



Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова»

М.А. Зарецкая

ПЕРЕКЛЮЧАТЕЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

*Методические указания по дисциплине «Дискретная математика»
для бакалавров направлений подготовки 080500 и 230100*

Магнитогорск
2013

УДК 519.854 (075)
ББК 22.174Я7
З 344

Рецензенты:

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа,
ФГБОУ ВПО «Магнитогорский государственный университет»

Т.К. Плышевская

Кандидат физико-математических наук, заведующая кафедрой математических
методов в экономике,

ФГБОУ ВПО «Магнитогорский государственный технический
университет им. Г.И. Носова»

С.В. Булычева

Зарецкая М.А.

Переключательные функции [Электронный ресурс]: методические указания по дисциплине «Дискретная математика» для бакалавров направлений подготовки 080500 и 230100 / Мария Андриановна Зарецкая; ФГБОУ ВПО «Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова». – Электрон. текстовые дан. (0,25 Мб). – Магнитогорск : ФГБОУ ВПО «МГТУ», 2013. – 1 электрон. опт. диск (CD-R). – Систем. требования : IBM PC, любой, более 1 GHz ; 512 Мб RAM ; 10 Мб HDD ; MS Windows XP и выше ; Adobe Reader 8.0 и выше ; CD/DVD-ROM дисковод ; мышь. – Загл. с титул. экрана.

Электронный учебно-методический образовательный ресурс «Переключательные функции» предназначен для изучения бакалаврами дисциплины «Дискретная математика», входящей в базовую часть Б2.Б4 направления подготовки 080500 — Бизнес-информатика и вариативную часть Б2.В.ОД2 направления подготовки 230100 — Информатика и вычислительная техника.

ЭОР содержит краткие теоретические сведения, указания к решению задач, разбор типовых примеров по следующим разделам: определение и способы задания переключательных функций (ПФ), аналитическое представление ПФ, реализация ПФ с помощью контактных схем, минимизация ПФ с помощью карт Карно, алгебра Жегалкина и типы булевых функций, функционально полные системы и базисы, теорема Поста. В ЭОР имеются задания для самостоятельного решения, снабженные ответами.

УДК 519.854 (075)
ББК 22.174Я7
З 344

© Зарецкая М.А., 2013
© ФГБОУ ВПО «Магнитогорский
государственный технический
университет им. Г.И. Носова», 2013

1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ

В настоящее время переключательные, логические или булевы функции (ПФ) находят широкое применение при разработке и функционировании вычислительной техники. Они осуществляют однозначное отображение элементов множества $\{0, 1\}^n$, т.е. множества наборов $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, состоящих из 0 и 1, во множество $\{0, 1\}$: $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$.

Любую ПФ можно задать с помощью таблицы, в которой перечисляются все наборы значений n переменных (или двоичные n -мерные векторы, или битовые строки длины n) $(0, 0, \dots, 0, 0)$, $(0, 0, \dots, 0, 1)$, $(0, 0, \dots, 1, 0)$, ..., $(1, 1, \dots, 1, 1)$ и соответствующие им значения функции. Всего таких наборов будет 2^n . Располагаются они, как правило, в порядке возрастания соответствующих им двоичных чисел. Например, для наборов трех переменных получаем:

000 $\leftrightarrow$ 0	001 $\leftrightarrow$ 1
010 $\leftrightarrow$ 2	011 $\leftrightarrow$ 3
100 $\leftrightarrow$ 4	101 $\leftrightarrow$ 5
110 $\leftrightarrow$ 6	111 $\leftrightarrow$ 7.

При таком упорядочении ПФ полностью определяется 2^n -мерным двоичным вектором или битовой строкой длины 2^n . Всего таких векторов будет 2^{2^n} , значит и различных ПФ от n переменных будет 2^{2^n} .

При $n = 1$ имеются 4 ПФ, представленные в таблице 1.

Таблица 1.1. Функции одной переменной

$f(x)$ x	0	1	x	$\bar{x}$
0	0	1	0	1
1	0	1	1	0

Функция $f(x) = x$ называется тождественной, а $f(x) = \bar{x}$ – отрицанием x . Функции $f(x) = 0$ и $f(x) = 1$ являются константами и не зависят от x , переменная x в этом случае является несущественной или фиктивной.

При $n = 2$ имеется уже 16 ПФ, из которых наибольшее значение и специальные названия имеют 7, представленные в таблице 2.

Таблица 1.2. Основные функции двух переменных

$f(x, y)$ $x \quad y$	$x \wedge y$	$x \oplus y$	$x \vee y$	$x \downarrow y$	$x \sim y$	$x \rightarrow y$	$x y$
0 0	0	0	0	1	1	1	1
0 1	0	1	1	0	0	1	1
1 0	0	1	1	0	0	0	1
1 1	1	0	1	0	1	1	0

$x \wedge y$ или xy – конъюнкция (логическое умножение),

$x \oplus y$ – сложение по модулю 2 (разделительное «или»),

$x \vee y$ – дизъюнкция (включающее «или», логическое сложение),

$x \downarrow y$ – стрелка Пирса (не «или»),

$X \sim Y$ – эквиваленция,

$X \rightarrow Y$ – импликация (логическое следование),

$X|Y$ – штрих Шеффера (не «и»).

Таким образом, ПФ можно задавать таблицей (таблицей истинности), вектором (оставив от таблицы последний столбец) или формулой (аналитически).

В каждую ПФ вместо любой из переменных можно подставить другую функцию, получается так называемая суперпозиция функций.

Пример 1.1. Пусть $f(x, y) = x \oplus y$, $g(x, y) = x\bar{y}$, тогда

$$h_1(x, y, z) = f(x, g(y, z)) = x \oplus y\bar{z},$$

$$h_2(x, y, z) = f(y, g(x, z)) = y \oplus x\bar{z},$$

$$h_3(x, y, z) = f(g(x, y), z) = x\bar{y} \oplus z,$$

$$h_4(x, y, z) = g(f(x, y), z) = (x \oplus y)\bar{z}$$

и т.д. — различные суперпозиции функций f и g .

Пример 1.2. Постройте таблицу истинности для функции, заданной формулой $f(x, y, z) = x\bar{y} \oplus z$. Задайте эту функцию битовой строкой длины 8.

Решение. Выпишем по порядку 8 различных наборов (x, y, z) и вычислим постепенно соответствующие значения функции.

Таблица 1.3. Таблица истинности для $f(x, y, z) = x\bar{y} \oplus z$

№	x	y	z	$\bar{y}$	$x\bar{y}$	$x\bar{y} \oplus z$
0	0	0	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	1
2	0	1	0	0	0	0
3	0	1	1	0	0	1
4	1	0	0	1	1	1
5	1	0	1	1	1	0
6	1	1	0	0	0	0
7	1	1	1	0	0	1

Выписывая значения из последнего столбца таблицы, получаем векторное задание битовой строкой: $f(x, y, z) = (0101\ 1001)$.

