_1 p + 1} k_{oc}} = \frac{k}{T_2^2 p^2 + T_1 p + 1 \pm k k_{oc}}. \quad (8.6)$$

Разделим числитель и знаменатель на  $1 \pm k k_{oc}$ , тогда

$$W_{ck}(p) = \frac{\frac{k}{1 \pm k k_{oc}}}{\frac{T_2^2}{1 \pm k k_{oc}} p^2 + \frac{T_1}{1 \pm k k_{oc}} p + 1} = \frac{k'}{(T_2')^2 p^2 + T_1' p + 1}, \quad (8.7)$$

$$\text{где } k' = \frac{k}{1 \pm kk_{OC}}; (T_2')^2 = \frac{T_2^2}{1 \pm kk_{OC}}; T_1' = \frac{T_1}{1 \pm kk_{OC}}.$$

Выводы:

1. Вид передаточной функции не изменился, т.е. структура звена осталась прежней. Поэтому этот вид коррекции неприменим для структурно неустойчивых систем.

2. Изменились коэффициент передачи и обе постоянные времени.

При положительной ЖОС

$$k' = \frac{k}{1 - kk_{OC}}; (T_2')^2 = \frac{T_2^2}{1 - kk_{OC}}; T_1' = \frac{T_1}{1 - kk_{OC}},$$

т.е. параметры  $k$  и  $T$  увеличиваются, причем  $T_2^2$  растет быстрее, чем  $T_1$ . Величина  $T_2$  обуславливает колебательность, а  $T_1$  – затухание, поэтому колебательность растет, т.е. ухудшается устойчивость и уменьшается быстродействие. При определенных  $k_{OC}$  апериодическое звено 2-го порядка может стать колебательным, а колебательность колебательного звена увеличится и звено может стать неустойчивым. Увеличение  $k$  приводит к некоторому улучшению статических свойств. В целом положительная ЖОС применяется редко.

При охвате ЖОС звена 1-го порядка выводы те же, причем  $kk_{OC}$  при положительной ОС должно быть меньше 1, иначе звено станет неминимально-фазовым, т.е. неустойчивым.

*ЖОС охватывает интегрирующее звено*

Структурные схемы те же, только  $W(p) = \frac{k}{p}$ . Тогда

$$W_{ck}(p) = \frac{\frac{k}{p}}{1 \pm \frac{k}{p}k_{OC}} = \frac{k}{p \pm kk_{OC}} = \frac{\pm \frac{1}{k_{OC}}}{\pm \frac{1}{kk_{OC}}p + 1},$$

или, введя обозначения  $\pm \frac{1}{k_{OC}} = k'$ ;  $\pm \frac{1}{kk_{OC}} = T'$ ,

получим

$$W_{ck}(p) = \frac{k'}{T'p + 1}. \quad (8.8)$$

Выводы:

1) структура изменилась, поэтому такую коррекцию можно применить для структур неустойчивой системы (вместо астатического звена получили аperiодическое звено 1-го порядка). При положительной ОС эквивалентное звено получается неустойчивым, а при отрицательной ЖОС – устойчивым);

2)  $k' < k$ , т.е. статические свойства ухудшаются, а быстродействие улучшается, т.к. АФЧХ звена 1-го порядка лежит в одном IV-м квадранте, а интегрирующего звена – в III м квадранте (далее от критической точки  $(-1; j0)$ ).

При охвате двух интегрирующих звеньев ЖОС получится консервативное звено (на границе устойчивости).

Применение реальной ЖОС приводит к тем же результатам, что и идеальной, но действие её несколько ослаблено, и тем больше, чем больше инерционность реального элемента, осуществляющего жесткую отрицательную обратную связь ЖОС:

$$\begin{aligned}
 W(p) &= \frac{k}{Tp+1}; \quad W_{oc}(p) = \frac{k_{oc}}{T_{oc}p+1}; \\
 W_{ck}(p) &= \frac{\frac{k}{Tp+1}}{1 \pm \frac{k}{Tp+1} \frac{k_{oc}}{T_{oc}p+1}} = \frac{k(T_{oc}p+1)}{(Tp+1)(T_{oc}p+1) \pm kk_{oc}} = \\
 &= \frac{k(T_{oc}p+1)}{TT_{oc}p^2 + (T+T_{oc})p + 1 \pm kk_{oc}} = \frac{\frac{k}{1 \pm kk_{oc}}(T_{oc}p+1)}{\frac{TT_{oc}}{1 \pm kk_{oc}}p^2 + \frac{T+T_{oc}}{1 \pm kk_{oc}}p + 1}; \\
 W_{ck}(p) &= \frac{k'(T_{oc}p+1)}{(T_2')^2 p^2 + T_1' + 1}. \tag{8.9}
 \end{aligned}$$

Как видно из последнего выражения, кроме уменьшения коэффициента передачи, у скорректированной системы появляются свойства форсирующего звена с передаточной функцией

$$W(p) = (T_{oc}p+1). \tag{8.10}$$

ГОС охватывает аperiodическое звено 1-го порядка

Гибкая обратная связь осуществляется с помощью дифференцирующего звена, структурные схемы до и после коррекции те же, только

$$W(p) = \frac{k}{Tp+1}; W_{oc}(p) = k_{oc}p.$$

Тогда передаточная функция для скорректированной части системы

$$W_{ck}(p) = \frac{\frac{k}{Tp+1}}{1 \pm \frac{k}{Tp+1} \cdot k_{oc}p} = \frac{k}{Tp+1 \pm kk_{oc}p} = \frac{k}{(T \pm kk_{oc})p+1} = \frac{k}{T'p+1}. \quad (8.11)$$

Видно, что структурная схема после коррекции не изменилась и этот вид коррекции можно применять только для коррекции структурно-устойчивых систем.

Как видно из результатов выкладок:

- $k = const$ , т.е. статические свойства остались прежними;
- $T' > T$  при отрицательной ГОС и наоборот при положительной ГОС, поэтому отрицательную ГОС применяют, если необходимо затян timer переходной процесс с целью уменьшения динамических перегрузок в системе.

Если ГОС охватывает звено 2-го порядка, то выводы аналогичные, причем  $k$ ,  $T_2^2$  остаются неизменными, меняется лишь  $T_1$ , определяющая демпфирование звена (быстроту затухания колебательных процессов):

- при отрицательной обратной связи ООС величина  $T_1$  увеличивается, что приводит к улучшению устойчивости, точнее, к ускорению затухания колебательных процессов (а при ПОС - все выводы наоборот);
- если звено до коррекции было колебательным, то после коррекции становится аperiodическим 2-го порядка, однако переходный процесс несколько затягивается во времени.

ГОС охватывает интегрирующее звено

Передаточные функции звеньев  $W(p) = \frac{k}{p}$ ;  $W_{oc}(p) = k_{oc} p$ ;

$$W_{ck}(p) = \frac{\frac{k}{p}}{1 \pm \frac{k}{p} k_{oc} p} = \frac{k}{p(1 \pm k k_{oc})} = \frac{k'}{p}, \quad (8.12)$$

где  $k' = \frac{k}{1 \pm k k_{oc}}$ .

Как видно, структура не изменилась, т.е. эквивалентное звено также является интегрирующим звеном.

При отрицательной ГОС получается  $k' < k$ .

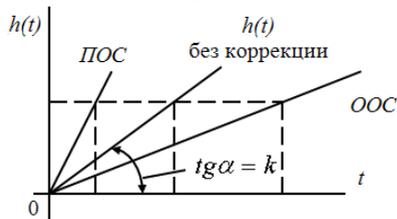


Рис. 8.3. Переходная характеристика интегрирующего звена, охваченного гибкой обратной связью

Как видно из  $h(t)$ , при положительной ОС  $h(t)$  достигает заданного значения быстрее, чем нескорректированная система, т.е. положительная ОС улучшает быстродействие системы и наоборот.

Проанализируем свойства АФЧХ интегрирующего звена, охваченного гибкой обратной связью.

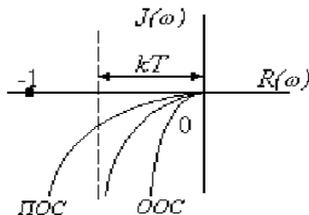


Рис. 8.4. Годограф АФЧХ интегрирующего звена, охваченного гибкой обратной связью.

Как видно из АФЧХ, при отрицательной ГОС годограф проходит дальше от т.(-1;0), т.е. ОГОС улучшает устойчивость системы.

Если ГОС охватывает два последовательно соединенных интегрирующих звена (структурно-неустойчивую систему), то

$$W_{ck}(p) = \frac{\frac{k_1 k_2}{p p}}{1 \pm \frac{k_1 k_2}{p p} k_{oc} p} = \frac{k_1 k_2}{p^2 \pm k_1 k_2 k_{oc} p} = \frac{k_1 k_2}{p \pm k_1 k_2 k_{oc}} \cdot \frac{1}{p}.$$

Разделим на  $[\pm k_1 k_2 k_{oc}]$

$$W_{ck}(p) = \frac{\pm \frac{1}{k_{oc}}}{\pm \frac{1}{k_1 k_2 k_{oc}} p + 1} \cdot \frac{1}{p} = \frac{k'}{(T' p + 1)p}. \quad (8.13)$$

Таким образом, структура изменилась и этот вид можно использовать для коррекции структурно-неустойчивых систем при отрицательной ОС. При положительной ОС получается неустойчивое звено  $(-T' p + 1)$ , и применять положительную ГОС не имеет смысла.

**Общие соотношения,** характеризующие влияние корректирующих обратных связей на частотные характеристики корректируемой системы, структурная схема которой приведена ниже.

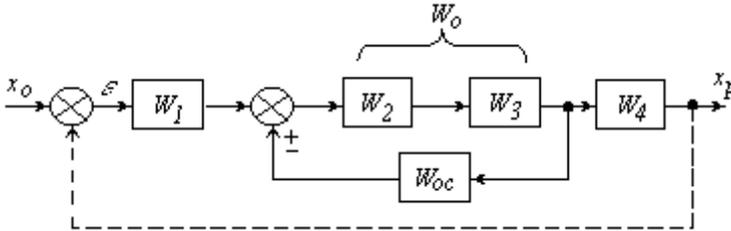


Рис. 8.5. Структурная схема САУ

Передаточная функция системы до коррекции

$$W(j\omega) = W_1(j\omega)W_2(j\omega)W_3(j\omega)W_4(j\omega)$$

Передаточная функция охватываемой части

$$W_0(j\omega) = W_2(j\omega)W_3(j\omega).$$

Передаточная функция системы скорректированной САУ

$$W_{ck}(j\omega) = W_1(j\omega) \frac{W_2(j\omega)W_3(j\omega)}{1 \pm W_2(j\omega)W_3(j\omega)W_{oc}(j\omega)} W_4(j\omega) =$$

$$= \frac{W(j\omega)}{1 \pm W_0(j\omega)W_{oc}(j\omega)}. \quad (8.14)$$

Произведение  $W_0(j\omega)W_{oc}(j\omega)$  характеризует свойства внутреннего корректирующего контура и в диапазоне частот, когда

$$|W_0(j\omega)W_{oc}(j\omega)| \ll 1, \quad (8.15)$$

и при этом АФЧХ нескорректированной системы приблизительно совпадает с АФЧХ скорректированной  $W_{ck}(j\omega) \approx W(j\omega)$ , т.е. ОС практически не влияет на свойства САУ и этот диапазон частот для системы является несущественным.

Для ЖОС условие (8.15) выполняется на высоких частотах, а для ГОС – на низких.

В диапазоне частот, где имеет место

$$|W_0(j\omega)W_{oc}(j\omega)| \gg 1, \quad (8.16)$$

АФЧХ скорректированной системы приблизительно равна

$$W_{ck}(j\omega) \approx \frac{W_1(j\omega)W_4(j\omega)}{W_{oc}(j\omega)}, \quad (8.17)$$

т.е. в определенном диапазоне  $\omega$  свойства скорректированной системы зависят только от свойств звена ОС и неохваченной обратной связью части системы.

Этот диапазон частот является существенным для задач коррекции и для ЖОС условие (8.16) выполняется на низких частотах, а для ГОС – на высоких.

При помощи параллельных КУ, как и при помощи последовательных, можно осуществить амплитудную коррекцию трех видов – подавление высоких, низких и средних частот, но влияние одних и тех же звеньев при их последовательном и параллельном включении прямо противоположно. Например, дифференцирующее звено в ОС подавляет высокие частоты в основном контуре, т.е. действует как интегрирующее звено, включенное последовательно. И наоборот, интегрирующее звено в ОС подавляет низкие частоты, т.е. действует как последовательно дифференцирующее звено.

Увеличение  $k_{oc}$  приводит, как правило, к увеличению частоты среза  $\omega_c$ , а увеличение коэффициента передачи неохваченных звеньев – к уменьшению  $\omega_c$ .

## 8.6. Синтез корректирующих устройств методом логарифмических частотных характеристик

Метод основан на связи  $h(t)-R_3(\omega)-L(\omega)$  разомкнутой САУ. Метод предложен В.В. Солодовниковым. Порядок выбора корректирующих устройств:

1. Строят ЛАЧХ и ЛФЧХ нескорректированной САУ.  
2. На том же графике строят желаемую ЛАЧХ, отвечающую системе с заданными показателями качества, в общем случае:

- порядок астатизма  $\nu$ ;
- максимальное перерегулирование  $\delta_{max}$  при  $1(t)$ ;
- время регулирования  $t_p$  и др.

Построение желаемой ЛАЧХ можно вести по 3 участкам.

1). Область низких частот – до 1-ой сопрягающей частоты.

Наклон низкочастотной части ЛАЧХ должен составлять  $-20 \nu$  дБ/дек, причем эта асимптота при  $\omega=1$  должна иметь ординату  $20 \lg k$  дБ. Здесь  $\nu$  – порядок астатизма системы, для статической САУ  $\nu=0$ ;

$k$  – коэффициент передачи разомкнутой системы.

За низкочастотную часть желаемой ЛАЧХ принимают низкочастотную часть нескорректированной системы. Этот участок определяет точность воспроизведения медленно изменяющихся сигналов или свойства САУ в статике.

2). Область средних частот – определяет запасы устойчивости системы по амплитуде и фазе и качество переходной характеристики. В зоне средних частот происходит пересечение ЛАЧХ с осью частот на частоте среза  $\omega_c$ , которая должна быть приблизительно равна

$$\omega_c = \frac{k_0 \pi}{t_p},$$

где  $k_0 = f(\delta_{max})$  и составляет  $k_0 = 1,2 \div 2,5$  при  $\delta_{max} = 15 \dots 30\%$ .

Для обеспечения достаточного запаса устойчивости желаемая ЛАЧХ при  $\omega_c$  должна иметь наклон  $(-20)$  дБ/дек и простирается в обе стороны на определенный диапазон частот.

3). Область высоких частот мало влияет на качество процесса регулирования и может не корректироваться.

Построение желаемой ЛАЧХ приведено ниже.

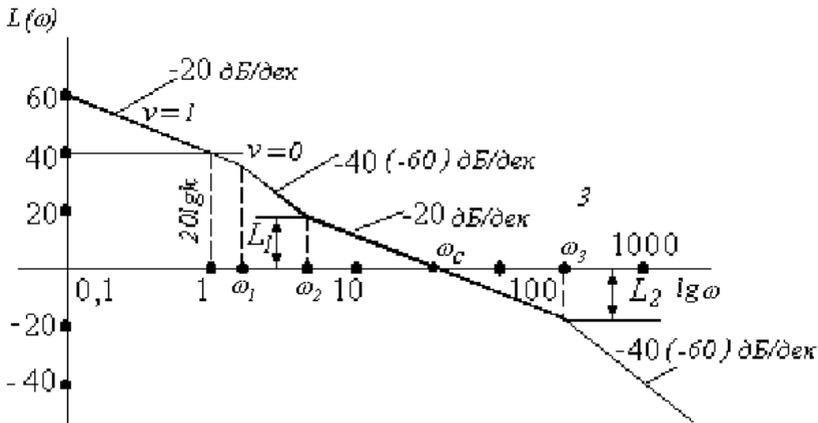
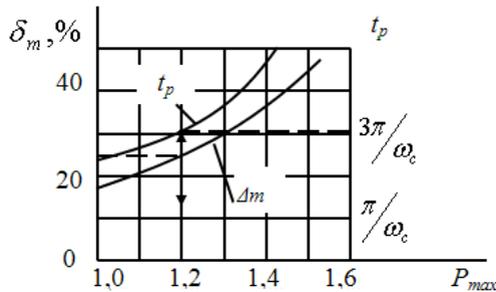


Рис. 8.6. Желаемая ЛАЧХ системы

Сопряжение среднечастотного участка с соседними осуществляют непосредственно или с помощью прямых, имеющих наклон, кратный 20 (20, 40, 60 дБ/дек). Особое внимание уделяют на то, чтобы желаемая ЛАЧХ имела наклон, возможно меньше отличающийся от наклона нескорректированной системы, чтобы получить наиболее простую передаточную функцию корректирующего устройства.

Частота среза  $\omega_c$  определяется требуемым быстродействием и допустимым перегулированием. Величину  $\omega_c$ , кроме вышеприведенных формул, можно определить по специальным номограммам или графику, приведенному ниже.

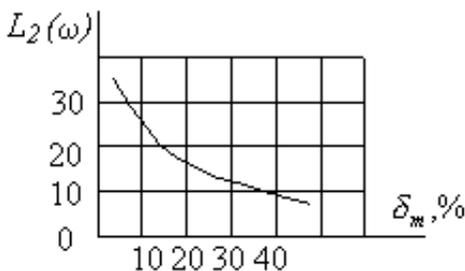


Например, пусть  $t_p=0,1\text{с}$ ,  $\delta_m=25\%$ . По  $\delta_m=25\%$  определим  $P_{max}=1,2$ , вверх до кривой  $t_p$ , по которой определяем  $t_p = \frac{3\pi}{\omega_c}$ . Отсюда

$$\omega_c = \frac{3\pi}{t_p} = \frac{3 \cdot 3,14}{0,1} \approx 100, c^{-1}.$$

Интервалы  $\omega_2 - \omega_c$  и  $\omega_c - \omega_3$  должны быть  $0,5 \div 0,9$  дек и брать их диапазон тем шире, чем более высокие показатели качества требуются. Величины  $\omega_3$  и  $\omega_2$  можно определить по приближенным формулам:

$$\omega_3 \approx (2 \dots 4)\omega_c; \quad \omega_2 = \frac{\omega_c^2}{\omega_3}.$$



Можно также определить не  $\omega_2$  и  $\omega_3$ , а величины  $L_1$  и  $L_2$  по номограммам или из графика  $L_2(\omega) = f(\delta_m, \%)$ , а при  $L_1(\omega)$  запас по фазе должен быть  $\geq 40^\circ$ .

Фазовые характеристики нескорректированной и скорректированной систем можно

построить по приближенным формулам:

$$\varphi(\omega) = \pi - v \frac{\pi}{2} - \left( k \frac{\pi}{2} - \sum_{i=1}^k \frac{\omega_i}{\omega} \right) + \left( l \frac{\pi}{2} - \sum_{i=1}^l \frac{\omega_i}{\omega} \right) \quad (8.19)$$

для частот от 0 до  $\omega_c$  и

$$\varphi(\omega) = \pi - \frac{\pi}{4} q_{cp} - \sum_{r=1}^m \frac{\omega}{\omega_r} \quad (8.20)$$

для частот от  $\omega_c$  и выше.

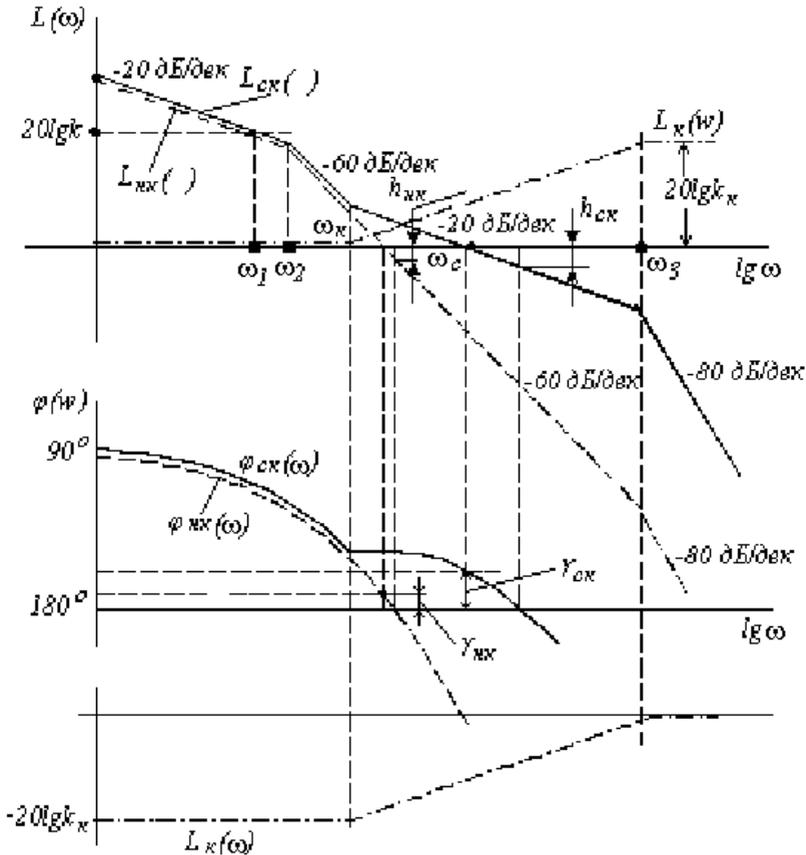
В предыдущих формулах:  $\omega_i$  – частоты сопряжения, меньшие  $\omega_c$ ;  $k$  – число сопрягающих частот, при которых наклон увеличивается на 20 дБ/дек;  $l$  – число сопрягающих частот, при которых наклон уменьшается на 20 дБ/дек;  $q_{cp}$  – количество единиц, соответствующих наклону среднечастотного участка ЛАЧХ (наклону – 20 дБ/дек соответствует  $q_{cp}=1$ );  $\omega_r$  – частоты сопряжения, большие  $\omega_c$ ;  $m$  – число сопрягающих частот больших  $\omega_c$ , при которых наклон увеличивается на 20 дБ, и находящихся левее  $\omega$ , при которых определяют  $\varphi(\omega)$ .

Найденные значения  $\varphi(\omega)$  откладывают вверх от линии –  $180^\circ$ .

3. Определяют ЛАЧХ корректирующего устройства  $L_k(\omega)$ .

В случае последовательной коррекции

$$L_{\text{эс}}(\omega) = L_{\text{нк}}(\omega) + L_k(\omega).$$



Так как они соединены последовательно, то графическим вычитанием находят ЛАЧХ КУ

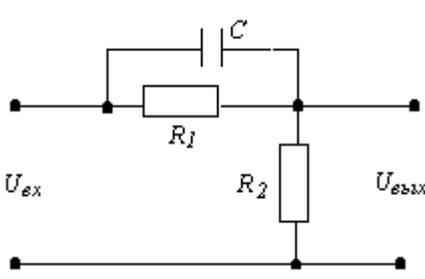
$$L_k(\omega) = L_{\text{эс}}(\omega) - L_{\text{нк}}(\omega).$$

По найденной  $L_k(\omega)$  (при условии  $L_{\text{эс}} = L_{\text{нк}}$ ) определяется из таблиц типовых КУ передаточная функция  $W_k(p)$ , по которой подбирается схема КУ и рассчитываются его параметры.  $k_k < 1$ , ЛАЧХ КУ перестраивается

вниз  $(-20 \lg k_k)$ .

