Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова»

Е.А. Ковальчик
В.В. Шеметова

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ: ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Утверждено Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия

Магнитогорск
2019

УДК 517

Рецензенты:

кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры математического и компьютерного моделирования
ФГАОУ ВО «Южно-Уральский государственный университет
(национальный исследовательский университет)»
А.В. Кунгурцева

кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры прикладной математики и информатики
ФГБОУ ВО «Магнитогорский государственный технический
университет им. Г.И. Носова»
Л.В. Смирнова

Коновальчик Е.А., Шеметова В.В.
Математический анализ: функции одной переменной [Электронный ресурс] : учебное пособие / Елена Александровна Коновальчик, Вероника Владимировна Шеметова ; ФГБОУ ВО «Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова». – Электрон. текстовые дан. (1,41 Мб). – Магнитогорск : ФГБОУ ВО «МГТУ им. Г.И. Носова», 2019. – 1 электрон. опт. диск (CD-R). – Систем. требования : IBM PC, любой, более l GHz ; 512 Мб RAM ; 10 Мб HDD ; MS Windows XP и выше ; Adobe Reader 8.0 и выше ; CD/DVD-ROM дисковод ; мышь. – Загл. с титул. экрана.
ISBN 978-5-9967-1622-7

Данное учебное издание разработано и составлено в соответствии с рабочими программами дисциплин «Математика» и «Математический анализ». Учебное пособие содержит три раздела: введение в анализ, дифференциальное исчисление функций одной переменной, интегральное исчисление функций одной переменной. Все эти разделы традиционно изучаются в первом и втором семестрах. Отличительной особенностью данного пособия является множество разобранных примеров по каждой теме, это позволит студентам самостоятельно изучать отдельные темы, получать навыки решения задач.

Пособие предназначено для студентов направлений 15.03.06 Мехатроника и робототехника, 27.03.01 Стандартизация и метрология, а также для специальности 10.05.03 Информационная безопасность автоматизированных систем.

УДК 517

ISBN 978-5-9967-1622-7

СОДЕРЖАНИЕ

1. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

1.1. Предел функции

1.1.1. Множество. Операции над множествами

Под множеством будем понимать совокупность (собрание) однородных предметов, объектов. Объекты, из которых состоит множество, называются его элементами.

Очень часто для обозначения множеств используют большие буквы латинского алфавита A, B, C,..., X, Y. Для обозначения элементов множества — малые a, b, c, ..., x, y. Запись $a \in A$ означает, что элемент a принадлежит множеству A, запись $a \notin A$ означает, что элемент a не принадлежит множеству A.

Если каждый элемент множества B является элементом множества A, то говорят, что множество B **включено в множество** A (является подмножеством множества A) и обозначают $B \subset A$.

Если $B \subset A$ и $A \supset B$, то множества A и B называются **равными** и обозначаются $A = B$. Таким образом, равные множества состоят из одних и тех же элементов.

Множество, не содержащее ни одного элемента называется пустым множеством и обозначается $\emptyset$. Очевидно, что пустое множество включено в множество A, где A—любое множество.

Операции над множествами.

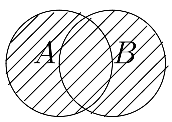
Для любых двух множеств A и B определим новые множества, называемые объединением, пересечением, разностью.

Объединением двух множеств A и B называется множество C, состоящее из элементов, принадлежащих или A, или B.

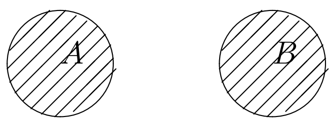
$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$$

Множество $C = A \cup B$ — объединение множеств A и B.

$A \cup B$



$A \cup B$

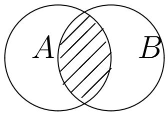


Пересечением двух множеств A и B называется множество C, состоящее из элементов, принадлежащих и A, и B.

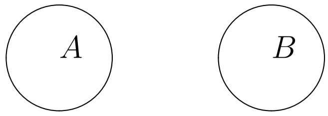
$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$$

Множество $C = A \cap B$ — пересечение множеств A и B.

$A \cap B$



$A \cap B = \emptyset$

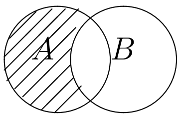


Разностью двух множеств A и B называется множество C, состоящее из элементов, принадлежащих множеству A и непринадлежащих множеству B.

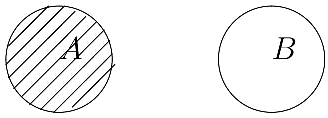
$$A \backslash B = \{x : x \in A \land x \notin B\}.$$

Множество $C = A \backslash B$ — разность множеств A и B.

$A \backslash B$

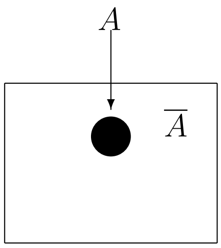


$A \backslash B = A$



Пусть A и B — множества, $A \subset B$. **Дополнением** множества A называется множество $\overline{A}$, состоящее из всех элементов множества B, не принадлежащих множеству A.

Множество $C = \overline{A}$ — дополнение множества A.



Множество, элементами которого являются числа, называется числовым множеством.

1.1.2. Числовые множества

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ — множество натуральных чисел.

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ — множество целых чисел.

$\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} | m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$— множество рациональных чисел (любое рациональное число представимо в виде бесконечной десятичной периодической дроби и наоборот, любая бесконечная периодическая десятичная дробь представима в виде рационального числа).

$\mathbb{I}$ — множество иррациональных чисел (любое иррациональное число является бесконечной десятичной непериодической дробью).

$\mathbb{R}$ — множество действительных чисел. $\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел.

Для числовых множеств имеем:

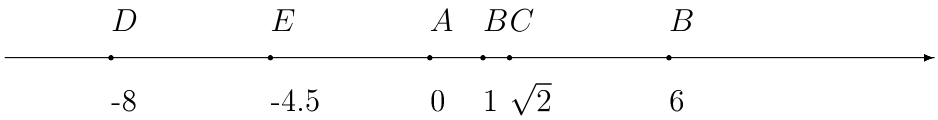
$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

$$\mathbb{I} \subset \mathbb{R}, \quad \mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}.$$

Пример 1. Даны множества $A = \{1; 3; 6; 8\}$ и $B = \{2; 4; 6; 8\}$. Тогда $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 6; 8\}$, $A \cap B = \{6; 8\}$, $A \backslash B = \{1; 3\}$.

Пример 2. Пусть $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Тогда $\overline{A} = \{5, 6, 7, 8\}$.

Множество действительных чисел ($\mathbb{R}$).



Любое действительное число можно изобразить точкой на числовой прямой. Наоборот, всякая точка числовой прямой является изображением единственного действительного числа. Таким образом, между множеством $\mathbb{R}$ и множеством точек числовой прямой существует взаимно однозначное соответствие. Поэтому действительные числа часто называют точками. Во множестве действительных чисел $\mathbb{R}$ вводятся операции:

1. сложение (+)

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \to (a + b) \in \mathbb{R};$$

1. $\forall a, b \in \mathbb{R} \to (a + b) = (b + a)$ коммутативность операции сложения;

2, $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \to a + (b + c) = (a + b) + c$ ассоциативность операции сложения;

3. $\exists 0 \in \mathbb{R} : \forall a \in \mathbb{R} \to (a + 0) = (0 + a) = a$ унитарность операции сложения;

4. $\forall a \in \mathbb{R} \exists (-a) \in \mathbb{R} : a + (-a) = (-a) + a = 0 \in \mathbb{R}$ симметричность операции сложения.

2. умножение ($*$)

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \to (a * b) \in \mathbb{R}$$

1. $\forall a, b \in \mathbb{R} \to (a * b) = (b * a)$ коммутативность операции умножения

2. $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \to a * (b * c) = (a * b) * c$ ассоциативность операции умножения

3. $\exists\ 1 \in \mathbb{R} : \forall a \in \mathbb{R} \to (a * 1) = (1 * a) = a$ унитарность операции умножения;

4. $\forall a \in \mathbb{R}\ \exists (a^{-1}) \in \mathbb{R} :\to a * (a^{-1}) = (a^{-1}) * a = 1 \in \mathbb{R}$ симметричность операции умножения.

3. порядка $<, >, =$.

На множестве действительных чисел вводится поняие модуля:

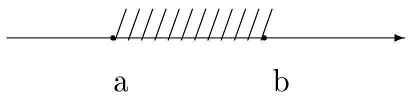
$$\forall a \in \mathbb{R} : |a| = \begin{cases} a, \text{если } a \geq 0 \\ -a, \text{если } a < 0 \end{cases}$$

С геометрической точки зрения $|a|$ на числовой прямой задает расстояние от точки, изображающей число a до начала отсчета.

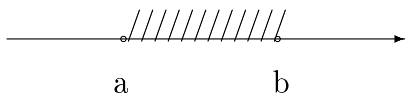
Числовые промежутки. Окрестность точки.

Пусть a и b — действительные числа, $a < b$. Числовыми промежутками называют подмножества множества действительных чисел, имеющих следующий вид:

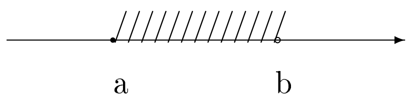
1. $[a, b] = \{x : a \le x \le b\}$ — отрезок (замкнутый промежуток);

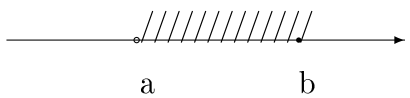


2. $(a, b) = \{x : a < x < b\}$ — интервал (открытый промежуток);

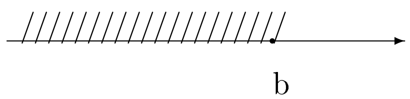


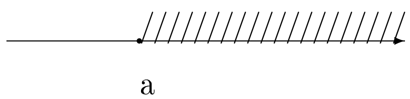
3. $[a, b) = \{x : a \le x < b\}$, $(a, b] = \{x : a < x \le b\}$ — полуинтервалы;



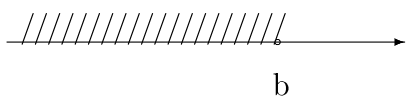


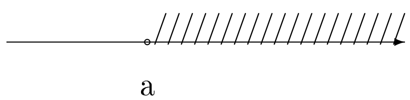
4. $(-\infty, b] = \{x : x \le b\}$; $[a, +\infty) = \{x : x \ge a\}$ — бесконечные полуинтервалы;



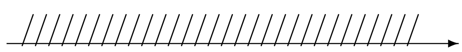


5. $(-\infty, b) = \{x : x < b\}$; $(a, +\infty) = \{x : x > a\}$ — бесконечные интервалы;



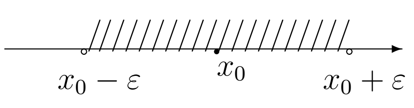


6. $(-\infty, \infty) = \{x : -\infty < x < +\infty\} = \mathbb{R}$.



Окрестностью точки $x_0 \in \mathbb{R}$ называется любой интервал $(a; b)$, содержащий точку x_0. $\forall \varepsilon > 0$ интервал вида $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, называется ε-окрестностью точки x_0. Число x_0 называется центром ε-окрестности, а число ε — радиусом окрестности.

$$x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \Longleftrightarrow x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon \Longleftrightarrow -\varepsilon < x - x_0 < \varepsilon \Longleftrightarrow |x - x_0| < \varepsilon.$$

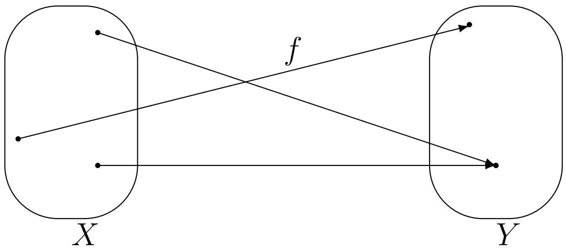


1.1.3. Понятие функции

Пусть даны два непустых множества X и Y. Будем говорить, что задана **функция** (отображение), действующая из множества X во множество Y, если задан закон (правило), по-которому каждому элементу из множества X соответствует единственный элемент множества Y.

$\forall x \in X \ \exists y \in Y : f(x) = y, \quad f : X \to Y$. Функция f отображает множество X во множество Y.

В данном определении x — **аргумент или независимая переменная**, y — **значение функции или зависимая переменная**; множество X —**область определения** функции $y = f(x)$.



Если X и Y — числовые множества, то $f(x)$ — числовая функция. Далее мы будем рассматривать числовые функции.

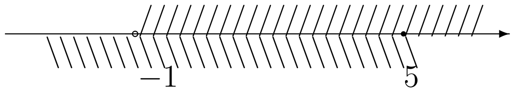
1.1.4. Основные способы задания функции

Пусть дана функция $y = f(x)$. обозначим $D(f)$ — область определения функции, $E(f)$— область значений функции (множество всех значений функции $y = f(x)$).

- *Аналитический способ.* Функция задается в виде одной или нескольких формул или уравнений. Областью определения $D(f)$ функции, заданной с помощью формулы, называется множество всех значений аргумента x, при которых формула имеет смысл.

  Например,
$$y = \sqrt{5 - x} + \log_3(x + 1).$$

$$D(f) : \begin{cases} 5 - x \geq 0 \\ x + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 5 \\ x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-1; 5].$$

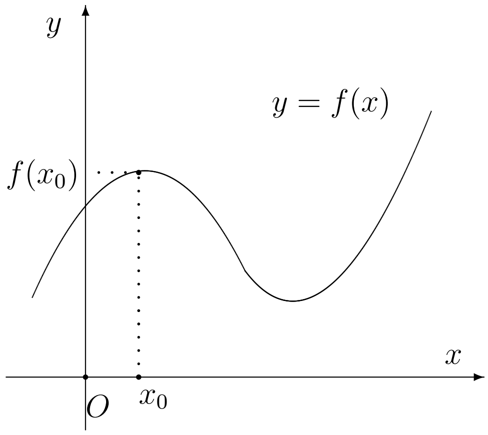


  Рассмотрим следующий пример:

$$y = \begin{cases} x^2, \text{ если } x < 1 \\ 5x, \text{ если } 1 \leq x \leq 2 \\ 2^x, \text{ если } x > 2 \end{cases}$$

  Здесь $D(f) = \mathbb{R}$.

- *Графический способ.* Задается график функции. Значения функции y, соответствующие тем или иным значениям аргумента x находятся непосредственно с помощью графика.



- *Табличный способ.* Функция задается с помощью таблицы, в которой указан ряд значений аргумента и соответствующие им значения функции. Например, таблицы тригонометрических функций, логарифмические таблицы.

- *Словесный способ.* Способ задания функции с помощью описания.

1.1.5. Основные свойста числовых функций

К основным свойствам числовых функций относятся ограниченность, четность/нечетность, монотонность, периодичность.

1. Пусть функция $y = f(x)$ определена на некотором множестве D. Функция $y = f(x)$ называется **ограниченной** на этом множестве, если

$$\exists M > 0 : \ \forall x \in D \Rightarrow |f(x)| \leq M$$

Напомним, что неравенство $|f(x)| \leq M$ равносильно неравенству $-M \leq f(x) \leq M$.

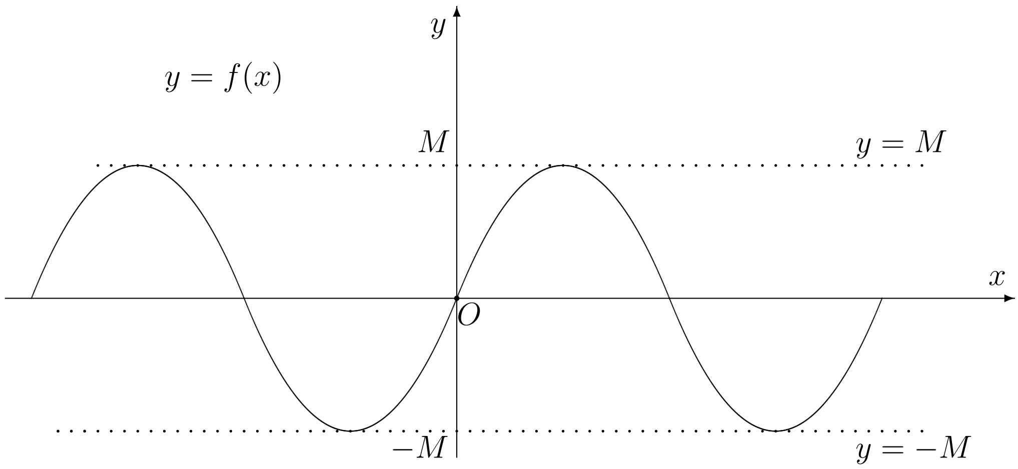


График ограниченной функции целиком расположен в полосе между двумя параллельными прямыми $y = -M$ и $y = M$.

2. Пусть функция $y = f(x)$ определена на некотором множестве D. Функция $y = f(x)$ называется **четной**, если выполняются условия:

   (a) D — симметрично относительно т.О на числовой прямой;

   (b) $\forall x \in D\ f(-x) = f(x)$.

   Например, четными функциями являются: $y = \cos x$, $y = x^2$(см. рис.1);

   Функция $y = f(x)$ называется **нечетной**, если выполняются условия:

   (a) D — симметрично относительно т.О на числовой прямой;

   (b) $\forall x \in D\ f(-x) = -f(x)$.

   Например, нечетными функциями являются: $y = \sin x$, $y = x^3$(см. рис.2). Заметим, что график четной функции симметричен относительно оси Oy, график нечетной функции симметричен относительно начала координат.

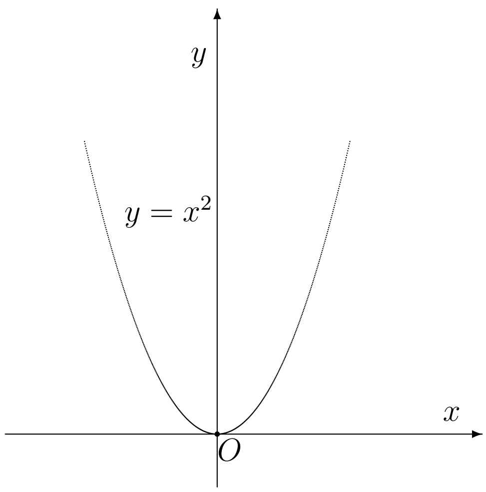


рис.1

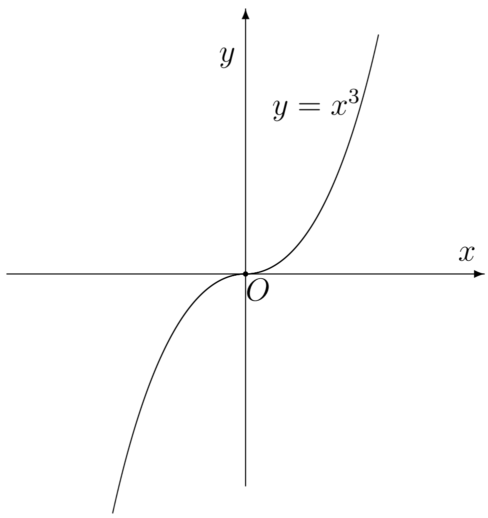


рис.2

3. Пусть функция $y = f(x)$ определена на некотором множестве D и пусть $D_1 \subset D$. Функция $y = f(x)$ называется **возрастающей** на множестве D_1, если $\forall x_1, x_2 \in D_1$ из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) < f(x_2)$.

   Функция $y = f(x)$ называется **неубывающей** на множестве D_1, если $\forall x_1, x_2 \in D_1$ из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) \leq f(x_2)$.

   Функция $y = f(x)$ называется **убывающей** на множестве D_1, если $\forall x_1, x_2 \in D_1$ из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) > f(x_2)$.

   Функция $y = f(x)$ называется **невозрастающей** на множестве D_1, если $\forall x_1, x_2 \in D_1$ из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) \geq f(x_2)$.

   Возрастающие, невозрастающие, убывающие, неубывающие функции на множестве D_1 называются монотонными на этом множестве, а возрастающие и убывающие — **строго монотонными**. Интервалы, на которых функция монотонна, называются интервалами монотонности.

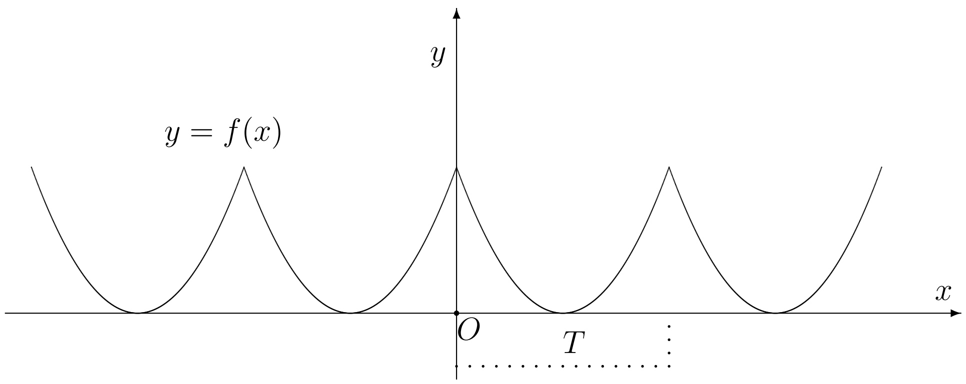
Например, функция $y = x^2$ (см. рис.1) убывает $\forall x \in (-\infty; 0)$ и возрастает $\forall x \in (0; +\infty)$. Функция $y = x^3$ (см. рис.2) возрастает $\forall x \in \mathbb{R}$.

4. Пусть функция $y = f(x)$ определена на некотором множестве D. Функция $y = f(x)$ называется **периодической** на этом множестве, если $\exists T > 0$ такое, что

   (a) $\forall x \in D f(x \pm T) \in D$

   (b) $\forall x \in D f(x + T) = f(x) = f(x - T)$.

   При этом число T называется **периодом** функции.



1.1.6. Сложная функция. Обратная функция

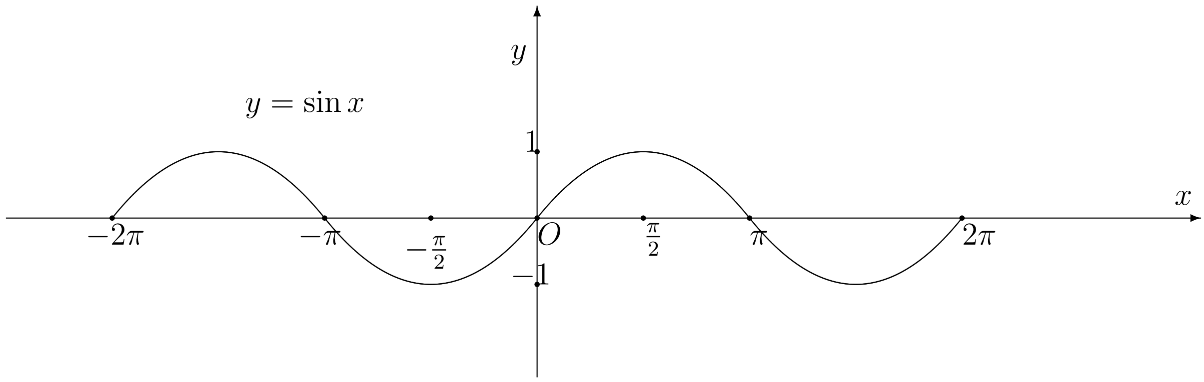
Пусть функция $y = f(u)$ определена на некотором множестве U, а функция $u = \varphi(x)$ — на некотором множестве X, причем выполняется следующее условие $\forall x \in X$ соответствующее значение $u = \varphi(x) \in U$. Тогда на множестве X определена функция $y = f(\varphi(x))$, которую будем называть **сложной функцией** от x или **суперпозицией** заданных функций. При этом переменную u будем называть **промежуточным аргументом** сложной функции.

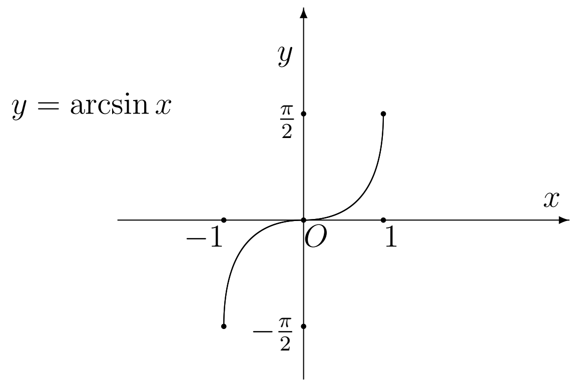
Например, функция $y = \ln(\sin x)$ есть суперпозиция двух функций $y = \ln u$ и $u = \sin x$, а функция $y = \sqrt{\sin(6x^4)}$ есть суперпозиция трех функций $y = \sqrt{u}$, $u = \sin v$, $v = 6x^4$.

Пусть функция $y = f(x)$ определена на некотором множестве D и ее множество значений E. Если каждому значению $y \in E$ соответствует единственное значение $x \in D$, то определена функция $x = \varphi(y)$ с областью определения E и множеством значений D. Такая функция $\varphi(y)$ называется **обратной** к функции $f(x)$ и записывается в следующем виде: $x = \varphi(y) = f^{-1}(y)$. Про функции $y = f(x)$ и $x = \varphi(y)$ будем говорить, что они являются **взаимно обратными**. Например, для функции $y = -3x$ обратной будет функция $x = -\frac{y}{3}$, для $y = x^3$ обратная $x = \sqrt[3]{y}$, для $y = x^2$ обратной не существует. Таким образом, функция $y = f(x)$ имеет обратную тогда и только тогда, когда функция $y = f(x)$ задает взаимно однозначное соответствие между множествами D и E.

Заметим, что графики функций $y = f(x)$ и $x = \varphi(y)$ изображаются одной и той же кривой, т.е. совпадают. Если обозначить независимую переменную через x, а зависимую через y, то функция обратная к $y = f(x)$ запишется в виде $y = \varphi(x)$. Графики взаимно обратных функций $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$ симметричны относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов (прямой $y = x$).

Например, рассмотрим сужение функции $y = \sin x$ на отрезок $[-\pi/2; \pi/2]$, т.е. $D(f) = [-\pi/2; \pi/2]$, $E(f) = [-1; 1]$. Функция возрастает, поэтому для нее существует обратная $y = \arcsin x$ с $D(f) = [-1; 1]$, $E(f) = [-\pi/2; \pi/2]$.





1.1.7. Основные элементарные функции

К основным элементарным функциям относятся:

1. Степенная $y = x^{\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}$.

2. Показательная $y = a^x,\ a \neq 1,\ a > 0$.

3. Логарифмическая $y = \log_a(x),\ a \neq 1,\ a > 0$.

4. Тригонометрические $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$.

5. Обратные тригонометрические $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$.

Функция, заданная одной формулой, полученная из основных элементарных функций с помощью арифметических операций сложения, вычитания, умножения, деления, примененных конечное число раз, а также операций образования сложной функции, называется элементарной функцией. Например,

$$y = \frac{x^3 + 1}{x^2} + \log_3(2x + 4) - \text{элементарная функция.}$$

$$y = x + x + x + \ldots - \text{не является элементарной .}$$

Функция, заданная с помощью нескольких формул, не является элементарной, например:

$$\begin{cases} x^2, \text{ если } x \leq 1 \\ 2^x, \text{ если } x > 1 \end{cases}.$$

Однако на каждом из числовых промежутков $(-\infty; 1]$ и $(1; +\infty)$ она задана с помощью элементарных функций $y = x^2$ и $y = 2^x$.

1.1.8. Числовая последовательность. Предел числовой последовательности

Числовой последовательностью называется функция натурального аргумента $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \end{array}$$

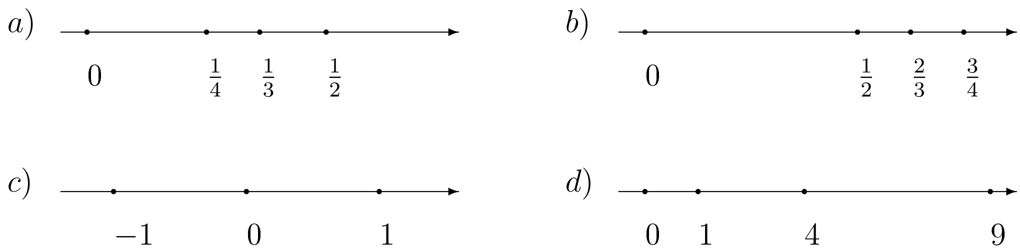
Действительные числа $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ — образуют числовую последовательность $\{x_n\}$, x_1 — первый член последовательности, x_2 — второй член последовательности, x_n — n-ый член последовательности.

Способы задания числовой последовательности.

1. *Аналитический способ.*
   Последовательность задается с помощью формулы n-го члена: $x_n = f(n)$.
   (a) $x_n = \frac{1}{n} : 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$.
   (b) $x_n = \frac{n}{n+1} : \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4} \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$.
   (c) $x_n = (-1)^n : -1, 1, -1, 1, \ldots, -1, 1, \ldots$.
   (d) $x_n = n^2 : 1, 4, 9, 25, \ldots$.

2. *Графический.*

   Последовательность задается с помощью точек на числовой прямой.



Число $a \in \mathbb{R}$ называется **пределом** последовательности $\{x_n\}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon.$$

Обозначается предел числовой последовательности:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a.$$

Заметим,

$$|x_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < x_n - a < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon, \text{ т.е. } x_n \in (a - \varepsilon; a + \varepsilon).$$

Таким образом, число a —**предел последовательности** $\{x_n\}$, если для любой ε-окрестности точки a найдется номер n члена последовательности такой, что все члены последовательности с большими номерами окажутся в этой ε-окрестности точки a.

Для последовательностей из примера будем иметь:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0; \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1; \quad \lim_{n\to\infty} (-1)^n - \text{не существует}; \quad \lim_{n\to\infty} n^2 - \text{не существует}.$$

Для предела числовой последовательности справедливы следующие свойства:

1. Если последовательность x_n имеет предел, то он единственный.

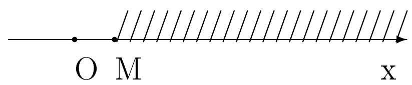
2. Если последовательность x_n имеет конечный предел, то она ограничена, т.е.

$$\exists M > 0 : \forall N \in \mathbb{N} \Rightarrow |x_n| \leq M (\text{т.е.} -M \leq x_n \leq M).$$

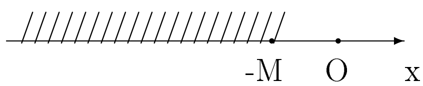
   Однако, обратное утверждение неверно. Последовательность может быть ограничена, но при этом не иметь предела (см. пример c) выше).

Возможны следующие различные ситуации:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow x_n > M.$$



$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow x_n < -M.$$



$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow |x_n| > M.$$

1.1.9. Предел функции в точке

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, кроме, может быть, самой точки x_0. Число $A \in \mathbb{R}$ называется **пределом функции** $y = f(x)$ в точке x_0, если

$$\forall x_n \in D(f), x_n \neq x_0 (\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = A.)$$

Обозначение $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A.$

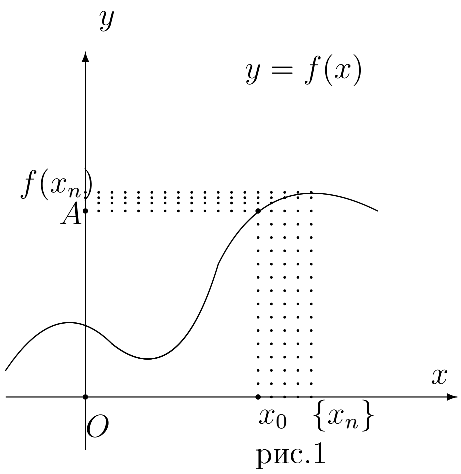


рис.1

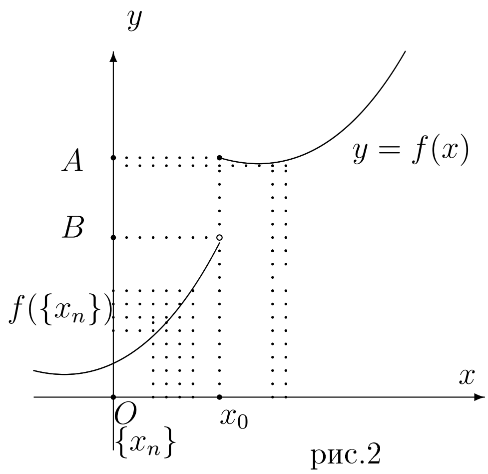


рис.2

На рис.1 $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, на рис.2 $\nexists \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

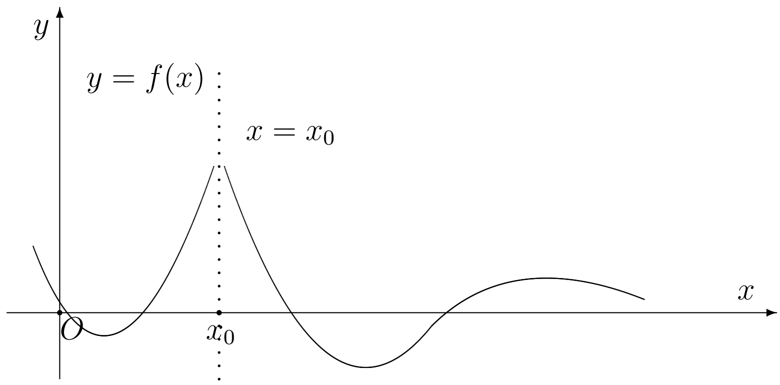
1.1.10. Бесконечный предел функции. Предел функции на бесконечности

Пусть $A = +\infty$, или $A = -\infty$, или $A = \infty$, $x_0 \in \mathbb{R}$.

1.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall x_n \in D(f), x_n \neq x_0 (\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = +\infty).$$

В этом случае график функции $y = f(x)$ имеет вертикальную асимптоту $x = x_0$.



