



Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова»

**Г.Б. Белых**

**А.Н. Шеметов**

**Ю.Н. Кондрашова**

**А.В. Варганова**

**Е.А. Панова**

## **МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ЭНЕРГЕТИКИ**

*Утверждено Редакционно-издательским советом университета  
в качестве учебного пособия*

Магнитогорск  
2019

**Рецензенты:**

кандидат технических наук, доцент,  
заведующая кафедрой энергетики,  
НЧОУ ВО «Технический университет УГМК»  
**С.В. Федорова**

доктор технических наук, профессор,  
заведующая кафедрой вычислительной техники и программирования,  
ФГБОУ ВО «Магнитогорский государственный технический  
университет им. Г.И. Носова»  
**О.С. Логунова**

**Белых Г.Б., Шеметов А.Н., Кондрашова Ю.Н., Варганова А.В., Панова Е.А.**  
**Математические задачи энергетики [Электронный ресурс] : учебное пособие**  
/ Герман Борисович Белых, Андрей Николаевич Шеметов, Юлия Николаевна  
Кондрашова, Александра Владимировна Варганова, Евгения Александровна  
Панова ; ФГБОУ ВО «Магнитогорский государственный технический универ-  
ситет им. Г.И. Носова». – Электрон. текстовые дан. (4,82 Мб). – Магнитогорск :  
ФГБОУ ВО «МГТУ им. Г.И. Носова», 2019. – 1 электрон. опт. диск (CD-R). –  
Систем. требования : IBM PC, любой, более 1 GHz ; 512 Мб RAM ; 10 Мб HDD ;  
MS Windows XP и выше ; Adobe Reader 8.0 и выше ; CD/DVD-ROM дисковод ;  
мышь. – Загл. с титул. экрана.

ISBN 978-5-9967-1666-1

Пособие раскрывает особенности применения методов и алгоритмов теоретической математики к решению прикладных задач электротехники и электроэнергетики. Содержатся основные положения теории вероятностей, математической статистики и оптимизации, используемые в расчетах электрических нагрузок; методы матричной алгебры и теории графов для расчетов сложно-замкнутых электрических сетей; методы анализа переходных процессов для оценки устойчивости электрических систем. Помимо теоретических разделов приведены практические примеры, справочные данные и задания для самостоятельного решения.

Издание предназначено для обучающихся направления подготовки 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника». Может быть полезно специалистам в области проектирования и эксплуатации систем электроснабжения.

УДК 621.311.1

ISBN 978-5-9967-1666-1 © Белых Г.Б., Шеметов А.Н., Кондрашова Ю.Н.,  
Варганова А.В., Панова Е.А., 2019  
© ФГБОУ ВО «Магнитогорский государственный  
технический университет им. Г.И. Носова», 2019

## Содержание

ВВЕДЕНИЕ.....	6
1. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ В ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИКЕ.....	7
1.1. Случайные события в электроэнергетике.....	7
1.1.1. Законы теории вероятностей для независимых случайных событий..	8
1.1.2. Законы теории вероятностей для зависимых случайных событий....	11
1.1.3. Биномиальный закон для повторяющихся случайных событий.....	13
1.1.4. Задачи для самостоятельного решения [5] .....	14
1.2. Случайные величины в электроэнергетике .....	15
1.2.1. Количественные оценки вероятностей случайных величин .....	16
1.2.2. Основные законы распределения случайных величин .....	17
1.2.3. Математическое ожидание.....	20
1.2.4. Дисперсия и среднееквадратическое отклонение .....	21
1.2.6. Доверительные интервалы .....	25
1.2.7. Задачи для самостоятельного решения [5] .....	26
2. Применение методов математической статистики в электроэнергетике .....	28
2.1. Вариационные ряды и их характеристики.....	28
2.2. Зависимые случайные величины в электроэнергетике .....	32
2.2.1. Метод наименьших квадратов .....	35
2.2.2. Коэффициенты регрессии .....	38
2.2.3. Коэффициент парной корреляции .....	39
2.2.4. Практическое применение коэффициентов регрессии и корреляции	40
2.2.5. Оценка тесноты связи между случайными величинами .....	44
2.2.6. Множественная корреляция.....	46
2.2.7. Задачи для самостоятельного решения.....	47
2.3. Применение методов теории вероятностей и математической статистики для оценки надежности систем электроснабжения .....	49
2.3.1. Основные показатели надежности элементов систем электроснабжения .....	49
2.3.2. Показатели надежности в резервированной схеме электроснабжения .....	52
2.3.3. Определение показателей надежности в дублированной системе электроснабжения .....	54
3. ПРИМЕНЕНИЕ МАТРИЧНОЙ АЛГЕБРЫ И ТЕОРИИ ГРАФОВ В РАСЧЕТАХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СЕТЕЙ.....	57

3.1. Матричное описание схемы замещения .....	59
3.2. Обратные матрицы .....	61
3.2.1. Классический метод вычисления обратной матрицы .....	63
3.2.2. Вычисление обратной матрицы методом итераций .....	64
3.2.3. Вычисление обратной матрицы путем деления исходной на блоки .	66
3.2.4. Преобразование системы матричных уравнений .....	68
3.2.5. Определение обратной матрицы после деления на блоки.....	69
3.3. Применение теории графов к расчету электрических сетей .....	71
3.3.1. Общие понятия о графах .....	71
3.3.2. Дерево и хорды графа .....	71
3.3.3. Первая матрица инцидентий.....	72
3.3.4. Применение матриц $\mathbf{M}$ и $\mathbf{C}_p$ .....	75
3.3.5. Вторая матрица инцидентий.....	76
3.3.6. Применение матрицы контуров $\mathbf{N}$ .....	78
3.3.7. Связь между матрицами инцидентий .....	79
3.4. Обобщенное уравнение состояния и способы его решения .....	79
3.4.1. Независимые токи ветвей.....	80
3.4.2. Независимые падения напряжений на ветвях .....	82
3.4.3. Решение обобщенного уравнения состояния электрической сети методом преобразования .....	83
3.5. Применение узловых и контурных уравнений в расчетах режимов сложных электрических сетей .....	85
3.5.1. Узловые уравнения .....	85
3.5.2. Применение контурных уравнений.....	87
3.5.3. Задачи для самостоятельного решения.....	90
3.6. Пример расчета параметров режима сложноразветвленной сети.....	93
3.6.1. Составление схемы замещения и расчет её параметров .....	94
3.6.2. Составление направленного графа и матриц инцидентий .....	97
3.6.3. Расчет параметров установившегося режима прямым методом.....	98
3.6.4. Расчет параметров установившегося режима методом узловых напряжений .....	103
3.6.5. Расчет параметров установившегося режима методом контурных токов.....	107
3.6.6. Проверка и анализ результатов расчета.....	109

3.6.7. Расчет параметров установившегося режима в программном комплексе КАТРАН .....	112
<b>4. МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ И АНАЛИЗА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ И УСТОЙЧИВОСТИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СИСТЕМ .....</b>	<b>122</b>
4.1. Определение устойчивости состояния равновесия .....	123
4.2. Передаточные функции типовых звеньев и систем.....	125
4.3. Передаточные функции разомкнутых систем.....	130
4.4. Передаточные функции замкнутых систем.....	132
4.4.1. Инерционное звено, охваченное жесткой обратной связью.....	133
4.4.2. Инерционное звено, охваченное гибкой обратной связью .....	133
4.5. Алгебраические критерии устойчивости.....	135
4.5.1. Критерий Гурвица.....	136
4.5.2. Критерий Рауса.....	138
4.6. Частотные критерии устойчивости .....	139
4.6.1. Принцип аргумента.....	142
4.6.2. Частотный критерий Михайлова.....	145
4.6.3. Критерий устойчивости Найквиста.....	146
4.7. Построение и оценка переходного процесса электрической системы..	149
4.7.1. Построение переходного процесса по заданной передаточной функции системы.....	150
4.7.2. Построение переходного процесса по частным характеристикам системы.....	151
4.7.3. Косвенные методы и оценки переходного процесса.....	157
4.7.4. Задачи для самостоятельного решения [6] .....	160
<b>5. КУРСОВАЯ РАБОТА: СТРУКТУРА И ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ .....</b>	<b>163</b>
5.1. Структура и содержание курсовой работы.....	163
5.1.1. Раздел 1. Статистическая обработка графиков электрических нагрузок .....	163
5.1.2. Раздел 2. Расчет параметров схемы замещения сети .....	164
5.1.3. Раздел 3. Расчет естественного распределения потоков мощности для разомкнутой и замкнутой сети.....	165
5.1.4. Оформление курсовой работы .....	165
<b>БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....</b>	<b>171</b>
<b>ГЛОССАРИЙ.....</b>	<b>172</b>

## ВВЕДЕНИЕ

При математическом описании энергетических систем и комплексов современная наука исходит из предположения, что наблюдаемая изменчивость окружающего мира имеет два источника. Один из них — действие известных причин и закономерностей, обусловленных непреложными физическими законами. Они характерны для относительно простых электротехнических схем и устройств. Однако для крупных электросетевых хозяйств и промышленных предприятий параметры состояния и режимы работы не могут целиком быть описаны только закономерными причинами в силу влияния различных случайных факторов. Без привлечения теории вероятностей и математической статистики в таких случаях невозможно судить не только о точности и обоснованности выводов, но и вообще об их адекватности.

Практика научных исследований, проводимых кафедрой электроснабжения промышленных предприятий накопила большой опыт решения различных прикладных задач с использованием чисто математических методов. К примеру, аппарат теории вероятностей и математической статистики используются для установления закономерностей электропотребления промышленных предприятий, для анализа и расчетов показателей надежности систем электроснабжения. С помощью матричной алгебры и теории графов производится расчет сложно-замкнутых электрических сетей и систем электроснабжения. Дифференциальные уравнения в совокупности с операционным методом их решения могут быть использованы для анализа переходных процессов и оценки устойчивости энергетических систем.

Предлагаемое вашему вниманию учебное пособие включает в себя теоретические разделы, практические примеры и задания для самостоятельного решения. При изучении теоретического материала необходимо основное внимание обращать на то, как известные из курса «Высшей математики» методы и уравнения можно применить к решению прикладных задач моделирования, анализа и проектирования электроэнергетических систем. Отдельные примеры и задачи можно прямо «транслировать» или компилировать и использовать в курсовых и дипломных работах, а также в профессиональной деятельности. Таким образом, «Математические задачи энергетики...» являются неким переходным мостиком между «Высшей математикой» и специальными дисциплинами, изучение которых начинается с третьего курса бакалавриата.

Издание посвящается светлой памяти Германа Борисовича Белых — идейного вдохновителя и первого автора данного учебного курса в нашем вузе.

# 1. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ В ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИКЕ

## 1.1. Случайные события в электроэнергетике

**Случайным событием** называется событие, которое может в конкретных условиях произойти, а может и не произойти. Достоверным называется событие, которое происходит обязательно, а невозможным — событие, которое не может произойти.

В электроэнергетике практически все события, которые происходят в электроустановках, относятся к случайным. Вот ряд примеров, связанных с отключениями электроустановок, которые произошли в результате появления случайных событий.

Подстанция №98, питающая объекты ЖКХ Ленинского района г. Магнитогорска, в том числе и ряд тяговых подстанций трамвайного движения, отключилась по причине короткого замыкания в ОРУ-35 кВ. Короткое замыкание произошло на шинах открытого распределительного устройства (ОРУ), где разместилась на отдыхе стая ворон. Появлению режима короткого замыкания также способствовали погодные условия — осенняя пора и очень высокая влажность воздуха. Таким образом, сочетание целого ряда случайных событий — налет стаи птиц на подстанцию, наличие влаги на токоведущих частях и неизбирательное срабатывание релейной защиты привели к длительному простоем электрической подстанции и остановке трамвайного движения по основным маршрутам.

Другой пример — обрыв проводов на воздушной линии электропередачи (ВЛЭП) в результате образования гололеда. Механический расчет проводов выполнялся, однако толщина стенки гололеда превысила норму для данной климатической зоны. Этому повреждению также способствовал ураганный ветер. Наложение трех случайных событий привело к отказу электроснабжения.

Если рассматривать достаточно большое число случайных событий, то можно выявить определенные объективные закономерности их возникновения. Эта объективная закономерность выражается количественной характеристикой, которая называется **вероятностью случайного события**. Зная эту вероятность, можно прогнозировать и оценивать вероятность появления аварийных ситуаций и отключений в электроустановках.

В математике существует два определения вероятности случайного события: классическое и статистическое. Классическое применимо в тех случаях, когда изучаемые явления образуют полную группу попарно несовместимых и равновозможных событий. Оно формулируется следующим образом:

Если результаты испытаний можно представить в виде полной группы  $N$  равновозможных попарно несовместимых событий, и если случайное событие  $A$  появляется только в  $M$  случаях, то вероятность события  $A$  равна отношению числа случаев, благоприятствующих событию  $A$ , к общему числу всех событий  $N$ :

$$P(A) = \frac{M}{N}. \quad (1.1)$$

Однако это классическое определение вероятности пригодно только для простейших случайных событий, для которых в ходе испытаний можно получить полную группу  $N$  равновозможных и попарно несовместимых событий.

В электроэнергетике мы имеем дело с более сложными случайными событиями, для которых полное число случаев, когда данное событие происходит или не происходит, не может быть посчитано. Поэтому приходится пользоваться статистическим определением вероятности:

Относительная частота появления случайного события представляет собой отношение числа случаев, когда событие происходит  $m$ , к общему числу наблюдаемых случаев  $n$ , т.е.

$$p = \frac{m}{n}. \quad (1.2)$$

Таким образом, под статистической вероятностью понимают некоторое постоянное значение относительной частоты появления события при большом количестве наблюдений.

*Пример 3А.* На склад поступило две партии электрических ламп с разным номинальным напряжением: 950 шт. — на 220 В и 250 шт. — на 36 В. В результате ошибки кладовщика партии были перепутаны. Какова вероятность того, что первая же произвольно выбранная на складе лампа будет иметь номинальное напряжение 220 В?

*Решение.* Пусть  $A$  — событие, состоящее в том, что лампочка имеет напряжение 220 В. Так как число ламп на 220 В  $m = 950$ , а общее число ламп  $n = 950 + 250 = 1200$ , то вероятность события  $A$  по формуле (1.1):

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{950}{1200} = 0,79.$$

Вероятность противоположного события (напряжение лампы не 220 В):

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,79 = 0,21.$$

### 1.1.1. Законы теории вероятностей для независимых случайных событий

Два случайных события являются **независимыми**, если вероятности их появления остаются неизменными независимо от того, происходят эти события или нет.

Например, два силовых трансформатора работают по отдельной схеме, т.е. электрически не связаны друг с другом. Пусть событие  $A$  — отказ в работе первого трансформатора, а событие  $B$  — отказ в работе второго. Вероятность отказа первого обозначим  $P(A)$ , вероятность отказа второго —  $P(B)$ . Если первый трансформатор по каким-либо причинам откажет в работе, то от этого вероятность отказа второго не изменится. И наоборот, если откажет второй, то



вероятность отказа первого также останется на прежнем уровне. Следовательно, эти два события  $A$  и  $B$  можно считать **независимыми**.

Существует более строгое определение для независимых событий. Согласно теории вероятностей два случайных события  $A$  и  $B$  называются независимыми, если для них имеет место правило умножения вероятностей в форме (1.3), т.е. если вероятность их совмещения равна произведению их вероятностей:

$$P(A \text{ и } B) = P(A) \cdot P(B). \quad (1.3)$$

Отсюда вытекает первый закон теории вероятностей для независимых случайных событий:

**Вероятность одновременного появления двух независимых и совместимых событий равна произведению их вероятностей.**

*Пример 3.2.* На электрической подстанции установлены два силовых трансформатора. Вероятности их исправной работы составляют  $p = 0,9$ . Определить вероятность исправной работы всей подстанции.

*Решение.* Электрическая подстанция исправна, если исправны оба трансформатора. Вероятность этого состояния составляет:

$$P(A \text{ и } B) = P(A) \cdot P(B) = 0,9 \cdot 0,9 = 0,81.$$

Последующие два закона справедливы для несовместимых случайных событий:

**Вероятность одновременного появления двух несовместимых независимых событий  $A$  и  $B$  равна нулю:**

$$P(A \text{ и } B) = 0. \quad (1.4)$$

**Вероятность появления хотя бы одного из двух независимых и несовместимых случайных событий  $A$  и  $B$  равна сумме вероятностей этих событий:**

$$P(A \text{ или } B) = P(A) + P(B). \quad (1.5)$$

*Пример 3.3.* Электрическая энергия на промышленное предприятие передается по двум ЛЭП, подключенным к двум независимым источникам питания. Событие  $A$  заключается в том, что первая ЛЭП в данный момент времени находится в рабочем состоянии, а на второй ЛЭП в это время происходит отказ, и она отключается. Событие  $B$  — вторая ЛЭП исправна, а на первой ЛЭП — отказ и ее отключение. События  $A$  и  $B$  в том виде, как они представлены, являются несовместимыми. Какова вероятность того, что в данный момент времени в рабочем состоянии будет находиться хотя бы одна ЛЭП из двух?

Искомую вероятность следует определять по закону сложения вероятностей (1.5).

И наконец четвертый закон:

**Вероятность появления хотя бы одного из двух случайных независимых и совместимых событий  $A$  и  $B$  равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их одновременного появления:**

$$P(A \text{ или } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ и } B). \quad (1.6)$$

*Пример 3.4.* На комплектной трансформаторной подстанции установлены два силовых трансформатора. Мощности трансформаторов выбраны с учетом того, что при допустимой перегрузке один трансформатор обеспечивает нормальную работу подстанции. Какова вероятность того, что из двух трансформаторов в работе останется хотя бы один и обеспечит питание потребителей?

Решим этот пример для случая, когда параметры трансформаторов одинаковы и вероятность исправной работы составляет  $p = 0,9$ . Согласно (1.6) имеем:

$$P(A \text{ или } B) = 0,9 + 0,9 - 0,9 \cdot 0,9 = 0,99.$$

Как видно из этого примера, двухтрансформаторные подстанции более надежны в работе (имеют вероятность исправной работы 0,99), чем однострансформаторная (у них вероятность исправной работы 0,9).

Часто в практических расчетах надежности технических систем используется понятие **противоположных случайных событий**, сумма вероятностей которых равна единице:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1, \quad (1.7)$$

где  $P(\bar{A})$  — вероятность появления противоположного события.

В электроэнергетике в качестве противоположного события можно рассматривать отказ в работе какого-либо элемента. Тогда, приняв в качестве вероятности исправной работы элемента обозначение « $p$ », а в качестве вероятности отказа — обозначение « $q$ », этот же закон можно записать в виде:

$$q + p = 1. \quad (1.8)$$

На практике это закон применяется для определения вероятности исправной работы, если в справочной литературе имеется вероятность отказа в работе электротехнических изделий, т.е.:

$$p = 1 - q. \quad (0.9)$$

*Пример 3.5.* Два потребителя электроэнергии работают независимо друг от друга. Вероятность бесперебойной работы первого потребителя  $P(A_1) = 0,9$ , второго —  $P(A_2) = 0,8$ . Определить вероятность бесперебойной работы обоих потребителей, а также вероятность исправного состояния хотя бы одного из них?

*Решение.* Бесперебойная работа первого и второго потребителя одновременно есть совмещение событий  $A_1$  и  $A_2$ . Так как эти события независимы, то по формуле (1.2) получаем:

$$P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) = 0,9 \cdot 0,8 = 0,72.$$

Пусть событие  $B$  соответствует бесперебойной работе хотя бы одного из потребителей. Его вероятность можно определить двумя способами:

*Первый способ.* Рассмотрим противоположное событие  $\bar{B}$ , означающее простой обоих потребителей. Очевидно, оно представляет собой совмещение двух событий  $\bar{A}_1$  и  $\bar{A}_2$ , т.е. простоев первого и второго потребителя.

Вероятность такого события:

$$P(\bar{B}) = P(\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2) = [1 - P(A_1)] \cdot [1 - P(A_2)] = 0,1 \cdot 0,2 = 0,02.$$

Отсюда:  $P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - 0,02 = 0,98$ .

*Второй способ.* Событие  $B$  происходит в том случае, когда имеет место одно из следующих трех несовместимых событий:

- $(A_1 \cdot \bar{A}_2)$  — первый потребитель работает, второй — не работает;
- $(\bar{A}_1 \cdot A_2)$  — первый потребитель не работает, второй — работает;
- $(A_1 \cdot A_2)$  — оба потребителя работают.

Таким образом, для независимых совместимых событий:

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1 \cdot \bar{A}_2 + \bar{A}_1 \cdot A_2 + A_1 \cdot A_2) = P(A_1 \cdot \bar{A}_2) + P(\bar{A}_1 \cdot A_2) + P(A_1 \cdot A_2) = \\ &= P(A_1) \cdot P(\bar{A}_2) + P(\bar{A}_1) \cdot P(A_2) + P(A_1) \cdot P(A_2) = \\ &= 0,9 \cdot 0,2 + 0,1 \cdot 0,8 + 0,8 \cdot 0,9 = 0,98. \end{aligned}$$

### 1.1.2. Законы теории вероятностей для зависимых случайных событий

Два события  $A$  и  $B$  являются **зависимыми**, если вероятность одного из них изменяется при появлении другого.

В электроэнергетике такие зависимые события наиболее часто проявляются в электрических сетях с изолированной нейтралью. Рассмотрим два режима работы такой сети — нормальный и аварийный.

Нормальный режим работы заключается в том, что изоляция всех трех фаз исправна и отсутствуют замыкания на землю. Из курса ТОЭ (теоретические основы электротехники) известно, что в таком режиме работы между фазами этой сети напряжения линейные (междуфазные) — 380 В для низковольтной сети 0,4 кВ, а каждая фаза по отношению к земле имеет напряжение фазное — 220 В, т.е. в  $\sqrt{3}$  раз меньше.

Вероятности повреждения изоляции и появления однофазного замыкания на землю в данный момент для всех трех фаз совершенно одинаковы и определяются напряжением фазным в 220 В.

Предположим, событие  $A$  произошло в виде замыкания на землю фазы «А». Как изменятся при этом электрические параметры электрической сети?

Из того же курса ТОЭ известно, что напряжение фазы «А» относительно земли будет равно нулю, а на оставшихся неповрежденных фазах «В» и «С» напряжение возрастает до линейного и составит 380 В. Таким образом, вероятность появления второго события, например замыкания на землю фазы «В», будет уже отличаться от вероятности появления события  $A$ , т.к. будет определяться уже линейным напряжением в 380 В, а не фазным в 220 В, как было ранее. Таким образом, здесь события  $A$  и  $B$  являются зависимыми.

Основные законы для зависимых случайных событий формулируются следующим образом:

**Условная вероятность события  $A$  по событию  $B$  при их совместимости и взаимозависимости равна отношению вероятности их одновременного появления к вероятности предшествующего события.**

Если первым происходит событие  $A$ , то условная вероятность  $P(A/B)$  определяется как:

$$P(A/B) = \frac{P(A \text{ и } B)}{P(B)}, \quad (1.10)$$

при этом  $P(A \text{ и } B) \neq P(A) \cdot P(B)$ .

**Вероятность одновременного появления двух зависимых и совместимых событий равна произведению условной вероятности первого события по второму на вероятность предшествующего события:**

$$P(A \text{ и } B) = P(A/B) \cdot P(A). \quad (1.11)$$

Рассмотрим пример на применение этих двух законов.

*Пример 3.6.* Вероятность повреждения любой фазы 3-фазной электрической сети с изолированной нейтралью составляет 0,01. Если одна фаза повреждена, то вероятность повреждения другой фазы составляет 0,1. Аналогично, если две фазы повреждены, то вероятность повреждения третьей фазы составляет 0,5. Определить вероятности одно-, двух- и трехфазных замыканий.

*Решение.* Вероятность однофазных замыканий указана в условии примера и составляет 0,01; причем авария может начаться с любой из трех фаз. Предположим, что повредилась фаза « $A$ ».

Условная вероятность первого события по второму (повреждение второй фазы, например « $B$ ») также указана в условии и составляет 0,1. Тогда вероятность одновременного повреждения двух фаз « $A$ » и « $B$ » по (1.3) составит:

$$P(A \text{ и } B) = 0,1 \cdot 0,01 = 0,001.$$

Условная вероятность первых двух событий (повреждение фаз « $A$ » и « $B$ ») и третьего события (повреждение третьей фазы « $C$ ») составляет 0,5 (из условия примера). Тогда вероятность повреждения всех трех фаз, т.е. трехфазного замыкания составит:

$$P(A \text{ и } B \text{ и } C) = 0,5 \cdot 0,001 = 0,0005.$$

*Пример 3.7.* Определите условную вероятность зависимых событий, если известно, что за год в электрической сети происходит 20 аварий, связанных с однофазным замыканием на землю, в результате которых при развитии аварии появляется 5 двухфазных и 1 трехфазное замыкание.

*Решение.* В соответствии с определением условной вероятности вероятность предшествующего события (двухфазного замыкания):

$$P(A) = \frac{5}{20} = 0,25.$$

Вероятность последующего трехфазного замыкания  $P(A \cdot B) = 1/20 = 0,05$ .

Условная вероятность трехфазного замыкания — по формуле (1.10):

$$P(B/A) = \frac{P(A \cdot B)}{P(A)} = \frac{0,05}{0,25} = 0,2.$$

### 1.1.3. Биномиальный закон для повторяющихся случайных событий

Рассмотренные выше законы пригодны для определения вероятностей относительно простых событий, в которых участвует небольшое число элементов (трансформаторов, электрических линий и пр.). В сложном событии, как, например, отказ в системе электроснабжения, участвует довольно большое число различных элементов и агрегатов. Поэтому определять вероятность появления сложного события целесообразнее с помощью биномиального закона распределения. Биномиальный закон распределения в общем виде можно записать следующим образом:

$$P_n^m = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}, \quad (1.12)$$

где  $P_n^m$  — вероятность того, что в результате  $n$  независимых испытаний событие  $A$  случится  $m$  раз;

$C_n^m$  — возможное число комбинаций всех испытаний, когда событие  $A$  происходит в  $m$  случаях;

$p$  — вероятность события  $A$  (например, исправная работа);

$q$  — вероятность противоположного события (отказ в работе).

Однако такая форма записи биномиального закона является неудобной для анализа работоспособности систем электроснабжения.

Рассмотрим выражение  $(p + q)^n = 1$ . Разложив  $n$ -ю степень бинома в ряд, получим:

$$\begin{aligned} (p + q)^n = p^n + n \cdot p^{n-1} \cdot q + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} p^{n-2} \cdot q^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} p^{n-3} \cdot q^3 + \dots \\ + \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{1 \cdot 2 \dots m} p^{n-m} \cdot q^m + \dots + q^n = 1. \end{aligned} \quad (1.13)$$

где  $p^n$  — вероятность исправной работы всех  $n$  элементов;

$q^n$  — вероятность повреждения всех  $n$  элементов.

Вероятность отказа одного элемента из общего числа  $n$  будет равна:

$$n p^{n-1} q;$$

вероятность отказа двух элементов:

$$\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} p^{n-2} q^2 \quad \text{и т.д.}$$

**Пример 3.8.** Система состоит из 10 однотипных агрегатов. Вероятность исправной работы составляет  $p = 0,98$ ; вероятность отказа  $q = 0,02$ . Определить вероятность выхода из строя 3 агрегатов из 10.

**Решение.** Вероятность того, что три агрегата одновременно выйдут из строя равна:

$$P_{10}^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 0,98^7 \cdot 0,02^3 = 0,001.$$

#### 1.1.4. Задачи для самостоятельного решения [5]

**Задача 1.1.** Территория подстанции представляет собой квадрат со стороной, равной  $d$ . В центре установлен стержневой молниеотвод, зона защиты которого ограничена окружностью с диаметром  $d$  (рис. 1.1). Найдите вероятность попадания грозового разряда в незащищенную площадь подстанции

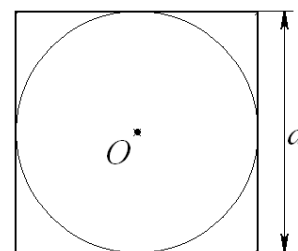


Рис. 1.1

**Задача 1.2.** Известно, что максимум нагрузок энергосистемы наступает в период с 8:30 до 11:30. Какова вероятность того, что максимальная нагрузка будет наблюдаться в последние 30 минут указанного промежутка, если график нагрузок формируется случайным образом?

**Задача 1.3.** При увеличении напряжения может произойти разрыв электрической цепи вследствие выхода из строя одного из трех последовательно соединенных элементов, вероятности отказа которых соответственно равны 0,2, 0,3 и 0,4. Определите вероятность того, что разрыва цепи не произойдет.

**Задача 1.4.** Завод изготавливает электромагнитные реле с вероятностью дефекта  $p_1=0,1$ . Изделия проверяются контролером, который обнаруживает дефект с вероятностью  $p_2=0,8$ , но может по ошибке забраковать изделие, не имеющее дефектов, с вероятностью  $p_3=0,3$ . Найдите вероятности следующих событий:

- $A_1$  — реле будет забраковано ошибочно;
- $A_2$  — изделие с дефектом будет отгружено покупателю;
- $A_3$  — реле будет забраковано по любой причине.

**Задача 1.5.** По линии связи передаются два сигнала  $A$  и  $B$  соответственно с вероятностями 0,72 и 0,28. Из-за помех  $1/6$  часть  $A$ -сигналов искажается и принимается, как  $B$ -сигналы, а  $1/7$  часть переданных  $B$ -сигналов принимается, как  $A$ -сигналы. Определите:

- 1) вероятность того, что на приемном пункте будет принят  $A$ -сигнал;
- 2) если известно, что принят  $A$ -сигнал, какова вероятность того, что он же и был передан?

**Задача 1.6.** Потребитель может заключить договор о поставке электро-

энергии в одну из трех энергосбытовых компаний. Вероятности обращения в каждую зависят от их тарифной политики и равны соответственно  $p_1$ ,  $p_2$  и  $p_3$ . Вероятность того, что к моменту обращения потребителя лимиты мощности у поставщика будут исчерпаны, составляет для первой компании  $p_4$ , для второй —  $p_5$ , для третьей —  $p_6$ . Какова вероятность, что договор на поставку электроэнергии будет заключен?

**Задача 1.7.** Имеется три партии измерительных приборов по 30 штук в каждой. Число стандартных приборов в первой, второй и третьей партии соответственно равно 20, 15 и 10. Из случайно выбранной партии наудачу извлечено два прибора, оказавшихся стандартными. Какова вероятность того, что приборы были извлечены из третьей партии?

**Задача 1.8.** Среди реле, выпускаемых заводом, бывает в среднем 2% дефектных. Найти вероятность того, что среди взятых на испытание 25 реле 2 будет неисправных. Каково наивероятнейшее число дефектных реле (математическое ожидание) в рассматриваемой выборке из 25 изделий и какова его вероятность?

**Задача 1.9.** Вероятность поражения линии электропередачи при грозовом разряде составляет 0,8. Найдите вероятность того, что после четырех разрядов произойдет:

- 1) хотя бы одно поражение ЛЭП;
- 2) не менее трех поражений;
- 3) не более одного поражения.

## 1.2. Случайные величины в электроэнергетике

**Случайной величиной** называется такая величина, значения которой могут быть разными в различных ситуациях. Между случайными величинами и случайными событиями существует тесная взаимосвязь. Так, в качестве случайной величины можно принять некоторое число случайных событий, которые произошли за определенный промежуток времени. Например, если за год произошло 30 отказов в работе высоковольтных выключателей на электрических подстанциях, то здесь 30 отказов в работе — случайная величина, а отказ в работе выключателя — случайное событие.