Выбранное КУ может иметь ЛАЧХ, несколько отличную от требуемой, поэтому, чтобы убедиться в правильности выбора КУ, его ЛАЧХ следует сложить с  $L_{нк}(\omega)$ , по результирующей ЛАЧХ построить  $R_3(\omega)$  и методом  $h$ -функций построить кривую переходного процесса и оценить показатели качества.

Из табл. 8.1. (Например, «Егоров, Основы теории автоматического регулирования») такую ЛАЧХ имеет пассивная дифференциальная цепочка, имеющая схему.



$$W_k(p) = k_k \frac{T_1 p + 1}{T_2 p + 1} \quad (8.21)$$

Параметры КУ определяются по формулам:

$$T_1 = R_1 C ;$$

$$k_k = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \ll 1 ; T_2 = k_k T_1 .$$

Из рисунка ЛЧХ видно, что

$$T_k = \frac{1}{\omega_k} = R_1 C = T_1 ; 20 \lg k = 20 \lg \frac{R_2}{R_1 + R_2} .$$

### В случае параллельной коррекции

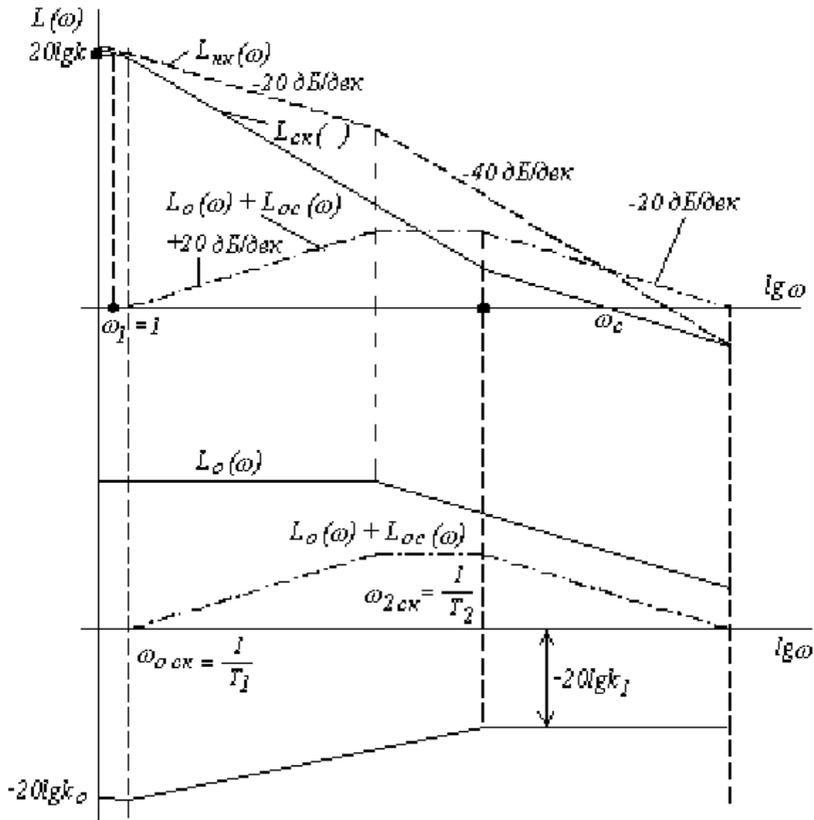
$$L_{эс}(\omega) - L_{нк}(\omega) = L_0(\omega) + L_k(\omega) ,$$

что справедливо для частот, при которых  $L_0(\omega) + L_k(\omega) \gg 0$ , где  $L_0(\omega)$  – ЛАЧХ звеньев, охваченных ОС.

Примем также  $L_{эс} = L_{ск}$ , т.е в результате коррекции достигнем желаемой характеристики.

Как следует из правила коррекции, вначале находят результирующую характеристику  $L_0(\omega) + L_k(\omega)$  графическим вычитанием  $L_{нк}(\omega)$  от  $L_{эс}(\omega)$ , после чего, исходя из технической осуществимости, определяют точку съема и ввода ОС и строят  $L_0(\omega)$  звеньев, охваченных ОС, затем из результирующей характеристики  $L_0(\omega) + L_k(\omega)$  вычитают  $L_0(\omega)$  и находят  $L_k(\omega)$ :  $L_0(\omega) + L_k(\omega) - L_0(\omega) = L_k(\omega)$ .

Построение ЛАЧХ приведено ниже.



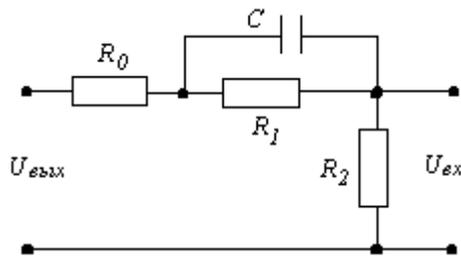
Аналогично предыдущему решаются вопросы подбора схемы КУ и его

расчет:  $W_k(p) = k_o \frac{T_1 p + 1}{T_2 p + 1}$ ;

$$k_o = \frac{R_0}{R_0 + R_1 + R_2}; T_1 = R_1 C;$$

$$k_1 = \frac{R_0 + R_2}{R_0 + R_1 + R_2};$$

$$T_2 = k_1 T_1; T_1 = \frac{1}{\omega_{ок}}; T_2 = \frac{1}{\omega_{2ок}}.$$



## 8.7. Расчет регуляторов непрерывного действия

Для получения требуемого характера и нужных показателей качества процесса регулирования необходимо обеспечить системе определенные динамические свойства. Объект управления является обычно неизменяемой частью системы, т.е. считается заданной. Поэтому требуемые динамические свойства системы можно получить только путем выбора наиболее подходящего регулятора, соответствующего закона регулирования и расчета настроечных параметров выбранного промышленного регулятора.

Система автоматического управления образуется при сочетании объекта управления (ОУ) с автоматическим управляющим устройством (АУУ). В простейшем случае АУУ представляет собой регулятор промышленного исполнения, обеспечивающий различные законы регулирования. Основные элементы и общая блок-схема регулятора приведены ниже, хотя в конкретных случаях отдельные элементы регулятора могут быть совмещены или вовсе исключены.

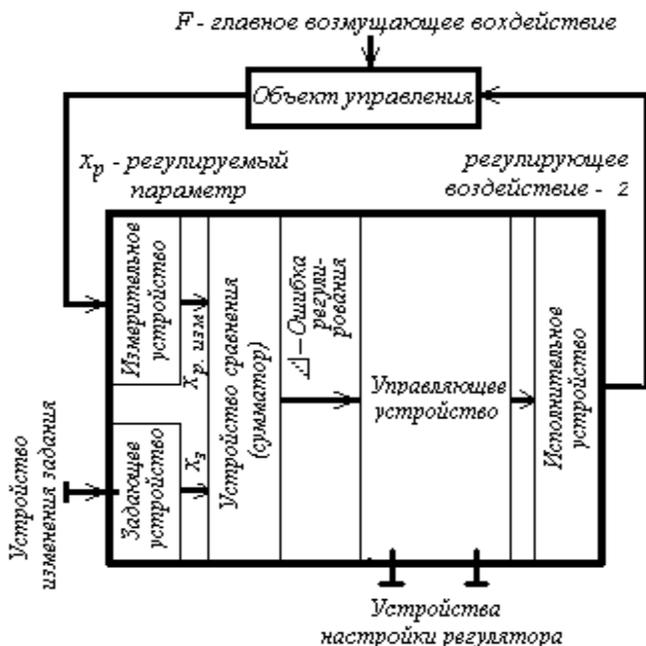


Рис.8.7. Блок- схема САУ с промышленным регулятором

САУ представляет собой единую систему, статические и динамические свойства которой определяются свойствами объекта и регулятора, а также местом приложения, характером и величиной возмущающего воздействия.

Характер переходного процесса, и, следовательно, качество регулирования при данных динамических свойствах объекта и возмущающих воздействиях определяется как выбранным законом регулирования, так и настройками регулятора. При различных настройках одного и того же регулятора можно получить разные переходные процессы. В общем случае рекомендуются три основных типовых процесса регулирования:

- апериодический процесс с минимальным временем регулирования;

- процесс с 20 % - ным перерегулированием и минимальным временем первого полупериода колебаний;

- процесс с минимальной квадратичной интегральной оценкой вида

$$\min \int_0^{\infty} x^2 dt \text{ различных модификаций.}$$

Примем, что передаточные функции статического и астатического объекта управления известны в общем виде

$$W(p) = \frac{k_o}{T_o p + 1} e^{-p\tau}, \quad W(p) = \frac{1}{T_o^y p} e^{-p\tau}. \quad (8.22)$$

Отсюда видно, что свойства объекта регулирования определяются коэффициентом передачи  $k_o$  или обратным ему коэффициентом статизма (или самовыравнивания)  $\delta_o$ , постоянной времени  $T_o$ , временем запаздывания  $\tau$  или безразмерным коэффициентом  $\frac{T_o}{\tau}$ . Для астатического

объекта применяется условная относительная постоянная времени  $T_o^y$ , с % хода / ед. изм. выходной величины.

Свойства регулятора характеризуются законом регулирования, характером взаимодействия отдельных частей регулятора во времени (непрерывное, релейное, импульсное), зоной нечувствительности регулятора и т.д.

Промышленные регуляторы могут осуществлять следующие законы регулирования:

- П - пропорциональный (статический) регулятор, реализующий пропорциональность регулирующего воздействия от сигнала ошибки  $z$

=  $k_c \Delta$ . Передаточная функция регулятора

$$W(p) = k_c = \frac{1}{\delta}; \quad (8.23)$$

- ПД - пропорционально - дифференциальный (с предварением) регулятор, обеспечивающий не только пропорциональность  $z$  от ошибки  $\Delta$ , но и от скорости изменения  $\Delta$   $z = k_c \Delta + k_o \frac{d\Delta}{dt}$ . Передаточная функция регулятора

$$W(p) = k_c + k_o p = \frac{1}{\delta} (1 + T_n p); \quad (8.24)$$

- И - интегральный (астатический) регулятор, вырабатывающий пропорциональность  $z$  от интеграла ошибки  $\Delta$   $z = k_a \int \Delta dt$ . Передаточная функция регулятора

$$W(p) = \frac{k_a}{p} = \frac{1}{T_a p}; \quad (8.25)$$

- ПИ - пропорционально – интегральный (изодромный) регулятор, обеспечивающий не только пропорциональность  $z$  от ошибки  $\Delta$ , но и от ее интеграла  $z = k_c \Delta + k_a \int \Delta dt$ . Передаточная функция регулятора

$$W(p) = k_c + \frac{k_a}{p} = \frac{1}{\delta} + \frac{1}{T_a p} = \frac{1}{\delta} \left(1 + \frac{1}{T_u p}\right) = \frac{k_c (1 + T_u p)}{T_u p}; \quad (8.26)$$

- ПИД - пропорционально-интегрально-дифференциальный (изодромный с предварением) регулятор, обеспечивающий не только пропорциональность  $z$  от ошибки  $\Delta$ , но и от ее интеграла и первой производной  $z = k_c \Delta + k_a \int \Delta dt + k_o \frac{d\Delta}{dt}$ .

Передаточная функция регулятора

$$W(p) = k_c + \frac{k_a}{p} + k_o p = \frac{1}{\delta} \left(1 + \frac{1}{T_u p} + T_n p\right) = k_p \frac{(T_u' p + 1)(T_o' p + 1)}{T_u' p}. \quad (8.27)$$

В вышеприведенных законах величина  $k_c$  называется коэффициентом передачи пропорционального регулятора или статической части сложного регулятора,  $k_o$  – коэффициентом передачи дифференциальной части регулятора,  $k_a$  – коэффициентом передачи астатической (интегральной) части регулятора.

Величина, обратная коэффициенту передачи статического регулятора  $\frac{1}{k_c} = \delta$  называется коэффициентом неравномерности, статической ошибкой или статизмом регулятора. Величина, обратная коэффициенту передачи  $k_a$  астатической (интегральной) части регулятора  $\frac{1}{k_a} = T_a$  называется постоянной времени астатического регулятора. Отношение  $\frac{k_c}{k_a} = \frac{T_a}{\delta} = T_u$  называется временем издрорма, а отношение  $\frac{k_o}{k_c} = k_o \delta = T_n$  – временем предварения (постоянной дифференцирования).

Соотношения параметров ПИД – регулятора:

$$k_n = k_p = k'_p (T'_u + T'_o) / T'_u; k_u = k_p / T_u = k'_p / T'_u; k_o = k_p T_o = k'_p T'_o; T_o = T'_o.$$

Возмущения характеризуются местом приложения, характером изменения во времени (скачком, линейно, синусоидально и т.п.) и предельными отклонениями  $\pm f$  относительно номинального (или среднего) значения.

Статическая ошибка регулирования может задаваться:

- абсолютной величиной;
- относительно установившегося значения в %;
- в безразмерном виде.

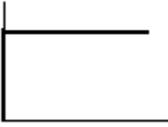
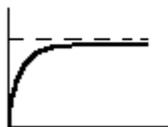
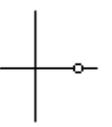
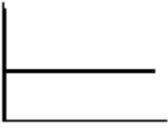
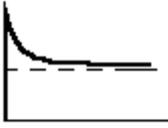
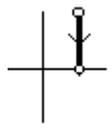
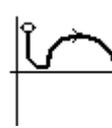
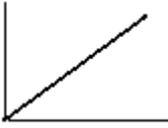
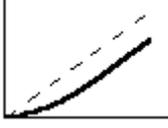
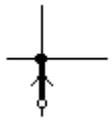
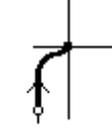
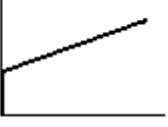
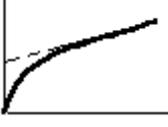
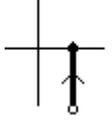
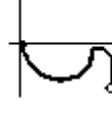
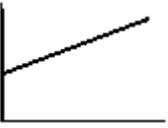
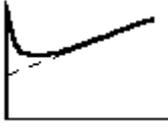
Перерегулирование при колебательном переходном процессе характеризуется отношением максимальной амплитуды первой полуволны к установившемуся значению или отношением максимальной амплитуды первой полуволны к амплитуде второй полуволны.

Время регулирования задается абсолютной величиной  $t_p$  (с) или в безразмерном виде  $\psi_c$  как отношение времени регулирования ко времени запаздывания объекта управления.

Автоколебания САУ характеризуются амплитудой колебаний регулируемого параметра и частотой колебаний, причем амплитуда задается по абсолютной величине или по отношению к номинальному  $x_p$ .

Таблица 8.1

## Динамические характеристики непрерывных регуляторов

Регулятор	Переходная характеристика $h(t)$		Годограф АФЧХ $W(j\omega)$	
П				
ПД				
И				
ПИ				
ПИД				

При выборе типа регулятора для обычных систем регулирования необходимо учитывать следующее.

Астатический объект и статический объект с низким коэффициентом самовыравнивания не должен работать с И - регулятором из – за требований устойчивости. Для таких объектов должны применяться П – регуляторы при значительной емкости объекта и малых возмущениях или ПИ – регуляторы в противном случае. При существенном времени запаздывания объекта применяют ПИД – регуляторы, особенно если требуется незначительная статическая ошибка регулирования.

Объекты с большим коэффициентом самовыравнивания могут работать с любым типом регулятора. При отсутствии значительных запаздываний и плавном изменении возмущений применяют И – регуляторы (если нет особых требований к колебательности переходного процесса) и П – регуляторы (если не требуется высокая точность в установившемся режиме). При необходимости ограничить перерегулирование низкими значениями при плавном изменении возмущений применяют П - регулятор. При больших запаздываниях и плавно изменяющихся возмущениях целесообразно применять ПИ – регуляторы, а при частых и резких возмущениях – ПИД – регуляторы.

Простейшие двухпозиционные релейные регуляторы могут применяться для статических объектов с мало меняющейся нагрузкой и (или) допускаемыми незатухающими колебаниями регулируемого параметра.

Для повышения быстродействия САУ пользуются регуляторами релейного действия и импульсными регуляторами (при допустимости высокочастотных колебаний регулируемого параметра объекта).

Правильный выбор типа и параметров настройки регулятора является сложной задачей, особенно при необходимости учета одновременно обеспечения оптимальных технико-экономических показателей работы как регулятора, так и САУ в целом.

Общее представление об областях целесообразного применения типовых промышленных регуляторов в зависимости от времени запаздывания и требуемого быстродействия дает диаграмма А. Я. Лернера, изображенная на рис. ниже. Абсциссой и ординатой диаграммы являются

безразмерные величины  $\psi_n = \frac{T_o}{\tau}$  и  $\psi_c = \frac{t_p}{\tau}$ . Штриховкой на пограничных кривых обозначены те стороны кривых, которые лежат в области

применения соответствующего типа регулятора. Для изодромных регуляторов приняты оптимальные настройки: время изодрома равна  $T_u = 2 \tau$ , время предварения  $T_n = 0,45 \tau$ . Для системы с автоколебаниями установившееся отклонение регулируемого параметра считается равным среднему значению за период колебаний.

Безразмерный коэффициент  $\gamma$  равен отношению двух безразмерных величин

$\gamma = \frac{\sigma}{\xi}$ . Числитель характеризует допустимое установившееся отклонение регулируемого параметра (из-за статической ошибки, зоны нечувствительности и т. п.) и определяется изменением регулируемого параметра при максимальном изменении регулирующего воздействия. Знаменатель характеризует расчетное возмущение и определяется отношением двух изменений регулируемого параметра: первого – под действием

этого возмущения, второго – при максимальном изменении регулирующего воздействия.

Область применения двухпозиционных регуляторов ограничена сравнительно малым запаздыванием или небольшими возмущениями. Из диаграммы видно, что ни один тип регулятора не может обеспечить время регулирования, меньшее удвоенного времени запаздывания ( $\psi_c < 2$ ). При  $2 < \psi_c < 4$  пригодны лишь специальные быстродействующие регуляторы СБ. При  $4 < \psi_c < 6$  также пригодны изодромные регуляторы с предварением и статические регуляторы при невысоких требованиях к точности регулирования. При  $6 < \psi_c < 10$  пригодны все типы

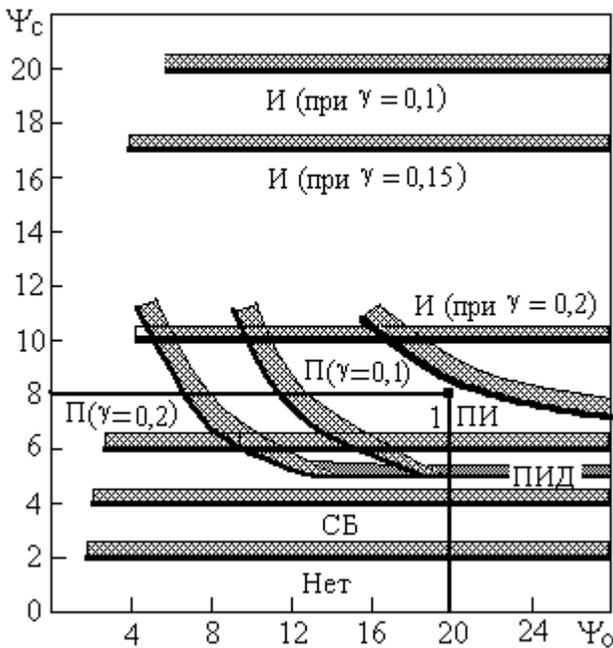


Рис. 8.8. Области применения регуляторов (диаграмма Лернера)

регуляторов, кроме астатических, дающих в этой области очень небольшую точность. Точка 1 на диаграмме соответствует следующим типам регуляторов (помимо СБ): изодромному без предварения и с предварением; статическому при  $\gamma \geq 0,06$  (что отвечает минимальному коэффициенту передачи системы, равному 15,7).

Параметрами настройки рассмотренных выше регуляторов являются:

- П – регулятора – коэффициент передачи  $k_p$ , % хода рег. органа / ед. измерения рег - мой величины;
- И – регулятора - коэффициент передачи  $k_{p1}$ , % хода рег. органа / (с · ед. измерения рег- мой величины);
- ПИ – регулятора – коэффициент передачи  $k_p$ , % хода рег. органа/ед. измерения рег- мой величины, время изодрома  $T_u$ , с;
- ПИД - – регулятора – коэффициент передачи  $k_p$ , % хода рег. органа / ед. измерения рег- мой величины, время изодрома  $T_u$ , с, время предварения  $T_n$ , с.

Таблица 8.2

Формулы для определения настроечных параметров непрерывных регуляторов для статических объектов

Регулятор	Типовой процесс регулирования		
	Апериодический	20%-ное перерегулирование	$\min \int_0^{\infty} x^2 dt$
И	$k_{p1} = \frac{1}{4,5k_o T_o}$	$k_{p1} = \frac{1}{1,7k_o T_o}$	$k_{p1} = \frac{1}{1,7k_o \tau}$
П	$k_p = \frac{0,3}{k_o \tau / T_o}$	$k_p = \frac{0,7}{k_o \tau / T_o}$	$k_p = \frac{0,9^*}{k_o \tau / T_o}$
ПИ	$k_p = \frac{0,6}{k_o \tau / T_o}$ $T_u = 0,67$	$k_p = \frac{0,7}{k_o \tau / T_o}$ $T_u = 0,77$	$k_p = \frac{1,0}{k_o \tau / T_o}$ $T_u = T_o$
ПИД	$k_p = \frac{0,95}{k_o \tau / T_o}$ $T_u = 2,4\tau$ $T_n = 0,4\tau$	$k_p = \frac{1,2}{k_o \tau / T_o}$ $T_u = 2,0\tau$ $T_n = 0,4\tau$	$k_p = \frac{1,4}{k_o \tau / T_o}$ $T_u = 1,3\tau$ $T_n = 0,5\tau$

- - для П – регуляторов это соответствует процессу с 40 % - ным перерегулированием

Таблица 8.3

Формулы для определения настроечных параметров непрерывных регуляторов для а статических объектов

Регулятор	Типовой процесс регулирования		
	Апериодический	20%-ное перерегулирование	$\min \int_0^{\infty} x^2 dt$
П	$k_p = \frac{0,4}{\tau/T_o^y}$	$k_p = \frac{0,7}{\tau/T_o^y}$	-
ПИ	$k_p = \frac{0,6}{\tau/T_o^y}$ $T_u = 6\tau$	$k_p = \frac{0,7}{\tau/T_o^y}$ $T_u = 3\tau$	$k_p = \frac{1,0}{\tau/T_o^y}$ $T_u = 4\tau$
ПИД	$k_p = \frac{0,6}{\tau/T_o^y}$ $T_u = 5\tau$ $T_n = 0,2\tau$	$k_p = \frac{1,1}{\tau/T_o^y}$ $T_u = 2\tau$ $T_n = 0,4\tau$	$k_p = \frac{1,4}{\tau/T_o^y}$ $T_u = 1,6\tau$ $T_n = 0,5\tau$

Для релейного двухпозиционного регулятора настроечным параметром является дифференциал (петля релейной характеристики), а для релейного регулятора с постоянной скоростью – величина  $k_n$ , определяющая скорость перестановки регулирующего органа, и зона нечувствительности. Чем меньше зона нечувствительности и чем больше  $k_n$ , тем чаще реверсируется регулируемый орган, ниже надежность и меньше срок службы элементов автоматики. Напротив, увеличение зоны  $\Delta_{nc}$  и снижение  $k_n$  затягивает процесс регулирования.