2.

$$\lim_{x\to+\infty} = A \Leftrightarrow \forall x_n \in D(f)(\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = A).$$

В этом случае график функции $y = f(x)$ имеет горизонтальную асимптоту $y = A$ при $x \to +\infty$.

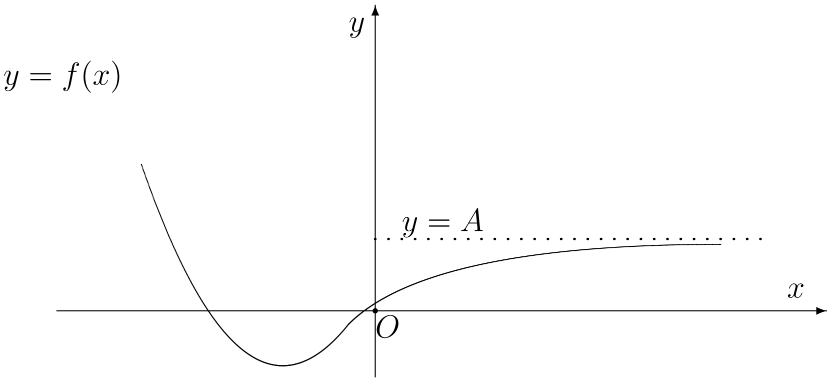
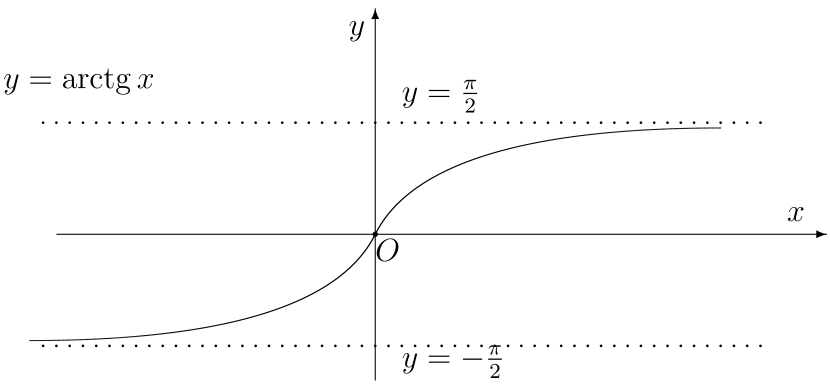


График функции может иметь две горизонтальные асимптоты одну при $x \to +\infty$ и вторую при $x \to -\infty$.

Например, график функции $y = \operatorname{arctg} x$.



1.1.11. Бесконечно малые и бесконечно большие функции, связь между ними

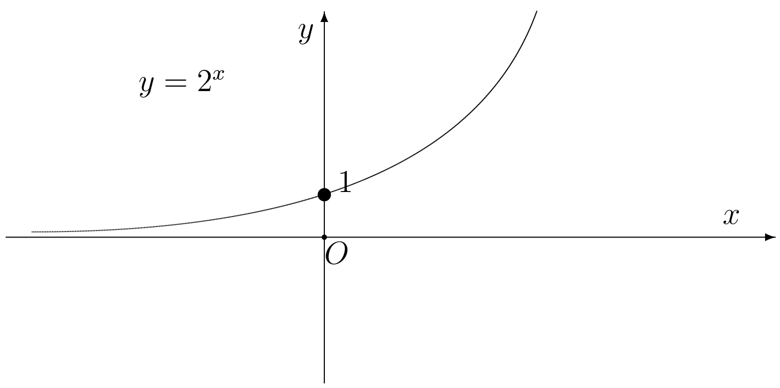
Определение. Функция $y = f(x)$ называется **бесконечно малой** в точке x_0, если

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0.$$

Определение. Функция $y = f(x)$ называется **бесконечно большой** в точке x_0, если

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \quad \text{или} \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \text{ или } \lim_{x \to x_0} f(x) = \infty.$$

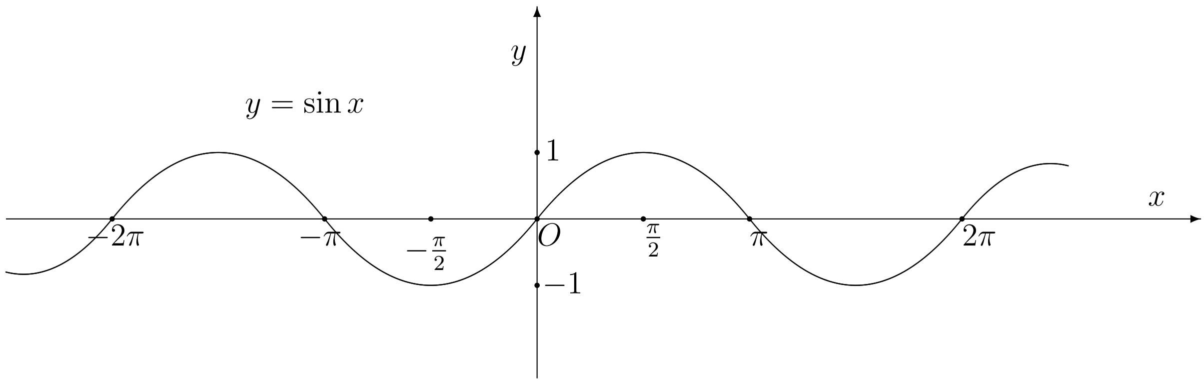
Заметим, что на месте x_0 может стоять $+\infty$, $-\infty$, ∞.
Например, рассмотрим функцию $y = 2^x$.



$$\lim_{x \to -\infty} 2^x = 0 \Rightarrow y = 2^x - \text{бесконечно малая при } x \to -\infty.$$

$$\lim_{x \to +\infty} 2^x = +\infty \Rightarrow y = 2^x - \text{бесконечно большая при } x \to +\infty.$$

Далее, рассмотрим функцию $y = \sin x$:



$$\lim_{x \to 0} \sin x = 0 \Rightarrow y = \sin x - \text{бесконечно малая в точке } x = 0.$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin x = 1 \Rightarrow y = \sin x - \text{ не является бесконечно малой в точке } x = \frac{\pi}{2}.$$

Связь бесконечно малых и бесконечно больших функций выражается в следующих утверждениях:

1. Если $\alpha(x)$ — бесконечно малая функция, $\alpha(x) \neq 0$, то функция $\frac{1}{\alpha(x)}$ есть бесконечно большая функция.

2. Если функция $f(x)$ — бесконечно большая функция, то функция $\frac{1}{f(x)}$ — бесконечно малая функция.

1.1.12. Свойства бесконечно малых и бесконечно больших функций.

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — две бесконечно малые функции при $x \to x_0$. Пусть функция $y = f(x)$ ограничена при $x \to x_0$, т.е. $\exists C \in \mathbb{R}, C > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta) \Rightarrow |f(x)| < C$.

Пусть $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\chi(x)$ и $\xi(x)$ — бесконечно большие функции при $x \to x_0$, причем

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = +\infty,$$
$$\lim_{x \to x_0} \psi(x) = +\infty,$$
$$\lim_{x \to x_0} \chi(x) = -\infty,$$
$$\lim_{x \to x_0} \xi(x) = -\infty.$$

Пусть

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = A, \text{где } A \in \mathbb{R}.$$

Тогда запишем следующие свойства бесконечно малых (б/м) функций и бесконечно больших (б/б) функций.

Свойства б/м функций в т. x_0	Свойства б/б функций в т. x_0
1. $\alpha(x)+\beta(x)$ — б/м функция	1. $\varphi(x)+\psi(x)$ — б/б функция $\lim\limits_{x\to x_0}(\varphi(x)+\psi(x))=+\infty,$ $\xi(x)+\chi(x)$ — б/б функция $\lim\limits_{x\to x_0}(\xi(x)+\chi(x))=-\infty,$ $\varphi(x)+\xi(x)$ — неопределенность вида $[\infty-\infty]$. $\alpha(x)+g(x)$ — б/б функция $\psi(x)+g(x)$ — б/б функция
2. $\alpha(x)\cdot\beta(x)$ — б/м функция	2. $\lim\limits_{x\to x_0}(\varphi(x)\cdot\psi(x))=+\infty,$ т.е. $+\infty\cdot(+\infty)=+\infty,$ $\lim\limits_{x\to x_0}(\xi(x)\cdot\chi(x))=+\infty,$ т.е. $-\infty\cdot(-\infty)=+\infty$ $\lim\limits_{x\to x_0}(\varphi(x)\cdot\chi(x))=-\infty,$ т.е. $+\infty\cdot(-\infty)=-\infty.$
3. произведение б/м на огр - б/м $f(x)\cdot\alpha(x)$ — б/м функция	3. произведение б/б на огр - б/б c>0: $f(x)\cdot\varphi(x)=+\infty$ $f(x)\cdot\xi(x)=-\infty$ c<0: $f(x)\cdot\varphi(x)=-\infty$ $f(x)\cdot\xi(x)=+\infty$ c>0: $f(x)\cdot\varphi(x)=+\infty$ c=0 $f(x)\cdot\varphi(x)=[0\cdot(+\infty)]$ - неопред-ть
4. $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=[\frac{0}{0}]$ - неопределенность.	4. $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=[\frac{\infty}{\infty}]$ -неопределенность.

1.1.13. Основные теоремы о пределах. Раскрытие неопределенностей

Будем предполагать, что существуют следующие пределы:

$$\lim_{x\to x_0} f(x),\ \lim_{x\to x_0} g(x).$$

Теорема 1 (о связи функции, ее предела и б/м функции).

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A\in\mathbb{R}\Rightarrow f(x)=A+\alpha(x),$$

где $\alpha(x)$— бесконечно малая функция при $x\to x_0$.

Теорема 2 (об арифметических операциях над пределами). Пусть

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A\in\mathbb{R},\ \lim_{x\to x_0} g(x)=B\in\mathbb{R}.$$

Тогда

1. $\exists\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x))=A\pm B.$

2. $\exists \lim\limits_{x\to x_0} (f(x)\cdot g(x)) = A\cdot B$.

3. $\exists \lim\limits_{x\to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{A}{B},\ B\neq 0$.

Теорема 3 (Предел сложной функции). Пусть существуют пределы:

$$\lim_{u\to u_0} f(u) = A \text{ и } \lim_{x\to x_0} \varphi(x),\ u_0 = \varphi(x_0).$$

Тогда существует предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(\varphi(x))$.

Примеры.

1. Найдите предел
$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2-4}{x+1}.$$

Решение.

$$f(x) = x^2-4,\quad g(x) = x+1,$$
$$\lim_{x\to 0} f(x) = -4,\quad \lim_{x\to 0} g(x) = 1.$$

Так как предел знаменателя не равен нулю, то можно воспользоваться теоремой 2 п.3. Тогда
$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2-4}{x+1} = \frac{-4}{1} = -4.$$

2. Найдите предел
$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}.$$

Решение.

$$f(x) = x^2-1,\quad g(x) = x-1,\quad \lim_{x\to 1} f(x) = 0,\quad \lim_{x\to 1} g(x) = 0.$$

В данной задаче имеем неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Поэтому пользоваться теоремой 2 нельзя. Имеем:
$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\cdot(x+1)}{x-1} = 2.$$

3. Найдите предел
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2}.$$

Решение.

$$f(x) = \sqrt{x^2+1}-1,\quad g(x) = x^2,\quad \lim_{x\to 0} f(x) = 0,\quad \lim_{x\to 0} g(x) = 0.$$

В данной задаче имеем неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Поэтому пользоваться теоремой 2 нельзя. Имеем:
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{x^2+1}-1)(\sqrt{x^2+1}+1)}{x^2(\sqrt{x^2+1}+1)} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2+1-1}{x^2(\sqrt{x^2+1}+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+1} = \frac{1}{2}.$$

4. Рассмотрим дробно-рациональную функцию

$$y(x) = \frac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + \cdots + a_m}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \cdots + b_n}, \quad a_0 \neq 0, \quad b_0 \neq 0.$$

Исследуем предел этой функции при $x \longrightarrow \infty$. При достаточно больших $|x|$ знаменатель отличен от нуля. Разделим и числитель, и знаменатель на x^n. Имеем:

$$y(x) = \frac{a_0x^{m-n} + a_1x^{m-n-1} + a_2x^{m-n-2} + \cdots + a_mx^{-n}}{b_0 + b_1x^{-1} + b_2x^{-2} + \cdots + b_nx^{-n}}.$$

При $x \longrightarrow \infty$ знаменатель стремится к $b_0 \neq 0$. Таким образом,

$$\lim_{x\to\infty} y(x) = \begin{cases} \infty, \ m > n \\ \frac{a_0}{b_0}, \ m = n \\ 0, \ m < n. \end{cases}$$

5. Найдите предел:

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2+4x}).$$

Решение.

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+4x}) = [\infty-\infty] = \lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+4x})(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+4x})}{(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+4x})} =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2+1-x^2-4x)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+4x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{(1-4x)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+4x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \frac{-4}{2} = -2.$$

Теорема 4 (о пределе промежуточной функции). (Теорема о двух милиционерах.) Если функция $f(x)$ заключена между двумя функциями $\varphi(x)$ и $g(x)$, стремящимися к одному и тому же пределу, то она также стремится к этому пределу, т.е. если

$$\lim_{x\to x_0}\varphi(x) = A, \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = A, \quad \varphi(x) \leq f(x) \leq g(x), \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = A.$$

1.1.14. Односторонние пределы

Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall x_n \in D(f), x_n \neq x_0 : \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = A.$$

Рассмотрим два примера. На рис.1 $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, на рис.2 $\nexists \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

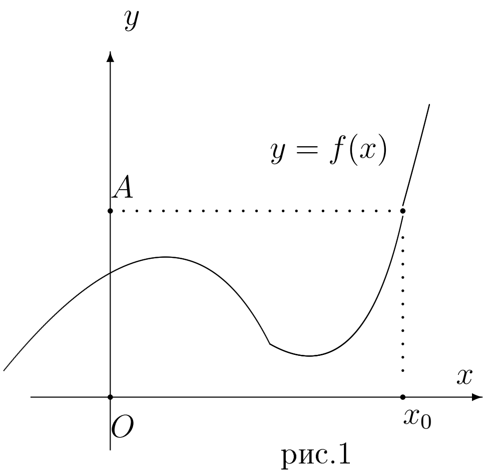


рис.1

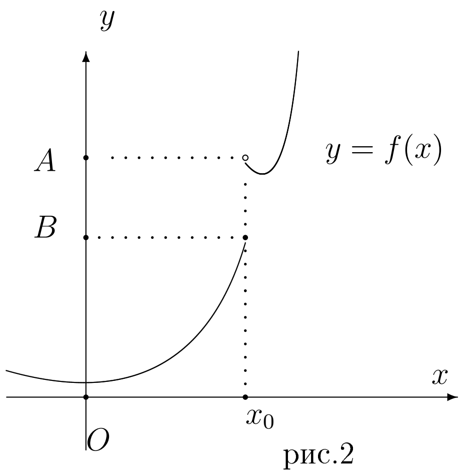


рис.2

Определение 1. Число A называется **пределом справа** функции $y = f(x)$ в точке x_0, если $\forall x_n \in D(f), x_n > x_0 : \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

Обозначается $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = A$.

Определение 2. Число A называется **пределом слева** функции $y = f(x)$ в точке x_0, если $\forall x_n \in D(f), x_n < x_0 : \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$. Обозначается $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = A$.

Теорема 5 (о пределе монотонной функции). Если функция $f(x)$ монотонна и ограничена при $x < x_0$ или при $x > x_0$, то существует соответственно ее левый предел $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0 - 0)$ или ее правый предел $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0 + 0)$.

1.1.15. Первый замечательный предел

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Следствия.

1.
$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1, \text{ действительно, } \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{x}{\sin x}};$$

2.
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin kx}{x} = k, \text{ действительно, } \lim_{x\to 0} \frac{\sin kx}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin kx}{\frac{kx}{k}} = \frac{1}{\frac{1}{k}} = k;$$

3.
$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} kx}{x} = k, \text{ действительно, } \lim_{x\to 0} \frac{\sin kx}{x \cdot \cos kx} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin kx}{x \cdot 1} = \text{ по п.1 } = k.$$

Примеры.

1.
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x} = 3 \text{ по следствию 2.}$$

2.
$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{x} = 5 \text{ по следствию 3.}$$

3.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2} = \text{ числитель дроби преобразуем по формуле понижения степени}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x^2} = 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin x}{x} = 2\cdot 1\cdot 1 = 2.$$

4.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\arcsin 5x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x\cdot 3x}{3x\cdot\arcsin 5x} = 3\lim_{x\to 0}\frac{x}{\arcsin 5x} = \left|\begin{array}{c}\text{Сделаем замену:}\\ t=\arcsin 5x\\ t\to 0\\ 5x=\sin t\end{array}\right| =$$

$$= 3\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{5t} = \frac{3}{5}.$$

1.1.16. Второй замечательный предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Положим $y=\frac{1}{x}$, где $y\to 0$, тогда будем иметь

$$\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}} = e.$$

Заметим, что второй замечательный предел служит для раскрытия неопределенности вида $[1^\infty]$.

Следствия.

1.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\left(-\frac{1}{x}\right)\right)^{-x} = e.$$

2.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x} = 1,\ \text{действительно,}\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\ln(x+1) =$$

$$\lim_{x\to 0}(\ln(x+1)^{\frac{1}{x}}) = \ln(\lim_{x\to 0}(x+1)^{\frac{1}{x}}) = \ln e = 1.$$

3.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1,\ \text{действительно, сделаем замену}\ y=e^x-1,\ \text{тогда}\ y\to 0\ \text{и}\ x=\ln(y+1).$$

Будем иметь

$$\lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(y+1)} = \lim_{y\to 0}\frac{1}{\frac{\ln(y+1)}{y}} = 1.$$

4.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(x+1)}{x} = \ln a,\ \text{действительно,}\ \lim_{x\to 0}\frac{\log_a(x+1)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\log_a(x+1) =$$

$$= \lim_{x\to 0}(\log_a(x+1)^{\frac{1}{x}}) = \log_a(\lim_{x\to 0}(x+1)^{\frac{1}{x}}) = \log_a e = \frac{1}{\ln a}.$$

5.

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a,\ \text{действительно, сделаем замену } y=a^x-1,$$
$$\text{тогда } y\to 0 \text{ и } x=\log_a(y+1).$$

Будем иметь

$$\lim_{y\to 0}\frac{y}{\log_a(y+1)}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\frac{\log_a(y+1)}{y}}=\ln a.$$

Примеры.

1.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{5}{2x+1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{5}{2x+1}\right)^{x\cdot\left(-\frac{2x+1}{5}\right)\cdot\left(-\frac{5}{2x+1}\right)}=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{-5x}{2x+1}}=e^{\frac{-5}{2}}.$$

2.

$$\lim_{x\to\infty}x(\ln(x+1)-\ln x)=\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)^n=\ln e=1.$$

3.

$$\lim_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{\sin x}}=\lim_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{-2x}{-2x}\left(\frac{1}{\sin x}\right)}=e^{\lim_{x\to 0}\left(\frac{-2x}{\sin x}\right)}=e^{-2}.$$

4.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+2}\right)^{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x^2-1}{x^2+2}-1\right)^{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x^2+2}\right)^{x^2\cdot\left(\frac{x^2+2}{-3}\right)\cdot\left(-\frac{3}{x^2+2}\right)}=$$
$$=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{-3x^2}{x^2+2}}=e^{-3}.$$

5.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-4x}{x^2-2}\right)^{\frac{1}{x^2}}=1^0=1.$$

6.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-4x}{3x^2-2}\right)^{x^2}=\left(\frac{1}{3}\right)^{+\infty}=0.$$

7.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-4x}{3x^2-2}\right)^{5x^3}=\left(\frac{1}{3}\right)^{-\infty}=+\infty.$$

1.1.17. Сравнение бесконечно малых функций. Эквивалентные бесконечно малые функции

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — две бесконечно малые функции в точке $x=x_0$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1. Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=A\neq 0,$ то функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ являются бесконечно малыми одного порядка.

2. Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0,$ то функция $\alpha(x)$ является бесконечно малой более высокого

порядка, чем $\beta(x)$.

3. Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty,$ то функция $\alpha(x)$ является бесконечно малой более низкого порядка, чем $\beta(x)$.

4. Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ не существует, то функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$являются несравнимыми бесконечно малыми.

Заметим, что точно такими же правилами пользуются при сравнении бесконечно малых функций при $x\to\pm\infty$ и $x\to x_0\pm 0$.

Примеры.

1. $\alpha(x)=3x,\quad \beta(x)=6x$ — б.м.ф. в точке $x=0$.

   Так как $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{6x}=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2},$ то $\alpha(x)$ и $\beta(x)-$ бесконечно малые одного порядка.

2. $\alpha(x)=3x^3,\quad \beta(x)=6x$ — б.м.ф. в точке $x=0$.

   Так как $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^3}{6x}=0,$ то функция $\alpha(x)-$ бесконечно малая более высокого порядка, чем $\beta(x)$.

3. $\alpha(x)=\sin 2x,\quad \beta(x)=6x^2$ — б.м.ф. в точке $x=0$.

   Так как $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{6x^2}=\infty,$ то функция $\alpha(x)-$ бесконечно малой более низкого порядка, чем $\beta(x)$.

4. $\alpha(x)=x\cdot\sin\frac{1}{x},\quad \beta(x)=x$ — б.м.ф. в точке $x=0$.

$$\text{Так как }\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$$

   предел не существует, то функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — несравнимые бесконечно малые.

Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1,$ то функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются **эквивалентными** бесконечно малыми при $x\to x_0$ (в точке x_0) и обозначается $\alpha(x)\sim\beta(x)$.

Так как $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1,$ то $\sin x\sim x$ при $x\to 0,$ аналогично так как $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}=1,$ то $\operatorname{tg} x\sim x$ при $x\to 0$.

Существует следующая таблица эквивалентных бесконечно малых функций при $x\to 0$.

1. $\sin x \sim x$	8. $\operatorname{arctg} kx \sim kx$
2. $\sin kx \sim kx$	9. $1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}$
3. $\operatorname{tg} x \sim x$	10. $\ln(1+x) \sim x$
4. $\operatorname{tg} kx \sim kx$	11. $\log_a(1+x) \sim \frac{x}{\ln a}$
5. $\arcsin x \sim x$	12. $e^x - 1 \sim x$
6. $\arcsin kx \sim kx$	13. $a^x - 1 \sim x \ln a$
7. $\operatorname{arctg} x \sim x$	14. $(1+x)^k - 1 \sim kx$

Примеры.

1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 5x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \left|\begin{array}{c} \text{при } x \to 0 \\ \sin 2x \sim 2x \\ \sin 5x \sim 5x \end{array}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{2x}{5x} = \frac{2}{5}.$$

2.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 5x \cdot \operatorname{tg} 3x + x^2}{\sin 4x \cdot \operatorname{arctg} 4x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \left|\begin{array}{c} \text{при } x \to 0 \\ \arcsin 5x \sim 5x \\ \operatorname{tg} 3x \sim 3x \\ \sin 4x \sim 4x \\ \operatorname{arctg} 4x \sim 4x \end{array}\right| =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{5x \cdot 3x + x^2}{4x \cdot 4x} = \lim_{x\to 0}\frac{16x^2}{16x^2} = 1.$$

3.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\arcsin(x-1)}{x^2-5x+4} = \left[\frac{0}{0}\right] = \left|\begin{array}{c} \text{при } x \to 1 \\ \arcsin(x-1) \sim (x-1) \end{array}\right|$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)}{(x-1)\cdot(x-4)} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{(x-4)} = -\frac{1}{3}.$$

1.2. Непрерывность функции в точке

Определение 1. Пусть функция $y = f(x)$ определена в точке x_0 и в некоторой окрестности этой точки. Функция $y = f(x)$ называется **непрерывной в точке** x_0, если

1. функция $f(x)$ определена в точке x_0 и в ее окрестности, т.е. $\exists f(x_0)$;
2. функция $f(x)$ имеет предел в точке $x = x_0$, т.е.

$$\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = A.$$

3. предел в точке x_0 равен значению функции в этой точке, т.е.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Если хотя бы одно из трех условий нарушается, то функция называется **разрывной в точке** x_0, а точка x_0 — **точкой разрыва** функции.

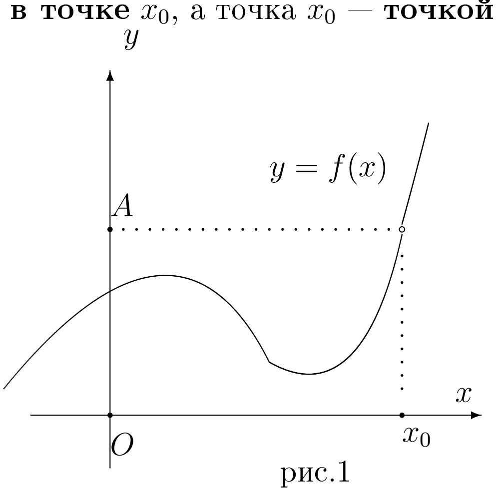


рис.1

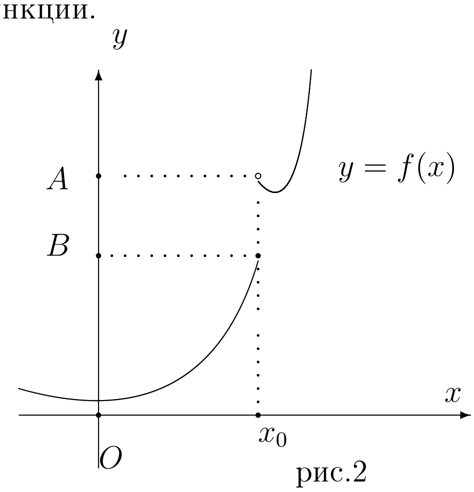


рис.2

$$1.\ \exists f(x_0)$$

$$2. \exists \lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

$$3.\ f(x_0) \neq A$$

усл-ие 3 непр-ти функции нарушено,

функция разрывна в точке x_0

$$1.\ \exists f(x_0)$$

$$2.\ \nexists \lim_{x \to x_0} f(x)$$

усл-ие 2 непр-ти функции нарушено,

функция разрывна в точке x_0

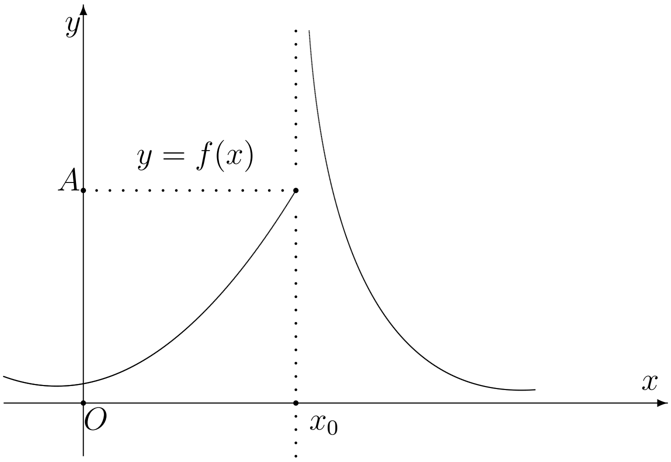


рис.3

$$f(x_0) = A$$

$$\exists \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = A \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = +\infty$$

Сформулируем ещё одно определение непрерывности функции в точке.

Определение 2. Функция $y = f(x)$ называется **непрерывной в точке** x_0, если

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0).$$

Определение. Функция $y = f(x)$ называется **непрерывной справа (слева) в точке** x_0, если $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = f(x_0)(\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x) = f(x_0))$.

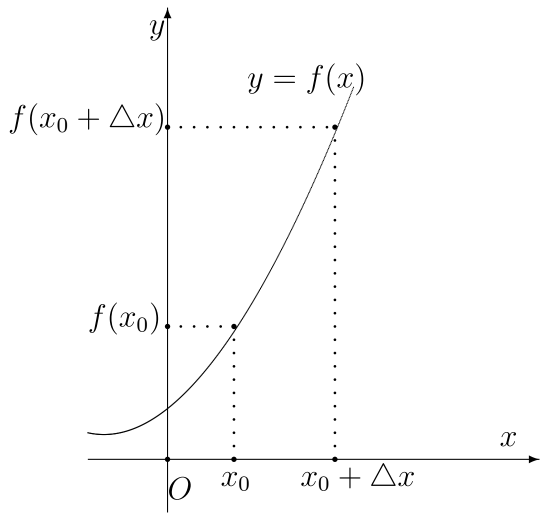
На рис.2 функция непрерывна слева в точке x_0.

Функция является непрерывной в точке x_0, если она непрерывна и слева, и справа в этой точке.

В некоторых случаях при исследовании функции на непрерывность удобно использовать определение непрерывности функции в точке на языке приращений.

Пусть $x_0 \in D(f)$ — внутрення точка области D, т.е. она входит в $D(f)$ вместе с некоторой своей окрестностью. Придадим аргументу x_0 приращение $\triangle x$ ($\triangle x$ —число, $\triangle x > 0$ или $\triangle x < 0$) так, чтобы $(x_0 + \triangle x) \in D(f)$. Это приращение аргумента вызовет соответствующее приращение функции $\triangle y = f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)$

Определение 3. Функция $y = f(x)$ называется **непрерывной в точке** x_0, если она определена в точке x_0 и ее окрестности и выполняется условие $\lim\limits_{\triangle x \to 0} \triangle y = 0$, т.е. бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции.



Докажем непрерывность двух основных элементарных функций $y = x^2$ и $y = \sin x$, используя пределение 3.

1. Покажем, что функция $y = x^2$ непрерывна в каждой точке числовой прямой. Для любого $\triangle x$ имеем

   $$\triangle y = (x_0 + \triangle x)^2 - x_0^2 = x_0^2 + 2x_0\triangle x + (\triangle x)^2 - x_0^2 = 2x_0\triangle x + (\triangle x)^2 = \triangle x(2x_0 + \triangle x).$$

   И рассмотрим

   $$\lim_{\triangle x \to 0} \triangle y = 0,$$

   следовательно, функция $y = x^2$ непрерывна.

2. Покажем, что функция $y = \sin x$ непрерывна в каждой точке числовой прямой. Для любого $\triangle x$ имеем

   $$\triangle y = \sin(x + \triangle x) - \sin x = 2\cos\left(x + \frac{\triangle x}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\triangle x}{2}\right).$$

Тогда
$$\lim_{\triangle x\to 0}\triangle y=\lim_{\triangle x\to 0}2\cos\left(x+\frac{\triangle x}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\triangle x}{2}\right)=0,$$
так как произведение ограниченной функции и бесконечно малой есть функция бесконечно малая. Таким образом, функция $y=\sin x$ непрерывна в каждой точке числовой прямой.

1.2.1. Основные теоремы о непрерывных функциях

Теорема 1. Сумма, произведение и частное двух непрерывных функций есть функция непрерывная (для частного исключаем те значения аргумента, в которых делитель равен нулю).

Теорема 2. Пусть функции $u=\varphi(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $y=f(u)$ непрерывна в точке $u_0=\varphi(x_0)$. Тогда сложная функция $f(\varphi(x))$ непрерывна в точке x_0.

Теорема 3. Если функции $y=f(x)$ непрерывна и строго монотонна на $[a,b]$ оси Ox, то обратная функция $y=\varphi(x)$ также непрерывна и монотонна на соответствующем отрезке $[c,d]$ оси Oy.

Теорема 4. Всякая основная элементарная функция непрерывна в каждой точке своей области определения (непрерывна на $D(f)$).

Элементарной называется такая функция, которую можно задать одной формулой, содержащей конечное число арифметических действий и суперпозиций основных элементарных функций. Поэтому имеем :

Теорема 5. Всякая элементарная функция непрерывна в каждой точке своей области определения.

Поэтому легко находить предел элементарной функции в точке, где она определена.

$$\text{Например, }\lim_{x\to 0}5^x=5^0=1.$$

Пример. Доказать, что функция $y=x^3+5x-7$ непрерывна на всей числовой прямой. Итак, функции $y=x^3$, $y=x$, $y=5$, $y=7$ — непрерывны на всей числовой прямой. Следовательно, $y=5x$ — непрерывна как произведение непрерывных функций, а исходная функция непрерывна как сумма непрерывных функций.

1.2.2. Точки разрыва и их классификация

Точки, в которых нарушается непрерывность функции, называются **точками разрыва** этой функции.

Если $x=x_0$ — точка разрыва функции $y=f(x)$, то в ней не выполняется по крайней мере одно из условий определения1 непрерывности функции, а именно. Рассмотрим примеры:

1. Функция определена в окрестности точки x_0, но не определена в самой точке x_0. Например, функция
$$y=\frac{1}{x-4}\text{ не определена в точке }x_0=4.$$

2. Функция определена в точке x_0 и ее окрестности, но не существует предела $f(x)$ в точке $x = x_0$. Например, функция,

$$f(x) = \begin{cases} x-1, \text{ если } -1 \le x < 2, \\ 2-x, \text{ если } 2 \le x \le 5, \end{cases}$$

определена в точке $x_0 = 2$ ($f(2) = 0$), однако в точке $x_0 = 2$ имеет разрыв, т.к. эта функция не имеет предела в точке $x = 2$,

$$\lim_{x\to 2-0} f(x) = 1, \text{ а } \lim_{x\to 2+0} f(x) = 0.$$

3. Функция определена в точке x_0 и ее окрестности, существует

$$\lim_{x\to x_0} f(x), \text{ но этот предел не равен значению функции в точке } x_0$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0).$$

Например, рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, \text{если} x \neq 0, \\ 2, \text{если} x = 0. \end{cases}$$

Здесь $x_0 = 0$ — точка разрыва.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \text{ а } f(x_0) = f(0) = 2.$$

1.2.3. Классификация точек разрыва

Пусть точка x_0 — точка разрыва функции $y = f(x)$.

1. Точка разрыва x_0 называется точкой разрыва **первого рода** функции $y = f(x)$, если в этой точке существуют конечные пределы функции слева и справа, т.е.

