

Н.М. Локотунина

ОСНОВЫ МЕХАНИКИ ОБРАБОТКИ МЕТАЛЛОВ ДАВЛЕНИЕМ

Практикум



Магнитогорск
2020



Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова»

Н.М. Локотунина

**ОСНОВЫ МЕХАНИКИ
ОБРАБОТКИ МЕТАЛЛОВ ДАВЛЕНИЕМ**

*Утверждено Редакционно-издательским советом университета
в качестве практикума*

Магнитогорск
2020

УДК 621
ББК 34.1

Рецензенты:

кандидат технических наук,
заведующий кафедрой технологий металлургических предприятий
АНО ДПО «Корпоративный центр подготовки кадров «Персонал»,
Заслуженный металлург РФ
В.Л. Корнилов

кандидат технических наук, доцент,
доцент кафедры металлургии и химических технологий,
ФГБОУ ВО «Магнитогорский государственный технический
университет им. Г.И. Носова»
И.В. Макарова

Локотунина Н.М.

Основы механики обработки металлов давлением [Электронный ресурс] : практикум / Наталья Михайловна Локотунина ; ФГБОУ ВО «Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова». – Электрон. текстовые дан. (1,68 Мб). – Магнитогорск : ФГБОУ ВО «МГТУ им. Г.И. Носова», 2020. – 1 электрон. опт. диск (CD-R). – Систем. требования : IBM PC, любой, более 1 GHz ; 512 Мб RAM ; 10 Мб HDD ; MS Windows XP и выше ; Adobe Reader 8.0 и выше ; CD/DVD-ROM дисковод ; мышь. – Загл. с титул. экрана.

Практикум составлен в соответствии с типовой программой дисциплины «Основы механики обработки металлов давлением». В практикуме представлены методические указания к решению задач по курсу «Основы механики обработки металлов давлением».

Практикум предназначен для студентов, обучающихся по направлению 22.03.02 «Металлургия». Он может быть использован для студентов других направлений и специальностей, изучающих теоретические основы механики обработки металлов давлением.

УДК 621
ББК 34.1

- © Локотунина Н.М., 2020
© ФГБОУ ВО «Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова», 2020

Содержание

ВВЕДЕНИЕ.....	4
1. НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ В ТОЧКЕ ТЕЛА	5
2. ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ В ТОЧКЕ ТЕЛА	20
3. ПОНЯТИЕ МЕХАНИЧЕСКОЙ СХЕМЫ ДЕФОРМАЦИИ	29
4. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ. ПРИКЛАДНАЯ ЗНАЧИМОСТЬ	35
5. МЕТОД ТОНКИХ СЕЧЕНИЙ	49
6. МЕТОД ЛИНИЙ СКОЛЬЖЕНИЯ.....	57
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	90

ВВЕДЕНИЕ

Постоянное совершенствование технологических процессов, поиск наиболее эффективных режимов обработки является одной из основных причин в развитии обработки металлов давлением и требует широкого использования результатов научных исследований, создания математических моделей технологических процессов и их реализации в алгоритмах управления технологическими системами. Теория обработки металлов давлением развивается как прикладная наука, основывающаяся на математической теории пластичности и физическом металловедении.

Математическая теория пластичности позволяет с помощью общих теорем теории пластичности и различных моделей деформируемой среды разрабатывать методы расчета технологических параметров процесса, анализировать напряженно-деформированное состояние в обрабатываемом изделии. Физическое металловедение исследует микромеханизмы пластической деформации, изменение свойств и структуры металла при больших деформациях, изучает физико-химические и механические факторы, определяющие величину сопротивления деформации и пластичности металлов и сплавов. В свою очередь теория пластичности базируется на механике сплошных сред. Дисциплина «Основы механики обработки металлов давлением» включает материал по механике сплошных сред и теории пластичности.

В практикуме уделяется внимание вопросу постановки задач теории пластичности и рассмотрены некоторые методы их решения, позволяющие анализировать технологические процессы обработки металлов давлением. Рассмотрены примеры нахождения основных параметров напряженно-деформированного состояния при ОМД.

1. НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ В ТОЧКЕ ТЕЛА

Общие сведения

Механика сплошной среды (МСС) - раздел механики, изучающий движение газообразных, жидких и твердых деформируемых тел, а также силовые взаимодействия внутри таких тел. В механике сплошной среды можно четко выделить раздел, изучающий движение жидкостей и газов, т.е. флюидов (гидромеханика, гидравлика, аэрология), а также раздел, изучающий движение твердых деформируемых тел.

Деформируемое тело – это материальное тело, способное к деформации, т.е. тело, способное изменить свою форму, внутреннюю структуру, объем, площадь поверхности под действием внешних сил. Относительная позиция любых составных точек деформируемого тела может изменяться.

Понятие «модель» и подходы, основанные на моделировании, являются весьма широко распространенными в рамках науки вообще и в естественных науках, к которым относится механика, в частности. В этом случае для изучения некоторых сложных процессов и явлений, происходящих в некотором объекте, строят его мысленное отображение на некоторый более простой объект (модель) и изучают процессы и явления в нем (т.е. выполняют идеализацию), а затем полученную на более простом объекте (модели) информацию экстраполируют на исходный объект, говоря о том, что информация, полученная на модели с определенной достоверностью описывает и прогнозирует явления и процессы, происходящие в рамках изучаемого объекта. В связи с этим модель материальной точки является наиболее простой моделью материального тела, используемой в рамках механики, а теоретическая механика является наиболее базовым разделом механики, т.к. исследует законы движения материальных точек без привязки к процессам, которые происходят в материальных телах, которые описываются моделью материальной точки.

В связи с введением гипотезы о континуальности среды изучение поведения некоторого твердого деформируемого тела, находящегося под действием системы внешних сил, можно свести к исследованию поведения совокупности всех точек, расположенных в пределах его объема. Таким образом, любой параметр всего тела будет однозначно определяться как функция от координат точек тела в пределах его исследуемого объема. Поведение тела в точке в рамках МСС исследуется с использованием элементарного объема. Элементарный объем – это такой объем, выделенный в окрестности исследуемой точки, который достаточно мал по сравнению с размерами всего исследуемого твердого деформируемого тела, чтобы им можно было пренебречь и при необходимости рассматривать его параметры как параметры материальной точки, но в то же время достаточно велик, чтобы содержать в себе количество материала тела, которое в механическом плане ведет себя так же как и все тело при внешнем физическом воздействии.

Внешние силы, которые действуют на твердое тело, можно разделить на две группы: поверхностные и массовые (или объемные). Поверхностные силы явля-

ются результатом взаимодействия двух тел. Примером поверхностных сил являются давление одного тела на другое при соприкосновении, давление здания на грунт, давление газа или жидкости на стенки сосуда и т. д.

Поверхностные силы характеризуются интенсивностью, т. е. величиной силы, приходящейся на единицу площади поверхности, на которой распределена эта сила. Интенсивность поверхностной силы также называется давлением. Размерность давления выражается в Н/м^2 (или Па).

Массовые силы распределены по всей массе тела. Примером массовых сил являются сила тяжести, магнитные силы, силы инерции для тела, находящегося в движении, и т. д. Массовые силы, отнесенные к единице объема (т.е. интенсивности массовых сил, называемые объемными силами), также раскладывают на три проекции: X, Y, Z . Их размерность – Н/м^3 . Действие температуры при неравномерном нагреве тела с использованием метода устранения деформации при решении задачи также сводится к поверхностным и массовым силам [1].

Напряжение — это мера внешних или внутренних сил, вектор, имеющий величину и направление. В первом приближении напряжение можно определить как удельную силу, как отношение силы к площади поверхности, на которую действует эта сила. Размерность напряжения $\text{Па} = \text{Н/м}^2$, в теории ОМД чаще пользуются размерностью $\text{МПа} = \text{Н/мм}^2$ [2].

Более точно понятие напряжения вводится в курсе сопротивления материалов. Различают внешние и внутренние напряжения. Рассмотрим внешние напряжения, возникающие под действием приложенных к телу сил. Рассмотрим действие напряжения в декартовой системе координат x, y, z (рис. 1). Если ΔS — элементарная площадка контактной поверхности тела в окрестности какой-то точки, ΔP — часть силы, приходящейся на эту площадку, тогда вектором напряжения называется величина:

$$p = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\vec{\Delta P}}{\Delta S}. \quad (1.1)$$

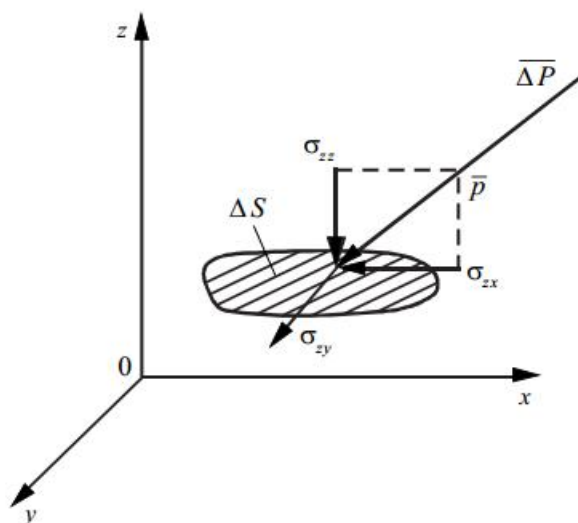


Рис. 1.1. Схема действия напряжений

Вектор напряжения раскладывают на составляющие вдоль координатных осей, в данном случае это σ_{zz} , σ_{zx} , σ_{zy} .

На рис. 1 оси выбраны так, что ось z направлена перпендикулярно площадке ΔS , а оси x и y — в ее плоскости. Напряжение, действующее перпендикулярно данной площадке, называется нормальным (в данном случае это σ_{zz}). Напряжение, действующее в плоскости, называется касательным (σ_{zx} , σ_{zy}).

Напряжение условно считают положительным (растягивающим), если его направление совпадает с координатной осью, на рис. 1.1 это напряжение σ_{zy} . Отрицательное (сжимающее) напряжение направлено против координатной оси, в рассматриваемом случае это σ_{zz} и σ_{zx} .

В теории ОМД нормальное напряжение, действующее на инструмент, обычно называют давлением, а касательные нормальные напряжения представляют собой напряжения трения. В данном случае (рис. 1) вектор напряжения трения:

$$\tau = \sigma_{zx} + \sigma_{zy}. \quad (1.2)$$

Напряжения трения и давления связаны, в частности, законом Кулона:

$$\tau = fp, \quad (1.3)$$

где f — коэффициент трения;

$p = -\sigma_{zz}$ — нормальное давление.

Аналогично вводится понятие внутренних напряжений. В интересующей точке деформируемого тела рассматривается ориентированная определенным образом площадка, тело мысленно рассекается плоскостью, проходящей через рассматриваемую площадку, действие отброшенной части заменяется силой, и рассматривается часть силы, действующая на выделенную площадку в соответствии с рис. 1. Далее рассуждения повторяются как при рассмотрении поверхностных напряжений.

Напряженное состояние в некоторой точке тела считается вполне определенным, если известны напряжения на любой площадке, проходящей через данную точку [2,3].

Для изучения напряженного состояния в какой-либо точке деформированного тела выделим в окрестности этой точки бесконечно малый элемент объема в виде прямоугольного параллелепипеда, ребра которого совпадают с отрезками прямоугольных осей координат x_1 , x_2 , x_3 (рис.1.2). Уменьшая размеры параллелепипеда, можно заметить, что он будет стягиваться в точку. Следовательно, в пределе его грани пройдут через эту точку, а напряжения на соответствующих гранях могут рассматриваться как напряжения в исследуемой точке.

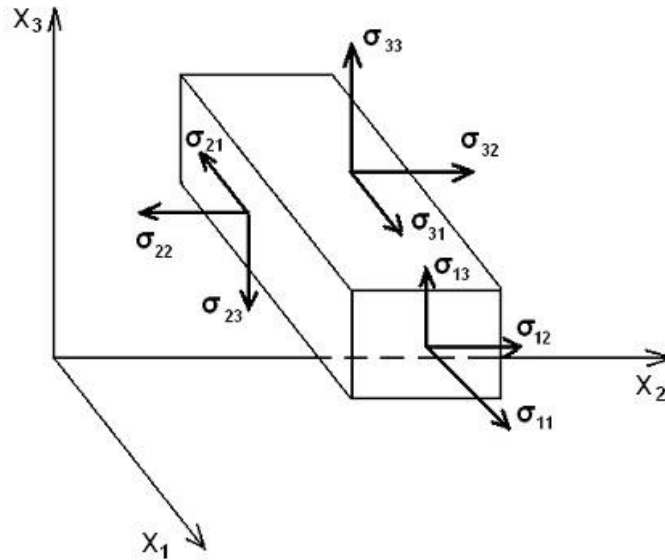


Рис. 1.2. Напряженное состояние в точке тела

К трем граням (площадкам) выделенного элемента приложены нормальные и касательные напряжения, которые являются компонентами тензора напряжений:

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}. \quad (1.4)$$

Тензор напряжений характеризует напряженное состояние в точке тела. Согласно парности (взаимности) касательных напряжений в двух взаимно перпендикулярных площадках имеем: $\sigma_{12} = \sigma_{21}$, $\sigma_{23} = \sigma_{32}$, $\sigma_{13} = \sigma_{31}$; тензор напряжений поэтому будет симметричным. Нормальное напряжение σ_v на любой косой площадке с нормалью v и направляющими косинусами l , m , n к осям координат x_1 , x_2 , x_3 равно:

$$\sigma_v = \sigma_{11}l^2 + \sigma_{22}m^2 + \sigma_{33}n^2 + 2\sigma_{12}lm + 2\sigma_{23}mn + 2\sigma_{31}nl. \quad (1.5)$$

Направляющие косинусы связаны соотношением:

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1. \quad (1.6)$$

Рассмотрим среднее гидростатическое напряжение (давление):

$$\sigma_0 = (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})/3. \quad (1.7)$$

Тензор с одинаковыми диагональными компонентами, равными σ_0 называется шаровым тензором напряжений:

$$T_0 = \begin{bmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{bmatrix}. \quad (1.8)$$

При гидростатическом напряженном состоянии форма элемента не изменяется, а изменяется его объем.

Разность тензоров напряжений и шарового тензора называется девиатором напряжений:

$$D_{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} - \sigma_0 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma_0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma_0 \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

При девиаторном напряженном состоянии элемента изменяется лишь форма элемента.

Для каждой точки тела существуют такие три взаимно перпендикулярные площадки, на которых касательные напряжения равны нулю. Эти площадки называют главными, а нормальные напряжения на них – главными нормальными напряжениями. Соответствующие координатные оси являются главными осями.

В теории пластичности большое значение имеют напряжения на площадках, равнонаклоненных к главным осям. Так как плоскости этих площадок образуют октаэдр (рис. 1.3), то эти напряжения называют октаэдрическими.

Для октаэдрической площадки следует:

$$l = m = n = 1/\sqrt{3} \quad (\alpha \approx 55^\circ) \quad (1.10)$$

Тогда значения октаэдрических нормального и касательного напряжений соответственно равны:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_0 &= (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3; \\ \tau_0 &= \sqrt{S^2 + \sigma_0^2} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (1.11)$$

Наряду с октаэдрическими напряжениями в теории пластичности пользуются пропорциональными им интенсивностями напряжений. В зависимости от принятого коэффициента пропорциональности различают интенсивность нормальных напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_e &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + \dots \rightarrow} \\ &\leftarrow \dots + 6(\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{31}^2) = \frac{3}{\sqrt{2}} \tau; \end{aligned} \quad (1.12)$$

и интенсивность касательных напряжений $\tau_e = \sigma_e / \sqrt{3}$.

Применение величины σ_e удобно тем, что в случае одноосного нагружения (растяжения или сжатия) она равна величине соответствующего напряжения.

Геометрически напряженное состояние в точке тела представляют эллипсоидом напряжений, осями которого являются главные напряжения (рис. 1. 4).

Поверхность эллипсоида является геометрическим местом концов векторов напряжений S на различных площадках, проходящих через рассматриваемую точку. В частном случае гидростатического нагружения эллипсоид напряжений превращается в шар.

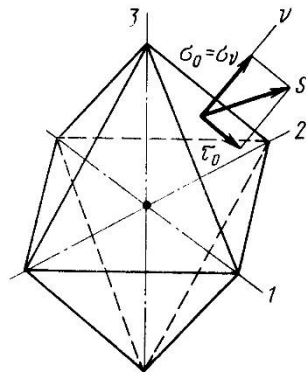


Рис. 1.3. Напряженное состояние на наклонной площадке

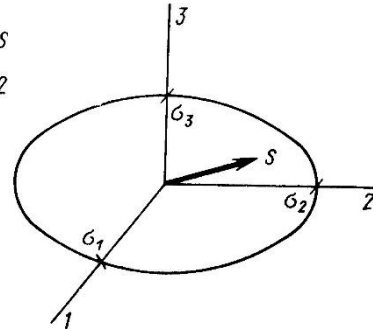


Рис. 1.4. Эллипсоид напряжений

Круговая диаграмма Мора (рис. 1.5) является плоским изображением напряженного состояния. Координаты точек в пределах заштрихованной области определяют нормальные и касательные напряжения на произвольно ориентированных площадках.

Из эллипсоида напряжений и круговой диаграммы Мора следует экстремальность главных напряжений, т.е. одно из главных напряжений максимальное, другое – минимальное, а третье - промежуточное.

Экстремальные значения касательных напряжений, равные радиусам кругов, определяют из соотношений:

$$\tau_{12} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}, \tau_{13} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}, \tau_{23} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}. \quad (1.13)$$

Максимальное касательное напряжение τ_{13} возникает на площадке, где нормальное напряжение:

$$\sigma_n = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}. \quad (1.14)$$

Экстремальные значения касательных напряжений называют главными касательными напряжениями. Площадки, в которых они возникают, делят пополам прямые углы между главными площадками и их всего шесть. Эти площадки образуют в совокупности двенадцатиугольник или ромбический додекаэдр.

Рассмотрим параметр Лоде, связанный с главными напряжениями зависимостью:

$$\beta = 2 \cdot \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} - 1 = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3}. \quad (1.15)$$

Так, для одноосного растяжения $\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 = \sigma_3 = 0, \beta = -1$ для одноосного сжатия $\sigma_1 = \sigma_2 = 0, \sigma_3 \neq 0, \beta = 1$. Для чистого сдвига $\sigma_1 = -\sigma_3, \sigma_2 = 0, \beta = 0$. В случае, когда напряжения по одной координате равны нулю (плоское напряженное состояние), например $\sigma_3 = 0, \beta = 2\sigma_2 / \sigma_1 - 1$.

В случае плоской деформации, когда деформации по одной координате равны нулю, а напряжение $\sigma_2 = (\sigma_1 + \sigma_3)/2$, параметр Лоде равен нулю, как при чистом сдвиге. Плоская деформация имеет важное значение при расчетах процессов обработки металлов давлением, в частности при расчетах продольной прокатки широких листов.

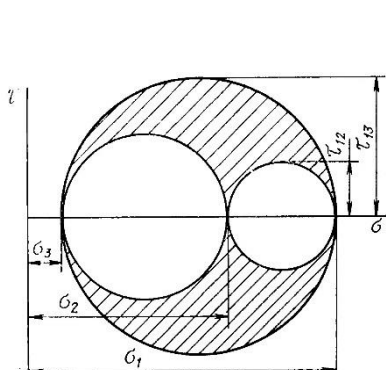


Рис. 1.5. Диаграмма напряжений Мора

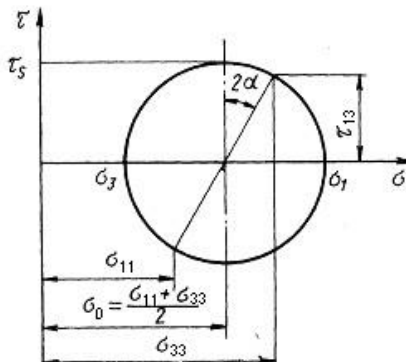


Рис. 1.6. Круг напряжений при плоском деформированном состоянии

Круг Мора (рис.1.6) для плоского деформированного состояния представляет собой окружность с радиусом τ_s и центром на оси σ , расположенной от начала координат на расстоянии σ_0 . Из рис. 1.6 следует, что:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = (\sigma_{33} - \sigma_{11}) / 2\sigma_{13}. \quad (1.16)$$

Практические задания

Вычисление определителя матрицы

1. Вычислить определитель матрицы тензора.

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 6 \\ 8 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

Решение

$$\begin{aligned} \det T &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \\ &= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} \\ &\quad - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} \end{aligned}$$

$$\det T = 9.$$

2. Вычислить определитель матрицы тензора:

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 6 \\ 8 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

3. Вычислить определитель матрицы тензора:

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 6 \\ 2 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

4. Вычислить определитель матрицы тензора:

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 5 & 17 & 6 \\ 2 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

5. Вычислить определитель матрицы тензора:

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

6. Вычислить определитель матрицы тензора:

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 6 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

7. Вычислить определитель матрицы тензора:

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

8. Вычислить определитель матрицы тензора:

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 5 \\ 5 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

9. Вычислить определитель матрицы тензора:

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 6 & 1 & 6 \\ 2 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

10. Вычислить определитель матрицы тензора:

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 5 & 3 & 6 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

11. Вычислить определитель матрицы тензора:

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 6 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Частные случаи напряженного состояния

1. Построить круги Мора для трех случаев плоского напряженного состояния. Напряжения, действующие на элементарный объем, ребра которого параллельны осям координат (рис. 1.7). Определить графически максимальное касательное напряжение.

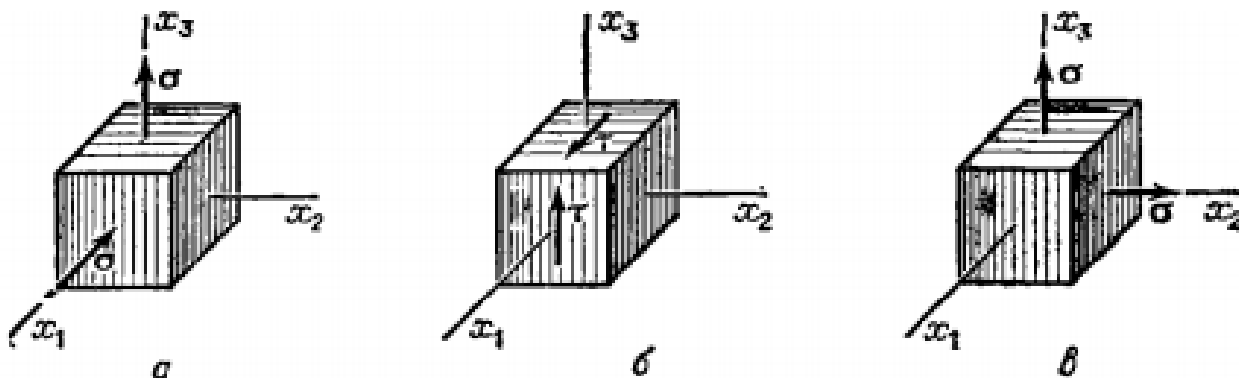
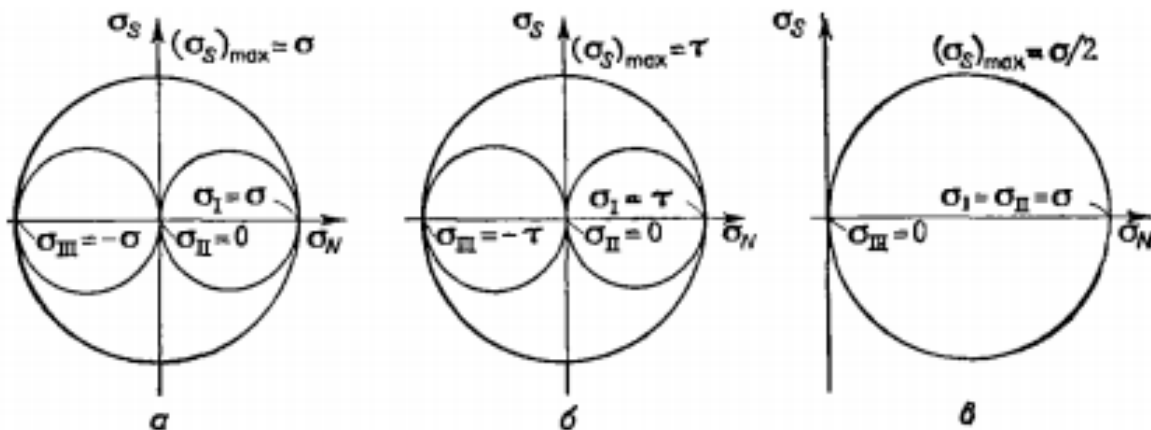
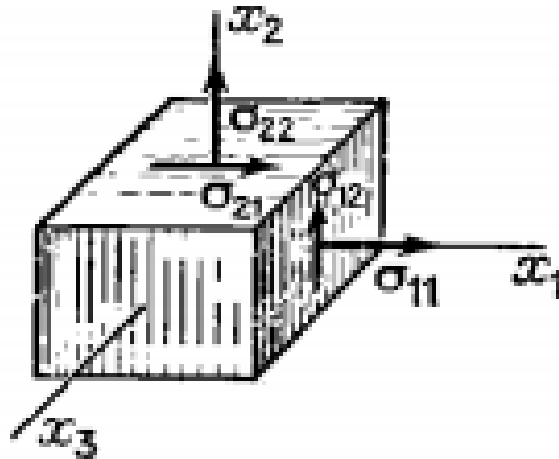


Рис. 1.7. Напряжения, действующие на элементарный объем

Решение



2. Представить плоское напряженное состояние в виде кругов Мора для данного случая.