#### 8.8. Основы расчета систем подчиненного регулирования

При проектировании САУ объектами, не содержащими звена чистого запаздывания, наибольшее применение получили два критерия оптимальности – модульный (МО) и симметричный (СО).

Критерий *модульного оптимума* (МО), называемый также критерием амплитудного или технического оптимума, заключается в выполнении следующих требований [1]: АЧХ по каналу  $X_z - X_p$  должна быть горизонтальной в как можно более широком диапазоне частот и равной 1; в наклонной части характеристика должна быть как можно более крутопадающей, т. е. приближаться по своим характеристикам к идеальному

фильтру низкой частоты (в горной промышленности называемой «экскаваторной характеристикой»). Тогда, при отсутствии помех на входе, система будет наилучшим образом воспроизводить задающее воздействие и подавлять главное возмущающее воздействие.

Настройка системы, описываемой в первом приближении передаточной функцией (3.11) колебательного звена по критерию МО обеспечивает следующие показатели качества:

$$\delta_m \% < 9 \% ; \quad t_n < (5/\omega_o) ; \quad t_p < (3\pi/\omega_o).$$

АЧХ, близкую по форме к идеальной экскаваторной характеристике имеет так называемый фильтр Баттерворта, у которого АЧХ

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(1+T\omega)^{2n}}} . \quad (8.28)$$

На практике обычно используют фильтры с порядком  $n = 2 \dots 8$ , при этом коэффициент демпфирования приблизительно равен  $\xi = 0,7$ , а показатели качества составляют  $\delta_m \% < 5 \% ; t_p < (3,2/\omega_o)$ .

При настройке систем выше второго порядка передаточную функцию замкнутой САУ по управляющему воздействию приводят к нормированному виду

$$W(p) = B_m / (p^n + A_1 p^{n-1} + \dots + A_{n-1} p + 1), \quad (8.29)$$

где  $p = p/\omega_o = pT_m$  – оператор Лапласа, соответствующий безразмерному (относительному) времени  $t = t/T_m$ ;

$T_m$  – масштабный множитель, равный

$$T_m = \sqrt[n]{a_o / a_n} ; \quad (8.30)$$

$$A_1 = \frac{a_1}{a_o} T_m ; \dots A_{n-1} = \frac{a_{n-1}}{a_o} T_v^{n-1} \quad B_m = \frac{b_m}{a_n}$$

– безразмерные коэффициенты уравнения.

Для обеспечения желаемой формы АЧХ, близкой к прямоугольной, коэффициенты нормированной передаточной функции выбирают по стандартным полиномам Баттерворта по табл. 8. 4.

Таблица 8. 4

## Коэффициенты фильтров Баттерворта

$n$	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$	$A_6$	$A_7$
2	1,4	-	-	-	-	-	-
3	2,0	2,0	-	-	-	-	-
4	2,61	3,41	2,61	-	-	-	-
5	3,24	5,24	5,24	3,24	-	-	-
6	3,86	7,46	9,13	7,46	3,86	-	-
7	4,5	10,1	14,6	14,6	10,1	4,5	-
8	5,12	13,1	21,8	25,7	21,8	13,1	5,12

Именно при таких сочетаниях коэффициентов  $A_i$  АЧХ звена принимает вид АЧХ идеального фильтра, при этом  $T = T_m$ , а относительная частота  $\Omega_o = \omega_o T = 1$  соответствует значению АЧХ, равному 0,7 при  $B_m = 1$ .

Масштабный множитель не влияет на форму переходного процесса и служит обобщенной мерой быстродействия системы. Его значение можно выбирать исходя из требуемого быстродействия по приближенным формулам

$$t_n \cong nT_m, \quad t_p \cong 2nT_m,$$

где  $n$  – порядок полинома Баттерворта.

Найденное по этим формулам значение  $T_m$  обеспечивают за счет выбора по формуле (8.30) соответствующего общего передаточного коэффициента разомкнутого контура  $k$ , который входит в свободный член ( $a_n = 1 + k$  для статических САУ и  $a_n = k$  астатических систем).

Применительно к колебательной модели объекта параметры фильтра Баттерворта

$$A_1 = 2\xi = 1/\sqrt{kT_{01}}, \quad T_m = T = \sqrt{T_{01}/k}. \quad (8.31)$$

В системах, параметры которых выбраны соответствии с полиномами Баттерворта, перерегулирование составляет

$$\sigma \cong 10 \dots 15 \%.$$

Указанные выше значения длительности переходного процесса и перерегулирования строго выдерживаются только в тех случаях, когда числитель передаточной функции замкнутой САУ не содержит слагаемых с оператором  $p$ . Тем не менее и для систем с более сложным поли-

номом числителя можно пользоваться рекомендуемыми значениями коэффициентов Баттерворта. При этом также обеспечивается достаточно хорошее качество переходного процесса. Кроме того, настройки, соответствующие полиномам Баттерворта, могут использоваться как исходные (отправные) для отыскания оптимальных настроек систем, передаточные функции которых имеют в числителе полиномы от  $p$ , т. е. упрещения.

*Оптимизация типовых контуров управления без запаздывания.* Применим изложенный метод оптимизации АЧХ для расчета настроечных параметров типовых регуляторов для управления инерционными объектами без запаздывания

$$W_o(p) = \frac{k_o}{p(T_{o1}p + 1)}; \quad (8.32)$$

$$W_o(p) = \frac{k_o}{(T_{o1}p + 1)(T_{o2}p + 1)}; \quad (8.33)$$

$$W_o(p) = \frac{k_o}{p(T_{o1}p + 1)(T_{o2}p + 1)}; \quad (8.34)$$

$$W_o(p) = \frac{k_o}{(T_{o1}p + 1)(T_{o2}p + 1)(T_{o3}p + 1)}, \quad (8.35)$$

где  $T_{o1} < T_{o2} < T_{o3}$ , причем в общем случае сомножитель с наименьшей постоянной времени  $T_{o1}$  приближенно заменяет собой несколько инерционных звеньев с малыми постоянными времени  $T_{oi}$

$$P(T_{oi}p + 1) \cong T_{om}p + 1; \quad T_{om} = T_{o1} = \sum_i T_{oi}. \quad (8.36)$$

Вышеприведенными моделями обычно пользуются для описания объектов управления, входящих в типовые контуры регулирования электроприводами (тока, напряжения, частоты вращения и т. п.).

В зависимости от типа и порядка передаточной функции объекта, а также соотношений между постоянными времени, настройка контура осуществляется либо по критерию МО, либо по критерию СО по данным табл. 8.4., приведенной ниже.

Настроечные параметры регуляторов, обеспечивающие получение определенных показателей качества, в дальнейшем будем называть *гарантирующими*, так как этот термин в данной задаче точнее, чем часто используемые понятия «оптимальные» и «наиболее благоприятные».

Если у обычного объекта второго порядка  $T_{o2} \leq 4T_{o1}$ , то предпочтителен критерий МО и для выполнения требований этого критерия применяют ПИ-регулятор с передаточной функцией

$$W_p(p) = \frac{k_p'(T_u'p + 1)}{T_u'p} \quad (8.37)$$

с постоянной времени интегрирования  $T_u'$ , равной наибольшей постоянной времени

$$T_u' = T_u = T_{o2},$$

при этом достигается полная компенсация (устранение из уравнения динамики) этой наибольшей постоянной времени.

Таблица 8.4

Гарантирующие настроечные параметры типовых регуляторов для объектов без запаздывания

Передаточная функция объекта $W_o(p)$	Условия применения	Критерий	Настроечные параметры регулятора		
			$k_p'$	$T_u'$	$T_o'$
$\frac{k_o}{(T_{o1}p + 1)(T_{o2}p + 1)}$	$T_{o2} \leq 4T_{o1}$	МО	$\frac{T_{o2}}{2k_o T_{o2}}$	$T_{o2}$	-
	$T_{o2} \geq 4T_{o1}$	СО	$\frac{T_{o2}}{2k_o T_{o1}}$	$4T_{o1}$	-
$\frac{k_o}{p(T_{o1}p + 1)(T_{o2}p + 1)}$	$T_{o1} < T_{o2}$	СО	$\frac{1}{2k_o T_{o1}}$	$4T_{o1}$	$T_{o2}$
$\frac{k_o}{(T_{o1}p + 1)(T_{o2}p + 1)(T_{o3}p + 1)}$	$T_{o3} \leq 4T_{o1}$	МО	$\frac{T_{o3}}{2k_o T_{o1}}$	$T_{o3}$	$T_{o2}$
	$T_{o3} \geq 4T_{o1}$	СО	$\frac{T_{o3}}{2k_o T_{o1}}$	$4T_{o1}$	$T_{o2}$
	$T_{o2} \geq 4T_{o1}$	СО	$\frac{T_{o2} T_{o3}}{8k_o T_{o1}^2}$	$T_{o2}$	$4T_{o2}$

Передаточная функция разомкнутого контура принимает вид

$$W(p) = W_p(p) W_o(p) = \frac{k_p k_o}{T_u p (T_{o1} p + 1)} \quad (8.35)$$

и совпадает с передаточной функцией разомкнутого контура колебательной модели, для которой, как показано выше, критерий модульного оптимума сводится к условию  $\xi = 0,7$ . Отсюда передаточный коэффициент разомкнутого контура равен

$$k = 1/(4\xi^2 T_{o1}) = 1/(2T_{o1}). \quad (8.36)$$

Учитывая, что для рассматриваемого контура с ПИ-регулятором

$$k = k_p k_o T_u \text{ и } T_u = T_{o2}, \quad (8.37)$$

получим второе условие настройки на МО

$$k_p = T_{o2} / (2k_o T_o). \quad (8.38)$$

Построим ЛАЧХ разомкнутого контура  $L(\omega)$  и переходную характеристику  $h(t)$  замкнутого контура системы с объектом в виде колебательной модели и ПИ-регулятором, настроенным по МО.

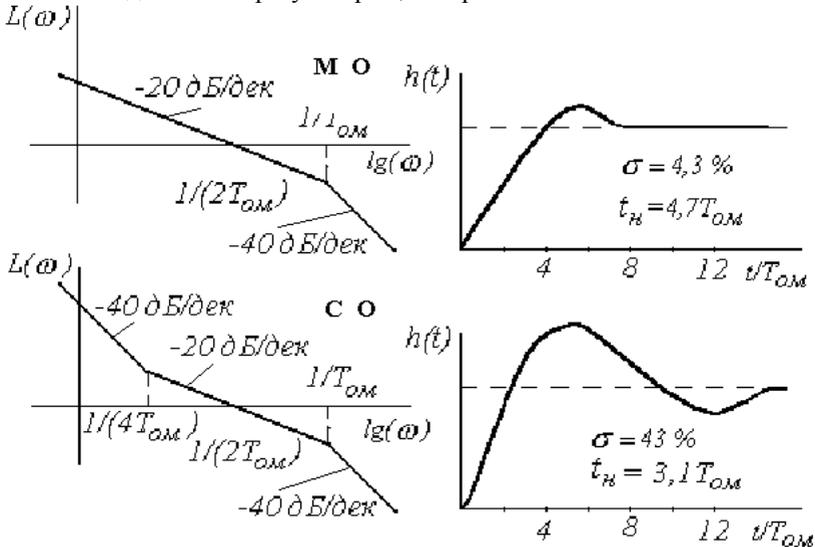


Рис. 8.9. Логарифмические частотные и переходные характеристики САУ, настроенных по МО и СО

Передаточная функция замкнутого контура, настроенного на МО, имеет вид

$$W_s(p) = \frac{1}{2T_{o1}^2 p^2 + 2T_{o1} p + 1} \quad (8.39)$$

и ей соответствуют показатели качества

$$\sigma \cong 4,3 \%; t_n \cong 4,7 T_{o1}; t_p \cong 4,5 T_{o1}.$$

Если  $T_{o2}$  превышает  $T_{o1}$  в 20 раз, то объект второго порядка по своим свойствам близок к реальному интегрирующему звену

$$W_o(p) = \frac{k_o}{T_{o2} p (T_{o1} p + 1)}. \quad (8.40)$$

Таким объектом можно управлять с помощью П - регулятора, настроенного на МО. Для этого передаточный коэффициент регулятора должен быть таким же, как и при  $T_{o2} \leq 4T_{o1}$ . однако при этом по каналу возмущения возникает статическая ошибка  $\varepsilon_\varepsilon$ , равная при единичном ступенчатом возмущении

$$\varepsilon_\varepsilon = \frac{2k_o T_{o1}}{T_{o2}}.$$

При  $T_{o2} \geq 20T_{o1}$  ошибка  $\varepsilon_\varepsilon \leq 0,1 k_o$ , что вполне допустимо.

Для астатических объектов второго порядка по условиям структурной устойчивости замкнутой системы нельзя использовать ПИ - регулятор с настройкой  $T_u' = T_{o1}$ , полностью компенсирующей единственную постоянную времени  $T_{o1}$ . Поэтому для таких объектов применяют настройку,  $T_u' \neq T_{o1}$ , обеспечивающую лишь частичную компенсацию  $T_{o1}$ . Найдем наилучшие соотношения настроечных параметров для такой компенсации. Передаточная функция разомкнутого контура, состоящего из астатического объекта и ПИ - регулятора с  $T_u' \neq T_{o1}$

$$W_p(p) = \frac{k_p' (T_u' p + 1)}{T_u' p} \frac{k_o}{p(T_{o1} p + 1)}. \quad (8.41)$$

Тогда передаточная функция замкнутой системы

$$W_z(p) = \frac{k_p k_o (T_u p + 1)}{T_u T_{o1} p^3 + T_u p^2 + k_p k_o T_u p + k_p k_o}. \quad (8.42)$$

Применив к знаменателю полученной передаточной функции соотношения Баттерворта, получим следующие настройки ПИ - регулятора

$$k_p' = k_p = 1/(2k_o T_{o1}); \quad T_u' = T_u = 4T_{o1},$$

причем  $T_M = 2T_{o1}$ .

При полученных настройках передаточная функция разомкнутой САУ принимает вид

$$W_p(p) = \frac{4T_{o1}p + 1}{8T_{o1}^2 p^2 (T_{o1}p + 1)}, \quad (8.43)$$

тогда передаточная функция замкнутой САУ

$$W_z(p) = \frac{4T_{o1}p + 1}{8T_{o1}^3 p^3 + 8T_{o1}^2 p^2 + 4T_{o1}p + 1}. \quad (8.44)$$

Передаточной функции разомкнутой САУ (8.43) соответствует ЛАЧХ, симметричная относительно частоты среза, поэтому такой выбор настроек получил название «*симметричного оптимума*».

Переходный процесс в контуре, настроенной по СО, характеризуется следующими показателями:

$$\sigma \cong 43 \%; \quad t_n \cong 3,1 T_{o1}; \quad t_p \cong 14,7 T_{o1}.$$

Для статического объекта третьего порядка с постоянными времени, незначительно отличающимися друг от друга, можно применить ПИД – регулятор с передаточной функцией

$$W_{pec}(p) = k_p \frac{(T_u' p + 1)(T_d' p + 1)}{T_u' p}, \quad (8.45)$$

настроенного по критерию МО, с полной компенсацией двух наибольших постоянных времени. При этом большую ( $T_{o3}$ ) из этих двух постоянных времени необходимо компенсировать постоянной  $T_u'$ , а меньшую ( $T_{o2}$ ) – постоянной  $T_d'$ . Если хотя бы одна из больших постоянных времени объекта превышает наименьшую в 4 раза, то ПИД – регулятор необходимо

настраивать по критерию СО с полной компенсацией лишь одной постоянной времени ( $T_{o2}$ ).

Для сравнения передаточных свойств контуров, настроенных по критериям МО и СО, найдем передаточные функции замкнутой системы по каналу возмущения:

- по критерию МО

$$W_{\text{зк}}(p) = \frac{2k_o T_{o1} p}{(2T_{o1}^2 p^2 + 2T_{o1} p + 1)(T_{o2} p + 1)}; \quad (8.46)$$

- по критерию СО

$$W_{\text{зк}}(p) = \frac{8k_o T_{o1}^2 p}{8T_{o1}^3 p^3 + 8T_{o1}^2 p^2 + 4T_{o1} p + 1}. \quad (8.47)$$

Сравнивая попарно передаточные функции замкнутой САУ по задающему и возмущающему воздействиям, обратим внимание на следующие их особенности.

Все функции имеют знаменатели, соответствующие полиномам Баттерворта. Это означает, что собственные динамические свойства систем, настроенных по МО и СО, можно приближенно описать инерционным звеном первого порядка

$$W_{\text{зк}} \cong \frac{1}{T_s p + 1}, \quad (8.48)$$

где  $T_s = 2T_{o1}$  для системы по МО и  $T_s = 4T_{o1}$  для системы по СО.

В числителе передаточной функции замкнутой САУ по СО присутствует форсирующий множитель ( $4 T_{o1} p + 1$ ), из-за которого в системе, настроенной по СО, переходный процесс по каналу задания обладает значительным перерегулированием (см. рис. 8.9 для СО).

В передаточную функцию по возмущающему воздействию по МО (8.46) входит реальное дифференцирующее звено с постоянной времени  $T_{o2}$ , вследствие чего переходный процесс в системе по каналу возмущения, настроенной по МО, имеет большую длительность, чем по СО.

Критерий МО предпочтителен для оптимизации при оптимизации систем, обрабатывающих в основном изменения задающего воздействия, т. е. следящих и программных САУ. Критерий СО целесообразно применять для систем, которые чаще всего реагируют на возмущающие воздействия, т. е. для систем стабилизации.

Для снижения больших величин перерегулирования в системе, настроенной по критерию СО, применяют сглаживание ступенчатого за-

дающего воздействия включением на входе системы специального фильтра – инерционного звена первого порядка

$$W_\phi(p) = \frac{1}{T_\phi p + 1}, \quad (8.49)$$

где  $T_\phi = 4T_{o1}$  – постоянная времени для астатических объектов и статических объектов с  $T_{o2} / T_{o1} \geq 20$ . При меньших отношениях постоянную времени  $T_\phi$  можно уменьшить. Естественно, что быстродействие системы при включении дополнительно последовательного сглаживающего фильтра снижается.

Переходный процесс, соответствующий последовательному включению фильтра, характеризуется показателями

$$\sigma \cong 8,1 \%, t_n \cong 7,6 T_{o1}; t_p \cong 11,7 T_{o1}.$$

Последовательная оптимизация контуров подчиненного регулирования. Для управления сложными технологическими процессами и электроприводами промышленных установок применяют многоконтурные системы с несколькими внутренними обратными связями по промежуточным переменным  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , как это показано на рисунке.

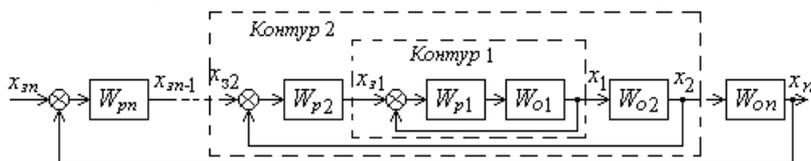


Рис. 8.10. Многоконтурная САУ подчиненного регулирования

Каждая обратная связь (для простоты все они приняты единичными) образует отдельный контур регулирования выходной переменной. Причем, следующий контур 2 регулирования охватывает данный контур, называемый теперь внутренним, и его регулятор вырабатывает задание  $x_{s1}$  для внутреннего контура. Принцип построения такой многоконтурной системы с каскадным включением регуляторов называют принципом подчиненного регулирования. Расчет настроечных параметров системы, построенной по принципу подчиненного регулирования, осуществляют путем последовательной оптимизации контуров, начиная с внутреннего контура 1 регулятора с объектом. В каждом последующем контуре в качестве объекта регулирования рассматривают соединение предыдущего оптимизированного контура и части объекта данного контура. Замкнутый  $(i - 1) - 1$  контур оптимизированный на предыдущем этапе по критерию МО или

СО, может быть представлен стандартной передаточной функцией инерционного звена первого порядка с постоянной времени  $T_s = 2T_{o1}$  для системы по МО и  $T_s = 4T_{o1}$  для системы по СО, где  $T_{o1}$  - наименьшая некомпенсированная постоянная времени объекта  $(i - 1)$  - контура. Поэтому условный объект может настраиваться также по рекомендациям таблиц настроек.

Методику выбора регулятора рассмотрим на примере привода (см. рис) по системе «тиристорный преобразователь – двигатель» (ТП-Д) с регулятором тока. Постоянная времени ТП обозначена  $T_\mu$ , а объекта управления (двигателя)  $T_o$ , причем  $T_\mu = T_{mn}$  очень мала, не компенсируется и характеризует уровень помехоустойчивости контура САУ и, кроме того, выполняется условие  $T_\mu \ll T_o$ .

Рассматриваемый контур требуется настроить так, чтобы входной ступенчатый сигнал  $x_s$  обрабатывался без статической ошибки с максимальным быстродействием и с перерегулированием  $\delta_m \leq 8\%$ .

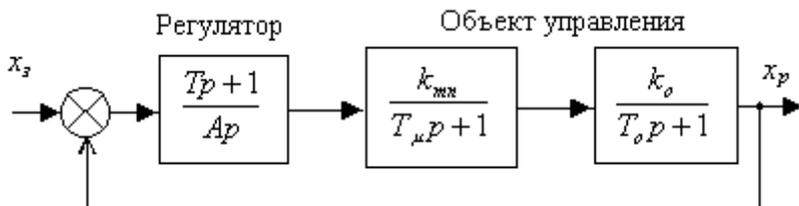


Рис. 8.11. Упрощенная структурная схема контура САУ

Для того, чтобы  $x_p$  обрабатывался без статической ошибки при статическом ОУ, необходимо применить астатический регулятор, а для обеспечения требуемого быстродействия надо скомпенсировать наибольшую постоянную времени контура  $T_o$ . Таким образом, принимаем регулятор с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{Tp + 1}{Ap}, \quad (8.50)$$

причем принимается  $T = T_o$ .

Тогда передаточная функция разомкнутого контура

$$W_p(p) = \frac{(Tp + 1)k_{mn}k_o}{Ap(T_\mu p + 1)(T_o p + 1)} = \frac{1}{Bp(T_\mu p + 1)}, \quad (8.51)$$

где  $B = A / k_{mn} k_o$  – эквивалентная постоянная интегрирования контурного регулятора.