ПФ f можно также задавать, выписывая наборы, на которых она принимает единичные или нулевые значения. Их обычно обозначают $f^{-1}(1)$ и $f^{-1}(0)$. А можно перечислить номера единичных наборов. Для функции из предыдущего примера

$$f^{-1}(1) = \{001, 011, 100, 111\},$$

$$f^{-1}(0) = \{000, 010, 101, 110\},$$

$$f(x, y, z) = \{1, 3, 4, 7\}.$$

Разные формулы могут задавать одну и ту же функцию. Такие формулы называются равносильными (соединяются обычным знаком равенства). Доказать равносильность формул можно с помощью таблиц истинности.

Пример 1.3. Проверьте, являются ли равносильными формулы $(x \vee y)\bar{x} \rightarrow y$ и $x \vee \bar{y}$.

Решение. Для этих формул составим таблицы истинности, совместив их.

Таблица 1.4. Таблица истинности для проверки равносильности

x	y	$x \vee y$	$\bar{x}$	$(x \vee y)\bar{x}$	Первая формула $(x \vee y)\bar{x} \rightarrow y$	$\bar{y}$	Вторая формула $x \vee \bar{y}$
0	0	0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1	0	0
1	0	1	0	0	1	1	1
1	1	1	0	0	1	0	1

Так как столбцы, соответствующие первой и второй формулам, не совпадают, то формулы не являются равносильными. Что касается первой формулы, то она на всех наборах значений переменных принимает значение 1. Такие формулы называются тождественно истинными. Формулы, принимающие значение 0 на всех наборах значений переменных, называются тождественно ложными. Формулы называются выполнимыми, если найдется набор значений переменных, на котором функция принимает значение 1.

Аналогично рассмотренному Примеру 1.3 доказывается равносильность следующих формул:

$$1^0. x \vee x = x, \quad x x = x \quad (\text{идемпотентность});$$

$$2^0. x \vee y = y \vee x, \quad xy = yx \quad (\text{коммутативность});$$

$$3^0. x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z, \quad x(yz) = (xy)z \\ (\text{ассоциативность});$$

$$4^0. x \vee (yz) = (x \vee y)(x \vee z), \quad x(y \vee z) = xy \vee xz \\ (\text{дистрибутивность});$$

$$5^0. x \vee xy = x, \quad x(x \vee y) = x \quad (\text{поглощение});$$

$$6^0. x \vee 0 = x; \quad x0 = 0; \quad x \vee 1 = 1; \quad x1 = x \\ (\text{действия с константами});$$

$$7^0. x \vee \bar{x} = 1; \quad x\bar{x} = 0 \quad (\text{действия с дополнением});$$

$$8^0. \bar{\bar{x}} = x \quad (\text{инволютивность});$$

$$9^0. \overline{x \vee y} = \bar{x} \cdot \bar{y}, \quad \overline{xy} = \bar{x} \vee \bar{y} \quad (\text{законы де Моргана}),$$

которые остаются верными при подстановке в них вместо независимых переменных любых ПФ. Следовательно, множество булевых функций с операциями $\vee$, $\wedge$ и отрицания образует булеву алгебру.

Для упрощения формул, кроме равносильностей $1^0 - 9^0$, можно использовать следующие:

$$10^0. xy \vee x\bar{y} = x; \quad (x \vee y)(x \vee \bar{y}) = x \quad (\text{склеивание})$$

или

$$x = xy \vee x\bar{y}; \quad x = (x \vee y)(x \vee \bar{y}) \quad (\text{расщепление});$$

$$11^0. xz \vee y\bar{z} \vee xy = xz \vee y\bar{z};$$

$$(x \vee z)(y \vee \bar{z})(x \vee y) = (x \vee z)(y \vee \bar{z}) \quad (\text{обобщенное склеивание});$$

$$12^0. x \vee \bar{x}y = x \vee y; \quad x(\bar{x} \vee y) = xy.$$

2. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПФ

Любую ПФ $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ можно задать с помощью формулы. Если $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ не является тождественным нулем, то для нее существует единственная формула специального вида, называемая совершенной дизъюнктивной нормальной формой (СДНФ), которая строится следующим образом.

1. Выбираются наборы значений переменных, на которых функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ равна 1.

2. Каждому такому набору $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ сопоставляется так называемая элементарная конъюнкция всех переменных $x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n}$, где $x^\alpha = \begin{cases} x, & \text{если } \alpha = 1, \\ \bar{x}, & \text{если } \alpha = 0. \end{cases}$

3. Берутся дизъюнкции всех построенных элементарных конъюнкций.

С помощью равносильных преобразований $1^0 - 12^0$ СДНФ можно привести к дизъюнкции элементарных конъюнкций, не обязательно содержащих все переменные. Получим дизъюнктивную нормальную форму (ДНФ). Можно построить разные ДНФ для одной и той же функции.

Пример 2.1. Для функции $f(x, y, z) = (10011110)$ постройте СДНФ и ДНФ.

Решение. Задание функции трёх переменных в виде последовательности из восьми нулей и единиц означает, что наборы значений переменных берутся в определённом порядке, а именно

000 $\leftrightarrow$ 0	001 $\leftrightarrow$ 1
010 $\leftrightarrow$ 2	011 $\leftrightarrow$ 3
100 $\leftrightarrow$ 4	101 $\leftrightarrow$ 5
110 $\leftrightarrow$ 6	111 $\leftrightarrow$ 7

в двоичной записи.

Для построения СДНФ выбираем те наборы значений переменных x, y, z , на которых ПФ принимает значение 1. Таких наборов пять. Каждому из них соответствует конъюнкция, содержащая каждую переменную или её отрицание. Набору $(0,0,0)$ соответствует $\bar{x} \bar{y} \bar{z}$: $(0,0,0) \rightarrow \bar{x} \bar{y} \bar{z}$; отрицания ставятся над теми переменными, которые в данном наборе равны 0;

$$(0,1,1) \rightarrow \bar{x} y z;$$

$$(1,0,0) \rightarrow x \bar{y} \bar{z};$$

$$(1,0,1) \rightarrow x \bar{y} z;$$

$$(1,1,0) \rightarrow x y \bar{z}.$$

$$\text{Поэтому } f_{\text{СДНФ}}(x, y, z) = \bar{x} \bar{y} \bar{z} \vee \bar{x} y z \vee x \bar{y} \bar{z} \vee x \bar{y} z \vee x y \bar{z}.$$

Упростим эту формулу.

$$f(x, y, z) = \bar{x} \bar{y} \bar{z} \vee x \bar{y} \bar{z} \vee x \bar{y} z \vee \bar{x} y z \vee x y \bar{z} =$$

$$= (\bar{x} \bar{y} \bar{z} \vee x \bar{y} \bar{z}) \vee x \bar{y} z \vee \bar{x} y z \vee x y \bar{z} =$$

$$= \bar{y} \bar{z} \vee x \bar{y} z \vee \bar{x} y z \vee x y \bar{z} = f_{\text{ДНФ}_1}(x, y, z).$$

$$f_{\text{ДНФ}_1}(x, y, z) = \bar{y} \bar{z} \vee x \bar{y} z \vee \bar{x} y z \vee x y \bar{z}.$$