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = A_1 \text{ и } \lim_{x\to x_0+0} f(x) = A_2.$$

При этом:

- если $A_1 = A_2 \neq f(x_0)$, то точка x_0 называется точкой устранимого разрыва. На рис.1 п.1.2 т. x_0 — точка устранимого разрыва.
- если $A_1 \neq A_2$, то точка x_0 называется точкой конечного разрыва (точка "скачка"). Величину $|A_1 - A_2|$ называют скачком функции в точке разрыва первого рода. На рис. 2 п.1.2 $A_1 = A$, $A_2 = B$, $f(x_0) = A$, следовательно, x_0 — точка разрыва I рода, точка "скачка".

2. Точка разрыва x_0 называется точкой разрыва **второго рода** функции $y = f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов в этой точке не существует или равен бесконечности. На рис.3 функция $y = f(x)$ имеет бесконечный предел справа в точке x_0, значит, x_0 — точка разрыва II рода.

Для функции, указанной в примере 1) п.п.1.2.2, точка $x_0 = 4$ — точка разрыва второго рода, для функции, указанной в примере 2), точка $x_0 = 2$ — точка разрыва первого рода, точка "скачка для функции, указанной в примере 3), точка $x_0 = 0$ — точка устранимого разрыва первого рода, если положим $g(x) = 1$ при $x = 0$, то разрыв устранится, функция станет непрерывной.

Пример. Исследовать функцию на непрерывность и построить график схематично.

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x, \text{ если } x \le 1, \\ x^2, \text{если } 1 < x \le 2, \\ \left(\frac{1}{2}\right)^x \text{ если } x > 2. \end{cases}$$

На интервалах $(-\infty; 1)$, $(1; 2)$, $(2; +\infty)$ данная функция задана с помощью основных элементарных функций, поэтому она непрерывна в каждой точке этих интервалов. Функция может быть разрывна лишь только в точках $x_0 = 1$ и $x_0 = 2$, в которых меняется аналитическое выражение.

Исследуем функцию в точке $x = 1$:

$$\lim_{x \to 1-0} f(x) = \lim_{x \to 1}(2 - x) = 2 - 1 = 1, \ \lim_{x \to 1+0} f(x) = \lim_{x \to 1} x^2 = 1^2 = 1,$$

$$f(1) = (2 - x)|_{x=1} = 2 - 1 = 1.$$

Так как

$$\lim_{x \to 1-0} f(x) = \lim_{x \to 1+0} f(x) = f(1),$$

то функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $x_0 = 1$.

Исследуем функцию $y = f(x)$ непрерывна в точке $x_0 = 2$:

$$\lim_{x \to 2-0} f(x) = \lim_{x \to 2} x^2 = 2^2 = 4, \ \lim_{x \to 2+0} f(x) = \lim_{x \to 2} \left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4},$$

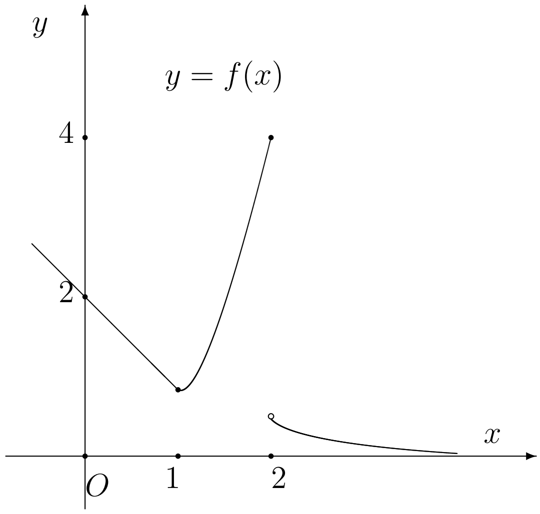
$$f(2) = x^2|_{x=2} = 2^2 = 4.$$

Так как

$$f(2) = \lim_{x \to 2-0} f(x) \ne \lim_{x \to 2+0} f(x),$$

то функция $y = f(x)$ является разрывной в точке $x_0 = 2$. При этом функция непрерына слева в точке $x_0 = 2$. Таким образом, точка $x_0 = 2$ — точка разрыва I рода, точка "скачка".

Построим схематично график функции $y = f(x)$.



1.2.4. Свойства функций, непрерывных на отрезке

Определение. Функция $y = f(x)$ называется **непрерывной на отрезке** $[a, b]$, если

1. $y = f(x)$ непрерывна в каждой точке интервала $(a; b)$;
2. $y = f(x)$ в точке $x = a$ непрерывна справа, т.е. $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = f(a)$;
3. $y = f(x)$ в точке $x = b$ непрерывна слева, т.е. $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = f(b)$.

Теорема 1 (Вейерштрасса). Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, тогда она ограничена на нем и достигает своих наибольшего M и наименьшего m значений, т.е.

$$\exists x_1 \in [a, b](f(x_1) = M) \text{ и } \exists x_2 \in [a, b](f(x_2) = m).$$

Например,

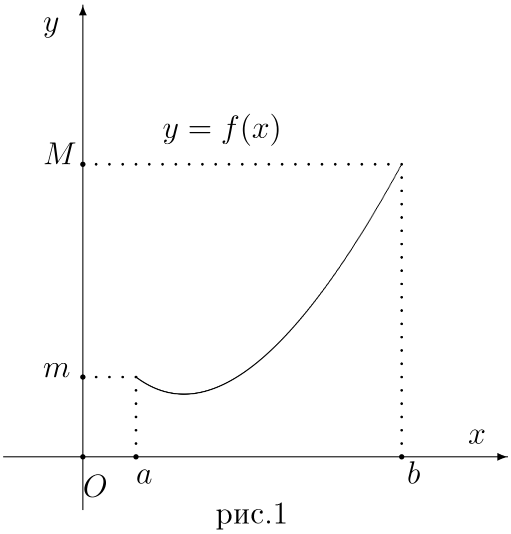


рис.1

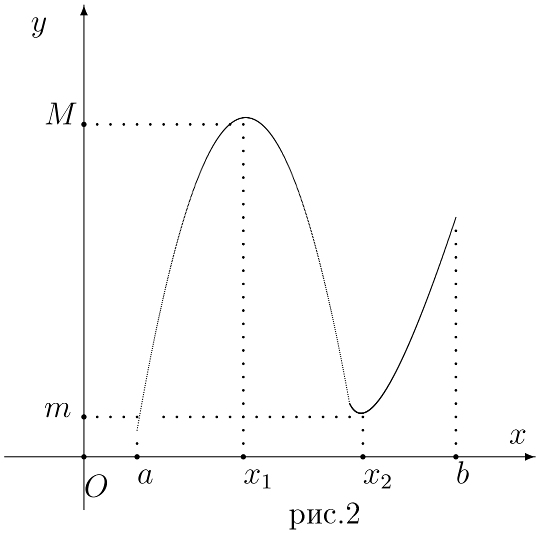


рис.2

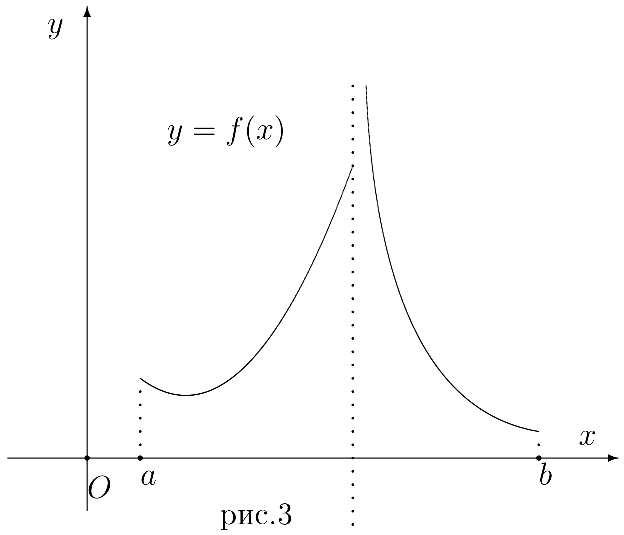


рис.3

Требование непрерывности функции на отрезке является обязательным. На последнем рисунке функция разрывна, не достигает наибольшего значения на отрезке.

Теорема 2. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и на его концах принимает значения разных знаков (т.е. $f(a) \cdot f(b) < 0$), то внутри отрезка $[a, b]$ найдется хотя бы одна точка c, в которой данная функция $f(x)$ обращается в нуль: $f(c) = 0$.

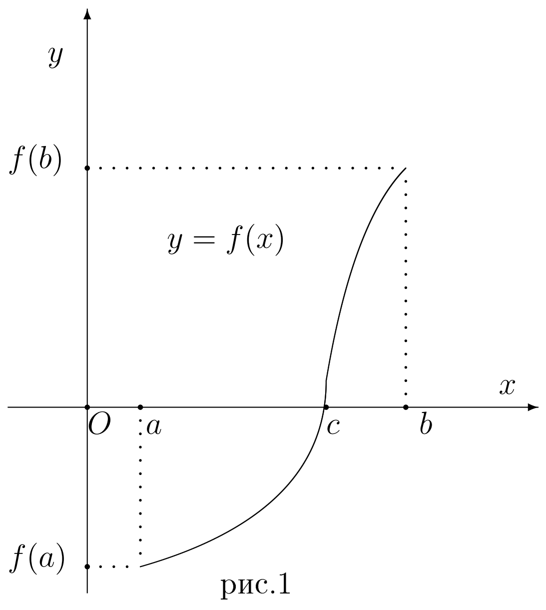


рис.1

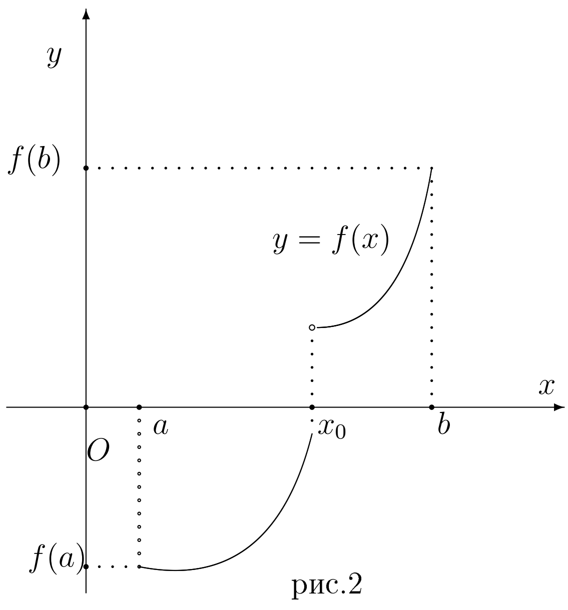


рис.2

Требование непрерывности является существенным, так на рис. 2 нет точки $x = c$ такой, что $f(c) = 0$.

Теорема 3. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и на его концах принимает разные значения, т.е. $f(a) = A$, $f(b) = B$, $A \neq B$ и пусть число C расположено между A и B. Тогда $\exists\, c \in (a, b)(f(c) = C)$.

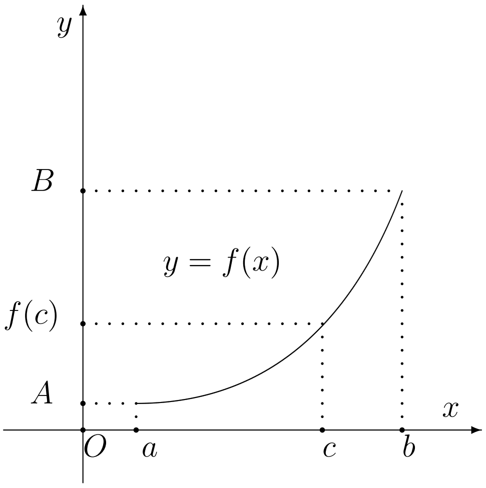


рис.1

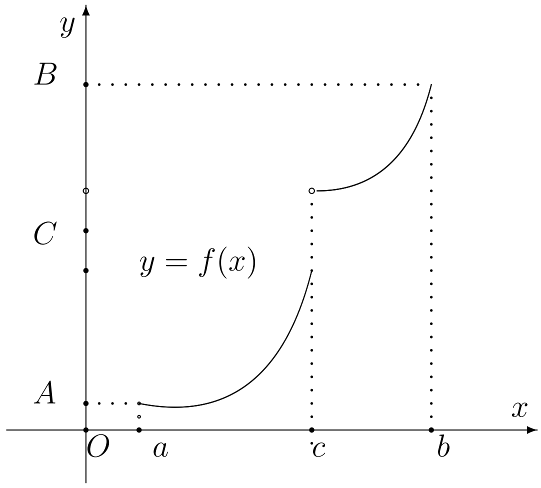


рис.2

То есть непрерывная на $[a;b]$ функция принимает все промежуточные значения между A и B. Требование непрерывности является существенным.

2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

2.1. Производная

2.1.1. Задачи, приводящие к понятию производной

1. Задача о касательной к графику функции.

Пусть дан график функции $y = f(x)$.Выберем на нём точкус$M(x_0; f(x_0)$. Проведём в этой точке к графику функции касательную (предполагаем, что она существует). Поставим задачу найти угловой коэффициент касательной.

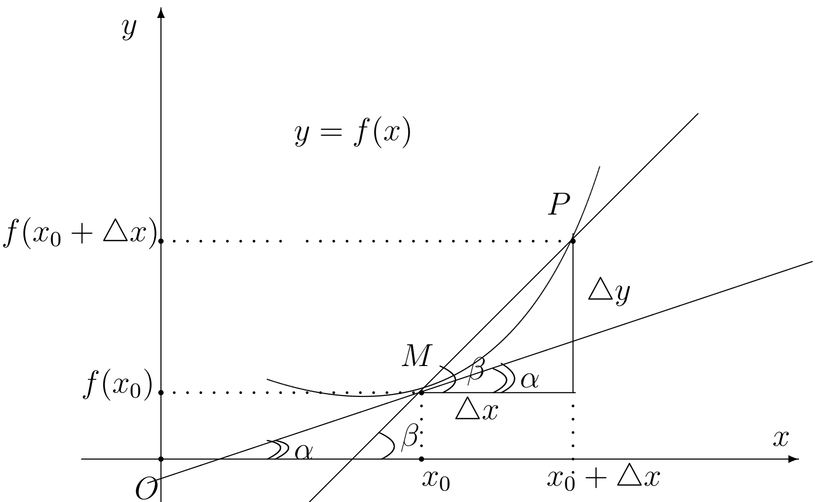
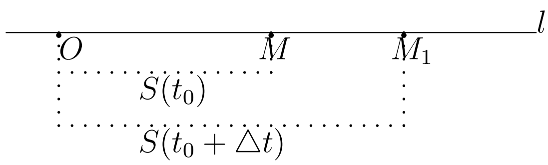


рис.1

Дадим аргументу x_0 приращение $\triangle x$ и рассмотрим на графике точку $P(x_0+\triangle x; f(x_0+\triangle x))$. Угловой коэффициент секущей MP, т.е. тангенс угла между секущей и осью Ox вычисляется по формуле $k_{\text{сек.}} = \frac{\triangle y}{\triangle x}$. Если теперь устремить $\triangle x$ к нулю, то точка P начнёт приближаться по кривой к точке M. Касательная — это предельное положение секущей при этом приближении. Значит, угловой коэффициент касательной $k_{\text{кас.}} = \lim\limits_{\triangle x \to 0} k_{\text{сек.}}$, т.е. $k_{\text{кас.}} = \frac{\triangle y}{\triangle x}$.

Задача о прямолинейном движении материальной точки.

Пусть O — некоторая фиксированная точка некоторой прямой l. Пусть материальная точка M движется неравномерно по прямой l. Каждому значению времени t_0 соответствует определенное расстояние S до фиксированной точки O. Это расстояние зависит от истекшего времени t, т.е. $S = S(t)$ — закон движения точки. Пусть в некоторый момент времени t_0 точка занимает положение M. Тогда в момент времени $t_0 + \triangle t$ ($\triangle t$ — приращение времени) точка займет положение M_1, где $OM_1 = S + \triangle S$ ($\triangle S$ — приращение расстояния) (см.рис.). Таким образом, перемещение точки M за время $\triangle t$ будет $\triangle S = S(t_0 + \triangle t) - S(t_0)$.



Отношение $\frac{\triangle S}{\triangle t}$ — **средняя скорость** движения точки за время $\triangle t$:

$$V_{\text{ср.}} = \frac{\triangle S}{\triangle t}.$$

Чем меньше $\triangle t$, тем точнее средняя скорость движения точки в данный момент времени t. Предел средней скорости движения при стремлении промежутка времени $\triangle t$ к нулю называется **скоростью** движения точки в данный момент времени (мгновенной скоростью). Обозначим скорость через V, получим

$$V = \lim_{\triangle t \to 0} \frac{\triangle S}{\triangle t} \quad \text{или} \quad V = \lim_{\triangle t \to 0} \frac{S(t_0 + \triangle t) - S(t_0)}{\triangle t}.$$

2.1.2. Понятие производной функции в точке

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой области $D(f)$, точка x_0 — внутренняя точка области $D(f)$.

1. Аргументу x_0 дадим приращение $\triangle x$ так, чтобы $x_0 + \triangle x \in D(f)$.

2. Найдем соответствующее приращение функции

$$\triangle y = f(x_0 + \triangle x) - f(x_0).$$

3. Составим отношение приращения функции к приращению аргумента $\frac{\triangle y}{\triangle x}$.

4. Найдем предел отношения $\frac{\triangle y}{\triangle x}$ при $\triangle x \to 0$, т.е.

$$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)}{\triangle x} \tag{1}$$

Если существует конечный предел (1), то он называется значением производной функции $f(x)$ в точке x_0 и обозначается $f'(x_0)$.

Таким образом, имеем

$$f'(x_0) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} \qquad (2)$$

Так возникает новая функция, значения которой вычисляются по формуле (2). Эта функция назвается производной для данной функции $f(x)$ и может обозначаться так: $f'(x)$; y'; $\frac{dy}{dx}$. Операция нахождения производной называется **дифференцированием**.

Если функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x_0, то она называется **дифференцируемой** в точке x_0.

2.1.3. Геометрический и физический смысл производной

Рассмотрим график непрерывной функции $y = f(x)$. (см.рис.) В произвольной точке $M_0(x_0, y_0)$ проведем невертикальную касательную. Найдем ее угловой коэффициент $k = \operatorname{tg}\alpha$, где α — угол касательной с осью Ox. Для этого возьмем точку M с абсциссой $x_0 + \triangle x$ и проведем секущую через две точки: M_0 и M. Обозначим через β угол между секущей и осью Ox. Рассмотрим прямоугольный треугольник M_0HM:

$$\angle H = \frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{tg}\angle\beta = \frac{MH}{M_0H}.$$

$$MH = f(x_0 + \triangle x) - f(x_0) = \triangle y, \quad M_0H = x_0 + \triangle x - x_0 = \triangle x$$

Следовательно,

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\triangle y}{\triangle x}.$$

При $\triangle x \to 0$, так как функция непрерывная, то $\triangle y \to 0$. Точка M неограниченно приближается по кривой к точке M_0 $(M \to M_0)$, а секущая M_0M переходит в касательную.

Угол $\beta \to \alpha$, т.е. $\lim_{\triangle x \to 0} \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\alpha$. Поэтому угловой коэффициент касательной равен

$$k = \operatorname{tg}\alpha = \lim_{\triangle x \to 0} \operatorname{tg}\beta = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)}{\triangle x} = f'(x_0).$$

Т.е. значение производной $f'(x_0)$ в точке x_0 равно $\operatorname{tg}\alpha$ угловому коэффициенту касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке, абсцисса которой равна x_0.

В этом и состоит **геометрический смысл** производной.

Известно, $\operatorname{tg}\alpha = k$, где k — угловой коэфффициент прямой $y = kx + b$. Уравнение прямой, проходящей через точку $M_0 = (x_0, y_0)$ и имеющей угловой коэффициент k, имеет вид $y - y_0 = k(x - x_0)$. Следовательно, уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$. Или

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Так как для угловых коэффициентов k_1 и k_2 двух перпендикулярных прямых выполняется соотношение $k_1 \cdot k_2 = -1$, т.е. $k_1 = -\frac{1}{k_2}$, то уравнение нормали к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0 будет иметь вид:

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

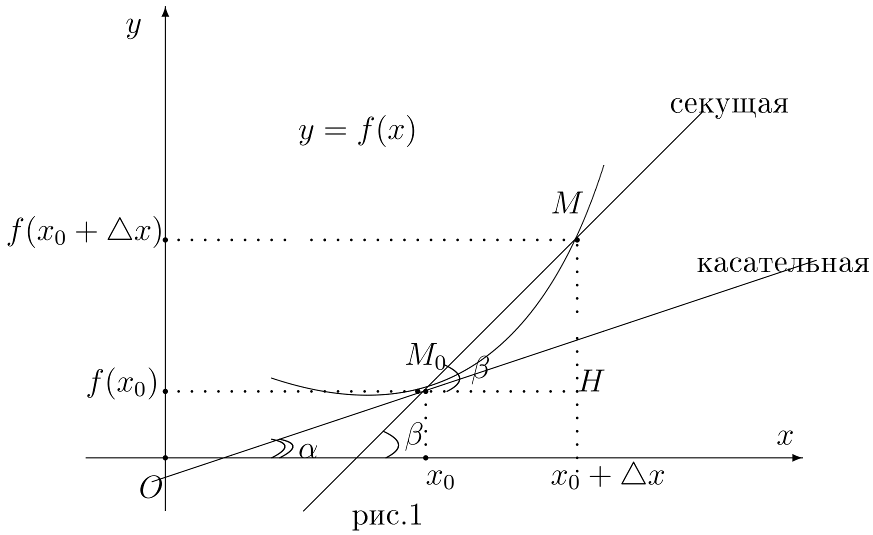


рис.1

Уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке x_0 имеет вид:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Угловой коэффициент прямой равен значению производной функции в точке x_0.

Если функция $y = f(x)$ в точке x_0 имеет производную, то в точке с этой абсциссой определена касательная к графику функции $y = f(x)$ и наоборот.

В задаче про скорость прямолинейного движения было получено $V = \lim_{\triangle t \to 0} \frac{\triangle S}{\triangle t}$. Это равенство перепишем в виде $V = S'(t)$.

Таким образом, *механический* смысл производной: скорость прямолинейного движения материальной точки в момент времени t есть производная от пути S по времени t.

Обобщая, получим *физический* смысл производной: если функция $y = f(x)$ описывает какой-либо процесс, то производная y' есть скорость протекания этого процесса.

2.1.4. Связь между непрерывностью и дифференцируемостью

Теорема. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой точке x_0, то она непрерывна в этой точке.

Доказательство. Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой точке x_0. Следовательно, существует предел

$$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = f'(x_0).$$

Отсюда, по теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой функции, имеем $\frac{\triangle y}{\triangle x} = f'(x_0) \cdot \triangle x + \alpha(\triangle x)$, где $\alpha(\triangle x) \to 0$ при $\triangle x \to 0$, т.е.

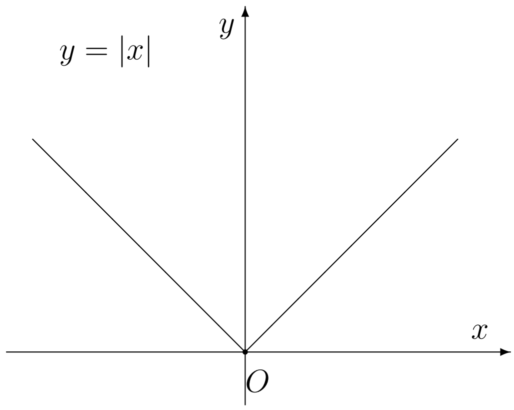
$$\triangle y = f'(x_0) \cdot \triangle x + \alpha(\triangle x) \cdot f'(x_0) \cdot \triangle x.$$

Переходя к пределу при $\triangle x \to 0$, получаем

$$\lim_{\triangle x \to 0} \triangle y = 0.$$

А это и означает по определению 3 непрерывность функции $y = f(x)$ в точке x_0.

Отметим, что обратная теорема неверна. Непрерывная функция может не иметь производной. Например, $y = |x| = \begin{cases} x, \text{ если } x \geq 0 \\ -x, \text{ если } x < 0 \end{cases}$ непрерывна в точке $x_0 = 0$, но недифференцируема в ней.



Так как существуют односторонние пределы функции $y = |x|$ в точке $x_0 = 0$:

$$\lim_{\triangle x \to 0-0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0-0} \frac{|x_0 + \triangle x| - |x_0|}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0-0} \frac{|0 + \triangle x| - 0}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0-0} \frac{|\triangle x|}{\triangle x} =$$

$$\lim_{\triangle x \to 0-0} \frac{-\triangle x}{\triangle x} = -1 \text{ и}$$

$$\lim_{\triangle x \to 0+0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0-0} \frac{|\triangle x|}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0-0} \frac{\triangle x}{\triangle x} = 1,$$

то функция имеет односторонние производные. Если они неравны в точке x_0, то функция не имеет производной в этой точке. Также не существует производной в точках разрыва функции. Производная $y' = f'(x)$ непрерывной функции $y = f(x)$ сама необязательно является непрерывной.

Если функция $y = f(x)$ имеет непрерывную производную $y' = f'(x)$ в некотором интервале (a, b), то функция называется **гладкой**.

2.1.5. Правила дифференцирования

Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ — дифференццируемые в некотором интервале (a, b) функции.

Теорема 1.

1. Производная суммы (разности) двух функций равна сумме (разности) производных этих функций: $(u \pm v)' = u' \pm v'$.

2. Производная произведения двух функций равна произведению производной первого сомножителя на второй плюс произведение первого сомножителя на производную второго: $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$.

3. Производная частного двух функций $\frac{u(x)}{v(x)}$, если $v(x) \neq 0$, равна дроби, числитель которой есть разность произведений знаменателя дроби на производную числителя и числителя дроби на производную знаменателя, а знаменатель есть квадрат первоначального знаменателя: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$, $v \neq 0$.

Доказательство.

1. Обозначим $y = u \pm v$. По определению производной имеем:

$$y' = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{(u(x_0 + \triangle x) \pm v(x_0 + \triangle x)) - (u(x_0) \pm v(x_0))}{\triangle x} =$$

$$= \lim_{\triangle x \to 0} \left(\frac{u(x_0 + \triangle x) - u(x_0)}{\triangle x} \pm \frac{v(x_0 + \triangle x) - v(x_0)}{\triangle x} \right) =$$

По теореме (о пределе суммы (разности) функций можем записать):

$$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle u}{\triangle x} \pm \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle v}{\triangle x} = u' \pm v'.$$

2. Обозначим $y = u \cdot v$. По определению производной имеем:

$$y' = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{(u(x_0 + \triangle x) \cdot v(x_0 + \triangle x)) - (u(x_0) \cdot v(x_0))}{\triangle x} =$$

$$= \lim_{\triangle x \to 0} \frac{(u(x_0) + u(x_0 + \triangle x) - u(x_0) \cdot (v(x_0) + v(x_0 + \triangle x) - v(x_0)) - u(x_0) \cdot v(x_0)}{\triangle x} =$$

$$= \lim_{\triangle x \to 0} \frac{(u(x_0) + \triangle u) \cdot (v(x_0) + \triangle v) - u(x_0) \cdot v(x_0)}{\triangle x} =$$

$$= \lim_{\triangle x \to 0} \frac{(u(x_0) \cdot v(x_0) + u(x_0) \cdot \triangle v + v(x_0) \cdot \triangle u + \triangle u \cdot \triangle v - u(x_0) \cdot v(x_0)}{\triangle x} =$$

$$= \lim_{\triangle x \to 0} \left(v(x_0) \cdot \frac{\triangle u}{\triangle x} + u(x_0) \cdot \frac{\triangle v}{\triangle x} + \triangle v \cdot \frac{\triangle u}{\triangle x} \right) =$$

$$= v(x_0) \cdot \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle u}{\triangle x} + u(x_0) \cdot \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle v}{\triangle x} + \lim_{\triangle x \to 0} \triangle v \cdot \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle u}{\triangle x}$$

По теореме (о пределе суммы (разности) функций можем записать):

$$v(x_0) \cdot \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle u}{\triangle x} + u(x_0) \cdot \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle u}{\triangle x} + \lim_{\triangle x \to 0} \triangle v \cdot \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle u}{\triangle x} =$$

Так как функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ дифференццируемы, то они и непрерывны, поэтому $\triangle v \to 0$ и $\triangle u \to 0$ при $\triangle x \to 0$, поэтому имеем:

$$= u' \cdot v + u \cdot v' + 0 \cdot u' = u' \cdot v + u \cdot v'.$$

3. Вывод аналогичен.

Следствие. Постоянный множитель можно выносить за знак производной, т.е. $(c \cdot u)' = c \cdot u'$.

Теорема 2 (о производной сложной функции).

Если функция $u = \varphi(x)$ имеет производную u'_x в точке x, а функция $y = f(u)$ имеет производную y'_u в точке $u = \varphi(x)$, то сложная функция $y = f(\varphi(x))$ имеет производную y'_x в точке x, которая находится по формуле: $y'_x = y'_u \cdot u'_x$.

Теорема 3 (о производной обратной функции). Если функция $y = f(x)$ — строго монотонна на интервале (a, b) и имеет неравную нулю производную $f'(x)$ в произвольной точке этого интервала, то обратная ей функция $x = \varphi(y)$ также имеет производную $\varphi'(y)$ в соответствующей точке, определяемую равенством: $\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}$ или $x'_y = \frac{1}{y'_x}$.

2.1.6. Производные основных элементарных функций

По определению производной функции в точке, найдем производные некоторых основных элементарных функций.

1. Найти производную постоянной функции $y = C$.

   Заметим, $D(f) = \mathbb{R}$. Возьмем произвольную точку $x_0 \in D(f)$ и дадим приращение $\triangle x$, тогда $(x_0 + \triangle x) \in D(f)$. Найдем приращение функции $\triangle y = C - C = 0$. Следовательно,
   $$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{C - C}{\triangle x} = \frac{0}{\triangle x} = 0.$$
   С другой стороны,
   $$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = f'(x_0).$$
   Значит, $f'(x_0) = 0$. Так как точку x_0 выбирали произвольным образом, то $f'(x) = 0$.

   Таким образом, $C' = 0$.

2. Найти производную функции $y = x$.

   Заметим, $D(f) = \mathbb{R}$. Возьмем произвольную точку $x_0 \in D(f)$ и дадим приращение $\triangle x$, тогда $(x_0 + \triangle x) \in D(f)$. Найдем приращение функции $\triangle y = (x_0 + \triangle x) - x_0$. Следовательно,
   $$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{(x_0 + \triangle x) - x_0}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle x}{\triangle x} = 1.$$
   С другой стороны,
   $$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = f'(x_0).$$
   Значит, $f'(x_0) = 1$. Так как точку x_0 выбирали произвольным образом, то $f'(x) = 1$.

   Таким образом, $x' = 1$.

3. Найти производную функции $y = x^2$. Заметим, $D(f) = \mathbb{R}$. Возьмем произвольную точку $x_0 \in D(f)$ и дадим приращение $\triangle x$, тогда $(x_0 + \triangle x) \in D(f)$. Найдем приращение функции $\triangle y = (x_0 + \triangle x)^2 - x_0^2$. Следовательно,

$$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{(x_0 + \triangle x)^2 - x_0}{\triangle x^2} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{x_0^2 + 2x_0 \triangle x + (\triangle x)^2 - x_0^2}{\triangle x} =$$

$$= \lim_{\triangle x \to 0} \frac{2x_0 \triangle x + (\triangle x)^2}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle x(2x_0 + \triangle x)}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{(2x_0 + \triangle x)}{1} = 2x_0.$$

С другой стороны,

$$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = f'(x_0).$$

Значит, $f'(x_0) = 2x_0$. Так как точку x_0 выбирали произвольным образом, то $f'(x) = 2x$.

Таким образом, $(x^2)' = 2x$.

4. Найти производную функции $y = e^x$.

Заметим, $D(f) = \mathbb{R}$. Возьмем произвольную точку $x_0 \in D(f)$ и дадим приращение $\triangle x$, тогда $(x_0 + \triangle x) \in D(f)$. Найдем приращение функции $\triangle y = e^{(x_0 + \triangle x)} - e^{x_0} = e^{x_0} \cdot e^{\triangle x} - e^{x_0} = e^{x_0}(e^{\triangle x} - 1)$. Следовательно,

$$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{e^{x_0}(e^{\triangle x} - 1) - e^{x_0}}{\triangle x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{e^{x_0} \triangle x}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} e^{x_0} = e^{x_0}.$$

С другой стороны,

$$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = f'(x_0).$$

Значит, $f'(x_0) = e^{x_0}$. Так как точку x_0 выбирали произвольным образом, то $f'(x) = e^x$.

Таким образом, $(e^x)' = e^x$.

5. Найти производную функции $y = \cos x$.

Заметим, $D(f) = \mathbb{R}$. Возьмем произвольную точку $x_0 \in D(f)$ и дадим приращение $\triangle x$, тогда $(x_0 + \triangle x) \in D(f)$. Найдем приращение функции $\triangle y = f(x_0 + \triangle x) - f(x_0) = \cos(x_0 + \triangle x) - \cos(x_0)$.

Воспользуемся формулой

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

В нашем случае $\triangle y = -2 \sin\left(\dfrac{2x_0 + \triangle x}{2}\right) \sin\left(\dfrac{\triangle x}{2}\right)$.

Найдем предел отношения приращения функции к приращению аргумета.

$$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{-2 \sin\left(\frac{2x_0 + \triangle x}{2}\right) \sin\left(\frac{\triangle x}{2}\right)}{\triangle x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \left| \begin{array}{c} \text{при } \triangle x \to 0 \\ \sin\left(\frac{\triangle x}{2}\right) \sim \frac{\triangle x}{2} \end{array} \right| =$$

$$= \lim_{\triangle x\to 0} \frac{-2\sin\left(\frac{2x_0+\triangle x}{2}\right)\frac{\triangle x}{2}}{\triangle x} = -\lim_{\triangle x\to 0}\sin\left(\frac{2x_0+\triangle x}{2}\right) = -\sin x_0.$$

С другой стороны,

$$\lim_{\triangle x\to 0}\frac{\triangle y}{\triangle x} = f'(x_0).$$

Значит, $f'(x_0) = -\sin x_0$. Так как точку x_0 выбирали произвольным образом, то $f'(x) = = -\sin x$.