Передаточная функция замкнутого контура при единичной обратной связи

$$W_s(p) = \frac{1}{BT_\mu p^2 + Bp + 1}. \quad (8.52)$$

Таким образом, замкнутый контур представляет собой систему второго порядка, важнейшей характеристикой которой является коэффициент относительного демпфирования

$$\xi = \frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}},$$

где  $\beta$  – коэффициент при  $p$ , т. е.  $\beta = B$ ;

$\alpha$  – коэффициент при  $p^2$ , т. е.  $\alpha = BT_\mu$ .

Согласно критерию модульного оптимума принимают

$$B = 2T_\mu = B_0, \quad (8.53)$$

где  $B_0$  – относительная эквивалентная постоянная интегрирования.

Отсюда коэффициент  $A$  для регулятора

$$A = B_0 \cdot k_{mn} k_o = 2T_\mu k_{mn} k_o. \quad (8.54)$$

Тогда оптимизированная передаточная функция замкнутого контура

$$W_{zo}(p) = \frac{1}{2T_\mu^2 p^2 + 2T_\mu p + 1} \approx \frac{1}{2T_\mu p + 1} \quad (8.55)$$

ввиду малости коэффициента при второй производной.

При этом коэффициент относительного демпфирования равен

$$\xi = \frac{2T_\mu}{2\sqrt{2T_\mu T_\mu}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

и достигается максимальное перерегулирование  $\delta_m \leq 4,3\%$ , время первого достижения установившегося значения  $4,4T_{\mu}$ , время входа в двухпроцентную полосу  $8,4T_{\mu}$ .

На практике часто встречаются САУ, в прямом канале регулирования которых имеются  $k$  малых инерционностей  $T_{\mu}$ , которые могут быть как вещественными, так и комплексно-сопряженными, что соответствует наличию колебательных звеньев (звеньев второго порядка). В этих случаях оптимальная эквивалентная постоянная интегрирования принимается равной

$$B_o = 2 \sum_{i=1}^k T_{\mu i}$$

и передаточная функция замкнутого контура имеет вид

$$W_{zo}(p) = \frac{1}{2 \sum_{i=1}^k T_{\mu i}^2 p^2 + 2 \sum_{i=1}^k T_{\mu i} p + 1} \approx \frac{1}{2 \sum_{i=1}^k T_{\mu i} p + 1}. \quad (8.56)$$

В наиболее общем случае малые инерционности и упреждения могут быть в каналах и прямой, и обратной связей.

Для выбора регулятора последующего внешнего контура данный оптимизированный контур с достаточной для практических расчетов точностью аппроксимируется инерционным звеном первого порядка с постоянной времени, равной удвоенной эквивалентной малой некомпенсированной постоянной времени, и рассматривается как составная часть следующего контура.

### Оптимизация типовых контуров управления с запаздыванием.

Общие принципы построения системы и выбора структуры и параметров регулятора, гарантирующих получение заданных показателей качества в САУ инерционным объектом первого и второго порядка с запаздыванием:

$$W_o(p) = \frac{k_o e^{-\tau p}}{T_{o1} p + 1}; \quad (8.57)$$

$$W_o(p) = \frac{k_o e^{-\tau p}}{(T_{o1} p + 1)(T_{o2} p + 1)}; \quad (8.58)$$

$$W_o(p) = \frac{k_o e^{-\tau p}}{(T_{o1} p + 1)^2}, \quad (8.59)$$

где  $\tau_o' = \tau_o - 0,11 T_o$ ,  $T_o' = 0,64 T_o$ ,  $T_{oi} = 0,37 T_o$ , а параметры  $T_o$ ,  $\tau_o$  определяются экспериментально путем проведения касательной к переходной характеристике объекта.

Подставив передаточную функцию объекта (\*) в передаточную функцию идеального регулятора (при  $x_n = 0$  и  $W_{omn}(p) = 1$ ), и произведя приближенную замену  $e^{-p\tau_o} = (1 - p\tau_o)$  для области низких частот (при медленных изменениях воздействий), получим

$$W_{pez}(p) = \frac{T_o'(p) + 1}{k_o p \tau_o'} = \frac{T_o'}{k_o \tau_o'} \left(1 + \frac{1}{T_o' p}\right). \quad (8.60)$$

Очевидно, что для объекта с инерционной частью первого порядка (8.57) идеальный регулятор Ресквики вырождается в ПИ - регулятор с настроечными параметрами

$$k_p = T_o' / k_o \tau_o'; \quad T_u = T_o'.$$

Для объекта, имеющего инерционную часть второго порядка, наилучшим будет ПИД - регулятор с настроечными параметрами

$$k_p = (T_{o1} + T_{o2}) / (k_o \tau_o'); \quad T_u = T_{o1} + T_{o2}; \quad T_d = T_{o1} T_{o2} / (T_{o1} + T_{o2}).$$

Для наиболее рациональной аппроксимации объектов с апериодической характеристикой второго порядка ( $S$  - образной характеристикой) с двумя одинаковыми постоянными времени  $T_{o1} = T_{o2} = T_{oi} = 0,37 T_o$  настроечные параметры ПИД - регулятора принимаются равными

$$k_p = 0,74 T_o / (k_o \tau_o'); \quad T_u = 0,74 T_o; \quad T_d = 0,18 T_o.$$

## 9. НЕЛИНЕЙНЫЕ САУ

### 9.1. Общие сведения

Для линейных (ЛН) систем:

- 1) применим принцип суперпозиции;
- 2) характер протекания переходного процесса и его параметры не зависят от начальных условий, величины  $F$  возмущающих воздействий и являются только функциями параметров САУ ( $k$ ,  $T$ ).

Для нелинейных (НЛН) систем:

- 1) принцип суперпозиции недействителен;
- 2) характер и параметры процесса управления зависят не только от параметров САУ, но и от начальных условий состояния системы и величины возмущающих воздействий.

НЛН системы могут быть устойчивы «в малом» - при небольших приращениях  $F$ , и неустойчивы «в большом»; между этими состояниями возможен режим автоколебаний в зависимости от внутренних параметров САУ, а не за счет периодических изменений входных воздействий.

В НЛН системах при подаче внешнего воздействия могут наблюдаться особые случаи резонанса, характеризующиеся неоднозначной зависимостью амплитуды вынужденных колебаний от частоты, причем резонанс возможен и на дробной частоте. Некоторым НЛН свойственны явления параметрического резонанса при периодическом изменении какого-либо параметра САУ.

К НЛН системам относятся:

- 1) системы, содержащие хотя бы один элемент со статической характеристикой, не поддающейся линеаризации;
- 2) системы, осуществляющие управление исполнительными элементами не непрерывно, а периодически, импульсами, параметры которых ( $t$ ,  $\omega$  или знак) зависят от  $\varepsilon$ ;
- 3) системы, имеющие ограничение по величине внутренних воздействий (например, заслонка имеет ограниченный ход – в ЛН системах принимается ход неограниченным или в рабочем диапазоне считается неограниченным).

НЛН описываются нелинейными дифференциальными уравнениями, существуют также и приближенные методы их решения.

Наибольшее распространение получили методы фазового пространства, гармонической линеаризации и моделирования на ЭВМ.

При анализе НЛН систем обычно решают следующие задачи:

- отыскание возможных состояний равновесия и устойчивости;

- выявление автоколебаний в системе и оценка их устойчивости;
- выяснение соотношений между параметрами системы, при которых возникают автоколебаний;
- определение параметров автоколебаний и их связей с параметрами системы.

Структурная схема НЛН САУ представляется состоящей из линейной части и нелинейного элемента

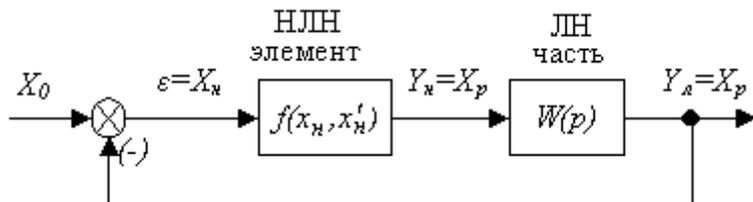


Рис. 9.1. Общая структурная схема нелинейной САУ

Математические основы НЛН систем созданы Ляпуновым А.М., Крыловым Н.М., Богомоловым Н.Н., Адроновым А.А., Булгаковым Б.В., Гольдфарбом Л.С., Поповым Е.П. и др.

## 9.2. Типовые НЛН элементы

Все многообразие НЛН элементов можно свести к следующим пяти типовым нелинейностям.

1) простейшими НЛН элементами являются статические нелинейности, у которых  $y_n$  зависит только от  $x_n$  и строго однозначно (без петли гистерезиса), т.е. следующего вида

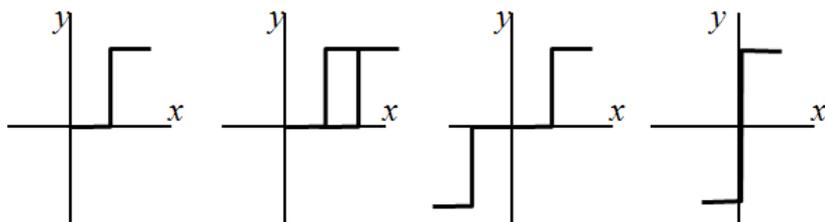


Рис. 9.2. Типовые нелинейные элементы

2) динамические нелинейности, у которых  $y_n$  зависит не только от  $x_n$ , но и от ее производной, причем характеристика всегда неоднозначна.



Рис. 9.3. Характеристики динамических нелинейностей

3) В управляющих устройствах автоматических систем используются также особые нелинейности – множительное звено, элементы с переменной структурой и элементы логического типа.

Например, если  $W=1$ , то это квадрататор с НЛН характеристикой

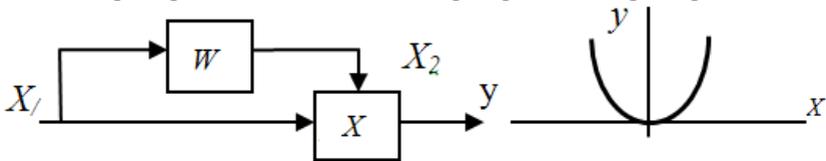


Рис. 9.4. Блок-схема и характеристика квадрататора

Если  $W$  имеет характеристику идеального релейного элемента, то эта схема используется для выделения модуля сигнала.

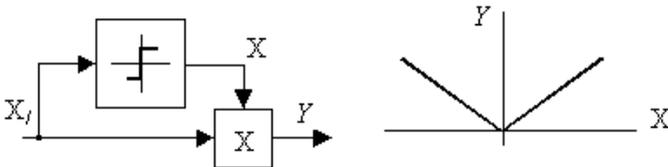


Рис. 9.5. Блок-схема и характеристика элемента для выделения модуля сигнала

Множительное звено применяют также для формирования НЛН законов регулирования, например:

$$y = k \left( 1 + \frac{k_1}{|\varepsilon|} \right) \varepsilon \quad \text{или} \quad y = k \left( 1 \pm \frac{k_1}{|\varepsilon'|} \right) \varepsilon,$$

где выражение в скобках можно рассматривать условно как коэффициент передачи для сигнала  $\varepsilon$ , зависящий от  $\varepsilon$  или  $\varepsilon'$  и плавно изменяющийся в зависимости от  $\varepsilon$  или  $\varepsilon'$ . Такое целенаправленное автоматическое изменение  $k$  позволяет в ряде случаев существенно улучшить качество системы (например, при компенсации толщины стружки драглайна).

4) Еще большие возможности для повышения качества системы создаются при использовании управляющих устройств с переменной структурой, где специальный блок изменения структуры с помощью ключевого элемента позволяет включать в основной контур либо звено с передаточной функцией  $W_1$ , либо  $W_2$  (ЛН) в зависимости от  $\varepsilon$  или  $\varepsilon'$  и других сигналов.

5) Нелинейности логического типа, которые в зависимости от комбинаций входных величин выдают сигнал, равный +1, 0 или -1.

### 9.3. Метод фазового пространства

Метод **фазового пространства** (или метод пространства состояний) представляет собой графоаналитический способ анализа ЛН систем.

Любой технологический процесс характеризуется выходной величиной  $X_{\text{вых}}$ , и ее производными  $X^l_{\text{вых}}$ ,  $X^n_{\text{вых}}$  и т.д. Если эти величины откладывать по осям координат, то можно охарактеризовать ход процесса с любой точностью в  $n$ -мерном пространстве состояний – фазовом пространстве.

Точку с координатами  $X_{\text{вых}}$ ,  $X^l_{\text{вых}}$ ,  $X^n_{\text{вых}}$  и т.д., характеризующими состояние системы в данный момент времени, называют **изображающей точкой**, а линию, по которой она перемещается при изменении состояния во времени – **фазовой траекторией**. Каждой группе начальных условий соответствуют своя фазовая траектория, совокупность которых составляет **фазовый портрет**.

Метод фазового пространства наиболее удобен для систем второго порядка, при этом фазовое пространство представляется фазовой плоскостью, по осям которой откладываются  $X_{\text{вых}}$  и  $X^l_{\text{вых}}$ . Фазовая траектория затухающего колебательного процесса, например, имеет следующий вид:

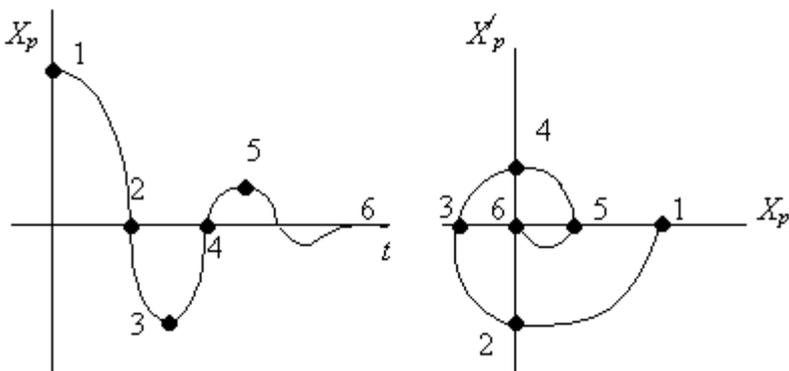


Рис. 9.6. Переходная характеристика и фазовая траектория

Если построить аналогичную траекторию для расходящегося процесса, то получим, что траектория фазовая, начинаясь с начала координат, расходуется по спирали, а для системы, находящегося на границе устойчивости, в которой совершаются незатухающие колебания, фазовая траектория представляет собой замкнутую кривую - эллипс.

#### Свойства фазовой плоскости

1. В случае, если интересующая нас величина откладывается по оси абсцисс, а ее производная – по оси ординат, то изображающая точка всегда движется в верхней полуплоскости слева направо, в нижней – справа налево.

2. Фазовые траектории пересекают оси координат под прямым углом.

3. Состояние покоя системы (точка б) характеризуется равенством нулю  $X_p$  и  $X'_p$  и изображается особой точкой (**устойчивый фокус**) или в некоторых случаях отрезком на оси  $X_p$  – **отрезок покоя** (в релейных САУ отрезок покоя равен зоне нечувствительности реле).

4. Устойчивому п.п. соответствует фазовая траектория, скользкая к началу координат или к отрезку покоя, неустойчивому – удаляющаяся от начала координат. Периодическому процессу соответствует замкнутая фазовая траектория, называемая **предельным циклом**. Предельный цикл может быть **устойчивым** или **неустойчивым** и характеризует наличие или отсутствие автоколебательного режима.

По графику устойчивого предельного цикла можно определить параметры **автоколебательного режима**:  $\omega = \frac{X_p}{X'_p}$ ;  $A = X_p$

Фазовый портрет НЛН системы, обладающей кусочно-линейной или разрывной характеристикой, состоит из нескольких областей с различными фазовыми траекториями. Линии, отделяющие эти области, называются **линиями переключения**.

### Вывод уравнения фазовой траектории (пример)

Структурная схема типовой релейной САУ без дополнительной стабилизации приведена ниже.

Допущения:

- 1) все элементы, кроме электрического двигателя, безынерционны;
- 2) соблюдается условие  $T_3 \ll T_m$ , т.е. у двигателя одна электро-механическая постоянная времени.

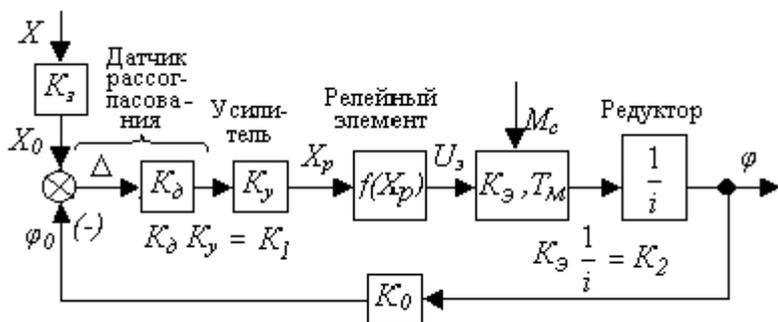


Рис. 9.7. Структурная схема типовой релейной САУ

Уравнение динамики выходного вала ОУ

$$T_m \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{d\varphi}{dt} = \frac{K_2}{i} U_3 - \frac{1}{Ci} M_c, \quad (9.1)$$

где  $K_3$  – коэффициент передачи двигателя по управляющему воздействию,

$$K_3 = \frac{1}{C_e \Phi} = \frac{1}{\sqrt{9,81CR}}$$

$C$  – коэффициент передачи двигателя по возмущению, определяемый по выражениям

$$C = k' \Phi^2 = \frac{M_n}{2\omega_0} \frac{U}{U_3} = \frac{M_n}{\omega_{xx}}.$$

Из структурной схемы видно, что напряжение на реле

$$\begin{aligned} U_p &= K_1 \Delta_0 = K_1 (X_0 - \varphi_0) = K_1 (K_3 X - \varphi_0) = K_1 (K_3 X - K_0 \varphi) = \\ &= K_1 K_0 \left( \frac{K_3}{K_0} X - \varphi \right) = K_1 K_0 (\varphi_3 - \varphi) = K_1 K_0 \Delta, \end{aligned} \quad (9.2)$$

Таким образом, срабатывание и отпускание реле, а следовательно и двигателя, зависит от величины и знака  $\Delta$ , поэтому, чтобы перейти к уравнению всей замкнутой системы, необходимо знать зависимость  $U_3$  от  $\Delta$ , например, в виде  $U_3(\Delta)$ , где значение рассогласования

$$\Delta = \frac{K_3}{K_0} X - \varphi.$$

Функция  $U_3(\Delta)$  определяется характеристикой НЛН элемента, в частности, может быть равна  $(\pm B; 0)$ .

Подставляя в (9.1)  $U_3(\Delta)$  и  $\varphi$  получим окончательно

$$T_m \frac{d^2 \Delta}{dt^2} + \frac{d\Delta}{dt} = \frac{K_3}{K_0} \left( T_m \frac{d^2 X}{dt^2} + \frac{dX}{dt} \right) - \frac{S_3}{i} U_3(\Delta) + \frac{M_c}{Ci}, \quad (9.3)$$

Правая часть (9.3)

$$F(X, \Delta) = \frac{K_3}{K_0} \left( T_m \frac{d^2 X}{dt^2} + \frac{dX}{dt} \right) - \frac{S_3}{i} U_3(\Delta) + \frac{M_c}{Ci}$$

может принимать разные, но постоянные значения в функции от  $X$  и  $\Delta$ , и они не должны отражаться на общей форме решения уравнения, определяемой левой частью (9.3).

Разделение переменных и двойное интегрирование (9.3) дает

$$\frac{d\Delta}{dt} = F(X, \Delta) + C_1 e^{-\frac{t}{T_M}}, \quad (9.4)$$

$$\Delta = F(X, \Delta) + C_1 e^{-\frac{t}{T_M}} + C_2, \quad (9.5)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  определяются из начальных условий: при  $t=0$   $\Delta=(\Delta_*)$ ;

$\frac{d\Delta}{dt} = \left(\frac{d\Delta}{dt}\right)_*$  – параметры начальной точки любого участка траектории.

Для этих начальных условий из (9.4) имеем

$$\left(\frac{d\Delta}{dt}\right)_* = F(X, \Delta) + C_1 \cdot 1, \text{ откуда } C_1 = \left(\frac{d\Delta}{dt}\right)_* - F(X, \Delta),$$

а из (9.5) значение

$$\Delta_* = -C_1 T_M \cdot 1 + C_2, \text{ откуда получим}$$

$$C_2 = (\Delta)_* + C_1 T_M = (\Delta)_* + T_M \left[ \left(\frac{d\Delta}{dt}\right)_* - F(X, \Delta) \right].$$

Подставив эти значения в (9.4) и (9.5) и исключив время  $t$ , определяем уравнение фазовой траектории

$$\Delta - \Delta_* + T_M \left[ \frac{d\Delta}{dt} - \left(\frac{d\Delta}{dt}\right)_* \right] - T_M F(X, \Delta) \ln \frac{\left(\frac{d\Delta}{dt}\right)_* - F(X, \Delta)}{\frac{d\Delta}{dt} - F(X, \Delta)} = 0, \quad (9.6)$$

где  $\Delta, \frac{d\Delta}{dt}$  – текущее значение координаты для любого участка;

$(\Delta)_*, \left(\frac{d\Delta}{dt}\right)_*$  – начальные значения.

### Учет времени срабатывания реле

В идеальном случае линии переключения вертикальны и не смещены, однако реле имеет запаздывание на время срабатывания, поэтому линия переключения идет с наклоном и сдвигом.

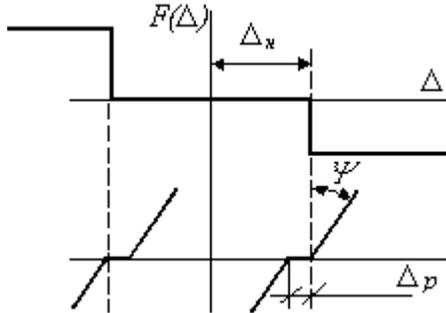


Рис. 9.8. Учет времени срабатывания реле

$$\operatorname{tg} \psi = T_m \left( e^{\frac{t_p}{T_m}} - 1 \right);$$

$$\Delta_p = \left[ t_p - T_m \left( e^{\frac{t_p}{T_m}} - 1 \right) \right] \cdot F(\Delta),$$

где  $t_p$  - время срабатывания реле.

Пример.

Построение фазовой траектории НЛН системы с релейной характеристикой  $U=f(\theta)$ , линейная часть которой описывается уравнением второго порядка  $T\theta'' + \theta' = \kappa U$ .