Если вторую элементарную конъюнкцию по идемпотентности повторить несколько раз, а затем применить склеивание, то получим другую ДНФ:

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \bar{x} \bar{y} \bar{z} \vee x \bar{y} \bar{z} \vee x \bar{y} z \vee \bar{x} y z \vee x y \bar{z} = \\ &= (\bar{x} \bar{y} \bar{z} \vee x \bar{y} \bar{z}) \vee (x \bar{y} \bar{z} \vee x \bar{y} z) \vee \bar{x} y z \vee (x \bar{y} \bar{z} \vee x y \bar{z}) = \\ &= \bar{y} \bar{z} \vee x \bar{y} \vee \bar{x} y z \vee x \bar{z} = f_{\text{ДНФ}_2}(x, y, z). \end{aligned}$$

$$f_{\text{ДНФ}_2}(x, y, z) = \bar{y} \bar{z} \vee x \bar{y} \vee \bar{x} y z \vee x \bar{z}.$$

Аналогично, если $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ не является тождественной единицей, то для нее существует единственная формула специального вида, называемая совершенной конъюнктивной нормальной формой (СКНФ), которая строится следующим образом.

1. Выбираются наборы значений переменных, на которых ПФ $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ равна 0.

2. Каждому такому набору $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ сопоставляется так называемая элементарная дизъюнкция всех переменных $x_1^{\bar{\alpha}_1} \vee x_2^{\bar{\alpha}_2} \vee \dots \vee x_n^{\bar{\alpha}_n}$, где $x^\alpha = \begin{cases} x, & \text{если } \alpha = 1, \\ \bar{x}, & \text{если } \alpha = 0. \end{cases}$

3. Берутся конъюнкции всех построенных элементарных дизъюнкций.

С помощью равносильных преобразований $1^0 - 12^0$ СКНФ можно привести к конъюнкции элементарных дизъюнкций, не обязательно содержащих все переменные. Получим конъюнктивную нормальную форму (КНФ). Можно построить разные КНФ для одной и той же функции.

Пример 2.2. Для функции $f(x, y, z) = (1001\ 1110)$ постройте СКНФ.

Решение. Для построения СКНФ выбираем те наборы значений переменных x, y, z , на которых ПФ принимает значение 0. Таких наборов три. Каждому из них соответствует дизъюнкция, содержащая каждую переменную или её отрицание. Набору $(0,0,1)$ соответствует $x \vee y \vee \bar{z} : (0,0,1) \rightarrow x \vee y \vee \bar{z}$; отрицание ставится над теми переменными, которые в данном наборе равны 1;

$$(0,1,0) \rightarrow x \vee \bar{y} \vee z;$$

$$(1,1,1) \rightarrow \bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}.$$

$$\text{Поэтому } f_{\text{СКНФ}}(x, y, z) = (x \vee y \vee \bar{z})(x \vee \bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}).$$

3. КОНТАКТНЫЕ СХЕМЫ

Всякой ПФ, представленной булевой формулой (формулой, содержащей лишь конъюнкции, дизъюнкции и отрицание переменных), можно сопоставить контактную схему, в которой роль переменных играют контакты (например, ключи в электрической цепи):

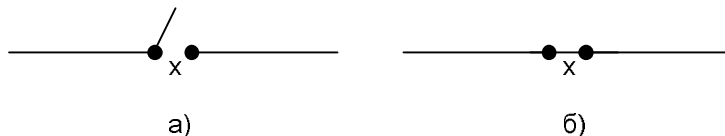


Рис. 1. а) Контакт разомкнут – переменная $x = 0$. б) Контакт замкнут – переменная $x = 1$

Контакты, обозначенные одинаковыми буквами, замыкаются и размыкаются одновременно; при этом, если контакт x замыкается, то контакт $\bar{x}$ размыкается и наоборот.

Конъюнкция двух переменных x и y реализуется с помощью схемы, в которой контакты x и y соединены последовательно, а дизъюнкция – с помощью схемы, в которой контакты x и y соединены параллельно.

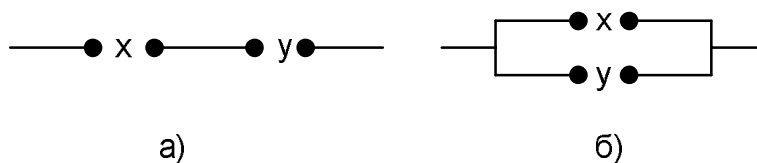


Рис. 2. а) Последовательное соединение контактов. б) Параллельное соединение контактов.

Обратно, по схеме можно построить реализуемую ей ПФ – функцию проводимости. Упрощая ПФ с помощью эквивалентных преобразований, можно получить более простую контактную схему. Здесь мы имеем простейший пример технической реализации ПФ. Разным булевым формулам будут соответствовать разные схемы. Чем меньше вхождений букв в булеву формулу, тем проще схема. Поэтому можно вести речь о минимизации булевых формул.

Пример 3.1. Упростите контактную схему (Рис. 3 а)), используя равносильные преобразования.

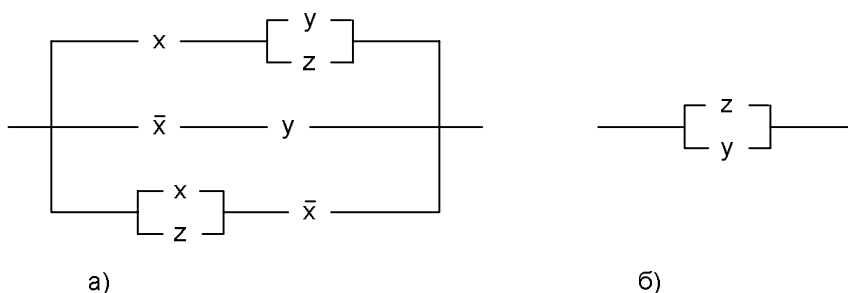


Рис. 3. а) Задание. б) Ответ

Решение. Заданной контактной схеме соответствует ПФ – функция проводимости

$$f(x, y, z) = x(y \vee z) \vee \bar{x}y \vee (x \vee z)\bar{x} \stackrel{4^0}{=} xy \vee xz \vee \bar{x}y \vee x\bar{x} \vee z\bar{x} \stackrel{2^0}{=} \\ \stackrel{3^0}{=} (xy \vee \bar{x}y) \vee (xz \vee z\bar{x}) \stackrel{10^0}{=} y \vee z.$$

Следовательно, упрощённая схема имеет вид на Рис. 3. б)

Пример 3.2. Упростите контактную схему (Рис. 4.а)), используя равносильные преобразования (самостоятельно).