Таким образом, $(\cos x)' = -\sin x$.

6. Найти производную функции $y = \sin x$.

   Заметим, $D(f) = \mathbb{R}$. Возьмем произвольную точку $x_0 \in D(f)$ и дадим приращение $\triangle x$, тогда $(x_0+\triangle x) \in D(f)$. Найдем приращение функции $\triangle y = f(x_0+\triangle x) - f(x_0) = \sin(x_0+\triangle x) - \sin(x_0)$.

   Воспользуемся формулой

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\text{В нашем случае } \triangle y = 2\sin\left(\frac{\triangle x}{2}\right)\cos\left(\frac{2x_0+\triangle x}{2}\right)$$

   Найдем предел отношения приращения функции к приращению аргумета.

$$\lim_{\triangle x\to 0}\frac{2\sin\left(\frac{\triangle x}{2}\right)\cos\left(\frac{2x_0+\triangle x}{2}\right)}{\triangle x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \left|\begin{array}{c}\text{при } \triangle x\to 0\\ \sin\left(\frac{\triangle x}{2}\right)\sim\frac{\triangle x}{2}\end{array}\right| =$$

$$= \lim_{\triangle x\to 0}\frac{\frac{\triangle x}{2}2\cos\left(\frac{2x_0+\triangle x}{2}\right)}{\triangle x} = \lim_{\triangle x\to 0}\cos\left(\frac{2x_0+\triangle x}{2}\right) = \cos(x_0).$$

   С другой стороны,

$$\lim_{\triangle x\to 0}\frac{\triangle y}{\triangle x} = f'(x_0).$$

   Значит, $f'(x_0) = \cos(x_0)$. Так как точку x_0 выбирали произвольным образом, то $f'(x) = = \cos x$.

   Таким образом, $(\sin x)' = \cos x$.

7. Найти производные функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{tg} x$ можно с помощью правила дифференцирования частного.

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - (\cos x)'\sin x}{(\cos x)^2} = \frac{\cos x\cos x + \sin x\sin x}{(\cos x)^2} =$$
$$= \frac{(\cos x)^2 + (\sin x)^2}{(\cos x)^2} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

   Аналогично,

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)'\sin x - (\sin x)'\cos x}{(\sin x)^2} = \frac{-\sin x\sin x - \cos x\cos x}{(\sin x)^2} =$$

$$= \frac{-(\sin x)^2 - (\cos x)^2}{(\sin x)^2} = \frac{-1}{\sin^2 x}.$$

Таким образом,

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

8. Найдем производную функции $y = \arcsin x$. Обратная функция к функции $y = \arcsin x$ — это функция $x = \sin y$, где $y \in \left[\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

$$x'_y = (\sin y)' = \cos y \neq 0, \quad y \in \left(\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$$

По теореме о дифференцировании обратной функции имеем:

$$y'_x = (\arcsin x)' = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y}$$

Воспользуемся основным тригонометрическим тождеством:

$$\sin^2 y + \cos^2 y = 1 \Rightarrow \cos y = \pm\sqrt{1 - \sin^2 y}$$

Так как

$$\cos y > 0,\ y \in \left(\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Таким образом,

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Аналогично, найдем производную функции $y = \arccos x$. Обратная функция к функции $y = \arccos x$ — это функция $x = \cos y$, где $y \in [0; \pi]$.

$$x'_y = (\cos y)' = -\sin y \neq 0, \quad y \in (0; \pi).$$

По теореме о дифференцировании обратной функции будем иметь:

$$y'_x = (\arccos x)' = \frac{1}{x'_y} = -\frac{1}{\sin y}$$

Воспользуемся основным тригонометрическим тождеством:

$$\sin^2 y + \cos^2 y = 1 \Rightarrow \sin y = \pm\sqrt{1 - \cos^2 y}$$

Так как

$$\sin y > 0,\ y \in (0; \pi) \Rightarrow \sin y = \sqrt{1 - \cos^2 y}.$$

Следовательно,

$$-\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Таким образом,

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Таблица производных основных элементарных функций

Элементарные функции	Сложные функции
$C' = 0$	
$x' = 1$	
$(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$	$(u^n)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}$	$(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\cdot\sqrt{u}} \cdot u'$
$(e^x)' = e^x$	$(e^u)' = e^u \cdot u'$
$(a^x)' = a^x \cdot \ln a,\ a > 0$	$(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x\cdot\ln a}$	$(\log_a u)' = \frac{1}{u\cdot\ln a} \cdot u'$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$
$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$
$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(\arccos u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$
$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$	$(\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$
$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$	$(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$
$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$	$(\operatorname{sh} u)' = \operatorname{ch} u \cdot u'$
$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$	$(\operatorname{ch} u)' = \operatorname{sh} u \cdot u'$
$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	$(\operatorname{th} u)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 u} \cdot u'$
$(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$	$(\operatorname{cth} u)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 u} \cdot u'$

Примеры.

1. (a) Найти производную функции $y = \ln x + \sin x$.

$$y' = (\ln x + \sin x)' =$$

воспользуемся теоремой 1 о производной суммы (разности) двух функций, а затем таблицей производных основных элементарных функций, получим:

$$= (\ln x)' + (\sin x)' = \frac{1}{x} + \cos x.$$

(b) Найти производную функции $y = x^3 - 4e^x$.

$$y' = (x^3 - 4e^x)' =$$

аналогично, воспользуемся теоремой 1 о производной суммы (разности) двух функций, а затем таблицей производных основных элементарных функций, получим:

$$(x^3)' - (4e^x)' = 3x^2 - 4e^x.$$

2. Найти производную функции $y = 2x^3 \cdot \sin x$.

$$y' = (2x^3 \cdot \sin x)' =$$

воспользуемся теоремой 1 о производной произведения двух функций, а затем таблицей производных основных элементарных функций, получим:

$$2 \cdot (x^3 \cdot \sin x)' = 2 \cdot ((x^3)' \cdot \sin x + x^3 \cdot (\sin x)') = 2 \cdot (3x^2 \cdot \sin x + x^3 \cdot \cos x).$$

3. Найти производную функции $y = \frac{2x^3}{\sin x}$.

$$y' = \left(\frac{2x^3}{\sin x}\right)' =$$

воспользуемся теоремой 1 о производной частного двух функций, а затем таблицей производных основных элементарных функций, получим:

$$2 \cdot \frac{(x^3)' \cdot \sin x - x^3 \cdot (\sin x)'}{(\sin x)^2} =$$

$$= 2 \cdot \frac{3x^2 \cdot \sin x - x^3 \cdot \cos x}{(\sin x)^2}.$$

4. Найти производную функции $y = 2^{\sin(x^2)}$.

$$y' = (2^{\sin(x^2)})' =$$

воспользуемся теоремой 2 о производной сложной функции, а затем таблицей производных основных элементарных функций, получим:

$$2^{\sin(x^2)} \cdot \ln 2 \cdot (\sin(x^2))' \cdot (x^2)' = 2^{\sin(x^2)} \cdot \ln 2 \cdot \cos(x^2) \cdot 2x.$$

2.1.7. Производная неявно заданной функции

Функция, заданная в виде уравнения $F(x, y) = 0$, которое невозможно разрешить относительно переменной y, называется **неявно заданной**.

Например, $y + \cos(x \cdot y) = 2x + y^4$ или $3^{x+y} - 2y = 0$.

Если функция задана явно, т.е. $y = f(x)$, то ее можно записать в неявном виде $f(x) - y = 0$.

Утверждение. Если функция задана в неявном виде $F(x, y) = 0$, то для нахождения производной от функции y по переменной x достаточно продифференцировать это уравнение по переменной x, рассматривая при этом y как функцию от переменной x, затем полученное уравнение разрешить относительно y'.

Примеры. Продифференцировать следующие функции:

1.
$$x^2 + 2y^2 - 5xy^2 = 0$$

имеем:

$$2x + 4yy' - 5(y^2 + x \cdot 2y \cdot y') = 0, \text{ следовательно, } y' \cdot (4y - 10 \cdot y \cdot x) = 5 \cdot y^2 - 2x$$

откуда
$$y' = \frac{5 \cdot y^2 - 2x}{4y - 10 \cdot y \cdot x}.$$

2.
$$y + \cos(x \cdot y) = 2x + y^4$$

имеем:
$$y' - \sin(x \cdot y) \cdot (y + xy') = 2 + 4y^3 \cdot y'.$$

Сгруппируем все слагаемые, содержащие y', получим:

$$y' - \sin(x \cdot y) \cdot y - \sin(x \cdot y) \cdot xy' = 2 + 4y^3 \cdot y'.$$

$$y' - \sin(x \cdot y) \cdot xy' - 4y^3 \cdot y' = \sin(x \cdot y) \cdot y + 2 \Rightarrow y'(1 - \sin(x \cdot y) \cdot x - 4y^3) = \sin(x \cdot y) \cdot y + 2$$
$$y' = \frac{\sin(x \cdot y) \cdot y + 2}{1 - \sin(x \cdot y) \cdot x - 4y^3}.$$

3.
$$3^{x+y} - 2y = 0$$

имеем:
$$3^{x+y} \ln 3 \cdot (1 + y') - 2y' = 0.$$

$$3^{x+y} \ln 3 + 3^{x+y} \ln 3 \cdot y' - 2y' = 0 \Rightarrow y'(3^{x+y} \ln 3 - 2) = -3^{x+y} \ln 3 \Rightarrow y' = -\frac{3^{x+y} \ln 3}{3^{x+y} \ln 3 - 2}.$$

2.1.8. Производная параметрически заданной функции

Функция, заданная в виде двух уравнений:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \tag{1}$$

где t — вспомогательная переменная, называется **параметрически заданной**.

Вычислим ее производную y'_x. Вычислим y'_x, считая, что $x = x(t)$ имеет обратную функцию $t = \varphi(x)$. По правилу дифференцирования обратной функции $t'_x = \frac{1}{x'_t}$. Функцию $y = f(x)$, определяемую параметрическими уравнениями можно рассматривать как сложную функцию $y = y(t)$, где $t = \varphi(x)$. Тогда по теореме о дифференцировании сложной функции имеем: $y'_x = y'_t \cdot t'_x$. Таким образом, получаем:

$$y'_x = y'_t \cdot \frac{1}{x'_t}, \text{ то есть } y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Пример. Продифференцировать функцию:

$$\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = t^2 \end{cases}$$

Находим:

$$x'_t = \frac{1}{1+t^2} \cdot 2t, \quad y'_t = 2t.$$

Таким образом, получаем

$$y'_x = \frac{2t}{\frac{1}{1+t^2} \cdot 2t} = 1 + t^2.$$

2.1.9. Производные высших порядков

1. Производная $y' = f'(x)$ от функции $y = f(x)$ — есть функция от переменной x и называется **производной первого порядка**.

   Если $f'(x)$ дифференцируема, то ее производная называется **производной второго порядка** и обозначается $y'' = f''(x) = (y')'$. Производная от производной второго порядка, если она существует, называется **производной третьего порядка**: $y''' = (y'')'$.

   Производной n -го порядка называется производная от производной $(n-1)$ -го порядка: $y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$. Производные порядка выше первого называются **производными высших порядков**.

   Пример. Вычислить $y''(x)$ от функции $y = \sin(2x^3)$. Имеем: $y' = \cos(2x^3) \cdot (6x^2)$, $y'' = (\cos(2x^3) \cdot (6x^2))' = -\sin(2x^3) \cdot (6x^2) \cdot (6x^2) + \cos(2x^3) \cdot 12x$.

2. Пусть функция задана неявно уравнением $F(x, y) = 0$. Продифференцируем его по переменной x и выразим y', получим первую производную. Затем продифференцируем ее второй раз и подставим выражения для y, y' в полученное равенство, в итоге получим вторую производную, которая будет зависить только от переменных x и y. Аналогично можно найти y''' и т.д. Например, рассмотрим функцию: $x^2 + y^2 = 1$. Продифференцируем функцию первый раз, получим:

   $$2x + 2y \cdot y' = 0, \text{ откуда } y' = \frac{-2x}{2y} = -\frac{x}{y}.$$

   Найдем вторую производную:

   $$y'' = -\frac{y - x \cdot y'}{y^2} = -\frac{y - x \cdot (-\frac{x}{y})}{y^2} = -\frac{y^2 + x^2}{y^3}.$$

3. Пусть функция задана параметрически

   $$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}.$$

   Тогда ее первая производная может быть найдена по формуле $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$.

Из определения второй производной будем иметь:

$$y''_{xx} = (y'_x)'_t \cdot t'_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}.$$

Таким образом,

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}.$$

Аналогично получаем:

$$y'''_{xxx} = \frac{(y''_{xx})'_t}{x'_t}.$$

Пример. Продифференцировать дважды функцию:

$$\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = t^2 \end{cases}$$

Находим:

$$x'_t = \frac{1}{1+t^2} \cdot 2t, \quad y'_t = 2t.$$

Таким образом, получаем

$$y'_x = \frac{2t}{\frac{1}{1+t^2} \cdot 2t} = 1 + t^2.$$

Тогда

$$y''_{xx} = \frac{(2t)'}{\frac{1}{1+t^2} \cdot 2t} = \frac{2}{\frac{1}{1+t^2} \cdot 2t} = \frac{1+t^2}{t}.$$

2.1.10. Логарифмическое дифференцирование

В ряде случаев прежде чем функцию продифференцировать, необходимо ее пролагарифмировать. Такая операция называется логарифмическим дифференцированием.

Ее используют в случае, когда функция представляет собой произведение и частное нескольких функций, а также в случае, когда функция является показательно-степенной.

Рассмотрим на примерах применение логарифмического дифференцирования.

1. Найти производную функции

$$y = \frac{(x^2+4x) \cdot (x^5-2)}{\sqrt[3]{x-2}}.$$

Для дифференцирования данной функции необходимо воспользоваться теоремой о дифференцировании произведения и частного, а можно найти производную с помощью логарифмического дифференцирования. Для этого вначале логарифмируем функцию:

$$\ln y = \ln \frac{(x^2+4x) \cdot (x^5-2)}{\sqrt[3]{x-2}}.$$

Воспользуемся свойствами логарифма:

$$\ln y = \ln(x^2+4x) + \ln(x^5-2) - \ln(\sqrt[3]{x-2}).$$

Дифференцируем левую и правую часть, получаем:

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{2x+4}{(x^2+4x)} + \frac{5x^4}{(x^5-2)} - \frac{\frac{1}{3}(x-2)^{-\frac{2}{3}}}{(\sqrt[3]{x-2})}.$$

Откуда выражаем y' и получаем:

$$y' = y \cdot \frac{2x+4}{(x^2+4x)} + \frac{5x^4}{(x^5-2)} - \frac{\frac{1}{3}(x-2)^{-\frac{2}{3}}}{(\sqrt[3]{x-2})}$$

$$y' = \frac{(x^2+4x)\cdot(x^5-2)}{\sqrt[3]{x-2}} \cdot \left(\frac{2x+4}{(x^2+4x)} + \frac{5x^4}{(x^5-2)} - \frac{1}{3(x-2)} \right).$$

2. Найти производную степенно-показательной функции

$$y = (3x)^{\cos x}.$$

Итак, вначале логарифмируем функцию:

$$\ln y = \ln((3x)^{\cos x})$$

Воспользуемся свойствами логарифма:

$$\ln y = \cos x \cdot \ln(3x).$$

Дифференцируем левую и правую часть, получаем:

$$\frac{1}{y} \cdot y' = (\cos x)' \cdot \ln(3x) + \cos x \cdot (\ln 3x)'$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = -\sin x \cdot \ln(3x) + \cos x \cdot \frac{3}{3x}$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = -\sin x \cdot \ln(3x) + \cos x \cdot \frac{1}{x}$$

Откуда выражаем y' и получаем:

$$y' = y \cdot \left(-\sin x \cdot \ln(3x) + \cos x \cdot \frac{1}{x} \right)$$

$$y' = (3x)^{\cos x} \cdot \left(-\sin x \cdot \ln(3x) + \cos x \cdot \frac{1}{x} \right).$$

2.2. Дифференциал функции

2.2.1. Понятие дифференциала функции в точке

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, т.е. существует предел:

$$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = f'(x_0) \neq 0.$$

Тогда по теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой функции, имеем:

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = f'(x_0) + \alpha(\triangle x), \text{ где } \alpha(\triangle x) \to 0 \text{ при } \triangle x \to 0.$$

Умножим на $\triangle x$ обе части последнего равенства:

$$\triangle y = f'(x_0) \cdot \triangle x + \alpha(\triangle x) \cdot \triangle x. \tag{1}$$

Итак, приращение функции представляет собой сумму двух слагаемых, являющихся бесконечно малыми при $\triangle x \to 0$. При этом первое слагаемое есть б.м.ф. одного порядка с $\triangle x$, а второе слагаемое есть б.м.ф. более высокого порядка малости, чем $\triangle x$. Поэтому первое слагаемое $f'(x_0) \cdot \triangle x$ в равенстве (1) называют главной частью приращения функции $\triangle y$.

Дифференциалом функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется **главная часть ее приращения**, равная произведению производной функции на приращение аргумента. Обозначается дифференциал: $df(x_0)$.

Таким образом,

$$df(x_0) = f'(x_0) \cdot \triangle x. \tag{2}$$

Таким образом, дифференциал функции $y = f(x)$ можно найти по формуле:

$$dy = y' \cdot \triangle x \tag{3}$$

Очевидно, что $\triangle x = dx$. Действительно, для функции $y = x$ по формуле (3) получаем:

$$dx = x' \cdot \triangle x, \;\; x' = 1 \Rightarrow dx = \triangle x.$$

Следовательно, формула (3) может быть записана в форме (4).

$$dy = y' \cdot dx \tag{4}$$

Формула (4) дает способ нахождения дифференциала функции $y = f(x)$.

Пример. Найти дифференциал функции $y = 5\sin x^3$.

Применяя соответствующие формулы, будем иметь :

$$y' = (5\sin x^3)' = 5\cos x^3 \cdot 3x^2 = 15\cos x^3 \cdot x^2.$$

$$dy = 15x^2 \cdot \cos x^3 \cdot dx.$$

Выясним геометрический смысл дифференциала функции в точке.

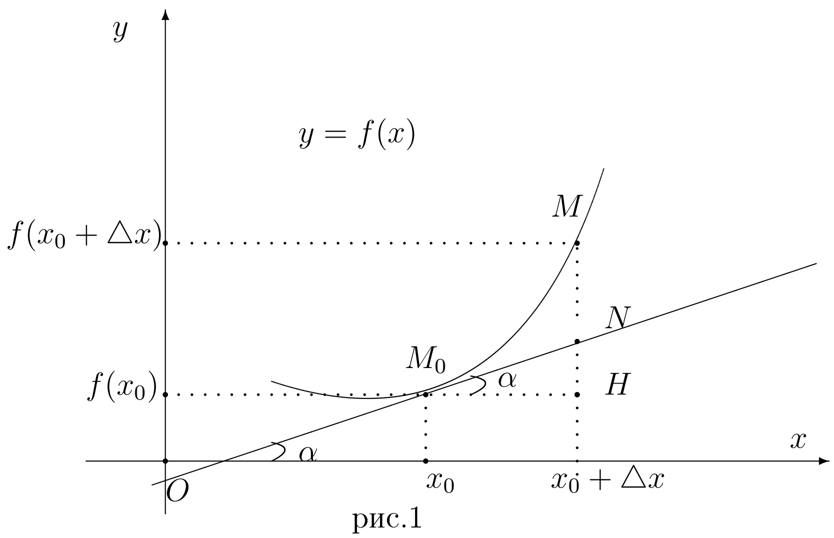


рис.1

Из прямоугольного треугольника получаем:

$$\triangle M_0HN, \quad \angle H = \frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{NH}{M_0H} \Rightarrow NH = M_0H \cdot \operatorname{tg}\alpha$$

$$M_0H = \triangle x, \quad \operatorname{tg}\alpha = f'(x_0) \Rightarrow$$

$$NH = f'(x_0) \cdot \triangle x \tag{5}$$

$$df(x_0) = f'(x_0) \cdot \triangle x.$$

Сравнивая правые части равенств (2) и (5), получаем, что $NH = df(x_0)$.

Таким образом, дифференциал функции $y = f(x)$ в точке x_0 равен **приращению ординаты касательной** после того, как аргумент x_0 получил приращение $\triangle x$. В этом и состоит гометрический смысл дифференциала функции в точке.

2.2.2. Применение дифференциала к приближенным вычислениям

Выше нами было получено следующее равенство

$$\triangle y = f'(x) \cdot \triangle x + \alpha(\triangle x) \cdot \triangle x,$$

где $\alpha(\triangle x) \to 0$ при $\triangle x \to 0$. Это равенство можно записать в виде

$$\triangle y = dy + \alpha(\triangle x) \cdot \triangle x.$$

Отбросим б.м.ф. $\alpha(\triangle x) \cdot \triangle x$, получим приближенное равенство $\triangle y \approx dy$. Указанное равенство тем точнее, чем меньше величина $\triangle x$.

$$f(x_0 + \triangle x) - f(x_0) \approx f'(x_0) \cdot \triangle x.$$

$$f(x_0 + \triangle x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \triangle x.$$

Пример. Вычислить приблизительно $\operatorname{arctg} 1,05$.

Решение.

Для вычисления значения функции применим формулу, указанную выше:

$$y = \operatorname{arctg} x \text{ тогда } \operatorname{arctg}(x_0 + \triangle x) \approx \operatorname{arctg} x_0 + (\operatorname{arctg} x)'(x_0) \cdot \triangle x$$

$$\operatorname{arctg}(x_0 + \triangle x) \approx \operatorname{arctg} x_0 + \frac{\triangle x}{1 + x_0^2}.$$

Так как $x_0 + \triangle x = 1,05$, то при $x_0 = 1$ и $\triangle x = 0,05$, получаем:

$$\operatorname{arctg}(1,05) \approx \operatorname{arctg} 1 + \frac{0,05}{1 + 1^2} \approx \frac{\pi}{4} + \frac{0,05}{2} \approx \frac{\pi}{4} + 0,025$$
$$\operatorname{arctg}(1,05) \approx 0,810.$$

2.2.3. Дифференциал сложной функции

Пусть $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$. Тогда $f(\varphi(x))$ — сложная функция.

По теореме 2(о производной сложной функции) имеем

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

Найдем дифференциал сложной функции:

$$dy = y' \cdot dx = y'_u \cdot \underbrace{u'_x \cdot dx} = y'_u \cdot du.$$

Заметим, что $du = u'_x \cdot dx$.

Итак, что форма дифференциала сложной функции ничем не отличается от формы дифференциала функции, не являющейся сложной. Это свойство дифференциала сохранять форму называется **инвариантностью** формы первого дифееренциала.

2.2.4. Основные теоремы о свойствах дифференциала. Дифференциалы высших порядков

Теорема 1.

1. $$d(u + v) = du + dv;$$

2. $$d(uv) = v \cdot du + u \cdot dv;$$

3. $$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}.$$

Теорема 2.

Дифференциал сложной функции $y(u(x))$ равен производной этой функции по промежуточному аргументу на дифференциал этого промежуточного аргумента.

$$d(y(u)) = y'_u \cdot du.$$

Дифференциалом n-го порядка $d^n y$ функции $y = f(x)$ называется дифференциал от дифференциала $n-1$ — порядка этой функции, то есть

$$d^n y = d(d^{n-1}y).$$

Распишем подробно для функции $y = f(x)$:

$$dy = f'(x)dx$$
$$d^2y = d(dy) = d(f'(x)dx)$$

$$d^2y = d(f'(x)dx) = dx \cdot d(f'(x)) = dx \cdot f''(x)dx = f''(x)dx^2.$$

Обобщая полученные формулы, имеем формулу для дифференциала n-го порядка:

$$d^n y = f^{(n)}(x)dx^n.$$

2.3. Основные теоремы о дифференцируемых функциях

Теорема 1 (Ролля). Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, дифференцируема на (a, b) и на концах отрезка принимает одинаковые значения $f(a) = f(b)$. Тогда существует хотя бы одна точка $c \in (a, b)$, в которой производная $f'(c) = 0$.

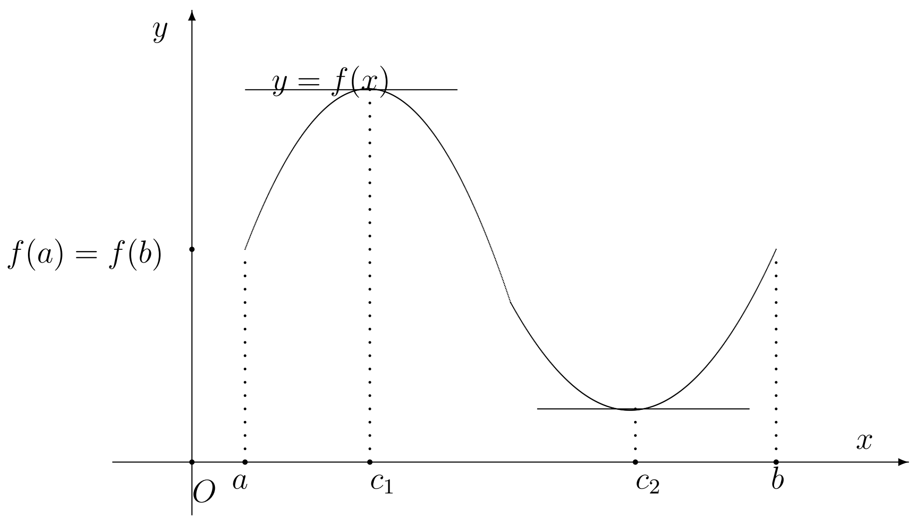


рис.1

Геометрически теорема означает, что на графике функции $y = f(x)$ найдется точка, в которой касательная к графику параллельна оси Ox.

Теорема 2 (Коши). Пусть функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ непрерывны на $[a, b]$, дифференцируемы на (a, b), причем $g'(x) \neq 0$ для $x \in (a, b)$. Тогда найдется хотя бы одна точка

$c \in (a, b)$ такая, что выполняется равенство:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Частным случаем теоремы Коши является теорема Лагранжа.

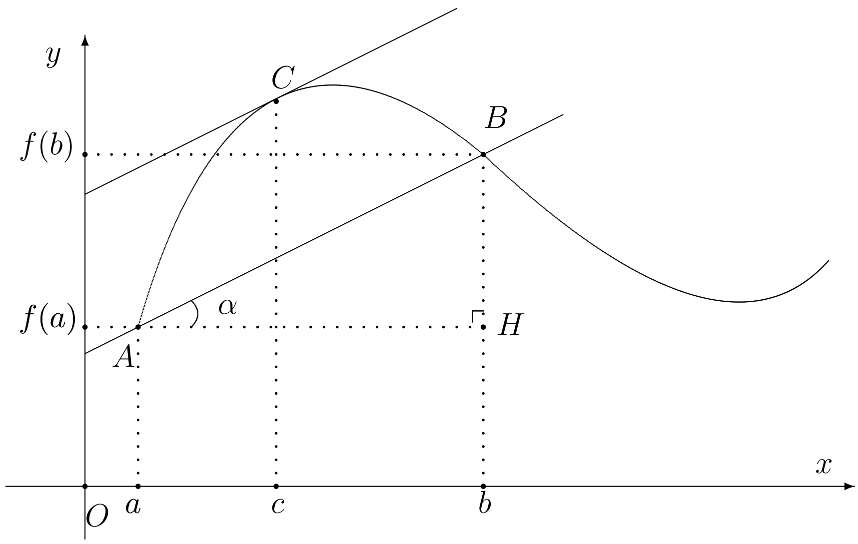
Теорема 3 (Лагранжа). Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, дифференцируема на (a, b). Тогда найдется хотя бы одна точка $c \in (a, b)$ такая, что выполняется равенство

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a).$$

Запишем последнее равенство в виде:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Здесь величина $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ — угловой коэффициент секущей, а $f'(c)$ — угловой коэффициент касательной к кривой в точке C абсциссой $x = c$ (см. рис. ниже).



Из прямоугольного треугольника $\triangle AHB$, в котором $\angle H = \frac{\pi}{2}$ получаем:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{BH}{AH} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Следовательно, геометрический смысл теоремы Лагранжа состоит в следующем: на графике функции $y = f(x)$ найдется точка $C(c; f(c))$, в которой касательная к графику функции параллельна секущей AB.

*Следствие 1.*Если производная функции равна нулю на некотором промежутке, то функция постоянна на этом промежутке. Действительно, предположим, что $f'(x) = 0$ для любого $x \in (a, b)$. Возьмем произвольные точки x_1, $x_2 \in (a, b)$ и пусть $x_1 < x_2$. Тогда по теореме Лагранжа существует точка $c \in (x_1, x_2)$ такая, что $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$. Но по условию $f'(x) = 0$, а это означает, что $f'(c) = 0$, где $x_1 < c < x_2$. Поэтому имеем $f(x_2) - f(x_1) = 0$, т.е. $f(x_2) = f(x_1)$. А так как x_1 и x_2 — произвольные точки из интервала (a, b), имеем $f(x) = c$.

Следствие 2. Если две функции имеют равные производные на некотором промежутке, то они отличаются друг от друга на постоянное слагаемое.

Действительно, пусть $f_1'(x) = f_2'(x)$ при $x \in (a, b)$. Тогда $(f_1(x) - f_2(x))' = f_1'(x) - f_2'(x) = 0$. Следовательно, по следствию 1, функция $f_1(x) - f_2(x)$ есть постоянная, т.е. $f_1(x) - f_2(x) = C$ для любого $x \in (a, b)$.

Теорема 4 (Правило Лопиталя раскрытия неопределенности $\left[\frac{0}{0}\right]$). Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны и дифференцируемы в окрестности точки x_0 и обращаются в нуль в этой точке, т.е. $f(x_0) = \varphi(x_0 = 0$. Пусть $\varphi'(x) \neq 0$ в окрестности точки x_0.

$$\text{Тогда если существует предел } \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = l, \text{ то } \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = l.$$

Примеры.

1. Найдите значение предела:
$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(\cos x)}{x}.$$

Решение.
$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(\cos x)}{x} = \left[\frac{\ln(\cos 0)}{0}\right] = \left[\frac{\ln(1)}{0}\right] = \left[\frac{0}{0}\right]$$

Так как неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$, то применим правило Лопиталя, для этого найдем производную функции, стоящей в числителе, и производную функции, стоящей в знаменателе дроби.
$$(\ln(\cos x))' = \frac{-\sin x}{\cos x}, \quad x' = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(\cos x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{\sin x}{\cos x}}{1} = -\lim_{x \to 0} -\frac{\sin x}{\cos x} = 0.$$

2. Найдите значение предела:
$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x + 2\sin x - 3x}{x^5}$$

Решение.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x + 2\sin x - 3x}{x^5} = \left[\frac{\operatorname{tg} 0 + 2\sin 0 - 3 \cdot 0}{0^5}\right] = \left[\frac{0}{0}\right].$$

Применим правило Лопиталя, для этого найдем производную функции, стоящей в числителе, и производную функции, стоящей в знаменателе дроби.

$$(\operatorname{tg} x + 2\sin x - 3x)' = \frac{1}{\cos^2 x} + 2\cos x - 3 \text{ и } (x^5)' = 5x^4.$$

И найдем предел их отношения при $x \to 0$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} + 2\cos x - 3}{5x^4} = \left[\frac{1 + 2 - 3}{0}\right] = \left[\frac{0}{0}\right].$$

Еще раз применим правило Лопиталя:

$$\left(\frac{1}{\cos^2 x} + 2\cos x - 3\right)' = \frac{2\sin x}{\cos^3 x} - 2\sin x, \quad (5x^4)' = 20x^3.$$

Получаем

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{2\sin x}{\cos^3 x} - 2\sin x}{20x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin x\left(\frac{1}{\cos^3 x} - 1\right)}{20x^3} = \frac{1}{10}\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}\frac{\left(\frac{1}{\cos^3 x} - 1\right)}{x^2}$$

По первому замечательному пределу $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$, поэтому остается

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{10}\dfrac{\left(\frac{1}{\cos^3 x} - 1\right)}{x^2} = \left[\dfrac{0}{0}\right] =$ еще раз дифференцируем числитель и знаменатель

$$= \frac{1}{10}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3\sin x}{\cos^4 x}}{2x}$$

$\dfrac{3}{20}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\dfrac{1}{\cos^4 x}$ применяя первый замечательный предел, получаем

$$\frac{3}{20}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos^4 x} = \frac{3}{20}.$$

Теорема 5 (Правило Лопиталя раскрытия неопределенности $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$). Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны и дифференцируемы в окрестности точки x_0 (кроме может быть самой точки) и пусть в этой окрестности

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0}\varphi(x) = \infty, \ \varphi'(x) \neq 0.$$

Если существует предел $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$.

Примеры.

1. Найдите предел:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}.$$

Решение.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0.$$

2. Найдите предел:

$$\lim_{x\to+\infty}(5x^3 + 6x^2 + 2)e^{-2x}$$

Решение.

$$\lim_{x\to+\infty}(5x^3 + 6x^2 + 2)e^{-2x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{5x^3 + 6x^2 + 2}{e^{2x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(5x^3 + 6x^2 + 2)'}{(e^{2x})'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{15x^2 + 12x}{2e^{2x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{(15x^2 + 12x)'}{(2e^{2x})'} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{30x + 12}{4e^{2x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{(30x + 12)'}{(4e^{2x})'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{30}{8e^{2x}} = 0.$$

2.3.1. Интервалы монотонности функции. Точки экстремума

Напомним ряд определений.

Пусть функция $y = f(x)$ определена на некотором множестве D и пусть $D_1 \subset D$. Функция $y = f(x)$ называется **возрастающей** на множестве D_1, если $\forall x_1, x_2 \in D_1$ из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) < f(x_2)$.