Случайные величины могут быть двух видов — дискретные и непрерывные. Величина « $X$ » называется **дискретной**, если все ее возможные значения образуют конечную или бесконечную последовательность чисел:  $X_1, X_2, \dots, X_k, \dots$ , а принятие ею каждого из указанных значений есть случайное событие с определенной вероятностью. Приведенный выше пример с отказами высоковольтных выключателей как раз относится к такому виду случайных величин.

Однако в жизни и в электроэнергетике довольно часто приходится иметь дело с такими случайными величинами, возможные значения которых сплошь заполняют некоторый интервал и не могут быть представлены числовой после-

довательностью. Характерный пример — отклонения напряжения в электрической сети от номинального значения. Известно, что в бытовой электрической сети номинальное напряжение составляет 220 В. Но если включить в эту сеть вольтметр и понаблюдать за его показаниями, то можно заметить, что в каждый момент времени значения напряжения различны и непрерывно изменяются в границах определенного интервала. Такие случайные величины получили название **непрерывных**.

### 1.2.1. Количественные оценки вероятностей случайных величин

Для количественной оценки вероятностей как дискретных, так и непрерывных случайных величин вводят **функцию распределения**. Функция распределения  $F(x)$  численно равна вероятности того, что некоторая случайная величина  $\eta$  находится в интервале значений от  $-\infty$  до некоторого значения  $x$ , т.е. равна или меньше, чем  $x$ :

$$F(x) = P(-\infty \leq \eta \leq x) \quad (1.14)$$

Зная функции распределения, можно вычислить вероятность попадания случайной величины в определенный интервал значений  $(x_1 \dots x_2)$ . Зная значения  $F(x_1)$  и  $F(x_2)$ , вероятность  $P(x_1 \leq \eta \leq x_2)$  можно найти следующим образом:

$$F(x_2) = P(-\infty \leq \eta \leq x_2) = P(-\infty \leq \eta \leq x_1) + P(x_1 \leq \eta \leq x_2). \quad (1.15)$$

Следовательно,  $F(x_2) = F(x_1) + P(x_1 \leq \eta \leq x_2)$ .

Отсюда  $P(x_1 \leq \eta \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$ , (1.16)

т.е. чтобы определить вероятность попадания случайной величины  $\eta$  в интервал  $(x_1 \dots x_2)$ , достаточно найти разность функций распределения при значениях  $x_2$  и  $x_1$ .

Другой количественной оценкой вероятности случайной величины может быть плотность распределения вероятности  $\varphi(x)$ , которая представляет собой производную от функции распределения по значению случайной величины, т.е.

$$\varphi(x) = \frac{dF(x)}{dx}. \quad (1.17)$$

Отсюда  $F(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(x) dx$ .

Если плотность распределения вероятностей задана аналитически, то вероятность можно определить:

$$P(x_1 \leq \eta \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \int_{-\infty}^{x_2} \varphi(x) dx - \int_{-\infty}^{x_1} \varphi(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} \varphi(x) dx, \quad (0.18)$$

т.е. вероятность равна интегралу от плотности распределения вероятности, взятому в пределах искомого интервала.



## 1.2.2. Основные законы распределения случайных величин

### а) Равномерное распределение

Равномерно распределенной случайной величиной называется величина, имеющая постоянную плотность вероятности. График равномерного распределения представлен на рис. 1.1.

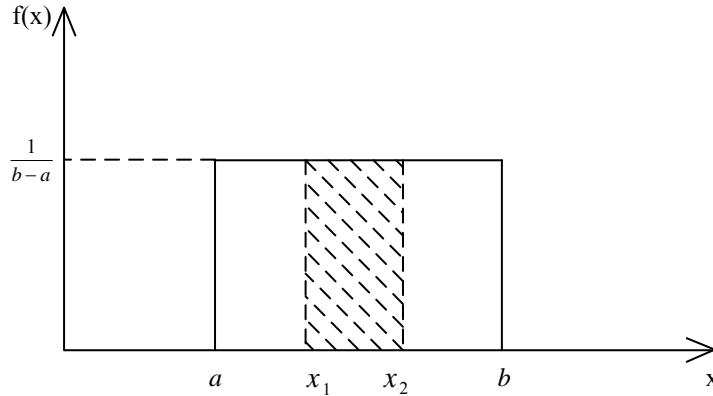


Рис. 1.2. График равномерного распределения

Если случайная величина равномерно распределена в интервале  $a + b$ , то вероятность попадания в этот интервал равна единице, т.е.  $\int_a^b \varphi(x) dx = 1$ .

Так как плотность вероятности  $\varphi(x)$  в данном случае постоянная величина, то ее можно вынести за знак  $\int$ :

$$\varphi(x) \int_a^b dx = \varphi(x) \cdot (b - a) = 1. \quad (1.19)$$

Следовательно, для равномерного распределения  $\varphi(x) = \frac{1}{b - a}$ .

Найдем вероятность попадания случайной величины в интервал  $(x_1 \dots x_2)$ :

$$P(x_1 \leq \eta \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \varphi(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{b - a} dx = \frac{x_2 - x_1}{b - a}. \quad (1.20)$$

Таким образом, вероятность попадания в какой-либо интервал равна отношению величины этого интервала к величине всего интервала распределения. Или, другими словами, вероятность  $P(x_1 \leq \eta \leq x_2)$  равна отношению заштрихованной площади графика (рис. 1.1) к площади всей фигуры, принимаемой за единицу.

*Пример 3.9.* Частота следования импульсов в устройстве телемеханики имеет равномерное распределение: интервал между двумя соседними импульсами составляет 10 мин. Какова вероятность появления ближайшего импульса в течение 5 мин?

$$P = \frac{5}{10} = 0,5.$$

### б) Простейшее нормальное распределение

Плотность вероятности для простейшего нормального распределения равна  $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ , график этого распределения приведен на рис. 1.2.

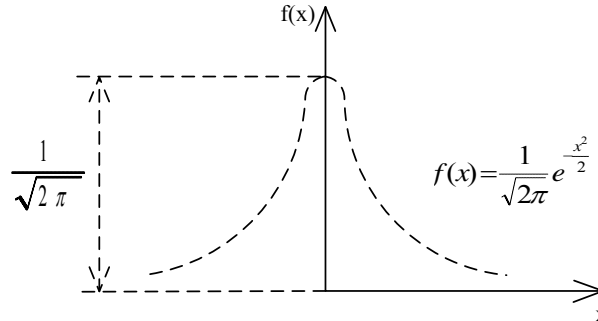


Рис. 1.3. График простейшего нормального распределения

Плотность вероятности простейшего нормального распределения графически изображается кривой симметричной относительно оси ординат с максимальным значением  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$  при  $x = 0$ . Функция распределения  $F(x)$  равна:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx. \quad (1.21)$$

Вероятность попадания случайной величины в интервал  $(x_1 \dots x_2)$  определяется как:

$$P(x_1 \leq \eta \leq x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x_2} e^{-\frac{x^2}{2}} dx - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x_1} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{2} \Phi(x_2) - \frac{1}{2} \Phi(x_1), \quad (1.22)$$

где  $\Phi(x)$  — интеграл вероятности.

Интеграл от  $\varphi(x)$  не выражается в конечном виде через элементарные функции, поэтому для определения вероятностей данного распределения используются специальные таблицы (или программы-приложения для ЭВМ), по которым находят значения интегралов вероятности, зная пределы интегралов  $x_2$  и  $x_1$ .

Закон простейшего нормального распределения находит применение при анализе и оценке погрешностей, возникающих при измерениях электротехнических величин (тока, мощности, напряжения и т.д.).

### в) Общее нормальное распределение вероятностей

Плотность нормального распределения имеет вид:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad (1.23)$$

где  $\sigma$  и  $a$  — постоянные величины.

При  $a = 0$  и  $\sigma = 1$  плотность вероятности  $\varphi(x)$  превращается в плотность простейшего нормального распределения. С изменением  $\sigma$  (при  $a = 0$ ) кривые нормального распределения опускаются или поднимаются вдоль оси ординат, кроме того, меняется их ширина. График плотности нормального распределения представлен на рис. 1.3.

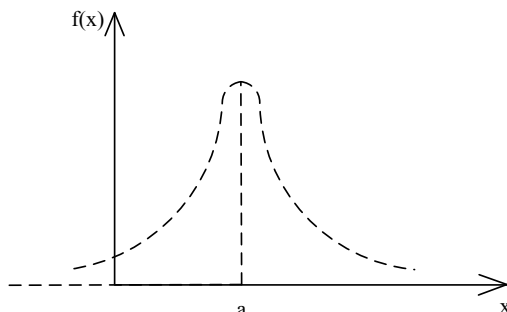


Рис. 0.4. График общего нормального распределения

Функция распределения для данного закона имеет вид:

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx, \quad (1.24)$$

следовательно,

$$P(x_1 \leq \eta \leq x_2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx. \quad (1.25)$$

Если произвести замену переменной  $x$  на  $z$  так, что  $z = \frac{x-a}{\sigma}$ , то получим:

$$P(x_1 \leq \eta \leq x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_1}^{z_2} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{x_1-a}{\sigma}}^{\frac{x_2-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{1}{2} \Phi\left(\frac{x_2-a}{\sigma}\right) - \frac{1}{2} \Phi\left(\frac{x_1-a}{\sigma}\right), \quad (1.26)$$

Таким образом, определить вероятность попадания случайной величины в данный интервал при нормальном распределении можно с помощью интегралов вероятности, как и в случае простейшего нормального распределения. Только в этом случае необходимо заменить пределы интеграла с величины  $x$  на  $\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$ .

По закону общего нормального распределения в электроэнергетике распределяются многие режимные параметры: напряжение, ток и мощность, а также абсолютные и удельный расход электроэнергии за определенный промежуток времени и т.д.

### з) Распределение Пуассона

Закон распределения Пуассона применяется для дискретных случайных величин. Вероятность того, что дискретная случайная величина, распределен-

ная по закону Пуассона, появляется в ходе эксперимента  $m$  раз, определяется формулой:

$$P(m) = \frac{\lambda^m \cdot e^{-\lambda}}{m!}, \quad (1.27)$$

где  $\lambda$  — постоянная величина, равная математическому ожиданию.

В электроэнергетике закон Пуассона используется для определения показателей надежности систем электроснабжения, например, вероятности безотказной работы нескольких однотипных машин или аппаратов. Если в качестве случайного события рассматривается безотказная работа отдельного элемента или всей системы ( $m = 0$ ), то закон Пуассона принимает следующий вид:

$$P(0) = e^{-\lambda}. \quad (1.28)$$

Аналогично можно определить вероятность одного, двух и более отказов:

$$P(1) = \lambda \cdot e^{-\lambda},$$

$$P(2) = \frac{\lambda^2 \cdot e^{-\lambda}}{2}.$$

### 1.2.3. Математическое ожидание

Функции распределения и плотности распределения вероятностей являются полными вероятностными характеристиками случайных величин. Однако такие полные характеристики не всегда бывают известны. Поэтому для оценки случайных величин используют числовые характеристики, к которым относятся: математическое ожидание, дисперсия, среднеквадратическое отклонение.

Математическое ожидание представляет собой действительное среднее значение случайной величины, которая определяется с учетом вероятностей отдельных значений этой случайной величины. Определим математическое ожидание для дискретной случайной величины, распределение которой задано в виде табл. 1.1.

Таблица 1.1

Значение $\eta$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	...	$X_n$
Вероятность	$P_1$	$P_2$	$P_3$	...	$P_n$

Общее число испытаний в этом распределении составляет  $n$ , причем величина  $X_1$  появлялась  $m_1$  раз, величина  $X_2$  —  $m_2$  раз и т.д. Тогда математическое ожидание можно записать:

$$M(\eta) = \frac{m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2 + \dots + m_n \cdot x_n}{n} = x_1 \frac{m_1}{n} + x_2 \frac{m_2}{n} + \dots + x_n \frac{m_n}{n} =$$

$$= x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \dots + x_n \cdot p_n = \sum_{k=1}^n x_k \cdot p_k. \quad (1.29)$$

Таким образом, математическое ожидание представляет собой сумму произведений текущих значений случайной величины на их вероятности.

Для непрерывной случайной величины, вероятность которой задана в виде:

$P(x_1 \leq \eta \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \varphi(x) dx$ , математическое ожидание будет равно:

$$M(\eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x) dx. \quad (1.30)$$

Используя полученные выше зависимости (1.29) и (1.30), можно определить математическое ожидание для каждого закона распределения. Так для равномерного распределения случайной величины на интервале от  $a$  до  $b$ .

$$M(\eta) = \int_a^b x\varphi(x) dx. \quad (1.31)$$

Так как  $\varphi(x) = \frac{1}{b-a}$ , то получаем  $M(\eta) = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$ .

То есть математическое ожидание соответствует середине интервала, на котором распределена эта величина.

#### ***1.2.4. Дисперсия и среднеквадратическое отклонение***

Среднее значение, которым является математическое ожидание, слабо характеризует случайную величину. Практический интерес представляет величина отклонения значения случайной величины от ее математического ожидания. Если эти отклонения невелики, то математическое ожидание хорошо представляет случайную величину, если же отклонения очень велики, то одно математическое ожидание еще не характеризует данную величину.

В качестве меры отклонения случайной величины от ее математического ожидания принимают величину, равную математическому ожиданию квадратов отклонений случайной величины от ее математического ожидания, которую называют дисперсией. Таким образом, дисперсия есть

$$D(\eta) = M[\eta - M(\eta)]^2. \quad (1.32)$$

Для дискретной случайной величины дисперсия равна

$$D(\eta) = \sum [x_k - M(\eta)]^2 \cdot p_k. \quad (1.33)$$

Для непрерывной случайной величины:

$$D(\eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - M(x)]^2 \varphi(x) dx. \quad (1.34)$$

Определим дисперсию для равномерного закона распределения случайной величины.

Так как  $\varphi(x) = \frac{1}{b-a}$  и  $M(\eta) = \frac{a+b}{2}$ , то

$$D(\eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx = \frac{(b-a)^2}{12}. \quad (1.35)$$

Аналогичным образом определяется дисперсия для остальных законов распределения.

Квадратный корень из дисперсии называется среднеквадратическим или стандартным отклонением случайной величины:

$$\sigma(\eta) = \sqrt{D(\eta)}. \quad (1.36)$$

Среднеквадратическое отклонение для равномерного распределения определяется как

$$\sigma(\eta) = \sqrt{\frac{(b-a)^2}{12}} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}. \quad (1.37)$$

Значения основных числовых характеристик для рассмотренных выше законов распределения случайных величин приведены в табл. 1.2.

Рассмотрим несколько примеров на применение законов распределения случайных величин и их числовых характеристик.

Таблица 1.2

Числовые характеристики случайных величин

Числовая характеристика	Закон распределения				
	Равномерное	Простейшее нормальное	Общее нормальное	Биномиальное	Закон Пуассона
$M(\eta)$	$\frac{b+a}{2}$	0	$a$	$n \cdot p$	$\lambda$
$D(\eta)$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	1	$\sigma^2$	$n \cdot p \cdot q$	$\lambda$
$\sigma(\eta)$	$\frac{b-a}{\sqrt{3} \cdot 2}$	1	$\sigma$	$\sqrt{n \cdot p \cdot q}$	$\sqrt{\lambda}$

*Пример 3.10.* Электроизмерительный прибор имеет класс точности 0,5. Определить вероятность погрешностей при замерах в пределах  $\pm 0,5$ ,  $\pm 1$ ,  $\pm 2\%$ .

В данном случае следует пользоваться законом простейшего нормального распределения, при этом  $a = 0$  и  $\sigma = 0,5$  (что соответствует классу точности). Интересующие нас вероятности будут рассчитываться по (1.26):

$$\begin{aligned} P(-0,5 \leq x \leq 0,5) &= \frac{1}{2} \Phi\left(\frac{0,5}{0,5}\right) - \frac{1}{2} \Phi\left(\frac{-0,5}{0,5}\right) = \frac{1}{2} \Phi(1) - \frac{1}{2} \Phi(-1) = \frac{1}{2} \Phi(1) + \frac{1}{2} \Phi(1) = \Phi(1) = \\ &= 0,6827; \end{aligned}$$

$$P(-1 \leq x \leq 1) = \frac{1}{2} \Phi\left(\frac{1}{0,5}\right) - \frac{1}{2} \Phi\left(\frac{-1}{0,5}\right) = \frac{1}{2} \Phi(2) - \frac{1}{2} \Phi(-2) = \frac{1}{2} \Phi(2) + \frac{1}{2} \Phi(2) = \Phi(2) = 0,9545;$$

$$P(-2 \leq x \leq 2) = \frac{1}{2} \Phi\left(\frac{2}{0,5}\right) - \frac{1}{2} \Phi\left(\frac{-2}{0,5}\right) = \frac{1}{2} \Phi(4) - \frac{1}{2} \Phi(-4) = \frac{1}{2} \Phi(4) + \frac{1}{2} \Phi(4) = \Phi(4) = 0,9999.$$

Интегралы вероятностей определяем по табл. 1.3.

Результаты расчета показывают, что вероятность замеров с такой погрешностью ( $\pm 0,5\%$ ) значительно ниже, чем с большей погрешностью ( $\pm 2\%$ ).

*Пример 0.11.* Среднемесячная максимальная нагрузка электрической системы равна 1200 МВт. При этом дисперсия составляет 2500 МВт<sup>2</sup>, а среднеквадратическое отклонение  $\sigma = 50$  МВт. Определить вероятность того, что случайный максимум нагрузки будет в интервале 1250÷1300 МВт?

При решении этого примера используем закон общего нормального распределения:

$$P(1250 \leq x \leq 1300) = \frac{1}{2} \Phi\left(\frac{1300-1200}{50}\right) - \frac{1}{2} \Phi\left(\frac{-1250-1200}{50}\right) = \frac{1}{2} \Phi(2) - \frac{1}{2} \Phi(1) = 0,47725 - 0,34135 = 0,1359.$$

Таблица 1.3

Значения интеграла вероятностей

$t$	$\Phi(t)$	$t$	$\Phi(t)$	$t$	$\Phi(t)$	$t$	$\Phi(t)$	$t$	$\Phi(t)$	$t$	$\Phi(t)$
0,00	0,00000	0,50	0,19146	1,00	0,34134	1,50	0,43319	2,00	0,47725	3,00	0,49865
0,01	0,00399	0,51	0,19497	1,01	0,34375	1,51	0,43448	2,02	0,47831	3,05	0,49886
0,02	0,00798	0,52	0,19847	1,02	0,34614	1,52	0,43574	2,04	0,47932	3,10	0,49903
0,03	0,01197	0,53	0,20194	1,03	0,34849	1,53	0,43699	2,06	0,48030	3,15	0,49918
0,04	0,01595	0,54	0,20540	1,04	0,35083	1,54	0,43822	2,08	0,48124	3,20	0,49931
0,05	0,01994	0,55	0,20884	1,05	0,35314	1,55	0,43943	2,10	0,48214	3,25	0,49942
0,06	0,02392	0,56	0,21226	1,06	0,35543	1,56	0,44062	2,12	0,48300	3,30	0,49952
0,07	0,02790	0,57	0,21566	1,07	0,35769	1,57	0,44179	2,14	0,48382	3,35	0,49960
0,08	0,03188	0,58	0,21904	1,08	0,35993	1,58	0,44295	2,16	0,48461	3,40	0,49966
0,09	0,03586	0,59	0,22240	1,09	0,36214	1,59	0,44408	2,18	0,48537	3,45	0,49972
0,10	0,03983	0,60	0,22575	1,10	0,36433	1,60	0,44520	2,20	0,48610	3,50	0,49977
0,11	0,04380	0,61	0,22907	1,11	0,36650	1,61	0,44630	2,22	0,48679	3,55	0,49981
0,12	0,04776	0,62	0,23237	1,12	0,36864	1,62	0,44738	2,24	0,48745	3,60	0,49984
0,13	0,05172	0,63	0,23565	1,13	0,37076	1,63	0,44845	2,26	0,48809	3,65	0,49987
0,14	0,05567	0,64	0,23891	1,14	0,37286	1,64	0,44950	2,28	0,48870	3,70	0,49989
0,15	0,05962	0,65	0,24215	1,15	0,37493	1,65	0,45053	2,30	0,48928	3,75	0,49991
0,16	0,06356	0,66	0,24537	1,16	0,37698	1,66	0,45154	2,32	0,48983	3,80	0,49993
0,17	0,06749	0,67	0,24857	1,17	0,37900	1,67	0,45254	2,34	0,49036	3,85	0,49994
0,18	0,07142	0,68	0,25175	1,18	0,38100	1,68	0,45352	2,36	0,49086	3,90	0,49995
0,19	0,07535	0,69	0,25490	1,19	0,38298	1,69	0,45449	2,38	0,49134	3,95	0,49996
0,20	0,07926	0,70	0,25804	1,20	0,38493	1,70	0,45543	2,40	0,49180	4,00	0,49997
0,21	0,08317	0,71	0,26115	1,21	0,38686	1,71	0,45637	2,42	0,49224	4,05	0,49997

$t$	$\Phi(t)$	$t$	$\Phi(t)$	$t$	$\Phi(t)$	$t$	$\Phi(t)$	$t$	$\Phi(t)$	$t$	$\Phi(t)$
0,22	0,08706	0,72	0,26424	1,22	0,38877	1,72	0,45728	2,44	0,49266	4,10	0,49998
0,23	0,09095	0,73	0,26730	1,23	0,39065	1,73	0,45818	2,46	0,49305	4,15	0,49998
0,24	0,09483	0,74	0,27035	1,24	0,39251	1,74	0,45907	2,48	0,49343	4,20	0,49999
0,25	0,09871	0,75	0,27337	1,25	0,39435	1,75	0,45994	2,50	0,49379	4,25	0,49999
0,26	0,10257	0,76	0,27637	1,26	0,39617	1,76	0,46080	2,52	0,49413	4,30	0,49999
0,27	0,10642	0,77	0,27935	1,27	0,39796	1,77	0,46164	2,54	0,49446	4,35	0,49999
0,28	0,11026	0,78	0,28230	1,28	0,39973	1,78	0,46246	2,56	0,49477	4,40	0,49999
0,29	0,11409	0,79	0,28524	1,29	0,40147	1,79	0,46327	2,58	0,49506	4,45	0,50000
0,30	0,11791	0,80	0,28814	1,30	0,40320	1,80	0,46407	2,60	0,49534	4,50	0,50000
0,31	0,12172	0,81	0,29103	1,31	0,40490	1,81	0,46485	2,62	0,49560	4,55	0,50000
0,32	0,12552	0,82	0,29389	1,32	0,40658	1,82	0,46562	2,64	0,49585	4,60	0,50000
0,33	0,12930	0,83	0,29673	1,33	0,40824	1,83	0,46638	2,66	0,49609	4,65	0,50000
0,34	0,13307	0,84	0,29955	1,34	0,40988	1,84	0,46712	2,68	0,49632	4,70	0,50000
0,35	0,13683	0,85	0,30234	1,35	0,41149	1,85	0,46784	2,70	0,49653	4,75	0,50000
0,36	0,14058	0,86	0,30511	1,36	0,41309	1,86	0,46856	2,72	0,49674	4,80	0,50000
0,37	0,14431	0,87	0,30785	1,37	0,41466	1,87	0,46926	2,74	0,49693	4,85	0,50000
0,38	0,14803	0,88	0,31057	1,38	0,41621	1,88	0,46995	2,76	0,49711	4,90	0,50000
0,39	0,15173	0,89	0,31327	1,39	0,41774	1,89	0,47062	2,78	0,49728	4,95	0,50000
0,40	0,15542	0,90	0,31594	1,40	0,41924	1,90	0,47128	2,80	0,49744	5,00	0,50000
0,41	0,15910	0,91	0,31859	1,41	0,42073	1,91	0,47193	2,82	0,49760		
0,42	0,16276	0,92	0,32121	1,42	0,42220	1,92	0,47257	2,84	0,49774		
0,43	0,16640	0,93	0,32381	1,43	0,42364	1,93	0,47320	2,86	0,49788		
0,44	0,17003	0,94	0,32639	1,44	0,42507	1,94	0,47381	2,88	0,49801		
0,45	0,17364	0,95	0,32894	1,45	0,42647	1,95	0,47441	2,90	0,49813		
0,46	0,17724	0,96	0,33147	1,46	0,42785	1,96	0,47500	2,92	0,49825		
0,47	0,18082	0,97	0,33398	1,47	0,42922	1,97	0,47558	2,94	0,49836		
0,48	0,18439	0,98	0,33646	1,48	0,43056	1,98	0,47615	2,96	0,49846		
0,49	0,18793	0,99	0,33891	1,49	0,43189	1,99	0,47670	2,98	0,49856		

*Пример 3.12.* Для дискретной случайной величины, значения которой приведены в табл. 1.4, построить полигон распределения. Определить моду, медиану и размах случайной величины. Рассчитать математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратическое отклонение.

*Решение.* Полигон распределения приведен на рис. 1.5. Из рисунка или таблицы могут быть определены мода (значение с наибольшей частой появления) и медиана (середина вариационного ряда).

Математическое ожидание рассчитывается по (1.29):

$$M(x) = \frac{\sum_{i=1}^m x_i n_i}{\sum_{i=1}^m n_i} = \frac{2 \cdot 1 + 4 \cdot 4 + 6 \cdot 7 + 8 \cdot 8 + 10 \cdot 9}{1 + 4 + 7 + 8 + 9} = 7,38.$$



Таблица 1.4

$x$	2	4	6	8	10
$n(x)$	1	4	7	8	9

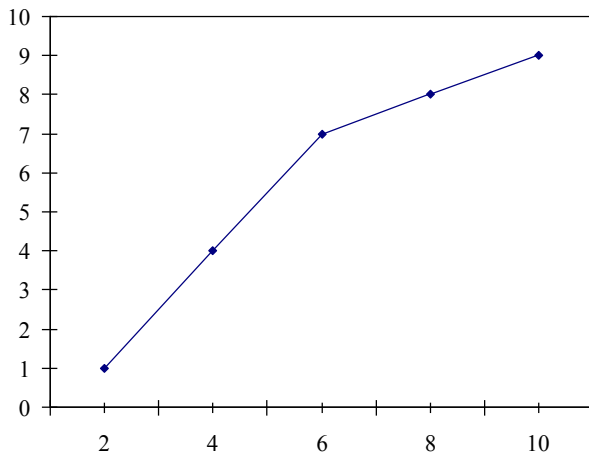


Рис. 1.5

Мода:  $n_{\max} = 9 \rightarrow Mo(x) = x(n_{\max}) = 10.$

Медиана:  $n_{\text{cp}} = 7 \rightarrow Me(x) = x(n_{\text{cp}}) = 6.$

Дисперсия случайной величины определяется по (1.34):

$$D(x) = \frac{\sum_{i=1}^m [M(x) - x_i]^2 \cdot n_i}{\sum_{i=1}^m n_i} =$$

$$= \frac{(7,38 - 2)^2 \cdot 1 + (7,38 - 4)^2 \cdot 4 + (7,38 - 6)^2 \cdot 7 + (7,38 - 8)^2 \cdot 8 + (7,38 - 10)^2 \cdot 9}{1 + 4 + 7 + 8 + 9} = 5,27.$$

Среднеквадратическое отклонение:

$$S(x) = \sqrt{D(x)} = \sqrt{5,27} = 2,30.$$

### 1.2.6. Доверительные интервалы

Для описания генеральных совокупностей случайных величин в математической статистике используются интервальные оценки с заданным уровнем достоверности  $\alpha$  — доверительные интервалы [6, 7].

Доверительный интервал средней величины (математического ожидания):

$$\mu(x) = M(x) \pm t_{n-1, \alpha} \cdot S(x) / \sqrt{n}, \quad (1.38)$$

где  $t_{n-1, \alpha}$  — коэффициент распределения Стьюдента с  $(n-1)$  степенями свободы и уровнем достоверности  $\alpha$  — по табл. 1.5;

Доверительный интервал дисперсии  $\sigma^2(x)$  и стандартного отклонения  $\sigma(x)$ :

$$\frac{D(x) \cdot (n-1)}{\chi_{n-1, \beta/2}^2} \leq \sigma^2(x) \leq \frac{D(x) \cdot (n-1)}{\chi_{n-1, 1-\beta/2}^2}; \quad (1.39)$$

где  $\chi_{n-1, \beta/2}^2$  — коэффициенты  $\chi^2$ -распределения Пирсона — по табл. 1.6.;  $\beta = 1-\alpha$  — статистическая надежность (как правило,  $\beta=0,01$  или  $0,05$ ).

Таблица 1.5

Квантили распределения Стьюдента (при  $\alpha=0,95$ )

$f=(n-1)$	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$t_{n-1, \alpha}$	4,30	3,18	2,78	2,57	2,45	2,37	2,31	2,26	2,23
$f=(n-1)$	20	30	40	50	60	80	90	100	$\infty$
$t_{n-1, \alpha}$	2,09	2,04	2,02	2,01	2,00	1,99	1,99	1,98	1,96

Таблица 1.6

Квантили распределения Пирсона (при  $\beta=0,05$ )

$f=(n-1)$	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	50
$\chi_{n-1, \beta/2}^2$	0,35	0,71	1,14	1,63	2,17	2,73	3,32	3,94	7,3	10,9	34,8
$\chi_{n-1, 1-\beta/2}^2$	7,8	9,5	11,1	12,6	14,5	15,5	16,9	18,3	25,0	31,4	67,5

*Пример 0.13.* Требуется оценить математическое ожидание тока перегорания плавких вставок партии из 20 предохранителей типа ПР-2 с номинальным током отключения  $I_{отк} = 100$  А, если известна дисперсия тока перегорания  $D(I) = 25$  А<sup>2</sup> и результат одного испытания предохранителя из этой партии  $I_0 = 95$  А. Закон распределения значений тока перегорания нормальный.

Решение. Выбирая различные значения доверительной вероятности, можно получить различные доверительные интервалы. В инженерной практике доверительные интервалы, как правило, оценивают с достоверностью  $\alpha=0,95$ . Итак, по (1.41), с учетом, что  $S(x) = \sqrt{D(x)}$ , будем иметь:

$$I_0 - t_{n-1, \alpha} \cdot \sqrt{D(x)} / \sqrt{n} \leq \mu(I) \leq I_0 + t_{n-1, \alpha} \cdot S(x) / \sqrt{n}.$$

Подставляем исходные данные в полученное неравенство

$$95 - 2,09 \cdot \sqrt{25} / \sqrt{20} \leq \mu(I) \leq 95 + 2,09 \cdot \sqrt{25} / \sqrt{20}$$

и получаем доверительный интервал  $92,66 \leq \mu(I) \leq 97,34$ .

### 1.2.7. Задачи для самостоятельного решения [5]

**Задача 1.10.** Результаты замеров мощности потребителя представлены в виде выборки:

$x_i$	1,6	3,0	4,4	5,8	7,2	8,6	10,0
$n_i$	3	7	15	35	22	13	5

Построить гистограмму и определить закон распределения, рассчитать выборочные: математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение и оценить доверительные интервалы генерального математического ожидания и среднеквадратического отклонения.

**Задача 1.11.** Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания мощности нагрузки подстанции с вероятностью 0,95, если для выборки объемом  $n=100$  средняя мощность  $\bar{P}=10,43$  МВт, а среднеквадратическое отклонение  $S(P)=5$ .