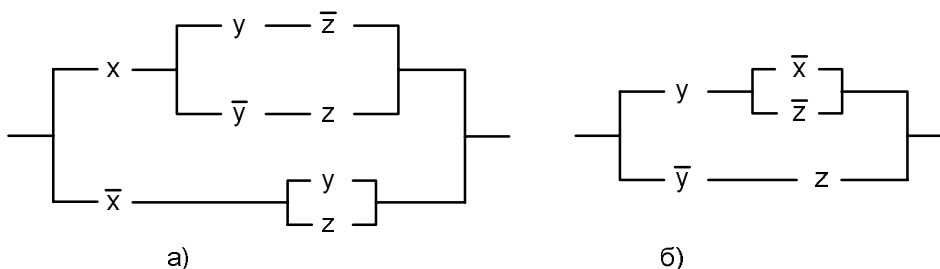


Рис. 4. а) Задание. б) Ответ

Ответ. См. Рис. 4.б).

Это достаточно простые примеры. Для более сложных случаев применяют специальные методы, в частности, карты Карно.

4. КАРТЫ КАРНО И МИНИМИЗАЦИЯ ПФ

Картой Карно для ПФ n переменных называется таблица, состоящая из 2^n правильно расположенных квадратов, каждый из которых соответствует одному набору значений независимых переменных, причем соседним квадратам соответствуют наборы, отличающиеся значениями только одной переменной. Квадраты, расположенные в одном ряду по краям таблицы, также считаются соседними.

На следующих рисунках представлены карты Карно для 2, 3 и 4 переменных. Указаны наборы, соответствующие заштрихованным квадратам.

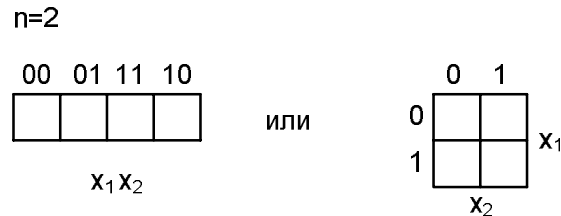


Рис. 5. Карта Карно для двух переменных

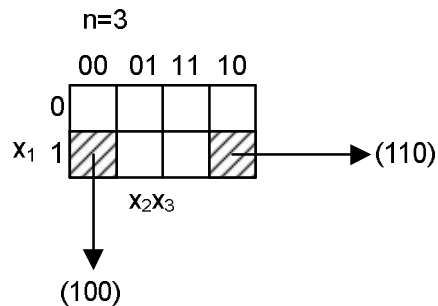


Рис. 6. Карта Карно для трех переменных

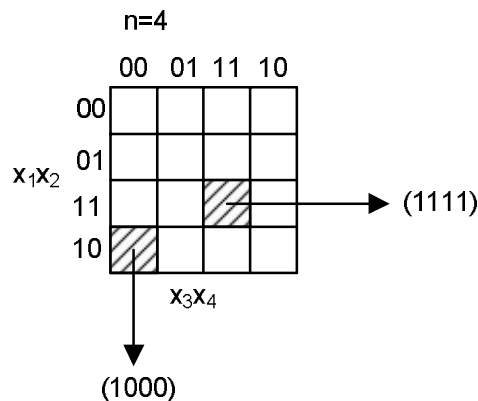


Рис. 7. Карта Карно для четырех переменных

Обычно строки и столбцы, соответствующие значению 1 для некоторой переменной, выделяются фигурной скобкой с обозначением этой переменной (Рис. 8). Полезно также установить соответствие между номерами наборов и их расположением на карте Карно (Рис. 9). При другом расположении переменных порядок заполнения карты будет другим.

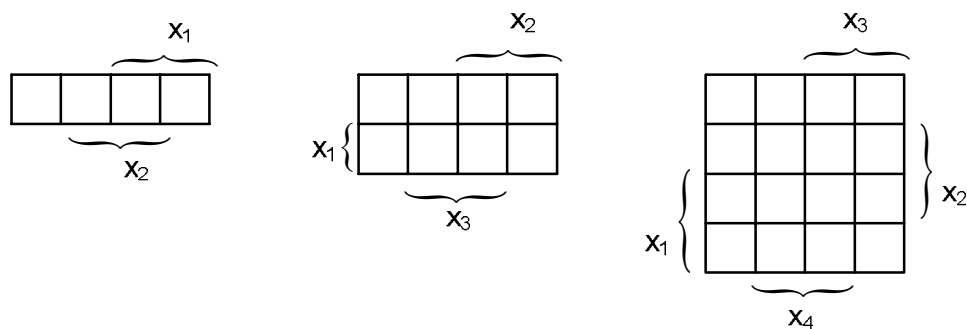


Рис. 8. Обычное изображение карты Карно

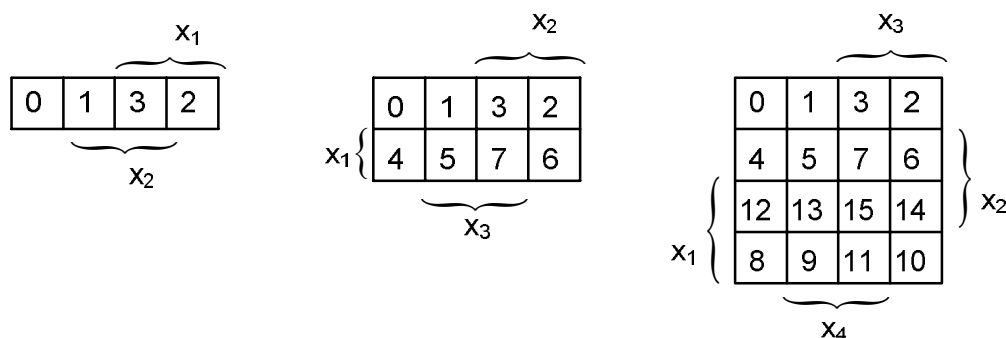


Рис. 9. Порядок заполнения карты Карно

Любую ПФ f можно задать с помощью карты Карно, поместив «1» в квадраты, соответствующие тем наборам, на которых ПФ равна 1, т. е. наборам $f^{-1}(1)$. Квадраты с «1» назовем заполненными. После этого по карте Карно, как и по таблице истинности, можно получить СДНФ и СКНФ. Заполненный квадрат определяет элементарную конъюнкцию, содержащую каждую переменную или её отрицание. Если единицы стоят в соседних квадратах, то элементарные конъюнкции отличаются значениями одной переменной, которую можно убрать за счёт склеивания.

Чтобы получить минимальную дизъюнктивную форму по карте Карно заполненные квадраты собирают в прямоугольники, состоящие из 2^k квадратов, $k = \overline{0, n}$. Каждому такому прямоугольнику соответствует один член дизъюнктивной формы, содержащей только те $n - k$ переменных, которые на этом прямоугольнике не меняются, причем если какая-то переменная равна 0, то она войдет в элементарную конъюнкцию с отрицанием. Минимальной форме соответствует минимальное число максимально возможных прямоугольников.

Аналогично, объединяя пустые квадраты в прямоугольники, получим члены КНФ, содержащие только те переменные, которые на этом прямоугольнике не меняются, причём если какая-то переменная равна 1, то она входит в элементарную дизъюнкцию с отрицанием.