Функция $y = f(x)$ называется **неубывающей** на множестве D_1, если $\forall x_1, x_2 \in D_1$ из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) \le f(x_2)$.

Функция $y = f(x)$ называется **убывающей** на множестве D_1, если $\forall x_1, x_2 \in D_1$ из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) > f(x_2)$.

Функция $y = f(x)$ называется **невозрастающей** на множестве D_1, если $\forall x_1, x_2 \in D_1$ из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) \ge f(x_2)$.

Для монотонных функций справедливы следующие утверждения.

Теорема 1 (Необходимые условия возрастания и убывания функций).

Если дифференцируемая на интервале (a, b) функция $f(x)$ возрастает (убывает), то $f'(x) \ge 0$ $(f'(x) \le 0)$ для всех $x \in (a, b)$.

*Доказательство.*Пусть $f(x)$ возрастает при $x \in (a, b)$. Возьмем произвольные точки x_0 и $x_0 + \triangle x$ на (a, b) и рассмотрим отношение

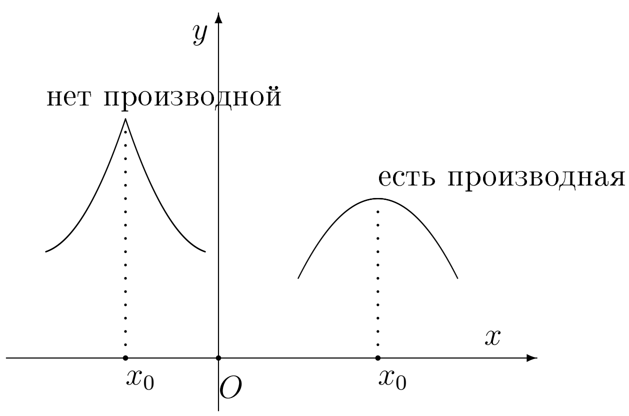
$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)}{\triangle x}.$$

Т.к. $f(x)$ возрастает, поэтому если $\triangle x > 0$, то $x_0 + \triangle x > x_0$ и $f(x_0 + \triangle x) > f(x_0)$; если $\triangle x < 0$, то $x_0 + \triangle x < x_0$ и $f(x_0 + \triangle x) < f(x_0)$. В обоих случаях $\frac{\triangle y}{\triangle x} > 0$, т.к. числитель и знаменатель имеют одинаковые знаки. По условию теоремы фунция имеет производную в точке x_0 и является пределом отношения. Следовательно, $f'(x_0) \ge 0$.

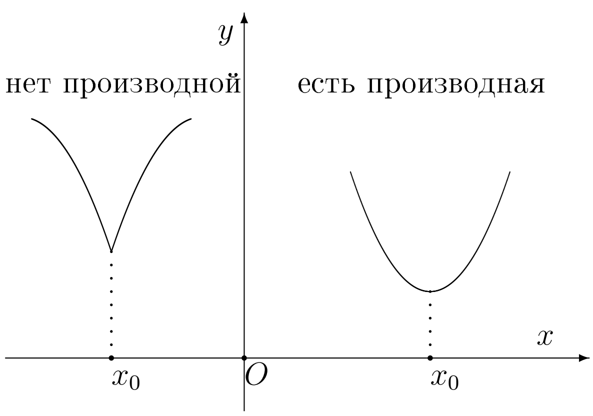
Геометрически теорема означает, что касательные к графику возрастающей дифференцируемой функции образуют острые углы с положительным направлением оси Ox или в некоторых точках параллельны оси.

Теорема 2 (Достаточные условия возрастания и убывания функций).

Если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b) и $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$ для всех $x \in (a, b)$, то эта функция возрастает (убывает) на (a, b).



x_0 - точка максимума



x_0 - точка минимума

Определение 1. Точка x_0 называется **точкой максимума** функции $y = f(x)$, если для всех точек $x \neq x_0$ из некоторой окрестности точки x_0 выполняется неравенство

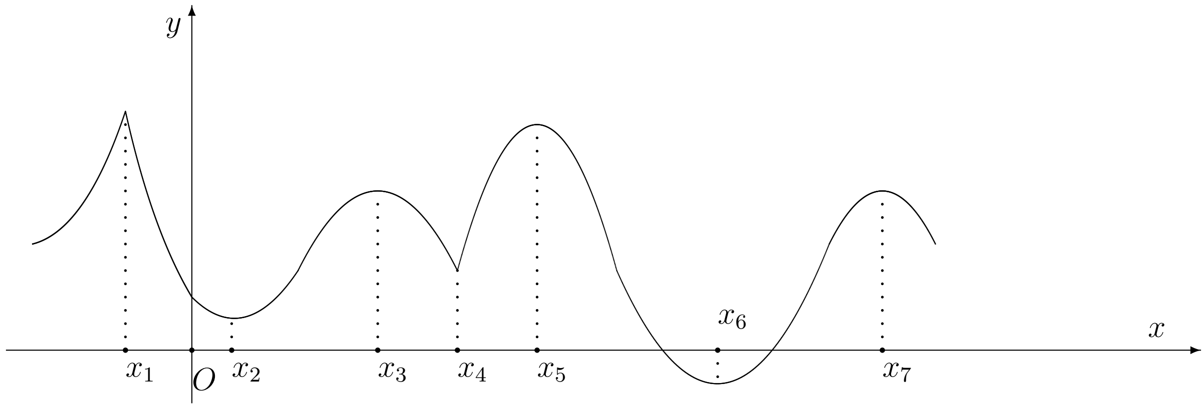
$$f(x) < f(x_0) \qquad (1)$$

Аналогично, точка x_0 называется **точкой минимума** функции $y = f(x)$, если для всех точек $x \neq x_0$ из некоторой окрестности точки x_0 выполняется неравенство

$$f(x) > f(x_0) \qquad (2)$$

Точка максимума и точка минимума объединяются общим термином **точки экстремума**.

Понятие точки экстремума имеет локальный характер. Неравенства (1) и (2) выполняются только в некоторой окрестности точки x_0. Функция может иметь несколько точек максимума и минимума.



x_1, x_3, x_5, x_7 - точки максимума
x_2, x_4, x_6 - точки минимума

Значение функции в точке экстремума называется **экстремумом функции**.

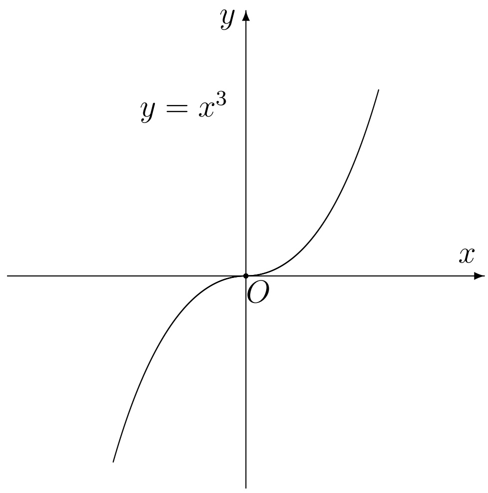
Теорема 3. (Необходимые условия экстремума функций.)
Если дифференцируемая в точке x_0 функция $f(x)$ имеет экстремум в точке x_0, то ее производная в этой точке равна нулю, т.е. $f'(x_0) = 0$.

Геометрически теорема означает, что касательная к графику функции в точке экстремума параллельна оси Ox.

Точки, в которых производная функции равна нулю, называются **стационарными**.

Теорема 3 дает лишь необходимое, но не достаточное условие существования экстремума функции.

Пример. Рассмотрим функцию $y = x^3$. Найдем ее производную $y' = 3x^2$. Приравняем производную к нулю: $y' = 0 \Rightarrow 3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$. Итак, в точке $x = 0$ производная функции равна нулю, но функция не имеет в этой точке ни максимума, ни минимума (см. рис. ниже).



Кроме того, функция может иметь экстремум в тех точках из $D(f)$, в которых производная не существует.

Точки из области определения функции f (точки из $D(f)$), в которых производная функции равна нулю или не существует, называются **критическими точками**.

Теорема 4. (Достаточные условия экстремума функций.)
Пусть точка x_0 является стационарной точкой дифференцируемой функции $y = f(x)$. Тогда:

1. если при переходе слева направо через точку x_0 производная $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус, то x_0 есть точка максимума;

2. если при переходе слева направо через точку x_0 производная $f'(x)$ меняет знак с минуса на плюс, то x_0 есть точка минимума.

2.3.2. Выпуклость графика функции. Точки перегиба

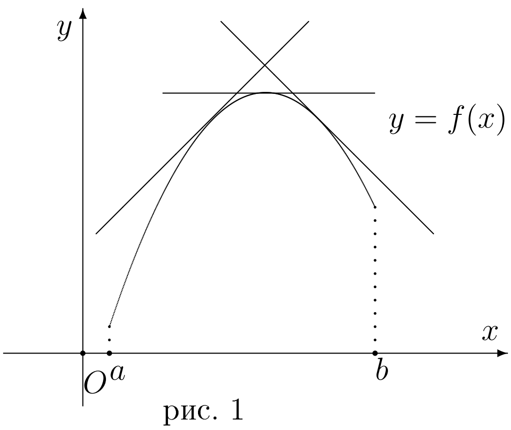


рис. 1

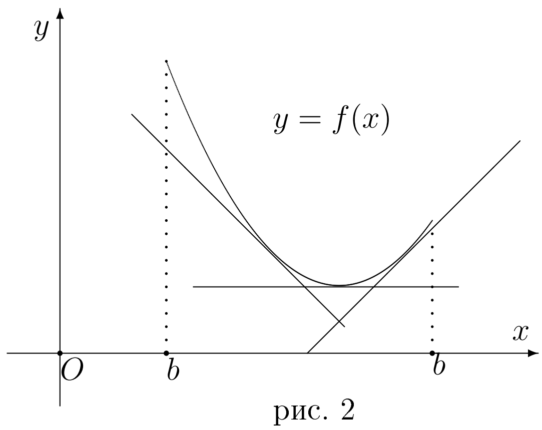


рис. 2

График дифференцируемой функции $y = f(x)$ называется **выпуклым вниз (вогнутым) на** (a, b), если он расположен выше любой ее касательной на этом интервале. График функции $y = f(x)$ называется **выпуклым вверх (выпуклым) на** (a, b), если он расположен ниже любой ее касательной на этом интервале.

Точка графика непрерывной функции $y = f(x)$, отделяющая его части разной выпуклости, называется **точкой перегиба**.

Для второй производной функции справедливы следующие теоремы:

Теорема 1. Если функция $y = f(x)$ во всех точках интервала (a, b) имеет отрицательную вторую производную, т.е. $f''(x) < 0$, то график функции в этом интервале выпуклый вверх. Если $f''(x) > 0$ для любого $x \in (a, b)$, то график выпуклый вниз (вогнутый).

Теорема 2.(Достаточное условие существования точек перегиба.) Если вторая производная $f''(x)$ при переходе через точку $x_0 \in D(f)$, в которой она равна нулю или не существует, меняет знак, то точка x_0 является точкой перегиба.

Пример.

1. Найти точки перегиба и направления выпуклости для графика функции

$$y = x^2 + \frac{1}{x^2}.$$

Решение. Итак, область определения функции: $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Находим

$$y' = 2x - \frac{2}{x^3}, \text{ тогда } y'' = 2 + \frac{6}{x^4}.$$

Далее, приравниваем вторую производную к нулю:

$$2 + \frac{6}{x^4} = 0, \text{ следовательно,} 2x^4 + 6 = 0, \ x^4 = -3 \text{ корней нет.}$$

Следовательно, точек перегиба нет. Таким образом, остается проверить направление выпуклости графика функции слева и справа от точки $x = 0$.

Возьмем $x = -1$, имеем

$$y''(-1) = 2 + \frac{6}{(-1)^4} = 2 + 6 = 8 > 0.$$

Возьмем $x = 1$, имеем

$$y''(1) = 2 + \frac{6}{(1)^4} = 2 + 6 = 8 > 0.$$

Таким образом, на всей области определения выпуклость графика функции $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$ направлена вниз.

2. Найти точки перегиба для графика функции

$$y = \frac{x^3}{x^2 - 4}$$

Итак, область определения функции: $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$.

Находим

$$y' = \frac{x^4 - 12x^2}{(x^2 - 4)^2}, \text{ тогда } y'' = \frac{4x^5 - 28x^3 + 92x}{(x^2 - 4)^3}.$$

Далее, приравниваем вторую производную к нулю:

$$\frac{4x^5 - 28x^3 + 92x}{(x^2-4)^3} = 0,$$

следовательно,

$$4x(x^4 - 7x^2 + 23) = 0, \ x = 0 \text{ или } (x^4 - 7x^2 + 23) = 0.$$

Но уравнение $(x^4 - 7x^2 + 23) = 0$ не имеет корней. Таким образом, на наличие перегиба остается проверить точку $x = 0$, а также исследовать направление выпуклости графика функции на промежутках $x \in (-\infty; -2)$ и $(2; +\infty)$.

Возьмем

$$x = -3 \in (-\infty; -2), \text{ имеем } y''(-3) = \frac{4(-3)^5 - 28(-3)^3 + 92(-3)}{((-3)^2-4)^3} < 0.$$

Возьмем

$$x = 3 \in (2; +\infty), \text{ имеем } y''(3) = \frac{4(3)^5 - 28(3)^3 + 92(3)}{((3)^2-4)^3} > 0.$$

Возьмем

$$x = 1 \in (0; 2), \text{ имеем } y''(1) = \frac{4(1)^5 - 28(1)^3 + 92(1)}{((1)^2-4)^3} < 0.$$

Возьмем

$$x = -1 \in (-2; 0), \text{ имеем } y''(-1) = \frac{4(-1)^5 - 28(-1)^3 + 92(-1)}{((-1)^2-4)^3} > 0.$$

Таким образом, так как вторая производная поменяла знак, то при $x \in (-\infty; -2)$ и при $x \in (0; 2)$ выпуклость графика функции направлена вверх, при $x \in (-2; 0)$ и при $x \in (2; +\infty)$ выпуклость графика функции направлена вниз, точка $x = 0$ является точкой перегиба.

2.3.3. Асимптоты графика функции

Асимптотой называется прямая, к которой неограниченно приближаются точки графика функции при их удалении от начала системы координат по кривой $y = f(x)$.

Асимптоты бывают:

1. Вертикальные
2. Наклонные (в частности, горизонтальные).

По области определения $D(f)$ можно сделать вывод, будут ли у графика функции вертикальные, наклонные, горизонтальные асимптоты. Например,

1. если $D(f) = [3; 5]$, то асимптот вертикальных не будет;
2. если $D(f) = (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$, то вертикальная асимптота может быть в точке $x = 2$;

3. если $D(f) = [1;4) \cup (4;5) \cup (5;6]$ то две вертикальные асимптоты , возможно, будут в точках $x = 4$ и $x = 5$;

4. если $D(f) = [1;2]$, то наклонных и горизонтальных асимптот не будет;

5. если $D(f) = (-\infty;2) \cup (5;+\infty)$, то могут быть наклонные или горизонтальные асимптоты при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$;

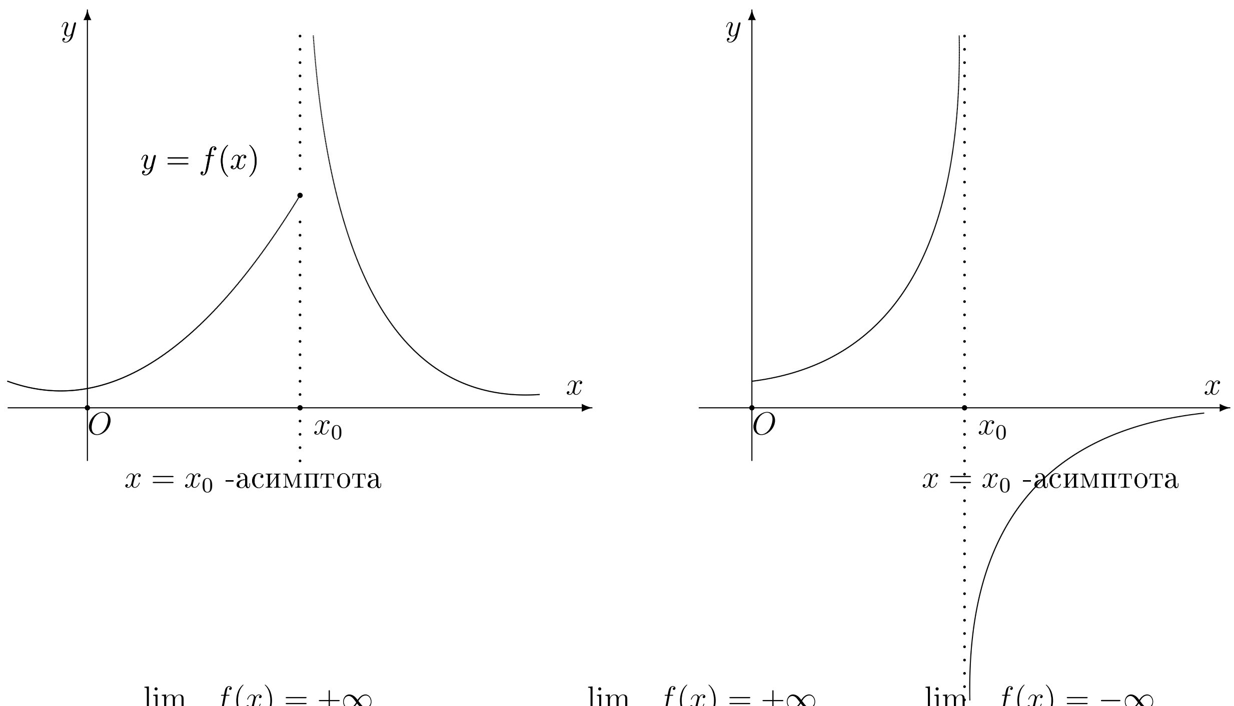
6. если $D(f) = [1;+\infty)$, то может быть наклонная или горизонтальная асимптота при $x \to +\infty$.

1. **Вертикальные асимптоты.**

   Прямая $x = x_0$ является вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов

   $$\lim_{x \to x_0+0} f(x), \quad \lim_{x \to x_0-0} f(x) - \text{ бесконечен.}$$

   График функции может иметь бесконечное число вертикальных асимптот (все зависит от области определения). Например, графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ имеют бесконечное число вертикальных асимптот.



$\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = +\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x) = +\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = -\infty$

2. **Наклонные асимптоты (в частности, горизонтальные.)** Прямая $y = kx + b$ является наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$, если существуют и конечны оба предела

   $$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ и } b = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - kx).$$

Аналогичным образом устанавливается у графика функции наличие наклонной (горизонтальной) асимптоты при $x \to -\infty$.

График функции может иметь максимум две наклонные асимптоты: одна при $x \to +\infty$, вторая при $x \to -\infty$.

При $k = 0$ получается горизонтальная асимптота $y = b$, если существует и конечен предел

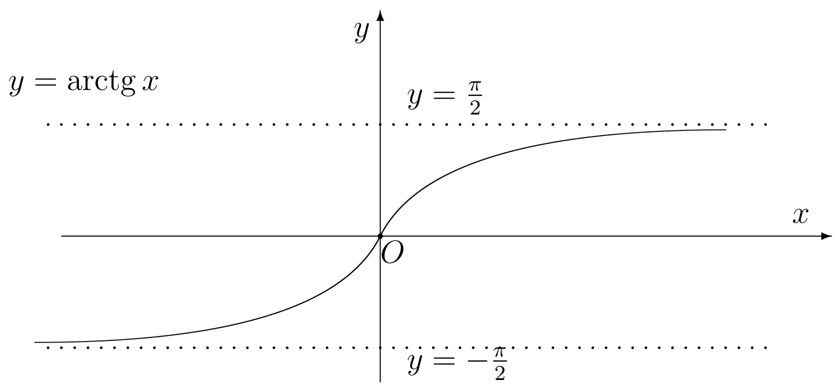
$$b = \lim_{x \to +\infty} f(x).$$

Аналогично, при $k = 0$ получается горизонтальная асимптота $y = b$, если существует и конечен предел

$$b = \lim_{x \to -\infty} f(x).$$

График функции может иметь максимум две горизонтальные асимптоты: одна при $x \to +\infty$, вторая при $x \to -\infty$.

Например, график функции $y = \operatorname{arctg} x$ имеет две горизонтальные асимптоты (см. рис. ниже).



2.3.4. Схема исследования функции и построения ее графика

1. Найти $D(f)$ — область определения функции $y = f(x)$.
2. Выяснить четность (нечетность) функции.
3. Найти точки пересечения графика функции с осями координат:
   (a) с осью Ox: $y = 0$.
   (b) с осью Oy: $x = 0$.
4. Найти интервалы знакопостоянства функции:
   (a) $f(x) > 0$ (график функции выше оси Ox);
   (b) $f(x) < 0$ (график функции ниже оси Oy).

5. Выяснить, есть ли у графика асимптоты:

   (a) вертикальные;

   (b) наклонные (горизонтальные).

6. Найти промежутки монотонности и точки экстремума функции $y = f(x)$. Для этого находим производную $f'(x)$ и решаем уравнение $f'(x) = 0$. Находим точки, в которых производная функции обращается в нуль или не существует.

7. Найти промежутки выпуклости, вогнутости графика функции и точки перегиба. Для этого находим производную $f''(x)$ и решаем уравнение $f''(x) = 0$. Находим точки, в которых вторая производная функции обращается в нуль или не существует.

8. Используя результаты исследований 1-7, построить график функции $y = f(x)$.

Пример. Провести полное исследование и построить график функции

$$y = \frac{x^2 - 4}{x + 1}.$$

1. Так как функция имеет вид дроби, то $x + 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$. Следовательно, $D(f) = (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$.

2. Т.к. $D(f)$ не симметрична относмительно т.O на числовой прямой, то функция не является ни четной, ни нечетной.

3. Точки пересечения с осями координат:

   (a) с осью Ox, $y = 0$

   $$\frac{x^2 - 4}{x + 1} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 4 = 0 \\ x + 1 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2,\ x = -2 \\ x \neq -1 \end{cases}$$

   Таким образом, точки пересечения с осью Ox: $(2; 0)$, $(-2, 0)$.

   (b) с осью Oy, $x = 0$

   $$y = \frac{0^2 - 4}{0 + 1} = \frac{-4}{1} = -4.$$

   Таким образом, точка пересечения с осью Oy: $(0, -4)$.

4. Интервалы знакопостоянства функции:

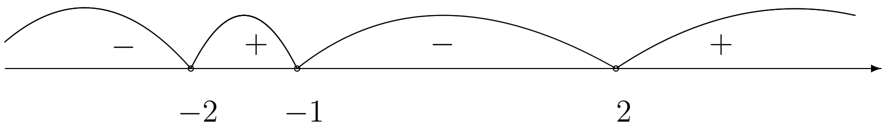
$$\frac{x^2 - 4}{x + 1} > 0 \Leftrightarrow \frac{(x - 2)(x + 2)}{x + 1} > 0 \Rightarrow$$

$$f(-3) = \frac{(-3)^2 - 4}{-3 + 1} = -\frac{5}{2} < 0$$

$$f\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 4}{\left(-\frac{3}{2}\right) + 1} = \frac{7}{2} > 0$$

$$f(0) = -4 < 0$$

$$f(3) = \frac{3^2 - 4}{3 + 1} = \frac{5}{4} > 0.$$



Таким образом, $y = f(x) > 0$ при $x \in (-2; -1) \cup (2; +\infty)$,
$y = f(x) < 0$ при $x \in (-\infty; -2) \cup (-1; 2)$.

5. Асимптоты.

   (a) Вертикальные.

$$\lim_{x \to -1-0} \frac{x^2 - 4}{x + 1} = \left| \begin{array}{c} \text{при } x \to -1 - 0 \\ x^2 - 4 \to -3 \\ x + 1 \to +0 \end{array} \right| = -\infty$$

$$\lim_{x \to -1+0} \frac{x^2 - 4}{x + 1} = \left| \begin{array}{c} \text{при } x \to -1 + 0 \\ x^2 - 4 \to -3 \\ x + 1 \to -0 \end{array} \right| = \infty$$

   Следовательно, точка $x = -1$ — точка разрыва II рода, прямая $x = -1$ — вертикальная асимптота.

   (b) Наклонные (горизонтальные).

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - 4}{x(x + 1)} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - 4}{x^2 + x} =$$

$$\left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1 - \frac{4}{x^2}}{1 + \frac{x}{x^2}} = \frac{1}{1} = 1.$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^2 - 4}{x + 1} - 1 \cdot x \right) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^2 - 4}{x + 1} - x \right) = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - 4 - x^2 - x}{x + 1} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-4 - x}{x + 1} = -1.$$

   Таким образом, прямая $y = x - 1$ — наклонная асимптота.

6. Найдем промежутки монотонности и точки экстремума функции

$$y = \frac{x^2 - 4}{x + 1}.$$

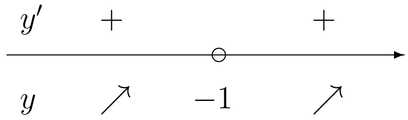
$$y' = \frac{(x^2 - 4)' \cdot (x + 1) - (x^2 - 4) \cdot (x + 1)'}{(x + 1)^2} = \frac{2x \cdot (x + 1) - (x^2 - 4) \cdot 1}{(x + 1)^2} =$$

$$= \frac{2x^2 + 2x - x^2 + 4}{(x + 1)^2} = \frac{x^2 + 2x + 4}{(x + 1)^2}$$

Решаем уравнение $y' = 0$:

$$\frac{x^2+2x+4}{(x+1)^2} = 0 \to \begin{cases} x^2+2x+4 \\ (x+1)^2 \neq 0 \end{cases} \to \begin{cases} D<0, \text{ корней нет} \\ x \neq -1 \end{cases}$$

Итак, y' не существует при $x = -1$, но эта точка не является критической для функции, т.к. $-1 \notin D(f)$.



Итак, функция возрастает на интервалах $(-\infty; -1)$ и $(-1; +\infty)$.

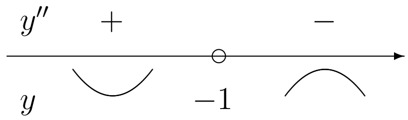
7. Найдем промежутки выпуклости, вогнутости графика функции и точки перегиба.

$$y'' = \left(\frac{x^2+2x+4}{(x+1)^2}\right)' = \frac{(x^2+2x+4)' \cdot (x+1)^2 - (x^2+2x+4) \cdot ((x+1)^2)'}{(x+1)^4} =$$

$$= \frac{(2x+2) \cdot ((x+1)^2) - (x^2+2x+4) \cdot 2 \cdot (x+1)}{(x+1)^4} = \frac{2(x+1)((x+1)^2 - x^2 - 2x - 4)}{(x+1)^4} =$$

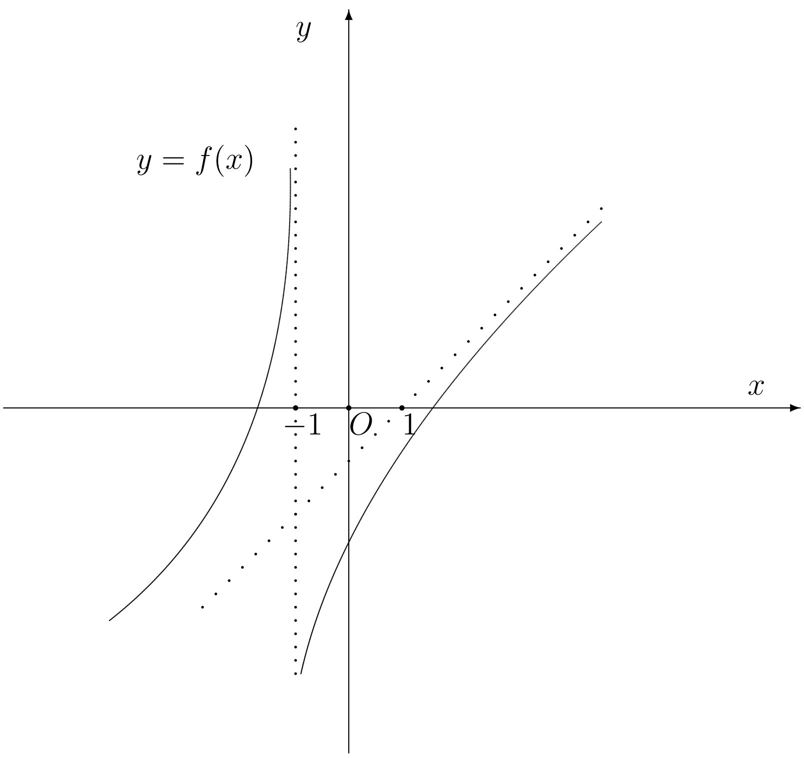
$$= 2 \cdot \frac{x^2+2x+1-x^2-2x-4}{(x+1)^3} = \frac{-6}{(x+1)^3}.$$

Уравнение $y'' = 0$ решений не имеет, но y'' не существует в точке $x = -1$. Следовательно точек перегиба график функции не имеет.



Итак, график функции вогнутый на $(-\infty; -1)$, выпуклый на $(-1; +\infty)$.

8. Используя результаты исследования 1-7, построим график.



2.3.5. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке $[a, b]$

Известно, что всякая непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция достигает на нем наибольшего и наименьшего значения (Теорема Вейерштрасса). Для того, чтобы найти эти значения, необходимо выполнить следующие действия:

1. найти критические точки функции на (a, b);
2. вычислить значения функции в найденных критических точках;
3. вычислить значения функции на концах отрезка, т.е. в точках $x = a$, $x = b$;
4. среди всех вычисленных значений функции выбрать наибольшее и наименьшее.

Пример. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x + 2\sqrt{x}$ на $[0; 4]$.

1. Найдем критические точки функции, принадлежащие $(0, 4)$. Для этого вычислим производную функции и приравняем ее к нулю.

$$y' = 1 + \frac{2}{2\sqrt{x}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$1 + \frac{1}{\sqrt{x}} = 0 \to \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 0 \to \begin{cases} 1 + \sqrt{x} = 0 - \text{ решений нет} \\ x \neq 0 \end{cases}$$

   Таким образом, функция не имеет критических точек, принадлежащих интервалу $(0, 4)$.

2. Найдем значения функции на концах отрезка:

$$y(0) = 0 + 2\sqrt{0} = 0, \quad y(4) = 4 + 2\sqrt{4} = 8.$$

3. Таким образом, получаем $y = 0$ — наименьшее значение функции на $[0; 4]$, $y = 8$ — наибольшее значение функции на $[0; 4]$.

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^4 - 2x^2 + 5$ на $[-2; 2]$.

1. Найдем критические точки функции, принадлежащие $(-2, 2)$. Для этого вычислим производную функции и приравняем ее к нулю.

$$y' = 4x^3 - 4x$$

$$4x^3 - 4x = 0 \Rightarrow 4x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{c} x = 0 \\ x^2 - 1 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{c} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 1 \end{array}\right. .$$

   Таким образом, функция имеет три критических точек, принадлежащих интервалу $(-2, 2)$.

2. Все найденные точки являются критическими, найдем значения функции в них:

$$y(-1) = (-1)^4 - 2(-1)^2 + 5 = 1 - 2 + 5 = 4, \quad y(0) = 0^4 - 2 \cdot 0^2 + 5 = 5, \quad y(1) = 1^4 - 2 \cdot 1^2 + 5 = 4$$

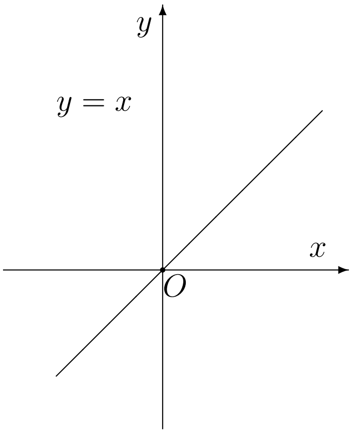
3. Найдем значения функции на концах отрезка:

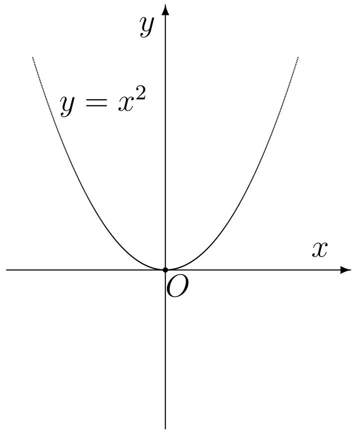
$$y(-2) = (-2)^4 - 2 \cdot (-2)^2 + 5 = 13, \quad y(2) = 13.$$

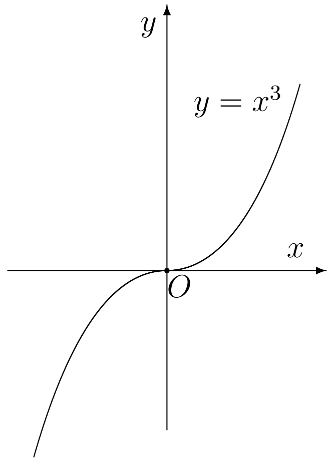
4. Таким образом, получаем $y = 4$ — наименьшее значение функции на $[-2; 2]$, $y = 13$ — наибольшее значение функции на $[-2; 2]$.

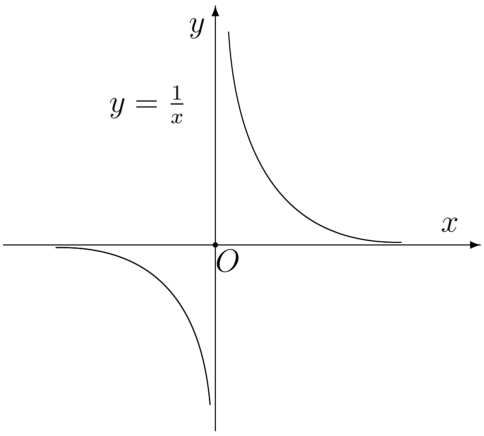
Таблица основных элементарных функций.