3. Найти характерные точки для круга Мора для плоского напряженного состояния, если задан тензор напряжений:

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Найти характерные точки для круга Мора для плоского напряженного состояния, если задан тензор напряжений:

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5. Найти характерные точки для круга Мора для плоского напряженного состояния, если задан тензор напряжений:

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

6. Найти характерные точки для круга Мора для плоского напряженного состояния, если задан тензор напряжений:

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

7. Найти характерные точки для круга Мора для плоского напряженного состояния, если задан тензор напряжений:

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

8. Найти характерные точки для круга Мора для плоского напряженного состояния, если задан тензор напряжений:

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

9. Найти характерные точки для круга Мора для плоского напряженного состояния, если задан тензор напряжений:

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

10. Найти характерные точки для круга Мора для плоского напряженного состояния, если задан тензор напряжений:

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} 8 & 4 & 0 \\ 4 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

11. Найти характерные точки для круга Мора для плоского напряженного состояния, если задан тензор напряжений:

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

12. Найти характерные точки для круга Мора для плоского напряженного состояния, если задан тензор напряжений:

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

13. Найти характерные точки для круга Мора для плоского напряженного состояния, если задан тензор напряжений:

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 4 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

14. Найти характерные точки для круга Мора для плоского напряженного состояния, если задан тензор напряжений:

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} 9 & 5 & 0 \\ 5 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

15. Найти характерные точки для круга Мора для плоского напряженного состояния, если задан тензор напряжений:

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

16. Найти характерные точки для круга Мора для плоского напряженного состояния, если задан тензор напряжений:

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} 3 & 10 & 0 \\ 10 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

17. Найти характерные точки для круга Мора для плоского напряженного состояния, если задан тензор напряжений:

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 7 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

18. Найти характерные точки для круга Мора для плоского напряженного состояния, если задан тензор напряжений:

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

19. Найти характерные точки для круга Мора для плоского напряженного состояния, если задан тензор напряжений:

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

20. Найти поверхности напряжения Коши в точке М для всестороннего равномерного растяжения.

21. Найти поверхности напряжения Коши в точке М для случая всестороннего равномерного сжатия.

22. Найти поверхности напряжения Коши в точке М для случая одноосного растяжения.

23. Найти поверхности напряжения Коши в точке М для случая одноосного сжатия.

24. Найти поверхности напряжения Коши в точке М для случая простого сдвига.

25. Найти поверхности напряжения Коши в точке М для случая плоского напряженного состояния.

Нахождение инвариантов тензора напряжений

1. Найти инварианты тензора напряжений:

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Решение

Первый или линейный инвариант:

$$I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = 3;$$

Второй или квадратичный инвариант:

$$I_2 = \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{33}\sigma_{11} - \sigma_{12}\sigma_{21} - \sigma_{23}\sigma_{32} - \sigma_{31}\sigma_{13} = -17;$$

Третий или кубический инвариант равен определителю матрицы:

$$I_3 = \det(T_{\sigma}) = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} = -35.$$

2. Найти инварианты тензора напряжений:

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} 9 & 5 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

3. Найти инварианты тензора напряжений:

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

4. Найти инварианты тензора напряжений:

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 5 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5. Найти инварианты тензора напряжений:

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} 9 & 5 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

6. Найти инварианты тензора напряжений:

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 0 \\ 7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

7. Найти инварианты тензора напряжений:

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} 10 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

8. Найти инварианты тензора напряжений:

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} 9 & 5 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

9. Найти инварианты тензора напряжений:

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 0 \\ 8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

10. Найти инварианты тензора напряжений:

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

11. Найти инварианты тензора напряжений:

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 4 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

12. Найти инварианты тензора напряжений:

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Шаровой тензор и девиатор напряжений

1. Разложить тензор напряжений на шаровую часть и девиатор.

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} 12 & 4 & 0 \\ 4 & 9 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Решение

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_{ii}}{3} = \frac{12+9+3}{3} = 8;$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_0 + D_{\sigma};$$

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -5 \end{bmatrix}.$$

2. Разложить тензор напряжений на шаровую часть и девиатор.

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 8 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

3. Разложить тензор напряжений на шаровую часть и девиатор.

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} 10 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

4. Разложить тензор напряжений на шаровую часть и девиатор.

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} 4 & 47 & 0 \\ 47 & 8 & -1 \\ 0 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

5. Разложить тензор напряжений на шаровую часть и девиатор.

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 0 \\ 8 & 8 & -1 \\ 0 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

2. ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ В ТОЧКЕ ТЕЛА

Общие сведения

Металлические тела, обладая способностью сохранять сплошность, при определенных условиях силового на них воздействия могут изменять свою форму и размеры – точки тела от исходного состояния перемещаются в новые положения пространства. В этом случае говорят, что тело принимает (или испытывает) деформацию. Совокупность деформаций, возникающих по различным направлениям в пространстве, можно называть деформированным состоянием в точке.

В курсах теории упругости [4-6] показано, что формулы преобразования для компонентов деформации идентичны формулам для компонентов напряжений. Следовательно, компоненты деформации образуют симметричный тензор второго ранга:

$$T_{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}, \quad (2.1)$$

где ε_{11} , ε_{22} , ε_{33} - линейные компоненты тензора деформаций (линейные деформации);

$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21}$; $\varepsilon_{23} = \varepsilon_{32}$; $\varepsilon_{13} = \varepsilon_{31}$ - угловые (сдвиговые) компоненты тензора деформаций (сдвиговые деформации).

Следует указать, что тензор деформаций можно разложить на шаровой тензор:

$$T_{\varepsilon_0} = \begin{bmatrix} \varepsilon_0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_0 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

и девиатор деформаций:

$$D_{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} - \varepsilon_0 & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} - \varepsilon_0 & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} - \varepsilon_0 \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

Из шарового тензора и девиатора следует, что:

$$(\varepsilon_{11} - \varepsilon_0) + (\varepsilon_{22} - \varepsilon_0) + (\varepsilon_{33} - \varepsilon_0) = 0, \quad (2.4)$$

т.е. в деформированном состоянии, выраженном девиатором деформаций, изменение объема равно нулю, а происходит изменение формы тела. В деформированном состоянии, выраженном шаровым тензором, объем тела изменяется за счет упругих деформаций. При пластических деформациях объем тела не изменяется. Следовательно, при всестороннем равномерном растяжении или сжатии пластические деформации не возникают, а они связаны с изменением формы

тела и образованием сдвигов. В случае несжимаемости тела при пластических деформациях имеем:

$$\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = 0 \quad (2.5)$$

В каждой точке деформированного тела существуют три взаимно перпендикулярные оси, для которых компоненты угловой деформации равны нулю. Эти оси называют главными осями деформации, а соответствующие линейные деформации являются главными линейными деформациями $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$. По одной из главных осей деформация в данной точке будет максимальной, по другой – минимальной, а по третьей – промежуточной.

Интенсивностью деформаций называют величину, пропорциональную квадратному корню из второго инварианта тензора деформаций.

В зависимости от принятого коэффициента пропорциональности различают интенсивность деформаций (линейных):

$$\varepsilon_e = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \sqrt{(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})^2 + (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33})^2 + (\varepsilon_{33} - \varepsilon_{11})^2 + \dots} + \dots \leftarrow \frac{3}{2} (\gamma_{12}^2 + \gamma_{23}^2 + \gamma_{31}^2) \quad (2.6)$$

и интенсивность угловых деформаций:

$$\gamma_e = \sqrt{3} \varepsilon_e$$

Интенсивности деформаций пропорциональны также октаэдрические угловые деформации, действующие по площадкам, равнонаклоненным к трем главным направлениям:

$$\gamma_0 = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2} \quad (2.7)$$

Октаэдрические линейные деформации:

$$\varepsilon_0 = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)/3 \quad (2.8)$$

Аналогично напряженному состоянию можно рассмотреть главные угловые деформации $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ на плоскостях, проходящих через одно из главных направлений $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ и делящих угол между двумя другими направлениями пополам.

Главные угловые деформации связаны с главными линейными деформациями соотношениями

$$\gamma_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \quad \gamma_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \quad \gamma_3 = \varepsilon_3 - \varepsilon_1 \quad (2.9)$$

Аналогично напряженному состоянию для деформаций можно построить эллипсоид деформаций и круги Мора.

При больших суммарных деформациях ($\varepsilon > 15\%$), характерных для процессов обработки металлов давлением, малые деформации имеют место лишь для бесконечно малых промежутков времени.

Большие суммарные деформации вычисляются интегрированием приращений деформаций по пути деформирования в функции некоторого параметра, характеризующего процесс обработки давлением. Если главные оси деформации при этом не изменяют своего положения в пространстве (не вращаются), то эти деформации равны логарифмическим деформациям. В частности, при равномерном растяжении стержня приращение деформации стержня длиной l составляет:

$$d\varepsilon = dl/l. \quad (2.10)$$

Суммарная деформация стержня от начальной длины l_0 до l_1 значительно превышающей начальную, будет:

$$\varepsilon = \int_{l_0}^{l_1} \frac{dl}{l} = \ln \frac{l_1}{l_0}. \quad (2.11)$$

При равномерном сжатии заготовки начальной толщины h_0 до h_1 суммарная логарифмическая деформация:

$$\varepsilon_h = \ln(h_1/h_0) = -\ln \frac{h_0}{h_1}. \quad (2.12)$$

Логарифмические деформации связаны с малыми $\varepsilon = \Delta h/h_0$ зависимостью:

$$\varepsilon_h = \ln[(h_0 - \Delta h)/h_0] = \ln(1 - \varepsilon). \quad (2.13)$$

Различие между логарифмической и малой деформациями незначительно при $\varepsilon < 15-20\%$, а при $\varepsilon = 20\%$ эта величина составляет 10% .

Разделив компоненты приращений деформаций на dt , получим компоненты скоростей деформаций:

$$\dot{\varepsilon}_x = d\varepsilon_x/dt. \quad (2.14)$$

Аналогично можно определить остальные компоненты тензора скоростей деформаций:

$$T_{\dot{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}_{11} & \dot{\varepsilon}_{12} & \dot{\varepsilon}_{13} \\ \dot{\varepsilon}_{21} & \dot{\varepsilon}_{22} & \dot{\varepsilon}_{23} \\ \dot{\varepsilon}_{31} & \dot{\varepsilon}_{32} & \dot{\varepsilon}_{33} \end{bmatrix}. \quad (2.15)$$

Интенсивность скоростей деформаций и другие характеристики определяют аналогично деформациям и скоростям деформаций.

Параметры, характеризующие пластическую деформацию

Деформация металла в холодном состоянии вследствие внутризеренного и межзеренного скольжения, механического дробления кристаллов на части и образование обломков приводят к появлению микропустот в структуре: плотность металла может уменьшиться на 0,1 – 0,2 %. Однако при последующей рекристаллизации холоднодеформированному металлу возвращается прежняя плотность. Подобная общая картина имеет место при горячей обработке, которую можно представить себе как наложение в известной последовательности указанных процессов (упрочнения и рекристаллизации), что обеспечивает сохранение плотности деформированного в горячем состоянии металла.

Если принимать во внимание тот факт, что под действием высоких давлений, возможных в условиях пластической обработки, может иметь место некоторое снижение объема металла благодаря упругому уменьшению межатомных расстояний, а также пренебречь незначительными изменениями плотности при холодной деформации и все относить к уже в достаточной мере продеформированному телу, то допустимо считать объем деформируемого металла сохраняющимся неизменным. Данное положение, которое при обработке металла давлением называют условием постоянства объема, имеет важное значение при расчетах технологических операций и анализе процессов деформации, так как позволяет связать между собой размеры тела до пластической обработки, в момент обработки и после.

Для прямоугольного параллелепипеда, который в процессе деформации условно сохраняет свою форму и имеет размеры до обработки H, B, L и после – h, b, l , условие постоянства объема можно записать следующим образом:

$$HBL = hbl \quad \text{или} \quad \frac{H}{h} = \frac{b}{B} \cdot \frac{l}{L} \quad (2.16)$$

Величины $\frac{H}{h}$, $\frac{b}{B}$ и $\frac{l}{L}$ являются показателями, характеризующими изменение геометрических размеров тела при деформации, и имеют соответствующий смысл и наименование.

Отношение $\frac{l}{L}$ называется вытяжкой и характеризует изменение продольных размеров тела. Вытяжка обозначается символом μ . Для прямоугольного сечения:

$$\mu = \frac{l}{L} = \frac{HB}{hb} = \frac{F_0}{F}, \quad (2.17)$$

где F_0 и F – сечения параллелепипеда до и после деформации.

Соотношение размеров тела по высоте до и после обработки $\frac{H}{h}$ называют высотной деформацией (или уковкой), а изменение размеров в поперечном направлении $\frac{b}{B}$ – поперечной деформацией (или уширением).

Уравнение постоянства объема можно представить в виде $\frac{H}{h} \cdot \frac{B}{b} \cdot \frac{L}{l} = 1$, а прологарифмировав, получим

$$\ln \frac{H}{h} + \ln \frac{B}{b} + \ln \frac{L}{l} = 0$$

Если ребра параллелепипеда сохраняют параллельность и после деформации, то, обозначив $\ln \frac{H}{h}$ через δ_H , $\ln \frac{B}{b}$ – через δ_B , а $\ln \frac{L}{l}$ – через δ_L , имеем:

$$\delta_H + \delta_B + \delta_L = 0 \quad (2.18)$$

Логарифмические степени деформации $\delta_H, \delta_B, \delta_L$ представляют собой интегралы бесконечно малых изменений размеров тела в определенном направлении, отнесенных к этому размеру в каждый момент обработки. Например, логарифмическая степень высотной деформации определяется так:

$$\delta_H = - \int_H^h \frac{dh}{h'} = \ln \frac{H}{h} \quad (2.19)$$

(знак минус перед интегралом означает уменьшение размера по высоте).

Если все члены уравнения умножить на объем деформируемого тела V , то

$$V\delta_H + V\delta_B + V\delta_L = 0 \quad (2.20)$$

Составляющие этого уравнения являются величинами, каждая из которых представляет собой смещенный объем деформируемого тела в направлении соответствующей оси. Это уравнение позволяет дать другую формулировку условию постоянства объема: сумма смещенных объемов пластически деформируемого тела по трем взаимно перпендикулярным направлениям равна нулю. При этом максимальный по своему значению смещенный объем $V\delta_H$ будет иметь знак, противоположный другим, а по абсолютной величине равен их сумме.

В ряде случаев пластической обработки для характеристики некоторых условий процесса используют абсолютные величины: абсолютное обжатие $H - h = \Delta h$, абсолютное уширение $b - B = \Delta b$ и др. Так как эти величины не могут дать относительной оценки деформации, то широкое применение нашли относительные разности:

$$\frac{H-h}{H}, \frac{H-h}{h}, \frac{b-B}{B}, \frac{b-B}{b}, \frac{F_0-F}{F_0}, \frac{F_0-F}{F} \text{ и т.д.}$$

Практические задания

Частные случаи НДС

1. Записать тензоры напряжений и деформаций для плоского напряженного состояния в плоскости x_1-x_2 .

Решение

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad T_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

2. Записать тензоры напряжений и деформаций для плоского напряженного состояния в плоскости x_2-x_3 .

3. Записать тензоры напряжений и деформаций для плоского напряженного состояния в плоскости x_1-x_3 .

4. Записать тензоры напряжений и деформаций для линейного напряженного состояния.

5. Записать тензоры напряжений и деформаций для объемного напряженного состояния.

6. Записать тензоры напряжений и деформаций для плоского напряженно-деформированного состояния в плоскости x_2-x_3 .

7. Записать тензоры напряжений и деформаций для плоского напряженно-деформированного состояния в плоскости x_1-x_3 .

8. Записать тензоры напряжений и деформаций для плоского напряженно-деформированного состояния в плоскости x_1-x_2 .

9. Записать тензоры напряжений и деформаций для осесимметричного напряженно-деформированного состояния.

10. Записать условие постоянства объема через главные компоненты тензора деформации для плоского напряженного состояния.

11. Записать условие постоянства объема через главные компоненты тензора деформации для плоского деформированного состояния.

12. Записать условие постоянства объема через главные компоненты тензора деформации для плоского напряженно-деформированного состояния.

13. Записать условие постоянства объема через главные компоненты тензора деформации для линейного напряженного состояния.

14. Записать систему геометрических уравнений для плоского напряженного состояния.

15. Записать систему геометрических уравнений для плоского деформированного состояния.

16. Записать систему геометрических уравнений для объемного напряженного состояния.

17. Записать систему геометрических уравнений для линейного напряженного состояния.

18. Записать систему геометрических уравнений для плоского напряженно-деформированного состояния.

Нахождение инвариантов тензора деформаций

1. Найти инварианты тензора деформаций:

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

2. Найти инварианты тензора деформаций:

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

3. Найти инварианты тензора деформаций:

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

4. Найти инварианты тензора деформаций:

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5. Найти инварианты тензора деформаций:

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

6. Найти инварианты тензора деформаций:

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

7. Найти инварианты тензора деформаций:

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

8. Найти инварианты тензора деформаций:

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

9. Найти инварианты тензора деформаций:

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 0 \\ 8 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

10. Найти инварианты тензора деформаций:

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

11. Найти инварианты тензора деформаций:

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

12. Найти инварианты тензора деформаций:

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} 9 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

13. Найти инварианты тензора деформаций:

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

14. Найти инварианты тензора деформаций:

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 4 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

15. Найти инварианты тензора деформаций в главной системе координат:

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 6 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{bmatrix}$$

16. Найти инварианты тензора деформаций в главной системе координат:

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 6 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

17. Найти инварианты тензора деформаций в главной системе координат:

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 6 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Оценка степени деформации

Найти показатели абсолютной и относительной деформации, если известны начальные размеры тела и конечные толщина и ширина.

Таблица 2.1

Исходные данные

Номер варианта	Исходные размеры, мм			Конечные размеры, мм	
	Высота Н	Ширина В	Длина L	Высота h	Ширина b
1	2	20	70	1	21
2	3	21	80	2	22
3	4	22	90	3	23
4	5	23	100	4	24
5	6	24	70	5	25
6	7	25	80	6	26
7	8	26	90	7	27
8	9	27	100	8	28
9	2	18	110	0,5	20
10	3	19	120	1,5	21
11	4	20	130	3	22
12	5	21	110	4	24
13	6	22	120	5	25
14	7	26	130	6	28

3. ПОНЯТИЕ МЕХАНИЧЕСКОЙ СХЕМЫ ДЕФОРМАЦИИ

Схемы напряженного состояния

В практике возможны различные варианты напряженного состояния, различающиеся направлением напряжений, наличием или отсутствием их по каким-либо осям. С.И. Губкин классифицировал схемы напряженного состояния и свел их к девяти случаям (рис.3.1). Схемы разделены на три группы и представлены графически в виде кубиков, грани которых ориентированы в направлении действия главных напряжений. Наличие напряжения и его направление обозначаются стрелкой.

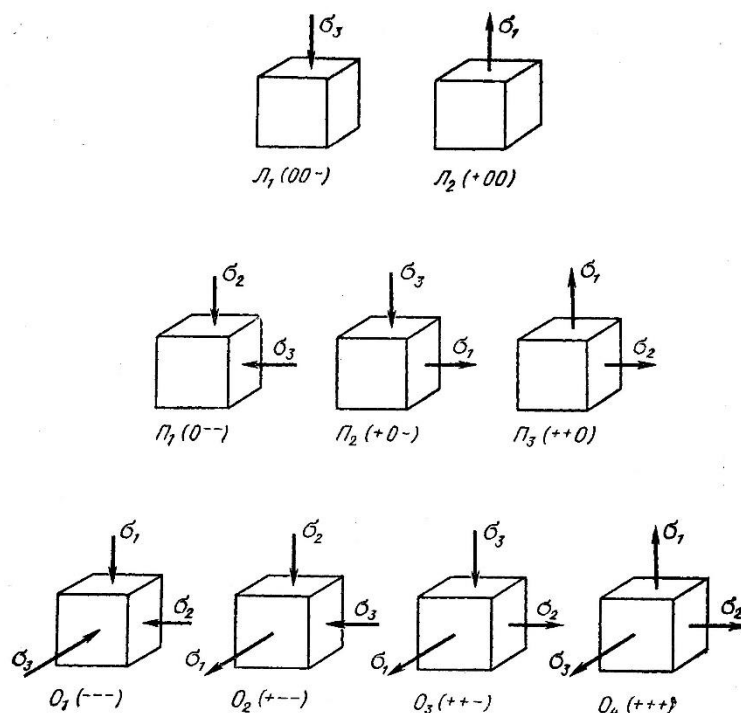


Рис. 3.1. Схемы напряженного состояния

Схемы линейного растяжения и сжатия (Л) трудно осуществимы, однако с определенными допущениями к ним могут быть отнесены некоторые случаи, встречающиеся в практике, например растяжение тела, длина которого значительно больше его размеров в остальных двух измерениях (растяжение струны, канатов в подвесных конструкциях и др.).

Вторая группа, состоящая из трех схем, характеризуется отсутствием напряжения по одной из осей и называется плоской схемой напряженного состояния (П). Эта схема с известным приближением может быть создана при растяжении тонкой пластины по контуру.

Объемное напряженное состояние (О) возникает почти при всех процессах обработки металлов давлением (прокатке, ковке, волочении и др.).

Схемы деформированного состояния

Графическое представление о наличии и знаке главных деформаций ввел С.И. Губкин в виде схем деформации, в которых классифицированы практические случаи обработки металлов давлением (рис. 3.2).