Пример 4.1. Минимизируйте с помощью карты Карно ДНФ и КНФ для ПФ $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1110\ 1100\ 1110\ 0011)$.

Решение. Заполним карту Карно для заданной ПФ $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$, записав 1 в квадратах, соответствующих тем наборам переменных, на которых f равна 1 (Рис. 10).

		x_3		
	1	1		1
	1	1		
x_1			1	1
	1	1		1
			x_4	

Рис. 10. Задание ПФ с помощью карты Карно

Для данной ПФ самые большие прямоугольники состоят из $4=2^2$ квадратов (из 6 уже нельзя). Эти прямоугольники выделим с учётом соседства края таблицы (Рис. 11). Таких прямоугольников три. То, что они пересекаются, роли не играет. И есть один прямоугольник, состоящий из двух квадратов, который нельзя увеличить. Поэтому минимальная дизъюнктивная форма для заданной ПФ имеет вид:

$$f_{\min \text{ ДНФ}}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_1 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_4 \vee x_1 x_2 x_3.$$

		x_3		
	1	1		1
	1	1		
x_1			1	1
	1	1		1
			x_4	

Рис. 11. Построение минимальной ДНФ

Для получения КНФ объединяем пустые квадраты в прямоугольники. Для данной ПФ пустые прямоугольники состоят, максимум, из двух квадратов, они обведены и не пересекаются (Рис. 12). Минимальная КНФ имеет вид:

$$f_{\min \text{ КНФ}}(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(x_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4).$$

		x_3		
	1	1		1
	1	1		
x_1			1	1
	1	1		1
			x_4	

Рис. 12. Построение минимальной КНФ

Пример 4.2. Минимизируйте с помощью карты Карно ДНФ и КНФ для ПФ

а) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1101 \ 1101 \ 0001 \ 1001)$,

б) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0000 \ 0111 \ 0000 \ 0111)$,

в) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0100 \ 0111 \ 0111 \ 0100)$.

Ответ. а) $f_{\min \text{ ДНФ}} = \bar{x}_1 \bar{x}_3 \vee x_3 x_4 \vee x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4,$

$f_{\min \text{ КНН}} = (\bar{x}_3 \vee x_4)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_4)(\bar{x}_1 \vee x_3 \vee \bar{x}_4),$

б) $f_{\min \text{ ДНФ}} = x_3 x_4 \vee x_2 x_3, \quad f_{\min \text{ КНН}} = x_2(x_3 \vee x_4),$

в) $f_{\min \text{ ДНФ}} = \bar{x}_3 x_4 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3, \quad f_{\min \text{ КНН}} = (x_3 \vee x_4)(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3).$

5. АЛГЕБРА ЖЕГАЛКИНА

Любую ПФ можно записать с помощью операций: конъюнкции («и»), дизъюнкции («или») и отрицания. Но можно использовать и другие ПФ. Наш отечественный математик И.И. Жегалкин предложил использовать для записи произвольных ПФ константу 1, конъюнкцию и сложение по модулю 2 — $\oplus$, определяемое таблицей истинности:

Таблица 5.1. Таблица истинности для сложения по модулю 2

x	y	$x \oplus y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Алгебра, построенная на основе этих операций, называется алгеброй Жегалкина и обладает следующими свойствами:

- $xx = x,$
- $xy = yx,$
- $(xy)z = x(yz),$
- $x \cdot 0 = 0,$
- $x \cdot 1 = x,$
- $x \oplus x = 0,$ (приведение подобных членов);
- $x \oplus y = y \oplus x,$ (коммутативность);
- $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z),$ (ассоциативность);
- $x \oplus 0 = x,$ (действия с 0);
- $(x \oplus y)z = xz \oplus yz.$

Десятое свойство описывает давно знакомую дистрибутивность умножения относительно сложения, правда, сложение здесь специфическое.

Операции отрицания и дизъюнкции в алгебре Жегалкина записываются формулами:

$$\bar{x} = x \oplus 1, \quad (1)$$

$$x \vee y = \overline{\bar{x} \vee \bar{y}} = \overline{(x \oplus 1)(y \oplus 1)} = (x \oplus 1)(y \oplus 1) \oplus 1 =$$

$$= xy \oplus x \oplus y \oplus 1 \oplus 1 = xy \oplus x \oplus y,$$

т.е.

$$x \vee y = xy \oplus x \oplus y. \quad (2).$$

Если вместо переменных подставить произвольные ПФ, то равносильности сохранятся. В частности, для любых ПФ или их формул f_1 и f_2 $f_1 \vee f_2 = f_1 f_2 \oplus f_1 \oplus f_2$, а если $f_1 f_2 = 0$, то $f_1 \vee f_2 = f_1 \oplus f_2$. Используя эти соображения, можно доказать, что при формальной замене в **СДНФ** знака дизъюнкции « $\vee$ » на сложение по модулю 2 « $\oplus$ » получится равносильная формула. В ДНФ такая замена, вообще говоря, не проходит.

Если в формуле алгебры Жегалкина раскрыть все скобки и произвести упрощения по свойствам 1 — 10, то получится формула, имеющая вид суммы конъюнкций. Такая формула называется полиномом Жегалкина. Имеет место следующая теорема.

Теорема. Для каждой ПФ существует полином Жегалкина, и притом единственный.

Особо важную роль играют ПФ, полиномы Жегалкина которых имеют вид:

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i \oplus b, \text{ где } a_i, (i = 1, \dots, n), b - \text{ константы } 0 \text{ или } 1. \text{ Такие ПФ называются линейными.}$$

Все ПФ от одной переменной – линейные. Среди ПФ от двух переменных линейных только две: $x \oplus y$ — сложение по модулю 2, и $x \oplus y \oplus 1 = x \sim y$ — эквиваленция. Функция $x \oplus y \oplus z$ — линейная для трех и большего числа переменных.

Построить полином Жегалкина для произвольной ПФ можно несколькими способами, рассмотрим некоторые из них.

1. Записать булеву формулу для ПФ, с помощью равносильных преобразований (1) и (2) перевести ее в алгебру Жегалкина, а затем упростить.
2. В СДНФ ПФ формально заменить знак дизъюнкции « $\vee$ » на сложение по модулю 2 « $\oplus$ », убрать отрицание, а затем упростить.
3. Записать полином с неопределенными коэффициентами и найти их, подставляя все наборы значений переменных и соответствующие им значения ПФ.

Пример 5.1. Постройте полином Жегалкина для ПФ $f(x, y, z) = xy \vee xz \vee yz$ всеми перечисленными способами.

Решение: 1. Функция представлена булевой формулой, поэтому применим закон де Моргана.