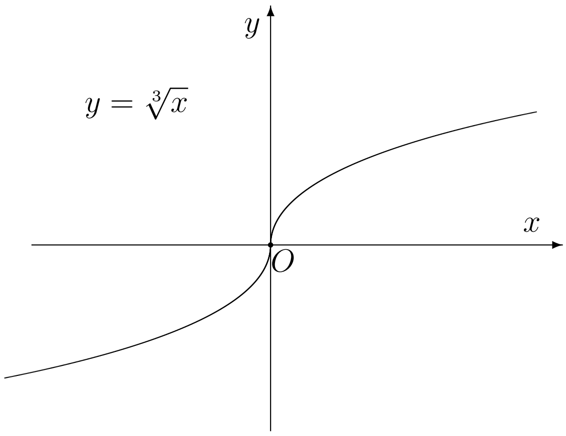
1. Степенная функция. $y = x^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

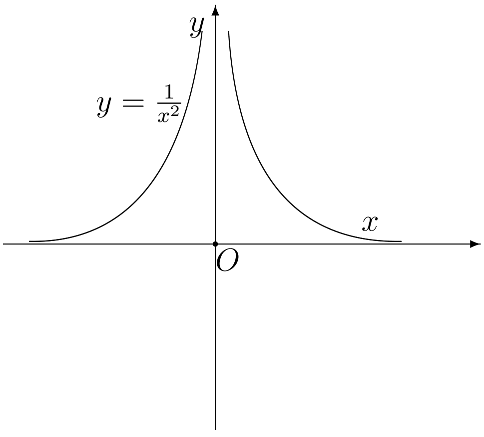


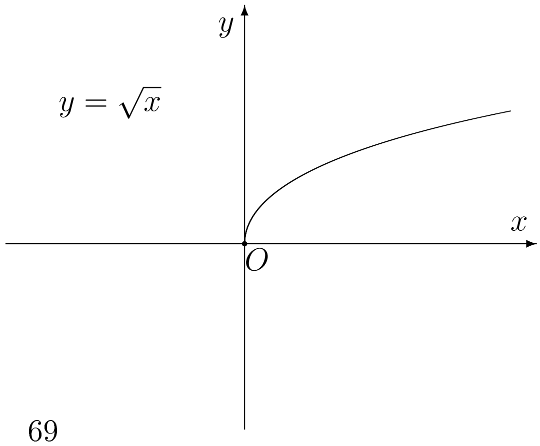




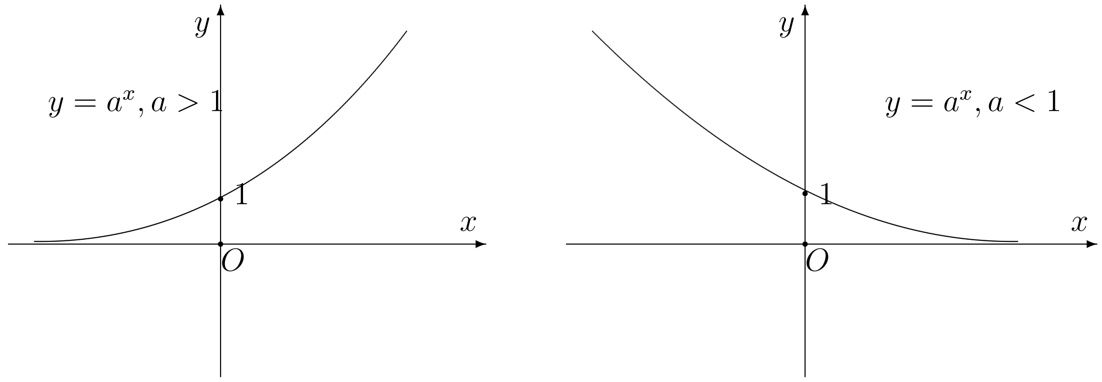




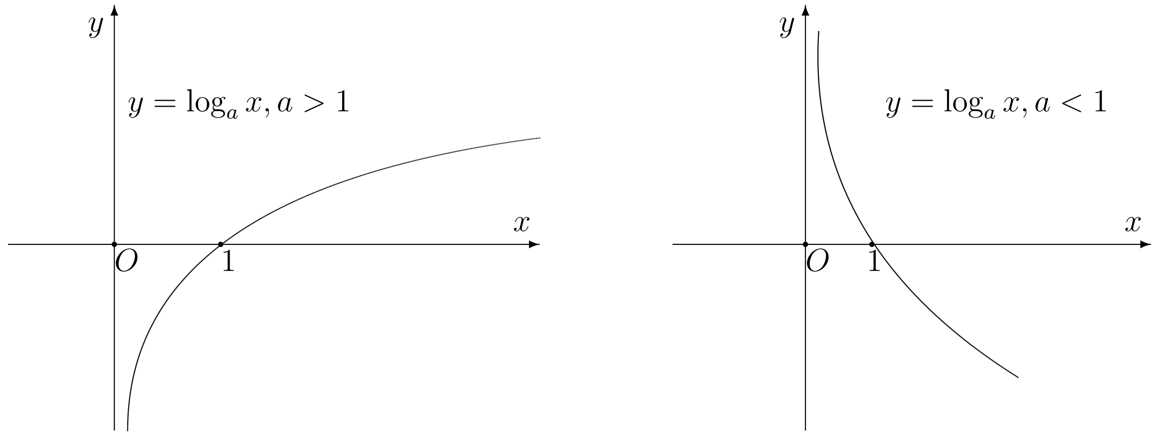




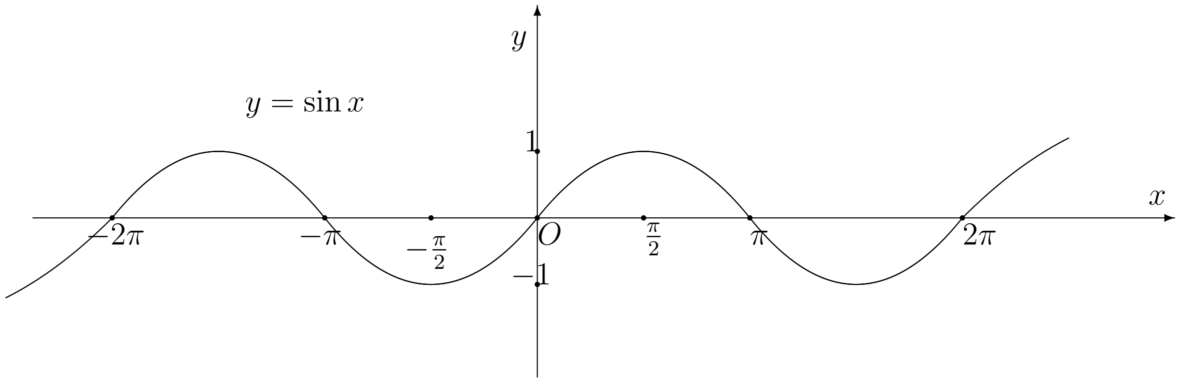
2. Показательная функция. $y = a^x$.

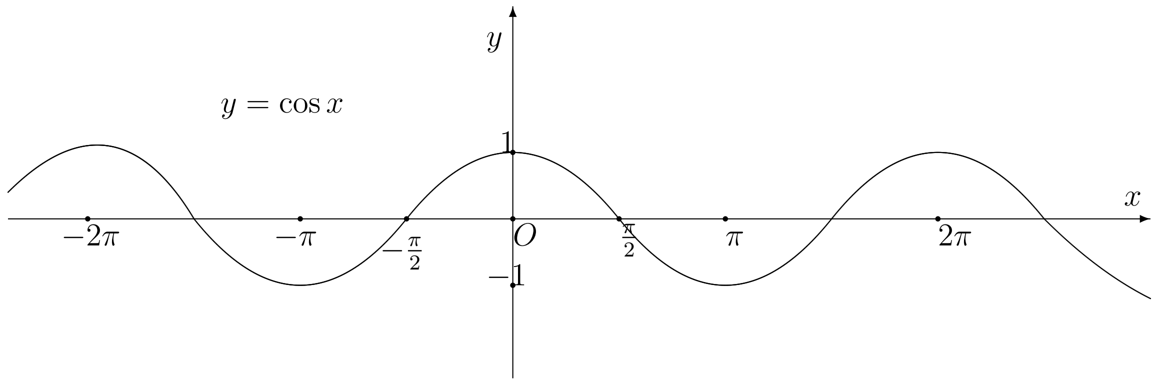


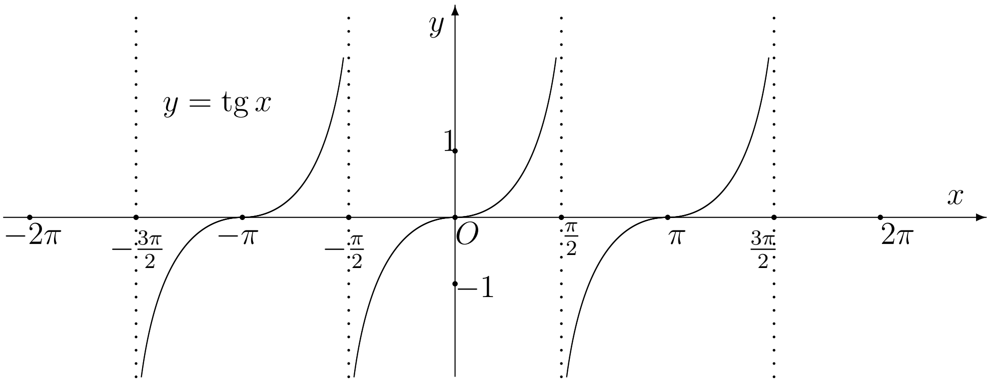
3. Логарифмическая функция. $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$.

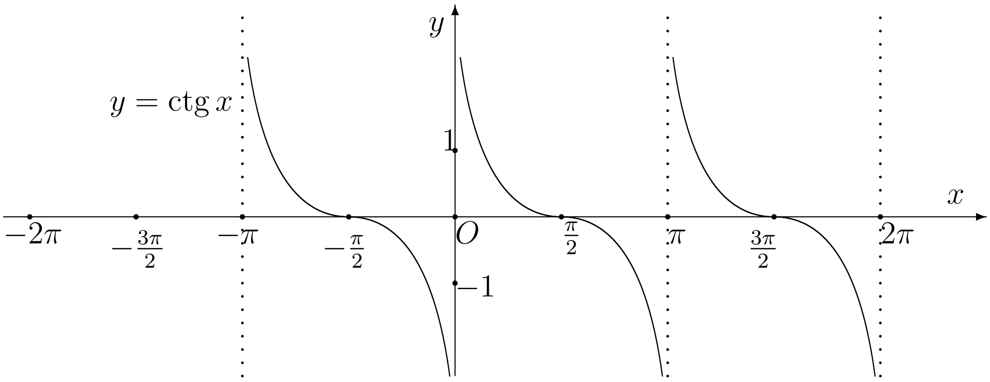


4. Тригонометрические функции. $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$.

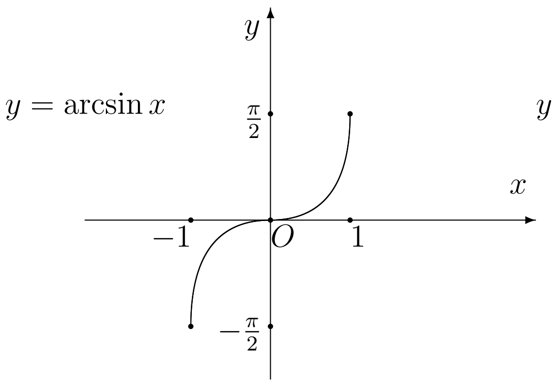


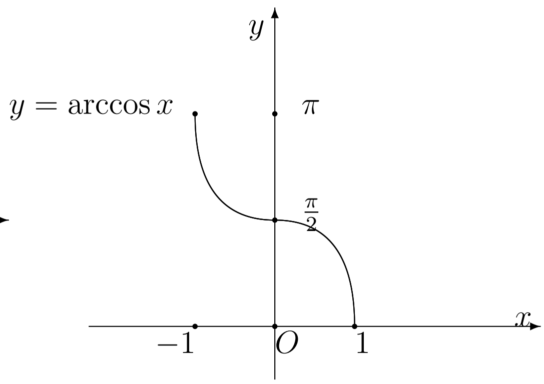


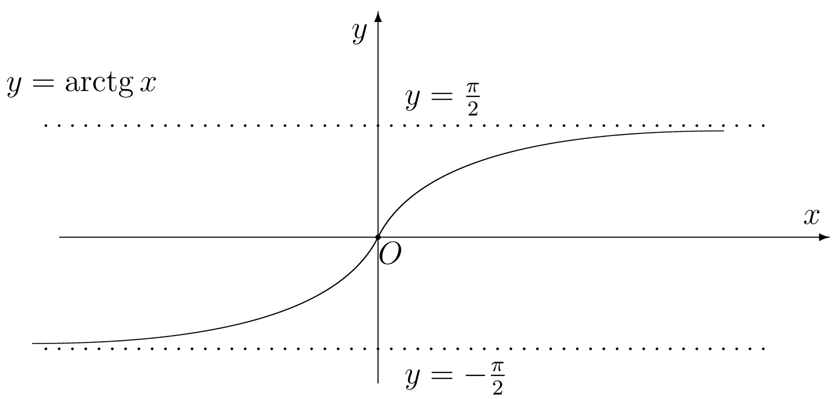


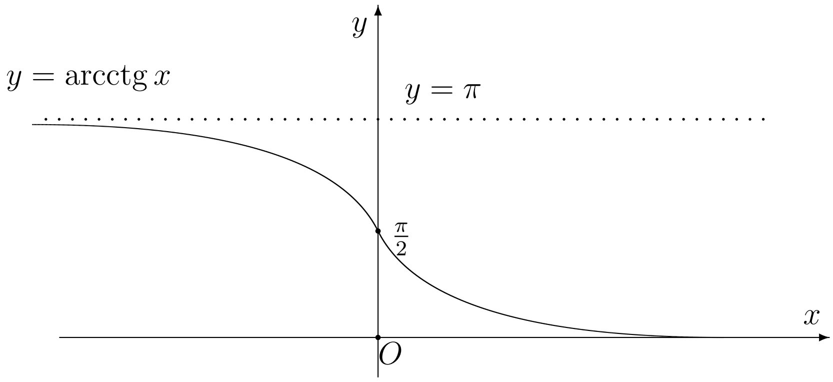


5. Обратные тригонометрические функции. $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$.








$y = \operatorname{arcctg} x$
y
$y = \pi$
$\frac{\pi}{2}$
x
O

3. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

3.1. Неопределенный интеграл

3.1.1. Понятие первообразной и неопределенного интеграла

Определение. Функция $F(x)$ называется **первообразной для функции** $f(x)$ на интервале $(a;b)$, если для любого $x \in (a;b)$ выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

Например, функция $F(x) = \sin x$ является первообразной для функции $f(x) = \cos x$. Действительно, $(\sin x)' = \cos x$. Функция $F(x) = \ln 3x + 5$ является первообразной для функции $f(x) = \frac{1}{x}$. Действительно, $F'(x) = (\ln 3x+5)' = \frac{1}{3x} \cdot 3 = \frac{1}{x}$. Функция $F(x) = \ln 3x - 7$ также является первообразной для функции $f(x) = \frac{1}{x}$. Действительно, $F'(x) = (\ln 3x - 7)' = \frac{1}{3x} \cdot 3 = \frac{1}{x}$. И вообще, любая функция вида $F(x) = \ln 3x + C$, где C — постоянная, является первообразной для функции $f(x) = \frac{1}{x}$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема. Если функции $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — две различные первообразные для функции $f(x)$ на некотором интервале $(a;b)$, то $F_1(x) - F_2(x) = C$.

Определение. Множество всех первообразных функции $f(x)$ (т.е. множество функций вида $F(x)+C$, где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$) называется **неопределенным интегралом** от $f(x)$ и обозначается $\int f(x)dx$.

Таким образом,

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

При этом функция $f(x)$ называется **подынтегральной функцией**, $f(x)dx$ — **подынтегральным выражением**, переменная x — **переменной интегрирования**, $\int$ — значок интеграла.

Для неопределенного интеграла справедлива следующая теорема.

Теорема. Если функция $y = f(x)$ — непрерывна, то для нее существует неопределенный интеграл.

3.1.2. Таблица основных интегралов

Операция нахождения неопределенного интеграла называется **интегрированием**.

Поскольку операция интегрирования обратна к операции дифференцирования, то с помощью таблицы производных можно получить таблицу интегралов.

Элементарные функции	Сложные функции
Степенная функция	*Степенная функция*
1. $\int dx = x + C$ 2. $\int dx = x + C$ 3. $\int \frac{dx}{x^\alpha} = -\frac{1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}},\ \alpha \neq 1$ 4. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \alpha \neq -1$ 5. $\int \frac{1}{x} dx = \ln\|x\| + C$ 6. $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C$	$\int du = u + C$ $\int du = u + C$ $\int \frac{du}{u^\alpha} = -\frac{1}{(\alpha-1)u^{\alpha-1}},\ \alpha \neq 1$ $\int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \alpha \neq -1$ $\int \frac{1}{u} du = \ln\|u\| + C$ $\int \frac{1}{\sqrt{u}} du = 2\sqrt{u} + C$
Показательные функции	*Показательные функции*
7. $\int e^x dx = e^x + C$ 8. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int e^u du = e^u + C$ $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$
Тригонометрические функции	*Тригонометрические функции*
9. $\int \sin x dx = -\cos x + C$ 10. $\int \cos x dx = \sin x + C$ 11. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$ 12. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C$	$\int \sin u du = -\cos u + C$ $\int \cos u du = \sin u + C$ $\int \frac{1}{\cos^2 u} du = \operatorname{tg} u + C$ $\int \frac{1}{\sin^2 u} du = -\operatorname{ctg} u + C$
Обратные тригонометрические функции	*Обратные тригонометрические функции*
13. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$ 14. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C$ 15. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + C$ 16. $\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$ 17. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = -\operatorname{arcctg} x + C$ 18. $\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = -\frac{1}{a} \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + C$ 19. $\int \frac{1}{x^2-a^2} dx = \frac{1}{2 \cdot a} \cdot \ln \left\| \frac{x-a}{x+a} \right\| + C$ 20. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} dx = \ln \|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\| + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du = \arcsin u + C$ $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-u^2}} du = \arcsin \frac{u}{a} + C$ $\int \frac{1}{1+u^2} dx = \operatorname{arctg} u + C$ $\int \frac{1}{a^2+u^2} du = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C$ $\int \frac{1}{1+u^2} du = -\operatorname{arcctg} u + C$ $\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = -\frac{1}{a} \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + C$ $\int \frac{1}{u^2-a^2} du = \frac{1}{2 \cdot a} \cdot \ln \left\| \frac{u-a}{u+a} \right\| + C$ $\int \frac{1}{\sqrt{u^2+a^2}} dx = \ln \|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\| + C$

Обоснуем некоторые строки таблицы, используя таблицу производных.

$$4.\ \left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)' = \left(\frac{1}{\alpha+1} \cdot x^{\alpha+1}\right)' = \frac{1}{\alpha+1} \cdot (\alpha+1) \cdot x^{\alpha+1-1} = x^\alpha.$$

$$5.\ \text{Если } x > 0, \text{ то } |x| = x \text{ и } (\ln|x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

$$\text{Если } x < 0, \text{ то } |x| = -x \text{ и } (\ln|x|)' = (\ln(-x))' = \frac{1}{-x}(-x)' = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}.$$

$$8.\ \left(\frac{a^x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a} \cdot (a^x)' = \frac{1}{\ln a} \cdot a^x \cdot \ln a = a^x.$$

$$16.\ \left(\frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}\right)' = \frac{1}{a} \cdot \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{a}\right)' = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} \cdot \left(\frac{x}{a}\right)' =$$

$$\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{\frac{a^2+x^2}{a^2}} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a^2+x^2}.$$

3.1.3. Основные свойства неопределенного интеграла

1. Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

Действительно, $\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$.

Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx.$$

Действительно, $d\left(\int f(x)dx\right) = \left(\int f(x)dx\right)' dx = f(x)dx$.

2. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной, т.е.

$$\int d(F(x)) = F(x) + C.$$

Действительно, так как $d(F(x)) = F'(x)dx$, то $\int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + C$.

3. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, т.е. если $k = const \neq 0$, то

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx.$$

Действительно, пусть $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, т.е. $F'(x) = f(x)$. Тогда $kF(x)$ — первообразная для для функции $kf(x)$: $(kF(x))' = kF'(x) = kf(x)$. Отсюда следует, что $k\int f(x)dx = k[F(x) + C] = kF(x) + kC = kF(x) + C_1 = \int kf(x)dx$, где $C_1 = kC$.

4. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы двух функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций в отдельности, т.е.

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

Действительно, пусть $F(x)$ и $G(x)$ — первообразные для функций $f(x)$ и $g(x)$, соответственно. $F'(x) = f(x)$, $G'(x) = g(x)$. Тогда функции $F(x) \pm G(x)$ являются первообразными для функций $f(x) \pm g(x)$. Следовательно,

$$\int f(x)dx \pm \int g(x)dx = (F(x) + C_1) \pm (G(x) + C_2) = (F(x) \pm G(x)) + (C_1 \pm C_2) =$$

$$= (F(x) \pm G(x)) + C = \int (f(x) \pm g(x))dx.$$

5. Инвариантность формулы интегрирования. Если $\int f(x)dx = F(x)+C$, то $\int f(u)du = F(u) + C$, где $u = \varphi(x)$ — произвольная функция, имеющая непрерывную производную.

Действительно, пусть x — независимая переменная, $f(x)$ — непрерывная функция, $F(x)$ — ее первообразная. Тогда $\int f(x)dx = F(x) + C$. Положим теперь $u = \varphi(x)$, где $\varphi(x)$ — непрерывно-дифференцируемая функция. Рассмотрим сложную функцию $F(u) = F(\varphi(x))$. Найдем ее дифференциал:

$$d(F(u)) = F'(u)du = f(u)du.$$

Отсюда

$$\int f(u)du = \int d(F(u)) = F(u) + C.$$

Примеры.

1.
$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C.$$

2.
$$\int (\sin x)^2 d(\sin x) = \frac{(\sin x)^3}{3} + C.$$

3.
$$\int (\ln x)^2 d(\ln x) = \frac{(\ln x)^3}{3} + C.$$

4.
$$\int \sin(7x)dx = \int \sin(7x)d\left(\frac{7x}{7}\right) = \frac{1}{7}\int \sin(7x)d(7x) = -\frac{1}{7}\cos 7x + C.$$

3.1.4. Непосредственное интегрирование

В некоторых простых случаях можно найти неопределенный интеграл, используя таблицу интегралов и свойства неопределенного интеграла. При этом в подынтегральном выражении возможны следующие преобразования:

1. раскрытие скобок;
2. почленное деление числителя на знаменатель;
3. применение формул тригонометрии;
4. выделение целой части неправильной рациональной дроби (в случае, если степень числителя больше или равна степени знаменателя).

Примеры.

1.
$$\int \left(x^2 + 2x + \frac{1}{x}\right) dx = \int x^2 dx + \int 2x dx + \int \frac{1}{x} dx = \frac{x^3}{3} + 2\int x dx + \ln|x| + C =$$
$$= \frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} + \ln|x| + C = \frac{x^3}{3} + x^2 + \ln|x| + C.$$

2.
$$\int \left(e^x - \frac{1}{x^2}\right) dx = \int e^x dx - \int \frac{1}{x^2} dx = e^x + \frac{1}{x} + C.$$

3.1.5. Метод замены переменной в неопределенном интеграле

Пусть нам требуется найти неопределенный интеграл $\int f(x)dx$. Причем непосредственно мы найти первообразную не можем, но знаем, что она существует. Тогда сделаем замену: $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ — непрерывная функция с непрерывной производной, имеющая обратную функцию. Тогда $dx = \varphi'(t)dt$ и имеет место равенство:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Для его доказательства продифференцируем равенство слева и справа. Слева будем иметь:

$$\left(\int f(x)dx\right)'_x = f(x).$$

Правую часть дифференцируем по x как сложную функцию, где t — промежуточный аргумент.

$$\left(\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\right)'_x = \left(\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\right)'_t \frac{dt}{dx} = f(\varphi(t))\varphi'(t)\frac{dt}{dx} =$$

по теореме о дифференцировании обратной функции $f(\varphi(t))\varphi'(t)\dfrac{1}{\varphi'(t)} = f(\varphi(t)) = f(x)$.

Производная от левой части и от правой части совпали, что и требовалось доказать.

Замечание. Замену переменной иногда лучше подбирать в виде $t = \psi(x)$, а не в виде $x = \varphi(t)$. Например, нужно вычислить интеграл

$$\int \frac{\psi'(x)}{\psi(x)}dx.$$

Положим здесь $t = \psi(x)$, тогда $dt = \psi'(x)dx$. Имеем

$$\int \frac{\psi'(x)}{\psi(x)}dx = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\psi(x)| + C.$$

Примеры.

1. (a)

$$\int \frac{dx}{1-2x} = \left| \begin{array}{c} t = 1-2x \\ dt = -2dx \\ dx = \frac{dt}{-2} \end{array} \right| = \int \frac{dt}{-2t} = \frac{-1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{-1}{2}\ln|t| = \frac{-1}{2}\ln|1-2x| + C.$$

(b)

$$\int \frac{dx}{1-2x} = \int \frac{-1}{2}\frac{d(-2x)}{(1-2x)} = -\frac{1}{2}\int \frac{d(1-2x)}{1-2x} = -\frac{1}{2}\ln|1-2x| + C.$$

2. (a)

$$\int \cos(3x+2)dx = \left| \begin{array}{c} t = 3x+2 \\ dt = 3dx \\ dx = \frac{dt}{3} \end{array} \right| = \int \frac{1}{3}\cos t dt = \frac{1}{3}\int \cos t dt = \frac{1}{3}\sin t = \frac{1}{3}\sin(3x+2)+C.$$

(b)

$$\int \cos(3x+2)dx = \int \cos(3x+2)d\frac{(3x+2)}{3} = \frac{1}{3}\int \cos(3x+2)d(3x+2) = \frac{1}{3}\sin(3x+2)+C.$$

3. (a)

$$\int \sqrt{\sin x}\cos x dx = \left| \begin{array}{c} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{array} \right| = \int \sqrt{t}dt = \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}(\sin x)^{\frac{3}{2}} + C.$$

(b)

$$\int \sqrt{\sin x}\cos x dx = \int \sqrt{\sin x}d(\sin x) = \frac{(\sin x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}(\sin x)^{\frac{3}{2}} + C.$$

4. (a)

$$\int \frac{xdx}{1+x^2} = \left| \begin{array}{c} t = 1+x^2 \\ dt = 2xdx \\ xdx = \frac{dt}{2} \end{array} \right| = \int \frac{\frac{dt}{2}}{t} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t| + C = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

(b)

$$\int \frac{xdx}{1+x^2} = \int \frac{d(\frac{x^2}{2})}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{1+x^2}{1+x^2} = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

5. (a)

$$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = \left| \begin{array}{c} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \end{array} \right| = \int \frac{-dt}{t} = -\frac{dt}{t} = -\ln|t| = -\ln|\cos x| + C.$$

(b)

$$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = \int \frac{d(-cosx)}{\cos x} = -\int \frac{d(cosx)}{\cos x} = -\ln|cosx| + C.$$

6.

$$\int \frac{x^2+1}{x+2}dx = \int \frac{x^2-4+5}{x+2}dx = \int \left(\frac{(x-2)(x+2)}{x+2} + \frac{5}{x+2}\right)dx =$$

$$= \int (x-2)dx + 5\int \frac{d(x+2)}{x+2} = \frac{x^2}{2} - 2x + 5\ln|x+2| + C.$$

3.1.6. Метод интегрирования по частям

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ — функции, дифференцируемые по переменной x. По свойству дифференциала произведения двух функций имеем: $d(u \cdot v) = du \cdot v + u \cdot dv$. Проинтегрируем левую и правую часть этого равенства, получим: $\int d(u \cdot v) = \int (du \cdot v + u \cdot dv)$. Следовательно, $u \cdot v = \int (du \cdot v) + \int (u \cdot dv)$. Из последнего равенства получаем:

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du.$$

Формула применяется в случае:

1) $\int P_n(x)f(x)dx$, где $P_n(x)$ — многочлен степени n от переменной x, а $f(x) = \sin \alpha x$, $\cos \alpha x$, т.е. функция $f(x)$ имеет табличную первообразную, в этом случае разделяем подынтегральное выражение следующим образом: $u(x) = P_n(x), \quad dv = f(x)$. После этого находим $du = d(P_n(x))$ и $v = \int f(x)dx$. Заметим, что при нахождении функции v константу C не пишем.

2) $\int P_n(x)e^{\alpha x}dx$, где $P_n(x)$ — многочлен степени n от переменной x. В этом случае разделяем подынтегральное выражение следующим образом: $u(x) = P_n(x), \quad dv = e^{\alpha x}dx$. После этого находим $du = d(P_n(x))$ и $v = \int e^{\alpha x}dx = \frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}$.

3) $\int P_n(x)f(x)dx$, где $P_n(x)$ — многочлен степени n от переменной x, а $f(x) = \ln x$, $\arcsin \alpha x$, $\arccos \alpha x$, $\operatorname{arctg} \alpha x$, $\operatorname{arcctg} \alpha x$, т.е. функция $f(x)$ не имеет табличную первообразную, в этом случае разделяем подынтегральное выражение следующим образом: $u(x) = f(x), \quad dv = P_n(x)dx$. После этого находим $du = d(f(x))$ и $v = \int P_n(x)dx$.

4) $\int e^{\alpha x}f(x)dx$, где $f(x) = \sin \beta x, \ \cos \beta x$, в этом случае разделяем подынтегральное выражение следующим образом: $u(x) = e^{\alpha x}, \quad dv = f(x)dx$.

Примеры.

1.

$$\int x \sin dx = \left| \begin{array}{c} u = x, \ dv = \sin dx \\ du = dx \\ \int \sin x dx = -\cos x \end{array} \right| = x\cdot(-\cos x) - \int (-\cos x)dx = -x\cdot\cos x + \int \cos x dx =$$

$$= -x \cdot \cos x + \sin x + C.$$

2.

$$\int (2x+1)\cdot e^x dx = \left| \begin{array}{c} u = 2x+1, \ du = 2dx \\ dv = e^x dx \\ v = \int e^x dx = e^x \end{array} \right| = (2x+1)\cdot e^x - \int e^x \cdot 2dx =$$

$$= (2x+1)\cdot e^x - 2\int e^x \cdot dx = (2x+1)\cdot e^x - 2e^x + C.$$

3.

$$\int \operatorname{arctg} x dx = \left| \begin{array}{c} u = \operatorname{arctg} x, \ dv = dx \\ du = \frac{dx}{1+x^2}, \\ v = \int dx = x \end{array} \right| = x \cdot \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2}dx =$$

$$= x \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = x \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

4.

$$\int (3x+2)\ln(2x+3)dx = \left| \begin{array}{c} u = \ln(2x+3), \ dv = (3x+2)dx \\ du = \frac{2dx}{2x+3} \\ v = \int (3x+2)dx = \frac{3x^2}{2} + 2x \end{array} \right| =$$

$$= \left(\frac{3x^2}{2} + 2x\right)\cdot \ln(2x+3) - \int \frac{\left(\frac{3x^2}{2} + 2x\right)dx}{2x+3}.$$

Выделим в подынтегральной функции целую часть.

$$\frac{\frac{3x^2}{2}+2x}{2x+3}=\frac{3}{4}x-\frac{1}{8}+\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{2x+3}.$$

Проинтегрируем полученное выражение:

$$\int\frac{\frac{3x^2}{2}+2x}{2x+3}dx=\int\left(\frac{3}{4}x-\frac{1}{8}+\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{2x+3}\right)dx=$$

$$=\frac{3}{4}\int\frac{3}{4}xdx-\frac{1}{8}\int dx+\frac{3}{8}\int\frac{dx}{2x+3}=\frac{3}{4}\frac{x^2}{2}-\frac{1}{8}\cdot x+\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{2}\cdot\int\frac{d(2x+3)}{2x+3}=$$
$$\frac{3x^2}{8}-\frac{1}{8}\cdot x+\frac{3}{16}\cdot\ln|2x+3|.$$

Возвращаемся к решению примера:

$$\left(\frac{3x^2}{2}+2x\right)\cdot\ln(2x+3)-\frac{3x^2}{8}+\frac{1}{8}\cdot x+\frac{3}{16}\cdot\ln|2x+3|+C.$$

5.

$$\int\sqrt{4-x^2}dx=\int\frac{(\sqrt{4-x^2})(\sqrt{4-x^2})}{\sqrt{4-x^2}}dx=\int\frac{4-x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx=4\int\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}-\int\frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}}=$$

$$=4\cdot\arcsin\frac{x}{2}-\int\frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}}=\left|\begin{array}{c}u=x,\ du=dx\\ dv=\frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}}\\ v=\frac{-1}{2}\int\frac{d(4-x^2)}{\sqrt{4-x^2}}=\frac{-1}{2}\cdot\frac{(4-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}=-(4-x^2)^{\frac{1}{2}}\end{array}\right|=$$

$$4\cdot\arcsin\frac{x}{2}+x\cdot(4-x^2)^{\frac{1}{2}}-\int(4-x^2)^{\frac{1}{2}}dx.$$

Приведем подобные в полученном равенстве, получим:

$$\int\sqrt{4-x^2}dx=2\cdot\arcsin\frac{x}{2}+\frac{x\cdot(4-x^2)^{\frac{1}{2}}}{2}+C.$$

3.1.7. Интегрирование дробно-рациональных функций

Всякую рациональную функцию можно представить в виде рациональной дроби, т.е. в виде отношения двух многочленов:

$$\frac{Q(x)}{P(x)}=\frac{A_0x^n+A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}+\cdots+A_n}{B_0x^m+B_1x^{m-1}+B_2x^{m-2}+\cdots+B_m}.$$

Будем предполагать, что многочлены не имеют общих корней.