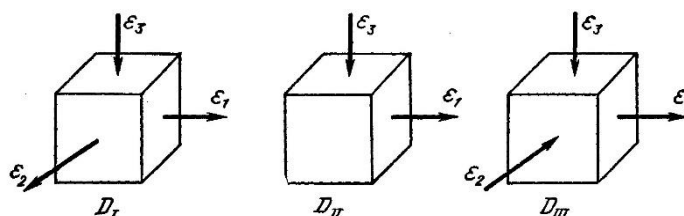


Рис. 3.2. Схемы деформированного состояния

Из условия несжимаемости получаем, что все три главные деформации не могут иметь одинаковый знак, так как их сумма при этом будет отлична от нуля. Следовательно, возможны только разноименные схемы. Реально осуществимы одна плоская схема деформации D_{II} и две объемные D_I , D_{III} .

К схеме D_I относится большинство процессов обработки металлов давлением, в том числе и наиболее распространенные ковка и прокатка. В процессе осаживания или прокатки происходят обжатие металла по высоте (металл получает отрицательные перемещения) и течение в ширину (уширение) и длину (вытяжка).

Если перемещение металла по тем или иным причинам происходит только в двух направлениях (в одной плоскости), то деформация называется плоской. Это наблюдается, например, при штамповке, когда форма штампа такая, что металл в результате осаживания течет только в поперечном направлении. Примером плоской деформации может быть также прокатка тонкого широкого листа, при которой относительная деформация по ширине практически отсутствует. Заметим, что в обоих примерах схема деформации плоская D_{II} , но схема напряженного состояния объемная (O_I).

К схеме D_{III} могут быть отнесены случаи волочения и выдавливания сплошных и полых тел.

Практические задания

Механические схемы для различных процессов ОМД

Прокатка, волочение, прессование, ковка, штамповка представляют собой различные виды обработки металла в пластическом состоянии [3, 7-43].

Прокатка металла является таким видом пластической обработки, когда исходный продукт пропускается в щель между вращающимися валками прокатного стана. При этом изменяются форма и размеры поперечного сечения тела и,

как правило, увеличиваются его продольные размеры. Существуют три основных способа прокатки, имеющих определенное отличие по характеру выполнения деформации: продольная, поперечная и поперечно-винтовая (или косая).

При продольной прокатке деформация металла осуществляется между вращающимися в разные стороны валками (рис. 3.3).

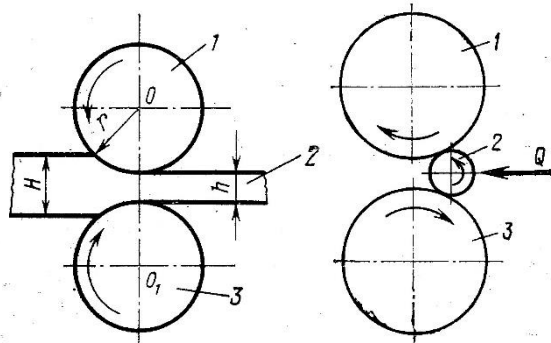


Рис. 3.3. Схема продольной прокатки: 1-верхний валок; 2-прокатываемая полоса; 3-нижний валок

Рис. 3.4. Схема поперечной прокатки: 1-верхний валок; 2-прокатываемое изделие; 3-нижний валок

Схема поперечной прокатки в простейшем случае дается на рис. 3.4, где видно, что оси прокатных валков и обрабатываемого тела параллельны (или пересекаются под небольшим углом). Оба валка вращаются в одном направлении, а заготовка круглого сечения – в противоположном. В процессе поперечной прокатки обрабатываемое тело удерживается в валках с помощью специального приспособления. Данным способом производят изделия, представляющие собой тела вращения (шары, оси, шестерни и пр.).

Поперечно-винтовая, или косая прокатка во вращающихся в одном направлении валках, установленных в прокатной клети под некоторым углом друг к другу (рис.3.5). Станы косой прокатки используются при производстве труб, главным образом для прошивки слитка или заготовки в гильзу. Наклон обоих валков по отношению к оси обрабатываемого тела вызывает в момент соприкосновения металла с вращающимися валками появление силы, направленной вдоль оси заготовки, и силы, направленной по касательной к ее поперечному сечению. Совместное действие этих сил обеспечивает вращение и втягивание обрабатываемой заготовки в сужающуюся щель и деформацию.

Волочение металла – это протягивание прутка круглой или другой формы поперечного сечения через отверстие волочительного очка (волоку), выходящие размеры сечения которого меньше сечения исходного продукта. Волочение выполняется тяговым усилием, приложенным к переднему концу обрабатываемого тела (рис. 3.6). Данным способом получают проволоку всех видов, прутки с высокой точностью поперечных размеров и трубы разнообразных сечений.

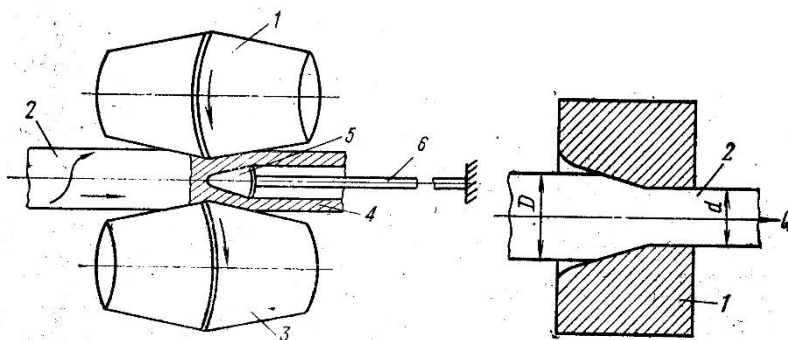


Рис. 3.5. Схема кривой (винтовой) прокатки (вид сверху): 1-правый валок; 2-заготовка; 3-левый валок; 4- гильза; 5-оправка; 6-штанга (стержень)

Рис. 3.6. Схема процесса волочения: 1-волокна; 2- пруток

Прессование металла – это вытеснение исходного продукта (чаще всего цилиндрической формы), помещенного в контейнер, через отверстие матрицы (рис. 3.7). При этом выходящий конец продукта получает сечение, соответствующее контуру отверстия в матрице. Прессованием получают разнообразный сортамент профилей – прутков и труб из цветных и черных металлов.

Ковка и штамповка металла включает такие процессы получения изделий, как свободная ковка, горячая штамповка и штамповка листового и пруткового материала в холодном состоянии.

При свободной ковке деформация металла осуществляется между бойками, чаще всего плоскими. Однако применяют и вырезные и закругленные бойки. Нижний боек обычно неподвижен, верхний совершает возвратно-поступательное движение (рис. 3.8). В результате многократного и непрерывного воздействия инструмента заготовка постепенно приобретает необходимую форму и размеры изделия.

При объемной штамповке свободное перемещение металла по инструменту принудительно ограничивается поверхностями и выступами, имеющимися в отдельных частях инструмента - штампа. В конечный период деформации штампы образуют единую замкнутую полость, соответствующую конфигурации и размерам поковки (рис.3.9).

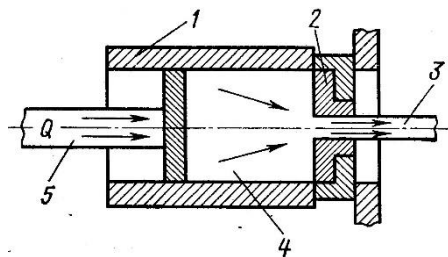


Рис. 3.7. Схема процесса прессования: 1-контейнер; 2-матрица; 3-изделие; 4-слиток; 5-пуансон

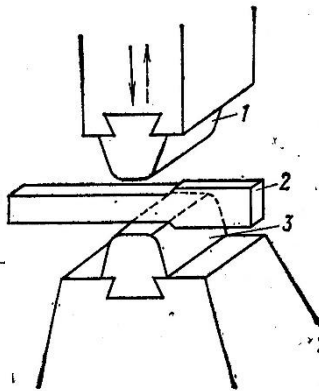


Рис. 3.8. Схема процесса свободнойковки: 1-верхний боек; 2-обрабатываемая заготовка; 3- нижний боек

Листовая штамповка является таким видом пластической обработки металла, когда для получения деталей типа колпачков (рис. 3.10), втулок и других в качестве исходного материала используют лист или ленту. При этом обработка выполняется без значительного изменения толщины заготовки.

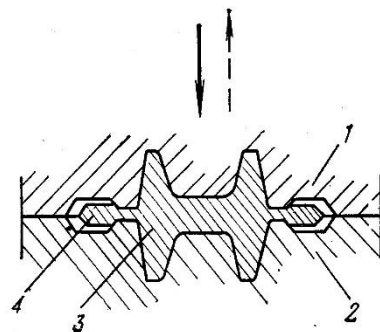


Рис. 3.9. Схема объемной штамповки: 1-верхняя часть штампа; 2-нижняя часть штампа; 3-изделие; 4-облой (заусенец)

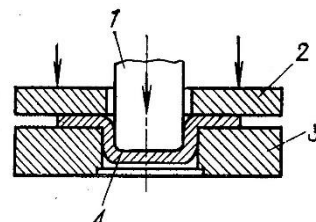
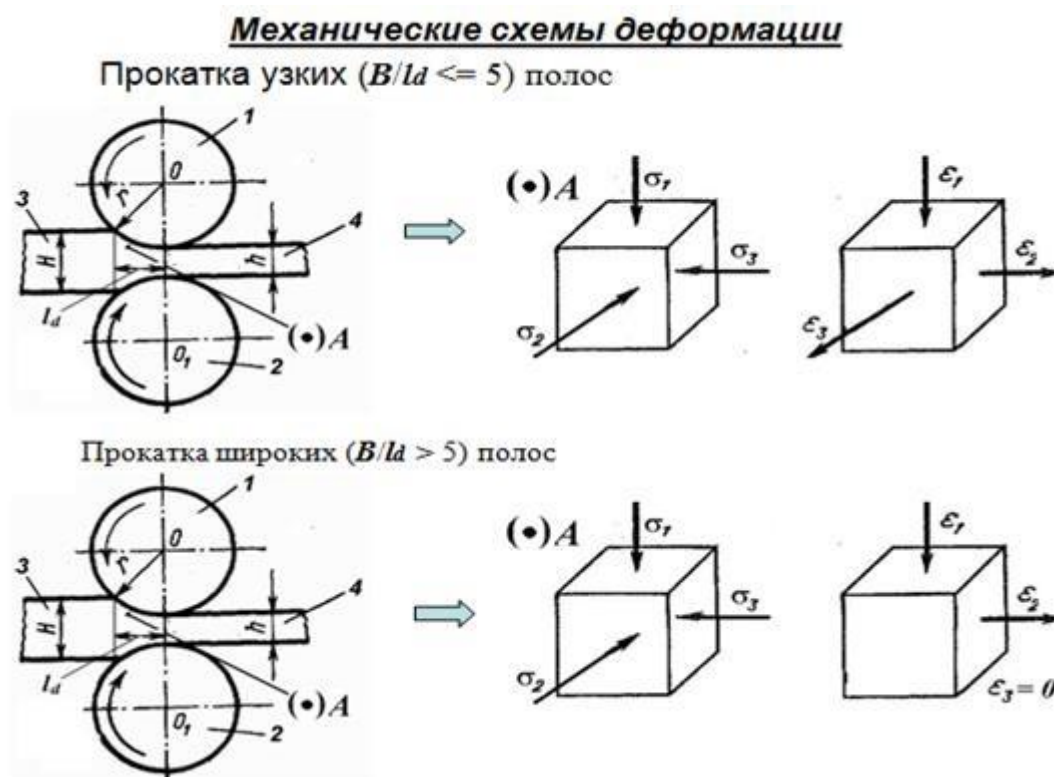


Рис. 3.10. Схема листовой штамповки колпачка: 1-пуансон; 2-прижим; 3-матрица; 4-изделие

Среди различных методов пластической обработки прокатка занимает особое положение, поскольку данным способом производят изделия, пригодные для непосредственного (в состоянии поставки) использования в строительстве и машиностроении (шпунт, рельсы, профили сельскохозяйственного машиностроения и пр.). Прокаткой получают также разнообразные виды заготовок, которые являются исходным материалом для других способов обработки. Так, горячекатаная и холоднокатаная листовая сталь, полосы и ленты в больших количествах идут для листовой штамповки. При ковке в штампах в качестве исходного продукта используют преимущественно катаную заготовку. Исходным материалом при волочении является катанка, получаемая на проволочных станах. Через валки прокатных станов проходит 75-80% всего выплавляемого металла.

1. Нарисовать механические схемы напряжений и деформаций для процесса продольной прокатки.

Решение



2. Нарисовать механические схемы напряжений и деформаций для процесса поперечной прокатки.

3. Нарисовать механические схемы напряжений и деформаций для процесса поперечно-винтовой прокатки.

4. Нарисовать механические схемы напряжений и деформаций для процесса волочения.

5. Нарисовать механические схемы напряжений и деформаций для процесса прессования.

6. Нарисовать механические схемы напряжений и деформаций для процесса осадки без контактного трения.

7. Нарисовать механические схемы напряжений и деформаций для процесса осадки с контактным трением.

8. Нарисовать механические схемы напряжений и деформаций для процесса объемной штамповки.

9. Нарисовать механические схемы напряжений и деформаций для процесса листовой штамповки.

10. Нарисовать механические схемы напряжений и деформаций для процесса формовки гнутых профилей.

4. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ. ПРИКЛАДНАЯ ЗНАЧИМОСТЬ

Теория пластичности – раздел механики сплошной среды, изучающий формоизменение твердых тел из пластически деформируемого материала как результат физических воздействий (кинематических, силовых, электромагнитных, тепловых) [44].

Пластичность – свойство сплошной среды сохранять деформации после того, как исчезнут напряжения, вызвавшие эти деформации. Пластичность, упругость, вязкость и их комбинации как механические свойства изучают в отдельном разделе механики сплошной среды – реологии.

Тело – часть пространства, ограниченная поверхностью и заполненная сплошной средой.

Формоизменение тела – процесс, изменяющий расстояние хотя бы между двумя точками тела. Формоизменение можно описать уравнением изменения его поверхности во времени. Не следует говорить о «деформировании тела», так как научное понятие деформирования относится к процессу изменения геометрических характеристик бесконечно малой материальной частицы, из бесконечного множества которых составлено тело.

Теория пластичности как естественно-научная дисциплина – одно из теоретических оснований научно-технической дисциплины – теории обработки металлов давлением, изучающей целенаправленное формоизменение и свойствообразование тел из пластически деформируемых металлов как результат взаимодействия с инструментами (телами, обеспечивающими необходимые воздействия на обрабатываемые тела). Теория пластичности изучает поведение одного тела, теория обработки металлов давлением изучает целенаправленное взаимодействие, по крайней мере, двух тел, одно из которых пластически деформирует материал другого.

Теорию пластичности часто рассматривают как чисто теоретическую дисциплину, которую можно применять для анализа и расчета лишь некоторых идеализированных случаев пластического деформирования. При этом не рассматривается конкретный технический процесс, который привел к той или иной задаче. На самом же деле эта наука обладает достаточной глубиной и степенью детализации, которые позволяют решать не только абстрактные, но и конкретные технические и технологические задачи. Причем следует отметить, что именно в таком направлении теория пластичности более важна для специалиста по обработке металлов давлением.

Классификация задач

Если формоизменение характеризовать воздействиями на формоизменяемое тело, результатами формоизменения, параметрами тела, общими закономерностями, то можно в зависимости от исходной и требуемой информации выделить четыре типа задач, как это следует из таблицы 4.1.

Число типов задач удвоится, если различать характеристики детерминированные и случайные.

Если известные результаты формоизменения рассматривать как цель, то выбор воздействий при изменяющихся закономерностях процесса и параметрах тела можно назвать задачей управления формоизменением. Если при этом ввести понятие наилучшего достижения цели (критерия оптимальности), то можно говорить об оптимальности управления.

Если для достижения цели необходимо определить параметры тела, можно говорить о задаче проектирования и задаче оптимального проектирования.

Таблица 4.1

Типы задач теории пластичности

Характеристика процесса	Информация о характеристиках			
	Известны	Требуется определить	Известны	Известны
Воздействия	Известны	Требуется определить	Известны	Известны
Общие закономерности	Известны	Известны	Требуется определить	Известны
Параметры тела	Известны	Известны	Известны	Требуется определить
Результаты формоизменения	Требуется определить	Известны	Известны	Известны
Задачи	Прямая	Обратная	Идентификации закономерностей	Идентификации параметров

В теории пластичности в основном разработаны методы решения прямых задач. Однако итерирование решений прямых задач (повторение с использованием результатов решений) позволяет находить решение обратных и идентификационных задач.

Постановка прямых задач

Для выявления средствами математики результатов пластического формоизменения тела необходимо предварительно составить перечни известных и выявляемых характеристик процесса с указанием размерностей, определить форму представления известных и неизвестных характеристик, определить численно или аналитически значения известных характеристик.

Воздействия, параметры тела и результаты формоизменения задают либо в виде величин (скалярных, векторных), либо в виде полей. Общие закономерности формоизменения задают уравнениями и системами уравнений (алгебраических, дифференциальных, интегральных).

Как результат формоизменения можно рассматривать скалярные поля: координат точек поверхности, температур, механических свойств, инвариантов векторных и тензорных величин удельных работ и мощностей; векторные поля: перемещений, скоростей перемещений, ускорений, градиентов скалярных полей; тензорные поля: напряжений, деформаций, скоростей деформаций.

Формами представления скалярных полей могут быть: явное алгебраическое уравнение, в число аргументов которого входят координаты; таблица чисел для достаточно большого, но конечного числа точек с известными координатами; графические изображения явных алгебраических функций в виде линий и поверхностей в аксонометрии, множества линий равного значения.

Формой представления векторных и тензорных полей могут быть поля соответствующих скалярных компонент. Например, для представления векторного поля скоростей перемещений необходимо три скалярных уравнения распределения компонент векторов в трехмерном пространстве. Графическое изображение векторных и тензорных полей в связи с этим требует нескольких графических изображений скалярных полей.

Для дальнейшего использования результатов решений прямых задач теории пластичности в обратных и идентификационных задачах, а также в задачах теории обработки металлов давлением с целью оптимизации или рационализации результатов решения необходимо преобразовать векторные и тензорные поля в скалярные поля инвариантов, а их в свою очередь сводить к одной скалярной величине целевой функции. Только в этом случае с помощью отношения «больше-меньше» можно будет утверждать, что один результат формоизменения лучше другого.

Для описания полей физических величин, которыми представляют воздействия, параметры тела и результаты формоизменения, необходимо задать систему координат.

Обычно используют декартову или цилиндрическую систему координат, но в некоторых случаях полезнее будут другие. Например, для описания формоизменения при прокатке будет эффективным применение бицилиндрической системы координат.

Заметим, что некоторые методы решения прямых задач теории пластичности (конформных отображений, линий скольжения, интегральных преобразований) предполагают построение таких криволинейных систем координат, в которых решение существенно упрощается, «становится очевидным».

Параметры формоизменяемого тела задаем поверхностью тела и исходными полями физических величин, определяющих неизменяемые при формоизменении свойства тела и поля изменяющихся величин в момент начала воздействия (начальные условия). Например, компоненты поля напряжений могут иметь нулевые значения, и ненулевые в случае остаточных напряжений первого рода.

Воздействия, приводящие к пластическому формоизменению (граничные условия), задаем в виде скалярных полей всех или некоторых компонентов векторных полей перемещений, скоростей перемещений, тензорных полей напряжений на всей или части поверхности тела, полей компонентов массовых сил (сил тяжести, ускорения, электромагнитных) в объеме тела, скалярных полей

удельных мощностей тепловыделения, температур в объеме и на поверхности тела.

Поля физических величин, характеризующих параметры формоизменяемого тела и формоизменяющие воздействия, представляют либо явными алгебраическими уравнениями функций величин от координат всех точек области тела, либо значениями этих величин в достаточно большом числе точек, достаточно равномерно распределенных в рассматриваемой области.

Общие закономерности формоизменения можно задать дифференциальными уравнениями связи между производными от функций распределения компонентов тензоров напряжений, дифференциальными уравнениями связи между производными от функций перемещений и деформаций, дифференциальными уравнениями теплопроводности для малой окрестности точки тела.

Общие закономерности формоизменения также можно задать интегральными уравнениями законов сохранения: массы, количества движения, момента количества движения, энергии для всего тела.

Общие закономерности формоизменения, кроме того, можно записать вариационными уравнениями минимизации функционалов (мощности и работы формоизменения) для всего тела.

Математическая постановка любой задачи, в том числе и задачи теории пластичности, означает запись замкнутой системы исходных уравнений. Основные исходные системы уравнений для теории пластичности дает механика сплошных сред.

1. Система дифференциальных уравнений равновесия или уравнений статики:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} = 0; \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} = 0; \\ \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} = 0. \end{cases} \quad (4.1)$$

где $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$ - нормальные компоненты тензора напряжений (нормальные напряжения);

$\sigma_{12} = \sigma_{21}; \sigma_{23} = \sigma_{32}; \sigma_{13} = \sigma_{31}$ - касательные компоненты тензора напряжений (касательные напряжения).

Эта система из трех уравнений содержит шесть неизвестных – это нормальные и касательные напряжения. Следовательно, только из статических условий все компоненты тензора напряжений найти невозможно.

2. Система дифференциальных геометрических (кинематических) уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{11} = \frac{\partial U_1}{\partial x_1}; \\ \varepsilon_{22} = \frac{\partial U_2}{\partial x_2}; \\ \varepsilon_{33} = \frac{\partial U_3}{\partial x_3}; \\ \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2} + \frac{\partial U_2}{\partial x_1} \right); \\ \varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_2}{\partial x_3} + \frac{\partial U_3}{\partial x_2} \right); \\ \varepsilon_{13} = \varepsilon_{31} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3} + \frac{\partial U_3}{\partial x_1} \right). \end{array} \right. \quad (4.2)$$

где где $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}$ - линейные компоненты тензора деформаций (линейные деформации);

$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21}; \varepsilon_{23} = \varepsilon_{32}; \varepsilon_{13} = \varepsilon_{31}$ - угловые компоненты тензора деформаций (угловые деформации);

U_1, U_2, U_3 - компоненты перемещений.

Эта система из шести уравнений содержит девять неизвестных – это линейные и угловые деформации, компоненты перемещений. Эти неизвестные невозможно определить из системы геометрических уравнений.

Две представленные системы из девяти уравнений имеют пятнадцать неизвестных. Для получения замкнутой системы необходимо иметь еще шесть уравнений, которые не содержат новых неизвестных.

3. Система физических или определяющих уравнений.

Они устанавливают взаимосвязи между компонентами напряжений и деформаций для определенной среды с известными механическими свойствами. Причем принципиальное значение начинают выполнять реологические свойства среды (упругость, пластичность, вязкость или их сочетание). Однако для сред с различными реологическими свойствами структура физических уравнений может быть подобной уравнениям обобщенного закона Гука.

Для линейно-упругой среды в уравнениях будут иметь место константы упругости, зависящие только от свойств среды:

E, G – модули упругости первого и второго рода соответственно;

ν – коэффициент Пуассона.

Тогда для нелинейных сред запишем систему определяющих уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{11} = \frac{1}{E'} [\sigma_{11} - m'(\sigma_{22} + \sigma_{33})]; \\ \varepsilon_{22} = \frac{1}{E'} [\sigma_{22} - m'(\sigma_{11} + \sigma_{33})]; \\ \varepsilon_{33} = \frac{1}{E'} [\sigma_{33} - m'(\sigma_{11} + \sigma_{22})]; \\ \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \frac{\sigma_{12}}{2G'}; \\ \varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} = \frac{\sigma_{23}}{2G'}; \\ \varepsilon_{13} = \varepsilon_{31} = \frac{\sigma_{13}}{2G'}. \end{array} \right. \quad (4.3)$$

где E', G', m' - переменные модули деформации, зависящие не только от свойств среды, но и от самого достигнутого уровня деформации. Это отражает нелинейную связь между компонентами деформаций и напряжений в пластической области.