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= xy \vee xz \vee yz = \overline{\overline{xy \vee xz \vee yz}} = \overline{\overline{xy} \overline{xz} \overline{yz}} = (xy \oplus 1)(xz \oplus 1)(yz \oplus 1) \oplus 1 = \\ &= (xyz \oplus xz \oplus xy \oplus 1)(yz \oplus 1) \oplus 1 = xyzz \oplus xyzz \oplus xyzy \oplus yz \oplus xyz \oplus xz \oplus xy \oplus 1 \oplus 1 = \\ &= (xyz \oplus xyz) \oplus xyz \oplus yz \oplus xyz \oplus xz \oplus xy \oplus (1 \oplus 1) = xyz \oplus yz \oplus xyz \oplus xz \oplus xy = \\ &= (xyz \oplus xyz) \oplus yz \oplus xz \oplus xy = xy \oplus xz \oplus yz. \end{aligned}$$

Здесь, кроме закона де Моргана и преобразования (1), использовалось «школьное» раскрытие скобок, коммутативность, ассоциативность и приведение подобных по свойству $x \oplus x = 0$.

2. Составим таблицу истинности для ПФ $f(x, y, z) = xy \vee xz \vee yz$.

Таблица 5.2. Таблица истинности для $f(x, y, z) = xy \vee xz \vee yz$

x	y	z	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

По таблице построим СДНФ:

$$f_{\text{СДНФ}}(x, y, z) = \bar{x}yz \vee x\bar{y}z \vee xy\bar{z} \vee xyz \text{ и заменим «}\vee\text{» на сложение по модулю 2 «}\oplus\text{»:$$

$$f(x, y, z) = \bar{x}yz \oplus x\bar{y}z \oplus xy\bar{z} \oplus xyz = (x \oplus 1)yz \oplus x(y \oplus 1)z \oplus xy(z \oplus 1) \oplus xyz =$$

$$= xyz \oplus yz \oplus xyz \oplus xz \oplus xyz \oplus xy \oplus xyz = (xyz \oplus xyz) \oplus (xyz \oplus xyz) \oplus xy \oplus xz \oplus yz = \\ = xy \oplus xz \oplus yz.$$

3. Полином Жегалкина для ПФ трех переменных имеет вид:

$$f(x, y, z) = a_0 \oplus a_1x \oplus a_2y \oplus a_3z \oplus a_4xy \oplus a_5xz \oplus a_6yz \oplus a_7xyz, \quad (3)$$

где $a_i, (i = \overline{0,7})$ – коэффициенты, подлежащие определению; $a_i = 1$, если соответствующее слагаемое входит в полином Жегалкина и $a_i = 0$, если – нет. Найдем эти коэффициенты, подставляя в (3) все наборы значений по порядку.

$$\begin{aligned} f(0, 0, 0) &= 0 = a_0 & \Rightarrow a_0 &= 0, \\ f(0, 0, 1) &= 0 = a_0 \oplus a_3 = 0 \oplus a_3 = a_3 & \Rightarrow a_3 &= 0, \\ f(0, 1, 0) &= 0 = a_0 \oplus a_2 = 0 \oplus a_2 = a_2 & \Rightarrow a_2 &= 0, \\ f(0, 1, 1) &= 1 = a_0 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_6 = 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus a_6 = a_6 & \Rightarrow a_6 &= 1, \\ f(1, 0, 0) &= 0 = a_0 \oplus a_1 = 0 \oplus a_1 = a_1 & \Rightarrow a_1 &= 0, \\ f(1, 0, 1) &= 1 = a_0 \oplus a_1 \oplus a_3 \oplus a_5 = 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus a_5 = a_5 & \Rightarrow a_5 &= 1, \\ f(1, 1, 0) &= 1 = a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_4 = 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus a_4 = a_4 & \Rightarrow a_4 &= 1, \\ f(1, 1, 1) &= 1 = a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_4 \oplus a_5 \oplus a_6 \oplus a_7 = 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus a_7 = 1 \oplus a_7 & \Rightarrow a_7 &= 0. \end{aligned}$$

Подставляя найденные значения коэффициентов в (3), получаем полином Жегалкина для ПФ $f(x, y, z) = xy \vee xz \vee yz$. Итак, $f(x, y, z) = xy \oplus xz \oplus yz$. Следует отметить, что данная функция не является линейной, т.к. в полиноме Жегалкина присутствует конъюнкция и даже не одна.

Ответ. $f(x, y, z) = xy \oplus xz \oplus yz$.

Замечание. Может показаться, что для получения полинома Жегалкина достаточно просто поменять « $\vee$ » на сложение по модулю 2 « $\oplus$ ». Просто мы выбрали для примера особую функцию. Чтобы убедиться, что в общем случае это не так, сделайте самостоятельно следующий пример.

Пример 5.2. Постройте полиномы Жегалкина для ПФ, выбирая различные способы:

а) $f(x, y, z) = xy \vee \bar{y}z$;

б) $f(x, y, z) = (x \downarrow y) \rightarrow \bar{z}$;

в) $f(x, y, z) = (1110\ 0011)$;

Ответ. а) $f(x, y, z) = xy \oplus yz \oplus z$,

б) $f(x, y, z) = xyz \oplus xz \oplus yz \oplus z \oplus 1$,

в) $f(x, y, z) = xyz \oplus xy \oplus yz \oplus x \oplus 1$.

6. ФУНКЦИОНАЛЬНО ПОЛНЫЕ СИСТЕМЫ И БАЗИСЫ

Из построения СДНФ и СКНФ следует, что все ПФ можно получить, используя лишь некоторые из них, например, конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание или даже только конъюнкцию и отрицание (дизъюнкцию и отрицание).

Возможность представления любых ПФ с помощью ограниченного их числа имеет важное практическое значение при их аппаратной реализации.

Определение. Множество Σ ПФ называют функционально полной системой, если любая ПФ может быть представлена в виде суперпозиции ПФ из Σ (формулой над Σ).

Представление любой логической функции с помощью СДНФ и СКНФ определяет простейший пример функционально полной системы $\Sigma_0 = \{\&, \vee, -\}$.

В частности,

1. $x \rightarrow y = \bar{x} \vee y$;
2. $x \sim y = xy \vee \bar{x} \bar{y} = (x \vee \bar{y})(\bar{x} \vee y)$ — СДНФ и СКНФ;
3. $x \oplus y = x\bar{y} \vee \bar{x}y$;
4. $x \downarrow y = \overline{x \vee y} = \bar{x} \bar{y}$;
5. $x | y = \bar{x} \vee \bar{y} = \overline{xy}$;
6. $1 = x \vee \bar{x}$;
7. $0 = x\bar{x}$.

Σ_0 — избыточная система, так как из законов де Моргана следует, что конъюнкцию можно выразить через дизъюнкцию и отрицание

$$xy = \overline{\overline{xy}} = \overline{\bar{x} \vee \bar{y}},$$

и наоборот,

$$x \vee y = \overline{\overline{x \vee y}} = \overline{\bar{x} \bar{y}}.$$

Поэтому функционально полными будут и системы $\Sigma_1 = \{\&, -\}$ и $\Sigma_2 = \{\vee, -\}$.