**Задача 1.12.** При возникновении ненормального или аварийного режима линия электропередач отключается релейной защитой. При неустойчивых повреждениях после автоматического повторного включения (АПВ) линия продолжает нормальную работу. Если повреждение не самоустранилось, защита сработает снова. Вероятность любого неустойчивого повреждения равна  $p < 1$ . Какова вероятность возврата линии к нормальному режиму при двух- и трехкратном АПВ?

**Задача 1.13.** На подстанции установлено 5 однотипных масляных выключателей. Известно, что для группы из пяти выключателей математическое ожидание числа отказов за год равно единице. Если выключатели имеют одинаковую вероятность безотказной работы, то какова вероятность того, что за год произойдет хотя бы один отказ?

**Задача 1.14.** Релейная защита на подстанции срабатывает, в среднем, два раза в месяц. Считая поток событий простейшим, определите, чему равна вероятность четырех срабатываний релейной защиты за четыре месяца.

**Задача 1.15.** Пуск высоковольтного синхронного двигателя осуществляется с обязательным осциллографированием его параметров. Зная, что запуск произойдет в любое время с 10 до 18 ч, аварийный осциллограф был отключен на профилактику в 14:00 на один час. Какова вероятность, что параметры пускового тока не будут зафиксированы?

**Задача 1.16.** Система электроснабжения состоит из 20 элементов с интенсивностью отказов  $\lambda_i=10^{-3}$  1/ч. Определите вероятность безотказной работы такой системы в течение года (8760 ч).

**Задача 1.17.** Силовой трансформатор имеет постоянную интенсивность отказов  $\lambda=10^{-5}$  1/ч. Какова вероятность, что он откажет после окончания гарантийного срока  $\tau=20000$  ч?

**Задача 1.18.** Мощность нагрузки потребителя имеет нормальное распределение. Известно математическое ожидание  $\mu(P)=20$  МВт и среднеквадратическое отклонение  $\sigma(P)=7$  МВт. Найти вероятность того, что в результате проведенных замеров будет зафиксирована мощность в интервале от 15 до 25 МВт.

**Задача 1.19.** Нарботки на отказ для трех высоковольтных выключателей описывается различными законами распределения:  $t_1$  — равномерным,  $t_2$  — экспоненциальным,  $t_3$  — нормальным. Для всех трех распределений  $\mu(t)=\sigma(t)=1200$  ч. Найти вероятности того, что каждый из выключателей проработает не менее 2000 ч без отказа.

## 2. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ В ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИКЕ

Математическая статистика — это наука, разрабатывающая методы систематизации и использования статистических данных для научных и практических выводов. Ее математический аппарат базируется на законах теории вероятностей. С помощью математической статистики в электроэнергетике можно решать комплекс прикладных задач, таких как:

- первичная обработка результатов эксперимента (отчетных данных);
- оценка параметров распределения случайных величин (их вероятности);
- статистическая проверка гипотез.
- исследование зависимостей между несколькими случайными величинами, каждая из которых испытывает вариации под действием случайных факторов (моделирование и прогнозирование режимов энергосистем)

### 2.1. Вариационные ряды и их характеристики

Результаты эксперимента в первоначальной форме имеют весьма хаотический вид записи. Например, мы включили регистрирующий прибор вольтметр в бытовую электрическую сеть и через равные интервалы времени записали его показания. Они могут быть представлены следующей строкой цифр: 224, 198, 221, 208, 195, 212, 215, 187, 201, 227, 242, 205, 233, 235, 220, 214, 229, 217 В.

Такая форма записи не позволяет определить закон распределения случайной величины, поэтому преобразуем этот набор цифр в вариационный ряд.

Вариационным рядом называется такой ряд данных, в котором указаны возможные значения варьирующего признака в порядке возрастания или, наоборот, в порядке убывания и соответствующие им частоты появления. В зависимости от случайной величины (признака) ряды бывают дискретные и непрерывные. Поскольку наша случайная величина (напряжение) относится к непрерывным величинам, то используем для её записи не фиксируемое число, а диапазон изменения напряжения. При этом установим шаг диапазона в 10 В. Тогда вариационный ряд может быть представлен в виде следующей таблицы.

Таблица 2.1

Вариационный ряд

$U_i, \text{В}$	180-190	190-200	200-210	210-220	220-230	230-240	240-250
$n_i$	1	2	3	5	4	2	1

Кроме табличной формы представления вариационного ряда, применяют и графическую форму. При этом непрерывные вариационные ряды изображают в виде гистограммы, а дискретные ряды — в виде полигона распределения. Гистограмма для непрерывного вариационного ряда, представленного в табл. 2.1, изображена на рис. 2.1.

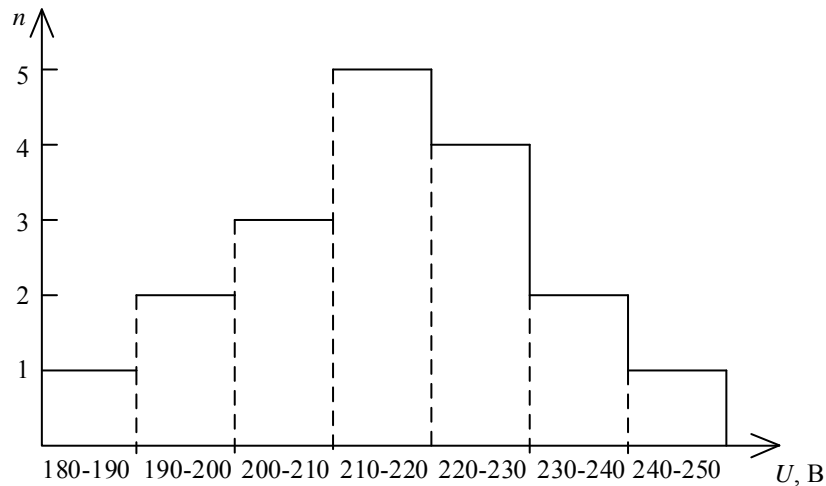


Рис. 2.1. Гистограмма вариационного ряда

Дальнейший анализ вариационного ряда будет заключаться в определении основных показателей или характеристик ряда, к которым относятся:

- средние характеристики (средняя арифметическая, медиана, мода).
- показатели вариации (размах вариации, среднее линейное отклонение, дисперсия и среднеквадратическое отклонение).

Начнём с наиболее простых средних характеристик.

Медианой называется значение признака, приходящегося на середину ранжированного вариационного ряда. Если вариационный ряд содержит нечётное число  $(2m-1)$  значений признака  $X_1, X_2 \dots X_m \dots X_{2m-1}$ , расположенных в порядке возрастания, то медианой такого ряда является значение  $X_m$ , т.е. значение признака, расположенного точно по центру ряда. Например, при 101 значении признака медиана будет равна 52 значению.

Если ряд состоит из чётного числа  $(2m)$  значений признака  $X_1, X_2 \dots X_m \dots X_{2m}$ , то в этом случае за медиану принимают значение

$$Me = \frac{1}{2}(X_m + X_{m+1}). \quad (2.1)$$

Модой называется наиболее часто встречающееся значение признака, т.е. то значение, которое имеет наибольшую частоту появления. Согласно табл. 2.1 модой вариационного ряда будет являться уровень напряжения в диапазоне 210-220 В, частота появления которого наибольшая.

Среднее арифметическое (математическое ожидание) — наиболее точная средняя характеристика. Средней арифметической распределения признака называется сумма произведений всех его значений на соответствующие им частоты, поделённая на сумму всех частот, т.е. на объём совокупности всех значений признака:

$$\bar{X} = \frac{x_1 \cdot n_1 + x_2 \cdot n_2 + \dots + x_m \cdot n_m}{n_1 + n_2 + \dots + n_m} = \frac{\sum_{i=1}^m x_i \cdot n_i}{\sum_{i=1}^m n_i}. \quad (2.2)$$

В некоторых случаях вычисление средней арифметической производят упрощенным способом по следующей формуле:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^m \frac{x_i - a}{k} \cdot n_i}{\sum_{i=1}^m n_i} \cdot k + a, \quad (2.3)$$

где  $a$  — значение признака, которому соответствует максимальное значение частоты;

$k$  — общий множитель разности ( $x_i - a$ ).

Этот способ вычисления средней арифметической рекомендуется применять в тех случаях, когда отсутствуют средства вычислительной техники, а значения признаков представлены дробными величинами. Рассмотрим применение этого способа для вариационного ряда в табл. 2.1. Результаты представлены в виде табл. 2.2.

Таблица 2.2

Результаты вычисления средней арифметической

$x_i$	$n_i$	$x_i - a$ , (где $a = 215$ )	$\frac{x_i - a}{k}$ , (где $k=10$ )	$\frac{x_i - a}{k} \cdot n_i$
185	1	-30	-3	-3
195	2	-20	-2	-4
205	3	-10	-1	-3
215	5	0	0	0
225	4	10	1	4
235	2	20	2	4
245	1	30	3	3
Итого	18	-	-	1

$$\bar{X} = \frac{1}{18} \cdot 10 + 215 = 215,56 \text{ В.}$$

Далее рассмотрим показатели вариации. Простейшим измерителем вариации признака является размах вариации  $R = X_{max} - X_{min}$ , т.е. разница между наибольшим и наименьшим значениями признака. Это весьма приближенный и грубый показатель вариации.

Другим показателем вариации служит среднее линейное отклонение. Средним линейным отклонением называется средняя арифметическая абсолютных величин отклонений отдельных значений варьирующего признака от их средней арифметической:

$$d = \frac{\sum_{i=1}^m |X_i - \bar{X}| \cdot n_i}{\sum_{i=1}^m n_i}. \quad (2.4)$$

Однако для практических расчётов среднее линейное отклонение применяется крайне редко в силу того, что оно не обладает рядом простейших свойств, таких как правило сложения, умножения на постоянное число и т.д.

Самым распространённым и удобным видом отклонения является дисперсия и непосредственно получаемое из нее среднеквадратическое отклонение. Дисперсией называется средняя арифметическая квадратов отклонений отдельных значений варьирующего признака от их среднего значения

$$\sigma_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^m (X_i - \bar{X})^2 \cdot n_i}{\sum_{i=1}^m n_i}. \quad (2.5)$$

Для расчета дисперсии также можно использовать упрощённый способ:

$$\sigma_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^m \left( \frac{X_i - a}{k} \right)^2 \cdot n_i}{\sum_{i=1}^m n_i} \cdot k^2 - (\bar{X} - a)^2. \quad (2.6)$$

По формуле (2.6) дисперсия подсчитывается не относительно средней арифметической, как по определению (2.5), а относительно некоторого произвольного числа  $a$ . Выбор чисел  $a$  и  $k$  аналогичен случаю со средней арифметической.

Если в табл. 2.2 добавить ещё один столбец, то вычисление дисперсии будет выглядеть следующим образом (табл. 2.3):

$$\sigma_x^2 = \frac{41}{18} \cdot 10^2 - (215,56 - 215)^2 = 227,49B^2.$$

Таблица 2.3

Результаты вычисления дисперсии

$x_i$	$n_i$	$x_i - a$ , (где $a = 215$ )	$\frac{x_i - a}{k}$ , (где $k=10$ )	$\frac{x_i - a}{k} \cdot n_i$	$\left( \frac{x_i - a}{k} \right)^2 \cdot n_i$
185	1	-30	-3	-3	9
195	2	-20	-2	-4	8
205	3	-10	-1	-3	3
215	5	0	0	0	0
225	4	10	1	4	4
235	2	20	2	4	8
245	1	30	3	3	9
Итого	18	-	-	1	41

С помощью дисперсии находим среднеквадратическое отклонение:

$$\sigma_x = \pm\sqrt{\sigma_x^2}; \quad (2.7)$$
$$\sigma_x = \pm\sqrt{227,49} = \pm 15,08 \text{ В.}$$

С учётом полученных характеристик вариационного ряда можно сделать вывод, что среднее значение напряжения в электрической сети колеблется в пределах:

$$\bar{X} = 215,56 \pm 15,08 \text{ В,}$$

т.е. минимальное значение может быть 200,48 В, а максимальное 230,64 В.

## 2.2. Зависимые случайные величины в электроэнергетике

Между двумя переменными величинами  $X$  и  $Y$  могут существовать два вида связи: функциональная и статистическая.

Функциональная зависимость между двумя переменными величинами  $X$  и  $Y$  характеризуется тем, что каждому значению одной из них соответствует вполне определённое значение другой. Например, между радиусом окружности и её длиной существует однозначная функциональная зависимость, выражаемая формулой:

$$C = 2\pi R. \quad (2.8)$$

Другой пример — известный закон Ома:

$$I = \frac{U}{R}. \quad (2.9)$$

Эти формулы, (2.8) и (2.9), позволяют по известным значениям радиуса в первом случае и напряжения и сопротивления во втором найти вполне определённые значения длины окружности и тока в электрической цепи постоянного тока.

Однако в природе и в жизни таких функциональных зависимостей очень мало. Тот же закон Ома может рассматриваться как функциональная зависимость только в том случае, если напряжение стабилизировано, т.е.  $U = \text{const}$ . Если это условие нарушается, что довольно часто происходит в жизни из-за разрядки источников питания, то никакой функциональной зависимости между током  $I$  и сопротивлением  $R$  не будет.

Таким образом, для большинства событий и явлений, происходящих во всем мире, функциональные связи не соответствуют. Связи этого вида называются статистическими. Связь между двумя переменными величинами называется статистической, если каждому значению одной из них соответствует множество значений другой, но число этих значений не является постоянным, а сами значения не отражают определенной закономерности.



Если рассматривать это множество значений зависимой переменной как распределение, соответствующее каждому значению аргумента, то можно дать более строгое определение статистической связи.

Переменная величина  $Y$  связана с  $X$  статистически, если каждому значению  $X$  соответствует не одно или несколько определенных значений  $Y$ , а целое распределение  $Y$ , меняющееся вместе с изменением  $X$ .

Рассмотрим в качестве статистической связи зависимость между производительностью  $П$  и расходом электроэнергии  $W$  экскаватора. Здесь аргументом является производительность (обозначим эту величину через  $X$ ), а переменной величиной — расход электроэнергии (обозначим через  $Y$ ).

Связь  $Y$  с  $X$  является статистической потому, что расход электроэнергии будет определяться не только значением производительности экскаватора, но и рядом других вспомогательных факторов. К ним могут быть отнесены: категория грунта (мягкий, твердый), квалификация машиниста экскаватора (опытный, неопытный), сезонность (зима — лето) и прочие. Поэтому зависимость между этими величинами задается в виде корреляционной таблицы, представленной в табл. 2.4.

Таблица 2.4

Корреляционная таблица  
Расход электроэнергии, тыс. кВт·ч

Производительность, т	$Y_j$	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	$n_{x_i}$
	$X_i$							
100		9	4	1	-	-	-	14
300		1	10	9	3	-	-	23
500		-	2	6	14	6	-	28
700		-	-	1	10	18	6	35
$n_{y_j}$		10	16	17	27	24	6	100

Первая задача, которую позволяет решить теория корреляции — это установить вид связи между величинами  $X$  и  $Y$  — прямолинейная, гиперболическая, параболическая, степенная и др.

Для этого сначала требуется рассчитать групповые средние: при фиксированных значениях  $X$  находят групповые средние

$$\bar{Y}_i = \frac{\sum Y_j \cdot n_{ij}}{n_{x_i}}, \quad (2.10)$$

при фиксированных значениях  $Y$  находят групповые средние

$$\bar{X}_j = \frac{\sum X_i \cdot n_{ij}}{n_{y_j}}. \quad (2.11)$$

Значения групповых средних представлены в табл. 2.5 и 2.6.

Таблица 2.5  
Значения  $\bar{X}_j$

$\bar{X}_j$	$\bar{Y}_j$
120	1,0
275	1,2
382	1,4
552	1,6
650	1,8
700	2,0

Таблица 2.6  
Значения  $\bar{Y}_i$

$\bar{Y}_i$	$\bar{X}_i$
1,086	100
1,322	300
1,571	500
1,766	700

С помощью групповых средних построены два графика зависимостей  $Y = f(X)$  и  $X = f(Y)$ , которые представлены на рис. 2.2. На основании этих графиков следует вывод, что обе эти зависимости прямолинейные, т.е. имеют уравнения прямых:  $Y = a + bX$  и  $X = c + dY$ .

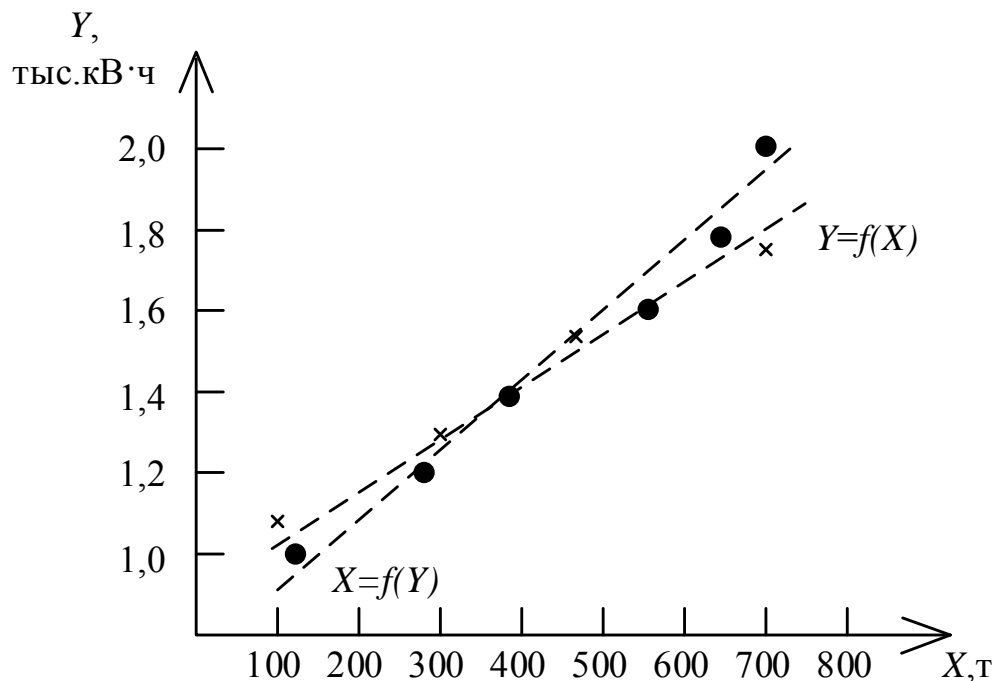


Рис. 2.2. Прямые регрессии  $Y = f(X)$  и  $X = f(Y)$

На основании полученных зависимостей можно дать еще одно определенное связи между двумя величинами.

Между двумя случайными величинами  $X$  и  $Y$  существует корреляционная зависимость, если различным значениям одной из них, например  $X$ , соответствуют определенные групповые средние другой  $\bar{Y}_i$ .

Для того, чтобы можно было использовать полученные зависимости в практических целях, т.е. производить с помощью их расчеты, нужно определить величины коэффициентов: « $a$ » и « $b$ » в зависимости  $Y = f(X)$  и « $c$ » и « $d$ » в зависимости  $X = f(Y)$ . Это можно выполнить разными методами.

### 2.2.1. Метод наименьших квадратов

Наиболее часто встречаются задачи линейной корреляции, где уравнение регрессии записывается в виде

$$Y = aX + b. \quad (2.12)$$

Этой прямолинейной зависимости соответствует график, который приведен на рис. 2.3.

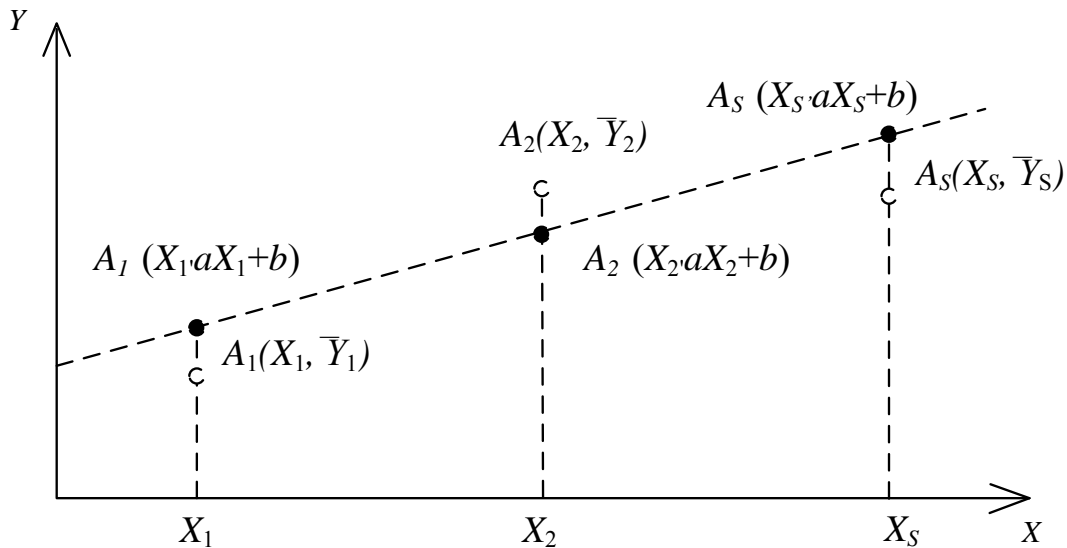


Рис. 2.3. Прямая регрессии  $Y = aX + b$

В соответствии с методом наименьших квадратов искомой прямой будет та, для которой окажется наименьшей сумма  $S$  квадратов отклонений по ординате точек  $A_1, A_2, \dots, A_s$  от точек  $A_1', A_2', \dots, A_s'$ , имеющих с первыми одинаковые абсциссы. Причем каждую точку нужно учесть столько раз, сколько раз встречается в распределении значение  $X_i$ , т.е. точку  $A_1$  нужно учесть  $n_{x1}$  раз, точку  $A_2$  —  $n_{x2}$  раз и т.д.

Тогда сумма квадратов отклонений запишется следующим образом:

$$S = \sum_1^s (Y - \bar{Y})^2 = \min. \quad (2.13)$$

После подстановки ординат получим

$$S = n_{x1}(aX_1 + b - \bar{Y}_1)^2 + n_{x2}(aX_2 + b - \bar{Y}_2)^2 + \dots + n_{xs}(aX_s + b - \bar{Y}_s)^2 = \min. \quad (2.14)$$

Чтобы найти минимум этой функции, запишем уравнения в частных производных:  $\frac{\partial S}{\partial a} = 0$ ;  $\frac{\partial S}{\partial b} = 0$ , после чего имеем

$$\begin{cases} a \sum_1^S n_{X_i} X_i + b \sum_1^S n_{X_i} = \sum_1^S n_{X_i} \bar{Y}_i \\ a \sum_1^S n_{X_i} X_i^2 + b \sum_1^S n_{X_i} X_i = \sum_1^S n_{X_i} X_i \bar{Y}_i \end{cases} \quad (2.15)$$

Решая эту систему двух уравнений, получаем коэффициенты «a» и «b».

*Нелинейные зависимости.*

Параболический вид связи:

$$Y = a_0 + a_1 X + a_2 X^2. \quad (2.16)$$

Кривая регрессии представлена на рис. 2.4.

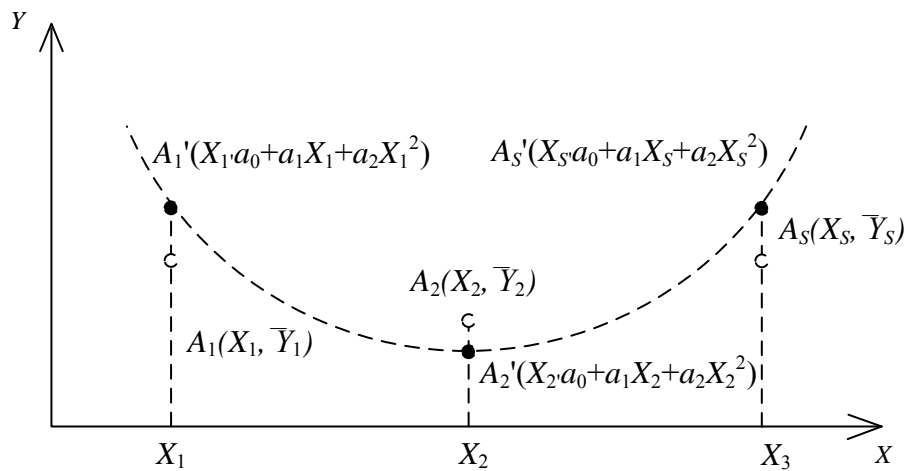


Рис. 2.4. Кривая регрессии  $Y = a_0 + a_1 X + a_2 X^2$

Сумма наименьших квадратов отклонений запишется

$$\begin{aligned} S = n_{X_1} (a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_1^2 - \bar{Y}_1)^2 + n_{X_2} (a_0 + a_1 X_2 + a_2 X_2^2 - \bar{Y}_2)^2 + \dots \\ \dots + n_{X_S} (a_0 + a_1 X_S + a_2 X_S^2 - \bar{Y}_S)^2 = \min; \end{aligned} \quad (2.17)$$

$\frac{\partial S}{\partial a_0} = 0$ ;  $\frac{\partial S}{\partial a_1} = 0$ ,  $\frac{\partial S}{\partial a_2} = 0$ , отсюда система из трех уравнений

$$\begin{cases} a_0 \sum_1^S n_{X_i} + a_1 \sum_1^S n_{X_i} \cdot X_i + a_2 \sum_1^S n_{X_i} \cdot X_i^2 = \sum_1^S n_{X_i} \cdot \bar{Y}_i \\ a_0 \sum_1^S n_{X_i} \cdot X_i + a_1 \sum_1^S n_{X_i} \cdot X_i^2 + a_2 \sum_1^S n_{X_i} \cdot X_i^3 = \sum_1^S n_{X_i} \cdot X_i \cdot \bar{Y}_i \\ a_0 \sum_1^S n_{X_i} \cdot X_i^2 + a_1 \sum_1^S n_{X_i} \cdot X_i^3 + a_2 \sum_1^S n_{X_i} \cdot X_i^4 = \sum_1^S n_{X_i} \cdot X_i^2 \cdot \bar{Y}_i \end{cases} \quad (2.18)$$

Из этих уравнений находим коэффициенты регрессии  $a_0$ ,  $a_1$  и  $a_2$ .

Гиперболическая зависимость:

$$Y = \frac{a}{X} + b. \quad (2.19)$$

Коэффициенты  $a$  и  $b$  определяются путём решения систем уравнений:

$$\begin{cases} a \sum_1^s n_{x_i} \cdot \frac{1}{X_i} + b \sum_1^s n_{x_i} = \sum_1^s n_{x_i} \bar{Y}_i \\ a \sum_1^s n_{x_i} \cdot \frac{1}{X_i^2} + b \sum_1^s n_{x_i} \cdot \frac{1}{X_i} = \sum_1^s n_{x_i} \cdot \bar{Y}_i \cdot \frac{1}{X_i} \end{cases}. \quad (2.20)$$

Показательная функция:

$$Y = b \cdot a^X. \quad (2.21)$$

Коэффициенты  $a$  и  $b$  находятся из уравнений:

$$\begin{cases} \lg a \sum_1^s n_{x_i} \cdot X_i + \lg b \sum_1^s n_{x_i} = \sum_1^s n_{x_i} \cdot \lg \bar{Y}_i \\ \lg a \sum_1^s n_{x_i} \cdot X_i^2 + \lg b \sum_1^s n_{x_i} \cdot X_i = \sum_1^s n_{x_i} \cdot X_i \cdot \lg \bar{Y}_i \end{cases} \quad (2.22)$$

*Пример 0.1.* Определить коэффициенты корреляционной зависимости по экспериментальным данным, приведенным в табл. 2.7.

Таблица 2.7

$Y \backslash X$	10	20	30	40	50	$n(x)_i$
5	2	5	3	–	–	10
10	–	4	10	2	–	16
15	–	–	8	7	1	16
20	–	–	1	3	6	10
$n(y)_i$	2	9	22	12	7	52

*Решение:*

1. Определяем групповые средние значения:

- при фиксированных  $Y$ :

$$y_1 = 10 \rightarrow \bar{x}_1 = 5;$$

$$y_2 = 20 \rightarrow \bar{x}_2 = 7,22;$$

$$y_3 = 30 \rightarrow \bar{x}_3 = 11,59;$$

$$y_4 = 40 \rightarrow \bar{x}_4 = 15,42;$$

$$y_5 = 50 \rightarrow \bar{x}_5 = 19,28;$$

- при фиксированных  $X$ :

$$x_1 = 5 \rightarrow \bar{y}_1 = 21;$$

$$x_2 = 10 \rightarrow \bar{y}_2 = 28,75;$$

$$x_3 = 15 \rightarrow \bar{y}_3 = 35,62;$$

$$x_4 = 20 \rightarrow \bar{y}_4 = 45.$$

2. По полученным данным строим графики  $y = f(\bar{x}_i)$  и  $x = f(\bar{y}_i)$

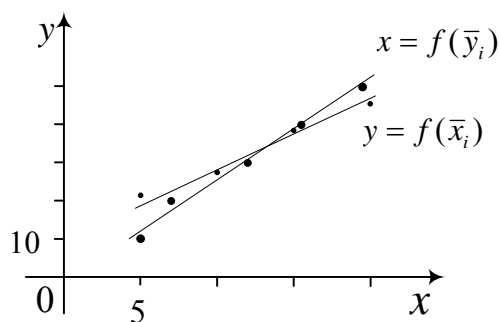


Рис. 2.5

3. Для расчета коэффициентов корреляционного уравнения в скалярной (не матричной) форме составляем вспомогательную таблицу:

Таблица 2.8

$x_i$	$n(x)_i$	$\bar{y}_i$	$n(x)_i \cdot x_i$	$n(x)_i \cdot \bar{y}_i$	$n(x)_i \cdot x_i^2$	$n(x)_i \cdot x_i \cdot \bar{y}_i$
5	10	21	50	210	250	1050
10	16	28,75	160	460	1600	4600
15	16	35,62	240	570	3600	8550
20	10	45	200	450	4000	9000
<b><math>\Sigma</math></b>	<b>52</b>	—	<b>650</b>	<b>1690</b>	<b>9450</b>	<b>23200</b>

4. Составляем и решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 650 \cdot a + 52 \cdot b = 1690; \\ 9450 \cdot a + 650 \cdot b = 23200; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 1,596; \\ b = 12,55. \end{cases}$$

4. Записываем уравнение связи параметров  $Y = f(X) \approx aX + b$ :

$$Y = 1,596 X + 12,55.$$

### 2.2.2. Коэффициенты регрессии

Уравнение  $Y = a \cdot X + b$  можно представить в таком виде:

$$Y - \bar{Y} = \rho_{y/x} \cdot (X - \bar{X}), \quad (2.23)$$

где  $\rho_{y/x}$  — коэффициент регрессии, который определяет угол наклона прямой регрессии к оси X;  
 $\bar{X}$  и  $\bar{Y}$  — среднее арифметическое (м.о.) соответственно по величинам x и y.

Согласно уравнению (2.23) прямая регрессии проходит через точку с координатами  $(\bar{X}, \bar{Y})$ , а это есть средняя точка корреляционного графика. Таким образом, чтобы получить уравнение (2.23), необходимо вычислить коэффициент регрессии  $\rho_{y/x}$ . Этот коэффициент вычисляется по формуле

$$\rho_{y/x} = \frac{\mu}{\sigma_x^2}, \quad (2.24)$$

где  $\mu$  — корреляционный момент случайных величин  $x$  и  $y$ ;  
 $\sigma_x^2$  — дисперсия по  $x$ .