Представленные три системы в совокупности дают 15 уравнений с 15 неизвестными функциями: $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}; \sigma_{12} = \sigma_{21}; \sigma_{23} = \sigma_{32}; \sigma_{13} = \sigma_{31}; \varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}; \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21}; \varepsilon_{23} = \varepsilon_{32}; \varepsilon_{13} = \varepsilon_{31}; U_1, U_2, U_3$.

Для решения этой системы требуется воспользоваться граничными условиями. Как правило, в задачах теории пластичности конкретное условие является граничным, если относится к граничной поверхности деформированного тела.

Различают три типа граничных условий.

1. Статические граничные условия задают с помощью распределения компонентов напряжений на граничной поверхности деформируемого тела:

$$\sigma_{ij} = \Phi_{\sigma}(x_{1\Gamma}, x_{2\Gamma}, x_{3\Gamma}) \quad (4.4)$$

2. Геометрические граничные условия задают с помощью распределения компонентов деформаций или перемещений на граничной поверхности:

$$\begin{array}{l} \varepsilon_{ij} = \Phi_{\varepsilon}(x_{1\Gamma}, x_{2\Gamma}, x_{3\Gamma}); \\ U_{ij} = \Phi_u(x_{1\Gamma}, x_{2\Gamma}, x_{3\Gamma}). \end{array} \quad (4.5)$$

Если продифференцировать во времени геометрические граничные условия, то получим кинематические:

$$\xi_{ij} = \Phi_{\xi}(x_{1\Gamma}, x_{2\Gamma}, x_{3\Gamma}) \quad (4.6)$$

3. Смешанные граничные условия.

В этом случае на части граничной поверхности задают статические условия, а на другой части геометрические или кинематические условия.

Для решения задач теории пластичности большое значение имеют начальные условия на граничной поверхности. Это распределение напряжений или деформаций в момент начала отсчета времени:

$$\sigma_{ij}(t = 0), \varepsilon_{ij}(t = 0) \quad (4.7)$$

Сочетания начальных и граничных условий называют краевыми условиями.

Задачи, в которых решение всегда диктуется краевыми условиями, называются краевыми задачами. Задачи пластического деформирования твердых тел, как правило, являются краевыми.

Упрощения характеристик процесса формоизменения

Упрощение воздействий на тело состоит в пренебрежении теми воздействиями, которые мало влияют на искомые поля физических величин, а также в упрощении функций, которыми описывают воздействия. Например, пренебрегают удельными силами тяжести или считают, что значения некоторой скалярной функции, заданной на поверхности, одинаковы.

Упрощение общих закономерностей формоизменения состоит в переходе к пространству с меньшей размерностью, идеализации механических свойств материалов, отождествлении границы зоны пластичности с границами тела, выборе системы координат, замене нестационарных процессов формоизменения стационарными, предположении изотермичности или адиабатичности процесса. Например, трехмерные (объемные) задачи сводят к двумерным (плоским) или даже одномерным (линейным), пренебрегают упругостью или вязкостью материала, рассматривают такие стадии формоизменения, когда границы зоны пластической деформации неизменны, либо рассматривают формоизменения в течение такого короткого промежутка времени, что изменением формы тела можно пренебречь.

Упрощение параметров тела состоит в идеализации формы тела, в предположении изотропности свойств и предположении постоянства значений физических величин по всему объему. Например, пренебрегают шероховатостью при задании формы тела, вместо тела конечных размеров рассматривают полупространство, ограниченное плоскостью.

Упрощение одних характеристик приводит к упрощению других. Упрощения изменяют постановку задачи, обеспечивают ее решение, но снижают содержательность и точность решения.

Условия пластичности при ОМД

Начало пластичности (текучести) связано только с напряженным состоянием и определяется условиями пластичности. Условие постоянства максимального касательного напряжения Треска-Сен-Венана имеет вид:

$$\max\{|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_1 - \sigma_3|\} = \sigma_T, \quad (4.8)$$

где σ_T - предел текучести.

Энергетическое условие пластичности Губера-Мизеса:

$$\sigma_e = \sigma_T. \quad (4.9)$$

Отличительной особенностью энергетического условия являются его нелинейность из-за квадратичной функции напряжений и учет промежуточного (среднего) главного нормального напряжения. Однако это главное напряжение незначительно влияет на соотношение между напряжениями в пределах $\beta = 1,0 \div 1,15$. Поэтому квадратичное условие пластичности в главных напряжениях можно заменить линейным:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \beta \sigma_T. \quad (4.10)$$

Следует указать, что при равенстве двух каких-либо главных напряжений оба условия пластичности совпадают.

Реологические модели

Создание общей теории определяющих уравнений является одной из основных задач важного раздела механики сплошных сред реологии (от греческого «гео» - теку, наука о течении материала). Реология должна ответить на вопрос: каковы напряжения (деформации) в окрестности данной материальной частицы в момент времени t при известном процессе ее деформирования (нагружения) [4].

Рассматривая результаты экспериментов по растяжению цилиндрических образцов, можно отметить следующие фундаментальные свойства реального металла: упругость, вязкость и пластичность. Особенности поведения сплошной среды под действием приложенной нагрузки могут быть иллюстрированы комбинацией этих фундаментальных свойств.

В связи с этим удобно ввести простые реологические модели, описывающие поведение некоторых идеализированных сред, изображая их условно механическими элементами.

Будем рассматривать линейное напряженное состояние (растяжения стержня). Обозначим σ - соответствующее напряжение, ε - относительное удлинение, ξ - скорость относительного удлинения, μ' - коэффициент вязкости.

Модель линейно-упругой среды, подчиняющейся закону Гука:

$$\sigma = E\varepsilon, \quad (4.11)$$

будем условно изображать в виде пружины (рис. 4.1).

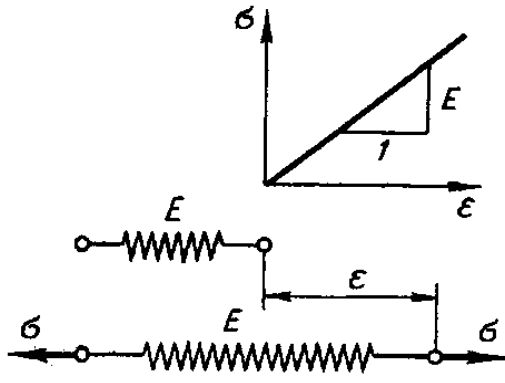


Рис. 4.1. Реологическая модель линейно-упругой среды

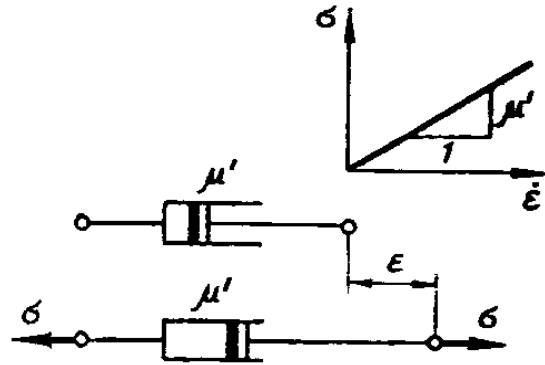


Рис. 4.2. Модель линейно-вязкой среды

Модель линейно-вязкой среды, следующей закону вязкости Ньютона:

$$\sigma = \mu' \frac{d\epsilon}{dt} \quad (4.12)$$

может быть представлена в виде поршня, перемещающегося в цилиндре, наполненном вязкой жидкостью. При этом жидкость вытекает через зазор между стенкой цилиндра и поршнем (рис. 4.2).

При построении модели жестко-пластической среды будем предполагать, что при напряжениях ниже предела текучести деформации отсутствуют. Пластическое течение имеет место при напряжении, удовлетворяющем условию текучести:

$$\sigma = \sigma_S \quad (4.13)$$

Представим эту модель в виде груза, покоящегося на плоскости (элемент сухого трения; рис. 4.3, а).

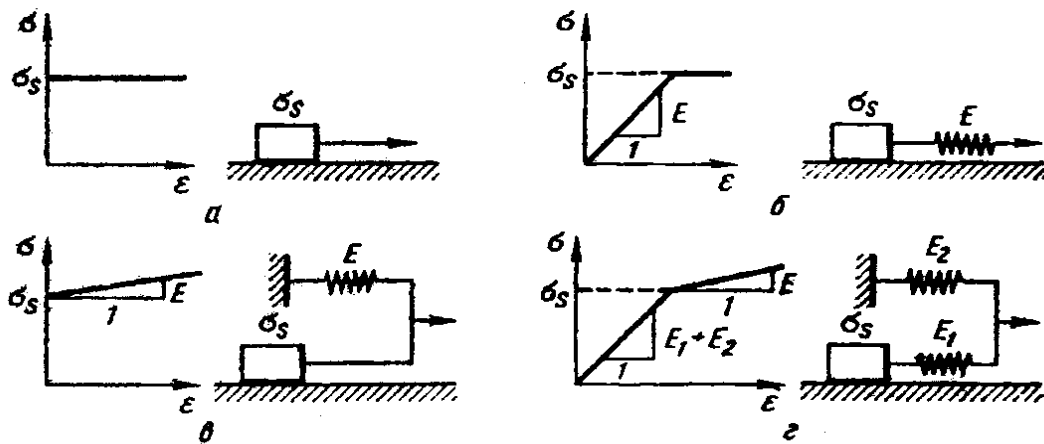


Рис. 4.3. Модели пластических сред
 а – жестко-пластическая среда; б – упруго-пластическая среда;
 в – жестко-пластическая линейно-упрочняющаяся среда;
 г – упруго-пластическая линейно-упрочняющаяся среда

Перейдем к рассмотрению простейших комбинированных моделей. Соединим последовательно упругий и пластический элементы (рис. 4.3, б). В результате получим модель упруго-пластической среды. Диаграмма σ - ε для этой среды показана на рис. 4.3, б. Общая деформация при этом состоит из двух частей: упругой ε^e и пластической ε^p :

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \quad (4.14)$$

При снятии нагрузки упругая деформация исчезает, остается пластическая деформация. На рис. 4.3, в, г представлены диаграммы σ - ε для жестко-пластической и упруго-пластической линейно-упрочняющейся среды.

Соединим последовательно упругий и вязкий элементы (рис. 4.4). Скорость деформации $\xi = d\varepsilon/dt$ есть сумма упругой составляющей $\xi^e = \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt}$ и вязкой составляющей $\xi^p = \frac{\sigma}{\mu}$, отвечающей одному и тому же напряжению:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\mu} \quad (4.15)$$

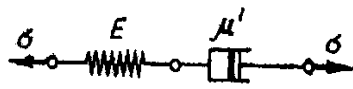


Рис. 4.4. Упруго-вязкая среда Максвелла

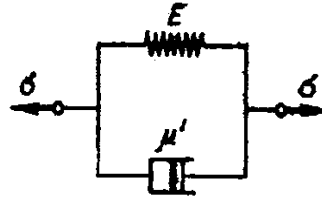


Рис. 4.5. Упруго-вязкая среда Фойгта

Это уравнение соответствует модели упруго-вязкой среды Максвелла. Рассмотрим некоторые свойства этой среды. Пусть напряжения постоянны ($\sigma = \text{const}$). Тогда $\frac{d\sigma}{dt} = 0$, и материал течет подобно жидкости.

Зафиксируем теперь деформацию, приложив в момент $t=0$ напряжения $\sigma(0)$ и закрепив концы стержня. Поскольку при этом $\frac{d\sigma}{dt} = 0$, уравнение (4.15) принимает вид:

$$\frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\mu'} = 0, \quad (4.16)$$

откуда

$$\sigma = \sigma(0) \exp\left[-\frac{t}{t_0}\right], \quad (4.17)$$

где величина $t_0 = \mu'/E$ называется временем релаксации.

Таким образом, модель среды Максвелла позволяет описать важное свойство реальных тел, заключающееся в падении по экспоненциальному закону напряжений при неизменной деформации (так называемая релаксация напряжений).

Перейдем к анализу параллельного соединения упругого и вязкого элементов (модель упруго-вязкой среды Фойгта) (рис. 4.5). Очевидно, напряжение есть сумма упругой $\sigma^e = E\varepsilon$ и вязкой $\sigma^v = \mu' \frac{d\varepsilon}{dt}$ составляющих:

$$\sigma = E\varepsilon + \mu' \frac{d\varepsilon}{dt}. \quad (4.18)$$

В отличие от выражения (4.16) уравнение (4.18) не описывает процесса релаксации, так как при $\varepsilon = \text{const}$ напряжение также остается постоянным, а среда ведет себя как упругая. Если же напряжение остается постоянным, то деформация постепенно нарастает по закону:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \left(1 - \exp\left[-\frac{E}{\mu'} t\right] \right), \quad (4.19)$$

стремясь к значению σ/E , то есть возникает ползучесть.

Рассмотрим комбинацию вязких и пластических свойств. Последовательное соединение двух элементов – вязкого и пластического - приводит к модели вязко-пластической среды. Она обладает свойствами линейно-вязкой среды при $\sigma < \sigma_S$ и течет подобно идеально пластическому телу при $\sigma = \sigma_S$.

Параллельно соединение вязкого и пластического элементов также дает вязко-пластическую среду (среда Шведова-Бингема). Поведение среды описывается уравнением при $\sigma \geq \sigma_S$:

$$\sigma = \sigma_S + \mu' \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (4.20)$$

Основные методы решения задач теории пластичности

Успехи теории и практики обработки металлов давлением в значительной мере обусловлены широким применением методов механики твердого деформированного тела, базирующихся на теории напряжений и деформаций и уравнениях, отражающих реологическое поведение сплошной среды. Сложность физико-механических явлений, протекающих при пластическом формоизменении металлов, многообразие схем деформирования и граничных условий привели к созданию комбинированных методов, в которых теоретический подход разумно дополняется необходимым минимумом экспериментальной информации. Теоретические и экспериментальные методы обработки металлов давлением находятся в диалектическом единстве, так как постановка любого эксперимента базируется на определенных теоретических предпосылках, а в основе любой теории лежат опытные данные. При решении многих задач обработки металлов давлением эти методы так переплетены, что правильно говорить об экспериментально-теоретическом подходе [3].

Среди методов можно выделить приближенные методы решения задач для расчета усилий, расхода энергии, формоизменения, получивших в литературе наименование инженерных методов [4].

К приближенным методам можно отнести метод линий скольжения, метод совместного решения приближенных уравнений равновесия и пластичности (называемый также «методом течения тонкого слоя по жестким поверхностям»), энергетические методы, в частности понятие о вариационных методах.

Целесообразность использования того или иного метода расчета зависит от конкретных условий задачи и требуемой точности решения. При обработке давлением тел с относительно малыми контактными поверхностями (осадка высоких цилиндров, прокатка и ковка крупных заготовок, поперечная прокатка и др.) деформация и напряжения распределяются неравномерно; большое влияние на них оказывают внешние зоны заготовки. Для решения задач с такими условиями эффективно применяются метод линий скольжения, метод работ, вариационные методы. Усилия при тении тонких слоев (листовая прокатка, волочение) удобно определять совместным интегрированием приближенных уравнений равновесия и пластичности.

Для объемных задач по обработке давлением пока не разработаны достаточно простые методы. В этой области применяют вариационные методы, метод работ или приводят условия задачи к плоской или осесимметричной деформации, чтобы использовать более простые методы.

Практические задания

1. Записать системы уравнений равновесия, геометрических и физических уравнений для объемного напряженно-деформированного состояния для упруго-пластической среды.

2. Записать системы уравнений равновесия, геометрических и физических уравнений для объемного напряженно-деформированного состояния для линейно-вязкой среды.

3. Записать системы уравнений равновесия, геометрических и физических уравнений для объемного напряженно-деформированного состояния для жестко-пластической среды.

4. Записать системы уравнений равновесия, геометрических и физических уравнений для объемного напряженно-деформированного состояния для упруго-пластической линейно-упрочняющейся среды.

5. Записать системы уравнений равновесия, геометрических и физических уравнений для объемного напряженно-деформированного состояния для жестко-пластической линейно-упрочняющейся среды.

6. Записать системы уравнений равновесия, геометрических и физических уравнений для плоского напряженно-деформированного состояния для упруго-пластической среды.

7. Записать системы уравнений равновесия, геометрических и физических уравнений для плоского напряженно-деформированного состояния для линейно-вязкой среды.

8. Записать системы уравнений равновесия, геометрических и физических уравнений для плоского напряженно-деформированного состояния для жестко-пластической среды.

9. Записать системы уравнений равновесия, геометрических и физических уравнений для плоского напряженно-деформированного состояния для упруго-пластической линейно-упрочняющейся среды.

10. Записать системы уравнений равновесия, геометрических и физических уравнений для плоского напряженно-деформированного состояния для жестко-пластической линейно-упрочняющейся среды.

11. Записать системы уравнений равновесия, геометрических и физических уравнений для плоского напряженного состояния для упруго-пластической среды.

12. Записать системы уравнений равновесия, геометрических и физических уравнений для плоского напряженного состояния для линейно-вязкой среды.

5. МЕТОД ТОНКИХ СЕЧЕНИЙ

Решение задачи теории пластичности методом тонких сечений производится по следующей схеме.

Оговариваются принятые допущения.

Определяется система, и выбираются направления осей координат.

Двумя близкими поперечными сечениями выделяется элемент деформированного тела, на гранях которого обозначаются действующие на элемент напряжения. Предполагается, что нормальные напряжения по указанным сечениям распределены равномерно и зависят только от осевой координаты.

Составляется условие равновесия выделенного элемента (сумма проекций всех сил на соответствующую ось приравнивается к нулю), в результате получается обыкновенное дифференциальное уравнение, связывающее нормальные напряжения с касательными.

Формулируется приближенное условие пластичности.

Решается полученная система уравнений с учетом граничных условий.

Плоская деформация – деформация, которая происходит только в одной плоскости при неизменных размерах деформируемого тела в направлении, перпендикулярном данной плоскости. Плоская деформация имеет место, например, при прокатке тонкой широкой полосы, когда деформация металла в направлении ширины отсутствует, и весь смещенный по высоте объем металла устремляется в длину.

Осесимметричная деформация – деформация, которая происходит симметрично относительно оси вращения этого тела (применительно к телам вращения).

Условие пластичности устанавливает соотношение между действующими напряжениями, при которых металл переходит из упругого состояния в пластическое.

Условие пластичности Треска-Сен-Венана – условие постоянства максимальных касательных напряжений:

$$\max\{|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_1 - \sigma_3|\} = \sigma_T, \quad (5.1)$$

где σ_T – предел текучести.

Предел текучести – напряжение, при котором в материале начинают интенсивно накапливаться остаточные (пластические) деформации, причем этот процесс идет при практически постоянном напряжении.

Условие пластичности Губера-Мизеса – условие постоянства удельной энергии формоизменения:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \sigma_T, \quad (5.2)$$

Закон трения Кулона – закон, согласно которому напряжение трения пропорционально нормальному напряжению на поверхности контактирующих тел и не зависит от сопротивления деформации металла:

$$\tau = \mu p \quad (5.3)$$

где μ – коэффициент трения, изменяющийся в пределах от 0,02 до 0,50;
 P – нормальное напряжение.

Закон трения Зибеля – закон, согласно которому напряжение трения пропорционально среднему по области пластической деформации сопротивлению деформации сдвига и не зависит от приложенного нормального напряжения:

$$\tau = mk, \quad (5.4)$$

где m – показатель трения, изменяющийся в пределах от 0,02 до 1,0;
 k – предел текучести на сдвиг.

$$k = \frac{\sigma_{\tau}}{\sqrt{3}}. \quad (5.5)$$

Закон трения Кулона применяется, как правило, для холодных процессов обработки металлов давлением, закон трения Зибеля – для горячих.

Максимальные контактные касательные напряжения не могут превышать предела текучести на сдвиг:

$$\tau_{\max} \leq k. \quad (5.6)$$

В процессах обработки металлов давлением напряжения со знаком минус являются сжимающими, а со знаком плюс – растягивающими.

Практические задания

Задача об осадке длинного прямоугольного параллелепипеда

Параллелепипед высотой h , шириной b и длиной L деформируется между двумя плоскими плитами (рис. 1), причем $L \gg b$. Вывести формулу для определения контактных нормальных напряжений при описании трения: а) по закону Кулона; б) по закону Зибеля. Вывести формулу для определения усилия осадки.

При решении задачи воспользуемся следующими допущениями:

- объем тела заполнен жесткопластическим, несжимаемым материалом;
- упрочнение стали отсутствует, т.е. $\sigma_{\tau} = \text{const}$.
- плоскодеформированное состояние, т.е. длина тела не изменяется;
- на свободной поверхности нормальные напряжения σ_x равны нулю;
- примем, что материал во всем объеме тела перейдет в пластическое состояние;
- полагаем, что компоненты тензора напряжения не изменяются по высоте элемента;
- условия деформирования – изотермические;
- упругие деформации инструмента отсутствуют;
- нормальные напряжения σ_y и σ_x являются главными.

Вырежем двумя вертикальными бесконечно близко расположенными координатными плоскостями элемент толщиной dx на расстоянии x от центра (рис.5.1).

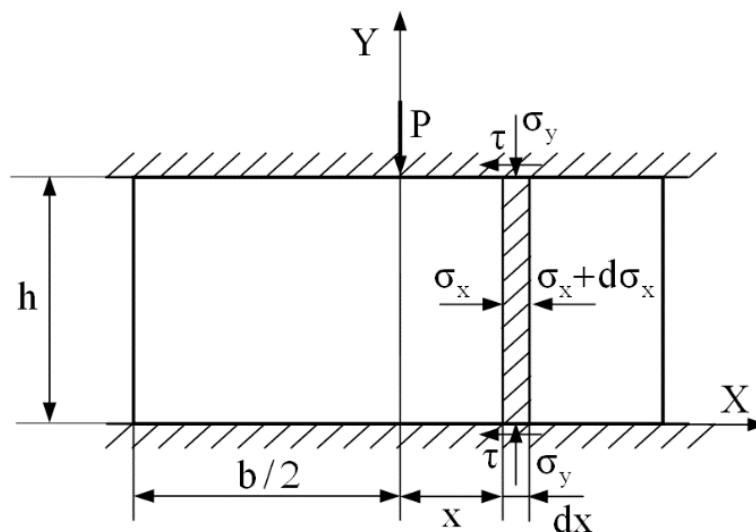


Рис. 5.1. Напряжения, действующие на элемент материала бесконечно малой толщины в процессе осадки длинного прямоугольного параллелепипеда

Рассмотрим силы, действующие на этот элемент в направлении оси X:

$$\sigma_x hL - (\sigma_x + d\sigma_x) hL - 2\tau L dx = 0. \quad (5.7)$$

Раскрывая скобки и упрощая, получим:

$$-2\tau dx - h d\sigma_x = 0. \quad (5.8)$$

Окончательно запишем:

$$d\sigma_x = -\frac{2\tau}{h} dx. \quad (5.9)$$

Чтобы решить данное дифференциальное уравнение, необходимо задать закон трения на контакте.