В частности,

1. $x \vee y = \overline{\bar{x} \bar{y}}$;
2. $x \rightarrow y = \overline{x \bar{y}}$;
3. $x \sim y = xy \vee \bar{x} \bar{y} = \overline{\bar{x} \bar{y} \cdot \overline{\bar{x} \bar{y}}}$;
4. $x \oplus y = x\bar{y} \vee \bar{x}y = \overline{\bar{x} \bar{y} \cdot \overline{\bar{x} \bar{y}}}$ в Σ_1 ;

и

1. $xy = \overline{\overline{xy}} = \overline{\bar{x} \vee \bar{y}}$,
2. $x \sim y = xy \vee \bar{x} \bar{y} = \overline{\bar{x} \vee \bar{y} \vee x \vee y}$ в Σ_2 .

Для доказательства полноты некоторой системы ПФ Σ достаточно представить все ПФ какой-либо известной нам функционально полной системы Σ^* формулами над Σ . Тогда по определению функционально полной системы любая ПФ может быть представлена формулой над Σ^* , а каждая из ПФ Σ^* — формулой над Σ . Следовательно, любая ПФ может быть представлена формулой над Σ .

Как правило, в качестве Σ^* берется Σ_0 или Σ_1 , или Σ_2 . На первый взгляд может показаться, что системы Σ_1 и Σ_2 самые простые, однако, это не так. Есть системы, состоящие только из одной функции:

$$\Sigma_3 = \{\downarrow\} \text{ и } \Sigma_4 = \{| \}.$$

Действительно, ПФ системы $\Sigma_1 = \{\&, -\}$ представляются формулами над Σ_4 :

$$\bar{x} = x | x;$$

$$xy = \overline{x | y} = (x | y) | (x | y).$$

ПФ системы Σ_2 представляются формулами над Σ_3 :

$$\bar{x} = x \downarrow x;$$

$$x \vee y = \overline{x \downarrow y} = (x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow y).$$

Если же выразить ПФ Σ^* формулами над Σ не удастся, то вопрос о полноте остается открытым.

Важную роль в решении задачи о полноте системы имеют замкнутые классы функций, то есть множества ПФ, суперпозиции которых не выводят за пределы данных множеств. Например, конъюнкция конъюнкций снова конъюнкция, линейная функция от линейных функций снова линейная функция. Особую роль играют замкнутые классы L, M, S, P_0, P_1 :

L — множество линейных функций,

M — множество монотонных функций,

S — множество самодвойственных функций,

P_0 — множество функций, сохраняющих 0, т.е. таких, что $f(0, 0, \dots, 0) = 0$,

P_1 — множество функций, сохраняющих 1, т.е. таких, что $f(1, 1, \dots, 1) = 1$.

Рассмотрим подробнее монотонные и самодвойственные функции.

Понятие монотонной ПФ несколько отличается от одноименного понятия в анализе. На множестве двоичных векторов или наборов значений n переменных $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ вводится отношение частичного порядка: $a < b$, если существует i такое, что $a_i < b_i$, а для остальных индексов $a_i \leq b_i$, $i = \overline{1, n}$. Например, при $n = 4$ $(0, 1, 0, 0) < (1, 1, 0, 0) < (1, 1, 1, 0) < (1, 1, 1, 1)$, а наборы $(0, 1, 0, 0)$ и $(0, 0, 1, 0)$ не сравнимы.

Определение. ПФ $f(x_1, \dots, x_n)$ называется монотонной, если для любых двоичных n -мерных векторов a и b из того, что $a < b$, следует, что $f(a) \leq f(b)$.

Из определения следует, что для проверки монотонности необходимо проверить все сравнимые наборы, что не всегда бывает просто осуществить. Даже для функции трех переменных надо проверить 19 пар. Поэтому могут оказаться полезными следующие подсказки.

1. Если для некоторой ПФ $f(x_1, \dots, x_n)$ $f(0, 0, \dots, 0) = 1$, а $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ для какого-нибудь набора $(x_1, \dots, x_n)$, то эта ПФ уже не монотонна. Иначе, **не сохраняющая 0 функция, отличная от константы 1, не является монотонной.**

2. Если для некоторой ПФ $f(x_1, \dots, x_n)$ $f(1, 1, \dots, 1) = 0$, а $f(x_1, \dots, x_n) = 1$ для какого-нибудь набора $(x_1, \dots, x_n)$, то эта ПФ уже не монотонна. Иначе, **не сохраняющая 1 функция, отличная от константы 0, не является монотонной.**

Для ПФ двух переменных монотонны 0, 1, $\vee$, $\wedge$, x , y , в то время как $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\bar{x}$, $\downarrow$, $|$, $\oplus$ не являются монотонными.

Для проверки монотонности можно пользоваться следующим критерием:

Теорема (критерий монотонности). ПФ, отличная от 0 и 1, монотонна тогда и только тогда, когда существует представляющая ее булева формула без отрицаний (т.е. представляющая функцию формула содержит, кроме скобок, только конъюнкцию и дизъюнкцию своих переменных).

Если получить такую формулу не удастся, то, возможно, что ПФ не монотонна. Чтобы это доказать, следует найти такие наборы a и b , что $a < b$, а $f(a) = 1$, $f(b) = 0$.

Пример 6.1. ПФ $f(x, y, z) = xy \vee z$ монотонна по критерию, а про функцию $g(x, y, z) = x\bar{y} \vee z$ сразу ничего сказать нельзя, так как наличие в формуле отрицания еще не означает, что нет другой булевой формулы без отрицания. Однако $g(1, 0, 0) = 1 \cdot \bar{0} \vee 0 = 1$, $g(1, 1, 0) = 1 \cdot \bar{1} \vee 0 = 0$, а $(1, 0, 0) < (1, 1, 0)$, следовательно, функция $g(x, y, z) = x\bar{y} \vee z$ не монотонна.

Если ПФ $f(x_1, \dots, x_n)$ задана вектором, $f(x_1, \dots, x_n) = (f_1, f_2, \dots, f_{2^n})$, то проверку на монотонность можно осуществить следующим образом: разделим вектор $f(x_1, \dots, x_n)$ на две части $f' = (f_1, f_2, \dots, f_{2^{n-1}})$ и $f'' = (f_{2^{n-1}+1}, f_{2^{n-1}+2}, \dots, f_{2^n})$. Если отношение $f' \leq f''$ не выполнено, то ПФ не является монотонной. В противном случае каждый из векторов f' и f'' делим на две части и проверяем отношение порядка и т.д.

Пример 6.2. а) $f = (0110 \ 1111)$. 1. Разбиваем вектор f на две части (0110) и (1111) , $(0110) \leq (1111)$. 2. Каждый из векторов (0110) и (1111) разбиваем на две части и сравниваем: (01) и (10) , $(01) \leq (10)$, что неверно, (11) и (11) , $(11) \leq (11)$. Функция f немонотонная.

б) $f = (0101 \ 0111)$ — монотонна, так как 1. $(0101) \leq (0111)$, 2. $(01) \leq (01)$ и $(01) \leq (11)$, 3. $(0) \leq (1)$, $(0) \leq (1)$, $(0) \leq (1)$, $(1) \leq (1)$.