Аналогично можно записать и получить уравнение второй прямой регрессии  $X = cY + d$ :

$$X - \bar{X} = \rho_{x/y} \cdot (Y - \bar{Y}), \quad (2.26)$$

где  $\rho_{x/y}$  — коэффициент регрессии  $x$  и  $y$ , который определяет угол наклона второй прямой регрессии.

Этот коэффициент определяется по уравнению

$$\rho_{x/y} = \frac{\mu}{\sigma_y^2}, \quad (2.27)$$

где  $\sigma_y^2$  — дисперсия по  $y$ .

### 2.2.3. Коэффициент парной корреляции

Коэффициентом корреляции случайных величин  $X$  и  $Y$ , связь между которыми задана корреляционной таблицей, называется среднее геометрическое их коэффициентов регрессии, имеющее знак последних, т.е.

$$r = \pm \sqrt{\rho_{y/x} \cdot \rho_{x/y}}. \quad (2.28)$$

Практически коэффициент корреляции определяют по уравнению

$$r = \frac{\mu}{\sigma_x \cdot \sigma_y}, \quad (2.29)$$

где  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  — среднеквадратические отклонения величин  $x$  и  $y$  соответственно.

Учитывая, что  $\rho_{y/x} = \frac{\mu}{\sigma_x^2}$  (по 2.24), умножим числитель и знаменатель этого выражения на  $\sigma_y$ .

Тогда получим:

$$\rho_{y/x} = \frac{\mu}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} \cdot \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} = r \cdot \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}, \quad (2.30)$$

т.е., коэффициент регрессии  $\rho_{y/x}$  выражен через коэффициент корреляции.

Значит, уравнение (2.23) можно записать в следующем виде:

$$Y - \bar{Y} = r \cdot \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} \cdot (X - \bar{X}). \quad (2.31)$$

Аналогично можно представить уравнение (2.26) тоже через коэффициент корреляции:

$$X - \bar{X} = r \cdot \frac{\sigma_X}{\sigma_Y} \cdot (Y - \bar{Y}). \quad (2.32)$$

#### 2.2.4. Практическое применение коэффициентов регрессии и корреляции

Рассчитаем коэффициенты  $a$  и  $b$  в уравнении (2.12) методом наименьших квадратов. Для этого составим следующую таблицу:

Таблица 2.9

Параметры для записи уравнений (2.15)

$X_i$	$n_{xi}$	$\bar{Y}_i$	$n_{xi} \cdot X_i$	$n_{xi} \cdot \bar{Y}_i$	$n_{xi} \cdot X_i^2$	$n_{xi} \cdot X_i \cdot \bar{Y}_i$
100	14	1,086	1400	15,204	140000	1520,4
300	23	1,322	6900	30,406	2070000	9121,8
500	28	1,571	14000	43,988	7000000	21,994,0
700	35	1,766	24500	61,81	17150000	43,267,0
Итого	100		46800	151,41	26360000	75903,2

Используя данные этой таблицы, запишем систему уравнений (2.15):

$$\begin{cases} 46800 \cdot a + 100 \cdot b = 151,41 \\ 26360000 \cdot a + 46800 \cdot b = 75903,2 \end{cases}$$

Решив эту систему уравнений, находим коэффициенты  $a = 0,00113$  и  $b = 0,985$ . Тогда уравнение регрессии запишется так

$$Y = 0,00113X + 0,985. \quad (2.33)$$

Проверим полученное уравнение на точность расчётов. Для этого подставим значения  $X$  из корреляционной таблицы в уравнение (2.31) и сравним рассчитанные значения  $Y$  с групповыми средними  $\bar{Y}_i$ . Результаты проверки представлены в табл. 2.10.



Погрешность расчётов по уравнению (2.33)

$X_i$	$Y_i$	$\bar{Y}_i$	Погрешность, %
100	1,098	1,086	1,2
300	1,324	1,322	0,2
500	1,55	1,571	-2,1
700	1,776	1,766	1,0

Таким образом, погрешность расчётов по уравнению (2.33) не превышает 5%, что позволяет использовать полученную зависимость для расчёта расхода электроэнергии в функции от производительности. Решим эту же задачу с помощью коэффициентов регрессии. Для этого рассчитаем коэффициенты регрессии:

$$\rho_{y/x} = \frac{\mu}{\sigma_x^2} = \frac{43,15}{44576} = 0,000968,$$

$$\rho_{x/y} = \frac{\mu}{\sigma_y^2} = \frac{43,15}{0,08} = 540.$$

Тогда уравнения регрессии будут записаны в виде:

$$Y - 1,514 = 0,968 \cdot 10^{-3} (X - 468),$$

после преобразования

$$Y = 0,968 \cdot 10^{-3} \cdot X + 1,093,$$

а

$$X - 468 = 540(Y - 1,514),$$

после преобразования

$$X = 540 \cdot Y - 349,5.$$

И наконец, запишем эти уравнения через коэффициент корреляции. Для этого вычислим этот коэффициент двумя способами:

$$r = \pm \sqrt{\rho_{y/x} \cdot \rho_{x/y}} = \sqrt{0,000968 \cdot 540} = 0,722;$$

$$r = \frac{\mu}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{43,15}{211 \cdot 0,283} = 0,7226.$$

Результаты почти одинаковы. Теперь запишем уравнение регрессии:

$$Y - \bar{Y} = r \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \cdot (X - \bar{X}).$$

После подстановки числовых значений:

$$Y - 1,514 = 0,722 \cdot \frac{0,283}{211} (X - 468)$$

или

$$Y = 0,968 \cdot 10^{-3} \cdot X + 1,093.$$

*Пример 0.2.* Для задачи из п. 2.2.2 определить коэффициенты ковариации, парной корреляции и коэффициенты регрессии методом корреляционных отношений.

1. Составляем расширенную корреляционную таблицу (табл. 2.11), в которой истинные значения случайных величин заменяются нормированными (с принятыми масштабными коэффициентами  $a$ ,  $b$ ,  $k$  и  $l$ ):

$$X_i^* = \frac{x_i - a}{k};$$

$$Y_j^* = \frac{y_j - b}{l};$$

$$X_1^* = \frac{x_1 - a}{k} = \frac{5 - 15}{5} = -2;$$

$$Y_1^* = \frac{y_1 - b}{l} = \frac{10 - 30}{10} = -2.$$

2. В клетках таблицы каждой частоте  $n_{ij}$  приписывается нижний индекс, равный произведению нормированных значений ( $X_i^* \cdot Y_j^*$ ):

Таблица 2.11

		$y_j$					I	II
		10	20	30	40	50		
$x_i$	$Y_j^*$							
	$X_i^*$	<b>-2</b>	<b>-1</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>		
5	<b>-2</b>	2 <sub>4</sub>	5 <sub>2</sub>	3 <sub>0</sub>	-	-	<b>18</b>	<b>0</b>
10	<b>-1</b>	-	4 <sub>1</sub>	10 <sub>0</sub>	2 <sub>-1</sub>	-	<b>4</b>	<b>-2</b>
15	<b>0</b>	-	-	8 <sub>0</sub>	7 <sub>0</sub>	1 <sub>0</sub>	III	IV
20	<b>1</b>	-	-	1 <sub>0</sub>	3 <sub>1</sub>	6 <sub>2</sub>	<b>0</b>	<b>15</b>
	I	<b>8</b>	<b>14</b>	II	<b>-2</b>	<b>0</b>	$\Sigma_I=22$	$\Sigma_{II}=-2$
	III	<b>0</b>	<b>0</b>	IV	<b>3</b>	<b>12</b>	$\Sigma_{III}=0$	$\Sigma_{IV}=15$

3. В последних двух строках и столбцах записываются суммы произведений нормированных значений случайных величин на их частоты:

$$\sum X_i^* \cdot Y_j^* \cdot n_{i,j}.$$

Для выделенных клеток таблицы — это сумма произведений записанных там чисел на их нижние индексы. Для остальных — произведения равны нулю.

4. Получаем четыре квадрата, пронумерованных римскими цифрами, сумма значений которых дает основную расчетную величину для определения коэффициента ковариации:

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m X_i^* Y_j^* n_{i,j}}{\sum n_{i,j}} kl - (\bar{x} - a)(\bar{y} - b).$$

5. Для расчета групповых средних и межгрупповых дисперсий составляем вспомогательные таблицы:

$$\bar{x} = a + \frac{k}{\sum n(x)_i} \cdot \sum_i \frac{x_i - a}{k} n(x)_i = 15 + \frac{5}{52} \cdot (-26) = 12,5;$$

$$\sigma^2(x) = \frac{k^2}{\sum n(x)_i} \cdot \sum_i \left( \frac{x_i - a}{k} \right)^2 n(x)_i - (\bar{x} - a)^2 = \frac{5^2}{52} \cdot 396 - (12,5 - 15)^2 = 184,1;$$

$$\sigma(x) = \sqrt{184,1} = 13,57.$$

Таблица 2.12

$x_i$	$n(x)_i$	$X_i^*$	$X_i^* \cdot n(x)_i$	$(X_i^*)^2 n(x)_i$
5	10	-2	-20	40
10	16	-1	-16	256
15	16	0	0	0
20	10	1	10	100
<b><math>\Sigma</math></b>	<b>52</b>	-	<b>-26</b>	<b>396</b>

Аналогично определяются:  $\bar{y}=32,5$ ;  $\sigma^2(y)=103,4$ ;  $\sigma(y)=10,2$ .

6. Рассчитываем коэффициент ковариации:

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m X_i^* Y_j^* n_{i,j}}{\sum n_{i,j}} \cdot kl - (\bar{x} - a)(\bar{y} - b) = \\ &= \frac{22 - 2 + 15}{52} \cdot 5 \cdot 10 - (12,5 - 15)(32,5 - 30) = 27,4; \end{aligned}$$

- коэффициент парной корреляции:

$$r = \frac{\mu}{\sigma(x) \cdot \sigma(y)} = \frac{27,4}{13,57 \cdot 10,2} = 0,20;$$

- коэффициенты регрессии:

$$\rho_{y/x} = \frac{\mu}{\sigma^2(y)} = \frac{27,4}{103,4} = 0,26;$$
$$\rho_{x/y} = \frac{\mu}{\sigma^2(x)} = \frac{27,4}{184,1} = 0,15.$$

7. Уравнения связи между величинами  $X$  и  $Y$  можно записать в виде:

$$(Y - \bar{y}) = r \frac{\sigma(y)}{\sigma(x)} \cdot (X - \bar{x}) \text{ или } (Y - \bar{y}) = \rho_{y/x} \cdot (X - \bar{x}).$$

После подстановки числовых значений получаем:

$$(Y - 32,5) = 0,26 \cdot (X - 12,5),$$

откуда

$$Y = 0,26 \cdot X + 29,25.$$

### **2.2.5. Оценка тесноты связи между случайными величинами**

Второй задачей, которую позволяет решить теория корреляции, является оценка тесноты связи между случайными величинами. Если связь между случайными величинами линейная, то теснота связи оценивается с помощью коэффициента корреляции. Для этого необходимо использовать свойства коэффициента корреляции.

Основные свойства коэффициента корреляции.

Абсолютная величина коэффициента корреляции не превосходит 1, т.е.  $-1 \leq r \leq 1$ .

Если связь между  $x$  и  $y$  выражена корреляционной таблицей, то равенство  $r = \pm 1$  является необходимым и достаточным условием, чтобы  $x$  и  $y$  были связаны линейной функциональной связью.

Если между  $x$  и  $y$  отсутствует одна из корреляционных связей или обе, то коэффициент корреляции равен 0, т.е.  $r = 0$ .

При равенстве  $r = 0$  отсутствует лишь линейная корреляционная связь. Нелинейная корреляционная зависимость при этом возможна.

В случае нелинейных зависимостей между двумя переменными для оценки тесноты связи служат корреляционные отношения.

Корреляционным отношением  $\eta_{y/x}$  называется отношение межгруппового среднеквадратического отклонения переменной  $y$  к общему среднеквадратическому отклонению этой переменной:

$$\eta_{Y/X} = \frac{\delta_Y}{\sigma_Y}. \quad (2.34)$$

Аналогично

$$\eta_{X/Y} = \frac{\delta_X}{\sigma_X}. \quad (2.35)$$

Межгрупповые среднеквадратические отклонения  $\delta_{Y/X}$  и  $\delta_{X/Y}$  определяются с помощью межгрупповых дисперсий  $\delta_X^2$  и  $\delta_Y^2$ .

Межгрупповой дисперсией называется средняя арифметическая квадратов отклонений групповых средних от общей средней, т.е.

$$\delta_X^2 = \frac{\sum_1^r (\bar{X}_j - \bar{X})^2 \cdot n_{Yj}}{\sum n_{ij}}; \quad (2.36)$$

$$\delta_Y^2 = \frac{\sum_1^r (\bar{Y}_i - \bar{Y})^2 \cdot n_{Xi}}{\sum n_{ij}}. \quad (2.37)$$

Исходные данные для расчётов межгрупповых дисперсий представлены в табл. 2.13 и 2.14.

Таблица 2.13

Данные для расчета  $\delta_X^2$

$Y_j$	$\bar{X}_j$	$n_{Yj}$
1,0	120	10
1,2	275	16
1,4	382	17
1,6	552	27
1,8	650	24
2,0	700	6

Таблица 2.14

Данные для расчета  $\delta_Y^2$

$X_i$	$\bar{Y}_i$	$n_{Xi}$
100	1,086	14
300	1,322	23
500	1,571	28
700	1,766	35

Результаты расчетов:  $\delta_x^2 = 32400$ ;  $\delta_y^2 = 0,057$ .

Тогда межгрупповые среднеквадратические отклонения составляют:

$$\delta_x = \sqrt{32400} = 180;$$

$$\delta_y = \sqrt{0,057} = 0,239.$$

И наконец, корреляционные отношения:

$$\eta_{y/x} = \frac{\delta_y}{\sigma_y} = \frac{0,239}{0,283} = 0,845;$$

$$\eta_{x/y} = \frac{\delta_x}{\sigma_x} = \frac{180}{211} = 0,852.$$

Анализ тесноты связи между переменными величинами  $X$  и  $Y$  производится на основании свойств корреляционных отношений. Основные свойства корреляционных отношений следующие:

Корреляционные отношения не отрицательны и не превосходят 1, т.е.  $0 \leq \eta \leq 1$ .

Равенство нулю корреляционного отношения является необходимым и достаточным условием для того, чтобы отсутствовала корреляционная связь между величинами  $X$  и  $Y$ .

Равенство единице корреляционного отношения является необходимым и достаточным условием, чтобы между величинами  $X$  и  $Y$  существовала функциональная связь.

Выполнение равенства  $\eta_{y/x} = |r|$  является необходимым и достаточным условием, чтобы регрессия  $X$  и  $Y$  была линейной.

Таким образом, корреляционное отношение является мерой тесноты корреляционной связи между  $X$  и  $Y$  и притом какой угодно по форме. В этом большое преимущество корреляционного отношения по сравнению с коэффициентом корреляции.

### 2.2.6. Множественная корреляция

Задача множественной корреляции — получить зависимость между результативным признаком  $Z$  и многими независимыми переменными  $X$ ,  $Y$  и т.д.

В случае линейной зависимости связь между  $Z$  от  $X$  и  $Y$  может быть записана в виде уравнения

$$Z = a \cdot X + b \cdot Y + c. \quad (2.38)$$

Используя метод наименьших квадратов, имеем:

$$S = \sum (a \cdot X_i + b \cdot Y_i + c - Z_i)^2 \cdot n_i,$$

далее

$$\frac{\partial S}{\partial c} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial b} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial a} = 0,$$

откуда

$$\begin{cases} c \sum_1^m n_i + a \sum_1^m X_i \cdot n_i + b \sum_1^m Y_i \cdot n_i = \sum_1^m Z_i \cdot n_i \\ c \sum_1^m Y_i \cdot n_i + a \sum_1^m X_i \cdot Y_i \cdot n_i + b \sum_1^m Y_i^2 \cdot n_i = \sum_1^m Y_i \cdot Z_i \cdot n_i \\ c \sum_1^m X_i \cdot n_i + a \sum_1^m X_i^2 \cdot n_i + b \sum_1^m X_i \cdot Y_i \cdot n_i = \sum_1^m X_i \cdot Z_i \cdot n_i \end{cases} \quad (2.39)$$

Решая систему уравнений (2.39), получаем коэффициенты «а», «b», «с».

Оценка тесноты связи при множественной корреляции производится по совокупному коэффициенту корреляции:

$$R = \sqrt{1 - \frac{S_{\min}}{n \cdot \sigma_z^2}}, \quad (2.40)$$

где  $S_{\min}$  — минимальная сумма квадратов отклонений;

$\sigma_z^2$  — дисперсия по  $Z$ .

Основные свойства совокупного коэффициента корреляции:

Совокупный коэффициент корреляции неотрицателен и изменяется в интервале от 0 до 1.

Если  $R = 0$ , то  $Z$  не имеет линейной связи с величинами  $X$  и  $Y$ , но при этом возможна нелинейная корреляция.

Если  $R = 1$ , то  $Z$  связано с  $X$  и  $Y$  функциональной зависимостью.

Таким образом, совокупный коэффициент корреляции есть мера тесноты линейной связи  $Z$  с  $X$  и  $Y$ .

В некоторых случаях бывает необходимо оценить влияние на  $Z$  отдельно каждого фактора. Эта оценка производится с помощью частных коэффициентов корреляции.

Частный коэффициент корреляции между  $Z$  и  $X$ :

$$r_{XZ(Y)} = \frac{r_{XZ} - r_{YZ} \cdot r_{XY}}{\sqrt{(1 - r_{XY}^2)(1 - r_{YZ}^2)}}. \quad (2.41)$$

Частный коэффициент корреляции между  $Z$  и  $Y$ :

$$r_{YZ(X)} = \frac{r_{YZ} - r_{XZ} \cdot r_{XY}}{\sqrt{(1 - r_{XY}^2)(1 - r_{XZ}^2)}}. \quad (2.42)$$

### 2.2.7. Задачи для самостоятельного решения

**Задача 2.1.** Определить коэффициенты регрессии модели первого порядка для электропотребления завода на основании следующей таблицы результатов:

Таблица 2.15

X, т/ч	1	2	3	4
Y, МВт·ч	12	58	155	386

**Задача 2.2.** Определить коэффициенты регрессии для нелинейной модели второго порядка по данным предыдущей задачи. Сравнить погрешность полученных уравнений связи.

**Задача 2.3.** Рассчитать дисперсию воспроизводимости для предыдущей задачи на основании неравномерного и равномерного дублирования опытов:

Таблица 2.16

X	1	2	3	4
Y <sub>1</sub>	12	58	155	386
Y <sub>2</sub>	10	60	152	390
Y <sub>3</sub>	13	57	150	392

Проверить адекватность моделей по критерию Фишера.

**Задача 2.4.** Мощность, потребляемая промышленным предприятием, зависит от нескольких технологических параметров. Определите наиболее значимые факторы и рассчитайте параметры многомерной регрессионной зависимости на основании таблицы экспериментальных данных:

Таблица 2.17

№ опыта	X1	X2	X3	Y, кВт
1	145	1,89	10,20	<b>528</b>
2	115	1,99	10,21	<b>453</b>
3	134	2,19	11,21	<b>460</b>
4	162	2,01	11,22	<b>459</b>
5	174	1,88	11,23	<b>532</b>
6	200	2,01	10,40	<b>500</b>

**Задача 2.5.** Рассчитайте коэффициенты уравнения связи на основании корреляционной таблицы методом наименьших квадратов:

Таблица 2.18

Y, кВт·ч X, т/ч	2	4	6	8
<b>5</b>	10	2	–	–
<b>10</b>	–	1	4	8
<b>15</b>	–	–	1	5
<b>20</b>	–	–	3	10
<b>25</b>	12	3	1	–



**Задача 2.6.** Для данных из предыдущей задачи определите коэффициенты ковариации, парной корреляции и регрессии. Сравните погрешность двух регрессионных уравнений. Сделайте выводы.

## 2.3. Применение методов теории вероятностей и математической статистики для оценки надежности систем электроснабжения

### 2.3.1. Основные показатели надежности элементов систем электроснабжения

Большинство элементов схемы электроснабжения относятся к ремонтируемым изделиям. Основными показателями надежности таких изделий являются параметр потока отказов и среднее время восстановления.

Под отказом понимается событие, заключающееся в нарушении работоспособности. Различают отказы устойчивые и неустойчивые. Устойчивый отказ — это отказ, при котором для восстановления работоспособности требуется вмешательство обслуживающего персонала. Неустойчивый отказ — это отказ, который самоустраняется или устраняется автоматически.

Параметр потока отказов, характеризующий частоту отказов, есть среднее количество отказов ремонтируемого изделия в единицу времени. За единицу времени при оценке надежности электроэнергетических систем обычно принимают год; тогда размерность параметра потоков отказов  $\omega$  обозначается через 1/год.

Параметр потока отказов меняется в процессе эксплуатации. График изменения параметра потока отказов, представленный на рис. 2.6 имеет вид:

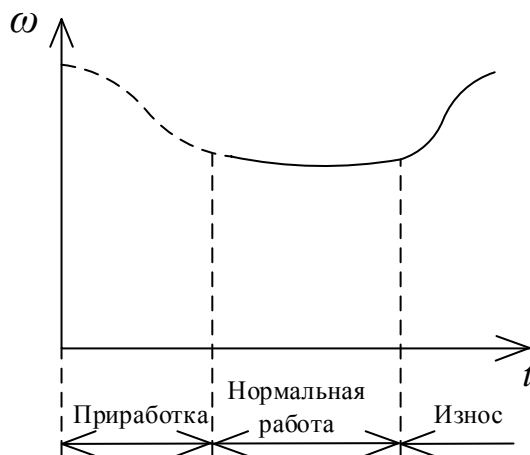


Рис. 2.6. График изменения параметра потока отказов

Можно выделить 3 периода. При оценке надежности следует принимать параметр потока отказов, соответствующий периоду нормальной работы.

Предположим, что в группе из  $n$  элементов, находящихся в периоде нормальной работы, за  $T$  лет наблюдалось  $m$  отказов. Тогда параметр потока отказов:

$$\omega = \frac{m}{n \cdot T}. \quad (2.43)$$

Поскольку отказы являются случайными событиями, то и число  $m$  является случайной величиной. Поэтому целесообразно оценить достоверность найденного параметра, т.е. определить доверительные границы, в которых находится действительная величина  $\omega$ .

Доверительные границы определяются с доверительной вероятностью, равной 0,95 или 0,9.

Границы доверительного интервала вычисляются по формулам:

нижняя

$$\omega_H = \frac{\omega}{r_1}; \quad (2.44)$$

верхняя

$$\omega_B = \frac{\omega}{r_2}; \quad (2.45)$$

где коэффициенты  $r_1$  и  $r_2$  определяются при соответствующей доверительной вероятности.

Так, при  $n = 100$ ,  $T = 10$  лет и  $m = 30$

$$\omega = \frac{30}{100 \cdot 10} = 0,03 \text{ 1/год.}$$

Пределы, в которых находится действительная величина параметра потока отказов данного элемента при доверительной вероятности  $\alpha = 0,9$ , составляют:

$$\omega_H = \frac{0,03}{1,29} = 0,023; \omega_B = \frac{0,03}{0,78} = 0,038.$$

Второй показатель надежности — время восстановления — есть среднее время вынужденного простоя, необходимого для отыскания и устранения одного отказа. Если на отыскание и устранение  $m$  отказов было затрачено время  $t_1, t_2, \dots, t_m$ , то время восстановления можно определить по формуле

$$T_B = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m t_i. \quad (2.46)$$

Этот показатель в значительной мере зависит от опыта персонала, занятого восстановлением, и оснащения его соответствующими средствами. Поэтому статистические данные по времени восстановления элементов должны подвергаться тщательному анализу.

К дополнительным показателям относятся: наработка на отказ, коэффициент готовности, коэффициент вынужденного простоя, вероятность безотказной

работы. Все эти показатели могут быть получены, если известны основные:  $\omega$  и  $T_B$ .

Наработка на отказ — это среднее время наработки или, иначе говоря, продолжительность работы элемента между отказами:

$$T_H \approx \frac{8760}{\omega}. \quad (2.47)$$

Коэффициент готовности — это вероятность того, что элемент будет работоспособен в произвольно выбранный момент времени в промежутках между плановыми ремонтами:

$$K_G = \frac{T_H}{T_H + T_B}. \quad (2.48)$$

Иначе говоря, это отношение суммарного времени исправной работы элемента к общему времени исправной работы и времени восстановления, взятых за один и тот же период эксплуатации.

Коэффициент вынужденного простоя — это вероятность того, что элемент будет неработоспособен в произвольно выбранный момент времени в промежутках между плановыми ремонтами, т.е. восстанавливается после отказа:

$$K_B = 1 - K_G = \frac{T_B}{T_H + T_B}. \quad (2.49)$$

Коэффициент вынужденного простоя можно вычислить и через основные показатели надежности. Если в уравнение  $K_B$  подставить  $T_H = 8760/\omega$ , то получим

$$K_B = \frac{T_B}{\frac{8760}{\omega} + T_B} = \frac{T_B \cdot \omega}{8760 + T_B \cdot \omega}, \quad (2.50)$$

а так как  $T_B \cdot \omega \ll 8760$ , то

$$K_B = \frac{T_B \cdot \omega}{8760}. \quad (2.51)$$

Вероятность безотказной работы — это вероятность того, что в заданном интервале времени не произойдет отказа элемента. Вероятность появления того или иного числа отказов для большинства элементов схем электроснабжения подчиняется закону Пуассона. Вероятность  $m$  отказов элемента за период времени  $t$  при параметре потока отказов  $\omega$  следующая:

$$P_m = \frac{(\omega \cdot t)^m}{m!} e^{-\omega t} \quad (2.52)$$

или при длительности периода, равной 1 году:

$$P_m = \frac{\omega^m}{m!} e^{-\omega}. \quad (2.53)$$

Отсюда вероятность безотказной работы элемента, т.е. вероятность того, что не произойдет ни одного отказа элемента за год, составляет

$$P_{m=0} = e^{-\omega}. \quad (2.54)$$

### 2.3.2. Показатели надежности в резервированной схеме электроснабжения

Различают два вида резервирования — активное (холодное) и пассивное (горячее). Эти виды резервирования приведены на рис. 2.7.

При активном резервировании из двух трансформаторов на подстанции в работе постоянно находится только один, другой трансформатор включается только в аварийных ситуациях.

При пассивном резервировании оба силовых трансформатора постоянно находятся в работе, а при отключении одного из них срабатывает АВР и включает секционный выключатель, переводя всю нагрузку на оставшийся в работе трансформатор. Пассивное резервирование предпочтительнее, поэтому рассмотрим этот вид резервирования с точки зрения надежности электроснабжения.

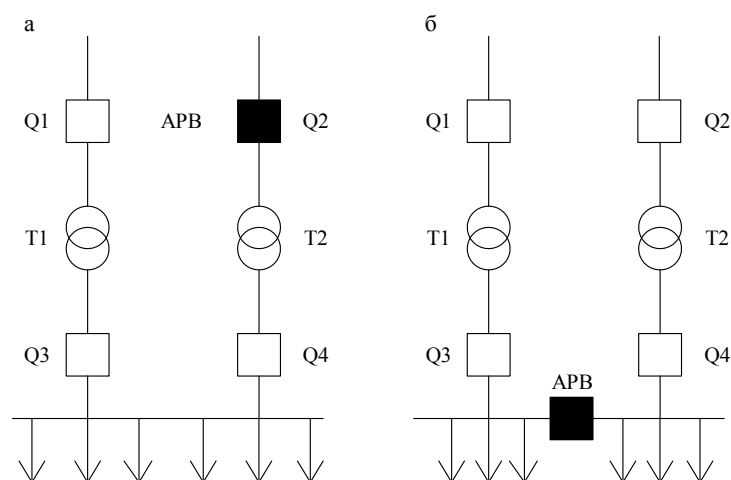


Рис. 2.7. Виды резервирования: а — активное (холодное); б — пассивное (горячее)

При двух работающих трансформаторах на основании известных законов теории вероятности можно записать следующее уравнение:

$$(p_1 + q_1) \cdot (p_2 + q_2) = 1, \quad (2.55)$$

где  $p_1$  и  $p_2$  — вероятности исправной работы трансформаторов;  
 $q_1$  и  $q_2$  — вероятности отказов в работе каждого из них.

После перемножения получим:

$$p_1 \cdot p_2 + p_1 \cdot q_2 + p_2 \cdot q_1 + q_1 \cdot q_2 = 1, \quad (2.56)$$

где  $p_1 \cdot p_2$  — вероятность исправной работы трансформаторов;  
 $p_1 \cdot q_2$  — вероятность исправной работы первого и отказа второго;  
 $p_2 \cdot q_1$  — вероятность отказа первого и исправной работы второго;  
 $q_1 \cdot q_2$  — вероятность отказа в работе обоих трансформаторов.

Так как один силовой трансформатор обеспечивает исправную работу подстанции, то сумма первых трех слагаемых представляет собой вероятность безотказной работы всей подстанции. Таким образом, имеем:

$$P(0) = p_1 \cdot p_2 + p_1 \cdot q_2 + p_2 \cdot q_1. \quad (2.57)$$

Заменим в этом уравнении  $q_1 = (1 - p_1)$  и  $q_2 = (1 - p_2)$ . Тогда получим:

$$P(0) = p_1 \cdot p_2 + p_1 - p_1 \cdot p_2 + p_2 - p_1 \cdot p_2 = p_1 + p_2 - p_1 \cdot p_2. \quad (2.58)$$

Если параметры силовых трансформаторов одинаковы и  $p = p_1 = p_2$ , уравнение (2.58) принимает вид

$$P(0) = 2p - p^2. \quad (2.59)$$

Учитывая, что вероятность безотказной работы отдельного элемента распределяется по экспоненциальному закону (Пуассона), т.е.  $P(0) = e^{-\omega t}$ , уравнения (2.58) и (2.59) можно записать следующим образом:

$$P(0) = e^{-\omega_1 t} + e^{-\omega_2 t} - e^{-(\omega_1 + \omega_2)t}, \quad (2.60)$$

$$P(0) = 2e^{-\omega t} + e^{-\omega_2 t} - e^{-2\omega t}, \quad (2.61)$$

где  $\omega_1$  и  $\omega_2$  — параметры потока отказов первого и второго трансформаторов.

Если трансформаторы одинаковы, т.е.  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ , то справедливо уравнение (2.61).

Время наработки на отказ при разных параметрах трансформаторов определяется уравнением:

$$T_H = \frac{1}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_2} - \frac{1}{\omega_1 + \omega_2}. \quad (2.62)$$

Если параметры  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , одинаковы, то

$$T_H = \frac{3}{2\omega}. \quad (2.63)$$

Аналогично можно получить выражения для определения вероятности безотказной работы при различном числе элементов в группе и разном значении

$$K = \frac{n - m}{m},$$

где  $K$  — кратность резервирования;

$n$  — общее число элементов в группе;  
 $m$  — число оставшихся элементов в работе.