а) Закон трения Кулона:

$$\tau = \mu \sigma_y. \quad (5.10)$$

После подстановки (5.10) в (5.9) имеем:

$$d\sigma_x = -\frac{2\mu \sigma_y}{h} dx. \quad (5.11)$$

Запишем упрощенное условие пластичности:

$$\sigma_y - \sigma_x = 2k. \quad (5.12)$$

Продифференцируем уравнение пластичности (12) по dx :

$$d\sigma_y = d\sigma_x. \quad (5.13)$$

Выполним замену и разделим переменные:

$$\frac{d\sigma_y}{\sigma_y} = -\frac{2\mu}{h} dx. \quad (5.14)$$

Интегрируя, получим:

$$\int \frac{d\sigma_y}{\sigma_y} = -\frac{2\mu}{h} \int dx. \quad (5.15)$$

$$\ln|\sigma_y| = -\frac{2\mu}{h} x + C. \quad (5.16)$$

Граничные условия при $x = \frac{b}{2}$:

$$\sigma_x = 0, \quad \sigma_y = 2k. \quad (5.17)$$

После подстановки (5.17) в (5.16) получим:

$$\ln(2k) = -\mu \frac{b}{h} + C. \quad (5.18)$$

Откуда константа интегрирования:

$$C = \ln(2k) + \mu \frac{b}{h}. \quad (5.19)$$

После подстановки (5.19) в (5.16) получим:

$$\ln|\sigma_y| = -\frac{2\mu}{h} x + \ln(2k) + \mu \frac{b}{h}. \quad (5.20)$$

Выполнив соответствующие преобразования и, с учетом того, что σ_y сжимающее напряжение, окончательно запишем:

$$\sigma_y = -2ke^{\mu \frac{b-2x}{h}}, \quad (5.21)$$

где x – координата по ширине параллелепипеда.

Зная поле напряжений на контактной поверхности инструмента и заготовки, можно определить усилие осадки. Для этого необходимо проинтегрировать $|\sigma_y|$ по площади контакта:

$$P = L \int_{-b/2}^{b/2} |\sigma_y| dx = L \int_{-b/2}^{b/2} 2k e^{\mu \frac{b-2x}{h}} dx, \quad (5.22)$$

где P – усилие осадки; L – длина образца.
Раскрывая интеграл, получим:

$$P = 2k \left(e^{\mu \frac{b}{h}} - 1 \right) \frac{Lh}{\mu}, \quad (5.23)$$

где k – предел текучести на сдвиг; h – высота параллелепипеда; b – ширина параллелепипеда; L – длина параллелепипеда; μ – коэффициент трения.

б) Закон трения Зибеля:

$$\tau = mk. \quad (5.24)$$

После подстановки (5.24) в (5.9), получим:

$$d\sigma_x = d\sigma_y = -\frac{2mk}{h} dx. \quad (5.25)$$

После интегрирования имеем:

$$\sigma_y = -\frac{2mk}{h} x + C. \quad (5.26)$$

Граничные условия при $x = \frac{b}{2}$:

$$\sigma_x = 0, \quad \sigma_y = 2k. \quad (5.27)$$

Тогда после подстановки получим:

$$2k = -\frac{2mk}{h} \frac{b}{2} + C. \quad (5.28)$$

$$C = 2k + mk \frac{b}{h}. \quad (5.29)$$

Подставив константу C в (5.26) получим:

$$\sigma_y = -2mk \frac{x}{h} + 2k + mk \frac{b}{h}. \quad (5.30)$$

С учетом того, что σ_y сжимающее напряжение, окончательно запишем:

$$\sigma_y = -2k \left(1 + m \frac{b-2x}{2h} \right). \quad (5.31)$$

Определим усилие осадки P :

$$P = L \int_{-b/2}^{b/2} |\sigma_y| dx = L \int_{-b/2}^{b/2} 2k \left(1 + m \frac{b-2x}{2h} \right) dx. \quad (5.32)$$

Раскрывая интеграл (5.32), получим следующую формулу для определения усилия осадки прямоугольного параллелепипеда:

$$P = 2k \left(m \frac{b}{4h} + 1 \right) Lb, \quad (5.33)$$

где k – предел текучести на сдвиг; h – высота параллелепипеда; b – ширина параллелепипеда; L – длина параллелепипеда; m – показатель трения.

Практические задания

Пример: параллелепипед высотой $h = 2\text{мм}$ и шириной $b = 10\text{мм}$ из стали с пределом текучести $\sigma_T = 9,5 \frac{\text{кг}}{\text{мм}^2}$ деформируется между двумя плоскими плитами. Построить эпюру контактных нормальных напряжений при описании трения по закону Кулона, если коэффициент трения $\mu = 0,20$. Рассчитать усилие осадки, если длина образца равна $10b$.

Решение

Нормальное напряжение σ_y определим по формуле (5.21).

При $x = 0$:

$$\sigma_y = -2ke^{\mu \frac{b-2x}{h}} = -2 \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}} e^{\mu \frac{b-2x}{h}} = -2 \cdot \frac{9,5}{\sqrt{3}} \frac{\text{кг}}{\text{мм}^2} \cdot e^{0,2 \cdot \frac{10\text{мм}-0\text{мм}}{2\text{мм}}} = -29,8 \frac{\text{кг}}{\text{мм}^2}.$$

При $x = 0,05b = 0,05 \cdot 10\text{мм} = 0,5\text{мм}$:

$$\sigma_y = -2 \cdot \frac{9,5}{\sqrt{3}} \frac{\text{кг}}{\text{мм}^2} \cdot e^{0,2 \cdot \frac{10\text{мм}-2 \cdot 0,5\text{мм}}{2\text{мм}}} = -27,0 \frac{\text{кг}}{\text{мм}^2}.$$

При $x = 0,1b = 0,1 \cdot 10\text{мм} = 1\text{мм}$:

$$\sigma_y = -2 \cdot \frac{9,5}{\sqrt{3}} \frac{\text{кг}}{\text{мм}^2} \cdot e^{0,2 \cdot \frac{10\text{мм}-2 \cdot 1\text{мм}}{2\text{мм}}} = -24,4 \frac{\text{кг}}{\text{мм}^2}.$$

При $x = 0,15b = 0,15 \cdot 10\text{мм} = 1,5\text{мм}$:

$$\sigma_y = -2 \cdot \frac{9,5}{\sqrt{3}} \frac{\text{кг}}{\text{мм}^2} \cdot e^{0,2 \cdot \frac{10\text{мм}-2 \cdot 1,5\text{мм}}{2\text{мм}}} = -22,1 \frac{\text{кг}}{\text{мм}^2}.$$

При $x = 0,2b = 0,2 \cdot 10\text{мм} = 2\text{мм}$:

$$\sigma_y = -2 \cdot \frac{9,5}{\sqrt{3}} \frac{\text{кг}}{\text{мм}^2} \cdot e^{0,2 \cdot \frac{10\text{мм}-2 \cdot 2\text{мм}}{2\text{мм}}} = -20,0 \frac{\text{кг}}{\text{мм}^2}.$$

При $x = 0,25b = 0,25 \cdot 10\text{мм} = 2,5\text{мм}$:

$$\sigma_y = -2 \cdot \frac{9,5}{\sqrt{3}} \frac{\text{кг}}{\text{мм}^2} \cdot e^{0,2 \cdot \frac{10\text{мм} - 2 \cdot 2,5\text{мм}}{2\text{мм}}} = -18,1 \frac{\text{кг}}{\text{мм}^2}.$$

При $x = 0,3b = 0,3 \cdot 10\text{мм} = 3\text{мм}$:

$$\sigma_y = -2 \cdot \frac{9,5}{\sqrt{3}} \frac{\text{кг}}{\text{мм}^2} \cdot e^{0,2 \cdot \frac{10\text{мм} - 2 \cdot 3\text{мм}}{2\text{мм}}} = -16,4 \frac{\text{кг}}{\text{мм}^2}.$$

При $x = 0,35b = 0,35 \cdot 10\text{мм} = 3,5\text{мм}$:

$$\sigma_y = -2 \cdot \frac{9,5}{\sqrt{3}} \frac{\text{кг}}{\text{мм}^2} \cdot e^{0,2 \cdot \frac{10\text{мм} - 2 \cdot 3,5\text{мм}}{2\text{мм}}} = -14,8 \frac{\text{кг}}{\text{мм}^2}.$$

При $x = 0,4b = 0,4 \cdot 10\text{мм} = 4\text{мм}$:

$$\sigma_y = -2 \cdot \frac{9,5}{\sqrt{3}} \frac{\text{кг}}{\text{мм}^2} \cdot e^{0,2 \cdot \frac{10\text{мм} - 2 \cdot 4\text{мм}}{2\text{мм}}} = -13,4 \frac{\text{кг}}{\text{мм}^2}.$$

При $x = 0,45b = 0,45 \cdot 10\text{мм} = 4,5\text{мм}$:

$$\sigma_y = -2 \cdot \frac{9,5}{\sqrt{3}} \frac{\text{кг}}{\text{мм}^2} \cdot e^{0,2 \cdot \frac{10\text{мм} - 2 \cdot 4,5\text{мм}}{2\text{мм}}} = -12,1 \frac{\text{кг}}{\text{мм}^2}.$$

При $x = 0,5b = 0,5 \cdot 10\text{мм} = 5\text{мм}$:

$$\sigma_y = -2 \cdot \frac{9,5}{\sqrt{3}} \frac{\text{кг}}{\text{мм}^2} \cdot e^{0,2 \cdot \frac{10\text{мм} - 2 \cdot 5\text{мм}}{2\text{мм}}} = -11,0 \frac{\text{кг}}{\text{мм}^2}.$$

По результатам расчета построим эпюру $|\sigma_y|$ (напряжения возьмем по модулю) (рис. 5.2).

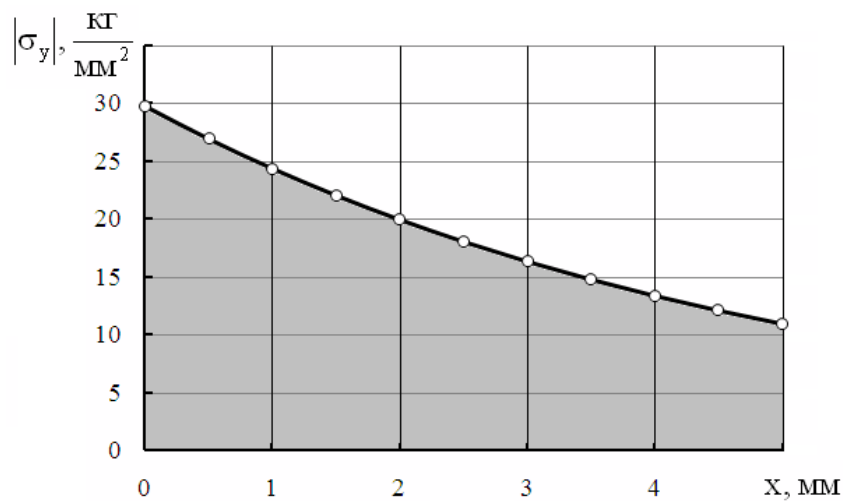


Рис. 5.2. Эпюра контактных нормальных напряжений при осадке длинного прямоугольного параллелепипеда

По формуле (5.23) определим усилие осадки:

$$P = 2k \frac{1}{\mu} \left(e^{\frac{b}{\mu h}} - 1 \right) Lh = 2 \cdot \frac{9,5}{\sqrt{3}} \frac{\text{кг}}{\text{мм}^2} \frac{1}{0,2} \left(e^{0,2 \cdot \frac{10\text{мм}}{2\text{мм}}} - 1 \right) \cdot 100\text{мм} \cdot 2\text{мм} =$$

$$= 18800\text{кг} = 0,188\text{МН} = 18,8\text{т}.$$

Варианты для выполнения заданий

Параллелепипед высотой h и шириной b деформируется между двумя плоскими плитами (рис. 5.1). Построить эпюру контактных нормальных напряжений: а) при описании контактного трения по закону Кулона (коэффициент трения μ); б) при описании контактного трения по закону Зибеля (показатель трения m). Рассчитать усилие осадки, если длина образца равна $10b$. Исходные данные принимать из табл. 5.1 в соответствии с номером варианта.

Таблица 5.1

Исходные данные

Номер варианта	Размеры сечения, мм		Предел текучести σ_T , кг/мм ²	Коэффициент трения μ	Показатель трения m
	Высота h	Ширина b			
1	1,0	15	10	0,05	0,3
2	2,0	25	12	0,10	0,4
3	3,0	35	14	0,15	0,5
4	4,0	45	16	0,20	0,6
5	5,0	15	18	0,05	0,3
6	6,0	25	20	0,10	0,4
7	7,0	35	22	0,15	0,5
8	8,0	45	24	0,20	0,6
9	9,0	15	26	0,05	0,3
10	10,0	25	28	0,10	0,4
11	1,5	35	30	0,15	0,5
12	2,5	45	32	0,20	0,6
13	3,5	10	34	0,05	0,3
14	4,5	20	36	0,10	0,4
15	5,5	30	38	0,15	0,5
16	6,5	40	40	0,20	0,6
17	7,5	10	42	0,05	0,3
18	8,5	20	44	0,10	0,4
19	9,5	30	46	0,15	0,5
20	11,0	50	48	0,20	0,6
21	12,0	60	50	0,05	0,3
22	13,0	70	52	0,10	0,4
23	14,0	80	54	0,15	0,5
24	15,0	90	56	0,20	0,6

6. МЕТОД ЛИНИЙ СКОЛЬЖЕНИЯ

Общие положения. Определение напряженного состояния при ППД

На начальных стадиях пластической деформации при растяжении цилиндрического образца на его поверхности обнаруживается сетка линий скольжения, пересекающихся под прямым углом друг с другом и наклонных под углом 45° к оси образца. Эти линии (линии скольжения или Чернова-Людерса) являются следами пересечения поверхности образца плоскостями максимальных касательных напряжений. Линии скольжения можно наблюдать также на поверхности листов, покрытых окалиной, вблизи кромки при резке, пробивке отверстий и т.п. Исследования показали, что линии скольжения совпадают с траекториями наибольших касательных напряжений [5].

Линии скольжения обладают рядом важных свойств, позволяющих использовать их для нахождения напряжений по объему тела при плоской и осесимметричной деформации. Зная напряжения в любой точке тела, можно определить напряжения на контактной поверхности и тем самым определить полное усилие деформации.

Рассмотрим задачу плоской пластической деформации (ППД) некоторого идеального пластического тела. Запишем тензоры деформаций и напряжений для случая плоской деформации в плоскости x_1-x_2 :

$$T_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.1)$$

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}, \quad (6.2)$$

где $\sigma_{33} = \sigma_3$ – это главный компонент тензора напряжений, так как на его площадке $\sigma_{23} = \sigma_{32} = 0$.

При плоской деформации между нормальными компонентами напряжений существует соотношение, которое следует из физического уравнения:

$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{E'} [\sigma_{33} - m'(\sigma_{11} + \sigma_{22})] = 0, \quad (6.3)$$

где m' – коэффициент Пуассона;

E' – переменный модуль упругости первого рода.

Известно, что при развитой пластической деформации коэффициент Пуассона $m' = 1/2$, тогда

$$\sigma_{33} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2}. \quad (6.4)$$

Задача определения напряженного состояния тела при его плоском пластическом течении в плоскости x_1 - x_2 сводится к нахождению распределения в этой плоскости компонентов напряжений:

$$\begin{cases} \sigma_{11}(x_1, x_2); \\ \sigma_{22}(x_1, x_2); \\ \sigma_{12} = \sigma_{21}(x_1, x_2); \\ \sigma_{33} = \sigma_3(x_1, x_2). \end{cases}$$

Указанные зависимости не включают координату x_3 , так как компоненты напряжений не зависят от нее.

Таким образом, решение задачи отыскания напряженного состояния при ППД сводится к определению четырех координатных функций [6].

С учетом соотношения (6.4) для плоской деформации можно говорить о необходимости определения только трех функций:

$$\begin{cases} \sigma_{11}(x_1, x_2); \\ \sigma_{22}(x_1, x_2); \\ \sigma_{12} = \sigma_{21}(x_1, x_2). \end{cases}$$

Для решения такой задачи необходимо иметь исходную систему из трех независимых и совместных уравнений. Необходимо воспользоваться дифференциальными уравнениями равновесия (статики) для случая ППД:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = 0; \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} = 0. \end{cases} \quad (6.5)$$

Эта система уравнений содержит три неизвестных (σ_{11} , σ_{22} , σ_{12}), и поэтому в общем случае задача отыскания напряженного состояния при плоской деформации статически неопределима. Для решения такой системы необходимо использовать геометрические и физические уравнения.

Однако в данном случае рассматривается пластическая деформация тела, которая происходит при вполне определенных уровнях компонентов напряжений, характеризуемых условием пластичности. Поэтому воспользуемся условием Губера-Мизиса в произвольных осях:

$$(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2) = 2\sigma_s^2, \quad (6.6)$$

где σ_s – предел текучести.

Преобразуем условие пластичности для случая ППД:

$$(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 - \left(\sigma_{22} - \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} - \sigma_{11} \right)^2 + 6\sigma_{12}^2 = 2\sigma_s^2$$

$$\frac{3}{2}(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 6\sigma_{12}^2 = 2\sigma_s^2 \quad \left| \times \frac{2}{3} \right.$$

$$(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2 = 4\frac{\sigma_s^2}{3}. \quad (6.7)$$

Введем обозначение

$\frac{\sigma_s}{\sqrt{3}} = K$ – это сопротивление материала пластическому чистому сдвигу.

В итоге получаем условие пластичности Губера-Мизиса в произвольных осях для случая ППД:

$$(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2 = 4K^2. \quad (6.8)$$

Таким образом, имеем систему из трех уравнений (два уравнения статики и условие пластичности) для отыскания напряжений. Следовательно, задача определения напряженного состояния при ППД является статически определимой. Задание соответствующих граничных условий позволяет решить указанную систему и найти распределение компонентов напряжений, не привлекая геометрические и физические уравнения.

Анализ напряженного состояния в окрестности произвольной точки плоскости пластической деформации

Проведем анализ возможных напряженных состояний в окрестности некоторой точки А тела, пластически деформируемого в плоскости x_1 - x_2 .

Будем считать, что тензор напряжений для рассматриваемой точки задан:

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим физическую плоскость пластической деформации (рис. 6.1). Элементарные площадки, проходящие через точку А, несколько отнесены от нее для наглядности рисунка.

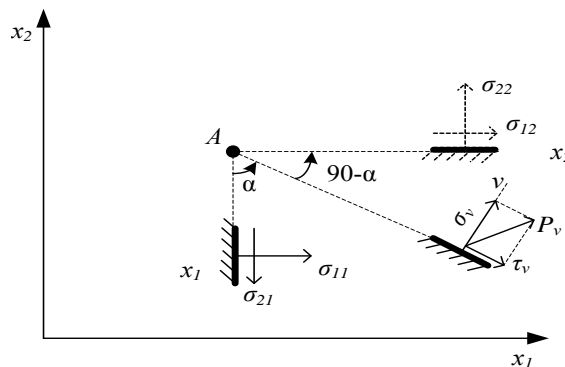


Рис. 6.1. Физическая плоскость x_1 - x_2 пластической деформации

x_1, x_2 – тензорные площадки, на которых действуют компоненты тензора напряжений;

ν – нормаль или адрес наклонной площадки;

σ_ν, τ_ν – нормальные и касательные компоненты напряжений;

P_ν – полное напряжение на наклонной площадке.

Воспользуемся известными соотношениями между компонентами напряжений на наклонной площадке и компонентами тензора напряжений:

$$\begin{cases} \sigma_\nu = \sigma_{11}N_1^2 + \sigma_{22}N_2^2 + 2\sigma_{12}N_1N_2; \\ P_\nu^2 = \sigma_\nu^2 + \tau_\nu^2 = f(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}, N_1, N_2); \\ N_1 = \cos \alpha; \\ N_2 = \cos(90 - \alpha) = \sin \alpha; \\ N_1^2 + N_2^2 = 1. \end{cases} \quad (6.9)$$

где N_1, N_2 – направляющие косинусы, которые характеризуют ориентацию наклонной площадки.

Эту систему уравнений можно преобразовать к единому уравнению так, что в нем будут отсутствовать направляющие косинусы N_1, N_2 . Это уравнение будет иметь вид:

$$\left(\sigma_\nu - \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} \right)^2 + \tau_\nu^2 = \left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \right)^2 + \sigma_{12}^2. \quad (6.10)$$

Это уравнение окружности в координатах σ_ν, τ_ν . Оно представляет собой одну из модификаций уравнений Мора.

Компоненты напряжений на произвольной наклонной площадке при ППД связаны с компонентами заданного тензора напряжений (модификацией уравнения Мора):

$$\left(\sigma_\nu - \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} \right)^2 + \tau_\nu^2 = K^2. \quad (6.11)$$

В этом уравнении переменными являются σ_ν и τ_ν . Следовательно, эта зависимость может быть представлена на соответствующей плоскости напряжений. Эта плоскость условная, а полученное уравнение является канонической формой

уравнения окружности на плоскости напряжений с координатами $\left(\frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2}, 0 \right)$. Следовательно, центр расположен на оси σ_ν , а радиус равен K . Представим данную окружность как геометрический образ напряженного состояния в окрестности точки ППД (рис. 6.2).

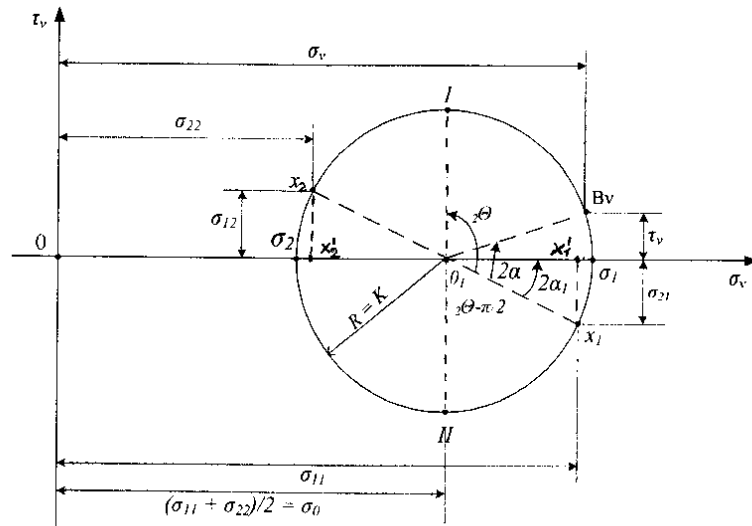


Рис. 6.2. Окружность Мора для ППД

Данная окружность есть геометрическое место бесконечного количества точек. Каждая точка этой окружности отвечает определенной паре значений (σ_v, τ_v) на конкретной наклонной площадке в окрестности точки ППД. Для разных точек ППД может меняться положение центра окружности. Радиус остается постоянным, отражая изотропность среды (постоянство пластических свойств).

Рассмотрим напряжения в отмеченных точках окружности: x_1 и x_2 отвечают тензорным площадкам; точка B_v отвечает наклонной площадке, ориентированной под углом α ; I, II – это точки, отвечающие площадкам главных касательных компонентов, где среднее нормальное напряжение (гидростатическое давление)

равно
$$\sigma_0 = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2}$$

С точки зрения задачи ППД важнейшими точками являются точки I и II.

О переходе от точек окружности Мора к реальным площадкам физической плоскости

На физической плоскости пластической деформации следует от луча A_{x1} откладывать против часовой стрелки половинные углы по отношению к тем, которые на окружности откладывают от луча O_{1x1} (рис. 6.3).