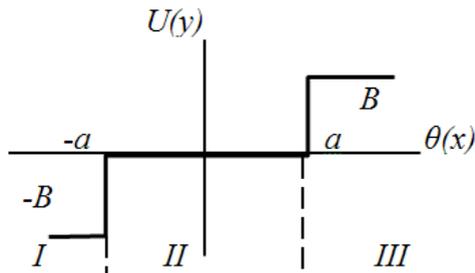


Рис. 9.9. Параметры релейной характеристики

Составляем уравнение по участкам релейной характеристики:

$$\text{Участок I: } T \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{d\theta}{dt} = -\kappa B ;$$

$$\text{Участок II: } T \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{d\theta}{dt} = 0 ;$$

$$\text{Участок III: } T \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{d\theta}{dt} = +\kappa B .$$

Далее исключают  $t$ , разделяют переменные и, интегрируя каждое уравнение, получают выражение для построения фазовых траекторий.

$$\text{Для II участка } T \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{d\theta}{dt} = T\theta'' + \theta' = Ty' + y = 0 ,$$

$$\text{где } y' = \theta'' = \frac{dy}{dt} ; y = \theta' = \frac{dx}{dt} , \text{ откуда } T y' = -y ,$$

или, подставив обозначение  $Tdy = -dx$

и проинтегрировав которое получим уравнение

$$x = -Ty + C_2 .$$

Для I и III участков

$$Ty' + y = \mp \kappa B \text{ или } T \frac{dy}{dt} = -y \mp \kappa B .$$

Так как  $y = \frac{dx}{dt}$ , то можно выразить  $dt$  и подставив в последнее уравнение, получим:

$$T \frac{dy}{dx} = -\frac{y \pm \kappa B}{y} .$$

Разделяя переменные и интегрируя, получим

$$x = +T[\kappa \ln(y + \kappa) - y] + C_1 ;$$

$$x = -T[\kappa \ln(y - \kappa) + y] - C_3 .$$

Выбрав желательный масштаб, проводят линию переключения и с учетом общих свойств фазовой плоскости строят фазовый портрет.

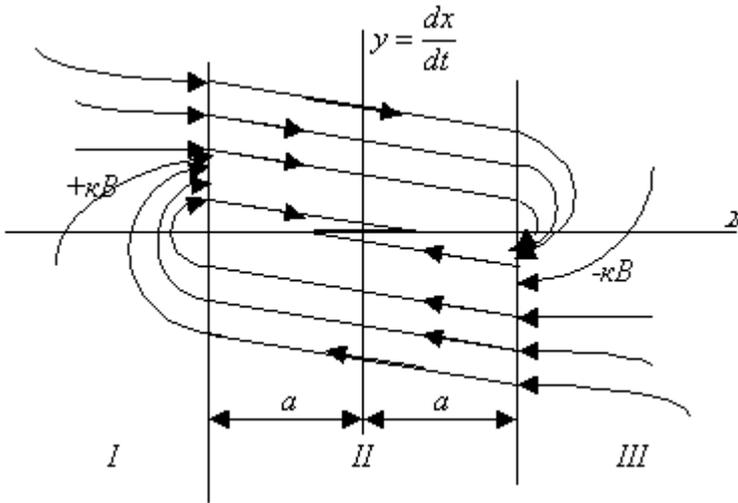


Рис. 9.10. Фазовый портрет нелинейной системы

На этом рисунке жирной линией на оси абсцисс показан так называемый «отрезок покоя».

#### 9.4. Метод гармонической линейризации

При сравнительной простоте этот метод обладает большой универсальностью и применим к различным НЛН задачам с одной и более НЛН и удобно дополняет точные методы.

Метод основан на замене НЛН элемента эквивалентным ЛН звеном с условием равенства амплитуд и фаз выходного сигнала эквивалентного ЛН звена и первой гармоники выходного сигнала релейного элемента при подаче на их вход гармонического синусоидального сигнала.

Это справедливо, когда ЛН часть достаточно инерционна и не пропускает высокочастотные гармоники.

По аналогии с ЛН звеном, для которого



$$X_2(p) = W(p)X_1(p), \quad (9.7)$$

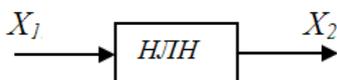
и если  $X_1 = A_1 \sin(\omega t)$ , то  $X_2 = A_2 \sin(\omega t + \varphi)$ ,

причем  $A = f(\omega) \neq f(X_1)$ ;  $\varphi = f(\omega) \neq f(X_1)$ .

АФЧХ, или комплексный коэффициент передачи

$$W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)} = R(\omega) + jJ(\omega). \quad (9.8)$$

Можно и для НЛН звена ввести понятие эквивалентного комплексного коэффициента передачи.



Пусть  $X_2 = \Phi(X_1, pX_1)$ , т.е. НЛН зависимость, причем если  $X_1 = A \sin(\omega t)$ , то первая производная  $pX_1 = A\omega \cos(\omega t)$ .

При этом на выходе будет периодический сигнал  $X_2$ , форма которой зависит от характера НЛН и несинусоидальная.

Так, например, на выходе двухпозиционного реле без зоны нечувствительности образуется сигнал прямоугольной формы, который можно разложить в ряд Фурье.

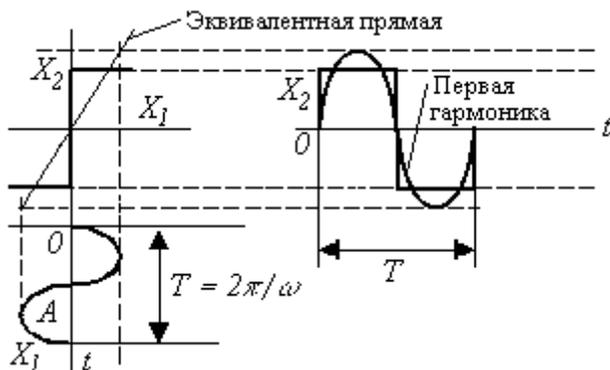


Рис. 9.11. Преобразование гармонического сигнала НЛН звеном

Эквивалентная прямая устанавливает связь между  $X_1$  и  $X_2$ , ее наклон определяется функцией  $f(A)$ .

Уравнение НЛН элемента в общем виде

$$X_2 = \Phi(X_1, pX_1) = \Phi(A \sin(\omega t), A\omega \cos(\omega t)). \quad (9.9)$$

Периодический сигнал  $X_2$  разложением в ряд Фурье представляется в виде суммы гармонических составляющих

$$X_2 = \frac{a_0}{2} + \sum_{\kappa=1}^{\infty} (a_{\kappa} \cos(\omega \kappa t) + b_{\kappa} \sin(\omega \kappa t)), \quad (9.10)$$

где  $\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A \sin(\omega t) d\omega t = 0$  для НЛН элементов с характеристикой, симметричной относительно начала координат, т.е. для нечетно-симметричных нелинейностей;

$$\text{коэффициенты } a_{\kappa} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} A \sin(\omega t) \cos(\omega \kappa t) d\omega t, \quad (9.11)$$

$$b_{\kappa} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} A \sin(\omega t) \sin(\omega \kappa t) d\omega t \quad (9.12)$$

называются коэффициентами Фурье.

Для нечетно-симметричных нелинейностей четные гармоники имеют нулевые коэффициенты, т.е.  $a_2, b_2, a_4, b_4 \dots = 0$  кроме того, если  $X_1$  – четная на интервале  $(0; 2\pi)$ , то  $b_{\kappa} = 0$ , а если нечетная, то  $a_{\kappa} = 0$ .

Зная коэффициенты  $a_{\kappa}$  и  $b_{\kappa}$ , можно определить  $A$  и  $\varphi$   $\kappa$ -той гармоники, например, первой:

$$A_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}; \quad \varphi = \arctg \frac{b_1}{a_1}. \quad (9.13)$$

Первая гармоника, имеющая частоту входной синусоиды  $X_1$ , равную  $\omega$ , обычно существенно преобладает над остальными и для НЛН элемента с нечетно-симметричной характеристикой можно определить из (9.10)

$$X_2 \approx X_2' = A_1 \cos \omega t + B_1 \sin \omega t. \quad (9.14)$$

Учитывая, что  $\sin \omega t = \frac{X_1}{A}$ ;  $\cos \omega t = \frac{pX_1}{A\omega}$  и введя обозначения

$$g(A) = \frac{b_1}{A}; \quad b(A) = \frac{a_1}{A}, \quad (9.15)$$

можно вместо (9.7) записать

$$X_2 \approx g(A)X_1 + b(A) \frac{p}{\omega} X_1, \quad (9.16)$$

Таким образом, при выполнении указанных выше предпосылок, исходное НЛН уравнение может быть заменено ЛН уравнением (9.16).

Эта операция замены называется **гармонической линеаризацией**, а  $g(A)$  и  $b(A)$  – коэффициентами гармонической линеаризации, равные функции  $f(A)$  и непостоянные в отличие от коэффициентов обычной линеаризации. Вынесем за скобки  $X_1$  в (9.16)

$$X_2 \approx \left( g(A) + b(A) \frac{p}{\omega} \right) X_1 \quad (9.17)$$

и получим аналогично ЛН элементу так называемую эквивалентную передаточную функцию звена

$$W_n(p, \omega, A) = g(A) + \frac{b(A)}{\omega} p, \quad (9.18)$$

а подстановкой  $p \rightarrow j\omega$  – эквивалентный комплексный коэффициент передачи

$$W_n(j\omega A) = J(A) = g(A) + jb(A). \quad (9.19)$$

Модуль функции (9.18)

$$|W_n(j\omega A)| = |J(A)| = A_n(\omega, A) = \sqrt{(g(A))^2 + (b(A))^2} \quad (9.20)$$

определяет отношение амплитуды 1-ой гармоники выходного сигнала  $X_2$  к амплитуде входного сигнала, а аргумент

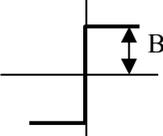
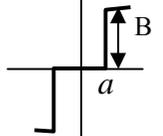
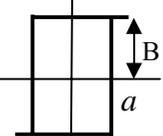
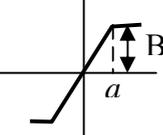
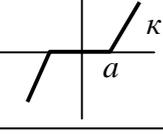
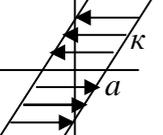
$$\arg W_n(j\omega A) = \varphi_n(\omega, A) = \operatorname{arctg} \frac{b(A)}{g(A)} \quad (9.21)$$

означает фазовый сдвиг между ними.

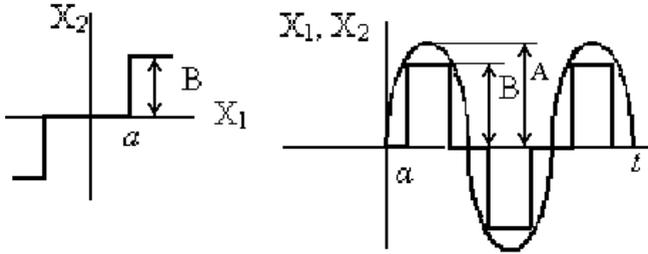
Выражения для коэффициентов линеаризации некоторых нелинейностей приведены ниже в табл.9.1.

Таблица 9.1

Коэффициенты гармонической линеаризации

$X_2 = \Phi(X_1)$	$g(A)$	$b(A)$
	$\frac{4B}{\pi A}$	0
	$\frac{4B}{\pi A^2} \sqrt{A^2 - a^2}$ при $A > a$	0
	$\frac{4B}{\pi A^2} \sqrt{A^2 - a^2}$ при $A > a$	$-\frac{4Ba}{\pi A^2}$
	$\frac{2\kappa}{\pi} \left( \arcsin \frac{a}{A} + \frac{a}{A^2} \sqrt{A^2 - a^2} \right)$ при $A > a$	0
	$\kappa - \frac{2\kappa}{\pi} \left( \arcsin \frac{a}{A} + \frac{a}{A^2} \sqrt{A^2 - a^2} \right)$ при $A > a$	0
	$\frac{\kappa}{\pi} \left[ \frac{\pi}{2} - \arcsin \left( 1 - \frac{2a}{A} \right) + 2 \left( 1 - \frac{2a}{A} \right) \sqrt{\frac{a}{A} \left( 1 - \frac{a}{A} \right)} \right]$ при $A > a$	$-\frac{4\kappa a}{\pi A} \left( 1 - \frac{a}{A} \right)$

Пример определения эквивалентного комплексного коэффициента передачи НЛН элемента с идеальной релейной характеристикой.



$$\sin \alpha = \frac{a}{A}.$$

$$J(A) = g(A) + jb(A).$$

Здесь  $b(A) = 0$ , т.к. характеристика симметрична относительно начала координат и однозначна, т.е. является нечетно-симметричной.

Пусть  $X_1 = A \sin \omega t$ , тогда  $\{ X_2 = J(A)X_1 = g(A)X_1$ .

Примем  $X_2 = X_2^1$ , тогда

$$g(A) = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} \Phi(X_1) \sin \omega t d\omega t.$$

При  $a < A$  значение  $X_2 = 0$ , т.е. реле еще не сработало.

Если  $a > A$ , то  $X_2 = B$ .

Вычисление интеграла можно выполнить по четверти периода с учетом вида характеристики ( $\alpha$ )

$$g(A) = \frac{4}{\pi A} \int_0^{2\pi} B \sin \omega t d\omega t = -\frac{4B}{\pi A} \cos \omega t \Big|_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4B}{\pi A} \cos \alpha.$$

Т.к.  $\sin \alpha = \frac{a}{A}$ , то  $\cos \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2}$ ,

Тогда  $g(A) = \frac{4B}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2}$  (см. в предыдущей табл 9.1).

Приведем  $g(A)$  к безразмерному виду, для чего правую часть умножим и разделим на  $\frac{A}{a}$ :

$$g(A) = \frac{4B}{\pi A} \frac{\frac{A}{a} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2}}{\frac{A}{a}} = \frac{4B}{\pi a} \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2}}{\frac{A}{a}}. \quad (9.22)$$

Введем обозначения:

$\frac{B}{a} = N$  – масштабный множитель (коэффициент) НЛН элемента;

$\frac{4}{\pi} \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{(A/a)^2}}}{A/a} = J_0\left(\frac{A}{a}\right)$  – нормированный эквивалентный комплексный коэффициент передачи (аналог АФЧХ).

Тогда (9.22) можно записать в общем виде

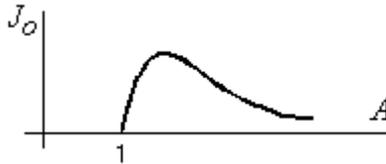
$$g(A) = NJ_0\left(\frac{A}{a}\right). \quad (9.23)$$

Функцию  $J_0\left(\frac{A}{a}\right)$  можно построить на комплексной плоскости, т.к.

его можно представить как функцию  $f\left(\frac{A}{a}\right)$

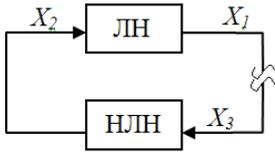
$$J_0\left(\frac{A}{a}\right) = g_0\left(\frac{A}{a}\right) + jb_0\left(\frac{A}{a}\right). \quad (9.24)$$

Ниже приведен наиболее характерный вид графика функции  $J_0\left(\frac{A}{a}\right)$



9.5. Исследование устойчивости нелинейных САУ методом гармонической линеаризации

Предварительно САУ нужно привести к следующему виду.



Пусть САУ находится на границе устойчивости, тогда  $X_1 = -X_3$  (т.е. в точке разрыва сигналы противоположны по фазе). Исходные уравнения:

$$X_1 = W(j\omega)X_2; X_2 = \Phi(X_3) = NJ_0\left(\frac{A}{a}\right)X_3;$$

$$X_3 = -X_1.$$

Совместное решение их дает уравнение

$$NJ_0\left(\frac{A}{a}\right)W(j\omega) + 1 = 0, \quad (9.25)$$

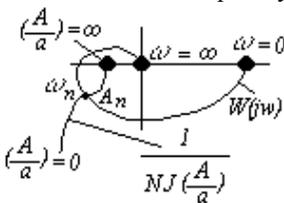
Выделив из (13) вещественную и мнимую части и приравняв их нулю, получим систему из двух уравнений с двумя неизвестными, совместным решением которых можно определить и установить параметры свободного движения.

Эту же задачу можно решить графически, для чего (9.25) представим в виде

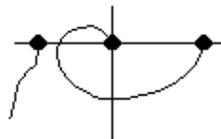
$$W(j\omega) = -\frac{1}{NJ_0\left(\frac{A}{a}\right)}$$

и построим две кривые в одном масштабе.

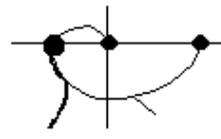
Возможны три случая:



В САУ наблюдаются устойчивые колебания с  $\omega_n$  и  $A_n$



В САУ нет колебаний, т.е. САУ устойчива



В САУ имеются неустойчивые колебания в диапазоне частот  $\omega$  и амплитуд  $A$

## 10. ИМПУЛЬСНЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

### 10.1. Общие сведения

Импульсные системы управления (СИУ) – это системы периодического дискретного действия, в которых сигнал управления через равные промежутки времени принудительно прерывается особым так называемым **импульсным элементом**.

Импульсный элемент преобразовывает непрерывный сигнал в ряд равноотстоящих друг от друга импульсов, амплитуда  $A$ , длительность  $T$  или знак  $Sign$  которых зависят от характера отклонения  $X_p$  от заданных значений в дискретные моменты формирования импульсов.

Особенности СИУ могут обеспечить в определенных случаях те или иные преимущества. Например, при регулировании и управлении медленно протекающих процессов в нескольких объектах одним регулятором по кольцевой схеме. Такие же системы можно применить при регулировании быстропротекающих процессов в телеуправлении, радиолокации и т.п.

Специальные цифровые системы также относятся к СИУ и при их анализе можно использовать те же методы, что рассмотрены ниже.

Общая блок – схема импульсной системы приведена ниже.

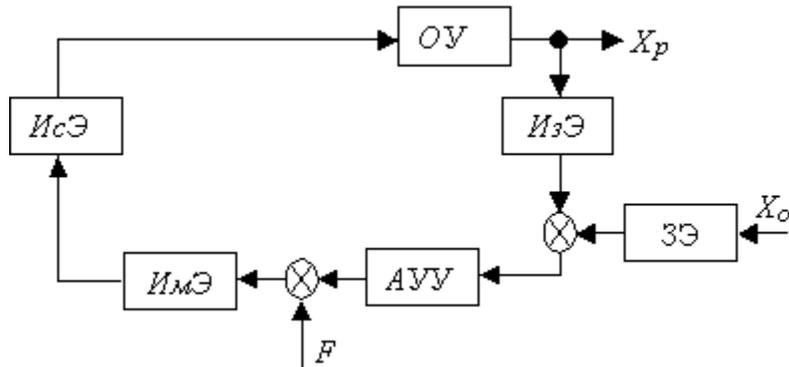


Рис. 10.1. Общая блок-схема импульсной САУ (ИСАУ)

В зависимости от признака импульса различают СИУ с изменением  $A$  – амплитудно-импульсная модуляция (АИМ),  $T$  – широтно-импульсная модуляция (ШИМ) и с изменением знака (ЗПМ).

В линейных ИСАУ параметры импульсов имеют линейные соотношения со значением модулируемой функции, а в НЛН – нелинейное

соотношение между ними.

Техническое исполнение ИмЭ может быть различное – электро-механическое, пневмомеханическое, электромагнитное, релейное, электронные и т.п. Например, электро-механическое исполнение – плоская падающая дужка (АИМ), скошенная падающая дужка с изоляцией (ШИМ), плоская падающая дужка с изоляцией (ЗПМ).

Преобразование непрерывного сигнала в дискретный называется **квантованием**. Различают три вида квантования: по уровню, по времени, по уровню и по времени (совместно).

Квантование по уровню заключается в фиксации дискретных значений непрерывного сигнала. Смежные дискретные значения отличаются на величину  $\Delta X$ , называемой **шагом квантования**.

Переход от одного уровня к другому происходит в моменты времени, когда непрерывный сигнал достигает очередного фиксированного значения или когда сигнал проходит середину интервала.

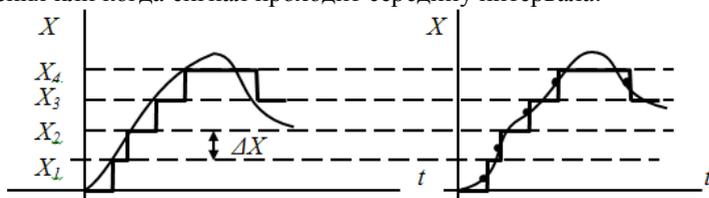


Рис. 10.2. Способы квантования сигнала по уровню

Квантование по времени заключается в фиксации значений непрерывного сигнала в равноотстоящие дискретные моменты времени, определяемым интервалом дискретности, интервалом регулирования или периодом повторения. При этом квантованный сигнал может иметь ступенчатую форму или представлять собой последовательность импульсов.

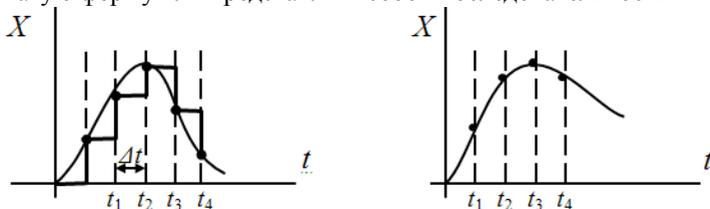


Рис. 10.3. Способы квантования сигнала по времени

При совместном квантовании по уровню и времени фиксируются дискретные по уровню значения, ближайшие к значениям непрерывного сигнала в дискретные моменты времени.

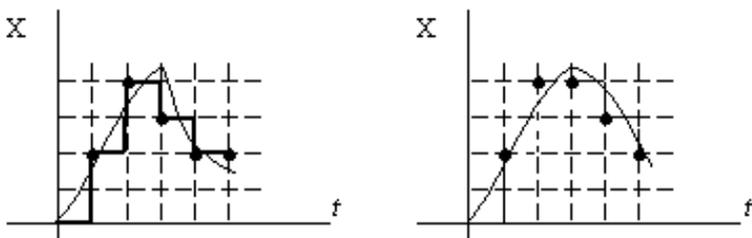


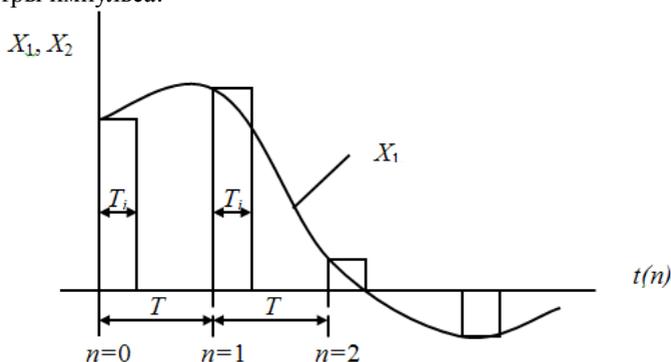
Рис. 10.4. Совместное квантование сигнала по уровню и времени

Все дискретные элементы можно разделить на 3 класса:

- релейные, в них квантование осуществляется по уровню;
- импульсные, в которых квантование осуществляется по времени;
- цифровые, где квантование ведется по уровню и времени.

### Параметры импульса

При использовании импульсных функций определяют следующие параметры импульса.



$X_1$  - входная величина ИмЭ;

$X_2$  - выходная величина, равная последовательности импульсов ИмЭ;

$t = nT$  - текущее время съема импульсов;  $T_i$  - длительность импульса;

$T$  - интервал регулирования;  $\frac{T_i}{T} = \gamma$  - скважность импульса,

причем  $0 \leq \gamma \leq 1$ . При  $\gamma \rightarrow 1$  - САУ линейная непрерывная (в пределе).