Например, при наличии трех источников питания вероятность бесперебойного электроснабжения при условии, что одного источника питания для этого достаточно, будет определяться в следующей последовательности:

- 1)  $(p_1 + q_1) \cdot (p_2 + q_2) \cdot (p_3 + q_3) = 1$ ;
- 2)  $p_1 p_2 p_3 + p_1 p_2 q_3 + p_2 p_3 q_1 + p_1 p_3 q_2 + p_1 q_2 q_3 + p_2 q_1 q_3 + p_3 q_1 q_2 + q_1 q_2 q_3 = 1$ ;
- 3)  $P(0) = p_1 p_2 p_3 + p_1 p_2 q_3 + p_2 p_3 q_1 + p_1 p_3 q_2 + p_1 q_2 q_3 + p_2 q_1 q_3 + p_3 q_1 q_2$ ;
- 4) после замены  $q_1, q_2, q_3$  получим при  $p_1 = p_2 = p_3 = p$ .

$$P(0) = p^3 + 3p - 3p^2;$$

- 5) с учетом закона Пуассона

$$P(0) = e^{-3\omega t} + 3e^{-\omega t} - 3e^{-2\omega t}.$$

### **2.3.3. Определение показателей надежности в дублированной системе электроснабжения**

Дублированная система электроснабжения включает две одинаковые цепи, каждая из которых рассчитана на полную нагрузку, при этом переход на резервный режим работы обеспечивается автоматически с помощью АВР.

Схема дублированной системы электроснабжения приведена на рис. 2.7. Каждая цепь включает в себя следующие элементы:

- 1 — распределительное устройство напряжением 110 кВ;
- 2 — воздушная линия электропередачи 110 кВ;
- 3 — отделитель;
- 4 — силовой трансформатор 110/10 кВ;
- 5 — распределительное устройство напряжением 10 кВ.

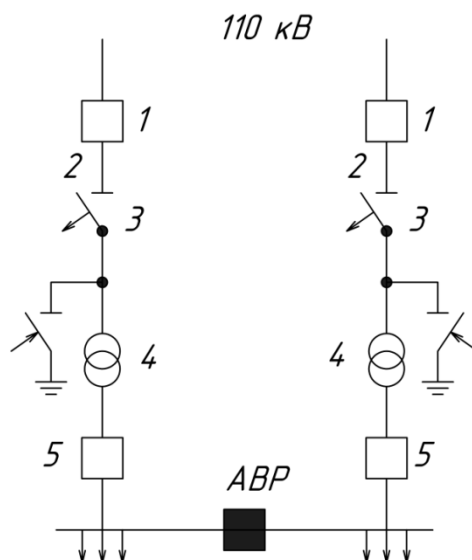


Рис. 2.8. Двухцепная дублированная система электроснабжения

Исходными величинами при определении показателей надежности системы являются:

- параметры потока отказов элементов —  $\omega_i$ ,
- время восстановления при отказах элементов —  $t_{Bi}$ ;
- параметр потока плановых ремонтов —  $\mu_{pi}$ ;
- продолжительность плановых ремонтов —  $t_{pi}$ .

Обычно частота плановых ремонтов для всех элементов цепи принимается одинаковой, а длительность ремонта определяется элементами, для которых требуется наибольшее время ремонта —  $t_p$ , (в часах).

Показатели надежности рассчитываются следующим образом.

*Расчет для одной цепи:*

1. Вероятность безотказной работы цепи в течение одного года из-за отказов в работе элементов

$$P(0) = e^{-\omega_y \cdot t} \quad (2.64)$$

где  $\omega_y = \sum_{i=1}^n \omega_i$  — параметр потока отказов одной цепи;

$t = 1$  год.

2. Время наработки на отказ из-за отказов элементов

$$T_H = \frac{1}{\omega_y} \quad (2.65)$$

3. Коэффициент вынужденного простоя цепи из-за отказов

$$K_{\text{в.ц}} = \sum_{i=1}^n \omega_i \cdot t_{\text{в.и}}, \quad (2.66)$$

где  $\omega_i$  — параметр потока отказов в [1/час].

4. Ожидаемое время простоя за год из-за отказов

$$t_{\text{в.ц}} = K_{\text{в.ц}} \cdot T, \quad (2.67)$$

где  $T = 8760$  ч.

5. Вероятность безотказной работы цепи без отказов и планового ремонта:

$$P(0) = e^{-t(\omega_{\text{ц}} + \mu_{\text{р}})}, \quad (2.68)$$

где  $\mu_{\text{р}}$  — параметр потока плановых ремонтов [1/год].

6. Время наработки на отказ одной цепи из-за отказов и ремонтов

$$T_{\text{н}} = \frac{1}{\omega_{\text{ц}} + \mu_{\text{р}}}. \quad (2.69)$$

Расчет для двух резервируемых цепей:

1. Вероятность безотказной работы дублированной системы, состоящей из двух цепей:

$$P(0) = 2P - P^2$$

или

$$P(0) = 2e^{-t(\omega_{\text{ц}} + \mu_{\text{р}})} - e^{-2t(\omega_{\text{ц}} + \mu_{\text{р}})}. \quad (2.70)$$

2. Время наработки на отказ

$$T_{\text{н}} = 2 \frac{1}{\omega_{\text{ц}} + \mu_{\text{р}}} - \frac{1}{2(\omega_{\text{ц}} + \mu_{\text{р}})} \quad (2.71)$$

или

$$T_{\text{н}} = \frac{3}{2(\omega_{\text{ц}} + \mu_{\text{р}})}.$$

3. Коэффициент вынужденного простоя всей схемы:

$$K_{\text{в.сх}} = (K_{\text{в.ц}} + K_{\text{р}})^2, \quad (2.72)$$

где  $K_{\text{в.ц}}$  — коэффициент вынужденного простоя одной цепи;

$K_{\text{р}}$  — коэффициент простоя цепи из-за ремонтов:

$$K_{\text{р}} = \frac{\mu_{\text{р}} \cdot t_{\text{р}}}{8760}. \quad (2.73)$$

4. Общее время простоя схемы в течение одного года:

$$t_{\text{в.сх}} = K_{\text{в.сх}} \cdot T. \quad (2.74)$$



### 3. ПРИМЕНЕНИЕ МАТРИЧНОЙ АЛГЕБРЫ И ТЕОРИИ ГРАФОВ В РАСЧЕТАХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СЕТЕЙ

При проектировании и в процессе эксплуатации систем электроснабжения возникает необходимость в определении параметров (значений токов и напряжений) электрических сетей, которые являются одним из элементов этой системы. Для определения рабочего режима электрической сети должны быть известны все ее параметры и исходные параметры данного режима.

В качестве исходных параметров принимают номинальные напряжения  $U_n$  на всех ступенях схемы электроснабжения; напряжение балансирующего узла  $U_6$  (узла питания Б в схеме); нагрузочные токи  $J$  (узловые токи), которые определяются потребляемыми мощностями  $P$  и  $Q$ ; сопротивления элементов системы (электрических линий ЛЭП и кабелей), а также силовых трансформаторов; источники ЭДС  $E$ , если они имеются. С учетом этих исходных параметров записываются так называемые уравнения состояния электрической сети этой системы.

На основании закона Ома для  $i$ -й ветви электрической сети можно записать следующее уравнение состояния (при наличии источника ЭДС):

$$U_i = Z_{ii} \cdot I_i - E_i,$$

где  $U_i$  — падение напряжения на  $i$ -й ветви;

$Z_{ii}$  — собственное сопротивление  $i$ -й ветви;

$I_i$  — ток, протекающий в ветви;

$E_i$  — источник ЭДС в ветви.

При расчетах сложных схем в качестве уравнений состояния используют узловые и контурные уравнения, соответствующие первому и второму законам Кирхгофа.

**Узловое уравнение** показывает, что сумма токов, притекающих к любому узлу схемы, равна сумме токов, вытекающих из этого узла:

$$J = \sum_{i=1}^n I_i,$$

где  $J$  — узловой ток;

$I_i$  — токи  $i$ -х ветвей;

$n$  — количество ветвей в схеме.

**Контурное уравнение** показывает, что алгебраическая сумма напряжений на ветвях замкнутого контура равна нулю:

$$\sum_{i=1}^n U_i = 0,$$

где  $U_i$  — падение напряжения на  $i$ -й ветви.

Установившийся режим электрической цепи синусоидального переменного тока определяется системой линейных алгебраических уравнений, состав-

ленных на основании законов Ома и Кирхгофа. Число уравнений, составляющих систему и подлежащих совместному решению, может достигать десятков и сотен, так как современные системы электроснабжения очень сложны и содержат большое количество ветвей, узлов и контуров.

В общем случае решение может потребовать линейной комбинации из этих уравнений и линейных преобразований полученной системы. Линейные преобразования системы уравнений проще всего производить, пользуясь специально приспособленным для этой цели математическим аппаратом — алгеброй матриц.

Рассмотрим матричную форму записи системы линейных уравнений на следующем примере.

Система линейных уравнений для схемы, состоящей из  $n$  ветвей, на основании закона Ома (при отсутствии источников ЭДС) записана в следующем виде:

$$\begin{cases} Z_{11} \cdot I_1 + Z_{12} \cdot I_2 + Z_{13} \cdot I_3 + \dots + Z_{1n} \cdot I_n = U_1, \\ Z_{21} \cdot I_1 + Z_{22} \cdot I_2 + Z_{23} \cdot I_3 + \dots + Z_{2n} \cdot I_n = U_2, \\ \dots \\ Z_{n1} \cdot I_1 + Z_{n2} \cdot I_2 + Z_{n3} \cdot I_3 + \dots + Z_{nn} \cdot I_n = U_n. \end{cases} \quad (3.1)$$

Каждую из групп величин  $I_i$  и  $U_i$  можно записать в виде столбцов:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \dots \\ I_n \end{pmatrix}; \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \dots \\ U_n \end{pmatrix}.$$

Матрицу сопротивлений записываем в виде квадратной матрицы:

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} & \dots & Z_{1n} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} & \dots & Z_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_{n1} & Z_{n2} & Z_{n3} & \dots & Z_{nn} \end{pmatrix}.$$

Тогда система уравнений (3.1) может быть представлена в матричной форме в следующем виде:

$$\mathbf{Z} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{U} \quad (3.2)$$

Решение полученного уравнения записывается в следующем виде:

$$\mathbf{I} = \mathbf{Z}^{-1} \cdot \mathbf{U} \quad (3.3)$$

Матричный метод решения (3.3) системы линейных уравнений имеет свои достоинства и недостатки. К достоинствам следует отнести более простую форму записи — сравните уравнения (3.2) и (3.1). К недостаткам относится большая трудоемкость нахождения обратной матрицы обращения матрицы производится с помощью обратной матрицы  $\mathbf{Z}^{-1}$ , особенно если она имеет высокий порядок.

Компенсировать указанный недостаток позволяет применение теории графов, которая дает возможности упрощать схемы и использовать в процессе расчетов электрических сетей специальные матрицы, для которых нахождение обратной матрицы не столь трудоемко.

### 3.1. Матричное описание схемы замещения

Расчет параметров электрической сети в установившемся режиме производится с помощью схемы замещения электрической сети, составляющей основу системы электроснабжения. Схема замещения составляется, как правило, для одной фазы, так как обычно рассматривается симметричный режим трехфазных сетей. Чем отличается схема замещения от исходной схемы электроснабжения? В схеме замещения каждый элемент (электрические линии, силовые трансформаторы) заменяется его сопротивлением; электрические нагрузки (токи, мощности) замещаются узловыми токами; генераторы электростанций замещаются источниками ЭДС. На рис. 3.1,а приведена расчетная схема, а на рис. 3.1,б — схема замещения электрической сети.

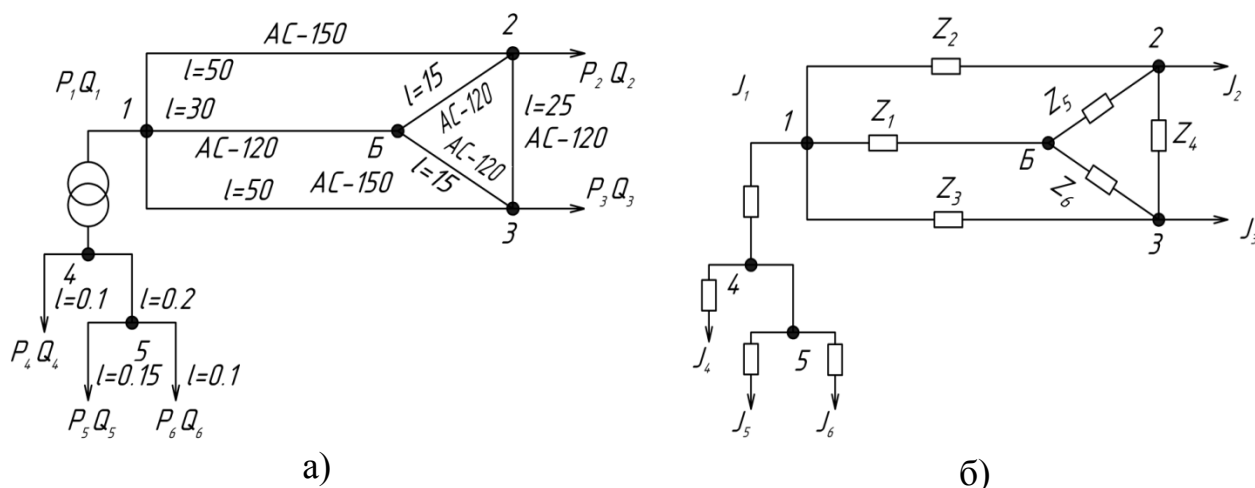


Рис. 3.1. Схема электрической сети (а) и ее схема замещения (б)

Сопротивления электрических линий (воздушных и кабельных) определяются по следующим формулам:

$$R_{\text{Л}} = r_0 \cdot l, \quad (3.4)$$

$$X_{\text{Л}} = x_0 \cdot l, \quad (3.5)$$

$$Z_{\text{Л}} = \sqrt{R_{\text{Л}}^2 + X_{\text{Л}}^2}, \quad (3.6)$$

где  $r_0$  и  $x_0$  — удельные активное и индуктивное сопротивления, Ом/км;  
 $l$  — длина электрической линии, км.

Сопротивления силовых трансформаторов определяют по формулам:

$$R_{\text{T}} = \frac{\Delta p_{\text{к}} U_{\text{Н}}^2}{n S_{\text{Н}}^2}; \quad (3.7)$$

$$X_T = \frac{u_k U_H^2}{100 n S_H}; \quad (3.8)$$

$$Z_T = \sqrt{R_T^2 + X_T^2}, \quad (3.9)$$

где  $\Delta p_k$  — потери активной мощности короткого замыкания, кВт;

$u_k$  — напряжение короткого замыкания, %;

$U_H$  — номинальное напряжения с высокой стороны, кВ;

$S_H$  — номинальная мощность силового трансформатора, кВт;

$n$  — количество параллельно работающих трансформаторов.

Узловые токи рассчитываются по активной и реактивной мощностям, например ток во втором узле  $J_2$ :

$$J_2 = \frac{S_2}{\sqrt{3} \cdot U_6} = \frac{\sqrt{P_2^2 + Q_2^2}}{\sqrt{3} \cdot U_6}, \quad (3.10)$$

где  $P_2$  — активная мощность в узле, МВт;

$Q_2$  — реактивная мощность в узле, Мвар;

$S_2$  — полная мощность в узле, МВА;

$U_6$  — напряжение в балансирующем узле Б, кВ.

В любой схеме замещения имеются следующие элементы: ветви, узлы и замкнутые контуры. Ветвью называется любая неразветвленная часть схемы; узлом — пункт соединения нескольких ветвей; замкнутым контуром — непрерывная цепочка ветвей, начало которой соединено непосредственно с ее концом. Если схема замещения не содержит замкнутых контуров, то она называется разомкнутой (левая нижняя часть схемы на рис. 3.1).

Узлы 1, 2, 3, 4 и 5 являются независимыми, обозначим их буквой «у». Один из узлов схемы (Б) является зависимым, так как узловое уравнение для него получается путем почленного алгебраического суммирования узловых уравнений для всех остальных узлов схемы. Этот зависимый узел называется узлом баланса или балансирующим узлом.

Замкнутые контуры также бывают зависимыми и независимыми. Под независимым контуром понимают замкнутый контур схемы, контурное уравнение для которого не может быть получено в виде линейной комбинации из уравнений для остальных контуров. Как правило, число независимых контуров «к» меньше числа независимых узлов «у». А теперь запишем тождество, которое связывает все элементы схемы замещения:

$$v = u + k \quad (3.11)$$

где  $v$  — число ветвей в схеме замещения;

$u$  — число независимых узлов;

$k$  — число независимых контуров.

Это тождество справедливо только для замкнутых схем. Проверим его для замкнутой части схемы на рис. 3.1. В замкнутой части схемы число ветвей  $v = 6$ , число независимых узлов  $u = 3$  и число независимых замкнутых контуров  $k = 3$ , т.е.  $v = 3 + 3$ .

После того, как схема замещения составлена, можно приступить к составлению матриц.

Матрицы параметров  $\mathbf{J}$ ,  $\mathbf{I}$ ,  $\mathbf{U}$  и  $\mathbf{E}$  являются наиболее простыми и записываются в виде столбцевых матриц. Например, матрица токов в ветвях схемы замещения, представленных на рис. 3.1, запишется в общем виде (только для замкнутой части):

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{pmatrix}.$$

Матрицы сопротивлений и проводимостей более сложные, они имеют квадратную форму. Например, матрица сопротивлений для замкнутой части схемы:

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} & Z_{14} & Z_{15} & Z_{16} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} & Z_{24} & Z_{25} & Z_{26} \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} & Z_{34} & Z_{35} & Z_{36} \\ Z_{41} & Z_{42} & Z_{43} & Z_{44} & Z_{45} & Z_{46} \\ Z_{51} & Z_{52} & Z_{53} & Z_{54} & Z_{55} & Z_{56} \\ Z_{61} & Z_{62} & Z_{63} & Z_{64} & Z_{65} & Z_{66} \end{pmatrix}$$

В этой матрице по главной диагонали располагаются сопротивления с одинаковыми индексами  $Z_{11}, Z_{22}, Z_{33}$  и т.д. — собственные сопротивления ветвей, остальные элементы матрицы — это взаимные сопротивления между ветвями, которые в реальных схемах часто отсутствуют или незначительны по сравнению с собственными. Поэтому матрица  $\mathbf{Z}$  может быть принята близкой к диагональной и из нее легко получить матрицу проводимостей ветвей  $\mathbf{Y}$ , где

$$Y_{ii} = 1/Z_{ii}.$$

### 3.2. Обратные матрицы

Обратной матрицей  $\mathbf{A}^{-1}$  называется такая матрица, при умножении на которую исходная матрица  $\mathbf{A}$  даёт в результате единичную матрицу  $\mathbf{E}$ , где элементы главной диагонали которой равны единице, а остальные равны нулю:

$$\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \dots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

Понятие «обратная матрица» возникает при решении матричных уравнений. Обратная матрица заменяет операцию деления, которая в явном виде для алгебры матриц отсутствует.

Рассмотрим необходимость в обратных матрицах на следующем примере. Матрица падений напряжения на сопротивлениях ветвей схемы замещения определяется по изветному выражению:

$$\mathbf{U}_Z = \mathbf{Z}_B \mathbf{I} \quad (3.13)$$

Предположим, что в матричном уравнении (3.12) неизвестными являются элементы матрицы  $\mathbf{I}$  и запишем результат решения в матричной форме:

$$\mathbf{I} = \mathbf{Y}_B \mathbf{U}_Z \quad (3.14)$$

где  $\mathbf{Y}_B$  — квадратная матрица, элементами которой являются проводимости ветвей.

Если уравнение (3.14) умножить слева на матрицу  $\mathbf{Z}_B$  и сравнить с уравнением (3.13), то окажется, что

$$\mathbf{Z}_B \cdot \mathbf{I} = \mathbf{Z}_B \cdot \mathbf{Y}_B \cdot \mathbf{U}_Z = \mathbf{U}_Z \quad (3.15)$$

Поскольку равенство (3.15) должно соблюдаться при любых значениях элементов матрицы  $\mathbf{U}_Z$ , то можно записать, что  $\mathbf{Z}_B \cdot \mathbf{Y}_B = \mathbf{1}$ . А согласно (3.12) квадратные матрицы одинакового порядка, произведение которых дает единичную матрицу, называются взаимно обратными:

$$\mathbf{Y}_B = \mathbf{Z}_B^{-1} \text{ и } \mathbf{Z}_B = \mathbf{Y}_B^{-1}. \quad (3.16)$$

Обратную матрицу может иметь только такая исходная матрица, определитель которой отличен от нуля. Такая исходная матрица называется неособенной. Квадратные матрицы, определитель которых равен нулю, называются особенными (вырожденными) и обратных матриц не имеют.

Особенные матрицы имеют ряд специфических признаков. Так к ним относятся:

а) квадратные матрицы вида:

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.17)$$

где  $\mathbf{E}$  — столбцевая единичная матрица;

$\mathbf{E}^T$  — строчная единичная матрица.

б) Матрица, суммы элементов которой по всем строкам и по всем столбцам равны нулю:

$$\mathbf{N}^T \cdot \mathbf{A} = 0 \text{ и } \mathbf{A} \cdot \mathbf{N} = 0 \quad (3.18)$$

в) Матрица, все элементы одной из строк или одного из столбцов которой равны нулю.

г) Если прямоугольная матрица имеет больше строк, чем столбцов, то в результате ее умножения справа на транспонированную матрицу получается особая матрица.

Для вычисления обратных матриц в математике используется один из трех методов:

- классический метод (метод определителей);
- метод итераций (последовательных приближений);
- метод деления исходной матрицы на блоки.

### 3.2.1. Классический метод вычисления обратной матрицы

Если исходная квадратная неособенная матрица задана в виде  $\mathbf{A} = \|a_{ij}\|$ , то обратную матрицу можно записать в следующей форме:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \cdot \|(-1)^{i+j} M_{ij}\|, \quad (3.19)$$

где  $|\mathbf{A}|$  — определитель исходной матрицы;

$M_{ij}$  — минор элемента  $a_{ij}$  исходной матрицы, т.е. определитель  $(n-1)$ -го порядка, который можно получить, если из исходной матрицы исключить  $j$ -ю строку и  $i$ -й столбец.

Обратная матрица сравнительно просто вычисляется таким методом только для исходных матриц невысокого порядка. Например, дана матрица второго порядка:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

На месте элемента  $A_{11}^{-1}$  обратной матрицы должен быть минор, который получают из исходной матрицы путем исключения 1 строки и 1 столбца. При этом получается

$$M_{11} = |a_{22}| = a_{22} \text{ и т.д.}$$

С учетом правила определения знаков элементов  $(-1)^{i+j}$ , обратная матрица запишется в следующем виде:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \cdot \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix},$$

где  $|\mathbf{A}| = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$ .

Для матрицы третьего порядка:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

вычисление обратной матрицы становится довольно трудоемким процессом.

Первый минор получается путем исключения из исходной матрицы 1-й строки и 1-го столбца:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22} \cdot a_{33} - a_{32} \cdot a_{23}.$$

Второй минор получается путем исключения 2-й строки и 1-го столбца в исходной матрице:

$$M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12} \cdot a_{33} - a_{32} \cdot a_{13}.$$

Причем знак при втором миноре  $(-1)^{1+2} = -1$ .

Окончательная обратная матрица выглядит так:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \cdot \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \cdot \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{33} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

где

$$|\mathbf{A}| = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - \\ - a_{13} \cdot a_{12} \cdot a_{31} - a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11} - a_{33} \cdot a_{12} \cdot a_{21}.$$

### 3.2.2. Вычисление обратной матрицы методом итераций

Обычно матрицы параметров электрической системы (сопротивлений или проводимостей) являются квадратными и симметричными, а их элементы, расположенные на главной диагонали, по модулю значительно больше недиагональных элементов. В то же время известно, что наиболее просто обратная матрица определяется от диагональной:



$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & & & \\ & \frac{1}{a_2} & & \\ & & \dots & \\ & & & \frac{1}{a_n} \end{pmatrix}, \quad (3.20)$$

Этим можно воспользоваться для приближенного определения обратной матрицы. Имея приближенную обратную матрицу (3.19), ее можно уточнить путем последовательных приближений (методом итераций).

Например, требуется определить матрицу проводимостей схемы замещения  $\mathbf{Y}_B$  по исходной матрице сопротивлений ветвей  $\mathbf{Z}_B$ :

$$\mathbf{Y}_B = \mathbf{Z}_B^{-1}.$$

Первое приближенное значение  $\tilde{\mathbf{Y}}_B$  можно определить исходя из предположения, что исходная матрица  $\mathbf{Z}_B$  имеет только одни диагональные элементы, а все остальные ее элементы равны нулю. Считаем, что диагональная (приближенная) матрица  $\tilde{\mathbf{Z}}_B$  получается из исходной  $\mathbf{Z}_B$  путем вычитания из нее матрицы  $\mathbf{Z}_\Delta$ , содержащей только недиагональные элементы:

$$\tilde{\mathbf{Z}}_B = \mathbf{Z}_B - \mathbf{Z}_\Delta. \quad (3.21)$$

Обратная диагональная матрица  $\tilde{\mathbf{Y}}_B = \tilde{\mathbf{Z}}_B^{-1}$  (приближенная) определяется по указанному выше правилу (3.19). Тогда можно предположить, что действительная обратная матрица  $\mathbf{Y}_B$  получается из приближенной  $\tilde{\mathbf{Y}}_B$  путем добавления к ней некоторой поправочной матрицы  $\mathbf{Y}_\Delta$ :

$$\mathbf{Y}_B = \tilde{\mathbf{Y}}_B + \mathbf{Y}_\Delta. \quad (3.22)$$

По определению взаимобратных матриц (3.12) получим:

$$\mathbf{Y}_B \cdot \mathbf{Z}_B = (\tilde{\mathbf{Y}}_B + \mathbf{Y}_\Delta) \cdot \mathbf{Z}_B = 1,$$

или 
$$\tilde{\mathbf{Y}}_B \cdot \mathbf{Z}_B + \mathbf{Y}_\Delta \cdot \mathbf{Z}_B = 1.$$

Отсюда следует, что: 
$$\mathbf{Y}_\Delta \cdot \mathbf{Z}_B = 1 - \tilde{\mathbf{Y}}_B \cdot \mathbf{Z}_B,$$

и далее 
$$\mathbf{Y}_\Delta = (1 - \tilde{\mathbf{Y}}_B \cdot \mathbf{Z}_B) \cdot \mathbf{Z}_B^{-1}.$$

В некотором приближении можно принять, что поправочная матрица  $\mathbf{Y}_\Delta$  достаточно точно определяется с помощью приближенной обратной матрицы  $\tilde{\mathbf{Y}}_B$ :

$$\mathbf{Y}_\Delta = (1 - \tilde{\mathbf{Y}}_B \cdot \mathbf{Z}_B) \cdot \tilde{\mathbf{Y}}_B.$$

При этом

$$\mathbf{Y}_B = \tilde{\mathbf{Y}}_B + \mathbf{Y}_\Delta \approx \tilde{\mathbf{Y}}_B + (1 - \tilde{\mathbf{Y}}_B \cdot \mathbf{Z}_B) \cdot \tilde{\mathbf{Y}}_B = 2\tilde{\mathbf{Y}}_B - \tilde{\mathbf{Y}}_B \cdot \mathbf{Z}_B \cdot \tilde{\mathbf{Y}}_B.$$

Таким образом, если известны приближенная обратная матрица  $\tilde{\mathbf{Y}}_B^{-1}$  и исходная матрица  $\mathbf{Z}_B$ , то более точная обратная матрица получится в ходе преобразования:

$$\tilde{\mathbf{Y}}_B'' = 2\tilde{\mathbf{Y}}_B' - \tilde{\mathbf{Y}}_B' \cdot \mathbf{Z}_B \cdot \tilde{\mathbf{Y}}_B', \quad (3.23)$$

где  $\tilde{\mathbf{Y}}_B'$  — приближенная обратная матрица после предыдущей итерации;  $\tilde{\mathbf{Y}}_B''$  — уточненная обратная матрица на следующей итерации.

Дальнейшее уточнение обратной матрицы получается путем многократного применения формулы (3.23) до тех пор, пока отличия матриц  $\tilde{\mathbf{Y}}_B'$  и  $\tilde{\mathbf{Y}}_B''$  не станут пренебрежимо малы.

### 3.2.3. Вычисление обратной матрицы путем деления исходной на блоки

Разделение матриц на блоки используется, когда требуется выделить из общего массива какую-то часть величин, имеющих некоторые особенности: отличие признаков, равенство нулю, наличие взаимных зависимостей и т.д. Например, если известно, что только в части узлов схемы замещения протекают узловые токи, а в остальных они равны нулю.

При этом изначально нужно все узлы пронумеровать так, чтобы они были разделены на две группы: сначала нумеруются узлы с узловыми токами (им присваивается индекс « $a$ »), а затем — без них (индекс « $b$ »).

Матрица узловых токов  $\mathbf{J}_a$  для первой группы узлов составляется обычным путем, а матрица  $\mathbf{J}_b$  для второй группы узлов будет нулевой ( $\mathbf{J}_b = 0$ ).

Если требуется составить матрицу узловых токов для всей схемы, то в соответствии с произведенной нумерацией матрицы  $\mathbf{J}_a$  и  $\mathbf{J}_b$  записываются как подматрицы (блоки) матрицы  $\mathbf{J}$ :

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_a \\ \mathbf{J}_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_a \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.24)$$

Соответственно можно разделить на блоки и другие матрицы. Например, матрицу коэффициентов распределения токов:

$$\mathbf{C} = (\mathbf{C}_a \quad \mathbf{C}_b). \quad (3.25)$$

При этом матрица токов в ветвях схемы может быть определена проще — по частям:

$$\mathbf{I} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{J} = (\mathbf{C}_a \quad \mathbf{C}_b) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{J}_a \\ \mathbf{J}_b \end{pmatrix} = \mathbf{C}_a \cdot \mathbf{J}_a + \mathbf{C}_b \cdot \mathbf{J}_b = \mathbf{C}_a \cdot \mathbf{J}_a. \quad (3.26)$$

Рассмотрим другой случай, когда в схеме замещения не во всех ветвях имеются ЭДС. При этом целесообразно вначале пронумеровать все ветви, содер-

жащие источники ЭДС (они отмечаются индексом « $a$ »), а затем ветви без ЭДС (они отмечаются индексом « $b$ »). Далее воспользуемся известным уравнением:

$$\mathbf{U}_B = \mathbf{Z}_B \cdot \mathbf{I} - \mathbf{E}, \quad (3.27)$$

в котором все матрицы разделим на блоки:

$$\mathbf{U}_B = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_a \\ \mathbf{U}_b \end{pmatrix}; \quad \mathbf{Z}_B = \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_{aa} & \mathbf{Z}_{ab} \\ \mathbf{Z}_{ba} & \mathbf{Z}_{bb} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{I} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_a \\ \mathbf{I}_b \end{pmatrix}; \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_a \\ \mathbf{E}_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_a \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Здесь блок-матрицы  $\mathbf{U}_a$ ,  $\mathbf{I}_a$  и  $\mathbf{E}_a$  относятся к ветвям с источниками ЭДС, а матрицы  $\mathbf{U}_b$ ,  $\mathbf{I}_b$  и  $\mathbf{E}_b$  — к ветвям без ЭДС

Матрица  $\mathbf{Z}_{aa}$  содержит собственные сопротивления ветвей с ЭДС (расположены по диагоналям) и взаимные сопротивления между этими ветвями. Матрица  $\mathbf{Z}_{bb}$  содержит сопротивления ветвей без ЭДС (по диагоналям) и взаимные сопротивления между этими ветвями. Матрицы  $\mathbf{Z}_{ab}$  и  $\mathbf{Z}_{ba}$  содержат только взаимные сопротивления между ветвями с ЭДС и ветвями без ЭДС, причем  $\mathbf{Z}_{ab}^T = \mathbf{Z}_{ba}$ .