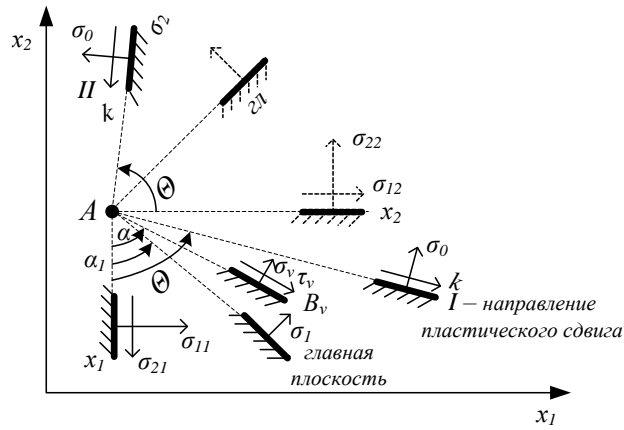


Рис. 6.3. Представление напряженного состояния в т. А

Показанные следы площадок задают некоторые направления: x_1 и x_2 – это тензорные площадки; σ_1 и σ_2 – это направление главных напряжений (главные направления); B_v – это направления произвольной площадки; I и II – это направления действия главных касательных напряжений, равных K или первое и второе направления сдвига.

Для разных точек ППД, если материал изотропен первое и второе направления сдвига имеют свою ориентацию, но взаимно они остаются всегда ортогональными.

Линии скольжения и их уравнения

Различные направления сдвига в последовательных точках ППД можно обобщить линией – такой, чтобы эти направления сдвига в каждой точке были бы к ней касательными.

Таким образом, линией скольжения при ППД называется такая линия, касательная в каждой точке которой, совпадает с первым или вторым направлениями сдвига.

Первая и вторая линия в точке пересечения всегда образует угол 90° . В плоскости пластической деформации линии скольжения образуют два ортогональных семейства (рис. 6.4).

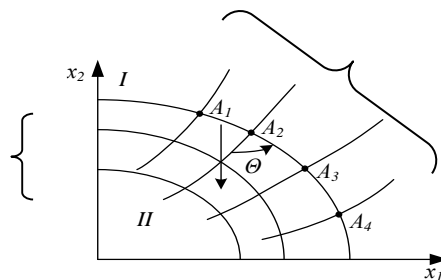


Рис. 6.4. Ортогональные линии скольжения I и II семейства

Картина линий скольжения позволяет однозначно перейти к значениям компонентов тензора напряжений (σ_{11} , σ_{22} , $\sigma_{12} = \sigma_{21}$) в любой точке ППД.

Введем два новых показателя:

$$\omega = \frac{\sigma_0}{2K}$$

– безразмерная величина, которая характеризует относительный уровень среднего нормального напряжения в окрестности точки.

θ – угол, на который против часовой стрелки нужно повернуть отрицательную полуось x_2 , чтобы она совпала с первым направлением сдвига. Или против часовой стрелки надо повернуть положительную полуось x_1 , чтобы она совпала со вторым направлением сдвига (рис. 6.5). В разных точках этот угол разный.

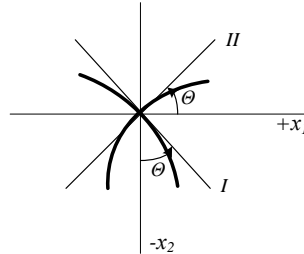


Рис. 6.5. К определению угла θ

Имея конкретную сетку линии скольжения, можно измерить угол θ в любой точке, учитывая его геометрический смысл.

От новых показателей (ω , θ) легко можно перейти к компонентам тензора напряжений. Обратимся к окружности Мора (рис. 6.2).

$$\operatorname{tg}\left(\angle X_1 O_1 X'_1\right) = \operatorname{tg}\left(2\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sigma_{21}}{\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}} = \frac{2\sigma_{21}}{\sigma_{11} - \sigma_{22}}. \quad (6.12)$$

Из этого соотношения получаем:

$$\theta = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2\sigma_{21}}{\sigma_{11} - \sigma_{22}} + \frac{\pi}{4}. \quad (6.13)$$

Таким образом, угол θ однозначно характеризуется компонентами тензора напряжений.

Выразим компоненты σ_{11} , σ_{22} , σ_{21} через величины ω и θ .

Из окружности Мора можно получить уравнения линий скольжения:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= OO_1 + O_1 X'_1 = \sigma_0 + K \cos\left(2\theta - \frac{\pi}{2}\right) = 2K\omega + K \sin 2\theta; \\ \sigma_{22} &= OO_1 - O_1 X'_2 = \sigma_0 - K \cos\left(2\theta - \frac{\pi}{2}\right) = 2K\omega - K \sin 2\theta; \\ \sigma_{12} = \sigma_{21} &= X_2 X'_2 = K \sin\left(2\theta - \frac{\pi}{2}\right) = -K \cos 2\theta. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Таким образом, напряженное состояние в окрестности ППД однозначно характеризуется показателями ω и θ .

Полученные выражения тождественно удовлетворяют условию пластичности:

$$\begin{aligned}(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2 &= 4K^2; \\ 4K^2 \sin^2 2\theta + 4K^2 \cos^2 2\theta &= 4K^2; \\ \sin^2 2\theta + \cos^2 2\theta &= 1.\end{aligned}$$

Уравнения Генки

Преобразуем уравнения статики (6.5) к форме, которая включала бы эти новые характеристики напряженного состояния. Подставим значения напряжений и раскроем частные производные:

$$\begin{cases} 2K \frac{\partial \omega}{\partial x_1} + 2K \cos 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial x_1} + 2K \sin 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial x_2} = 0; \\ 2K \sin 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial x_1} + 2K \frac{\partial \omega}{\partial x_2} - 2K \cos 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial x_2} = 0. \end{cases} \quad (6.15)$$

Для физической интерпретации нового вида уравнений статики совместим оси x_1 и x_2 соответственно с первым и вторым направлениями сдвига в т. А (рис. 6.6). Новые положения осей обозначим S_1 и S_2 . Этим положениям соответствует угол $\theta = \frac{\pi}{2}$, что следует из рассмотренного выше смысла угла θ , как новой характеристики напряженного состояния.

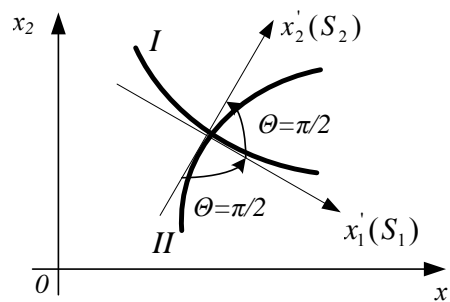


Рис. 6.6. Физическая интерпретация нового вида уравнений статики

$$\sin 2\theta = \sin \pi = 0;$$

Из рисунка видно, что $\cos 2\theta = \cos \pi = -1$.

В новых осях дифференцированию по x_1 и x_2 эквивалентно дифференцирование по S_1 и S_2 соответственно. Тогда уравнения статики принимают вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial \omega}{\partial S_1} - \frac{\partial \theta}{\partial S_1} = 0; \\ \frac{\partial \omega}{\partial S_2} + \frac{\partial \theta}{\partial S_2} = 0. \end{cases} \quad (6.16)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial S_1} (\omega - \theta) = 0; \\ \frac{\partial}{\partial S_2} (\omega + \theta) = 0. \end{cases} \quad (6.17)$$

Поскольку точка А – произвольная точка пластической области, то полученные уравнения действительны для любой ее точки. Но в каждой точке мы имеем свои направления сдвига, то есть свои координаты S_1 и S_2 . Причем S_1 в любой точке есть касательная к линии скольжения семейства I, а S_2 в любой точке - касательная к линии семейства II. Распространяя эти уравнения на всю пластическую область, мы переходим от декартовой к криволинейной системе координат. Координатная сетка в этой системе есть сетка линий скольжения.

Из полученных уравнений вытекают уравнения Генки в криволинейной координатной сетке линий скольжения:

$$\begin{cases} \omega + \theta = c_1 = \eta(I); \\ \omega - \theta = c_2 = \xi(II). \end{cases} \quad (6.18)$$

где $\eta(I)$ и $\xi(II)$ - функции напряженного состояния.

Уравнения Генки являются модификацией уравнений статики. Они выражают следующее важное положение: вдоль определенной линии скольжения первого семейства разность $(\omega - \theta)$ остается постоянной; вдоль любой линии скольжения второго семейства сумма $(\omega + \theta)$ остается постоянной. С переходом от одной линии скольжения к другой величины c_1 и c_2 меняются.

Следствие из уравнений Генки

Рассмотрим две точки некоторых линий скольжения, например, первого семейства (рис. 6.7). Пусть безразмерные параметры напряженного состояния в одной точке ω_1, θ_1 , а в другой - ω_2, θ_2 . Тогда в соответствии с уравнениями Генки (6.18):

$$\begin{aligned} \omega_1 - \theta_1 &= \omega_2 - \theta_2; \\ \omega_1 - \omega_2 &= \theta_1 - \theta_2; \\ \sigma_{01} - \sigma_{02} &= 2K(\theta_1 - \theta_2). \end{aligned} \quad (6.19)$$

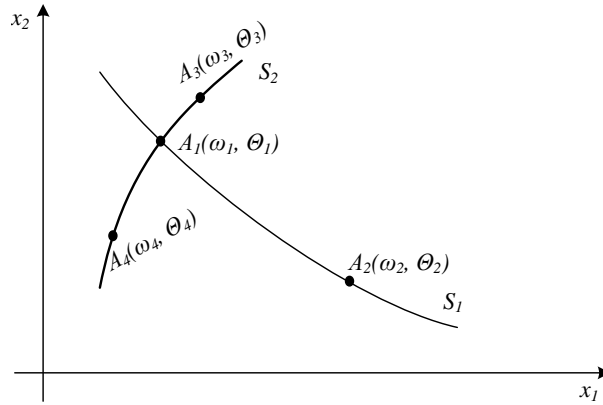


Рис. 6.7 Пересекающиеся линии скольжения I и II семейства

Для двух точек линий скольжения второго семейства имеем в соответствии с уравнениями Генки:

$$\begin{aligned} \omega_3 + \theta_3 &= \omega_4 + \theta_4; \\ \sigma_{03} - \sigma_{04} &= -2K(\theta_3 - \theta_4). \end{aligned} \quad (6.20)$$

В полученных равенствах разности $(\theta_1 - \theta_2)$ и $(\theta_3 - \theta_4)$ – это углы поворота соответствующих линий скольжения при переходе от одной точки к другой. Следовательно, изменение σ_0 при переходе от одной точки линии скольжения к другой пропорционально углу поворота линии скольжения:

$$\Delta\sigma_{\text{ср}} = \pm 2K\Delta\theta. \quad (6.21)$$

Если имеется сетка линий скольжения для пластической области и в одной точке известно σ_0 , то можно найти σ_0 и, следовательно, параметр ω для всех точек сетки по последним соотношениям. Предварительно необходимо измерить θ для интересующих точек сетки. Зная ω и θ , найдем распределение компонентов напряжений σ_{11} , σ_{22} , σ_{12} в пластической области, то есть полностью охарактеризуем напряженное состояние.

Свойства линий скольжения

Первая теорема Генки. Точки пересечения линий скольжения I и II семейства будем называть узловыми точками или узлами. Обозначим узловые точки сетки линий скольжения индексами m, n соответственно номерами линий скольжения α, β , проходящих через узлы, как показано на рис. 2.8, а. Тогда значения функций ξ для линий α , проходящих через узлы (1,1) и (1,2); (2,1) и (2,2) будут ξ_1, ξ_2 , а функции η для линий β , проходящих через узлы (1,1) и (2,1); (1,2) и (2,2) соответственно η_1 и η_2 [7].

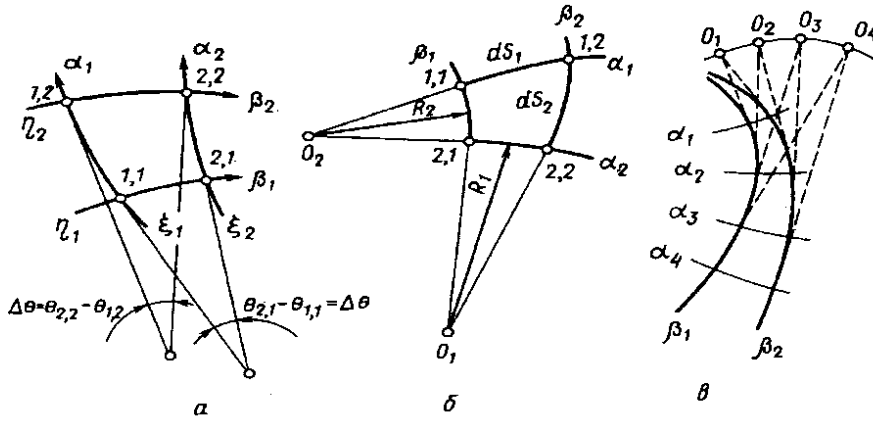


Рис. 6.8. К теоремам Г. Генки и Л. Прандталя
 а – к первой теореме Генки; б – ко второй теореме Генки;
 в – к теореме Прандталя

В узловых точках m, n значения гидростатического давления:

$$\sigma(m, n) = K(\xi_m + \eta_n).$$

отсюда, например:

$$\sigma(1,2) - \sigma(1,1) = \sigma(2,2) - \sigma(2,1) = K(\eta_2 - \eta_1). \quad (6.22)$$

Следовательно, при переходе от одной линии скольжения к другой одного семейства (например, от β_2 к β_1) изменения гидростатического давления не зависят от того, вдоль какой линии скольжения (например, α_1 или α_2) совершаются переход. Из уравнений Генки следует, что в узловых точках углы будут:

$$\theta(m, n) = \frac{1}{2}(\eta_n - \xi_m).$$

Отсюда, например,

$$\begin{aligned} \theta(1,2) - \theta(1,1) &= \theta(2,2) - \theta(2,1) = \frac{1}{2}(\eta_2 - \eta_1), \\ \theta(2,2) - \theta(1,2) &= \theta(2,1) - \theta(1,1). \end{aligned} \quad (6.23)$$

Следовательно, углы пересечения касательных к двум линиям скольжения в узловых точках их пересечения с линиями другого семейства постоянны на всем протяжении этих линий (рис. 6.8, а).

Таким образом, если переходить от одной линии скольжения семейства β к другой вдоль любой линии α , то угол θ и σ_0 будут изменяться на одну и ту же величину.

Это первая теорема Генки, из которой, в частности, следует, что если одна из линий скольжения прямая, то и остальные линии данного семейства прямые.

Вторая теорема Генки. По условиям ортогональности линий скольжения в точках их пересечения касательные к ним также ортогональны в тех же точках.

Поэтому дифференциалы dR радиусов кривизны R и дуг линий скольжения dS связаны соотношениями (рис. 6.8, б):

$$dR_1 = dS_2, \quad dR_2 = dS_1.$$

Следовательно, при движении вдоль линий скольжения одного семейства радиусы кривизны линий скольжения второго семейства изменяются в узловых точках на величины пройденных расстояний (вторая теорема Генки).

Теорема Прандтля. Касательные к двум бесконечно близким линиям скольжения (например, β_1 и β_2) в точках пересечения их с дугами второго семейства (например, α_i) пересекаются в центрах кривизны этих дуг (рис. 6.8, в). При непрерывном перемещении точек касания вдоль β_1 и β_2 центры кривизны образуют их эвольвенту (теорема Прандтля).

Практические задания

Краевые задачи ППД. Приближенное построение полей линий скольжения

Решение краевой задачи существенно зависит от краевых условий, которые представляют собой совокупность:

- граничных условий (распределение σ , ε , U на граничной поверхности) и сама форма граничной поверхности;
- начальные условия – это значение параметров и характеристик в момент начала отсчета, а именно в нулевое время.

Задача 1

Первая краевая задача ППД (задача Коши)

Пусть дана некоторая граничная дуга C тела, пластически деформируемого в плоскости $x_1 - x_2$ (рис. 6.9).

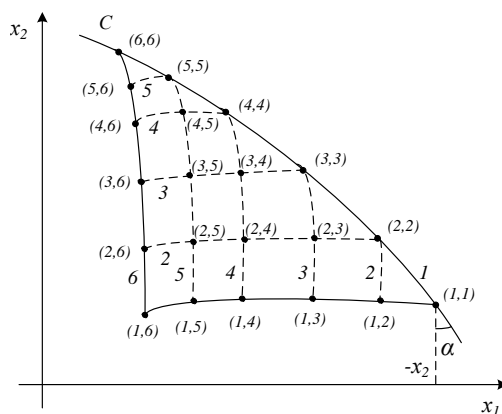


Рис. 6.9. Сетка линий скольжения в окрестности граничной дуги

Граничная дуга задана с двумя граничными условиями:

- 1) во всех ее точках известны ω и θ , то есть в любой точке можно найти σ_{11} , σ_{22} , $\sigma_{12} = \sigma_{21}$ – это статическое граничное условие;

2) эта дуга не является линией скольжения $\alpha \neq \theta$.

Требуется построить сетку линий скольжения, вызванных воздействием через граничную дугу.

Решение

Отметим некоторое число точек на граничной дуге и предположим сначала, что линии скольжения, проходящие через эти точки, известны (рис. 6.9). Будем называть точки пересечения линий скольжения первого и второго семейства узловыми точками или узлами. Для именования узлов рассмотрим сетку линий скольжения как криволинейную координатную сетку. Пронумеруем линии скольжения снизу вверх и справа налево. Будем именовать точки двумя числами – номерами линий, на пересечении которых стоит эта точка.

Рассмотрим приближенные методы построения сетки линий скольжения в первой краевой задаче.

Метод касательных

Пусть на граничной дуге S выбраны начальные точки $(1,1)$ и $(2,2)$ для намечаемых линий скольжения. Тогда ближайший к дуге узел $(1,2)$ может быть приближенно определен.

Через точки $(1,1)$ и $(2,2)$ проведем прямые линии, которые образуют с отрицательными направлениями оси x_2 соответственно углы $\theta(1,1)$ и $\theta(2,2)+\pi/2$. Эти линии будут иметь соответственно в точке $(1,1)$ первое направление сдвига, а в точке $(2,2)$ – второе. Они будут являться касательными в этих точках соответственно к линиям скольжения первого и второго семейства. Отождествим указанные касательные с самими линиями скольжения. Тогда их пересечение дает приближенное положение узла $(1,2)$. Аналогично могут быть приближенно найдены положения узлов $(2,3)$, $(3,4)$.

Для продолжения построения необходимо знать $\theta(1,2)$, $\theta(2,3)$, $\theta(3,4)$ и т.д.

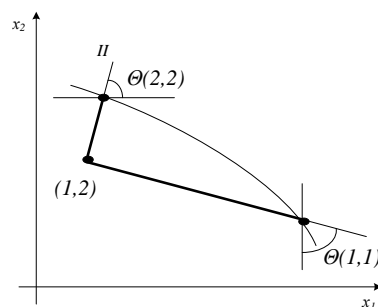


Рис. 6.10. Построение поля линий скольжения методом касательных

Воспользуемся уравнениями Генки.

$$\begin{cases} \omega(1,2) - \theta(1,2) = \omega(1,1) - \theta(1,1); \\ \omega(1,2) + \theta(1,2) = \omega(2,2) + \theta(2,2). \end{cases} \quad (6.24)$$

Из этой системы получаем:

$$\omega(1,2) = \frac{1}{2} [\omega(2,2) + \omega(1,1) + \theta(2,2) - \theta(1,1)]; \quad (6.25)$$

$$\theta(1,2) = \frac{1}{2} [\omega(2,2) - \omega(1,1) + \theta(2,2) + \theta(1,1)] \quad (6.26)$$

Аналогично отыскиваются ω и θ в точках (2,3), (3,4) и т.д. Теперь методом касательных могут быть приближенно определены положения узлов (1,3), (2,4), ..., а на основании уравнений Генки значения ω и θ в этих узлах. Продолжая этот процесс далее, получим приближенную сетку линий скольжения в некоторой треугольной области, которая будет определена граничными условиями на дуге С. Эта треугольная область называется областью влияния данной граничной дуги. Точность будет выше при меньших ячейках сетки, то есть при большем количестве исходных точек построения на граничной дуге.

Метод секущих

При большой кривизне искомых линий скольжения метод касательных может давать значительную погрешность (рис. 6.11).

Чтобы получить лучшее приближение, допускающее использование больших ячеек сетки следует вместо касательной в точке (1,1) к дуге линии скольжения построить секущую (1,1) – (1,2).

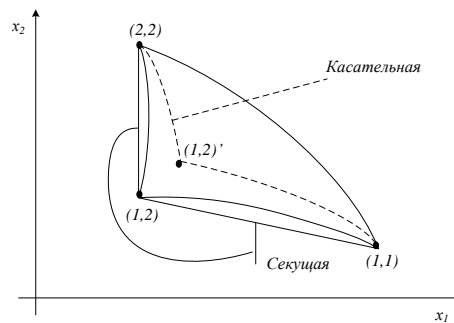


Рис. 6.11 Сравнительное построение поля линий скольжения методами касательных и секущих

При рассмотрении рисунка необходимо учитывать, что угол θ для первых направлений сдвига отсчитывается против часовой стрелки от отрицательного направления оси x_2 , а для вторых – от положительного направления оси x_1 .

Из рис. 6.12 видно, что угол ориентации секущей (1,1) – (1,2) относительно отрицательного направления оси x_2 занимает промежуточное положение между углами $\theta(1,1)$ и $\theta(1,2)$. Поэтому его приближенно можно характеризовать полусуммой последних.

$$\frac{1}{2} [\theta(1,1) + \theta(1,2)] = \frac{1}{4} [\omega(2,2) - \omega(1,1) + \theta(2,2) + 3\theta(1,1)] \quad (6.27)$$

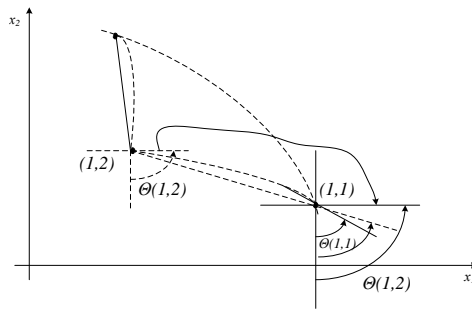


Рис. 6.12. Построение поля линий скольжения методом секущих

В точке (2,2) также вместо касательной ко второй линии скольжения второго семейства воспользуемся секущей (2,2) – (1,2). Тогда

$$\frac{1}{2}[\theta(2,2) + \theta(1,2)] = \frac{1}{4}[\omega(2,2) - \omega(1,1) + 3\theta(2,2) + \theta(1,1)] \quad (6.28)$$

Под такими углами проводят секущие во всех выбранных точках граничной дуги. В результате положения узлов при прочих равных условиях можно найти более точно.

При этом необходимые значения $\theta(1,2)$, $\theta(2,3)$ и т.д. рассчитывают как в первом методе. В конечном счете, после построения треугольной области можно найти компоненты тензора напряжений для всех узловых точек.

Задача 2

Вторая краевая задача (Римана)

Заданы граничная дуга C , которая является линией скольжения первого семейства, и пересекающая ее линия скольжения второго семейства.

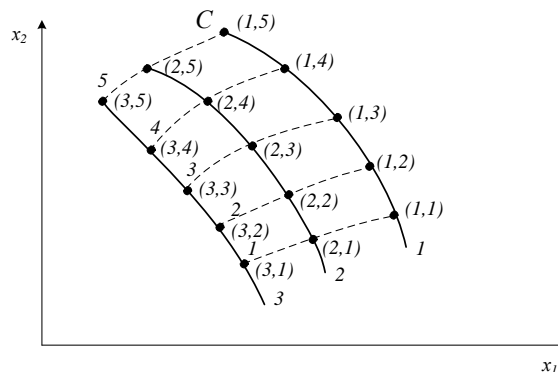


Рис. 6.13. Поле линий скольжения для второй краевой задачи

Решение

На рис. 2.13 линии скольжения первого семейства показаны сплошными линиями, а линии скольжения второго семейства – штриховыми. Пусть (2,1) – (2,2)

и $(1,2) - (2,2)$ заданы. Найдем $\theta(2,2)$ в узле, где пересекаются две линии скольжения первого и второго семейства: $(1,1) - (1,2)$. Точки $(1,2)$ и $(2,1)$ выбраны произвольно и через них проведены отрезки по методу касательных или секущих. Но, чтобы использовать метод секущих нужно знать $\theta(2,2)$.