Дробь называется **правильной**, если степень многочлена числителя меньше степени знаменателя, т.е. $n<m$, иначе дробь называется **неправильной**.

Если дробь неправильная, то разделив многочлен, стоящий в числителе на многочлен, стоящий в знаменателе, можно представить дробь в виде суммы многочлена и правильной дроби.

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = M(x) + \frac{F(x)}{P(x)},$$

где дробь $\frac{F(x)}{P(x)}$ — правильная.

Например, дробь

$$\frac{x^4 - 3}{x^2 + 2x + 1} = x^2 - 2x + 3 - \frac{4x + 6}{x^2 + 2x + 1}.$$

Любая правильная рациональная дробь может быть представлена в виде суммы простейших рациональных дробей. Существуют простейшие дроби 4-х типов:

1. $\dfrac{A}{x-a}$
2. $\dfrac{A}{(x-a)^k}$, где k – целое положительное число ≥ 2
3. $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$, где $D = p^2 - 4q < 0$
4. $\dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$, где $k-$ целое положительное число ≥ 2 и $D = p^2 - 4q < 0$.

Здесь A, B, a, p, q — действительные числа.

Рассмотрим интегралы от простейших дробей:

1. $\displaystyle\int \frac{Adx}{x-a} = A\int \frac{dx}{x-a} = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a| + C.$

2. $\displaystyle\int \frac{Adx}{(x-a)^k} = A\int (x-a)^{-k}dx = A\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C.$

3. $$\int \frac{(Ax+B)dx}{x^2+px+q} = \int \frac{Axdx}{x^2+px+q} + \frac{Bdx}{x^2+px+q} = \int \frac{1}{2}\frac{A(2x+p-p)}{x^2+px+q}dx +$$
$$+\int \frac{Bdx}{x^2+px+q} = \frac{A}{2}\int \frac{(2x+p)dx}{x^2+px+q} + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+px+q} =$$
$$= \frac{A}{2}\int \frac{d(x^2+px+q)}{x^2+px+q} + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \frac{A}{2}\ln|x^2+px+q| +$$
$$+\left(B - \frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{\left(x^2 + 2\frac{p}{2}x + \left(\frac{p}{2}\right)^2\right) - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} = \frac{A}{2}\ln|x^2+px+q| +$$
$$+\left(B - \frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \left(\frac{p}{2}\right)^2\right)}$$

Переобозначим

$$q - \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \pm k^2 \text{ и сделаем замену } t = x + \frac{p}{2},\ dt = dx.$$

Тогда получим:

$$\frac{A}{2}\ln|x^2+px+q| + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dt}{t^2 \pm k^2}.$$

Покажем, что всякую рациональную дробь можно представить в виде простейших дробей. Пусть дана правильная рациональная дробь $\frac{F(x)}{P(x)}$. Будем предполагать, что коэффициенты входящих в дробь многочленов, действительные числа и данная дробь несократима.

Теорема 1. Пусть $x = a$ — корень знаменателя кратности k, т.е. $P(x) = (x-a)^k P_1(x)$, где $P_1(a) \neq 0$, тогда данную правильную дробь $\frac{F(x)}{P(x)}$ можно представить в виде суммы двух других правильных дробей следующим образом:

$$\frac{F(x)}{P(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{F_1(x)}{(x-a)^{k-1}P_1(x)},$$

где A — постоянная, $F_1(x)$ — многочлен, степень которого ниже степени знаменателя $(x-a)^{k-1}P_1(x)$.

Следствие. К правильной рациональной дроби $\frac{F_1(x)}{(x-a)^{k-1}P_1(x)}$ можно применять аналогичные рассуждения, в итоге, если знаменатель имеет корень $x = a$ степени k, то можно написать:

$$\frac{F(x)}{P(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{A_1}{(x-a)^{k-1}} + \frac{A_2}{(x-a)^{k-2}} + \dots + \frac{A_{k-1}}{(x-a)} + \frac{F_k(x)}{P_1(x)},$$

где дробь $\frac{F_k(x)}{P_1(x)}$ — правильная несократимая дробь. К этой дроби можно применить теорему 1, если $P_1(x)$ имеет другие действительные корни.

Теорема 2. Если $P(x) = (x^2+px+q)^\mu \varphi_1(x)$, где x^2+px+q не имеет действительных корней и многочлен $\varphi_1(x)$ не делится на x^2+px+q, то правильную рациональную дробь можно представить в виде суммы двух других правильных дробей следующим образом:

$$\frac{F(x)}{P(x)} = \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^\mu} + \frac{\Phi_1(x)}{(x^2+px+q)^{\mu-1}\varphi_1(x)},$$

где $\Phi_1(x)$ — многочлен степени ниже степени многочлена $(x^2+px+q)^{\mu-1}\varphi_1(x)$.

Применим теоремы 1 и 2 к правильной рациональной дроби $\frac{F(x)}{P(x)}$ и выделим все простейшие дроби, соответствующие корням знаменателя, таким образом, вытекает следующий результат: если $P(x) = (x-a)^\alpha \cdot \dots \cdot (x-b)^\beta \cdot (x^2+px+q)^\mu \cdot \dots \cdot (x^2+lx+n)^\nu$, то дробь $\frac{F(x)}{P(x)}$ может быть представлена в виде:

$$\begin{gathered}\frac{F(x)}{P(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-2}} + \dots + \frac{A_{\alpha-1}}{(x-a)} + \dots + \\ \frac{B}{(x-b)^\beta} + \frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}} + \frac{B_2}{(x-b)^{\beta-2}} + \dots + \frac{B_{\beta-1}}{(x-b)} + \\ + \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^\mu} + \frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^{\mu-1}} + \dots + \frac{M_{\mu-1}x+N_{\mu-1}}{(x^2+px+q)} + \dots + \\ + \frac{Kx+L}{(x^2+lx+n)^\nu} + \frac{K_1x+L_1}{(x^2+lx+n)^{\nu-1}} + \dots + \frac{K_{\nu-1}x+L_{\nu-1}}{(x^2+lx+n)}.\end{gathered}$$

После разложения находим все коээфициенты $A, A_1, A_2, \dots, A_{\alpha-1}, B, B_1, B_2, \dots, B_{\beta-1}, M, M_1, M_2, \dots, M_{\mu-1}, N, N_1, N_2, \dots, N_{\mu-1}, K, K_1, K_2, \dots, K_{\nu-1}, L, L_1, L_2, \dots, L_{\nu-1}$. Для этого всю правую часть приводим к общему знаменателю. Далее, получаем равенство двух рациональных дробей, у которых знаменатели одинаковые. Ттаким образом, остается приравнять числители. А именно, приравняем коэффициенты при одинаковых степенях переменной x слева и справа, получим систему для нахождения коэффициентов, решая ее, находим неизвестные A, A_1, $A_2, \ldots, A_{\alpha-1}$, B, B_1, $B_2, \ldots, B_{\beta-1}$, M, M_1, $M_2, \ldots, M_{\mu-1}$, N, N_1, $N_2, \ldots, N_{\mu-1}$, K, K_1, $K_2, \ldots, K_{\nu-1}$, L, L_1, $L_2, \ldots, L_{\nu-1}$.

Примеры.

1. Найти интеграл вида
$$\int \frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}dx.$$

   Отметим, что подынтегральная функция является правильной рациональной дробью, т.к. степень многочлена числителя равна 2, а степень многочлена знаменателя равна 4. Поэтому ее можно представить в виде суммы простейших дробей. Поскольку знаменатель — многочлен, имеющий только действительные корни, то наша дробь будет разложена в сумму простейших дробей I и II типов.

   Разложим ее в сумму простейших дробей:
$$\frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x+1)^3} + \frac{C}{(x+1)^2} + \frac{D}{(x+1)}.$$

   Приведем правую часть к общему знаменателю, получим
$$\frac{A(x+1)^3 + B(x-2) + C(x-2)(x+1) + D(x-2)(x+1)^2}{(x+2)(x+1)^3}.$$
$$\frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)} =$$
$$= \frac{A(x^3+3x^2+3x+1) + B(x-2) + C(x^2-x-2) + D(x^3+2x^2+x-2x^2-4x-2)}{(x+1)^3(x-2)} =$$
$$= \frac{A(x^3+3x^2+3x+1) + B(x-2) + C(x^2-x-2) + D(x^3-3x-2)}{(x+1)^3(x-2)}$$

   Составим систему уравнений для нахождения коэффициентов A, B, C, D.
$$\begin{cases} A+D=0 \\ 3A+C=1 \\ 3A+B-C-3D=0 \\ A-2B-2C-2D=2 \end{cases}$$

   Решая эту систему, находим коэффициенты.
$$C=1-3A,\ D=-A,\ 3A+B-(1-3A)-3(-A)=0,\ A-2B-2(1-3A)-2(-A)=2.$$

$$\begin{cases} C = 1 - 3A \\ D = -A \\ 9A + B = 1 \\ 9A - 2B = 4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} C = 1 - 3A \\ D = -A \\ 3B = -3 \\ 9A - 2B = 4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} C = 1 - 3A \\ D = -A \\ B = -1 \\ 9A - 2(-1) = 4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} C = 1 - 3A \\ D = -A \\ B = -1 \\ 9A = 2 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} C = 1 - 3(\frac{2}{9}) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \\ D = -\frac{2}{9} \\ B = -1 \\ A = \frac{2}{9} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} C = \frac{1}{3} \\ D = -\frac{2}{9} \\ B = -1 \\ A = \frac{2}{9} \end{cases}$$

Итого, имеем:

$$\frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)} = \frac{2}{9(x-2)} + \frac{-1}{(x+1)^3} + \frac{1}{3(x+1)^2} + \frac{-2}{9(x+1)}.$$

Тогда интегрируя левую и правую часть равенства, будем иметь:

$$\int \frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)dx} = \int \left(\frac{2}{9(x-2)} + \frac{-1}{(x+1)^3} + \frac{1}{3(x+1)^2} + \frac{-2}{9(x+1)} \right) dx =$$

$$= \frac{2}{9} \ln|x-2| - \frac{(x+1)^{-2}}{-2} - \frac{(x+1)^{-1}}{3} - \frac{2}{9} \ln|x+1| + C.$$

2. Найти интеграл вида

$$\int \frac{xdx}{(x^2+1)(x-1)} dx.$$

Отметим, что подынтегральная функция является правильной рациональной дробью, т.к. степень многочлена числителя равна 1, а степень многочлена знаменателя равна 3. Поэтому ее можно представить в виде суммы простейших дробей. Поскольку знаменатель — многочлен, имеющий действительный корень 1 и комплексные корни, то наша дробь будет разложена в сумму простейших дробей I и III типов.

$$\frac{x}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{(x^2+1)}.$$

Приведем правую часть к общему знаменателю, получим

$$\frac{A(x^2+1) + Bx(x-1) + C(x-1)}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{x}{(x^2+1)(x-1)} =$$

$$= \frac{Ax^2 + Bx^2 - Bx + Cx + A - C}{(x^2+1)(x-1)}$$

Составим систему уравнений для нахождения коэффициентов A, B, C.

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -B + C = 1 \\ A - C = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} B = -A \\ A + A = 1 \\ C = A \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} B = -A \\ 2A = 1 \\ C = A \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} B = -\frac{1}{2} \\ A = \frac{1}{2} \\ C = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\int \frac{xdx}{(x^2+1)(x-1)} = \int \frac{dx}{2(x-1)} - \int \frac{1}{2} \frac{(x-1)dx}{(x^2+1)} = \frac{1}{2} \ln|x-1| - \frac{1}{2}\frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)} +$$

$$+ \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x^2+1)} = \frac{1}{2} \ln|x-1| - \frac{1}{4} \ln|x^2+1| + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C.$$

3. Рассмотрим интеграл

$$\int \frac{(x-1)}{(x^2+2x+3)^2}dx = \left| \begin{array}{c} \text{выделим в числителе производную многочлена} \\ (x^2+2x+3)' = 2x+2 \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{(2x+2-2-1)dx}{2(x^2+2x+3)^2} = \int \frac{(2x+2)dx}{2(x^2+2x+3)^2} - \int \frac{3dx}{2(x^2+2x+3)^2} =$$

$$= \int \frac{d(x^2+2x+3)}{2(x^2+2x+3)^2} - \int \frac{4dx}{2(x^2+2x+3)^2} = \frac{1}{2}\int (x^2+2x+3)^{-2} d(x^2+2x+3) =$$

$$-\frac{2dx}{(x^2+2x+3)^2} = \frac{1}{2}\frac{(x^2+2x+3)^{-1}}{-1} - 2\int \frac{dx}{[(x+1)^2+2]^2}$$

Рассмотрим отдельно

$$\int \frac{dx}{[(x+1)^2+2]^2} = \left| \begin{array}{c} x+1=t \\ dx=dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{[t^2+2]^2} = \int \frac{[t^2+2]-t^2}{2[t^2+2]^2}dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{[t^2+2]} - \frac{1}{2}\int \frac{t^2dt}{2[t^2+2]^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\left(\frac{-t}{2[t^2+2]} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}\right) + C =$$

$$= \frac{t}{4[t^2+2]} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}} + C = \frac{x+1}{4(x^2+2x+3)} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C.$$

$$\int \frac{t^2dt}{2[t^2+2]^2} = \int \frac{1}{2}\frac{td(t^2)}{2[t^2+2]^2} = \left| u=t,\ dv = \frac{d(t^2)}{2[t^2+2]^2},\ du=dt,\ v=\frac{-1}{2[t^2+2]} \right| =$$

$$= t\cdot\frac{-1}{2[t^2+2]} - \int \frac{-1}{2[t^2+2]}dt = \frac{-t}{2[t^2+2]} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}} + C.$$

3.1.8. Интегрирование тригонометрических функций

Рассмотрим интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$, R— рациональная функция от $\sin x$, $\cos x$. Для сведения такого интеграла к интегралу от рациональной функции, зависящей от t, используются следующие подстановки.

1. Если подынтегральная функция нечетна относительно $\sin x$, т.е. $R(sinx, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то подстановка $t = \cos x$ рационализирует подынтегральную функцию.

2. Если подынтегральная функция нечетна относительно $\cos x$, т.е. $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то подстановка $t = \sin x$ рационализирует подынтегральную функцию.

3. Если подынтегральная функция четна относительно $\sin x$ и $\cos x$, т.е. $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то подстановка $t = \operatorname{tg} x$ рационализирует подынтегральную функцию.

4. Если подынтегральная функция имеет вид $R(\operatorname{tg} x)$, то используем подстановку $t = \operatorname{tg} x$.

5. В остальных случаях используем универсальную тригонометрическую подстановку: $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, тогда $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$. И сводим интеграл от тригонометрической функции к интегралу от рациональной функции.

1. Рассмотрим интеграл типа $\int \sin^n x \cdot \cos^m x dx$.

   Подынтегральная функция содержит произведение $\sin^n x \cdot \cos^m x$. Пусть для определенности n — четно, m — нечетно. Тогда делаем замену $t = \sin x$ и $dt = \cos x dx$. Пусть теперь n — нечетно, m — четно. Тогда делаем замену $t = \cos x$ и $dt = \sin x dx$.

2. Подынтегральная функция содержит произведение $\sin^n x \cdot \cos^m x$. Пусть для определенности n — четно, m — четно. Тогда применим формулы понижения степени

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}.$$

   Или можно применить выражение функций через $\operatorname{tg} x$, используя формулы:

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}, \quad \sin^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 x} = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}.$$

   Тогда применяем замену $t = \operatorname{tg} x$, $\quad x = \operatorname{arctg} t$, $\quad dx = \frac{dt}{1+t^2}$.

3. Интегралы вида:$\int \sin \alpha x \cos \beta x dx$, $\quad \int \sin \alpha x \sin \beta x dx$, $\quad \int \cos \alpha x \cos \beta x dx$ можно найти, используя следующие тригонометрические формулы:

$$\cos \alpha x \cos \beta x = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)x + \cos(\alpha-\beta)x];$$

$$\sin \alpha x \sin \beta x = \frac{1}{2}[-\cos(\alpha+\beta)x + \cos(\alpha-\beta)x];$$

$$\sin \alpha x \cos \beta x = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)x + \sin(\alpha-\beta)x].$$

Примеры.

1.

$$\int \frac{\sin^3 x}{2+\cos x} dx = \left| \begin{array}{c} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \end{array} \right| = \int \frac{\sin^2 x \cdot \sin x dx}{2+\cos x} = \int \frac{(1-\cos^2 x)\cdot \sin x dx}{2+\cos x} =$$

$$= \int \frac{(1-t^2)(-dt)}{2+t} = \int \frac{t^2-1}{t+2} dt = \int \left(t - 2 + \frac{3}{t+2} \right) dt = \frac{t^2}{2} - 2t + 3\ln|t+2| + C =$$

$$= \frac{\cos^2 x}{2} - 2\cos x + 3\ln|\cos x + 2| + C.$$

2.

$$\int \sin^4 x dx = \int (\sin^2 x)^2 dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2} \right)^2 dx = \frac{1}{4} \int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x) dx =$$

$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}\int \cos 2x dx + \frac{1}{4}\int \left(\frac{1+\cos 4x}{2} \right) dx = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}\sin 4x =$$

$$= \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C.$$

3.

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\cdot\frac{1}{\cos^4 x}dx = \int \operatorname{tg} x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{dx}{\cos^2 x} =$$
$$= \int \operatorname{tg}^2 x\cdot(1+\operatorname{tg}^2 x)\cdot\frac{dx}{\cos^2 x} = \left|\operatorname{tg} x = t,\;\; dt = \frac{dx}{\cos^2 x} =\right| =$$
$$= \int t^2(1+t^2)dt = \int (t^2+t^4)dt = \frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5}+C = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}+\frac{\operatorname{tg}^5 x}{5}+C.$$

4.

$$\int \frac{dx}{2-\sin^2 x} = \left|\sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{t^2}{t^2+1},\; dx = \frac{dt}{t^2+1}\right| \int \frac{dt}{(t^2+1)}\left(2-\frac{t^2}{t^2+1}\right) =$$
$$= \int \frac{dt}{t^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}+C = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}+C$$

5.

$$\int \sin 2x\sin 3x dx = \frac{1}{2}\int[-\cos(2+3)x+\cos(2-3)x]dx = -\frac{1}{2}\int\cos 5x dx+\frac{1}{2}\int\cos x dx =$$
$$= -\frac{1}{2}\frac{1}{5}\sin 5x+\frac{1}{2}\sin x+C = -\frac{1}{10}\sin 5x+\frac{1}{2}\sin x+C.$$

3.1.9. Интегрирование иррациональных функций

1. Рассмотрим интеграл вида:

$$\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}},\cdots,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right)dx.$$

Этот интеграл сводится к интегралу от рациональной функции с помощью подстановки: $\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$, где k — общий знаменатель дробей $\frac{m}{n},\cdots,\frac{r}{s}$.

Пример. Найти неопределенный интеграл:

$$\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}dx \left|\begin{array}{c} x+4=t^2 \\ dx = 2tdt \end{array}\right| = \int \frac{\sqrt{t^2}}{t^2-4}2tdt = 2\int\frac{t^2}{t^2-4}dt$$
$$= 2\int\frac{t^2-4+4}{t^2-4} = 2\int dt + 8\int\frac{dt}{t^2-4} = 2t+8\frac{1}{2\cdot 2}\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right| =$$
$$= 2\left(\sqrt{x+4}+2\ln\left|\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2}\right|\right)+C.$$

2. Рассмотрим интегралы вида:

$$\int R(x,\sqrt{a^2-x^2})dx,\;\; \int R(x,\sqrt{a^2+x^2})dx,\;\; \int R(x,\sqrt{x^2-a^2})dx.$$

Эти интегралы приводятся к интегралам, рационально зависящим от тригонометрических функций, с помощью тригонометрических подстановок:

$$\sqrt{a^2 - x^2} \to x = a \cdot \sin t$$

$$\sqrt{a^2 + x^2} \to x = a \cdot \operatorname{tg} t$$

$$x^2 - a^2 \to x = \frac{a}{\cos t}.$$

Пример. Найти неопределенный интеграл

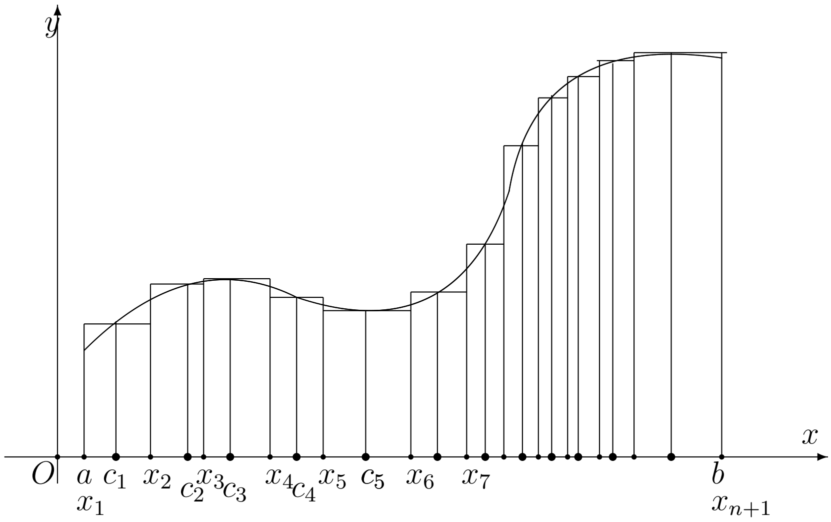
$$\int \frac{dx}{(\sqrt{9 - x^2})^3} = \left| \begin{matrix} x = 3\sin t \\ dx = 3\cos t dt \end{matrix} \right| = \int \frac{3\cos t dt}{(\sqrt{9 - 9\sin^2 t})^3} = \int \frac{3\cos t dt}{27\cos^3 t} dt =$$

$$= \frac{1}{9} \int \frac{dt}{\cos^2 t} = \frac{1}{9} \operatorname{tg} t + C.$$

3.2. Определенный интеграл

3.2.1. Понятие определенного интеграла

Пусть неотрицательная и непрерывная функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$.



1. Разобьем отрезок $[a, b]$ на n частичных отрезков точками: $x_1 = a, x_2, x_3, \ldots, x_{n+1} = b$, причем $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1}$. Таким образом, получим частичные отрезки

$$[x_1, x_2],\ [x_2, x_3], \ldots [x_n, x_{n+1}].$$

2. В каждом частичном отрезке $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, выберем точку c_i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

3. Вычислим значение функции в точке c_i, т.е. $f(c_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

4. На каждом частичном отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ как на основании построим прямоугольник с высотой $f(x_i)$.

5. Обозначим длину i-го отрезка через $\triangle x_i$, т.е. $\triangle x_i = x_{i+1} - x_i$. Обозначим $\lambda = \max \triangle x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

6. Составим сумму произведений:

$$S_n = f(c_1) \cdot \triangle x_1 + f(c_2) \cdot \triangle x_2 + \cdots + f(c_n) \cdot \triangle x_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot \triangle x_i \qquad (*).$$

Полученная сумма (*) называется *интегральной суммой* функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

7. Найдем предел интегральной суммы (*), когда $n \to \infty$ так, что $\lambda \to 0$. Если при этом интегральная сумма S_n имеет предел I, который не зависит ни от способа разбиения отрезка $[a, b]$ на частичные отрезки, ни от выбора точек в них, то число I называется **определенным интегралом** от функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ и обозначается

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n \to \infty \\ (\lambda \to 0)}} \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot \triangle x_i.$$

Число a называется нижним пределом интегрирования, b— верхним пределом интегрирования.

И справедлива следующая теорема.

Теорема (необходимое условие интегрируемости.) Если функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то она интегрируема на этом отрезке , т.е. для нее существует определенный интеграл

$$\int_a^b f(x)\, dx.$$

3.2.2. Геометрический смысл определенного интеграла

Вернемся к определению определенного интеграла.

Определение. Фигура, ограниченная сверху графиком функции $y = f(x)$, снизу — осью Ox, слева и справа вертикальными прямыми $x = a$ и $x = b$ соответственно, называется **криволинейной трапецией**.

В пункте 3.2.1 изображена криволинейная трапеция. Обозначим ее площадь через S, а сумму площадей прямоугольников на этом рисунке через S_n. Очевидно, $S_n \approx S$. Приближенное равенство будет точнее, если $n \to \infty$. Таким образом, S будет равно пределу S_n при $n \to \infty$.

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n.$$

Учитывая, что

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot \triangle x_i$$

имеем

$$S = \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

В этом и состоит геометрический смысл определенного интеграла.

3.2.3. Формула Ньютона-Лейбница

Между неопределенным и определенным интегралом существуют различия. Определенный интеграл — это число, а неопределенный интеграл — множество функций. Однако, между ними существует взаимосвязь, выражаемая формулой Ньютона-Лейбница.

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(x)\big|_a^b = F(b) - F(a).$$

$$\int\limits_1^2 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\bigg|_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}.$$

3.2.4. Свойства определеного интеграла

1. Линейные свойства.

   (a) Для любых непрерывных функций $f(x)$ и $g(x)$ интеграл от суммы (разности) этих функций равен сумме (разности) интегралов от этих функций:

   $$\int\limits_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx \pm \int\limits_a^b g(x)\,dx.$$

   (b) Для любой непрерывной функции $f(x)$ постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла:

   $$\int\limits_a^b k \cdot f(x)\,dx = k\int\limits_a^b f(x)\,dx,\ k \in \mathbb{R}.$$

2. Определенный интеграл меняет знак при перемене мест пределов интегрирования:

   $$\int\limits_a^b f(x)\,dx = -\int\limits_b^a f(x)\,dx.$$

3. Аддитивность. Для любых чисел a, b, c числовой оси

   $$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx.$$

4. Свойства, выраженные неравенствами.

(a) Если $\forall x \in [a;b]$ выполняется неравенство $f(x) \geq 0$, то

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \geq 0.$$

(b) Если $\forall x \in [a;b]$ выполняется неравенство $f(x) \geq g(x)$, то

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \geq \int\limits_a^b g(x)\,dx.$$

(c) Оценка определенного интеграла. Если m и M, соответственно, наименьшее и наибольшее значения для функции $y = f(x)$ на $[a,b]$, то выполняется следующее неравенство:

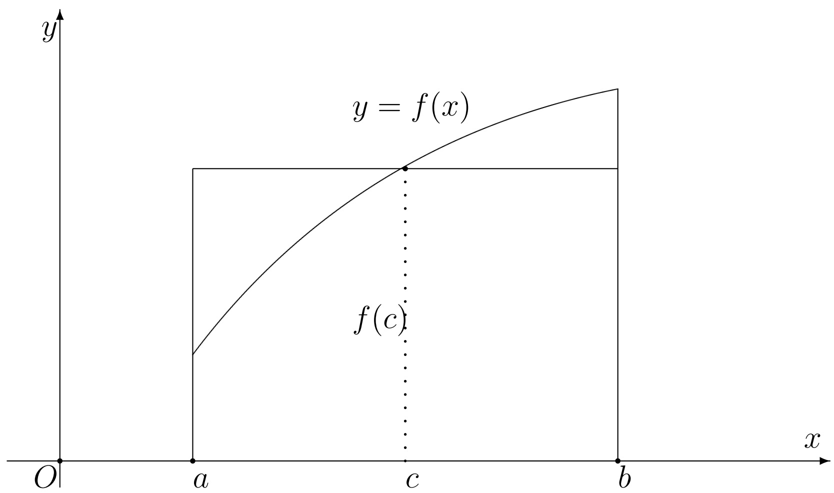
$$m(b-a) \leq \int\limits_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a).$$

(d) Теорема о среднем. Пусть $\forall x \in [a;b]$ функция $f(x)$ непрерывна. Тогда существует точка $c \in [a;b]$ такая, что

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = f(c)\cdot(b-a).$$

$$\text{Число } f(c) = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx$$

называется средним значением функции $f(x)$ на $[a,b]$. Значение определенного интеграла равно, при некотором $c \in (a,b)$, площади прямоугольника с высотой $f(c)$ и основанием $b-a$ (см. рис. ниже).



(e) Модуль определенного интеграла не превосходит интеграла от модуля подынтегральной функции:

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int\limits_a^b |f(x)|\,dx.$$

5. Интеграл с переменным верхним пределом и его производная. Пусть функция $y = f(x)$ — непрерывна $\forall x \in [a;b]$. $S = \int\limits_a^x f(x)\ dx = \Phi(x)$. При изменении положения точки x изменяется и площадь криволинейной трапеции.

   Замечание. Значение определенного интеграла не зависит от выбора переменной интегрирования, т.к. определенный интеграл есть предел интегральных сумм, а значение предела не зависит от переменной, стоящей под знаком функции, предел которой ищется. Поэтому для удобства обозначим: $\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)\ dt$.

   Теорема. Производная от интеграла с переменным верхним пределом равна подынтегральной функции при подстановке в нее переменного верхнего предела.

$$\int\limits_a^x f(t)\ dt = \Phi(x). \quad \text{Следовательно,} \ \ \Phi'(x) = f(x).$$

   Это означает, что определенный интеграл с переменным верхним пределом есть одна из первообразных подынтегральной функции.

3.2.5. Замена переменной в определенном интеграле

$$\int\limits_a^b f(\varphi((x)) \cdot \varphi'(x)\ dx = \left| \begin{array}{c} t = \varphi(x) \\ dt = \varphi'(x)dx \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline x & a & b \\ \hline t & \alpha & \beta \\ \hline \end{array} \\ \alpha = \varphi(a), \beta = \varphi(b) \end{array} \right| = \int\limits_\alpha^\beta f(t)\ dt.$$

Примеры.

1. Вычислить определенный интеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{x\ dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

   Решение.

$$\int\limits_0^1 \frac{x\ dx}{\sqrt{1+x^2}} = \left| \begin{array}{c} \text{замена} \\ t = 1+x^2 \\ dt = 2xdx \to \frac{dt}{2} = xdx \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline x & 0 & 1 \\ \hline t & 1 & 2 \\ \hline \end{array} \end{array} \right| = \int\limits_1^2 \frac{1}{2} \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2} \int\limits_1^2 t^{\frac{-1}{2}}\ dt = \frac{1}{2}\ \frac{2t^{\frac{1}{2}}}{1}\Bigg|_1^2 =$$
$$= \sqrt{2} - \sqrt{1} = \sqrt{2} - 1.$$

2. Вычислить определенный интеграл

$$\int\limits_1^2 \frac{\sqrt{x+4}}{x}\ dx.$$

Решение.

$$\int\limits_1^2 \frac{\sqrt{x+4}}{x}\,dx = \left| \begin{array}{c} \text{замена} \\ x+4=t^2 \\ dx = 2tdt \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline x & 1 & 2 \\ \hline t & \sqrt{5} & \sqrt{6} \\ \hline \end{array} \end{array} \right| = \int\limits_{\sqrt{5}}^{\sqrt{6}} \frac{t\cdot 2tdt}{t^2-4}\,dt = 2\int\limits_{\sqrt{5}}^{\sqrt{6}} \frac{t^2dt}{t^2-4}\,dt =$$

$$= 2\int\limits_{\sqrt{5}}^{\sqrt{6}} \frac{t^2-4+4}{t^2-4}\,dt = 2\int\limits_{\sqrt{5}}^{\sqrt{6}} \left(\frac{t^2-4}{t^2-4} + \frac{4}{t^2-4}\right)\,dt = 2\int\limits_{\sqrt{5}}^{\sqrt{6}} dt + 8\int\limits_{\sqrt{5}}^{\sqrt{6}} \frac{dt}{t^2-4} =$$

$$= \quad 2t\Bigg|_{\sqrt{5}}^{\sqrt{6}} + \frac{8}{2\cdot 2}\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right|\Bigg|_{\sqrt{5}}^{\sqrt{6}} = 2(\sqrt{6}-\sqrt{5}) + 2\ln\left|\frac{\sqrt{6}-2}{\sqrt{6}+2}\right| - 2\ln\left|\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}\right|$$

3. Вычислить определенный интеграл

$$\int\limits_4^5 x\sqrt{x^2-16}\,dx.$$

Решение.

$$\int\limits_4^5 x\sqrt{x^2-16}\,dx \left| \begin{array}{c} \text{замена} \\ t = x^2-16 \\ dt = 2xdx \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline x & 4 & 5 \\ \hline t & 0 & 9 \\ \hline \end{array} \end{array} \right| = \int\limits_0^9 \sqrt{t}\frac{1}{2}\,dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^9 t^{\frac{1}{2}}\,dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{2t^{\frac{3}{2}}}{3}\Bigg|_0^9 =$$

$$= \frac{t\sqrt{t}}{3}\Bigg|_0^9 = \frac{9\sqrt{9}}{3} - \frac{0\sqrt{0}}{3} = 9.$$

3.2.6. Интегрирование по частям в определенном интеграле

Классы функций, интегрируемых по частям в п.4.1.6 "Интегрирование по частям в неопределенном интеграле".

Если функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ имеют непрерывные производные на $[a;b]$, то имеет место формула:

$$\int\limits_a^b u\cdot dv = u\cdot v|_a^b - \int\limits_a^b v\cdot du.$$

Примеры.

1. Вычислить определенный интеграл:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} x\cos x\,dx$$

Решение.