Если первые  $n$  из  $k$  ветвей схемы содержат источники ЭДС, а остальные  $(k - n)$  — не содержат, то указанные матрицы имеют следующий вид:

$$\mathbf{U}_a = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \dots \\ U_n \end{pmatrix}; \quad \mathbf{I}_a = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \dots \\ I_n \end{pmatrix}; \quad \mathbf{E}_a = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \dots \\ E_n \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{U}_b = \begin{pmatrix} U_{n+1} \\ U_{n+2} \\ \dots \\ U_k \end{pmatrix}; \quad \mathbf{I}_b = \begin{pmatrix} I_{n+1} \\ I_{n+2} \\ \dots \\ I_k \end{pmatrix}; \quad \mathbf{E}_b = \begin{pmatrix} E_{n+1} \\ E_{n+2} \\ \dots \\ E_k \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

После разделения матриц  $\mathbf{U}_B$ ,  $\mathbf{Z}_B$ ,  $\mathbf{I}$  и  $\mathbf{E}$  на блоки, уравнение (3.27) можно записать в таком виде:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{U}_a \\ \mathbf{U}_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_{aa} & \mathbf{Z}_{ab} \\ \mathbf{Z}_{ba} & \mathbf{Z}_{bb} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{I}_a \\ \mathbf{I}_b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{E}_a \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}. \quad (3.28)$$

Далее, выполнив операцию умножения матриц, можно записать два матричных уравнения:

$$\mathbf{U}_a = \mathbf{Z}_{aa} \cdot \mathbf{I}_a + \mathbf{Z}_{ab} \cdot \mathbf{I}_b - \mathbf{E}_a; \quad (3.29)$$

$$\mathbf{U}_b = \mathbf{Z}_{ba} \cdot \mathbf{I}_a + \mathbf{Z}_{bb} \cdot \mathbf{I}_b. \quad (3.30)$$

В том случае, когда отсутствуют взаимные сопротивления ( $\mathbf{Z}_{ab} = \mathbf{Z}_{ba}^T = \mathbf{0}$ ), получаем:

$$\mathbf{U}_a = \mathbf{Z}_{aa} \cdot \mathbf{I}_a - \mathbf{E}_a; \quad (3.31)$$

$$\mathbf{U}_b = \mathbf{Z}_{bb} \cdot \mathbf{I}_b. \quad (3.32)$$

### 3.2.4. Преобразование системы матричных уравнений

Ранее было показано, что для схем замещения могут быть записаны отдельные матричные уравнения. Поскольку алгебра матриц в определенной степени похожа на элементарную алгебру, то, очевидно, возможна запись и системы матричных уравнений. Ниже будут рассмотрены некоторые возможные приемы решений систем матричных уравнений.

Например, имеется система из двух матричных уравнений:

$$\begin{cases} \mathbf{A}_a \mathbf{X} = \mathbf{B}_a \\ \mathbf{A}_b \mathbf{X} = \mathbf{B}_b \end{cases}, \quad (3.33)$$

где  $\mathbf{A}_a$  и  $\mathbf{A}_b$  — прямоугольные матрицы;

$\mathbf{B}_a$  и  $\mathbf{B}_b$  — столбцевые матрицы.

Этой системе уравнений соответствует система обычных алгебраических уравнений, но большей размерности. Если суммарное число строк в матрицах  $\mathbf{A}_a$  и  $\mathbf{A}_b$  (или, что то же самое, в матрицах  $\mathbf{B}_a$  и  $\mathbf{B}_b$ ) равно числу строк в матрице  $\mathbf{X}$ , то решение этой системы возможно, поскольку число обычных алгебраических уравнений равно числу неизвестных.

Решение системы уравнений (3.33) можно выполнить путем объединения имеющихся матриц. Последние, таким образом, рассматриваются в виде блоков (или подматриц):

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_a \\ \mathbf{A}_b \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_a \\ \mathbf{B}_b \end{pmatrix}.$$

Такое объединение позволяет записать исходные уравнения вместе, в виде одного матричного уравнения:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_a \\ \mathbf{A}_b \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_a \\ \mathbf{B}_b \end{pmatrix},$$

или еще проще

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}. \quad (3.34)$$

Решение полученного уравнения возможно только в том случае, если матрица  $\mathbf{A}$  является неособенной:

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}.$$

Практически это решение может оказаться технически трудновыполнимым в связи с высоким порядком матрицы  $\mathbf{A}$ , но можно применить и другой путь решения системы — разделить матрицу  $\mathbf{X}$  на блоки:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_a \\ \mathbf{X}_b \end{pmatrix},$$

таким образом, чтобы число элементов в подматрице (блоке)  $\mathbf{X}_a$  было равно числу элементов в матрице  $\mathbf{B}_a$ , а число элементов в блоке  $\mathbf{X}_b$  было равно числу элементов в матрице  $\mathbf{B}_b$ .

Соответственно нужно разделить на блоки и матрицы  $\mathbf{A}_a$  и  $\mathbf{A}_b$ :

$$\mathbf{A}_a = (\mathbf{A}_{aa} \ \mathbf{A}_{ab}); \quad \mathbf{A}_b = (\mathbf{A}_{ba} \ \mathbf{A}_{bb}).$$

Блоки  $\mathbf{A}_{aa}$  и  $\mathbf{A}_{bb}$  получаются при этом квадратными.

После деления на блоки уравнение (3.34) примет следующий вид:

$$\begin{cases} (\mathbf{A}_{aa} \ \mathbf{A}_{ab}) \begin{pmatrix} \mathbf{X}_a \\ \mathbf{X}_b \end{pmatrix} = \mathbf{A}_{aa} \mathbf{X}_a + \mathbf{A}_{ab} \mathbf{X}_b = \mathbf{B}_a \\ (\mathbf{A}_{ba} \ \mathbf{A}_{bb}) \begin{pmatrix} \mathbf{X}_a \\ \mathbf{X}_b \end{pmatrix} = \mathbf{A}_{ba} \mathbf{X}_a + \mathbf{A}_{bb} \mathbf{X}_b = \mathbf{B}_b \end{cases}, \quad (1.35)$$

Если матрица  $\mathbf{A}_{bb}$  неособенная, то из второго уравнения этой системы получаем:

$$\mathbf{X}_b = \mathbf{A}_{bb}^{-1} \cdot (\mathbf{B}_b - \mathbf{A}_{ba} \mathbf{X}_a). \quad (1.36)$$

Подставим выражение (3.36) в первое уравнение системы (3.35). Получим:

$$\mathbf{A}_{aa} \mathbf{X}_a + \mathbf{A}_{ab} \cdot \mathbf{A}_{bb}^{-1} \cdot (\mathbf{B}_b - \mathbf{A}_{ba} \mathbf{X}_a) = \mathbf{B}_a,$$

или 
$$(\mathbf{A}_{aa} - \mathbf{A}_{ab} \cdot \mathbf{A}_{bb}^{-1} \cdot \mathbf{A}_{ba}) \cdot \mathbf{X}_a = \mathbf{B}_a - \mathbf{A}_{ab} \cdot \mathbf{A}_{bb}^{-1} \cdot \mathbf{B}_b,$$

откуда 
$$\mathbf{X}_a = (\mathbf{A}_{aa} - \mathbf{A}_{ab} \cdot \mathbf{A}_{bb}^{-1} \cdot \mathbf{A}_{ba})^{-1} \cdot (\mathbf{B}_a - \mathbf{A}_{ab} \cdot \mathbf{A}_{bb}^{-1} \cdot \mathbf{B}_b) \quad (1.37)$$

Теперь зная матрицу  $\mathbf{X}_a$ , из системы (3.35) можно определить матрицу  $\mathbf{X}_b$  и всю матрицу  $\mathbf{X}$ .

### 3.2.5. Определение обратной матрицы после деления на блоки

Если исходная матрица разделена на блоки, то формулу для определения ее обратной матрицы можно получить, решая систему линейных матричных уравнений.

Выше (в п. 3.2.3) мы рассматривали матрицу сопротивлений ветвей схемы замещения, разделенную на блоки:

$$\mathbf{Z}_B = \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_{aa} & \mathbf{Z}_{ab} \\ \mathbf{Z}_{ba} & \mathbf{Z}_{bb} \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица — матрица проводимостей ветвей имеет вид:

$$\mathbf{Y}_B = \mathbf{Z}_B^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{aa} & \mathbf{Y}_{ab} \\ \mathbf{Y}_{ba} & \mathbf{Y}_{bb} \end{pmatrix}.$$

А поскольку  $\mathbf{Y}_B \cdot \mathbf{Z}_B = \mathbf{1}$ , то можно записать

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Z}_{aa} & \mathbf{Z}_{ab} \\ \mathbf{Z}_{ba} & \mathbf{Z}_{bb} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{aa} & \mathbf{Y}_{ab} \\ \mathbf{Y}_{ba} & \mathbf{Y}_{bb} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем систему линейных матричных уравнений:

$$\begin{cases} \mathbf{Z}_{aa} \mathbf{Y}_{aa} + \mathbf{Z}_{ab} \mathbf{Y}_{ba} = 1; \\ \mathbf{Z}_{aa} \mathbf{Y}_{ab} + \mathbf{Z}_{ab} \mathbf{Y}_{bb} = 0; \\ \mathbf{Z}_{ba} \mathbf{Y}_{aa} + \mathbf{Z}_{bb} \mathbf{Y}_{ba} = 0; \\ \mathbf{Z}_{ba} \mathbf{Y}_{ab} + \mathbf{Z}_{bb} \mathbf{Y}_{bb} = 1. \end{cases} \quad (1.38)$$

Решение этой системы уравнений возможно, если все матрицы являются неособенными. Для решения умножим почленно слева второе уравнение в системе (3.38) на обратную матрицу  $\mathbf{Z}_{aa}^{-1}$ .

$$\mathbf{Y}_{ab} = -\mathbf{Z}_{aa}^{-1} \cdot \mathbf{Z}_{ab} \cdot \mathbf{Y}_{bb}; \quad (1.39)$$

Из третьего уравнения системы (3.38) аналогично находим:

$$\mathbf{Y}_{ba} = -\mathbf{Z}_{bb}^{-1} \cdot \mathbf{Z}_{ba} \cdot \mathbf{Y}_{aa}; \quad (1.40)$$

Полученные выражения (3.39) и (3.40) подставляем в четвертое и первое уравнения системы (3.38). Из четвертого уравнения имеем:

$$-\mathbf{Z}_{ba} \cdot \mathbf{Z}_{aa}^{-1} \cdot \mathbf{Z}_{ab} \cdot \mathbf{Y}_{bb} + \mathbf{Z}_{bb} \cdot \mathbf{Y}_{bb} = 1,$$

откуда

$$\left( \mathbf{Z}_{bb} - \mathbf{Z}_{ba} \cdot \mathbf{Z}_{aa}^{-1} \cdot \mathbf{Z}_{ab} \right) \cdot \mathbf{Y}_{bb} = 1,$$

и

$$\mathbf{Y}_{bb} = \left( \mathbf{Z}_{bb} - \mathbf{Z}_{ba} \cdot \mathbf{Z}_{aa}^{-1} \cdot \mathbf{Z}_{ab} \right)^{-1}.$$

Аналогично из первого уравнения:

$$\mathbf{Z}_{aa} \cdot \mathbf{Y}_{aa} - \mathbf{Z}_{ab} \cdot \mathbf{Z}_{bb}^{-1} \cdot \mathbf{Z}_{ba} \cdot \mathbf{Y}_{aa} = 1,$$

далее

$$\left( \mathbf{Z}_{aa} - \mathbf{Z}_{ab} \cdot \mathbf{Z}_{bb}^{-1} \cdot \mathbf{Z}_{ba} \right) \cdot \mathbf{Y}_{aa} = 1,$$

и наконец

$$\mathbf{Y}_{aa} = \left( \mathbf{Z}_{aa} - \mathbf{Z}_{ab} \cdot \mathbf{Z}_{bb}^{-1} \cdot \mathbf{Z}_{ba} \right)^{-1}.$$

Таким образом, разделение матрицы на блоки позволяет вычисление обратной матрицы большого порядка заменить несколькими операциями вычисления обратных матриц вдвое меньшего порядка. А если часть матриц-блоков  $(\mathbf{Z}_{ab}, \mathbf{Z}_{ba})$  нулевые, то объем вычислений будет еще меньше.

### 3.3. Применение теории графов к расчету электрических сетей

#### 3.3.1. Общие понятия о графах

Если в схеме замещения каждую ветвь заменить отрезком прямой, считая, что каждый такой отрезок может заключать в себе либо элемент, либо группу последовательно (параллельно) соединенных элементов, то мы получим изображение цепи, называемое **графом**.

Если каждой ветви можно придать определенное направление, то такой граф называется **направленным**. Чаще всего направленный граф составляется только для замкнутой части схемы замещения, т.к. расчет здесь представляет наибольшие трудности. Так для схемы замещения, представленной на рис. 3.1, направленный граф представлен на рис. 3.2:

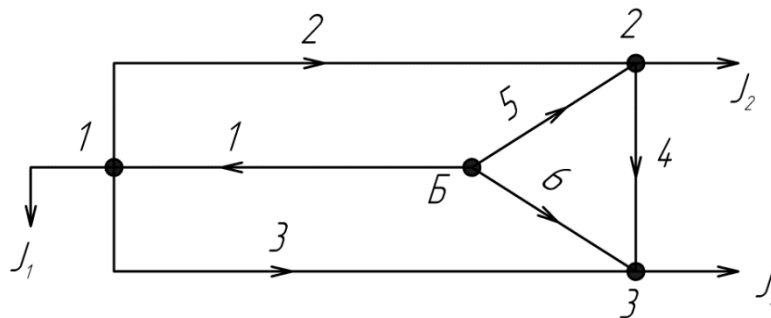


Рис. 3.2. Направленный граф для замкнутой части схемы замещения

Граф символизирует наличие функциональных связей между отдельными узлами-вершинами. Наличие такой связи для двух соседних вершин обозначается **ребром графа**. Каждое ребро имеет две вершины: начальную и конечную. Если одна из вершин одного ребра является одновременно вершиной второго ребра, а другая вершина этого второго ребра — вершиной третьего и т. д., то соответствующий подграф (цепочка указанных ребер) образует **путь графа**. Одна из вершин графа, соответствующая базисному узлу схемы замещения, называется **опорной вершиной** или **узлом базиса**.

#### 3.3.2. Дерево и хорды графа

Конфигурация направленного графа (порядок чередования вершин и ребер) может быть описана специальными матрицами — матрицами инциденций. С целью снижения трудоемкости расчетов и уменьшения порядка этих матриц направленный граф разделяют на две части — дерево и хорды.

Часть замкнутой схемы, которая соединяет все узлы, называется **деревом графа**. Число ветвей, входящих в дерево схемы, равно числу независимых узлов графа. Дерево можно считать основной частью («скелетом») схемы.

Из одной и той же схемы можно выделить несколько деревьев, которые будут различаться только составом входящих в них ветвей. Если число ветвей схемы равно  $\nu$ , а число независимых узлов —  $u$ , то число возможных деревьев для разомкнутой схемы определяется как число сочетаний из  $\nu$  по  $u$ :

$$C_v^u = \frac{v!}{u! (v-u)!}. \quad (3.41)$$

При наличии в схеме  $k$  замкнутых контуров:

$$C_v^u - k = \frac{v!}{u! (v-u)!} - k. \quad (3.42)$$

Ветви, не входящие в состав дерева, принято называть хордами. Число хорд в схеме равно числу независимых контуров.

Таким образом, для направленного графа, изображенного на рис. 3.2, при  $u = 3$  и  $v = 6$  можно составить следующее число сочетаний «дерево - хорды»:

$$C_6^3 - 3 = \frac{6!}{3!(6-3)!} - 3 = 17.$$

Две комбинации из этих возможных 17-ти представлены на рис. 3.3.

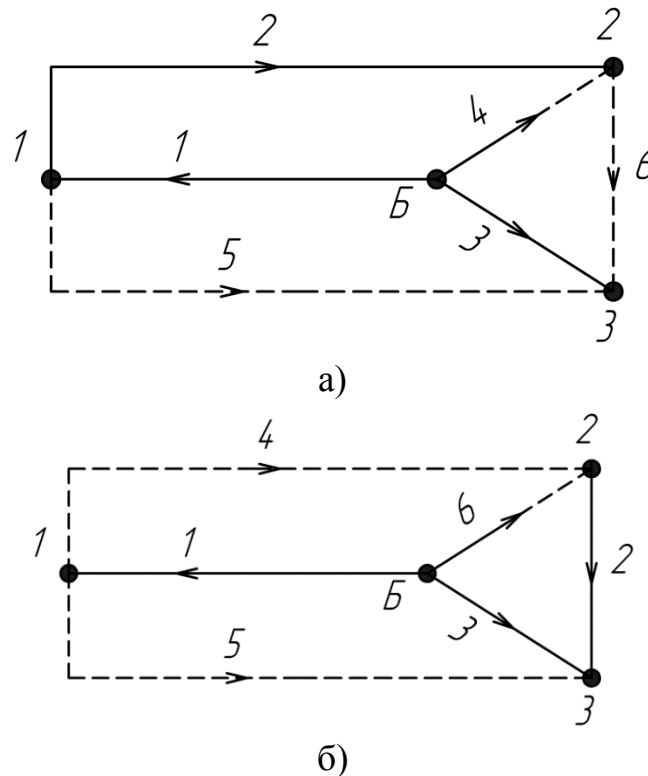


Рис. 3.3. Деление направленного графа на дерево и хорды: сплошные линии — ветви дерева, пунктирные линии — хорды

### 3.3.3. Первая матрица инциденций

Первая матрица инциденций  $\mathbf{M}$  служит для обобщенного представления вершин и ребер направленного графа. Она описывает баланс токов в узлах электрической сети по первому закону Кирхгофа:

$$\sum_{j=1}^6 m_{ij} I_j = J_i, \quad (3.43)$$



где  $I_j$  — значение тока в  $j$ -й ветви;

$J_i$  — значение узлового тока в  $i$ -м узле;

$m_{ij}$  — коэффициент инцидентности.

Коэффициент инцидентности может принимать одно из трех значений:

$m_{ij} = 1$ , если  $i$ -й узел является начальной вершиной некоторой  $j$ -й ветви;

$m_{ij} = -1$ , если  $i$ -й узел является конечной вершиной  $j$ -й ветви;

$m_{ij} = 0$ , если  $i$ -й узел не принадлежит  $j$ -й ветви.

В матрице инцидентности  $\mathbf{M}$  строки соответствуют номерам независимых узлов, а столбцы — номерам ветвей. На пересечении  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца располагаются указанные выше коэффициенты инцидентности. Таким образом, матрица  $M$  дает полное представление обо всех соединениях ветвей в узлах схемы. Отметим, что матрица  $\mathbf{M}$  для замкнутой схемы всегда будет прямоугольной, т.к. число независимых узлов всегда меньше числа ветвей:  $u < v$ .

Это является недостатком такой матрицы, т.к. она не имеет обратной и не может без преобразования использоваться в расчетах токораспределения.

*Пример 5.1.* Составим матрицу  $\mathbf{M}$  для направленного графа, представленного на рис. 3.2. Граф имеет 6 ветвей и 3 независимых узла, следовательно, у самой матрицы  $\mathbf{M}$  будет размер  $3 \times 6$  (три строки и шесть столбцов):

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Каждая строка матрицы  $\mathbf{M}$  показывает, какими вершинами соответствующие ветви присоединены к данному узлу схемы; а каждый столбец показывает, какие узлы являются начальной и конечной вершиной данной ветви.

Деление направленного графа на дерево и хорды позволяет выделить в матрице  $\mathbf{M}$  два блока:  $\mathbf{M}_\alpha$  — блок для дерева схемы и  $\mathbf{M}_\beta$  — блок для хорд.

Дерево схемы (без хорд) не имеет замкнутых контуров, поэтому матрица  $\mathbf{M}_\alpha$  всегда будет квадратной. Аналогичная матрица  $\mathbf{M}_p \equiv \mathbf{M}_\alpha$  получается для чисто разомкнутой схемы.

*Пример 5.2:* Составим матрицу  $\mathbf{M}_\alpha$  для дерева схемы, изображенного на рис. 3.3, а:

$$\mathbf{M}_\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Матрица  $\mathbf{M}_p$  для разомкнутой схемы всегда получается квадратной, т.к. число ветвей и независимых узлов одинаково. В данном случае  $u = 3$  и  $v = 3$ .

Следовательно, такая матрица всегда имеет обратную  $\mathbf{M}_p^{-1}$ . Однако обращать даже такую матрицу третьего порядка известными способами (см. п. 3.2) довольно сложно.

Теория графов позволяет значительно упростить эту процедуру, т.к. обратной матрицей для  $\mathbf{M}_p$  является матрица коэффициентов токораспределения  $\mathbf{C}_p$ :

$$\mathbf{C}_p = \mathbf{M}_p^{-1}.$$

Поскольку матрицы  $\mathbf{M}_p$  и  $\mathbf{C}_p$  являются взаимобратными, то в матрице токораспределения каждая строка соответствует номеру ветви, а каждый столбец — независимому узлу. Элементы матрицы  $\mathbf{C}_p$  принимают значения:

$C_{p_{ij}} = 1$ , если  $j$ -я ветвь входит в путь графа для  $i$ -го узла, и их направления совпадают;

$C_{p_{ij}} = -1$ , если  $j$ -я ветвь входит в путь графа для  $i$ -го узла, но их направления противоположны;

$C_{p_{ij}} = 0$ , если  $j$ -я ветвь не входит в путь графа для  $i$ -го узла.

Так как матрица  $\mathbf{C}_p$  составляется только для разомкнутой схемы, то она так же, как  $\mathbf{M}_p$ , имеет квадратную форму.

*Пример 5.3.* Составим матрицу  $\mathbf{C}_p$  для графа, изображенного на рис. 3.3,а:

$$\mathbf{C}_p = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Если матрицы  $\mathbf{M}_p$  и  $\mathbf{C}_p$  взаимобратные, то их произведение должно дать единичную матрицу:

$$\mathbf{M}_p \cdot \mathbf{C}_p = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{1}.$$

Таким образом, для разомкнутой схемы процедура обращения матрицы  $\mathbf{M}_p$  заменяется составлением матрицы  $\mathbf{C}_p$  непосредственно по схеме, что значительно проще.

Для замкнутой схемы необходимо еще составить блок-матрицу  $\mathbf{M}_\beta$ , описывающую взаимное расположение хорд в направленном графе.

*Пример 5.4:* составим блок-матрицу  $\mathbf{M}_\beta$  для графа на рис. 3.3,а. По сути — это последние три столбца полной матрицы  $\mathbf{M}$ :

$$\mathbf{M}_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

### 3.3.4. Применение матриц $\mathbf{M}$ и $\mathbf{C}_p$

Рассмотрим основные свойства первой матрицы инциденций  $\mathbf{M}$  и ее применение в расчетах электрических систем:

1. Как отмечено выше, матрица инциденций  $\mathbf{M}$  позволяет записать узловое уравнение (1-й закон Кирхгофа) в матричной форме:

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{J} \quad (3.44)$$

Действительно, из токов всех ветвей, записанных в виде столбцовой матрицы  $\mathbf{I}$ , при умножении на каждую строку матрицы  $\mathbf{M}$  слева алгебраически суммируются только токи тех ветвей, которые соединены с соответствующим узлом:

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{I} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-I_1 + I_2 + I_3] \\ [-I_2 + I_4 - I_5] \\ [-I_3 - I_4 - I_6] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{pmatrix}.$$

Матрица  $\mathbf{C}_p$  позволяет решить узловое уравнение (3.44) относительно токов в ветвях в разомкнутой схеме:

$$\mathbf{I} = \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{J}. \quad (3.45)$$

Так как  $\mathbf{M}_p^{-1} = \mathbf{C}_p$ , то уравнение (3.45) можно записать в виде:

$$\mathbf{I} = \mathbf{C}_p \cdot \mathbf{J} \quad (3.46)$$

2. Матрица  $\mathbf{M}$  позволяет определить матрицу падений напряжения в ветвях схемы  $\mathbf{U}_B$  (между их начальными и конечными вершинами) по известной матрице  $\mathbf{U}_\Delta$  падений напряжения между каждым независимым узлом схемы и ее базисным узлом Б:

$$\mathbf{U}_B = \mathbf{M}^T \cdot \mathbf{U}_\Delta \quad (3.47)$$

При умножении матрицы  $\mathbf{M}^T$  на матрицу  $\mathbf{U}_\Delta$  справа для каждой ветви схемы получается разность напряжений между ее начальной и конечной вершинами, т.е. падение напряжения на этой ветви:

$$\mathbf{U}_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_{1-Б} \\ U_{2-Б} \\ U_{3-Б} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -U_{1-Б} \\ U_{1-Б} - U_{2-Б} \\ U_{1-Б} - U_{3-Б} \\ U_{2-Б} - U_{3-Б} \\ -U_{2-Б} \\ -U_{3-Б} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, матрицы  $\mathbf{M}_P$  и  $\mathbf{C}_P$  для разомкнутой схемы позволяют определить матрицу узловых напряжений. Решая уравнение (3.47) относительно  $\mathbf{U}_\Delta$  получаем:

$$\mathbf{U}_\Delta = \mathbf{M}_P^{-1} \cdot \mathbf{U}_B = \mathbf{C}_P \cdot \mathbf{U}_B. \quad (3.48)$$

Матрица  $\mathbf{C}_P$  более удобна для нахождения узловых напряжений, поскольку ее столбцы определяют пути графа, по которым происходит суммирование напряжений на ветвях относительно базисного узла.

Если в уравнение (3.48) подставить выражение для матрицы напряжений в ветвях:

$$\mathbf{U}_B = \mathbf{Z}_B \cdot \mathbf{I} - \mathbf{E},$$

и учесть выражение (3.46) для узловых токов, то можно получить формулу для непосредственного определения матрицы узловых напряжений по активным параметрам разомкнутой схемы:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_\Delta &= \mathbf{C}_P^T \cdot (\mathbf{Z}_B \cdot \mathbf{I} - \mathbf{E}) = \mathbf{C}_P^T \cdot (\mathbf{Z}_B \cdot \mathbf{C}_P \cdot \mathbf{J} - \mathbf{E}) = \mathbf{C}_P^T \cdot \mathbf{Z}_B \cdot \mathbf{C}_P \cdot \mathbf{J} - \mathbf{C}_P^T \cdot \mathbf{E} = \\ &= \mathbf{Z}_Y \cdot \mathbf{J} - \mathbf{C}_P^T \cdot \mathbf{E}; \end{aligned} \quad (3.49)$$

где  $\mathbf{Z}_Y = \mathbf{C}_P^T \cdot \mathbf{Z}_B \cdot \mathbf{C}_P$  — матрица узловых сопротивлений разомкнутой схемы.

При отсутствии источников ЭДС в схеме:

$$\mathbf{U}_\Delta = \mathbf{Z}_Y \cdot \mathbf{J}. \quad (0.50)$$

### 3.3.5. Вторая матрица инцидентий

Уравнение второго закона Кирхгофа для каждого из независимых контуров схемы замещения имеет следующий вид:

$$\sum_{j=1}^B n_{ij} Z_i I_i = E_{Kj} \quad (3.51)$$

где  $Z_i I_i$  — падение напряжения на сопротивлении  $i$ -го контура;

$E_{Kj}$  — значение контурной ЭДС  $j$ -го контура;

$n_{ij}$  — коэффициенты инцидентности.

Коэффициенты инцидентности могут принимать следующие значения:

$n_{ij} = 1$  — если  $i$ -я ветвь входит в состав  $j$ -го контура, и ее направление совпадает с направлением обхода контура;  
 $n_{ij} = -1$  — если  $i$ -я ветвь входит в состав  $j$ -го контура, но направления ветви и обхода контура противоположны;  
 $n_{ij} = 0$  — если  $i$ -я ветвь не входит в состав  $j$ -го контура.

Из значений  $n_{ij}$  формируется вторая матрица инциденций  $\mathbf{N}$ , строки которой соответствуют независимым контурам схемы, а столбцы — ветвям. Ввиду того, что число контуров всегда меньше числа входящих в них ветвей, матрица  $\mathbf{N}$  для замкнутой схемы всегда получается прямоугольной и, следовательно, обратной матрицы не имеет.

*Пример 5.5.* Составим матрицу  $\mathbf{N}$  для направленного графа, приведенного на рис. 3.4.

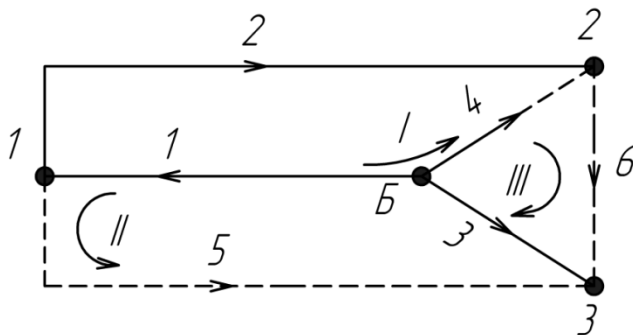


Рис. 3.4. Направленный граф электрической сети

Согласно схеме граф содержит три независимых контура:

I-й состоит из ветвей №№ 1, 2 и 4;  
 II-й — из ветвей №№ 1, 3 и 5;  
 III-й — из ветвей №№ 1, 2, 3 и 6.

Направления обхода контуров обозначены стрелками.

Для указанной нумерации матрица контуров  $\mathbf{N}$  имеет следующий вид:

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

В соответствии с делением схемы на дерево и хорды эту матрицу можно записать в виде двух блоков —  $\mathbf{N}_\alpha$  и  $\mathbf{N}_\beta$ .

$$\mathbf{N}_\alpha = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{N}_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В данном случае оба блока получились квадратными, т.к. число ветвей в дереве на рис. 3.4 равно числу хорд, что на практике бывает далеко не всегда. Тем не менее, блок  $\mathbf{N}_\beta$  всегда квадратный (число хорд равно числу контуров) и, более того, при правильной нумерации ветвей схемы он численно равен 1, т.к. матрица  $\mathbf{N}_\beta$  единичная. Такая матрица очень удобна при решении матричных уравнений.

Чтобы получить  $N_\beta = 1$ , нужно при нумерации ветвей схемы (направленного графа) выполнить четыре простых правила:

1. Ветви дерева схемы нумеруют в первую очередь, присваивая каждой ветви номер того узла, который является ее концом.
2. Хорды нумеруют во вторую очередь, строго соблюдая очередность нумерации независимых контуров.
3. В каждом независимом контуре должна быть только одна хорда.
4. Направления обхода контуров выбираются в соответствии с хордами.

### 3.3.6. Применение матрицы контуров $N$

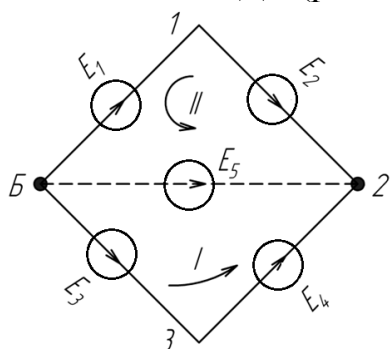
Вторая матрица инциденций позволяет осуществить суммирование источников ЭДС по ветвям независимых контуров схемы:

$$N \cdot E = E_K, \quad (3.52)$$

а также алгебраически суммировать напряжения в ветвях замкнутого контура:

$$N \cdot U_B = 0. \quad (3.53)$$

Чтобы доказать это, рассмотрим схему замещения, в ветвях которой имеются источники ЭДС (рис. 3.5) и составим для нее матрицы  $N$  и  $E$ :



$$N \cdot E = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_1 \\ E_1 \\ E_1 \\ E_1 \\ E_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{K1} \\ E_{K2} \end{pmatrix},$$

$$\text{где } E_{K1} = -E_1 - E_2 + E_3 + E_4, \\ E_{K2} = -E_1 - E_2 + E_5.$$

Рис. 3.5. Схема замещения с источниками ЭДС

При умножении матрицы  $N$  на матрицу  $E$  получается алгебраическое суммирование ЭДС во всех ветвях каждого независимого контура, причем положительными оказываются ЭДС, совпадающие по направлению с направлением обхода контура, а отрицательными — противоположно направленные. Именно эти суммы ЭДС ветвей и дают контурные ЭДС  $E_K$ .