На основании первой теоремы Генки о равенстве углов между касательными:

$$\begin{aligned} \theta(1,1) - \theta(2,1) &= \theta(1,2) - \theta(2,2), \\ \theta(2,2) &= \theta(1,2) - \theta(1,1) + \theta(2,1). \end{aligned} \quad (6.29)$$

Теперь для отыскания положения узла $(2,2)$ воспользуемся методом секущих. Искомая секущая в узле $(2,1)$ образует с отрицательным направлением оси x_2 угол, приближенно равный:

$$\frac{1}{2} [\theta(2,2) + \theta(2,1)] = \frac{1}{2} [\theta(1,2) + 2\theta(2,1) - \theta(1,1)]. \quad (6.30)$$

Искомая секущая в точке $(1,2)$ образует с положительным направлением оси x_1 угол, приближенно равный:

$$\frac{1}{2} [\theta(2,2) + \theta(1,2)] = \frac{1}{2} [2\theta(1,2) + \theta(2,1) - \theta(1,1)]. \quad (6.31)$$

Вычислив углы и проведя секущие, найдем на их пересечении положение узла $(2,2)$. Действуя, таким образом, можно построить сетку линий скольжения в окрестности данных линий скольжения. При этом значения θ в узлах сетки нами будут рассчитаны заранее.

В итоге находим четырехугольную область влияния граничной дуги.

Задача 3

Третья краевая задача (смешанная задача)

Дана граничная дуга C , которая является линией скольжения и, следовательно, значения θ вдоль дуги C известны. Кроме того, заданы значения ω вдоль некоторой кривой γ , которая пересекает дугу C и не является линией скольжения (рис. 6.14).

Выберем точку $(1,2)$ на дуге C – начало построения. Первое приближение к узлу $(2,2)$, лежащему на кривой γ , можно получить, заменяя дугу $(1,2) - (2,2)$ линией скольжения Π прямой, проходящей через точку $(1,2)$. Эта прямая должна составить угол $\theta(1,2)$ с положительным направлением оси x_1 , то есть являться касательной к аппроксимируемой линии скольжения. Найденная точка $(2,2)'$ на кривой γ дает нам значение $\omega'(2,2)$.

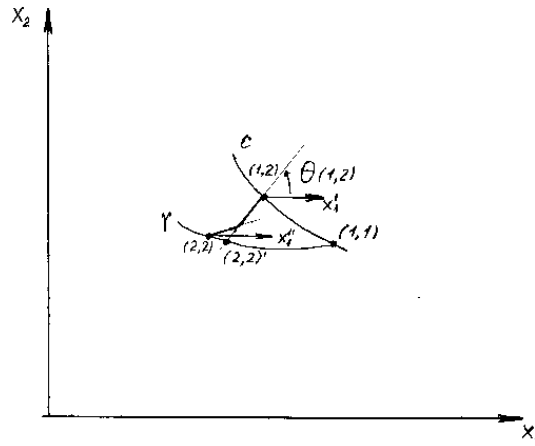


Рис. 6.14. Построение поля линий скольжения для смешанной задачи

Теперь приближенно можно найти угол $\theta(2,2)$ из уравнений Генки:

$$\begin{aligned} \theta(1,2) + \omega(1,2) &= \theta(2,2) + \omega'(2,2), \\ \theta(2,2) &= \theta(1,2) + \omega(1,2) - \omega'(2,2). \end{aligned} \quad (6.31)$$

Теперь дугу $(1,2) - (2,2)$ линии скольжения Π можно аппроксимировать двумя отрезками прямых, которые образуют углы $\theta(1,2)$ и $\theta(2,2)$ с положительным направлением оси x_1 . Эти отрезки следует провести так, чтобы первый проходил через точку $(1,2)$, а точка их пересечения находилась между кривыми C и γ . Пересечение второго отрезка с кривой γ дает хорошее приближение для точки $(2,2)$.

Найдя эту линию скольжения $(1,2) - (2,2)$, получаем исходные данные второй краевой задачи.

Кинематические соотношения в теории линий скольжения

Для ППД исследованы поля напряжений с помощью линий скольжения. Такой подход называют статическим, а поля статически возможными. Однако, практика решения задач ППД обнаружила, что статически возможные поля могут не удовлетворять кинематическим, то есть скоростным условиям конкретной задачи. Поэтому для получения соответствующего полного решения необходимо строить и поля скоростей или гедографы. В итоге получаем описание не только напряженного, но и деформированного состояния тела.

Выведем уравнения, которым должны удовлетворять скорости перемещения вдоль линий скольжения.

В любой точке линии скольжения нормальные напряжения, передающиеся через линию скольжения, равны среднему нормальному напряжению в этой точке. Это следует из того, что в любой точке линии скольжения касательное

напряжение равно максимальному касательному, на площадке которого действует нормальное напряжение, равное при ППД среднему нормальному в рассматриваемой точке (рис. 2.3).

Тогда относительная линейная деформация элементарного отрезка любой линии скольжения определяется средним нормальным напряжением, есть средняя линейная деформация, которая с σ_0 связана законом упругого изменения объема:

$$\varepsilon_0 = \frac{1 - 2m'}{E} \sigma_0,$$

где $m' = \frac{1}{2}$ - коэффициент Пуассона при развитой пластической деформации. Тогда $\varepsilon_0 = 0$.

Следовательно, скорость относительной линейной деформации вдоль линии скольжения равна нулю.

Выразим скорость линейной деформации через компоненты скорости перемещения вдоль линии скольжения.

На рис. 6.15 показаны компоненты скорости перемещения вдоль бесконечно малых отрезков линий скольжения I и II: $AB = dS_1$, $AC = dS_2$. Компоненты в точках B и C отличаются от компонентов в точке A бесконечно малыми приращениями длин векторов ($d\dot{U}_I$ и $d\dot{U}_{II}$) и изменением их ориентации на бесконечно малый угол ($d\theta$).

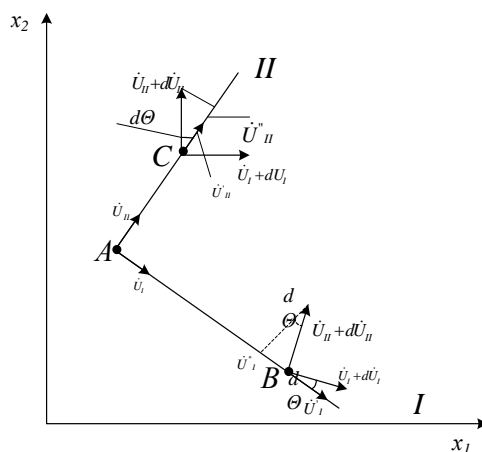


Рис. 6.15. К выводу уравнений Гейрингер

При проектировании компонентов на первое и второе направления примем, что $\cos d\theta = 1$ и $\sin d\theta = d\theta$.

Выразим измененные проекции скоростей вдоль направления I и II:

$$\begin{aligned} U_I(B) &= \dot{U}_I' - \dot{U}_{II}'' = \left(\dot{U}_I + d\dot{U}_I \right) \cos d\theta - \left(\dot{U}_{II} + d\dot{U}_{II} \right) \sin d\theta = \\ &= \dot{U}_I + d\dot{U}_I - \dot{U}_{II} d\theta - d\dot{U}_{II} d\theta = \dot{U}_I + d\dot{U}_I - \dot{U}_{II} d\theta. \end{aligned} \quad (6.33)$$

$$\begin{aligned}
U_{II}(C) &= \dot{U}_{II} + \ddot{U}_{II} = \left(\dot{U}_I + d\dot{U}_I \right) \sin d\theta + \left(\dot{U}_{II} + d\dot{U}_{II} \right) \cos d\theta = \\
&= \dot{U}_I d\theta + \dot{U}_{II} + d\dot{U}_{II}.
\end{aligned} \tag{6.34}$$

Скорость относительной линейной деформации отрезков линий скольжения есть отношение разности компонентов скоростей концов отрезка вдоль него к длине отрезка:

$$\dot{\varepsilon}_I = \frac{\dot{U}_I + d\dot{U}_I - \dot{U}_{II} d\theta - \dot{U}_I}{dS_1} = \frac{d\dot{U}_I - \dot{U}_{II} d\theta}{dS_1}. \tag{6.35}$$

$$\dot{\varepsilon}_{II} = \frac{\dot{U}_I d\theta + \dot{U}_{II} + d\dot{U}_{II} - \dot{U}_{II}}{dS_2} = \frac{d\dot{U}_I + \dot{U}_I d\theta}{dS_2}. \tag{6.36}$$

Однако $\dot{\varepsilon}_{I(II)} = 0$.

В итоге получаем уравнения Г.Гейрингер, связывающие компоненты скорости перемещения вдоль линий скольжения:

$$\begin{cases} d\dot{U}_I - \dot{U}_{II} d\theta = 0; \\ d\dot{U}_{II} + \dot{U}_I d\theta = 0. \end{cases} \tag{6.37}$$

Из этих уравнений следует, что если семейство линий скольжения состоит из прямых линий, то соответствующие компоненты скорости перемещений \dot{U}_I и \dot{U}_{II} будут постоянными вдоль этих линий.

Вернемся к первой краевой задаче. Предположим, что вдоль граничной дуги C кроме ω и θ задан вектор скорости перемещения \dot{U} (рис. 6.16). После того, как в окрестностях граничной кривой построена сетка линий скольжения в любой точке этой кривой заданный вектор скорости перемещения можно разложить на компоненты вдоль линий скольжения I и II семейства. Теперь можно определить компоненты скорости перемещения в последовательных узлах сетки.

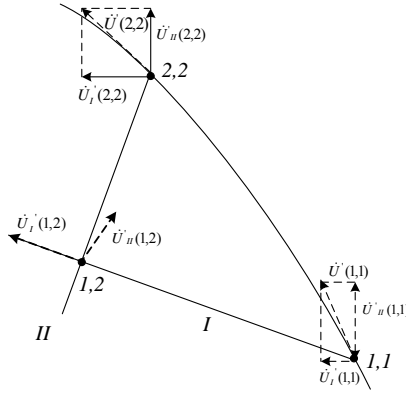


Рис. 6.16. К определению скоростей перемещения в последовательных узлах сетки

Перейдем в уравнениях Гейрингер от дифференциалов к конечным разностям. Например, для дуги (1,1) – (1,2):

$$\begin{aligned} d\dot{U}_I &\cong \dot{U}_I(1,2) - \dot{U}_I(1,1); \\ d\theta &\cong \theta(1,2) - \theta(1,1); \\ \dot{U}_{II} &= \dot{U}_{II}(1,1). \end{aligned} \quad (6.38)$$

Подставим эти соотношения в первое уравнение Гейрингер:

$$\begin{aligned} \dot{U}_I(1,2) - \dot{U}_I(1,1) - \dot{U}_{II}(1,1)[\theta(1,2) - \theta(1,1)] &= 0; \\ \dot{U}_I(1,2) &= \dot{U}_I(1,1) + \dot{U}_{II}(1,1)[\theta(1,2) - \theta(1,1)]. \end{aligned} \quad (6.39)$$

Аналогично для дуги (2,2) – (1,2):

$$\begin{aligned} d\dot{U}_{II} &\cong \dot{U}_{II}(1,2) - \dot{U}_{II}(2,2); \\ d\theta &\cong \theta(1,2) - \theta(2,2); \\ \dot{U}_I &= \dot{U}_I(2,2). \end{aligned} \quad (6.40)$$

Воспользуемся вторым уравнением Гейрингер:

$$\begin{aligned} \dot{U}_{II}(1,2) - \dot{U}_{II}(2,2) + \dot{U}_I(2,2)[\theta(1,2) - \theta(2,2)] &= 0; \\ \dot{U}_{II}(1,2) &= \dot{U}_{II}(2,2) - \dot{U}_I(2,2)[\theta(1,2) - \theta(2,2)]. \end{aligned} \quad (6.41)$$

Продолжая этот процесс, найдем компоненты скоростей перемещений вдоль линии скольжения I и II семейства во всех узлах сетки. Таким же образом могут быть решены вторая и третья краевые задачи.

Виды полей линий скольжения
Простые поля линий скольжения

Простыми полями линий скольжения называют такие поля, которые содержат прямые линии скольжения. Из следствия теоремы Генки известно, что если семейство содержит хотя бы одну прямую линию, то оно целиком состоит из прямых линий.

Таким образом, простое поле может состоять из двух ортогональных семейств параллельных прямых (простейшее поле), либо из одного семейства прямых линий и семейства ортогональных к ним кривых.

Простейшее поле линий скольжения

Оно состоит из двух ортогональных семейств параллельных прямых (рис. 6.17).

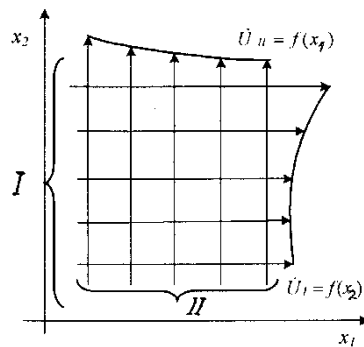


Рис. 6.17. Простейшее поле линий скольжения

В соответствии с уравнением Генки вдоль линии скольжения первого семейства:

$$\omega - \theta = C1;$$

и вдоль линии скольжения второго семейства:

$$\omega + \theta = C2.$$

Так как вдоль любой прямой линии скольжения $\Theta = \text{const}$, то и $\omega = \text{const}$. Следовательно, для всего простейшего поля $\Theta = \text{const}$ и $\omega = \text{const}$ и напряженное состояние во всех его точках одинаково. Эту область называют областью однородного или постоянного напряженного состояния.

Рассмотрим поле скоростей, соответствующее простейшему полю линий скольжения. Последнее удобно ориентировать так, чтобы первое и второе направления сдвига совпадали соответственно с направлениями x_1 и x_2 . Так как для всей области постоянного состояния $\theta = \text{const}$, то в этой области $d\theta = 0$. Уравнения Гейрингер принимает вид:

$$\begin{cases} d\dot{U}_I = 0; \\ d\dot{U}_{II} = 0. \end{cases} \quad (6.42)$$

Откуда $\dot{U}_I = \text{const}$ - скорость перемещения вдоль каждой линии скольжения первого семейства постоянна;

$\dot{U}_{II} = \text{const}$ - скорость перемещения вдоль каждой линии скольжения второго семейства постоянна.

С переходом от одной линии данного семейства к другой соответствующая скорость меняется:

$\dot{U}_I = \dot{U}_{x1} = f(x_2)$ - эпюра скоростей для линий скольжения I;

$\dot{U}_{II} = \dot{U}_{x2} = f(x_1)$ - эпюра скоростей для линий скольжения II.

Таким образом, поле скоростей перемещения для области однородного напряженного состояния оказывается более сложным, чем поле линий скольжения.

Простое поле линий скольжения – центрированный веер

Если одно семейство линий скольжения состоит из прямых, а другое из кривых, ортогональных этим прямым, то такое простое поле линий скольжения называется веером. Частный случай веера, когда все прямые пересекаются в одной точке, называется центрированным веером (рис. 2.18).

Анализ центрированного веера удобно проводить в полярных координатах, приняв центр веера O за начало полярных координат и направив ось ρ по отрицательному направлению оси x_2 . Полярный угол θ будет отсчитываться от оси ρ поворотом этой оси против часовой стрелки.

Прямые линии – линии скольжения I семейства, дуги окружности – линии скольжения II семейства.

Вдоль любой линии скольжения I семейства $\theta = \text{const}$. По уравнению Генки для линии скольжения I $\omega - \theta = C1$. Получаем, что вдоль любой линии скольжения I $\omega = \text{const}$. Следовательно, вдоль любой линии скольжения I напряженное состояние остается постоянным. Кроме того, в рассматриваемом случае имеем, что вдоль любой линии скольжения I $\omega + \theta = C2$. По уравнению Генки эта сумма постоянна вдоль любой линии

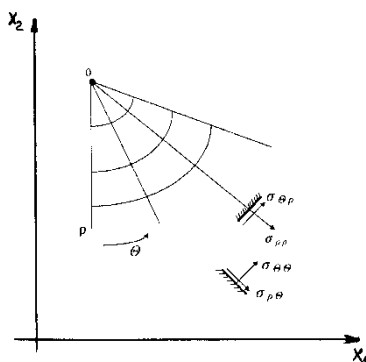


Рис. 6. 18. Простое поле линий скольжения – центрированный веер

скольжения II семейства. Тогда $\omega + \theta = C_2$ во всей области централизованного веера, откуда $\omega = C_2 - \theta$, и среднее нормальное напряжение в любой точке централизованного веера равно:

$$\sigma_0 = 2K(C_2 - \theta). \quad (6.43)$$

Поскольку в любой точке линии скольжения нормальное напряжение равно среднему нормальному, то имеем:

$$\sigma_\rho = \sigma_\theta = 2K(C_2 - \theta), \quad (6.44)$$

где σ_ρ - нормальное напряжение на тангенциальной площадке;

σ_θ - нормальное напряжение на радиальной площадке.

В любой точке линии скольжения имеем главное касательное напряжение: $\tau_{\rho\theta} = K$.

В поле централизованного веера нормальные напряжения в точке являются линейными функциями ее полярного угла θ и не зависят от координаты ρ .

С учетом того, что $\dot{U}_I = \dot{U}_\rho$, $\dot{U}_{II} = \dot{U}_\theta$, то в соответствии с уравнениями Гейрингер:

$$\begin{cases} d\dot{U}_\rho - \dot{U}_\theta d\theta = 0; \\ d\dot{U}_\theta + \dot{U}_\rho d\theta = 0. \end{cases} \quad (6.45)$$

Для любой линии скольжения первого семейства: $d\theta = 0$; $d\dot{U}_\rho = 0$; $\dot{U}_\rho(\theta = \theta_i) = \text{const}$. С переходом от одной линии скольжения I к другой компонент \dot{U}_ρ меняется по закону, следующему из второго уравнения:

$$\dot{U}_\rho = -\frac{d\dot{U}_\theta}{d\theta}. \quad (6.46)$$

Тангенциальный компонент скорости \dot{U}_θ зависит от обеих координат ρ и θ :

$$\begin{cases} \dot{U}_\theta = f(\theta) + \varphi(\rho); \\ \dot{U}_\rho = -\frac{df(\theta)}{d\theta}. \end{cases} \quad (6.47)$$

Таким образом, радиальный компонент скорости перемещения равен по модулю интенсивности изменения тангенциального компонента по координате θ .

Центр в точке O является особой точкой.

1. В ней сходятся все прямые линии скольжения I семейства, вдоль которых σ_0 имеет определенные значения, не совпадающие для разных прямых линий. Поэтому в этой точке теоретически напряжения не имеют единственного значения.

2. Вдоль каждой линии скольжения I семейства имеется свой радиальный компонент скорости перемещения \dot{U}_ρ . Поэтому в особой точке этот компонент теоретически также не имеет единственного значения. Чтобы избежать противоречия на практике необходимо рассматривать не особую точку, а рассматривать некоторую центральную область.

Простое поле линий скольжения. Нецентрированный веер

В этом случае прямые линии скольжения I семейства являются касательными к некоторой кривой C, которая называется базисной кривой веера; линии скольжения II семейства представляют собой эвольвенты базисной кривой. В данном случае удобно использовать следующую систему координат. За начало координат принимается такая точка O на базисной кривой C, в которой касательная к C параллельна оси x_2 , то есть $\theta = 0$. За координаты произвольной точки Q веера принимают угол θ , который образует проходящая через эту точку прямая линия скольжения I с отрицательным направлением оси x_2 , и расстояние ρ между линиями скольжения II, одна из которых проходит через точку Q, а другая – через начало координат O. В такой системе координат координатные линии $Q = \text{const}$ и $\rho = \text{const}$ совпадают соответственно с линиями скольжения I и II (рис. 6.19).

Рассуждая так же, как в предыдущем случае для центрированного веера, получим для всей области нецентрированного веера: $\omega + \theta = C_2$, откуда $\omega = C_2 - \theta$ и $\sigma_0 = 2K(C_2 - \theta)$; $\tau_{\rho\theta} = K$. Напряженное состояние вдоль прямых линий скольжения I постоянно; нормальные напряжения линейно зависят от координаты θ .

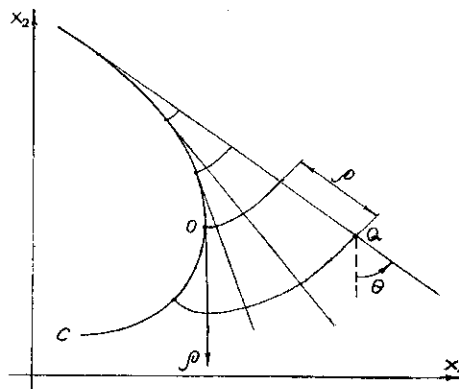


Рис. 6.19. Поле линий скольжения - нецентрированный веер

Компоненты скорости в поле нецентрированного веера характеризуются теми же формулами, что и для центрированного:

$$\begin{aligned} \dot{U}_\theta &= f(\theta) + \varphi(\rho); \\ \dot{U}_\rho &= -\frac{df(\theta)}{d\theta}. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Базисная кривая веера С является предельной линией – это огибающая линий скольжения I, за пределы которой нельзя продолжать линии скольжения II.

Общий случай поля линий скольжения

В общем случае поле линий скольжения представляет собой два ортогональных семейства плавных кривых линий. Эти семейства могут быть образованы ортогональными циклоидами, логарифмическими спиралями и другими более сложными кривыми. В таких полях, в частности, кривые одного семейства могут пересекаться в одной точке, которая будет являться особой.

При решении практических задач редко бывает возможно построить поле линий скольжения одного и того же вида по всей деформируемой зоне. Обычно необходимо комбинировать поля линий скольжения, соответствующие решениям, справедливым для различных областей. Условиями стыковки полей разных видов являются:

1. сведение линий скольжения смежных полей на границах областей;
2. непрерывность компонентов напряжений вдоль нормалей к границам областей.

Практические задания

Задача 1

Задача о вдавливании плоского жесткого штампа в полупространство

На рис. 6.20 показана физическая плоскость x_1 - x_2 пластической деформации. Рассматриваем жестко-пластическое полупространство, которое расположено под осью x_1 .

Найдем поле линий скольжения в пластической области полупространства для начального момента пластической деформации, когда все условия для вдавливания штампа созданы, но прямолинейная граница полупространства еще не нарушена.

Решение

Отметим некоторые особенности, которые наблюдаются при протекании пластического вдавливания штампа в полупространство.

1. Вдавливание может начаться только тогда, когда вся область полупространства, примыкающая к основанию штампа, перейдет в пластическое состояние.

2. В процессе вдавливания материал из-под штампа перетекает влево, вправо и вверх. Таким образом, по сторонам от штампа образуются постепенно увеличивающиеся возвышения, и граница полупространства становится криволинейной.

3. Чтобы перетекание материала могло происходить и по сторонам от штампа, соответствующие области полупространства также должны перейти в пластическое состояние.

Таким образом, пластическое вдавливание штампа в полупространство может начаться только тогда, когда определенная область полупространства, примыкающая к основанию штампа и выходящая за пределы основания влево и вправо, перейдет в пластическое состояние.