Пример 6.3. Используя подходящие приемы, проверьте, являются ли монотонными следующие ПФ:

а) $f(x, y, z) = xy \vee \bar{x}z \vee x$,

б) $f(x, y, z) = xy \vee xz \vee yz$,

в) $f(x, y, z) = (0101 \ 0110)$,

г) $f(x, y) = x \rightarrow (y \rightarrow z)$.

Ответ. а) монотонна, б) монотонна, в) не монотонна, г) не монотонна.

Определение. ПФ $f(x_1, \dots, x_n)$ называется самодвойственной, если $f(x_1, \dots, x_n) = \overline{f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)}$ для всех $(x_1, \dots, x_n)$.

Из определения следует, что ПФ не является самодвойственной, если найдется такой набор $(x_1, \dots, x_n)$, что $f(x_1, \dots, x_n) \neq \overline{f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)}$. При векторном задании ПФ самодвойственность или несамодвойственность очевидны: ПФ самодвойственна, если вектор антисимметричен относительно своей середины $(\alpha\beta\dots\delta \ \bar{\delta}\dots\bar{\beta}\bar{\alpha})$, и несамодвойственна в противном случае.

Пример 6.4. $f(x, y, z) = (0110 \ 1001)$ самодвойственна, а $g(x, y, z) = (01111001)$ несамодвойственна, так как $g(0, 1, 1) = 1 = g(1, 0, 0) = g(\bar{0}, \bar{1}, \bar{1})$. Самодвойственной будет и уже знакомая нам ПФ $f(x, y, z) = xy \vee xz \vee yz$. Докажите это самостоятельно а) записав ее векторно, б) построив ПФ $f^*(x, y, z) = \overline{f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$ и убедившись, что $f(x_1, \dots, x_n) = \overline{f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)}$.

Американским математиком Э. Постом (1897-1954) доказана следующая

Теорема (критерий полноты). Для полноты системы ПФ $\Sigma = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$ необходимо и достаточно, чтобы для каждого из классов L, M, S, P_0, P_1 в Σ нашлась ПФ φ_i , не принадлежащая этому классу.

Пример 6.5. Проверьте, является ли функционально полной система $\Sigma = \{\rightarrow, 0\}$. В случае полноты выясните, является ли она базисом.

Решение. Составим таблицу, в которой будем отмечать “непринадлежность” ПФ классам, указанным в теореме Поста.

Таблица 6.1. Принадлежность ПФ замкнутым классам

Σ	L	M	S	P_0	P_1
$\rightarrow$	-	-	-	-	+
0	+	+	-	+	-

1. ПФ $\varphi_1(x, y) = x \rightarrow y = (11\ 01)$.

Найдем для нее полином Жегалкина. Это можно сделать методом неопределенных коэффициентов, а можно непосредственно переписывая отрицание и дизъюнкцию через операции алгебры Жегалкина:

$$\begin{aligned}\varphi_1(x, y) &= x \rightarrow y = \bar{x} \vee y = \bar{x}y \oplus \bar{x} \oplus y = \\ &= (x \oplus 1)y \oplus x \oplus 1 \oplus y = xy \oplus y \oplus x \oplus 1 \oplus y = xy \oplus x \oplus 1.\end{aligned}$$

ПФ $\varphi_1(x, y)$ не является линейной (есть xy).

$\varphi_1(0, 0) = 1$, а $\varphi_1(1, 0) = 0$ — это противоречит определению монотонности, следовательно, $\varphi_1(x, y)$ не является монотонной.

$\varphi_1(0, 0) = 1$, т.е. φ_1 не сохраняет 0.

$\varphi_1(1, 1) = 1$, т.е. φ_1 сохраняет 1.

$\varphi_1(0, 0) = \varphi_1(1, 1)$, т.е. $\varphi_1(0, 0) = \varphi_1(\bar{0}, \bar{0})$, значит, φ_1 не является самодвойственной.

2. Функция $\varphi_2(x, y) = 0$.

$\varphi_2(x, y) = 0$ линейная (нет конъюнкции).

φ_2 монотонна, т.к. $\varphi_2(x, y) = 0$ для всех x, y .

$\varphi_2(0, 0) = 0$, φ_2 сохраняет 0.

$\varphi_2(1, 1) = 0$, φ_2 не сохраняет 1.

$\varphi_2(0, 0) = \varphi_2(1, 1)$, φ_2 не является самодвойственной.

По таблице видим, что для каждого из классов нашлась ПФ, ему не принадлежащая, значит Σ — функционально полная система.

Определение. Функционально полная система называется базисом, если при удалении из нее любой ПФ, она перестает быть функционально полной.

Если из нашей системы убрать $\rightarrow$, то останется 0, который один не дает функционально полной системы (он принадлежит L , M , P_0); если же убрать 0, то останется $\rightarrow$, которая сохраняет 1. Поэтому система Σ образует базис.

Ответ. Данная система является функционально полной и образует базис.

Замечание.

1. Ранее отмечалось, что из функций двух переменных только $\oplus$ и $\leftrightarrow$ линейные, поэтому нелинейность можно было определить сразу.

2. Для проверки функциональной полноты после того, как таблица заполнена для первой функции, для второй достаточно было проверить лишь принадлежность или непринадлежность ее классу P_1 . Для проверки на базис таблица просматривается полностью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Баврин И.И.* Дискретная математика / *И.И. Баврин*. – М.: Высш. шк., 2007. – 200 с.
2. *Белоусов А.И., Ткачев С.Б.* Дискретная математика / *А.И. Белоусов, С.Б. Ткачев*. – М.: МГТУ, 2004. – 744 с.
3. *Зарецкая М.А.* Дискретная математика для программистов / *М.А. Зарецкая*. – Магнитогорск: МГТУ, 2009. – 172 с.
4. *Зуев Ю.А.* По океану дискретной математики. От перечислительной комбинаторики до современной криптографии. Т. 1 / *Ю.А. Зуев*. – М.: URSS, 2012. – 274 с.
5. *Кузнецов О.П.* Дискретная математика для инженера / *О.П. Кузнецов*. – СПб.: Лань, 2004. – 370 с.
6. *Шевелев Ю.П.* Дискретная математика / *Ю.П. Шевелев*. – СПб.: Лань, 2008. – 592 с.

Учебное текстовое электронное издание

Зарецкая Мария Андриановна

ПЕРЕКЛЮЧАТЕЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

Методические указания по дисциплине «Дискретная математика»
для бакалавров направлений подготовки 080500 и 230100

Издается полностью в авторской редакции

0,25 Мб

1 электрон. опт. диск

г. Магнитогорск, 2013 год

ФГБОУ ВПО «МГТУ»

Адрес: 455000, Россия, Челябинская область, г. Магнитогорск,
пр. Ленина 38

ФГБОУ ВПО «Магнитогорский государственный
технический университет им. Г.И. Носова»

Кафедра математики

Центр электронных образовательных ресурсов и
дистанционных образовательных технологий

e-mail: ceor_dot@mail.ru