## 10.2. Понятие о дискретных (решетчатых) функциях

При расчете импульсных САУ используют для их математического описания **разностные уравнения**, а для решения таких уравнений – метод прямого и обратного дискретного преобразования Лапласа или так называемое **z-преобразование**. Для получения разностных уравнений (аналога дифференциальных уравнений) введем некоторые понятия.

**Решетчатой** называется функция, которая существует только при дискретных равноотстоящих значениях независимой переменной; между ними функция равна нулю.

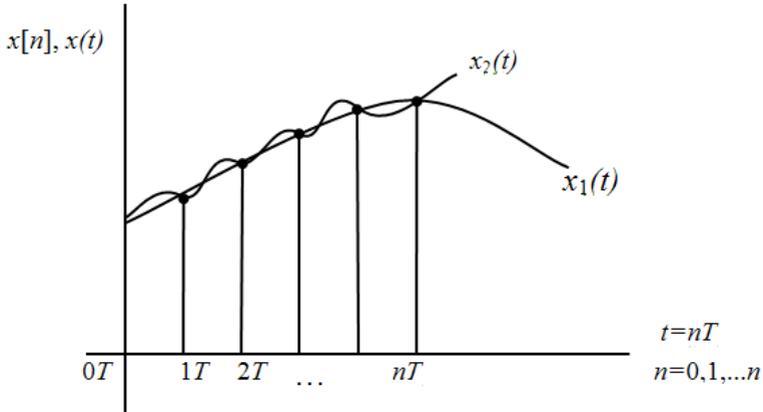


Рис.10.5. Получение решетчатой функции

Как видно из графика, двум функциям  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  соответствует одна решетчатая функция  $x[nT]$ . Если принять

$$t = nT + \varepsilon T \quad (0 \leq \varepsilon < 1),$$

то можно однозначно описать исходную функцию и получить требуемое множество решетчатых функций  $x[nT + \varepsilon T]$ .

Это так называемые **смещенные решетчатые функции**. Решетчатая функция обозначается  $x[nT]$  или  $f[nT]$ , но можно ввести нормированное время  $\bar{t} = \frac{t}{T}$  и решетчатую функцию обозначить  $x[n]$  или  $f[n]$ , а смещенную решетчатую функцию  $x[nT, \varepsilon T]$  при  $\varepsilon = 0$  обозначить  $x_1[n]$ , т.е. использовать одинаковое обозначение.

Общее выражение нормированной решетчатой функции

$$x[n] = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}.$$

Тогда, например, единичная ступенчатая функция запишется как последовательность  $x[n] = \{1, 1, \dots, 1\}$ ,

линейная функция  $x[n] = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ ,

экспоненциальная функция  $x[n] = \{1, e^{\pm a}, \dots, e^{\pm na}\}$ .

Для решетчатых функций вводятся понятия конечных разностей и сумм (аналогов дифференциала и интеграла).

Скорость изменения дискретной нормированной функции характеризуется конечной разностью - аналогом дифференциала первого порядка

$$\Delta x[n] = x[n+1] - x[n],$$

второго порядка

$$\Delta^2 x[n] = \Delta x[n+1] - \Delta x[n],$$

m-го порядка

$$\Delta^m x[n] = \Delta^{m-1} x[n+1] - \Delta^{m-1} x[n].$$

Операция, обратная вычислению разностей, является аналогом интеграла

$$X[n] = \sum_{i=0}^{n-1} x[i],$$

где  $X[n]$  - первообразная решетчатой функции  $x[n]$ .

Уравнение в конечных разностях связывает  $x[n]$  и её разности с выходной величиной

$$a_m \Delta^m x[n] + a_{m-1} \Delta^{m-1} x[n] + \dots + a_1 \Delta x[n] + a_0 x[n] = F(n), \quad (10.1)$$

где  $x[n]$  – искомая решетчатая функция;

$a_i$  – постоянные коэффициенты;

$F(n)$  – заданная дискретная функция (возмущающее или управляющее воздействие).

По аналогии с обычным дифференциальным уравнением, уравнение (1) при  $F(n) = 0$  называется **однородным**.

Решение (1) можно получить прямым методом, для чего надо знать начальное значение дискретной функции и всех её разностей.

Рациональнее воспользоваться при исследовании импульсных САУ  $z$ -преобразованием

$$X^*(z) = L_z \{x[n]\} = \sum_0^{\infty} x[n] \cdot z^{-n}, \quad (10.2)$$

где интегрирование ведется в плоскости  $z = e^{pT} = e^q$ .

Если интегрирование ведется в плоскости  $q$ , то такое преобразование называется просто дискретным преобразованием Лапласа.

$$X^*(z) = L_q \{x[n]\} = \sum_0^{\infty} x[n] \cdot z^{-q \cdot n}, \quad (10.3)$$

где  $q = \sigma + j\omega = pT$  – произвольное комплексное число.

### 10.3. Уравнения и передаточные функции ИСАУ

По аналогии с непрерывными САУ здесь вводятся передаточные функции, для чего структурную схему приводят к виду на рис. Тогда передаточная функция разомкнутой ИСАУ

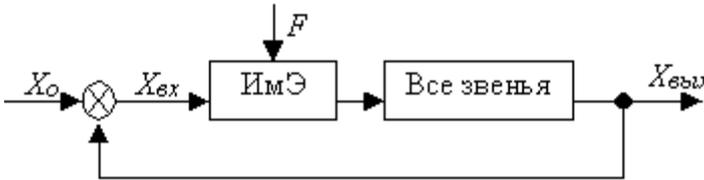


Рис. 10.6. Блок-схема импульсной САУ

Аналог передаточной функции

$$K^*(q) = \frac{X_{\text{вых}}^*(q)}{X_{\text{вх}}^*(q)}, \quad (10.4)$$

т.е. за вход ИСАУ принимается вход ИмЭ.

Как видно из структурной схемы

$$X_{\text{вх}}[n] = X_0[n] - X_{\text{вых}}[n], \quad (10.5)$$

или в изображениях

$$X_{\text{вх}}^* [q] = X_0^* [q] - X_{\text{вых}}^* [q]. \quad (10.6)$$

Уравнение (10.6) называется **уравнением замыкания**.

Используя уравнения (10.3) - (10.5) и исключив  $X_{\text{вх}}^*(q)$ , получим

$$X_{\text{вых}}^*(q) = \frac{K^*(q)}{1 + K^*(q)} X_0^*(q). \quad (10.7)$$

Подставив  $X_{\text{вх}}^*(q)$  из (10.7) в (10.5) получим уравнение для изображения входного сигнала ИмЭ (сигнала ошибки) замкнутой ИСАУ

$$X_{\text{вх}}^*(q) = \frac{1}{1 + K^*(q)} X_0^*(q). \quad (10.8)$$

Таким образом, из (10.8) можно получить передаточную функцию замкнутой ИСАУ

$$W_z^*(q) = \frac{K^*(q)}{1 + K^*(q)}.$$

#### 10.4. Частотные характеристики ИСАУ

Если в выражении передаточной функции подставить

$$q \rightarrow j\Omega,$$

где  $\Omega = \omega T$  – относительная частота, то получим соответствующие частотные характеристики.

Так как  $W^*(q)$  является функцией  $e^q$  и так как  $e^{q+2\pi nj} = e^q$ , то  $W^*(q)$  является периодической функцией вдоль мнимой оси. Полюсы, расположенные в полосе  $-\pi < \text{Im} q < +\pi$  называются **основными**, поэтому частотные характеристики ИСАУ полностью определяются в диапазоне  $0 \leq \Omega \leq \pi$ .

Построение частотной характеристики ИСАУ производят в соответствии с видом модуляции, по уравнениям передаточных функций с заменой  $q \rightarrow j\Omega$ .

### 10.5. Устойчивость ИСАУ

Как известно, для устойчивости САУ необходимо и достаточно, чтобы свободные составляющие выходной величины стремились к нулю

$$X_c(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0.$$

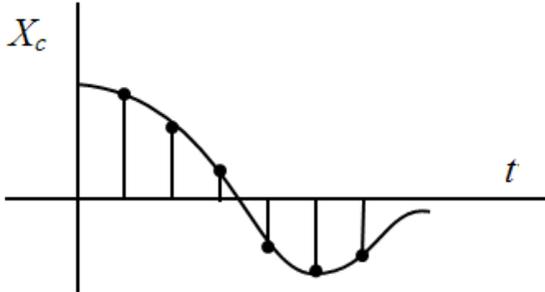


Рис. 10.7. Свободная составляющая переходного процесса

Устойчивость ИСАУ можно определить по разностным уравнениям (аналогично дифференциальному уравнению) или по частотным характеристикам с использованием аналогов критериев устойчивости.

Если переходные процессы в ИСАУ описываются разностным уравнением

$$a_0 x[m+n] + a_1 x[n+m-1] + \dots + a_{m-1} x[n+1] + a_m x[n] = 0, \quad (10.9)$$

где  $a_0, a_1, \dots, a_m$  – постоянные коэффициенты;  $x$  – отклонение регулируемой величины от задания.

Общее решение имеет вид

$$x_c[n] = \sum_{i=1}^n A_i z_i^n,$$

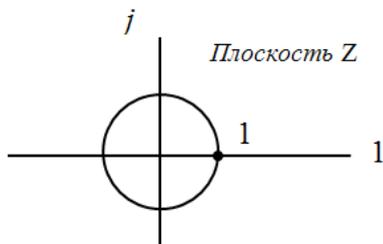
где  $A_i$  – постоянные, определяемые из начальных условий;  $z_i$  – корни характеристического уравнения

$$a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \dots + a_{m-1} z + a_m = 0. \quad (10.11)$$

Из этого следует, что для того, чтобы ИСАУ была устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы все корни уравнения (10.11) по модулю были меньше 1, т.е. находились внутри круга единичного радиуса с центром в начале координат.

Это следует из того, что предел свободной составляющей стремится к нулю

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_i[n] = 0 \quad \text{при } |z_i| < 1, i = 1, \dots, n.$$



Следовательно, в этом случае для определения устойчивости необходимо производить вычисление корней характеристического уравнения.

Эту трудоемкую процедуру можно избежать при использовании аналогов критериев устойчивости линейных систем.

Рассмотрим **аналог критерия Гурвица**.

Характеристическое уравнение (9) подстановкой вида

$$z = \frac{p+1}{p-1}, \quad (10.11)$$

приводится к уравнению

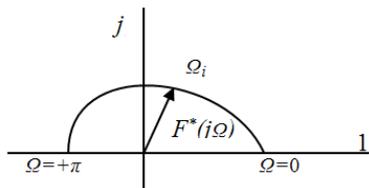
$$b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_{m-1} p + b_m = 0, \quad (10.12)$$

При этом подстановка (10.11) преобразует площадь внутри единичной окружности в плоскости  $z$  в левую полуплоскость плоскости корней  $p$ , после чего к (10.12) применяются известные условия критерия Гурвица и судят об устойчивости ИСАУ.

**Аналог критерия Михайлова** более целесообразен.

Подставим в характеристическое уравнение (10.11)  $z = e^{j\Omega}$  и получим

$$F^*(j\Omega) = a_0(e^{j\Omega})^m + a_1(e^{j\Omega})^{m-1} + \dots + a_0e^{j\Omega} + a_m = 0. \quad (10.13)$$



Задавая угловой частотой  $\Omega$  от 0 до  $+\pi$  строим годограф, приведенный ниже.

Вектор  $F^*(j\Omega)$  при изменении  $\Omega$  от 0 до  $+\pi$  описывает своим концом годограф Михайлова.

Практическая формулировка критерия:

*ИСАУ устойчива, если при изменении  $\Omega$  от 0 до  $\pi$  годограф Михайлова, начинаясь с вещественной положительной полуоси, последовательно обходит против часовой стрелки  $2t$  квадратов, где  $t$  – степень характеристического уравнения замкнутой ИСАУ.*

#### 10.6. Построение переходного процесса в ИСАУ и оценка качества

Для построения и исследования переходных процессов импульсных систем используется:

- 1) метод, основанный на дискретном преобразовании Лапласа по уравнению замкнутой системы;
- 2) метод, основанный на использовании частотных характеристик, т.е. по аналогии с такими же методами для непрерывных систем.

Для оценки качества ИСАУ используется также прямые и косвенные методы.

Для улучшения динамических свойств ИСАУ можно воспользоваться методами как непрерывной, так и импульсной коррекции. Импульсная коррекция обычно выражается во введении в состав ИСАУ дополнительной импульсной цепи (так называемого **импульсного фильтра**), преобразующей входные импульсы в соответствии с требуемым законом преобразования.

## 11. ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ И АДАПТИВНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

### 11.1. Общая постановка задач оптимального управления

САУ называется **оптимальной**, если она среди всех систем рассматриваемого класса осуществляет наилучшее в определенном смысле управление. Признак, по которому производится сравнительная оценка возможных вариантов управления и выбор наилучшего варианта, называется **критерием оптимальности (КО)**. В большинстве задач управления КО удается записать в математической форме в виде некоторой скалярной величины  $Q$ , которая при наилучшем варианте управления достигает экстремального ( $max$  или  $min$ ) значения:

$$Q = \text{extremum}, \quad (11.1)$$

КО (11.1) представляет собой математическую формулировку цели управления, поэтому величину  $Q$  называют **целевой функцией**.

В качестве  $Q$  могут быть приняты различные технические и экономические показатели функционирования как самого объекта, так и всей системы в целом: производительность установки, затраты энергии на производственный процесс, потери продукции, длительность переходного процесса и т.п. «простые» критерии, а также критерии среднего квадрата ошибки, интегральный критерий, минимальный критерий и др.

Приведенные примеры показывают, что все КО можно объединить в 3 группы:

- 1 - функции выгоды, которые надо максимизировать;
- 2 - функции потерь, которые надо минимизировать;
- 3 - функции компромисса (минимаксные).

У многомерного объекта с несколькими входными и выходными воздействиями скалярная величина КО  $Q$  зависит в общем случае от вектора состояния  $X$  и векторов задающего  $X_3$ , управляющего  $Z$  и возмущающего  $F$  воздействий, т.е.

$$Q = Q(X, X_3, Z, F), \quad (11.2)$$

Если компонентами векторов  $X_1, X_3, Z, F$  являются установившиеся детерминированные значения переменных, то говорят о **статической оптимизации** (т.е. оптимизация статического режима).

Если же указанные переменные изменяются во времени, то приходится иметь дело с **динамической оптимизацией**.

Таким образом, при статической оптимизации величина  $Q$  является функцией нескольких скалярных величин, а при динамической оптимизации – функционалом значения  $Q$  и определяется видом вектор – функций  $X(t)$ ,  $X_3(t)$ ,  $Z(t)$  и  $F(t)$ :

$$Q = Q(X(t), X_3(t), Z(t), F(t)). \quad (11.3)$$

Обычно функционал (11.3) представляет собой определенный интеграл, вычисляемый в интервале управления от 0 до  $t_n$

$$Q = Q(X(t), X_3(t), Z(t), F(t)), \quad (11.4)$$

где  $Q(X(t), X_3(t), Z(t), F(t))$  – скалярная функция, вид которой определяется целью управления.

Простейшими интегральными функционалами, зависящими от вида только одной скалярной функции, являются интегральные оценки качества, например

$$I = \int_0^{\infty} \left[ \varepsilon^2 + T^2 \left( \frac{d\varepsilon}{dt} \right)^2 \right] dt .$$

Если целью управления является получение максимального быстрого действия, то полагают  $Q = 1$  и функцию (11.4) записывают в виде

$$Q = \int_0^{t_n} dt = t_n . \quad (11.5)$$

Если при управлении одномерным объектом необходимо затратить минимум энергии на заданное перемещение, то в функцию (11.4) входит квадрат управляющего воздействия

$$Q = \int_0^{t_n} (Z(t))^2 dt . \quad (11.6)$$

Математическая постановка задачи оптимального управления заключается в следующем. Известно математическое описание объекта, например, в виде системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dX}{dt} = f(X(t), Z(t), F(t)). \quad (11.7)$$

Требуется найти такой закон управления

$$Z(t) = A_x(X(t), X_3(t), F(t)), \quad (11.8)$$

который обеспечивает экстремум (например,  $\min$ ) величины  $Q$

$$Q = \min \quad (11.9)$$

При этом должны быть соблюдены определенные ограничения на выходные переменные  $X_1, X_2, \dots, X_n$  и управляющие воздействия  $Z_1, Z_2, \dots, Z_k$ , заданные в виде неравенств:

$$\left. \begin{array}{l} |X_i| \leq X_{jm} \\ |Z_l| \leq Z_{lm} \end{array} \right\}, \quad (11.10)$$

где  $X_{jm}, Z_{lm}$  – предельные допустимые значения переменных, например, допустимый ток двигателя.

Такой постановке задачи оптимального управления соответствует обобщенная функциональная схема, приведенная ниже.

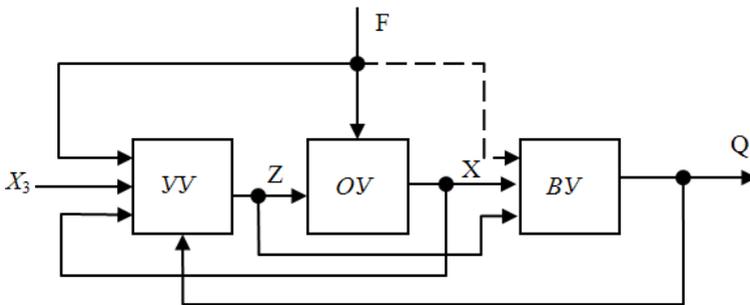


Рис. 11.1. Общая блок-схема оптимальной САУ

Задаче оптимального управления можно дать наглядную геометрическую интерпретацию в фазовом пространстве: объект управления ОУ необходимо перевести из известного состояния (т.  $x(0)$ ) в заданное (т.

$x(t_n)$ ). Это можно сделать, как правило, по нескольким траекториям, соответствующим различным формам управляющей вектор-функции  $Z(t)$ , причем при каждом варианте управления будет свое значение КО и оптимальному  $Z(t)$  будет соответствовать экстремальное или оптимальное значение  $Q_{opt}$ .

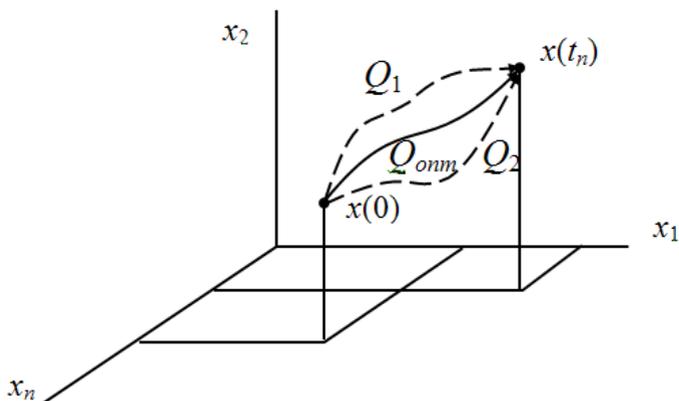


Рис. 11.2. Геометрическая интерпретация оптимального управления

Оптимальная траектория  $x(t)$  обладает важным свойством: она оптимальна не только в целом – в интервале  $[0, t_n]$ , но и каждый её участок в промежуточных точках также оптимален. Это положение было сформулировано американским математиком Р. Беллманом в виде **принципа оптимальности**: оптимальное управление определяется лишь состоянием системы в текущий момент времени и не зависит от того, как система пришла в это состояние. Поэтому решение задачи ведут от конца к началу. Этот принцип лежит в основе **метода динамического программирования** Беллмана.

Если воздействия в САУ недетерминированы, то в качестве  $Q$  берут его статистическую характеристику, например, математическое ожидание МО, и такая оптимизация называется **статистической**.

Если статические характеристики ОУ вообще неизвестны, то применяют **игровые** стратегии управления, в которых используют, как правило, **минимаксный критерий**.

При создании оптимальной САУ стремятся упростить математическое описание объекта или реализовать алгоритм функционирования приближенно, тогда получают **квазиоптимальные системы**.

## 11.2. Системы, оптимальные по быстродействию

Управление, оптимальное по быстродействию, может быть осуществлено как в разомкнутой, так и в замкнутой системах.

В разомкнутой системе программное устройство ПУ выдает заранее разработанную программу изменения управляющего воздействия

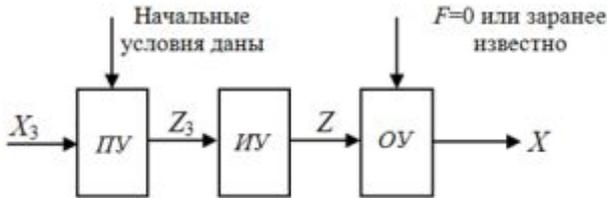


Рис. 11.3. Разомкнутая система, оптимальная по быстродействию

(программ может быть несколько для различных начальных условий), а в замкнутых системах вычислительное устройство ВУ в зависимости от текущих фазовых координат объекта вырабатывает  $Z(x)$  по определенному алгоритму.

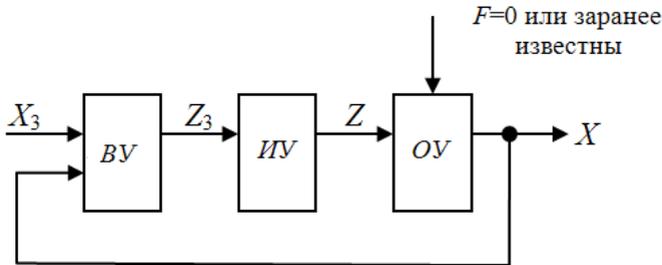


Рис. 11.4. Замкнутая система, оптимальная по быстродействию

Более общим методом решения задачи построения разомкнутой оптимальной системы является принцип максимума Л.С. Понтрягина. Сущность его заключается в следующем.

Постановка задачи в общем виде дана в формулах (11.7) – (11.10).

Введем дополнительную фазовую координату  $x_0(t)$ , характеризующую текущее значение функционала (11.4):

$$x_0(t) = Q(t) = \int_0^t Q(x_1(t), \dots, x_n(t); Z_1(t), \dots, Z_k(t)) dt, \quad (11.11)$$

С целью упрощения изложения здесь и далее принято

$$x_3(t) = 0, F(t) = 0.$$

Для этой координаты справедливо следующее дифференциальное уравнение

$$\frac{dx_0}{dt} = Q(x_1(t), \dots, x_n(t); Z_1(t), \dots, Z_\kappa(t)), \quad (11.12)$$

Вводя для функции  $Q$  обозначение  $f_0$  и присоединяя (11.12) к системе (11.7) можно записать новую систему

$$\frac{dx_j}{dt} = f_j(x_1(t), \dots, x_n(t); Z_1(t), \dots, Z_\kappa(t)), \quad (j = 0; 1; \dots; n). \quad (11.13)$$

Теперь задача оптимального управления сводится к отысканию такого решения системы (11.13), при которой дополнительная координата  $x_0(t)$  в конце движения принимают наименьшее значение  $x_0(t_n) = Q$ , а остальные переменные удовлетворяют граничным условиям (10).