Рассмотрим пластические зоны слева и справа от штампа, примыкающие к свободной границе полупространства. Пусть точка a на свободной границе справа от штампа принадлежит пластической зоне. Относительно компонентов напряжений в окрестности этой точки можно заключить следующее:

1. Поскольку точка a принадлежит свободной границе, то $\sigma_{22}=0$; $\sigma_{12}=\sigma_{21}=0$; тогда σ_1 и σ_2 – главные напряжения.
2. Из условия пластичности $(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2 = 4K^2$ получаем: $\sigma_1 = \pm 2K$; ясно, что точка a вдоль x_1 испытывает сжатие, т. е. $\sigma_1 = -2K$.

Теперь для точки a найдем показатели ω и θ : $\sigma_0 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = -K$; $\omega = \frac{\sigma_0}{2K} = -\frac{1}{2}$;

из уравнения

$$\sigma_{22} = 2K\omega - K \sin 2\theta; \quad 0 = -K - K \sin 2\theta; \quad \theta = -\frac{\pi}{4}.$$

Теперь мы знаем положение линий скольжения первого и второго семейства в точке a .

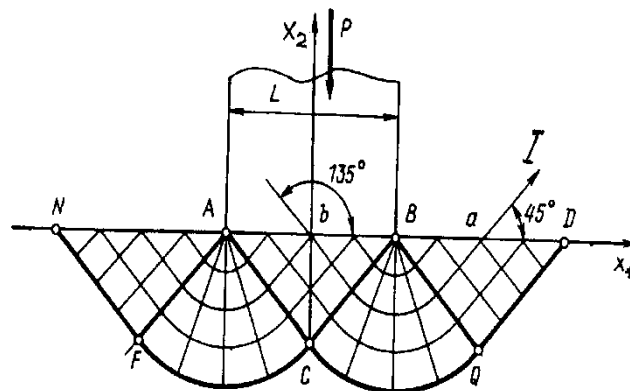


Рис. 6.20. Внедрение пуансона в полупространство

Пусть NA и BD – протяженности свободных границ, к которым примыкают пластические зоны слева и справа от штампа. Положения точек N и D пока неизвестны. Поскольку a – произвольная точка свободной границы пластической зоны, то в любой точке свободных границ напряженное состояние такое же, как в точке a , и, следовательно, такое же положение линий скольжения I и II .

Примем, что в областях NA и BD - линии скольжения прямолинейны, т.е. поля линий скольжения являются простейшими. Тогда соответствующие области – это области постоянного напряженного состояния, во всех точках которых

$$\text{имеем: } \sigma_{11} = -2K; \sigma_{22} = 0; \sigma_{12} = \sigma_{21} = 0; \omega = -\frac{1}{2}; \theta = -\frac{\pi}{4}.$$

Перейдем к анализу пластической зоны, примыкающей к основанию штампа АВ. Считаем, что трение между основанием штампа и границей полупространства отсутствует. Тогда в любой точке границы $\sigma_{12} = 0$. Из формулы $\sigma_{12} = -K \cos 2\theta = 0$ получим $\theta = \pm \frac{\pi}{4}$. Если принять $\theta = -\frac{\pi}{4}$, то на участке АВ положение линий скольжения останется таким же, как на участках NA и BD. Но на участке

АВ напряженное состояние иное: $\sigma_{22} \neq 0$. Поэтому на участке АВ берем $\theta = \frac{\pi}{4}$.

Рассматривая крайние точки А и В основания штампа, заключаем, что в этих точках соответственно линии скольжения I и II меняют свое направление. Следовательно, А и В - особые точки.

Примем, что в пластической области, примыкающей к основанию штампа АВ, линии скольжения прямолинейны, т.е. поле простейшее, и напряженное состояние во всем поле однородно. Отметим, что это напряженное состояние нам неизвестно.

Выделим три пластические области постоянного напряженного состояния: 1 примыкающую к NA; 2 примыкающую к BD, где напряженное состояние такое же как и в первой области; 3 примыкающую АВ, где напряженное состояние отличается от состояния смежных областей. Следует отметить, что вблизи граничных точек А и В должны быть переходные зоны неоднородного напряженного состояния, где сетка линий скольжения не может быть простейшей. Линии скольжения I, проведенные чуть левее и чуть правее точки А, ограничивают соответственно первую и третью области постоянного напряженного состояния и выделяют переходную зону неоднородного напряженного состояния.

Рассмотрение соседних областей постоянного напряженного состояния позволяет сделать вывод, что поле линий скольжения в переходной зоне есть центрированный веер: в зоне 1-3 веер имеет прямые линии I, дуги концентрических окружностей II и центр А; в зоне 2-3 прямые линии II, дуги I и центр В.

Как известно, во всей зоне центрированного веера 1-3 $\omega + \theta = \text{const}$. В области 1: $\omega = -\frac{1}{2}; \theta = -\frac{\pi}{4}$; тогда получим $\omega + \theta = -\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}$. В зоне 3: $\theta = \frac{\pi}{4}; \omega + \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}$, откуда $\omega = -\frac{1}{2}(1 + \pi)$.

Теперь поля линий скольжения, полученные для отдельных областей, сведем воедино. Получим области однородного напряженного состояния в виде конгруэнтных прямоугольных равнобедренных треугольников: NFA, ACB, BQD. Отсюда протяженность пластических зон слева и справа от штампа равна длине его основания: NA=AB=BD. AF, AC, DQ, QC – это линии скольжения первого семейства; NF, FC, CB, BQ - это линии скольжения второго семейства.

Определим нормальные компоненты напряжений для области ACB:

$$\sigma_{11} = 2K\omega + K \sin 2\theta = -K(1 + \pi) + K = -K\pi,$$

$$\sigma_{22} = 2K\omega - K \sin 2\theta = -K(1 + \pi) - K = -K(2 + \pi).$$

Таким образом, при начальной пластической деформации хорошо смазанный плоский штамп, вдавливаемый в полубесконечное тело, производит равномерно распределенное давление, равное $K(2 + \pi)$.

На основе рассмотренной задачи об ориентации линий скольжения при выходе на свободную или контактную поверхности: линии скольжения обеих семейств пересекают свободную поверхность, а также контактную поверхность при отсутствии трения под постоянным по модулю углом, равным $\left|\frac{\pi}{4}\right|$.

Задача 2

Волочение листа

Определить усилие волочения листа методом линий скольжения.

Решение

Установившимся процессом деформирования тела называют такой процесс, в котором напряжения и скорости перемещения в любой фиксированной точке тела не изменяются во времени. В противном случае процесс деформирования называют неустановившимся [9].

Рассмотрим установившейся процесс волочения через жесткую матрицу листа, начальная толщина которого h_1 (рис. 2.21). Для упрощения решения задачи трением на плоскостях контакта листа и матрицы пренебрежем. Обозначим конечную толщину листа h_2 , а скорости на входе в матрицу и выходе из нее v_1 и v_2 соответственно.

Из условия несжимаемости материала имеем

$$v_1 = v_2 \frac{h_2}{h_1}.$$

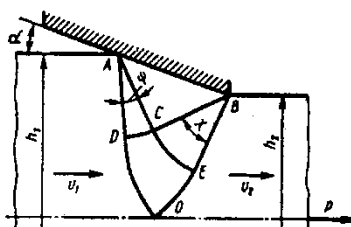


Рис. 6.21. К решению задачи волочения листа

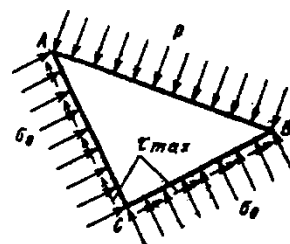


Рис. 6.22. Равновесие области равномерного напряженного состояния

Допустим, что давление на контактной поверхности АВ (рис. 6.21) распределено равномерно. Величину его обозначим через p . В таком случае, к линии АВ примыкает равномерное поле напряжений ABC. Присоединяем к нему два центрированных поля ACD и BCE с неизвестными пока центральными углами ψ и χ .

Из условия равновесия области ABC (рис. 6.22) определяем среднее нормальное напряжение в этой области:

$$\sigma_0^{ABC} = -(p - K) \quad (6.49)$$

Располагая этой величиной, а также величиной угла θ в точке С:

$$\theta^C = \frac{\pi}{4} - \alpha$$

по формуле (6.18) устанавливаем параметры η и ξ для линий BCD и ACE соответственно:

$$\begin{cases} \eta = \frac{1}{2} \frac{\sigma_0^{ABC}}{K} + \frac{\pi}{4} - \alpha; \\ \xi = \frac{1}{2} \frac{\sigma_0^{ABC}}{K} - \frac{\pi}{4} + \alpha. \end{cases} \quad (6.50)$$

После этого по тем же формулам (6.18) можно определить значения σ_0 в точках линий скольжения CD и CE, которые являются окружностями радиусов соответственно AC и BC. Таким образом, приходим ко второй краевой задаче. Численное решение ее, изложенным выше методом, позволяет определить напряженное состояние в области CDOE.

Для того чтобы установить зависимость между неизвестными углами ψ и χ , выразим среднее нормальное напряжение в точке O через величину его в точке С, продвигаясь от точки С к точке O вначале по линии CDO, а затем по линии CEO.

Учитывая, что величина θ в точке D:

$$\theta^D = \frac{\pi}{4} - (\alpha + \psi)$$

по первой формуле (2.18), используя первую формуле (6.50), имеем:

$$\frac{1}{2} \frac{\sigma_0^D}{K} + \frac{\pi}{4} - (\alpha + \psi) = \frac{1}{2} \frac{\sigma_0^{ABC}}{K} + \frac{\pi}{4} - \alpha$$

откуда

$$\frac{1}{2} \frac{\sigma_0^D}{K} = \frac{1}{2} \frac{\sigma_0^{ABC}}{K} + \psi \quad (6.51)$$

Определим теперь параметр ξ для линии скольжения ADO. По второй формуле (6.51):

$$\xi = \frac{1}{2} \frac{\sigma_0^D}{K} - \frac{\pi}{4} + (\alpha + \psi)$$

Далее по той же формуле, учитывая, что величина угла θ в точке O равна $\frac{\pi}{4}$, связываем средние нормальные напряжения в точках O и D:

$$\frac{1}{2} \frac{\sigma_0^O}{K} - \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \frac{\sigma_0^D}{K} - \frac{\pi}{4} + (\alpha + \psi)$$

Подставим в эту формулу соотношение (6.51) и получим:

$$\frac{1}{2} \frac{\sigma_0^O}{K} = \frac{1}{2} \frac{\sigma_0^{ABC}}{K} + \alpha + 2\psi \quad (6.52)$$

Аналогично можно вывести зависимость между средними нормальными напряжениями в точках O и C при переходе от последней к первой по линии CEO. Она имеет вид:

$$\frac{1}{2} \frac{\sigma_0^O}{K} = \frac{1}{2} \frac{\sigma_0^{ABC}}{K} - \alpha + 2\chi \quad (6.53)$$

Сопоставляя выражения (2.52) и (2.53), заключаем, что

$$\chi = \psi + \alpha \quad (6.54)$$

Давление p и один из углов ψ или χ определяем из двух условий: равенства нулю суммы проекций на горизонтальную ось всех сил, действующих на поверхность ADO (рис. 6.23):

$$\int_{ADO} (\sigma_0 \cos \theta + K \sin \theta) ds = 0$$

и нахождения точки O на оси симметрии. Неизвестные определяем подбором.

После определения давления p усилие волочения P на единицу длины в направлении, перпендикулярном чертежу, подсчитываем по формуле:

$$P = p(h_1 - h_2) \quad (6.55)$$

которая следует из условия равновесия листа (рис. 6.24).

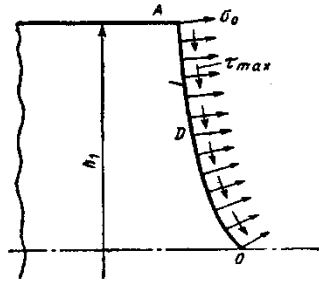


Рис. 6.23. Равновесие жесткой области на входе в матрицу

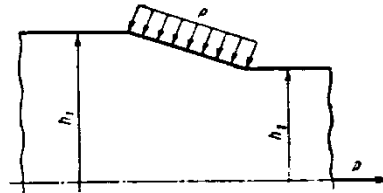


Рис. 6.24. Равновесие листа

Максимальное обжатие $\frac{h_1 - h_2}{h_1}$ соответствует $\psi = 0$, когда четырехугольник CDOE стягивается в точку (рис. 6.21). В этом случае (рис. 6.25) отпадает необходимость численного решения второй краевой задачи.

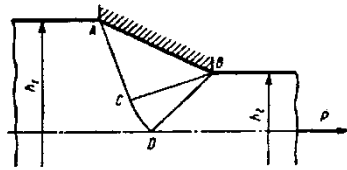


Рис. 6.25. К решению частного случая задачи волочения листа

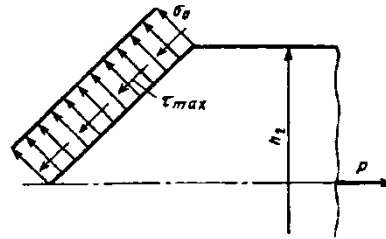


Рис. 6.26. Равновесие жесткой области на выходе из матрицы

Согласно формуле (6.54) $\chi = \alpha$ и следовательно, линия ВО наклонена к горизонтальной оси под углом $\frac{\pi}{4}$. Величины h_1 , h_2 и α связаны между собой. Действительно, как следует из рис. 6.25,

$$\frac{h_2}{2} = BO \frac{\sqrt{2}}{2} = BC \frac{\sqrt{2}}{2} = AB \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{h_1 - h_2}{4 \sin \alpha},$$

откуда

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{1}{1 + 2 \sin \alpha}.$$

Среднее нормальное напряжение в точках линии ВО находим по второй формуле (6.18), используя соотношение (6.49) и вторую формулу (6.50):

$$\frac{1}{2} \frac{\sigma_0^{\text{BO}}}{K} - \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{2} \frac{1}{K} (p - K) - \frac{\pi}{4} + \alpha,$$

откуда

$$\sigma_0^{\text{BO}} = -p + K(1 + 2\alpha). \quad (6.56)$$

Из равновесия жесткой области, изображенной на рис. 2.26, получаем

$$P = 2K \frac{h_2}{2} \frac{2}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\sigma_0^{\text{BO}} \frac{h_2}{2} \frac{2}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Подставим в это выражение соотношение (6.56). Тогда, используя формулу (6.55), после преобразования имеем

$$P = \frac{4(1 + \alpha) \sin \alpha}{1 + 2 \sin \alpha} Kh_2. \quad (6.57)$$

Величина $2Kh_2$ равна предельной нагрузке при растяжении листа постоянной толщины h_2 . Поэтому волочение возможно при условии, что

$P < 2Kh_2$ или $\alpha \sin \alpha < \frac{1}{2}$, откуда следует, что $\alpha < 42^\circ 27'$.

Задача 3

Волочение листа

Лист с конечной толщиной h получают волочением через жесткую матрицу. Для упрощения задачи контактным трением пренебрегают. Определить усилие волочения и оценить возможность осуществления самого процесса волочения. Исходные данные в табл. 6.1.

Таблица 6.1

Исходные данные

Номер варианта	Конечная толщина листа h , мм	Предел текучести σ_T , кг/мм ²	Угол α , град.
1	1,3	10	10
2	1,1	20	15
3	0,8	30	20
4	0,9	40	25
5	0,7	50	30
6	0,8	15	35
7	0,9	18	40
8	1,0	19	12
9	1,1	21	14
10	1,2	23	28
11	1,0	24	29
12	0,9	25	30
13	1,0	26	31
14	1,1	27	32

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Орлов Г.А. Технологические процессы обработки металлов давлением. Учеб. Пособие. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2013. 198 с.
2. Целиков А.И., Никитин Г.С., Рокотян С.Е. Теория продольной прокатки. М.,: «Металлургия», 1980. 320. с.
3. Громов Н.П. Теория обработки металлов давлением. Изд. 2-е, перераб. и доп. М., «Металлургия», 1978. 359 с.
4. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение, 1975. 399 с.
5. Смирнов В.С. Теория обработки металлов давлением. М.: Металлургия, 1973. 469 с.
6. Колмогоров В.Л. Механика обработки металлов давлением. М.: Металлургия, 1986. 688 с.
7. Мастеров В.А., Берковский В.С. Теория пластической деформации и обработка металлов давлением. М.: Металлургия, 1989. 400 с.
8. Тулупов С.А., Шемшурова Н.Г., Тулупов О.Н. Теория обработки металлов давлением. – Магнитогорск, МГТУ. – 2010. – 175 с.
9. Обработка металлов давлением. Прокатное производство / Ю.Ф. Шевакин, В.Н. Чернышев, Р.Л. Шаталов, Н.А. Мочалов. – М.: Интермет Инжиниринг, 2005. – 492 с.
10. Суворов И.К. Обработка металлов давлением. Изд. 2-е, перераб. и доп. Учебник для металлургических специальностей вузов. - М.: «Высш. школа», 1973. - 384 с.
11. Технология процессов обработки металлов давлением. / Полухин П.И., Хензель А., Полухин В.П. и др. - М.: Металлургия, 1988. - 408 с.
12. Румянцев М.И., Локотунина Н.М., Моллер А.Б. Теория, технология и управление качеством продукции обработки металлов давлением: Учебн. пособие. – Магнитогорск: ГОУ ВПО «МГТУ», 2008. – 230 с.
13. Красильников Л.А. Волоочильщик метизных цехов. – М.: Металлургия, 1968. – 284 с.
14. Бережной В.Л. Прессование с активным действием сил трения / В.Л. Бережной, В.Н. Щерба, А.И. Батулин. – М.: Металлургия, 1988. – 296 с.
15. Перлин, И.Л. Теория прессования металлов / И.Л. Перлин, Л.Х. Райтбарг. – М.: Металлургия, 1975. – 448 с.
16. Райтбарг Л.Х. Производство прессованных профилей / Л.Х. Райтбарг. – М.: Металлургия, 1984. – 264 с.
17. Технология обработки давлением цветных металлов и сплавов / А.В. Зиновьев, А.И. Колпашников, П.И. Полухин и др. – М.: Металлургия, 1992. – 512 с.
18. Профили, прессованные из алюминиевых и магниевых сплавов: Кн. 1. Справочник-каталог / Б.И. Бондарев, Г.В. Лытнева, Ф.В. Николаев и др. – М.: Металлургия, 1989. – 560 с.

19. Прозоров Л.В. Прессование металлов жидкостью высокого давления / Л.В. Прозоров, А.А. Костава, В.Д. Ревтов. – М.: Металлургия, 1972. – 152 с.
20. Шевакин Ю.Ф. Прессование тяжёлых цветных металлов и сплавов / Ю.Ф. Шевакин, Л.М. Грибарник А.А. Нагайцев. – М.: Металлургия, 1987. – 246 с.
21. Основы технологических процессов ОМД: раздел прессование: учеб. пособие / В.Р. Каргин, Б.В. Каргин. – Самара: Изд-во Самар. гос. аэрокосм. ун-та, 2011. – 104 с.
22. Ковка и штамповка. Под ред. Е.И. Семенова, т. 2. – М.: Машиностроение, 1985 – 193 с.
23. Грудев А.П. Теория прокатки. - М.: Интермет инжиниринг, 2001.– 280с.
24. Охрименко Я.М. Технология кузнечно-штамповочного производства М.: Машиностроение, 1976. – 560 с.
25. Ковка и штамповка: Справочник. В 4-х т./ Ред.совет: Е.И.Семенов (пред.) и др. – М.: Машиностроение, 1985.- Т.1. Материалы и нагрев. Оборудование. Ковка / Под ред. Е.И.Семенова, 1985. 568 с.
26. Ковка и штамповка: Справочник. В 4-х т./ Ред.совет: Е.И.Семенов (пред.) и др. –М.: Машиностроение, 1986.- Т.2. Горячая штамповка./ Под ред. Е.И.Семенова, 1986. 592 с.
27. Ковка и штамповка: Справочник. В 4-х т./ Ред.совет: Е.И.Семенов (пред.) и др. –М.: Машиностроение, 1987.- Т.3. Холодная объемная штамповка./ Под ред. Г.А.Навроцкого, 1987. 384 с.
28. Ковка и штамповка: Справочник. В 4-х т./ Ред.совет: Е.И.Семенов (пред.) и др. –М.: Машиностроение, 1987.- Т.4. Листовая штамповка./ Под ред. А.Д.Матвеева, 1987. 544 с.
29. Ковка и объемная штамповка стали. Справочник, под ред. М. В. Сторожева, т. 2. – М.: Машиностроение, 1967 – 68 с.
30. Технология конструкционных материалов: учебник / О.С. Комаров, В.Н. Ковалевский, А.С. Чаус и др. – Мн.: Новое знание, 2005. – 560 с.
31. Шемшурова Н.Г., Пустовойтов Д.О. Обработка металлов давлением (Общий курс): курс лекций. – Магнитогорск: ФГБОУ ВПО «МГТУ», 2013. – 144 с.
32. Порошковая металлургия и напыленные покрытия / В.Н. Анциферов, Г.В. Бобров, Л.К. Дружинин и др.: под ред. Б.С. Митина. М.: Металлургия, 1987. 791 с.
33. Перельман В.Е. Формирование порошковых материалов. М.: Металлургия, 1979. 232 с.
34. Грабарник Л.М., Нагайцев А.А. Прессование цветных металлов и сплавов. – М.: Металлургия, 1991. – 342 с.
35. Березовский С.Ф. Производство гнутых профилей. – М.: Металлургия, 1985. 200 с.

36. Стальные гнутые профили: монография. / Шемшурова Н.Г., Локотунина Н.М., Антипанов В.Г. и др. - Магнитогорск: ГОУ ВПО «МГТУ», 2010. – 286 с.
37. Пути повышения потребительских свойств гнутых профилей, производимых в ОАО «ММК»: Учебное пособие. / Н.Г. Шемшурова, Н.М. Локотунина, В.Г. Антипанов, В.Л. Корнилов. Магнитогорск: ГОУ ВПО «МГТУ», 2006. 99 с.
38. Новые технологии обработки давлением медных и цинковых сплавов / Р.Л. Шаталов, Н.А. Мочалов, Н.Ш. Босхамджиев, Г.Н. Кручер. – М.: Теплотехник, 2006. – 220 с.
39. Гарбер Э.А. Производство проката. – М.: Теплотехник, 2007. – 368 с.
40. Рудской А.И., Лунев В.А. Теория и технология прокатного производства: учебн. Пособие. – СПб.: Наука, 2005. – 540 с.
41. Основы теории обработки металлов давлением / И.И. Иванов, А.В. Соколов, В.С. Соколов. – М.: ФОРУМ-ИНФРА-М, 2007. – 143 с.
42. Заверюха В.Н., Салганик В.М., Румянцев М.И. Решение задач теории пластичности методом тонких сечений и методом конечных элементов: Учебное пособие, Свердловск, изд. УПИ им. С.М. Кирова, 1986, – 58 с.
43. Томсен Э., Янг Ч., Кобаяши Ш. Механика пластических деформаций при обработке металлов. М.: Машиностроение, 1968. – 504 с.
44. Целиков А.И., Томленов А.Д., Зюзин В.И. Теория прокатки: справочник. М.: Metallurgy, 1982. – 335 с.

Учебное текстовое электронное издание

Локотунина Наталья Михайловна

**ОСНОВЫ МЕХАНИКИ
ОБРАБОТКИ МЕТАЛЛОВ ДАВЛЕНИЕМ**

Практикум

1,68 Мб

1 электрон. опт. диск

г. Магнитогорск, 2020 год
ФГБОУ ВО «МГТУ им. Г.И. Носова»
Адрес: 455000, Россия, Челябинская область, г. Магнитогорск,
пр. Ленина 38

ФГБОУ ВО «Магнитогорский государственный
технический университет им. Г.И. Носова»
Кафедра технологий обработки материалов
Центр электронных образовательных ресурсов и
дистанционных образовательных технологий
e-mail: ceor_dot@mail.ru