Для схемы без контурных ЭДС сумма падений напряжений равна нулю согласно второму закону Кирхгофа. Матрица  $N$  позволяет записать контурное уравнение в матричной форме:

$$N \cdot U_B = N \cdot (Z_B \cdot I - E) = 0, \quad (3.54)$$

откуда выходит

$$N \cdot Z_B \cdot I = N \cdot E = E_K. \quad (3.55)$$

Уравнение (3.55) представляет собой матричную форму контурного уравнения.

### 3.3.7. Связь между матрицами инциденций

Матрицы  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{N}$  составляются для одной и той же схемы, следовательно, логично предположить, что между ними существуют определенные соотношения, зная которые можно упростить задачу составления и преобразования этих матриц. Матрица  $\mathbf{M}$  полностью определяет схему соединений, поэтому, зная ее элементы, можно каким-то образом вычислить и матрицу  $\mathbf{N}$ .

Чтобы установить эти соотношения, воспользуемся известными уже уравнениями (3.47) и (3.53):

$$\begin{cases} \mathbf{U}_B = \mathbf{M}^T \cdot \mathbf{U}_\Delta \\ \mathbf{N} \cdot \mathbf{U}_B = 0 \end{cases}.$$

Подставим первое из них во второе и получим:

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{M}^T \cdot \mathbf{U}_\Delta = 0. \quad (3.56)$$

Равенство (3.56) справедливо при любой матрице узловых напряжений  $\mathbf{U}_\Delta$  поэтому можно записать:

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{M}^T = 0. \quad (3.57)$$

В полученном уравнении разделим матрицы  $\mathbf{N}$  и  $\mathbf{M}^T$  на блоки в соответствии с делением схемы на дерево и хорды:

$$(\mathbf{N}_\alpha \quad \mathbf{N}_\beta) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{M}_\alpha^T \\ \mathbf{M}_\beta^T \end{pmatrix} = 0. \quad (3.58)$$

После почленного перемножения этих блок-матриц получим:

$$\mathbf{N}_\alpha \cdot \mathbf{M}_\alpha^T + \mathbf{N}_\beta \cdot \mathbf{M}_\beta^T = 0,$$

откуда 
$$\mathbf{N}_\alpha = -\mathbf{N}_\beta \cdot \mathbf{M}_\beta^T \cdot [\mathbf{M}_\alpha^T]^{-1} = -\mathbf{N}_\beta \cdot \mathbf{M}_\beta^T \cdot \mathbf{C}_P^T.$$

Как отмечено выше в п. 3.3.5, при рациональной системе нумерации элементов схемы замещения блок  $\mathbf{N}_\beta = 1$ , тогда

$$\mathbf{N}_\alpha = -\mathbf{M}_\beta^T \cdot \mathbf{C}_P^T. \quad (3.59)$$

Таким образом, имея матрицу инциденций  $\mathbf{M}$ , можно расчетным путем получить блок  $\mathbf{N}_\alpha$  матрицы контуров, а затем, добавив блок  $\mathbf{N}_\beta = 1$ , получить всю матрицу  $\mathbf{N}$  полностью.

### 3.4. Обобщенное уравнение состояния и способы его решения

Составленное ранее узловое уравнение (3.44) и контурное уравнение (3.55) не могут быть по отдельности решены относительно матрицы токов  $\mathbf{I}$ , т.к. матрицы  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{N}$ , входящие в эти уравнения, прямоугольные и обратных не имеют. Однако оба эти уравнения можно объединить в одну систему:

$$\begin{cases} \mathbf{M} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{J} \\ \mathbf{N} \cdot \mathbf{Z} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{E}_K \end{cases} \quad (3.60)$$

и преобразовать ее в обобщенное матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M} \\ \mathbf{NZ} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{I} = \begin{pmatrix} \mathbf{J} \\ \mathbf{E}_K \end{pmatrix}$$

путем введения двух новых блок-матриц:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{M} \\ \mathbf{NZ} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{J} \\ \mathbf{E}_K \end{pmatrix}.$$

Матрица пассивных параметров схемы  $\mathbf{P}$  состоит из двух блоков —  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{NZ}$ , которые описывают конфигурацию схемы. Блоки имеют одинаковое число столбцов (равное числу ветвей схемы  $v$ ), но разное число строк (соответственно число независимых узлов  $u$  и независимых контуров  $k$ ). При объединении этих матриц в одну число строк суммируется:  $u + k = v$ . Таким образом, матрица  $\mathbf{P}$  получается квадратной, неособенной, порядка  $(v \times v)$ .

Матрица  $\mathbf{A}$  называется матрицей активных параметров, т.к. она состоит из двух блоков  $\mathbf{J}$  и  $\mathbf{E}_K$ , которые определяют токи  $\mathbf{I}$ , протекающие в ветвях схемы.

Теперь систему матричных уравнений (3.60) можно записать в следующем виде:

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{A} \quad (3.61)$$

Это и есть обобщенное уравнение состояния электрической сети, которое в общем виде имеет следующее решение:

$$\mathbf{I} = \mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{A}. \quad (3.62)$$

С точки зрения методической сложности такое решение является не совсем удачным, т.к. порядок матрицы  $\mathbf{P}$  очень высок. Однако преимущество такой записи в том, что она может быть использована для дальнейших преобразований и получения необходимых соотношений между матрицами отдельных величин в других, более целесообразных формах.

### 3.4.1. Независимые токи ветвей

В ряде случаев можно существенно упростить решение уравнения состояния в общем виде, а также уменьшить объем вычислительной работы путем выделения независимых величин в уравнениях (3.60). В частности нет необходимости в определении токов во всех ветвях схемы путем совместного решения  $v$  уравнений, т.к. не все эти токи являются взаимно независимыми. Как показано выше, зная матрицу  $\mathbf{M}$  и узловые токи  $\mathbf{J}$ , можно вычислить токи в ветвях.

Действительно, из узлового уравнения  $\mathbf{M} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{J}$  путем разделения матриц  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{I}$  на блоки получим:



$$\begin{pmatrix} \mathbf{M}_\alpha & \mathbf{M}_\beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{I}_\alpha \\ \mathbf{I}_\beta \end{pmatrix} = \mathbf{M}_\alpha \cdot \mathbf{I}_\alpha + \mathbf{M}_\beta \cdot \mathbf{I}_\beta = \mathbf{J}.$$

Поскольку блок  $\mathbf{M}_\alpha$  является матрицей квадратной и неособенной, то он имеет обратную матрицу. Следовательно, можно записать:

$$\mathbf{I}_\alpha + \mathbf{M}_\alpha^{-1} \cdot \mathbf{M}_\beta \cdot \mathbf{I}_\beta = \mathbf{M}_\alpha^{-1} \cdot \mathbf{J},$$

и тогда 
$$\mathbf{I}_\alpha = \mathbf{M}_\alpha^{-1} \cdot (\mathbf{J} - \mathbf{M}_\beta \cdot \mathbf{I}_\beta) \quad (3.63)$$

Отсюда следует, что путем совместного решения некоторых уравнений достаточно определить только токи в хордах  $\mathbf{I}_\beta$ , а затем, пользуясь полученной формулой (3.60), определить токи в оставшихся ветвях дерева  $\mathbf{I}_\alpha$ .

Зная, что  $\mathbf{M}_\alpha^{-1} = \mathbf{C}_P$ , а также в соответствии с формулой (3.59), уравнение (3.63) можно переписать в виде:

$$\mathbf{I}_\alpha = \mathbf{C}_P \cdot (\mathbf{J} - \mathbf{M}_\beta \cdot \mathbf{I}_\beta) = \mathbf{C}_P \cdot \mathbf{J} + \mathbf{N}_\alpha^T \cdot \mathbf{I}_\beta. \quad (3.64)$$

Таким образом, оказывается, что независимыми являются только токи в хордах схемы  $\mathbf{I}_\beta$ , которые определяются в первую очередь. Токи в ветвях дерева  $\mathbf{I}_\alpha$  определяются ими непосредственно, как зависимые токи по формуле (3.64). Это позволяет существенно сократить число уравнений, которые необходимо решать совместно для определения рабочего режима сложной схемы.

Определить независимые токи в хордах можно из следующих соотношений. Известно, что токи в ветвях схемы равны:

$$\mathbf{I} = \mathbf{Z}_B^{-1} \cdot (\mathbf{U}_B + \mathbf{E}) = \mathbf{Y}_B \cdot (\mathbf{U}_B + \mathbf{E}). \quad (3.65)$$

Разделив матрицы на блоки, получим:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I}_\alpha \\ \mathbf{I}_\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{\alpha\alpha} & \mathbf{Y}_{\alpha\beta} \\ \mathbf{Y}_{\beta\alpha} & \mathbf{Y}_{\beta\beta} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{U}_\alpha & \mathbf{E}_\alpha \\ \mathbf{U}_\beta & \mathbf{E}_\beta \end{pmatrix}, \quad (3.66)$$

откуда можно записать систему матричных равнений:

$$\begin{cases} \mathbf{I}_\alpha = \mathbf{Y}_{\alpha\alpha} [\mathbf{U}_\alpha + \mathbf{E}_\alpha] + \mathbf{Y}_{\alpha\beta} [\mathbf{U}_\beta + \mathbf{E}_\beta] \\ \mathbf{I}_\beta = \mathbf{Y}_{\beta\alpha} [\mathbf{U}_\alpha + \mathbf{E}_\alpha] + \mathbf{Y}_{\beta\beta} [\mathbf{U}_\beta + \mathbf{E}_\beta] \end{cases} \quad (3.67)$$

где  $\mathbf{Y}_{\alpha\alpha}$  — блок-матрица собственных проводимостей ветвей дерева схемы;

$\mathbf{Y}_{\beta\beta}$  — блок-матрица собственных проводимостей хорд;

$\mathbf{Y}_{\alpha\beta}$  и  $\mathbf{Y}_{\beta\alpha}$  — блок-матрицы взаимных проводимостей между ветвями дерева и хордами схемы;

$\mathbf{U}_\alpha$  и  $\mathbf{U}_\beta$  — матрицы падений напряжения в ветвях дерева и хордах схемы;

$\mathbf{E}_\alpha$  и  $\mathbf{E}_\beta$  — матрицы ЭДС в ветвях дерева и в хордах.

При отсутствии взаимных сопротивлений (проводимостей) между ветвями дерева и хордами имеем:

$$\begin{cases} \mathbf{I}_\alpha = \mathbf{Z}_{\alpha\alpha}^{-1} \cdot [\mathbf{U}_\alpha + \mathbf{E}_\alpha] \\ \mathbf{I}_\beta = \mathbf{Z}_{\beta\beta}^{-1} \cdot [\mathbf{U}_\beta + \mathbf{E}_\beta] \end{cases} \quad (3.68)$$

Из второго уравнения этой системы можно определить независимые токи в хордах  $\mathbf{I}_\beta$ . При отсутствии в схеме источников ЭДС эти токи определяются совсем просто:

$$\mathbf{I}_\beta = \mathbf{Z}_{\beta\beta}^{-1} \cdot \mathbf{U}_\beta. \quad (3.69)$$

### 3.4.2. Независимые падения напряжений на ветвях

Из уравнения (3.47), записанного с разделением на блоки  $\alpha$  и  $\beta$ , можно получить выражение:

$$\mathbf{U}_B = \mathbf{M}^T \cdot \mathbf{U}_\Delta = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_\alpha^T \\ \mathbf{M}_\beta^T \end{pmatrix} \cdot \mathbf{U}_\Delta = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_\alpha \\ \mathbf{U}_\beta \end{pmatrix},$$

из которого после перемножения получаем матричную систему:

$$\begin{cases} \mathbf{U}_\alpha = \mathbf{M}_\alpha^T \cdot \mathbf{U}_\Delta \\ \mathbf{U}_\beta = \mathbf{M}_\beta^T \cdot \mathbf{U}_\Delta \end{cases} \quad (3.70)$$

Зная, что  $\mathbf{M}_\alpha$  — матрица квадратная и неособенная, из первого уравнения системы (3.70), можно выразить матрицу узловых напряжений:

$$\mathbf{U}_\Delta = (\mathbf{M}_\alpha^T)^{-1} \cdot \mathbf{U}_\alpha = \mathbf{C}_P^T \cdot \mathbf{U}_\alpha. \quad (3.71)$$

Если теперь подставить полученное значение  $\mathbf{U}_\Delta$  во второе уравнение системы (3.70), то найдем падения напряжения в хордах:

$$\mathbf{U}_\beta = \mathbf{M}_\beta^T \cdot \mathbf{C}_P^T \cdot \mathbf{U}_\alpha. \quad (3.72)$$

С учетом того, что  $\mathbf{M}_\beta^T \cdot \mathbf{C}_P^T = -\mathbf{N}_\alpha$  [см. формулу (3.59)], получим:

$$\mathbf{U}_\beta = -\mathbf{N}_\alpha \cdot \mathbf{U}_\alpha. \quad (3.73)$$

Следовательно, независимыми переменными являются напряжения в ветвях дерева  $\mathbf{U}_\alpha$ , которые и определяются в первую очередь. Напряжения на хордах  $\mathbf{U}_\beta$  являются зависимыми и определяются во вторую очередь по формуле (3.73).

Для определения независимых напряжений на ветвях дерева схемы можно воспользоваться уравнением:

$$\mathbf{U}_B = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{I} - \mathbf{E},$$

которое при разделении матриц на блоки предстанет в виде:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{U}_\alpha \\ \mathbf{U}_\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_{\alpha\alpha} & \mathbf{Z}_{\alpha\beta} \\ \mathbf{Z}_{\beta\alpha} & \mathbf{Z}_{\beta\beta} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{I}_\alpha \\ \mathbf{I}_\beta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{E}_\alpha \\ \mathbf{E}_\beta \end{pmatrix},$$

откуда можно выразить:

$$\begin{cases} \mathbf{U}_\alpha = \mathbf{Z}_{\alpha\alpha} \cdot \mathbf{I}_\alpha + \mathbf{Z}_{\alpha\beta} \cdot \mathbf{I}_\beta - \mathbf{E}_\alpha \\ \mathbf{U}_\beta = \mathbf{Z}_{\beta\alpha} \cdot \mathbf{I}_\alpha + \mathbf{Z}_{\beta\beta} \cdot \mathbf{I}_\beta - \mathbf{E}_\beta \end{cases}.$$

Если в схеме отсутствуют взаимные сопротивления между ветвями дерева и хордами, а также нет источников ЭДС, то из первого уравнения получим формулу для расчета напряжения на ветвях дерева:

$$\mathbf{U}_\alpha = \mathbf{Z}_{\alpha\alpha} \cdot \mathbf{I}_\alpha. \quad (3.74)$$

### 3.4.3. Решение обобщенного уравнения состояния электрической сети методом преобразования

Полученное выше решение обобщенного уравнения состояния (3.61) в виде  $\mathbf{I} = \mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{A}$  неудобно для практических целей, поэтому рассмотрим ряд преобразований, которые позволят снизить трудоемкость решения.

На первом этапе преобразуем матрицу пассивных параметров  $\mathbf{P}$ , которая состоит из двух блоков:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{M} \\ \mathbf{NZ} \end{pmatrix}.$$

В свою очередь матрицы  $\mathbf{N}$  и  $\mathbf{Z}$  также можно представить в виде блок матриц, соответствующих делению схемы на дерево и хорды:

$$\mathbf{N} = (\mathbf{N}_\alpha \quad \mathbf{N}_\beta); \quad \mathbf{Z} = \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_{\alpha\alpha} & \mathbf{Z}_{\alpha\beta} \\ \mathbf{Z}_{\beta\alpha} & \mathbf{Z}_{\beta\beta} \end{pmatrix}.$$

Их произведение представляет собой матрицу-строку:

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{Z} = (\mathbf{N}_\alpha \quad \mathbf{N}_\beta) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_{\alpha\alpha} & \mathbf{Z}_{\alpha\beta} \\ \mathbf{Z}_{\beta\alpha} & \mathbf{Z}_{\beta\beta} \end{pmatrix} = \left( (\mathbf{N}_\alpha \mathbf{Z}_{\alpha\alpha} + \mathbf{N}_\beta \mathbf{Z}_{\beta\alpha}) \quad (\mathbf{N}_\alpha \mathbf{Z}_{\alpha\beta} + \mathbf{N}_\beta \mathbf{Z}_{\beta\beta}) \right).$$

Учитывая, что  $\mathbf{N}_\beta = 1$ , получим:

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{Z} = \left[ \mathbf{N}_\alpha \mathbf{Z}_{\alpha\alpha} + \mathbf{Z}_{\beta\alpha} \right] \left[ \mathbf{N}_\alpha \mathbf{Z}_{\alpha\beta} + \mathbf{Z}_{\beta\beta} \right]. \quad (3.75)$$

Тогда матрица пассивных параметров  $\mathbf{P}$  примет вид:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{\alpha\alpha} & \mathbf{P}_{\alpha\beta} \\ \mathbf{P}_{\beta\alpha} & \mathbf{P}_{\beta\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_\alpha & \mathbf{M}_\beta \\ (\mathbf{N}_\alpha \mathbf{Z}_{\alpha\alpha} + \mathbf{Z}_{\beta\alpha}) & (\mathbf{N}_\alpha \mathbf{Z}_{\alpha\beta} + \mathbf{Z}_{\beta\beta}) \end{pmatrix}. \quad (3.76)$$

Для определения обратной матрицы  $\mathbf{P}^{-1}$  воспользуемся методом деления исходной на блоки (см. п. 3.2.5). Введем обозначение  $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{K}$  и получим:

$$\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{K} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{\alpha\alpha} & \mathbf{K}_{\alpha\beta} \\ \mathbf{K}_{\beta\alpha} & \mathbf{K}_{\beta\beta} \end{pmatrix}, \quad (3.77)$$

где по аналогии с (3.38) можно записать:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{\alpha\alpha} &= \left( \mathbf{P}_{\alpha\alpha} - \mathbf{P}_{\beta\alpha} \cdot \mathbf{P}_{\beta\beta}^{-1} \cdot \mathbf{P}_{\alpha\beta} \right)^{-1}; & \mathbf{K}_{\alpha\beta} &= -\mathbf{K}_{\alpha\alpha} \cdot \mathbf{P}_{\beta\alpha} \cdot \mathbf{P}_{\beta\beta}^{-1}; \\ \mathbf{K}_{\beta\beta} &= \left( \mathbf{P}_{\beta\beta} - \mathbf{P}_{\alpha\beta} \cdot \mathbf{P}_{\alpha\alpha}^{-1} \cdot \mathbf{P}_{\beta\alpha} \right)^{-1}; & \mathbf{K}_{\beta\alpha} &= -\mathbf{K}_{\beta\beta} \cdot \mathbf{P}_{\alpha\beta} \cdot \mathbf{P}_{\alpha\alpha}^{-1}. \end{aligned}$$

В эти выражения подставляем значения отдельных блоков исходной матрицы  $\mathbf{P}$  из (3.76). Получим выражения для определения блоков матрицы  $\mathbf{K}$  по исходным пассивным параметрам схемы:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{\alpha\alpha} &= \left[ \mathbf{M}_{\alpha} - \mathbf{M}_{\beta} \cdot \left( \mathbf{N}_{\alpha} \mathbf{Z}_{\alpha\beta} + \mathbf{Z}_{\beta\beta} \right)^{-1} \cdot \left( \mathbf{N}_{\alpha} \mathbf{Z}_{\alpha\alpha} + \mathbf{Z}_{\beta\alpha} \right) \right]^{-1}; \\ \mathbf{K}_{\alpha\beta} &= -\mathbf{K}_{\alpha\alpha} \cdot \mathbf{M}_{\beta} \cdot \left( \mathbf{N}_{\alpha} \mathbf{Z}_{\alpha\beta} + \mathbf{Z}_{\beta\beta} \right)^{-1}; \\ \mathbf{K}_{\beta\alpha} &= \mathbf{K}_{\beta\beta} \cdot \left( \mathbf{N}_{\alpha} \mathbf{Z}_{\alpha\alpha} + \mathbf{Z}_{\beta\alpha} \right) \cdot \mathbf{M}_{\alpha}^{-1} = \mathbf{K}_{\beta\beta} \cdot \left( \mathbf{N}_{\alpha} \mathbf{Z}_{\alpha\alpha} + \mathbf{Z}_{\beta\alpha} \right) \cdot \mathbf{C}_P; \\ \mathbf{K}_{\beta\beta} &= \left[ \mathbf{N}_{\alpha} \mathbf{Z}_{\alpha\beta} + \mathbf{Z}_{\beta\beta} - \left( \mathbf{N}_{\alpha} \mathbf{Z}_{\alpha\alpha} + \mathbf{Z}_{\beta\alpha} \right) \cdot \mathbf{M}_{\alpha}^{-1} \cdot \mathbf{M}_{\beta} \right]^{-1} = \\ &= \left[ \mathbf{N}_{\alpha} \mathbf{Z}_{\alpha\beta} + \mathbf{Z}_{\beta\beta} - \left( \mathbf{N}_{\alpha} \mathbf{Z}_{\alpha\alpha} + \mathbf{Z}_{\beta\alpha} \right) \cdot \mathbf{C}_P \cdot \mathbf{M}_{\beta} \right]^{-1} = \\ &= \left[ \mathbf{N}_{\alpha} \mathbf{Z}_{\alpha\beta} + \mathbf{Z}_{\beta\beta} + \left( \mathbf{N}_{\alpha} \mathbf{Z}_{\alpha\alpha} + \mathbf{Z}_{\beta\alpha} \right) \cdot \mathbf{N}_{\alpha}^T \right]^{-1}. \end{aligned}$$

В последнем уравнении замена  $\mathbf{C}_P \cdot \mathbf{M}_{\beta} = \mathbf{N}_{\alpha}^T$  произведена в соответствии с формулой связи (3.59), согласно которой  $\mathbf{N}_{\alpha} = -\mathbf{M}_{\beta}^T \cdot \mathbf{C}_P^T$ .

Далее, если отсутствуют взаимные сопротивления между ветвями дерева и хордами ( $\mathbf{Z}_{\alpha\beta} = \mathbf{Z}_{\beta\alpha} = 0$ ), то блоки матрицы  $\mathbf{K}$  записываются в виде:

$$\mathbf{K}_{\alpha\alpha} = \left( \mathbf{M}_{\alpha} - \mathbf{M}_{\beta} \cdot \mathbf{Z}_{\beta\beta}^{-1} \cdot \mathbf{N}_{\alpha} \mathbf{Z}_{\alpha\alpha} \right)^{-1}; \quad (3.78)$$

$$\mathbf{K}_{\alpha\beta} = -\mathbf{K}_{\alpha\alpha} \cdot \mathbf{M}_{\beta} \cdot \mathbf{Z}_{\beta\beta}^{-1}; \quad (3.79)$$

$$\mathbf{K}_{\beta\alpha} = \mathbf{K}_{\beta\beta} \cdot \mathbf{N}_{\alpha} \mathbf{Z}_{\alpha\alpha} \cdot \mathbf{C}_P; \quad (3.80)$$

$$\mathbf{K}_{\beta\beta} = \left( \mathbf{Z}_{\beta\beta} + \mathbf{N}_{\alpha} \mathbf{Z}_{\alpha\alpha} \cdot \mathbf{N}_{\alpha}^T \right)^{-1}. \quad (3.81)$$

Нет необходимости вычислять все блоки обратной матрицы  $\mathbf{K}$  согласно формуле (3.38). Достаточно рассчитать лишь те, которые необходимы для определения независимых токов в хордах. Таким образом решение значительно упрощается.

Из уравнений (3.62) и (3.77) можно записать:

$$\mathbf{I} = \mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{\alpha\alpha} & \mathbf{K}_{\alpha\beta} \\ \mathbf{K}_{\beta\alpha} & \mathbf{K}_{\beta\beta} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{\alpha\alpha} & \mathbf{K}_{\alpha\beta} \\ \mathbf{K}_{\beta\alpha} & \mathbf{K}_{\beta\beta} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{J} \\ \mathbf{E}_K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{\alpha} \\ \mathbf{I}_{\beta} \end{pmatrix}.$$

Откуда, перемножая матрицы по блокам, получим:

$$\begin{cases} \mathbf{I}_\alpha = \mathbf{K}_{\alpha\alpha} \cdot \mathbf{J} + \mathbf{K}_{\alpha\beta} \cdot \mathbf{E}_K \\ \mathbf{I}_\beta = \mathbf{K}_{\beta\alpha} \cdot \mathbf{J} + \mathbf{K}_{\beta\beta} \cdot \mathbf{E}_K \end{cases} \quad (3.82)$$

где  $\mathbf{E}_K = \mathbf{N} \cdot \mathbf{E}$ .

То есть для определения токов в хордах  $\mathbf{I}_\beta$  достаточно решить только второе уравнение в системе (3.79). Для этого потребуются две блок-матрицы —  $\mathbf{K}_{\beta\alpha}$  и  $\mathbf{K}_{\beta\beta}$ .

Подставим выражения (3.80) и (3.81) во второе уравнение системы (3.82) и получим формулу для определения токов в хордах

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_\beta &= \mathbf{K}_{\beta\alpha} \cdot \mathbf{J} + \mathbf{K}_{\beta\beta} \cdot \mathbf{E}_K = [\mathbf{K}_{\beta\beta} \cdot (\mathbf{N}_\alpha \mathbf{Z}_{\alpha\alpha} + \mathbf{Z}_{\beta\alpha}) \cdot \mathbf{C}_P] \cdot \mathbf{J} + (\mathbf{Z}_{\beta\beta} + \mathbf{N}_\alpha \mathbf{Z}_{\alpha\alpha} \cdot \mathbf{N}_\alpha^T)^{-1} \cdot \mathbf{E}_K = \\ &= (\mathbf{Z}_{\beta\beta} + \mathbf{N}_\alpha \mathbf{Z}_{\alpha\alpha} \cdot \mathbf{N}_\alpha^T)^{-1} \cdot (\mathbf{N}_\alpha \mathbf{Z}_{\alpha\alpha} + \mathbf{Z}_{\beta\alpha}) \cdot \mathbf{C}_P \cdot \mathbf{J} + (\mathbf{Z}_{\beta\beta} + \mathbf{N}_\alpha \mathbf{Z}_{\alpha\alpha} \cdot \mathbf{N}_\alpha^T)^{-1} \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{E} = \\ &= [\mathbf{N}_\alpha \mathbf{Z}_{\alpha\beta} \mathbf{Z}_{\beta\beta} + (\mathbf{N}_\alpha \mathbf{Z}_{\alpha\alpha} + \mathbf{Z}_{\beta\alpha}) \cdot \mathbf{N}_\alpha^T]^{-1} \cdot [\mathbf{N} \cdot \mathbf{E} - (\mathbf{N}_\alpha \mathbf{Z}_{\alpha\alpha} + \mathbf{Z}_{\beta\alpha}) \cdot \mathbf{C}_P \cdot \mathbf{J}] \end{aligned}$$

Если в схеме будут отсутствовать взаимные сопротивления между ветвями дерева и хордами, а также источники ЭДС, то формула будет еще проще:

$$\mathbf{I}_\beta = -[\mathbf{Z}_{\beta\beta} + \mathbf{N}_\alpha \cdot \mathbf{Z}_{\alpha\alpha} \cdot \mathbf{N}_\alpha^T]^{-1} \cdot \mathbf{N}_\alpha \cdot \mathbf{Z}_{\alpha\alpha} \cdot \mathbf{C}_P \cdot \mathbf{J}. \quad (3.83)$$

После того, как токи в хордах будут вычислены, зависимые токи в ветвях дерева можно рассчитать по формуле (3.63):

$$\mathbf{I}_\alpha = \mathbf{M}_\alpha^{-1} \cdot (\mathbf{J} - \mathbf{M}_\beta \cdot \mathbf{I}_\beta) = \mathbf{C}_P \cdot (\mathbf{J} - \mathbf{M}_\beta \cdot \mathbf{I}_\beta).$$

### 3.5. Применение узловых и контурных уравнений в расчетах режимов сложных электрических сетей

Применение узловых и контурных уравнений для расчетов рабочих режимов сложных электрических сетей целесообразно в том случае, если это позволяет уменьшить число неизвестных. В первом случае в качестве переменных будут использоваться узловые напряжения, а во втором — контурные токи.

#### 3.5.1. Узловые уравнения

В качестве независимых переменных в данном случае применяются узловые напряжения, число которых определяется числом независимых узлов в схеме замещения (а число узлов всегда меньше числа ветвей).

Предположим, что известна матрица узловых напряжений относительно балансирующего узла  $\mathbf{U}_\Delta$ . Тогда матрица падений напряжений в ветвях схемы определяется из уравнения (3.47):

$$\mathbf{U}_B = \mathbf{M}^T \cdot \mathbf{U}_\Delta.$$

С другой стороны, матрицу напряжений на ветвях схемы можно определить по закону Ома:

$$\mathbf{U}_B = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{I} - \mathbf{E}.$$

Так как левые части этих уравнений одинаковые, приравняем и правые:

$$\mathbf{M}_T \cdot \mathbf{U}_\Delta = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{I} - \mathbf{E},$$

и решим это уравнение относительно матрицы токов в ветвях:

$$\mathbf{I} = \mathbf{Z}^{-1} \cdot (\mathbf{M}_T \cdot \mathbf{U}_\Delta + \mathbf{E}) = \mathbf{Y} \cdot (\mathbf{M}_T \cdot \mathbf{U}_\Delta + \mathbf{E}).$$

При отсутствии источников ЭДС в схеме решение упрощается:

$$\mathbf{I} = \mathbf{Y} \cdot \mathbf{M}_T \cdot \mathbf{U}_\Delta. \quad (3.84)$$

Теперь подставим значение этого тока в узловое уравнение (3.45):

$$\mathbf{J} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{Y} \cdot \mathbf{M}_T \cdot \mathbf{U}_\Delta \quad (3.85)$$

где  $\mathbf{M} \cdot \mathbf{Y} \cdot \mathbf{M}_T = \mathbf{Y}_Y$  — матрица узловых проводимостей.

Матрица  $\mathbf{Y}_Y$  — квадратная, симметричная, неособенная, порядка  $(u \times u)$ . Ее проще всего составить непосредственно по схеме замещения: по главной диагонали располагаются суммарные проводимости всех ветвей, соединенных с соответствующим узлом схемы, а на пересечении  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца ( $i \neq j$ ) записываются проводимости ветви с вершинами в узлах  $i$  и  $j$ , взятые с обратным знаком.