Для решения задачи вводятся вспомогательные функции

$$\Psi_0(t), \Psi_1(t), \dots, \Psi_n(t),$$

которые удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{d\Psi_j}{dt} = -\sum_{i=0}^n \Psi_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \quad (j = 0; 1; \dots; n). \quad (11.14)$$

Функции  $\Psi_0, \Psi_1, \dots, \Psi_n$  можно рассматривать как компоненты некоторого вектора  $\Psi$ , который равен (по модулю) градиенту функционала  $Q$  в  $(n+1)$ -мерном фазовом пространстве и направлен в противоположную сторону. Производные

$$x'_0 = f_0; \quad x'_1 = f_1; \dots; x'_n = f_n$$

фазовых координат также можно считать компонентами вектора  $f$ , который характеризует скорость движения изображающей точки в фазовом пространстве.

Согласно принципу максимума, оптимальными считаются такие  $Z_1(t), Z_2(t), \dots, Z_\kappa(t)$ , при которых в каждый момент времени скалярное произведение векторов  $\Psi$  и  $f$  максимально, т.е.

$$H = \sum f_j = \max, \quad (11.15)$$

причем максимальное значение  $H = 0$ .

Управляющие воздействия, доставляющие максимум  $H$ , должны, очевидно, удовлетворить следующей системе уравнений

$$\frac{\partial H}{\partial Z_l} = 0, \quad (l = 1; 2; \dots; \kappa), \quad (11.16)$$

Но в этой системе уравнений содержится  $(2n + \kappa + 2)$  неизвестных,  $(n + 1)$  функции  $x_j(t)$ ,  $(n + 1)$  функций  $\sum f_j(t)$  и  $k$  функций  $Z_e(t)$ . Поэтому для отыскания  $Z_e(t)$ , необходимо еще учесть  $(n + 1)$  уравнений объекта (11.13) и  $(n + 1)$  вспомогательных уравнений (11.14). Так как функции  $f_j$  не зависят от  $\sum f_j$ , то

$$\frac{\partial H}{\partial \Psi_j} = f_j \quad \text{и} \quad \frac{\partial H}{\partial x_j} = \sum_{i=0}^n \Psi_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \quad (11.17)$$

Учитывая это можно уравнения ОУ (11.13) и вспомогательные уравнения (11.14) объединить в удобной форме:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_j}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \Psi_j} \\ \frac{d\Psi_j}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial x_j} \end{aligned} \right\} \quad (11.18)$$

( $j = 0; 1; 2; \dots; n$ )

Уравнения (11.18) называют **системой Гамильтона**, а функцию **Н – гамильтонианом**.

Если целью оптимизации является максимальное быстроедействие, то, как сказано выше,  $H = F = 1$  и функция  $H$  имеет вид

$$H = \sum_{j=1}^n \Psi_j f_j. \quad (11.19)$$

*Пример.* Пусть имеется следящая система, в которой допустимое ускорение серводвигателя создается управляющими воздействиями  $Z_j$ , описывается уравнением ( $x \equiv \varphi$ )

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \kappa_0 z,$$

при ограничении  $|z| \leq 1$  (в общем случае  $|z| \leq A$ , т.к.  $1 \cdot U = \kappa \cdot U$ ).

Обозначив  $x = x_1$  и  $\frac{dx}{dt} = x_2$  можно записать уравнения

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \frac{dx_2}{dt} = \kappa_0 z, \frac{dx_0}{dt} = 1.$$

Требуется определить оптимальный закон управления  $z$  так, чтобы  $x$  из заданного состояния  $x_0$  в фазовой плоскости  $(x_1, x_2)$  было осуществлено перемещение в начало координат (в состоянии покоя  $x=0, \frac{dx}{dt} = 0$ ) за минимальное время, т.е. обеспечить максимальное быстродействие.

Гамильтониан (11.19) в данном случае равен

$$H = \Pi_0 + \Pi_1 x_2 + \Pi_2 \kappa_0 z.$$

$H$ , как видно, линейно зависит от  $z$  и, следовательно, принимает свои наибольшие значения лишь тогда, когда

$$z(t) = +z_m \text{ или } z(t) = -z_m.$$

Очевидно, что при  $\Pi_2(t) > 0$  управляющее воздействие должно быть  $+z_m$ , а при  $\Pi_2(t) < 0$  должно быть  $-z_m$ .

Такой закон управления можно записать с помощью знака *sign*:

$$z(t) = z_m \cdot \text{sign} \Psi_2(t).$$

Вспомогательные функции  $\Pi_0, \Pi_1$  и  $\Pi_2$  можно найти по уравнениям (11.14) и (11.18)

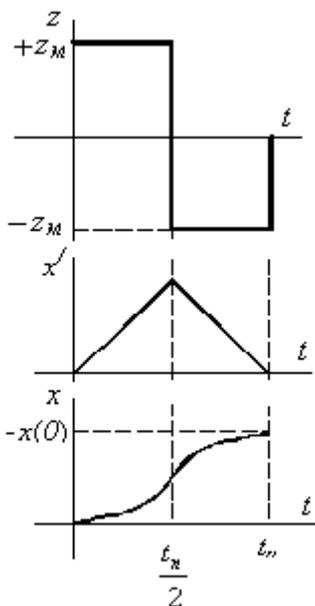
$$\frac{d\Psi_0}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_0} = 0; \quad \frac{d\Psi_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0; \quad \frac{d\Psi_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\Psi_1.$$

Решения этих уравнений будут в виде:

$$\Pi_0 = C_0 = \text{Const}; \quad \Pi_1 = C_1 = \text{Const}; \quad \Pi_2 = C_2 - C_1 t.$$

Отсюда окончательно закон оптимального управления

$$z(t) = z_m \cdot \text{sign}(C_2 - C_1 t).$$



Так как функция  $(C_2 - C_1 t)$  меняет знак не более одного раза, то управляющее воздействие (11.7) представляет кусочно-постоянную функцию, имеющую не более двух интервалов постоянства и принимающую только предельные значения  $+z_m$  и  $-z_m$ . Момент переключения управляющего воздействия зависит от начальных условий  $x_{10}$  и  $x_{20}$ . В наиболее распространенном частном случае, когда  $x_{20} = 0$ , оба интервала равны друг другу и в сумме составляют

$$t_n = 2 \sqrt{\frac{x_{10}}{\kappa_0 z_m}}.$$

Полученный закон управления вытекает также из следующих соображений. Наибыстрейшее перемещение объекта на

величину  $x_{10} = x(0)$  произойдет, если в начале осуществить разгон с максимальным допустимым ускорением  $+x_m''$ , а затем, после прохождения середины пути, начать торможение с максимальным допустимым замедлением  $-x_m''$ . При этом скорость перемещения изменяется по линейному закону  $x'$ , а кривая  $x(t)$  состоит из ветвей двух парабол.

Синтез управляющего устройства, реализующего максимальное быстродействие в замкнутой системе, осуществим с помощью метода фазовой плоскости.

Исключая из первого уравнения примера величину  $dt$ , получим дифференциальное уравнение

$$x_2 dx_2 = \kappa_0 z dx_1,$$

проинтегрировав которое находим уравнения фазовых траекторий:

при  $z = +z_m$  величина  $x_1 = \frac{1}{2} \frac{x_2^2}{\kappa_0 z_m} + C$  ;\*

при  $z = -z_m$  соответственно  $x_1 = -\frac{1}{2} \frac{x_2^2}{\kappa_0 z_m} + C^{**}$ .

На фазовой плоскости  $x_1; x_2$  уравнению  $*$  соответствует семейство парабол, расположенных справа от вершины, а уравнению  $**$  – слева от вершины.

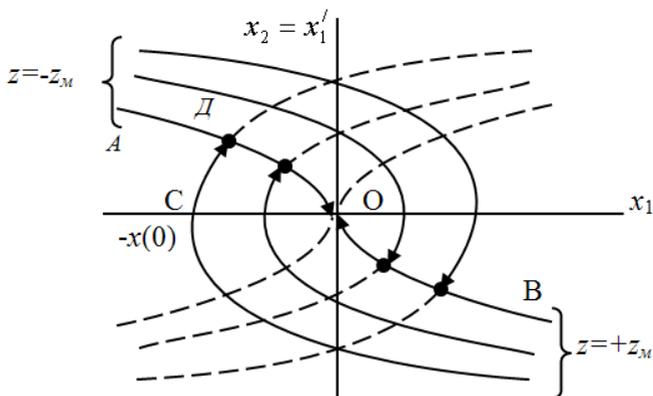


Рис. 11.5. Фазовые траектории оптимальной системы

Смещение вершин парабол по оси  $x_1$  определяется постоянными интегрирования  $C$ , зависящими от начальных условий  $x_{10}$  и  $x_{20}$ . Так как по условию задачи процесс должен закончиться в начале координат, то на последнем этапе процесса изображающая точка будет двигаться обязательно по одной из двух парабол, проходящих через начало координат. Причем, согласно общему свойству фазовых траекторий, движение может происходить лишь по одной из ветвей: при  $x_2 > 0$  по ветви АО, а при  $x_2 < 0$  по ветви ВО.

Эти две ветви, принадлежащие параболам из разных семейств, можно описать одним уравнением (т.к.  $C = 0$ ):

$$x_1 = -\frac{1}{2} \frac{x_2^2}{\kappa_0 z_m} \text{sign}(x_2).$$

Если в начальном состоянии изображающая точка расположена выше линии АОВ, то под воздействием  $z = -z_m$  система будет двигаться к завершающему участку ВО по верхним траекториям, если ниже – наоборот. В обоих случаях при попадании изображающей точки на линию

АОВ происходит переключение управляющего воздействия с одного предельного значения на другое, поэтому линия АОВ называется **линией переключения**. Переходному процессу, показанному выше, соответствует конкретная фазовая траектория СДО.

Теперь, зная уравнение линии переключения, можно провести синтез оптимального управляющего устройства. Оно будет состоять из двухпозиционного исполнительного устройства ИсУ и вычислительного устройств ВУ. ИсУ имеет ограниченную выходную координату и описывается функцией

$$z = z_m \operatorname{sign}(z_1).$$

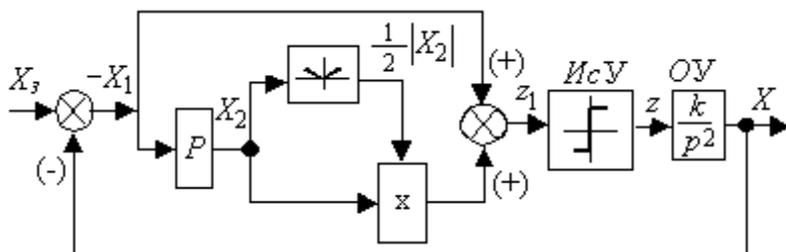


Рис. 11.6. Блок-схема системы оптимального управления

Вычислительное устройство реализует так называемую переключающую функцию

$$z_1(x_1, x_2) = -\left(x_1 + \frac{x_2^2}{2} \operatorname{sign}(x_2)\right) = -\left(x_1 + \frac{1}{2} x_2 |x_2|\right),$$

которая на линии переключения равна нулю.

Если у рассматриваемого ОУ ограничить не только ускорение, но и скорость  $x' = x_2$ , то на фазовом портрете оптимальной системы появится замкнутая область, за пределами которой действует ограничение

$$x' \leq x'_m$$

и при достаточно большом начальном отклонении  $x(0)$  объект после разгона до предельной скорости  $x'_m$ , как показано на рисунке, некоторое время движется с постоянной максимальной допустимой скоростью.

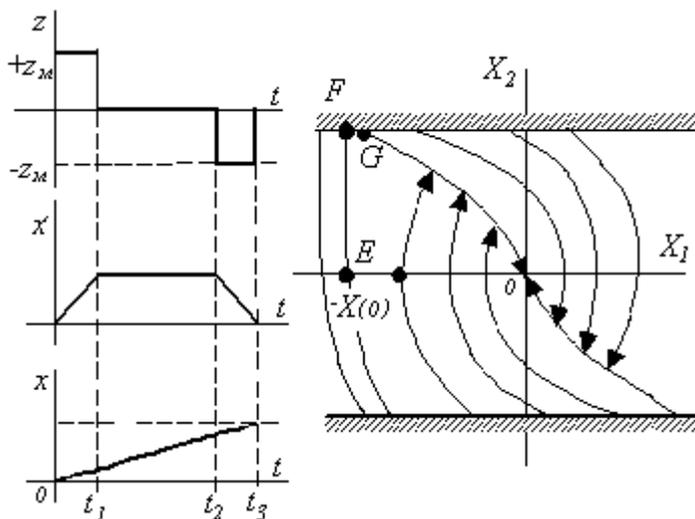


Рис. 11.7. Графики воздействий и линии переключения

### 11.3. Адаптивные системы управления

**Адаптивными** или **самоприспосабливающимися** называются такие системы управления, которые в условиях непредвиденного изменения свойств управляемого объекта, внешних воздействий или цели управления автоматически изменяют структуру или (и) параметры своего управляющего устройства, обеспечивая при этом необходимое качество процесса управления. Показатель качества, по которому осуществляется адаптация, может характеризовать либо работу только ОУ, либо всей САУ. Необходимость применения адаптивных систем возникает в тех случаях, когда условия функционирования или свойства ОУ изменяются в широких пределах и по заранее неизвестным законам. Например, шахтные подъемные установки (масса скипа с рудой - переменная величина), шаровые мельницы (уменьшается масса шаров по мере износа), буровой станок (изменение свойства буримых пород по глубине скважины) и т.п. У таких объектов, как следствие их свойств, изменяются коэффициенты

передачи, постоянные времени или функциональные зависимости выходных координат.

Объекты, у которых изменяются собственные параметры и параметры внешних воздействий, называются **объектами с неполной информацией**.

Эти свойства приводят к тому, что систему приходится строить так, чтобы она в процессе функционирования сама автоматически получала и использовала для выработки воздействий недостающую информацию. Обобщенная функциональная схема адаптивной системы приведена ниже.

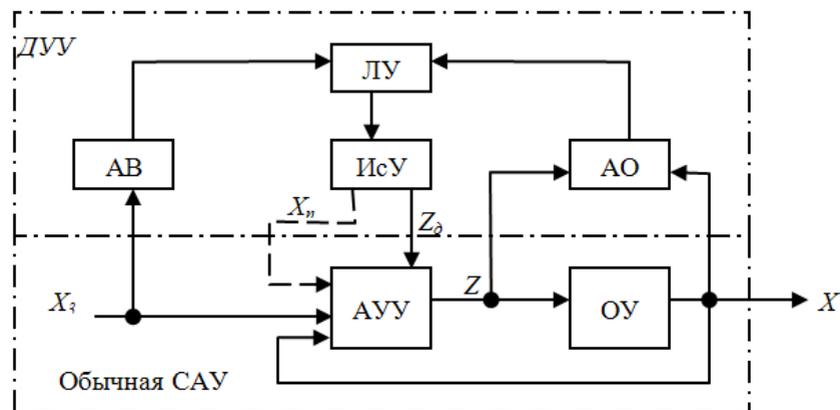


Рис. 11.8. Блок-схема адаптивной САУ

Дополнительное устройство управления - устройство адаптации (ДУУ) состоит из анализатора объекта АО, анализатора внешних воздействий АВ, логического устройства ЛУ и исполнительного устройства ИсУ.

ДУУ вырабатывает необходимое корректирующее воздействие  $Z_0$ . Для изучения характера объекта и определения его текущего состояния устройство адаптации ДУУ может создавать специальное поисковое воздействие  $X_n$ . ДУУ действует, как правило, в более медленном темпе, чем основной контур управления обычной САУ.

Анализаторы АВ и АО, а также логическое устройство ЛУ представляет собой вычислительные блоки. В некоторых случаях ДУУ содержит эталонную модель объекта или всей системы.

По характеру изменений, производимых в основном АУУ устройством адаптации, адаптивные системы подразделяются на **самоадаптирующиеся** (с изменением параметров) и **самоорганизующиеся** (с изме-

нением структуры). В соответствии с такой классификацией корректирующие воздействия можно разделить на параметрические и структурные, которые могут быть осуществлены нелинейными элементами типа множительного звена и элемента переменной структуры.

По характеру функций, выполняемых устройством адаптации, адаптивные системы подразделяются на **системы со стабилизацией** и **системы с оптимизацией** качества управления.

Адаптивные системы, обеспечивающие в процессе функционирования непрерывный поиск и реализацию экстремальных значений показателя качества, называют **системами оптимизации**. В них задачи синтеза оптимального управляющего устройства решаются автоматически и непрерывно, в то время как в обычных системах оптимального управления эта задача решается однократно – при конструировании или настройке системы.

Показатели качества, подлежащие стабилизации или оптимизации, могут характеризовать либо динамические, либо статические режимы объекта или главного контура. Стабилизируют, например, колебательность, частотную характеристику, импульсную переходную функцию, которые могут изменяться из-за изменения параметров объекта в процессе его работы. Оптимизировать целесообразно такие показатели, как время регулирования  $t_p$ , дисперсию сигнала ошибки и др.

Адаптивные системы, способные в процессе работы совершенствовать алгоритм своего функционирования и тем самым улучшить качество управления, называются **самообучающимися**. Такие системы имеют второй контур адаптации, который анализирует и корректирует работу первого контура адаптации, причем второй контур, накапливая информацию о работе первого контура, действует значительно медленнее. Самообучающиеся системы обладают наиболее высокими способностями.

Наибольшее распространение в промышленной автоматике получили самонастраивающиеся системы с оптимизацией какого-либо показателя статического режима объекта - экстремальные САУ. Они бывают одномерными (показатель качества зависит от одного управляющего воздействия) и многомерными.

#### 11.4. Экстремальные системы управления

Экстремальные САУ применяются для поддержания наилучшего режима работы объектов, обладающих экстремальной статической характеристикой. Управляемой величиной в системе может быть либо некоторая физическая переменная  $x$ , измеряемая на выходе объекта, либо некоторый показатель  $Q$ , вычисляемый через совокупность нескольких выходных (иногда и входных) сигналов объекта.

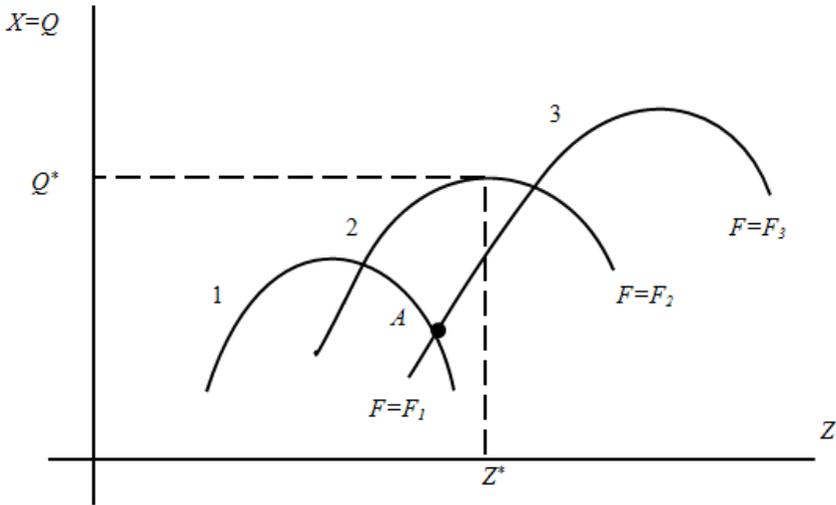


Рис. 11.9. Графики экстремальных зависимостей

Примером объекта с такой характеристикой является станок ударно-поворотного (пневмоударного) бурения, для которого характерна экстремальная зависимость скорости бурения  $x = V_b$  от управляющего воздействия - скорости вращения бурового става  $z = \omega_b$ , причем для разных пород эта зависимость разная (см. рис.1.19). Кривые 1, 2, 3 получены экспериментально для пород различной крепости  $f_1, f_2$  и  $f_3$ , т.е. при различных внешних возмущающих воздействиях  $F_1, F_2$  и  $F_3$ .

Для того, чтобы установить правильное направление изменения  $x$ , необходимо измерить величину  $x$ , затем сделать так называемый пробный шаг (изменить  $z$  в произвольном направлении) и снова измерить  $x$ . Далее, сопоставляя знак приращения  $\Delta x$  и  $\Delta z$ , нетрудно установить направление основного (рабочего) движения.

Для автоматического осуществления указанных операций в экстремальную САУ обычно включают:

- элемент, выявляющий знак и величину приращения показателя экстремума  $Q$  (или  $x$ );
- логическое устройство, оценивающее результат пробного шага и вырабатывающее правильное управляющее воздействие;
- исполнительное устройство, передающее это воздействие на ОУ.

Пробные и рабочие воздействия могут осуществляться либо поочередно, либо одновременно (используя сигнал от специального генератора поисковых колебаний). Существуют способы поиска, когда роль пробного воздействия играет основное воздействие на предыдущем шаге.

Поиск экстремума может происходить либо непрерывно, либо эпизодически (или периодически).

В зависимости от применяемого способа поиска разделяют четыре вида экстремальных систем:

- шаговые;
- с запоминанием экстремума;
- с дополнительным (внешним) поисковым сигналом;
- с измерением производной.

В экстремальной системе шагового типа при поиске, например,  $Q_{min}$  текущее значение  $Q$  периодически сравнивается с его предыдущим значением, которое хранится в запоминающем устройстве ЗУ. Если предыдущее значение  $Q_{i-1} > Q_i$ , то ИсУ делает очередной шаг  $\Delta z$  в том же направлении. При этом одновременно запоминается в ЗУ новое значение  $Q$ . Если  $Q_{i-1} < Q_i$ , то логическое устройство ЛУ реверсирует ИсУ и, следовательно,  $z$  на противоположное направление.

В системе с запоминанием экстремума ЗУ выполнено так, что оно непрерывно запоминает только  $Q_{min}$ . Пока  $Q$  уменьшается, выходной сигнал ЗУ равен текущему значению показателя. Но как только  $Q$  начинает увеличиваться, выход ЗУ как бы “застывает”, запоминая последний минимум  $Q$ . Благодаря этому при движении системы к минимуму  $\Delta Q$  на выходе узла сравнения равен 0, а после прохождения минимума ЛУ реверсирует ИсУ и  $z$  изменяется в противоположную сторону.