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} x\cos x dx = \left| \begin{array}{c} u = x \\ du = dx \\ dv = \cos x dx \\ v = \sin x \end{array} \right| = \left.(x\cdot \sin x)\right|_0^{\frac{\pi}{3}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x\, dx =$$

$$= \frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{3} - 0 + \left.\cos x\right|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \cos\frac{\pi}{3} - \cos 0 = \frac{\pi}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} - 1 = \frac{\sqrt{3}\pi}{6} - \frac{1}{2}.$$

2. Вычислить определенный интеграл:

$$\int\limits_1^e (3+2x)\ln x\, dx$$

Решение.

$$\int\limits_1^e (3+2x)\ln x\, dx = \left| \begin{array}{c} u = \ln x \\ dv = (3+2x)dx \\ v = \int(3+2x)\, dx = 3x + 2\frac{x^2}{2} = 3x + x^2 \end{array} \right| =$$

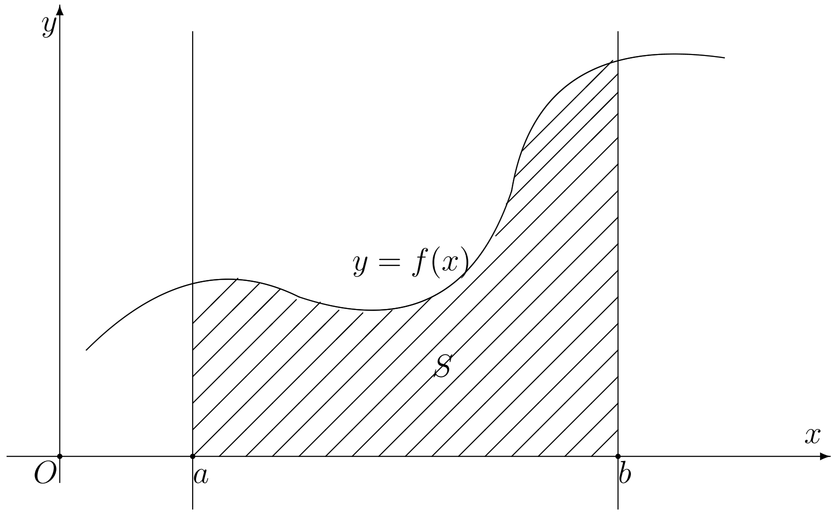
$$= (3x+x^2)\ln x|_1^e - \int\limits_1^e (3x+x^2)\frac{1}{x}\, dx = (3e+e^2)\ln e - (3\cdot 1 + 1^2)\ln 1 - \int\limits_1^e (3+x)\, dx =$$

$$= 3e + e^2 - \left.\left(3x + \frac{x^2}{2}\right)\right|_1^e = 3e + e^2 - \left(\left(3e + \frac{e^2}{2}\right) - \left(3 + \frac{1^2}{2}\right)\right) = \frac{e^2}{2} + \frac{7}{2} = \frac{e^2+7}{2}.$$

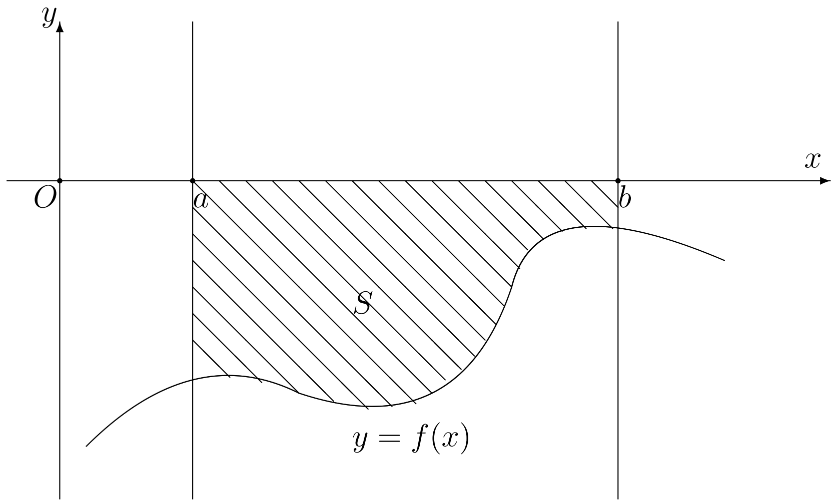
3.3. Геометрические приложения определенного интеграла

3.3.1. Вычисление площадей плоских фигур

1. Как было упомянуто при рассмотрении геометрического смысла определенного интеграла, площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху функцией $y = f(x)$, $f(x) > 0$, снизу осью OX, слева прямой $x = a$, справа прямой $x = b$, находим по формуле $S = \int\limits_a^b f(x)\, dx$.

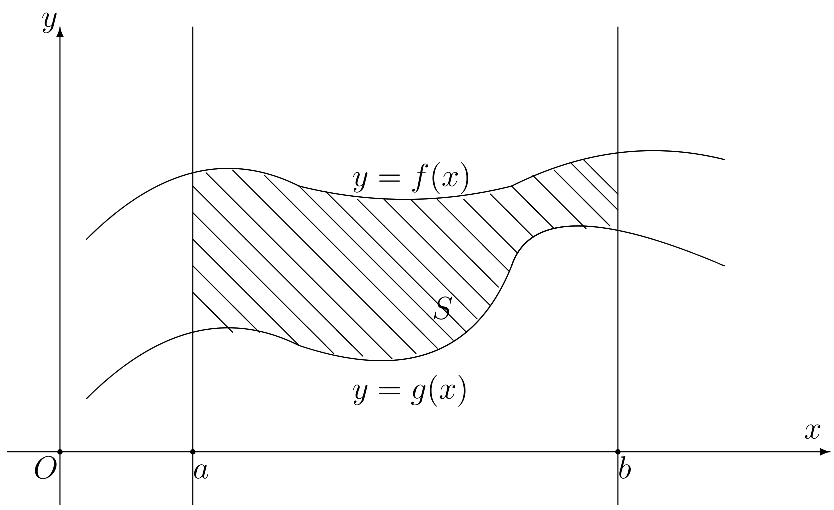


2. площадь криволинейной трапеции, ограниченной снизу функцией $y = f(x)$, $f(x) < 0$, сверху осью OX, слева прямой $x = a$, справа прямой $x = b$, находим по формуле $S = -\int\limits_a^b f(x)\,dx$.



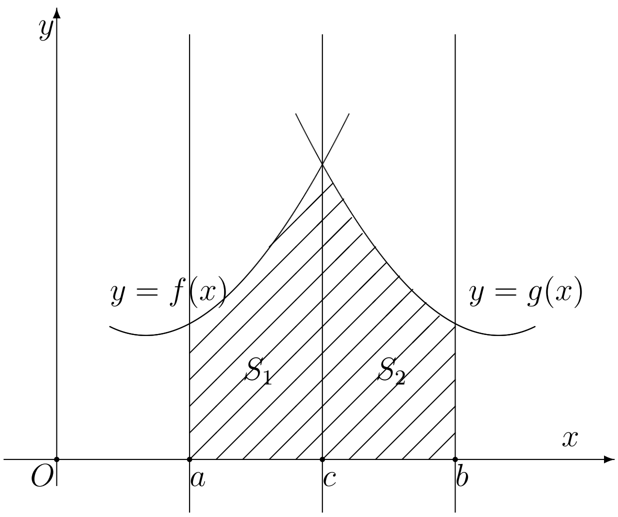
3. Площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = f(x)$ и $y = g(x)$, при условии $f(x) > g(x)$, прямыми $x = a$, $x = b$, можно найти по формуле

$$S = \int\limits_a^b f(x)\,dx - \int\limits_a^b g(x)\,dx = \int\limits_a^b (f(x) - g(x))\,dx.$$



4. Площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = f(x)$ и $y = g(x)$, при условии $f(x) > 0$, $g(x) > 0$, прямыми $x = a$, $x = b$, $f(x) \cap g(x) \neq \emptyset$ можно найти по формуле

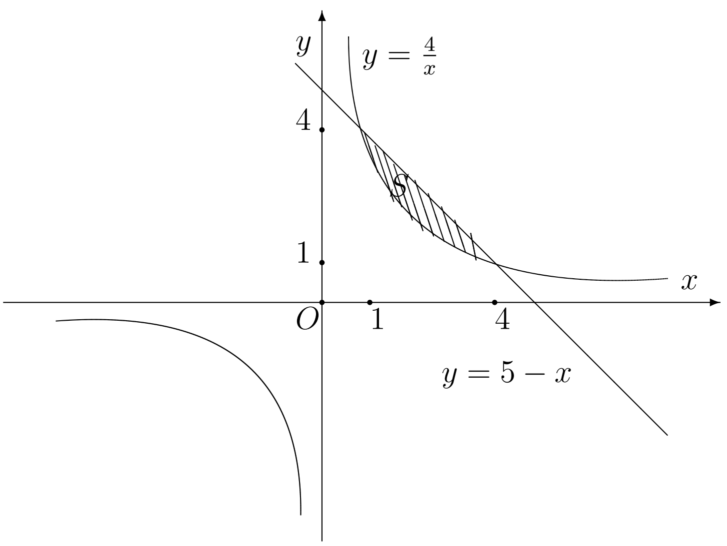
$$S = S_1 + S_2 = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (f(x) + g(x))\,dx.$$



Пример. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $xy = 4$, $x + y - 5 = 0$.

Решение. Построим фигуру, для этого построим график гиперболы $y = \frac{4}{x}$ и прямой $y = 5 - x$. Найдем точки пересечения этих линий, для этого решим систему уравнений.

$$\begin{cases} y = \frac{4}{x} \\ y = 5 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 - x = \frac{4}{x} \\ y = 5 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x + 4 = 0 \\ y = 5 - x \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases} \end{array} \right.$$



Тогда вычисляем

$$S = \int_1^4 \left(5 - x - \frac{4}{x}\right)\,dx = 5x - \frac{x^2}{2} \;\; -4\ln|x| \Bigg|_1^4 = 5(4-1) - \frac{4^2}{2} + \frac{1^2}{2} - 4\ln 4 + 4\ln 1 =$$

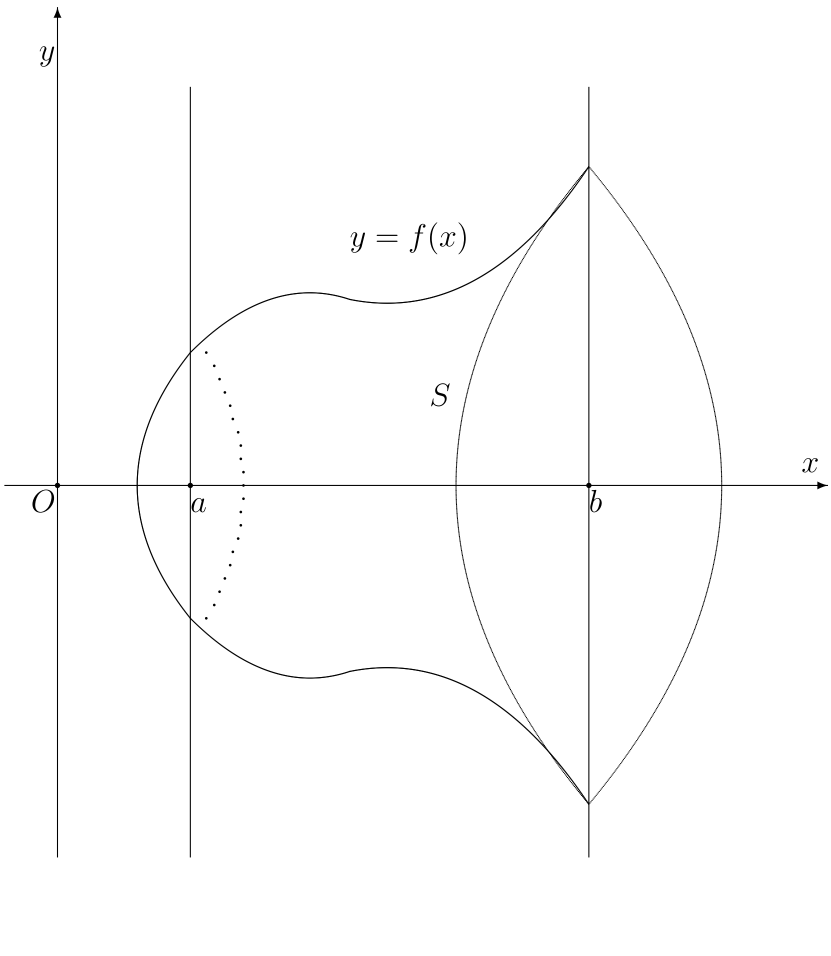
$$= 15 - \frac{15}{2} - 4\ln 4 = \frac{15}{2} - 4\ln 4 \approx 1,95\text{ед.}^2$$

3.3.2. Вычисление объемов тел вращения

Рассмотрим криволинейную трапецию, ограниченную линиями: сверху графиком функции $y = f(x)$, $f(x) \geq 0$, снизу осью Ox, слева прямой $x = a$, справа прямой $x = b$ (см. рис. ниже). И пусть указанная трапеция вращается вокруг оси Ox. Полученное тело называется **телом вращения**. Проведем через произвольную точку x оси Ox сечение этого тела плоскостью перпендикулярной оси Ox. Это сечение есть круг с радиусом $y = f(x)$.

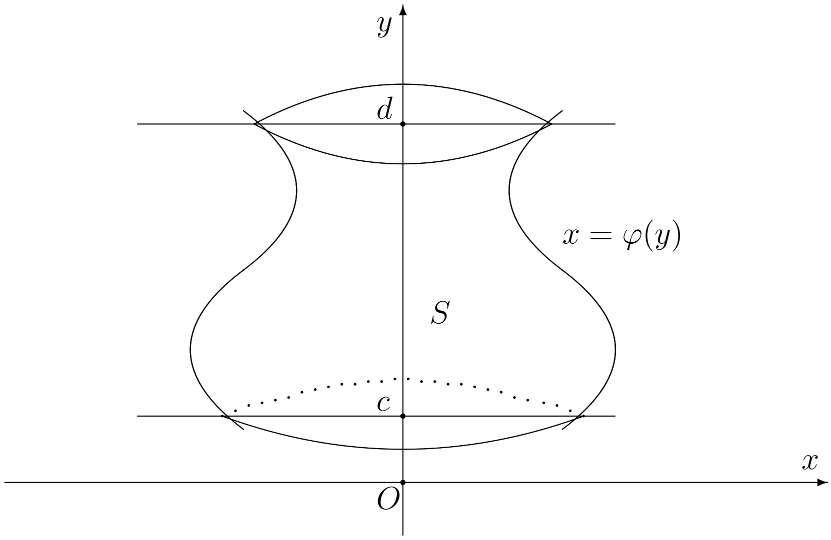
Следовательно, $s(x) = \pi y^2$. Применяя формулу объема тела, получаем:

$$V_x = \pi \int\limits_a^b f^2(x)\, dx.$$



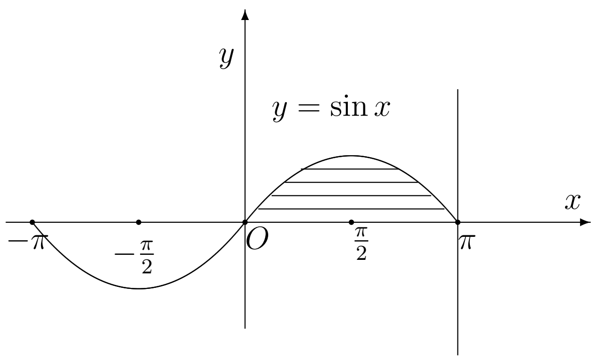
Если криволинейная трапеция ограничена линиями: сверху графиком функции $x = \varphi(y)$, $\varphi(y) \geq 0$, осью Oy, прямыми $y = c$, справа прямой $y = d$. То объем тела, образованного вращением этой трапеции вокруг оси Oy, равен

$$V_y = \pi \int\limits_c^d \varphi^2(y)\, dy.$$



Пример. Вычислить объем тела, полученного при вращении вокруг оси Ox фигуры, ограниченной графиком функции $y = \sin x$, прямыми $y = 0$, $x = 0$, $x = \pi$.

Решение. Построим фигуру.



$$V_{Ox} = \pi \int\limits_0^\pi \sin^2 x\, dx = \pi \int\limits_0^\pi \frac{1-\cos 2x}{2}\, dx = \frac{\pi}{2} \int\limits_0^\pi (1-\cos 2x)\, dx =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(x - \frac{\sin 2x}{2}\right)\Bigg|_0^\pi = \frac{\pi}{2}\left(\pi - 0 - \frac{\sin 2\pi}{2} + \frac{\sin 2\cdot 0}{2}\right) = \frac{\pi^2}{2} \approx 4{,}93 \text{ ед.}^3$$

3.4. Несобственные интегралы

Определенный интеграл от непрерывной функции $y = f(x)$ с конечным промежутком интегрирования $[a; b]$ называется **собственным интегралом**. Далее, рассмотрим несобственные интегралы двух видов.

1. Интеграл от непрерывной функции $y = f(x)$, но с бесконечным промежутком интегрирования — **несобственный интеграл I рода**.

2. Интеграл с конечным промежутком интегрирования, но от функции, которая терпит разрыв II рода на этом промежутке — **несобственный интеграл II рода**.

1. *Несобственные интегралы I рода.*

К несобственным интегралам I рода относят интегралы следующего вида:

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)\,dx$$

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на промежутке $[a; +\infty)$. Рассмотрим интеграл $I(b) = \int\limits_a^b f(x)\,dx$. Этот интеграл имеет смысл при любом $b > a$.

Если существует конечный предел

$$\lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)\,dx,$$

то этот предел называется **несобственным интегралом первого рода** от функции $f(x)$ и обозначается:

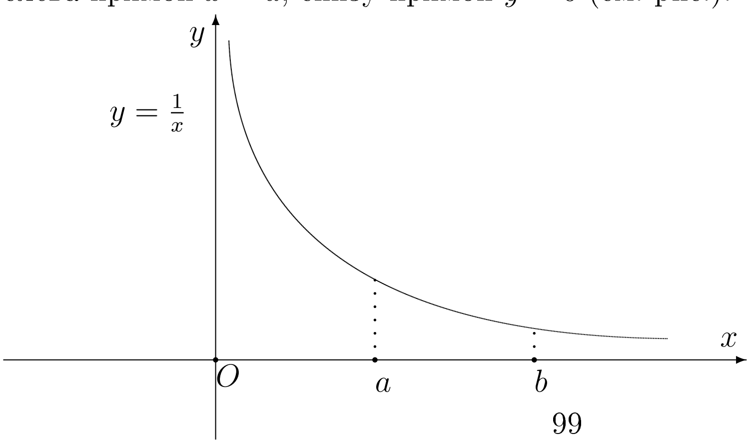
$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Таким образом, имеем

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)\,dx \qquad (1)$$

Если предел существует, то несобственный интеграл называется сходящимся и его значение равно значению предела. Если предел не существует или равен ∞, то интеграл называется расходящимся.

Геометрический смысл несобственного интеграла I рода — площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции $y = f(x)$, считаем, что $f(x) \geq 0$, слева прямой $x = a$, снизу прямой $y = 0$ (см. рис.).



Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на промежутке $(-\infty; b]$.

Аналогичным образом определяется несобственный интеграл:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{b} f(x)\,dx \tag{2}$$

Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на $(-\infty; +\infty)$.

Несобственный интеграл с двумя бесконечными пределами определяется формулой:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx \tag{3}$$

где c — произвольное число. При этом интеграл (3) слева сходится лишь тогда, когда сходятся оба интеграла справа. Если хотя бы один из двух интегралов справа в формуле (3) расходится, то интеграл слева расходится.

Примеры.

(a) Вычислить

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^4}$$

Решение.

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^4} = \lim_{b\to+\infty} \int_{1}^{b} \frac{dx}{x^4} = \lim_{b\to+\infty} \left.\frac{-1}{3x^3}\right|_{1}^{b} = \lim_{b\to+\infty} \left(\frac{-1}{3b^3} - \frac{-1}{3\cdot 1}\right) = \frac{1}{3}.$$

Поскольку предел существует и конечен, то исходный интеграл сходится и его значение равно $\frac{1}{3}$.

(b) Вычислить

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

Решение.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{b\to+\infty} \int_{0}^{b} \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \operatorname{arctg} x\big|_{a}^{0} + \lim_{b\to+\infty} \operatorname{arctg} x\big|_{0}^{b} = \operatorname{arctg} 0 - \lim_{a\to-\infty} \operatorname{arctg} a + \lim_{b\to+\infty} \operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} 0 =$$

$$= -\left(\frac{-\pi}{2}\right) + \left(\frac{\pi}{2}\right) - 0 = \pi.$$

Поскольку предел существует и конечен, то исходный интеграл сходится и его значение равно π.

(c) Вычислить

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \cos x \; dx$$

Решение.

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \cos x \; dx = \lim_{b\to+\infty} \sin x|_0^b = \lim_{b\to+\infty} (\sin b - \sin 0) = \lim_{b\to+\infty} \sin b.$$

Но полученный предел не существует, следовательно, исходный интеграл расходится.

Теорема (предельный признак сравнения.) Пусть функции $f(x) > 0$ и $g(x) > 0$. Если существует предел

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k, \; 0 < k < +\infty,$$

то интегралы $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x) \; dx$ и $\int\limits_{a}^{+\infty} g(x) \; dx$ одновременно оба сходятся или оба расходятся.

Замечание. Сравнение производим с каноническим интегралом

$$\int\limits_{a}^{+\infty} \frac{dx}{x^n}.$$

Вычислим его, предполагая, что $n > 1$:

$$\int\limits_{a}^{+\infty} \frac{dx}{x^n} = \lim_{b\to+\infty} \left.\frac{1}{(-n+1)x^{n-1}}\right|_a^b = \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{(-n+1)b^{n-1}} - \frac{1}{(-n+1)a^{n-1}} = -\frac{1}{(-n+1)a^{n-1}},$$

следовательно, исходный интеграл сходится. Предполагаем, что $n < 1$, тогда

$$\int\limits_{a}^{+\infty} \frac{dx}{x^n} = \lim_{b\to+\infty} \left.\frac{1}{(-n+1)x^{n-1}}\right|_a^b = +\infty,$$

следовательно исходный интеграл расходится.

Наконец, вычислим его, предполагая, что $n = 1$:

$$\int\limits_{a}^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty} \ln|x||_a^b = \lim_{b\to+\infty} \ln|b| - \ln|a| = +\infty,$$

следовательно, исходный интеграл расходится. Таким образом,

$$\int\limits_{a}^{+\infty} \frac{dx}{x^n} \quad \begin{array}{c} \text{сходится при } n > 1 \\ \text{расходится при } n \leq 1 \end{array}$$

Пример. Исследуйте на сходимость интеграл:

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{3x^5 + 6x^3 - 7x}$$

Решение. Рассмотрим предел отношения двух функций $f(x) = \frac{1}{3x^5+6x^3-7x}$ и $g(x) = \frac{1}{x^n}$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{3x^5+6x^3-7x}}{\frac{1}{x^n}} = \frac{x^n}{3x^5 + 6x^3 - 7x} = \left| \quad \text{возьмем } n = 5 \right| = \frac{1}{3}.$$

Так как предел отношения двух функций конечен, то интегралы от этих функций ведут себя одинаково. Но интеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} \frac{dx}{x^5}$ сходится, следовательно, исходный интеграл сходится по предельному признаку сравнения.

2. *Несобственные интегралы II рода.*

Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на промежутке $[a; b)$, а при $x = b$ либо функция не определена, либо терпит разрыв II рода.

Если существует конечный предел

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx,$$

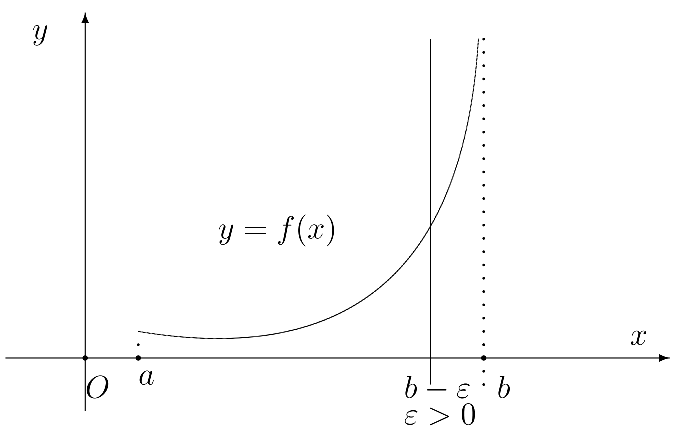
то этот предел называется **несобственным интегралом второго рода** от функции $f(x)$ и обозначают:

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx.$$

Таким образом,

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{a}^{b-\varepsilon} f(x)\, dx \tag{1}$$

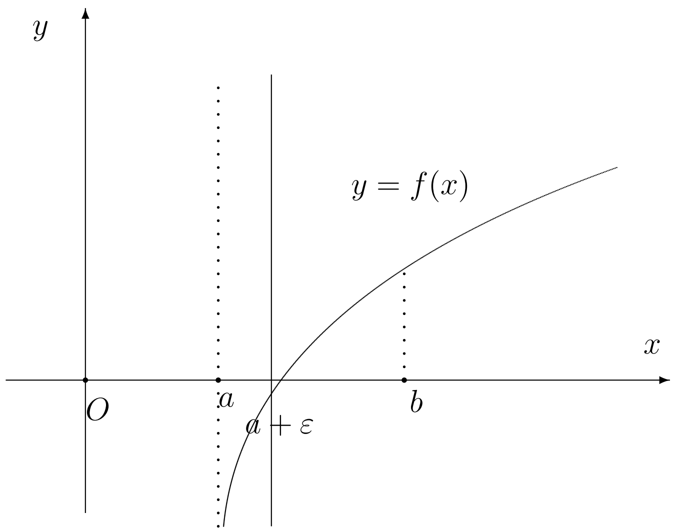
Если предел существует, то несобственный интеграл называется сходящимся и его значение равно значению предела. Если предел не существует или равен ∞, то интеграл называется расходящимся.



Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна при всех $a < x \le b$, а при $x = a$

либо функция не определена, либо терпит разрыв II рода. Аналогично,

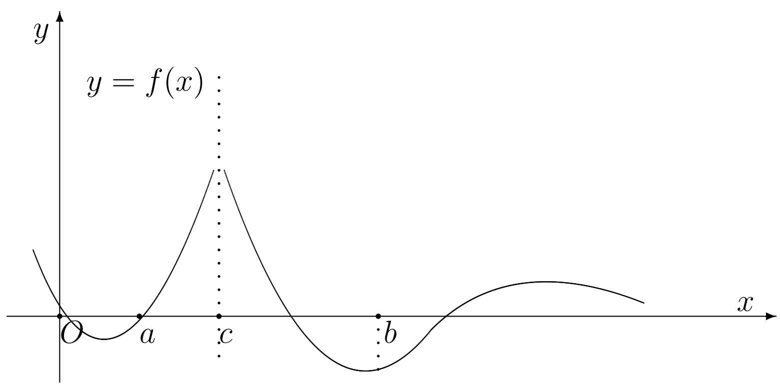
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx \tag{2}$$



Если функция $y = f(x)$ терпит разрыв во внутренней точке $c \in [a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \tag{3}$$

При этом интеграл слева в (3) сходится лишь тогда, когда сходятся оба несобственных интеграла справа. В противном случае, интеграл расходится.



Примеры.

(a) Вычислить

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$$

Решение.

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{-\sqrt{1-x}}{\frac{1}{2}}\Bigg|_0^{1-\varepsilon} = -\lim_{\varepsilon\to 0} 2(\sqrt{1-(1-\varepsilon)}-\sqrt{1-0}) =$$

$$0+2\cdot 1 = 2.$$

Поскольку предел существует и конечен, то исходный интеграл сходится и его значение равно 2.

(b) Вычислить

$$\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{x^3}$$

Решение.

$$\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{x^3} = \int\limits_{-1}^0 \frac{dx}{x^3} + \int\limits_0^1 \frac{dx}{x^3} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{-1}^{0-\varepsilon} \frac{dx}{x^3} + \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{0+\varepsilon}^1 \frac{dx}{x^3}.$$

Рассмотрим каждый интеграл отдельно:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{-1}^{0-\varepsilon} \frac{dx}{x^3} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{-2x^2}\Bigg|_{-1}^{0-\varepsilon} = \frac{-1}{2}\left(\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{(0-\varepsilon)^2} - \frac{1}{(-1)^2}\right) = \infty,$$

следовательно, интеграл расходится.

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{0+\varepsilon}^1 \frac{dx}{x^3} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{-2x^2}\Bigg|_{0+\varepsilon}^{1} = \frac{-1}{2}\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{(0+\varepsilon)^2}\right) = \infty,$$

следовательно, интеграл расходится. Итого, исходный интеграл расходится.

Теорема (предельный признак сравнения.) Пусть функции $f(x) > 0$ и $g(x) > 0$ — непрерывны на промежутке $[a, b)$ и в точке $x = b$ терпят разрыв. Если существует предел

$$\lim_{x\to b}\frac{f(x)}{g(x)} = k,\ 0 < k < +\infty,$$

то интегралы $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ и $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ одновременно оба сходятся или оба расходятся.

Замечание. Сравнение производим с каноническим интегралом

$$\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^n}.$$

Вычислим его, предполагая, что $n > 1$:

$$\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^n} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{(-n+1)(b-x)^{n-1}}\bigg|_a^{b-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{(-n+1)(b-b-\varepsilon)^{n-1}} - \frac{1}{(-n+1)a^{n-1}} =$$

$$\left[\infty - \frac{1}{(-n+1)a^{n-1}}\right] = [\infty],$$

следовательно, исходный интеграл расходится. Предполагаем, что $n < 1$, тогда

$$\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^n} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{(-n+1)(b-x)^{n-1}}\bigg|_a^{b-\varepsilon} = \frac{(b-(b-x))^{-n+1}}{(-n+1)} - \frac{a^{-n+1}}{(-n+1)} =$$

$$= 0 - \frac{a^{-n+1}}{(-n+1)} = \frac{a^{-n+1}}{(-n+1)},$$

следовательно исходный интеграл сходится.

Наконец, вычислим его, предполагая, что $n = 1$:

$$\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)} = \lim_{\varepsilon\to 0} -\ln|b-x|\,\big|_a^{b-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0} \ln|b-(b-\varepsilon)| - \ln|b-a| = [-\infty - \ln|b-a|] = [-\infty],$$

следовательно, исходный интеграл расходится.

Таким образом,

$$\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^n} \quad \begin{matrix} \text{сходится при } n < 1 \\ \text{расходится при } n \geq 1 \end{matrix}$$

В случае, если особой точкой является точка $x = a$, то сравнение производится с каноническим интегралом вида

$$\int\limits_a^b \frac{dx}{(a+x)^n}.$$

Аналогично,

$$\int\limits_a^b \frac{dx}{(a+x)^n} \quad \begin{matrix} \text{сходится при } n < 1 \\ \text{расходится при } n \geq 1 \end{matrix}$$

Пример. Исследуйте на сходимость интеграл:

$$\int\limits_{\frac{1}{3}}^1 \frac{dx}{\sin(3x-1)}.$$

Решение.

Отметим, что особой точкой является точка $x = \frac{1}{3}$. Рассмотрим предел отношения двух функций $f(x) = \frac{1}{\sin(3x-1)}$ и $g(x) = \frac{1}{\frac{1}{3}-x}$:

$$\lim_{x\to\frac{1}{3}} \frac{\frac{1}{\sin(3x-1)}}{\frac{1}{\frac{1}{3}-x}} = \lim_{x\to\frac{1}{3}} \frac{\frac{1}{3}-x}{\sin(3x-1)} = \lim_{x\to\frac{1}{3}} \frac{\frac{1}{3}-x}{\sin 3\left(x-\frac{1}{3}\right)} = \left[\frac{0}{0}\right] = -\lim_{x\to\frac{1}{3}} \frac{x-\frac{1}{3}}{\sin 3\left(x-\frac{1}{3}\right)} = -\frac{1}{3}.$$

Так как предел отношения двух функций существует и конечен, то интегралы от этих функций ведут себя одинаково. Но интеграл $\int\limits_{\frac{1}{3}}^{1} \frac{dx}{\left(\frac{1}{3}-x\right)}$ расходится, следовательно, исходный интеграл расходится по предельному признаку сравнения.

Список литературы

1. Акманова З.С. Неопределенный интеграл: от теории к практике: Учебное пособие [Электронный ресурс] / З.С. Акманова. - М.: ФГУП НТЦ «Информрегистр», 2016.

2. Булычева С.В. Математика: пределы и непрерывность функции одной переменной. Практикум: Учебное пособие [Электронный ресурс] / С.В. Булычева - М.: ФГУП НТЦ «Информрегистр», 2017.

3. Гугина Е.М. Высшая математика: учебно-методическое пособие [Электронный ресурс] / Е.М. Гугина. - М.: ФГУП НТЦ «Информрегистр», 2016.

4. Гугина Е.М. Дифференциальное исчисление функции одной переменной [Электронный ресурс] / Е.М. Гугина, А.Л. Анисимов, Л.А. Грачева. - М.: ФГУП НТЦ «Информрегистр», 2018.

5. Изосов, А.В. Основы математического анализа: учеб. пособие. Часть 2. Интегральное исчисление функции одной переменной. Дифференциальное и интегральное исчисление функций нескольких переменных [Электронный ресурс] / А.В. Изосов, Л.А. Изосова, Л.А. Грачева. - М.: ФГУП НТЦ «Информрегистр», 2014.

6. Пузанкова Е.А. Введение в математический анализ: Учебное пособие [Электронный ресурс] / Е.А. Пузанкова, Н.А. Квасова - М.: ФГУП НТЦ «Информрегистр», 2016.

7. Шипачев В.С. Задачник по высшей математике: Учебное пособие / В.С. Шипачев. - 10-е изд., стер. - М: НИЦ ИНФРА-М, 2016. - 304 с. ISBN 978-5-16-010071-5

Учебное текстовое электронное издание

Коновальчик Елена Александровна
Шеметова Вероника Владимировна

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ: ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Учебное пособие

1,41 Мб
1 электрон. опт. диск

г. Магнитогорск, 2019 год
ФГБОУ ВО «МГТУ им. Г.И. Носова»
Адрес: 455000, Россия, Челябинская область, г. Магнитогорск,
пр. Ленина 38

ФГБОУ ВО «Магнитогорский государственный
технический университет им. Г.И. Носова»
Кафедра высшей математики
Центр электронных образовательных ресурсов и
дистанционных образовательных технологий
e-mail: ceor_dot@mail.ru