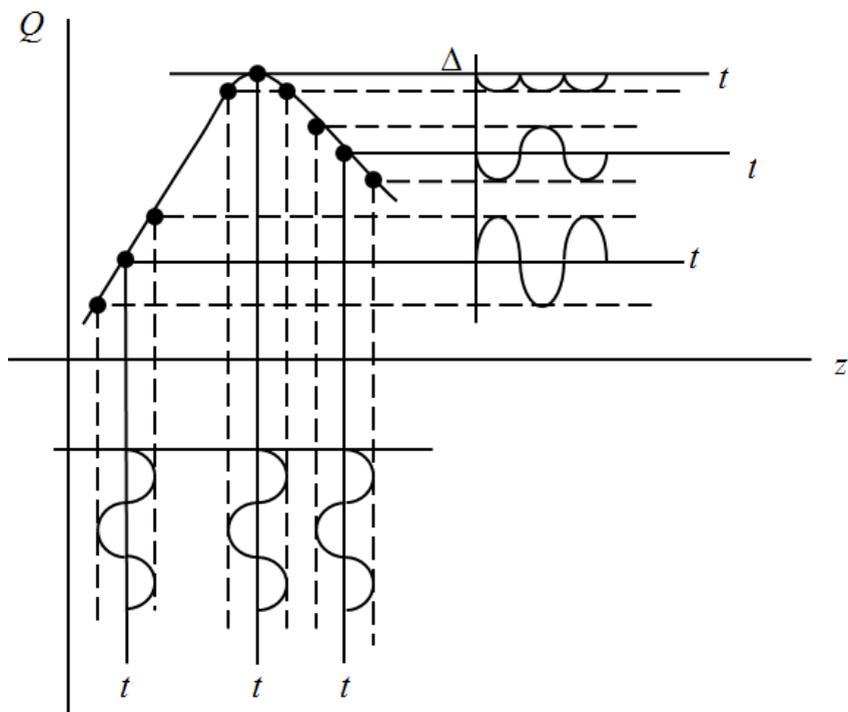


Рис. 11.10. Способ нахождения экстремума функции

В экстремальной системе с дополнительным поисковым сигналом на вход объекта от специального генератора Г непрерывно подаются синусоидальные колебания малой амплитуды. Одновременно этот сигнал подается через фазосдвигающий элемент ФСЭ, эквивалентный инерционности звена, на блок умножения БУ. Фильтр низких частот ФНЧ выделяет из сигнала выхода БУ постоянную составляющую  $z_1$ , которая тождественно равна производной  $\frac{\partial Q}{\partial z}$  в рабочей точке.

В точке экстремума первая производная

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = 0,$$

а при переходе с одной ветви характеристики на другую меняется знак производной. Благодаря этому экстремальная система в данном случае работает как обычная система стабилизации экстремума.

Экстремальная система с измерением производной содержит дифференциатор Д, который непрерывно вырабатывает сигнал производной во времени

$$x_1 = \frac{\partial Q}{\partial t},$$

который поступает в логическое устройство ЛУ и далее в управляющее устройство УУ интегрирующего типа. Затем ИсУ изменяет  $z$  в такую сторону, что  $Q$  убывает. После прохождения показателем  $Q$  минимума и достижения  $x_1$  некоторого порогового значения  $x_{1m}$  ЛУ реверсирует ИсУ и  $z$  начинает уменьшаться, а показатель  $Q$  увеличиваться и цикл поиска повторяется.

Таким образом, во всех описанных системах после вывода ОУ в зону экстремума наступает режим автоколебаний около точки экстремума, который иногда называется «рысканием».

Качество экстремальных систем характеризуется *длительностью выхода ОУ в зону экстремума  $t_n$ , зоной рыскания  $\Delta Q$ , периодом рыскания  $T$  и средним за период отклонением от экстремума* (потеря на поиск).

Эффективным средством улучшения качества экстремальных систем является применение поиска с переменным шагом: вдали от экстремума шаги длинные, а по мере приближения к точке экстремума шаг становится меньше (пропорционально уменьшающейся производной). Это – **методы градиента и наискорейшего спуска**. Для повышения помехоустойчивости применяют различные фильтры.

## *СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ*

1. Лукас В. А. Теория автоматического управления. Учебник для ВУЗов. Изд. 2-е - М.: Недра, 1990.
2. Егоров К. В. Основы теории автоматического регулирования. Учебное пособие для ВУЗов. Изд. 2-е. – М.: Энергия, 1967.
3. Справочник по теории автоматического управления / Под ред. А. А. Красовского. - М.: Наука, 1987.
4. Топчиев Ю. И. Атлас для проектирования систем автоматического регулирования. Учебное пособие для ВУЗов. М.: Машиностроение, 1989.

*ТЕСТЫ ДЛЯ САМОАТТЕСТАЦИИ И АТТЕСТАЦИИ СТУДЕНТОВ  
ПО ТЕОРИИ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ*

Указать один правильный ответ

Вариант 1

1. Какие признаки элементов САУ отражаются на ее функциональной схеме?
- А) Стоимость.
  - Б) Габариты.
  - В) Масса.
  - Г) Выполняемая функция.
  - Д) Инерционность.
2. Какую функцию в САУ электроприводом системы Г - Д выполняет генератор постоянного тока?
- А) Измерения.
  - Б) Усиления сигнала.
  - В) Выработки закона управления.
  - Г) Исполнения выбранного закона управления.
  - Д) Коррекции свойств двигателя.
3. Сколько входных и выходных параметров имеет простейшая одномерная система автоматического управления?
- А) 2 входа и 1 выход.
  - Б) 2 выхода и 1 вход.
  - В) 2 входа и 2 выхода.
  - Г) 1 вход и 1 выход.
  - Д) 1 вход и 3 выхода.
4. Выходом какого функционального элемента является рассогласование?
- А) Измерительного.
  - Б) Усилительного.
  - В) Исполнительного.
  - Г) Регулирующего.
  - Д) Элемента сравнения.
5. Что такое устойчивый элемент САУ?
- А) Элемент, который не опрокидывается при перевозке.
  - Б) Элемент, у которого определенному значению входного воздействия соответствует определенное значение выходного сигнала.
  - В) Элемент, у которого определенному значению входного воздействия соответствует определенная скорость изменения выходного сигнала.
  - Г) Элемент, который нормально функционирует вне зависимости от срока службы.
  - Д) Элемент, имеющий устойчивое соединение с соседними элементами.

6. Что такое типовое динамическое звено?
- А) Звенья одного заводского типа.
  - Б) Звенья, описываемые дифференциальными уравнениями не выше первого порядка.
  - В) Звенья, описываемые дифференциальными уравнениями не выше второго порядка.
  - Г) Звенья, описываемые алгебраическим уравнением.
  - Д) Звенья, описываемые трансцендентным уравнением.
7. Что такое передаточная функция звена?
- А) Отношение выходной величины к входной.
  - Б) Отношение приращения выходной величины к приращению входной.
  - В) Отношение изображения выходного воздействия к изображению входного воздействия при нулевых начальных условиях.
  - Г) Отношение изображения выходного воздействия к входному воздействию при нулевых начальных условиях.
  - Д) Отношение входного потока энергии (вещества) к выходному потоку.
8. Сколько постоянных времени имеет двигатель постоянного тока независимого возбуждения?
- А) Одну.
  - Б) Две.
  - В) Три.
  - Г) Четыре.
  - Д) Ноль
9. Что дает применение корректирующих устройств в САУ?
- А) Снижение стоимости САУ.
  - Б) Стабилизация выходного воздействия САУ.
  - В) Получение требуемых статических и динамических характеристик.
  - Г) Делает устойчивой неустойчивую САУ.
  - Д) Обеспечивает требуемые статические и динамические характеристики и делает устойчивой неустойчивую САУ.
10. В каком квадранте лежит АФЧХ апериодического звена первого порядка?
- А) 1.    Б) 2.    В) 3.    Г) 4.    Д) 3 и 4.
11. Каков порядок астатизма САУ с двумя интегрирующими звеньями?
- А) 0. Б) 1.    В) 2.    Г) 3.    Д) 4.
12. Какую математическую функцию выполняет серводвигатель по каналу «Напряжение на якоре - Угол поворота вала»?
- А) Суммирования.
  - Б) Умножения.
  - В) Интегрирования.

- Г) Дифференцирования.
- Д) Деления.

13. Какой вид имеет амплитудно- фазовая частотная характеристика реального дифференцирующего звена?

- А) Линии вдоль отрицательной мнимой полуоси.
- Б) Полуокружности в четвертом квадранте.
- В) Точки
- Г) Вытянутой полуокружности в 3 -м и 4 – м квадрантах.
- Д) Полуокружности в первом квадранте.

14. Что понимается под динамикой звена или САУ?

- А) Изменение физических свойств звена или САУ во времени.
- Б) Изменение выходного параметра во времени при любом изменении входного параметра.
- В) Изменение входного параметра во времени при каком-либо изменении выходного параметра.
- Г) Перемещение звена в пространстве.
- Д) Форсирование переходных процессов звена.

15. Какие корни характеристического уравнения определяют неустойчивую линейную САУ?

- А) Все корни положительные.
- Б) Вещественные корни отрицательные, а вещественные части комплексных корней положительны.
- В) Вещественные корни положительные, а вещественные части комплексных корней отрицательны.
- Г) Вещественные корни отрицательные, и вещественные части комплексных корней отрицательны.
- Д) Все комбинации по ответам А), Б), В).

ТЕСТЫ ДЛЯ САМОАТТЕСТАЦИИ И АТТЕСТАЦИИ СТУДЕНТОВ  
ПО ТЕОРИИ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Указать один правильный ответ

Вариант 2

1. Что такое автоматическое управляющее устройство?  
А) Техническое устройство, предназначенное осуществлять управление с участием человека.  
Б) Техническое устройство, осуществляющее операцию управления без непосредственного участия человека.  
В) Аппаратура для управления электродвигателем механизма.  
Г) Техническое устройство для усиления управляющих сигналов.  
Д) Техническое устройство для исполнения выбранного закона управления
2. Как изменяется коэффициент передачи статического звена при охвате его отрицательной обратной связью?  
А) Не изменяется,  
Б) В начале переходного процесса уменьшается, а затем стабилизируется.  
В) Уменьшается на определенную величину.  
Г) Увеличивается по экспоненте.  
Д) Изменяется по синусоиде.
3. Выходом какого элемента является регулирующее воздействие?  
А) Измерительного.  
Б) Усилительного  
В) Исполнительного.  
Г) Регулирующего.  
Д) Элемента сравнения.
4. Какие части магнитного усилителя могут исполнять роль элемента сравнения (сумматора)?  
А) Обмотка управления.  
Б) Рабочие обмотки.  
В) Совокупность используемых обмоток управления и магнитопровод.  
Г) Совокупность рабочих обмоток, обмоток управления и магнитопровода.  
Д) Корпус магнитного усилителя.
5. Какова единица измерения постоянной времени?  
А) с.  
Б)  $c^{-1}$ .  
В) м.  
Г) т.  
Д) м/с.

6. Как получить выражение для АФЧХ из передаточной функции?
- А) Умножением числителя и знаменателя передаточной функции на сопряженный знаменатель.
- Б) Заменой  $p$  на  $j\omega$ .
- В) Заменой  $j\omega$  на  $p$ .
- Г) Делением передаточной функции на  $j\omega$ .
- Д) Делением передаточной функции на  $p$ .
7. Сколько постоянных времени имеет генератор постоянного тока независимого возбуждения?
- А) Одну.
- Б) Две.
- В) Три.
- Г) Четыре.
- Д) Ноль.
8. От наличия какого типового звена в контуре САУ зависит астатизм системы?
- А). Безынерционного.
- Б) Апериодического.
- В) Интегрирующего.
- Г) Дифференцирующего.
- Д) Запаздывающего.
9. Какие корни характеристического уравнения определяют устойчивость линейных САУ?
- А) Все корни положительны.
- Б) Вещественные корни отрицательны, а вещественные части комплексных корней положительны.
- В) Вещественные корни положительны а вещественные части комплексных корней отрицательны.
- Г) Вещественные корни отрицательные, а вещественные части комплексных корней отрицательны.
- Д) Один вещественный корень равен нулю.
10. Как записать операторное уравнение системы по каналу  $x - y$ ?
- А)  $y = W(p)x$ .
- Б)  $x = W(p)y$ .
- В)  $y = W(p)/x$ .
- Г)  $y = \Sigma W(p)$ .
- Д)  $y = W(p)^x$ .

11. В каком квадранте лежит АФЧХ звена второго порядка?  
А) 1. Б) 2. В) 3. Г) 4. Д) 3 и 4.
12. Какой вид имеет амплитудно-фазовая частотная характеристика безынерционного звена?  
А) Линия вдоль отрицательной мнимой полуоси.  
Б) Полуокружность в четвертом квадранте.  
В) Точка.  
Г) Вытянутая полуокружность в 3 -м и 4 - м квадрантах..  
Д) Полуокружность в первом квадранте.
13. Какой вид имеет амплитудно-фазовая частотная характеристика идеального интегрирующего звена?  
А) Линия вдоль отрицательной мнимой полуоси.  
Б) Полуокружность в четвертом квадранте.  
В) Точка.  
Г) Вытянутая полуокружность в 3 -м и 4 - м квадрантах.  
Д) Полуокружность в первом квадранте.
14. Какую математическую функцию выполняет элемент сравнения?  
А) Суммирования.  
Б) Умножения.  
В) Интегрирования.  
Г) Дифференцирования.  
Д) Деления.
15. Какие свойства автоматической системы принято рассматривать для оценки ее качества?  
А) Стоимостные и массогабаритные свойства.  
Б) Потребительские свойства.  
В) Свойства в динамическом режиме работы.  
Г) Свойства в установившемся режиме работы.  
Д) Свойства в установившемся и переходном режимах.

ТЕСТЫ ДЛЯ САМОАТТЕСТАЦИИ И АТТЕСТАЦИИ СТУДЕНТОВ  
ПО ТЕОРИИ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Указать один правильный ответ

Вариант 3

1. Что такое объект управления?
  - А) Любого технологический процесс.
  - Б) Любое техническое устройство.
  - В) Техническое устройство, в котором происходит процесс, подлежащий управлению.
  - Г) Техническое устройство, находящееся на некотором удалении от оператора.
  - Д) Техническое устройство в опасной для человека зоне.
  
2. Сколько входных и выходных параметров имеет одномерный объект управления?
  - А) 2 входа и 1 выход.
  - Б) 2 выхода и 1 вход.
  - В) 2 входа и 2 выхода.
  - Г) 1 вход и 1 выход.
  - Д) 1 вход и 3 выхода.
  
3. Каков коэффициент передачи звена, если приращению входного сигнала 5 В соответствует приращение выходного, равное 100 В?
  - А) 500.
  - Б) 20.
  - В) 95.
  - Г) 105.
  - Д) 0,002.
  
4. В чем заключается свойство однонаправленности элемента системы автоматического управления?
  - А) Выходное воздействие устанавливается в зависимости от входного сигнала.
  - Б) Входной сигнал определяет динамику выходного сигнала.
  - В) Сигнал может проходить через элемент как от входа к выходу, так и от выхода к входу.
  - Г) Элемент пропускает сигнал только от входа к выходу.
  - Д) Элемент только суммирует входной сигнал во времени.
  
5. Как называется числитель передаточной функции?
  - А) Характеристическое уравнение.
  - Б) Алгебраический полином.
  - В) Характеристический полином.

- Г) Характеристическая матрица.  
 Д) Входной полином (оператор).
6. Что учитывает постоянная времени элемента в ТАУ?  
 А) Инерцию.  
 Б) вес.  
 В) Физические размеры данного элемента.  
 Г) Способность накапливать энергию или вещество.  
 Д) Массу элемента.
7. При каком соотношении постоянных времени  $T_1$  и  $T_2$  апериодическое звено 2-го порядка становится колебательным?  
 А)  $T_1 < T_2$ .  
 Б)  $T_1 > T_2$ .  
 В)  $T_2 > T_1$ .  
 Г)  $2T_2 > T_1$ .  
 Д)  $2T_2 = T_1$ .
8. Каково значение фазовой частотной характеристики апериодического звена первого порядка при частоте  $\omega = 1/T$ ?  
 А)  $30^\circ$ .  
 Б)  $45^\circ$ .  
 В)  $0^\circ$ .  
 Г)  $60^\circ$ .  
 Д)  $90^\circ$ .
9. Что такое амплитудно- фазовая частотная характеристика (АФЧХ)?  
 А) АФЧХ показывает, как изменяется амплитуда и фаза выходного сигнала при изменении частоты входного сигнала.  
 Б) Это отношение выходной величины к входной.  
 В) АФЧХ показывает, как изменяется амплитуда и фаза выходного сигнала при изменении амплитуды и фазы входного сигнала.  
 Г) Это функция, описывающая реакцию звена при подаче на вход произвольного воздействия.  
 Д) Функция, описывающая реакцию звена при подаче на вход единичного ступенчатого воздействия.
10. Какую математическую функцию выполняет трансформатор в цепи постоянного тока?  
 А) Суммирования.  
 Б) Умножения.  
 В) Интегрирования.  
 Г) Дифференцирования.  
 Д) Деления.

11. С помощью какого технического устройства измеряется величина постоянного тока в системах автоматического регулирования?

- А) Амперметра.
- Б) Трансформатора тока.
- В) Шунта.
- Г) Вольтметра.
- Д) Потенциометра.

12. Как подключается параллельное корректирующее устройство?

- А) Параллельно.
- Б) Последовательно.
- В) Последовательно - параллельно.
- Г) В виде обратной связи, т.е. встречно - параллельно.
- Д) К входу всей САУ.

13. Каков порядок астатизма САУ с одним интегрирующим звеном?

- А) 0.
- Б) 1.
- В) 2.
- Г) 3.
- Д) 4.

14. По какой асимптоте можно найти постоянную времени апериодического звена первого порядка по кривой переходной функции?

- А) По секущей между двумя точками.
- Б) По касательной в произвольной точке разгона.
- В) По касательной в начале координат.
- Г) По касательной в установившемся режиме.
- Д) По точке пересечения касательной и секущей.

15. Какой вид имеет амплитудно-фазовая частотная характеристика апериодического звена 1-го порядка?

- А) Линии вдоль отрицательной мнимой полуоси.
- Б) Полуокружности в четвертом квадранте.
- В) Точки.
- Г) Вытянутой полуокружности в 3 -м и 4 -м квадрантах..
- Д) Полуокружности в первом квадранте.

ТЕСТЫ ДЛЯ САМОАТТЕСТАЦИИ И АТТЕСТАЦИИ СТУДЕНТОВ  
ПО ТЕОРИИ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Указать один правильный ответ

Вариант 4

1. Какими параметрами характеризуется одномерный объект управления?
  - А) Управляемой величиной.
  - Б) Управляемой величиной и управляющей величиной.
  - В) Управляющей и управляемой величин и возмущающим воздействием.
  - Г) Конструктивными параметрами и управляемым параметром.
  - Д) Массогабаритными параметрами и сложностью элементов.
  
2. Какой знак имеет коэффициент передачи объекта по возмущающему воздействию?
  - А) Положительный.
  - Б) Отрицательный,
  - В) Не имеет знака.
  - Г) Как положительный, так и отрицательный.
  - Д) Нет ответа.
  
3. Каким свойством должен обладать хотя бы один элемент САУ?
  - А) Усиления.
  - Б) Высокоточного измерения,
  - В) Точного исполнения выработанного закона управления.
  - Г) Детектирования (однаправленности).
  - Д) Низкой стоимости.
  
4. Входом какого функционального элемента САУ является задание?
  - А) Измерительного.
  - Б) Усилительного
  - В) Исполнительного.
  - Г) Регулирующего.
  - Д) Элемента сравнения.
  
5. С помощью какого устройства измеряется величина напряжения постоянного тока в системах автоматического регулирования?
  - А) Амперметра.
  - Б) Трансформатора напряжения.
  - В) Шунта.
  - Г) Вольтметра.
  - Д) Потенциометра.
  
6. Каково значение амплитудной частотной характеристики статического звена на нулевой частоте?
  - А) 0.

- Б) 1.
- В) k.
- Г) T.
- Д) kT.

7. Как называется знаменатель передаточной функции?

- А) Характеристическое уравнение.
- Б) Алгебраический полином.
- В) Характеристический полином.
- Г) Характеристическая матрица.
- Д) Входной полином.

8. Что такое переходная функция звена?

- А) Отношение выходной величины к входной.
- Б) Отношение приращения выходной величины к приращению входной.
- В) Отношение изображения выходного воздействия к изображению входного воздействия при нулевых начальных условиях.
- Г) Функция, описывающая реакцию звена при подаче на вход произвольного воздействия.
- Д) Функция, описывающая реакцию звена при подаче на вход единичного ступенчатого воздействия.

9. Сколько коэффициентов передачи имеет одномерный объект управления?

- А) Одну.
- Б) Две.
- В) Три.
- Г) Четыре.
- Д) Ноль.

10. Как подключается последовательное корректирующее устройство?

- А) Параллельно.
- Б) Последовательно.
- В) Последовательно - параллельно.
- Г) В виде обратной связи, т.е. встречно - параллельно.
- Д) К входу всей САУ.

11. Как можно уменьшить величину статической ошибки замкнутой статической САУ, представленной в виде САУ с единичной главной обратной связи?

- А) Уменьшением коэффициента передачи замкнутой САУ.
- Б) Увеличением коэффициента передачи разомкнутой САУ.
- В) Увеличением сигнала задания.
- Г) Уменьшением величины возмущающего воздействия.
- Д) Увеличением сигнала задания и уменьшением величины возмущающего воздействия.

12. Какой вид имеет амплитудно- фазовая частотная характеристика звена 2-го порядка?

- А) Линии вдоль отрицательной мнимой полуоси.
- Б) Полуокружности в четвертом квадранте.
- В) Точки.
- Г) Вытянутой полуокружности в 3 -м и 4 –м квадрантах.
- Д) Полуокружности в первом квадранте.

13. При каком соотношении постоянных времени  $T_1$  и  $T_2$  колебательное становится апериодическим звеном 2-го порядка?

- А)  $T_1 < T_2$ .
- Б)  $T_1 > T_2$ .
- В)  $T_2 > T_1$ .
- Г)  $2T_2 > T_1$ .
- Д)  $2T_2 = T_1$ .

14. При каких корнях характеристического уравнения линейная САУ находится на границе устойчивости?

- А) Все корни положительные.
- Б) Вещественные корни отрицательные, а вещественные части комплексных корней положительные.
- В) Вещественные корни положительные, а вещественные части комплексных корней отрицательны.
- Г) Вещественные корни отрицательные, и вещественные части комплексных корней отрицательны.
- Д) Один вещественный корень или вещественная часть одного комплексного корня равняется нулю.

15. Как ведет себя вынужденная составляющая переходного процесса статической САУ во времени?

- А) Линейно возрастает до коэффициента передачи разомкнутой САУ.
- Б) Линейно возрастает до коэффициента передачи замкнутой САУ.
- В) Мгновенно возрастает до коэффициента передачи разомкнутой САУ.
- Г) Мгновенно возрастает до коэффициента передачи замкнутой САУ.
- Д) Не изменяется во времени.

**Авторы:** Исмагилов Кагарман Валиахметович,  
Великанов Владимир Семенович

## **ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ**

Конспект лекций

*Издается полностью в авторской редакции*

г. Магнитогорск, 2011 год  
ФГБОУ ВПО «МГТУ»  
Адрес: 455000 Челябинская область, г. Магнитогорск,  
пр. Ленина 38

ФГБОУ ВПО «Магнитогорский государственный  
технический университет им. Г.И. Носова»  
Кафедра горных машин и транспортно-технологических комплексов  
Центр электронных образовательных ресурсов и  
дистанционных образовательных технологий  
e-mail: ceor\_dot@mail.ru