*Пример 0.6.* Составим матрицу  $\mathbf{Y}_Y$  для направленного графа, показанного на рис. 3.6:

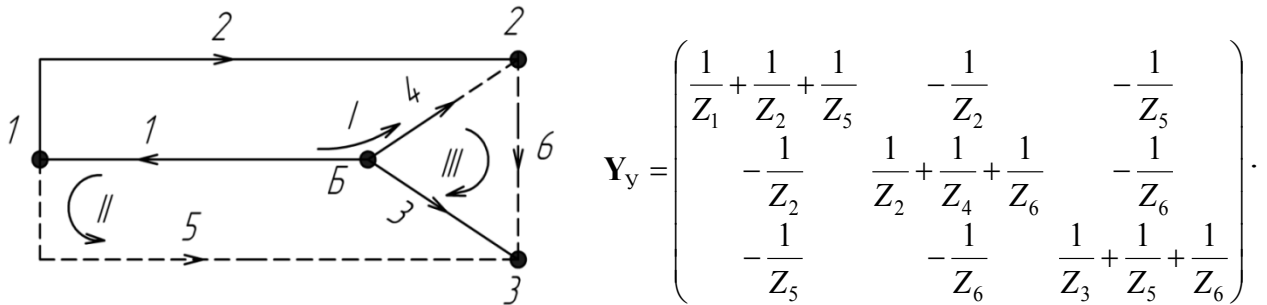


Рис. 3.6. Направленный граф электрической сети

С учетом полученной матрицы узловых проводимостей, формула (3.84) может быть записана так:

$$\mathbf{J} = \mathbf{Y}_Y \cdot \mathbf{U}_\Delta,$$

откуда можно вычислить матрицу узловых напряжений:

$$\mathbf{U}_\Delta = \mathbf{Y}_Y^{-1} \cdot \mathbf{J} = \mathbf{Z}_Y \cdot \mathbf{J}, \quad (3.86)$$

где  $\mathbf{Z}_Y$  — матрица узловых сопротивлений.

Матрицу узловых сопротивлений по схеме составить невозможно — ее определяют как обратную от матрицы узловых проводимостей.

Таким образом, узловые напряжения целесообразно принимать для расчетов режимов работы электрических сетей в тех случаях, когда в схеме отсутствуют источники ЭДС, но имеются узловые токи.

### 3.5.2. Применение контурных уравнений

Применение контурных уравнений целесообразно в тех случаях, когда в схеме замещения отсутствуют узловые токи, но имеются источники ЭДС. Эти источники ЭДС и создают контурные токи в замкнутых контурах. Таким образом, количество независимых переменных (контурных токов) в этом методе существенно ниже, чем в предыдущих. Следовательно, снижается и трудоемкость расчетов.

Для определения токов в ветвях схемы  $\mathbf{I}$  следует произвести алгебраическое суммирование контурных токов, проходящих по каждой ветви. Если обозначить матрицу контурных токов через  $\mathbf{I}_K$ , то эта операция суммирования может быть выполнена путем ее перемножения с транспонированной матрицей контуров  $\mathbf{N}^T$ :

$$\mathbf{I} = \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{I}_K. \quad (3.87)$$

Для схемы, представленной на рис. 3.6, уравнение (3.87) запишется в следующем виде:

$$\mathbf{I} = \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{I}_K = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_{K1} \\ I_{K2} \\ I_{K3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I_{K1} + I_{K2} + I_{K3} \\ -I_{K1} + I_{K3} \\ -I_{K2} - I_{K3} \\ I_{K1} \\ I_{K2} \\ I_{K3} \end{pmatrix}.$$

Разделим в уравнении (3.87) матрицы  $N_i$  и  $\hat{I}$  на блоки в соответствии с делением схемы на дерево и хорды:

$$\mathbf{I} = \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{I}_K = \begin{pmatrix} \mathbf{N}_\alpha^T \\ \mathbf{N}_\beta^T \end{pmatrix} \cdot \mathbf{I}_K = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_\alpha \\ \mathbf{I}_\beta \end{pmatrix}.$$

отсюда 
$$\begin{cases} \mathbf{I}_\alpha = \mathbf{N}_\alpha^T \cdot \mathbf{I}_K \\ \mathbf{I}_\beta = \mathbf{N}_\beta^T \cdot \mathbf{I}_K \end{cases}. \quad (3.88)$$

Так как  $\mathbf{N}_\beta^T = \mathbf{N}_\beta = 1$ , то из второго уравнения системы (3.88) имеем:

$$\mathbf{I}_\beta = \mathbf{I}_K. \quad (3.89)$$

Таким образом, для определения токов во всех ветвях схемы достаточно найти только контурные токи, которые при принятых условиях совпадают с токами в хордах схемы.

Чтобы определить контурные токи, воспользуемся контурным уравнением в матричной форме, в которое подставим матрицу токов  $\mathbf{I}$  из уравнения (3.87):

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{Z} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{Z} \cdot \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{I}_K = \mathbf{E}_K,$$

где  $\mathbf{N} \cdot \mathbf{Z} \cdot \mathbf{N}^T = \mathbf{Z}_K$  — матрица контурных сопротивлений, с учетом которой последнее уравнение можно переписать в следующем виде:

$$\mathbf{Z}_K \cdot \mathbf{I}_K = \mathbf{E}_K. \quad (3.90)$$

Матрица  $\mathbf{Z}_K$  — квадратная, симметричная, неособенная, порядка  $(k \times k)$ , поэтому имеет обратную. Так что решая уравнение (3.90), находим контурные токи:

$$\mathbf{I}_K = \mathbf{Z}_K^{-1} \cdot \mathbf{E}_K = \mathbf{Y}_K \cdot \mathbf{E}_K, \quad (3.91)$$

где  $\mathbf{Y}_K$  — матрица контурных проводимостей.

Матрица контурных проводимостей  $\mathbf{Y}_K$  — также квадратная, симметричная, неособенная, порядка  $(k \times k)$ . По ее главной диагонали расположены собственные проводимости контуров  $Y_{ii}$ , а на пересечении  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца ( $i \neq j$ ) — взаимные проводимости контуров  $Y_{ij}$ . По схеме эту матрицу составить невозможно, поэтому ее определяют как обратную от матрицы контурных сопротивлений:  $\mathbf{Y}_K = \mathbf{Z}_K^{-1}$ .

Матрица  $\mathbf{Z}_K$  составляется непосредственно по схеме замещения, используя следующее правило:

- по главной диагонали матрицы записывают собственные сопротивления  $Z_{ii}$  всех независимых контуров, равные сумме сопротивлений входящих в каждый контур ветвей;

- на пересечении  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца ( $i \neq j$ ) — записываются общие сопротивления  $Z_{ij}$  для  $i$ -го и  $j$ -го контуров, причем, если направления обхода двух контуров через такое общее сопротивление совпадают, то это сопротивление берется со знаком «+», а если направления обхода противоположны — то со знаком «-».

*Пример 0.7.* Составим матрицу  $\mathbf{Z}_K$  для схемы, изображенной на рис. 3.7.

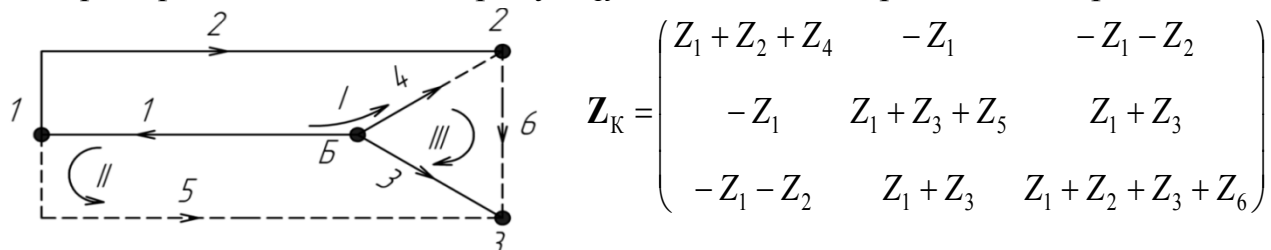


Рис. 3.7. Направленный граф электрической сети



Если в схеме присутствуют только источники ЭДС и нет узловых токов, то контурные токи — токи в хордах схемы определяются по уравнению (3.90). При наличии в схеме замещения, кроме источников ЭДС, узловых токов, матрица токов в ветвях состоит из двух слагаемых:

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}' + \mathbf{I}'' ,$$

где первое слагаемое, связанное с узловыми токами, должно соответствовать первому закону Кирхгофа:

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{I}' = \mathbf{J} ,$$

а второе слагаемое определяется контурными токами согласно формуле (3.87):

$$\mathbf{I}'' = \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{I}_K .$$

С целью упрощения решения предположим, что узловые токи протекают только по ветвям дерева схемы, а в хордах их нет:  $\mathbf{I}'_\alpha = \mathbf{C}_P \cdot \mathbf{J}$ ;  $\mathbf{I}'_\beta = 0$ .

Тогда вся матрица  $\mathbf{I}'$  примет следующий вид:

$$\mathbf{I}' = \begin{pmatrix} \mathbf{I}'_\alpha \\ \mathbf{I}'_\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_P \cdot \mathbf{J} \\ 0 \end{pmatrix} .$$

При этом в независимых контурах схемы возникает небаланс напряжений, вызванный принятым допущением. Для его устранения следует ввести дополнительные контурные токи (помимо исходных контурных токов, обусловленных источниками ЭДС в схеме). Второй закон Кирхгофа в этом случае запишется так:

$$\mathbf{E}_K = \mathbf{N} \cdot \mathbf{Z} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{Z} \cdot (\mathbf{I}' + \mathbf{I}'') = \mathbf{N} \cdot \mathbf{Z} \cdot \left[ \begin{pmatrix} \mathbf{C}_P \cdot \mathbf{J} \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{I}_K \right] . \quad (3.92)$$

Разделяя матрицу  $\mathbf{Z}$  на блоки, преобразуем полученное уравнение к виду:

$$\mathbf{E}_K = \mathbf{N} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_{\alpha\alpha} & \mathbf{Z}_{\alpha\beta} \\ \mathbf{Z}_{\beta\alpha} & \mathbf{Z}_{\beta\beta} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{C}_P \cdot \mathbf{J} \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbf{N} \cdot \mathbf{Z} \cdot \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{I}_K = \mathbf{N} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_{\alpha\alpha} \\ \mathbf{Z}_{\beta\alpha} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{C}_P \cdot \mathbf{J} + \mathbf{Z}_K \cdot \mathbf{I}_K$$

Введем обозначение  $\mathbf{Z}_\alpha = \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_{\alpha\alpha} \\ \mathbf{Z}_{\beta\alpha} \end{pmatrix}$  и получим выражение:

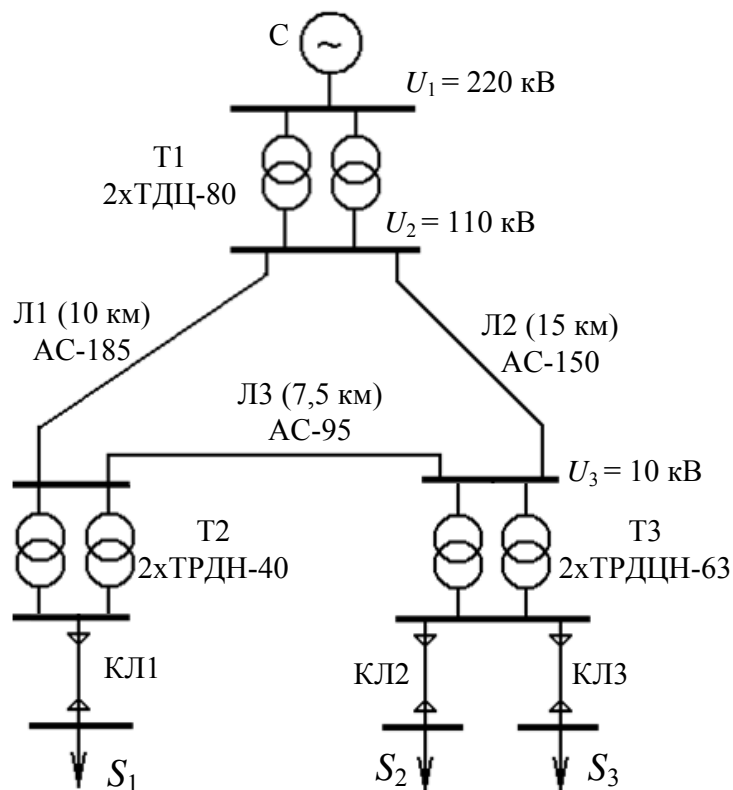
$$\mathbf{E}_K = \mathbf{N} \cdot \mathbf{Z}_\alpha \cdot \mathbf{C}_P \cdot \mathbf{J} + \mathbf{Z}_K \cdot \mathbf{I}_K . \quad (3.93)$$

Так как матрица  $\mathbf{Z}_K$  — квадратная, неособенная, то из уравнения (3.93) можно выразить матрицу контурных токов  $\mathbf{I}_K$ :

$$\mathbf{I}_K = \mathbf{Z}_K^{-1} \cdot (\mathbf{E}_K - \mathbf{N} \cdot \mathbf{Z}_\alpha \cdot \mathbf{C}_P \cdot \mathbf{J}) = \mathbf{Y}_K \cdot (\mathbf{E}_K - \mathbf{N} \cdot \mathbf{Z}_\alpha \cdot \mathbf{C}_P \cdot \mathbf{J}) . \quad (3.94)$$

### 3.5.3. Задачи для самостоятельного решения

**Задача 3.1.** Составить схему замещения электрической сети (рис. 3.8) в именованных единицах, представив потребители источниками тока, а питающую энергосистему – источником ЭДС.



Марка кабеля	СБ(3x50)		АСБ(3x70)	АСБ(3x35)
Длина линии	0,5 км		0,3 км	1,2 км
Мощность нагрузки	$35 + j17$ МВА		$50 + j32$ МВА	$16 + j7$ МВА

Рис. 3.8

**Задача 6.2.** Определить параметры установившегося режима (токи в ветвях и напряжения в узлах) для разомкнутой электрической сети (рис. 3.9) при помощи коэффициентов токораспределения.

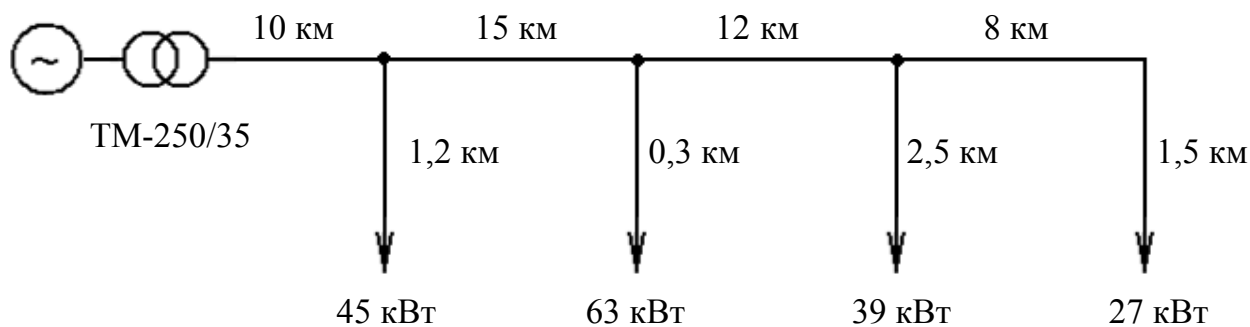


Рис. 3.9

**Задача 6.3.** Составить схему замещения электрической сети (рис. 3.10) в относительных единицах, представив потребители сопротивлением обобщенной нагрузки.

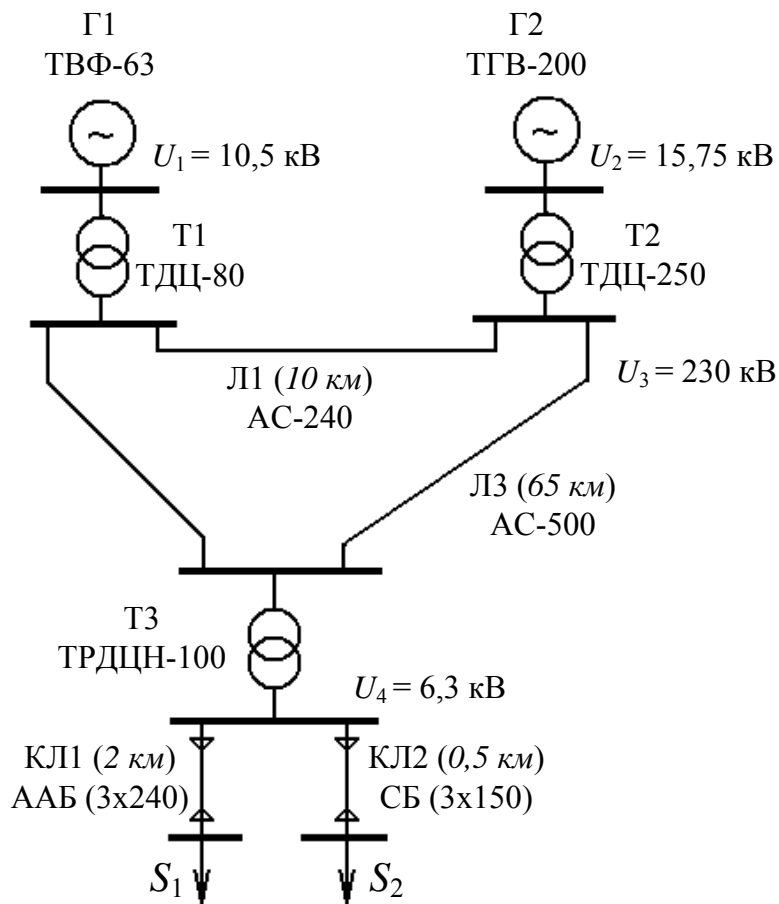


Рис. 3.10

**Задача 6.4.** Вычертить направленный граф и составить матрицы инцидентий для структурной схемы электрической сети, приведенной на рис 3.11.

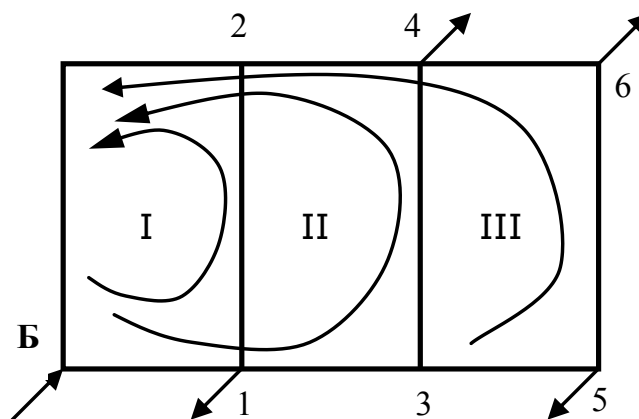


Рис.3.11

**Задача 6.5.** Рассчитать токи в ветвях и напряжения в узлах схемы (рис. 6.7) прямым методом. Исходные данные для расчета:

длина линий электропередачи  $l_m = 5 \cdot m$  км (удельное сопротивление  $x_0 = 0,4$  Ом/км);

мощность нагрузки в узлах схемы  $S_k = S_0 \cdot (1 + 0,2k)$  МВА;

напряжение балансирующего узла  $U_B = 1,05 U_{ном}$ .

Базовые мощности и напряжения принять по табл. 3.1

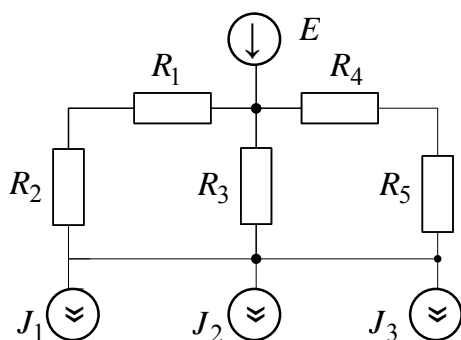
Таблица 3.1

Токи и напряжения расчетной схемы

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$S_0$ , МВА	25	30	15	40	50	10	35	20	55	45
$U_{ном}$ , кВ	110	220	35	110	220	35	110	35	220	110

**Задача 6.6.** Выполнить расчеты токораспределения для предыдущей задачи (рис. 3.11) методом узловых напряжений и методом контурных уравнений. Сравнить результаты.

**Задача 6.7.** Рассчитать параметры установившегося режима по схеме замещения (рис. 3.12) простым методом Гаусса и модифицированным методом Гаусса-Зейделя с установленной погрешностью 5%. Сравнить результаты расчетов и количество итераций.



$E = 380$  В;  
 $R_1 = 1,2$  Ом;  
 $R_2 = 0,4$  Ом;  
 $R_3 = 0,5$  Ом;  
 $R_4 = 0,7$  Ом;  
 $R_5 = 0,6$  Ом;  
 $J_1 = 50$  А;  
 $J_2 = 30$  А;  
 $J_3 = 40$  А.

Рис. 3.12

### 3.6. Пример расчета параметров режима сложноразветвленной сети

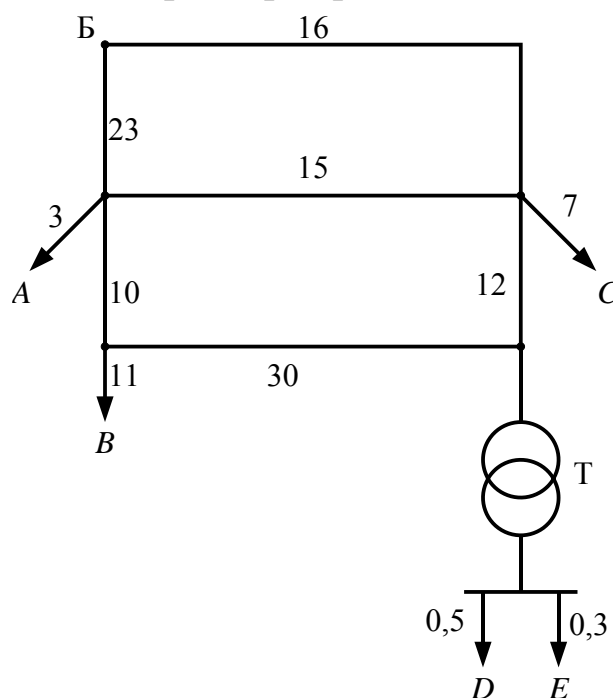


Рис. 3.13. Расчетная схема электрической сети

На рис. 3.13 приведена расчетная схема электрической сети напряжением 110 и 10 кВ. Цифрами на линиях электропередачи обозначена их длина в км. Параметры расчетной схемы приведены в табл. 3.2. Величины электрических нагрузок приведены в табл. 3.3. Напряжение на балансирующем узле поддерживается равным 117 кВ.

Таблица 3.2

Параметры элементов расчетной схемы

Элемент	Количество параллельно работающих элементов	Тип
ЛЭП, отходящие от балансирующего узла	2	АС-240
Прочие ЛЭП	1	АС-120
Трансформатор	2	ТРДН-63000/110
Кабельные ЛЭП	1	АПВП-70/16

Таблица 3.3

Величины электрических нагрузок

Узел	Нагрузка, МВА
A	$59 + j22,4$
B	$34,7 + j12,8$
C	$41,5 + j15,8$
D	$3,1 + j1,2$
E	$4,1 + j1,6$

### 3.6.1. Составление схемы замещения и расчет её параметров

Для электрической сети (рис. 3.13) составим схему замещения, на которой каждый элемент замещен активным и индуктивным сопротивлением, а нагрузки – узловыми задающими токами. Схема замещения показана на рис. 3.14.

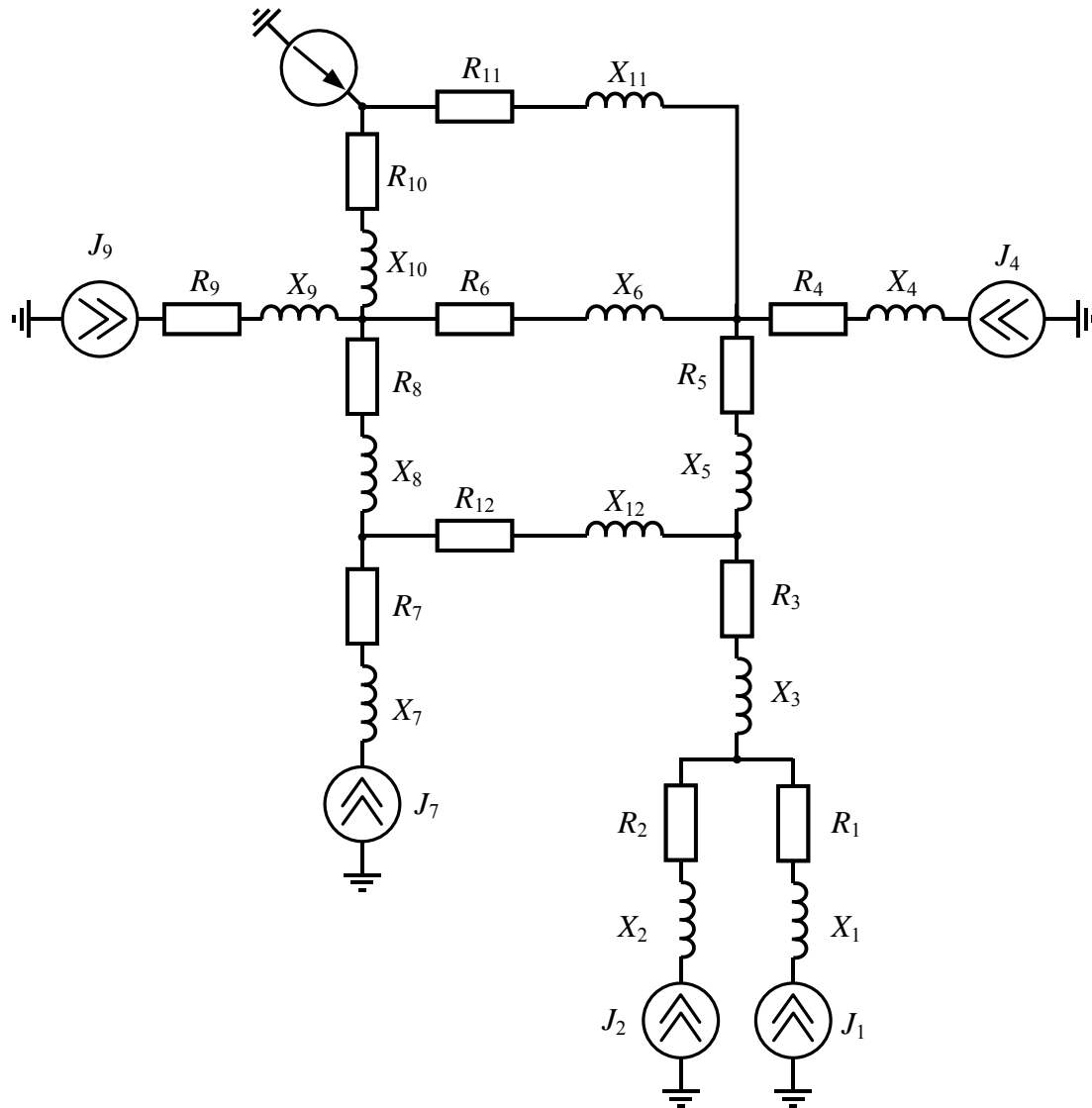


Рис. 3.14. Схема замещения электрической сети

Для расчета параметров схемы замещения необходимо для воздушных и кабельных линий знать удельные сопротивления, а для трансформаторов – потери короткого замыкания и напряжение короткого замыкания. В соответствии с [9] и табл. 3.2:

- для проводов марки АС-240  $r_0=0,12$  Ом/км,  $x_0=0,405$  Ом/км;
- для проводов марки АС-120  $r_0=0,249$  Ом/км,  $x_0=0,427$  Ом/км;
- для кабелей марки АПвП-70/16  $r_0=0,443$  Ом/км,  $x_0=0,196$  Ом/км;
- для трансформаторов типа ТРДН-63000/110  $S_{ном}=63000$  кВА,  $U_{ном}=115$  кВ,  $P_k=245$  кВт,  $u_k=10,5\%$ .

По (3.4) и (3.5) определим сопротивления линий электропередачи.

$$\begin{aligned}
R_1 &= 0,443 \cdot 0,3 = 0,133 \text{ Ом}; & R_8 &= 0,249 \cdot 10 = 2,49 \text{ Ом}; \\
X_1 &= 0,196 \cdot 0,3 = 0,059 \text{ Ом}; & X_8 &= 0,427 \cdot 10 = 4,27 \text{ Ом}; \\
R_2 &= 0,443 \cdot 0,5 = 0,221 \text{ Ом}; & R_9 &= 0,249 \cdot 3 = 0,474 \text{ Ом}; \\
X_2 &= 0,196 \cdot 0,5 = 0,098 \text{ Ом}; & X_9 &= 0,427 \cdot 3 = 1,281 \text{ Ом}; \\
R_4 &= 0,249 \cdot 7 = 1,743 \text{ Ом}; & R_{10} &= (0,12 \cdot 23)/2 = 1,38 \text{ Ом}; \\
X_4 &= 0,427 \cdot 7 = 2,989 \text{ Ом}; & X_{10} &= (0,405 \cdot 23)/2 = 4,658 \text{ Ом}; \\
R_5 &= 0,249 \cdot 12 = 2,988 \text{ Ом}; & R_{11} &= (0,12 \cdot 16)/2 = 0,96 \text{ Ом}; \\
X_5 &= 0,427 \cdot 12 = 5,124 \text{ Ом}; & X_{11} &= (0,405 \cdot 16)/2 = 3,24 \text{ Ом}; \\
R_6 &= 0,249 \cdot 15 = 3,735 \text{ Ом}; & R_{12} &= 0,249 \cdot 30 = 7,47 \text{ Ом}; \\
X_6 &= 0,427 \cdot 15 = 6,405 \text{ Ом}; & X_{12} &= 0,427 \cdot 30 = 12,81 \text{ Ом}. \\
R_7 &= 0,249 \cdot 11 = 2,739 \text{ Ом}; \\
X_7 &= 0,427 \cdot 11 = 4,697 \text{ Ом};
\end{aligned}$$

Все сопротивления в схеме замещения должны быть приведены к одной ступени напряжения, поэтому сопротивления кабельных ЛЭП в сети 10 кВ необходимо привести к ступени напряжения 110 кВ умножив их на  $k_T^2$ .

$$\begin{aligned}
R'_1 &= R_1 k_T^2 = 0,133 \cdot \left(\frac{110}{10}\right)^2 = 16,081 \text{ Ом}; & R'_2 &= R_2 k_T^2 = 0,221 \cdot \left(\frac{110}{10}\right)^2 = 26,802 \text{ Ом}; \\
X'_1 &= X_1 k_T^2 = 0,059 \cdot 11^2 = 7,115 \text{ Ом}; & X'_2 &= X_2 k_T^2 = 0,098 \cdot 11^2 = 11,858 \text{ Ом}.
\end{aligned}$$

Сопротивления силовых трансформаторов по (3.7) и (3.8)

$$\begin{aligned}
R_3 &= \frac{245 \cdot 115^2 \cdot 10^3}{2 \cdot 63000^2} = 0,408 \text{ Ом}; \\
X_3 &= \frac{10,5}{100} \frac{115^2}{2 \cdot 63000 \cdot 10^{-3}} = 11,021 \text{ Ом}.
\end{aligned}$$

Определим узловые задающие токи нагрузки по (3.10)

$$\begin{aligned}
j_1 &= -\frac{\hat{S}_e \cdot 10^3}{\sqrt{3}U_6} = -\frac{(4,1 - j1,6) \cdot 10^3}{\sqrt{3} \cdot 117} = -20,232 + j7,895 \text{ А}; \\
j_2 &= -\frac{\hat{S}_d \cdot 10^3}{\sqrt{3}U_6} = -\frac{(3,1 - j1,2) \cdot 10^3}{\sqrt{3} \cdot 117} = -15,297 + j5,922 \text{ А}; \\
j_4 &= -\frac{\hat{S}_c \cdot 10^3}{\sqrt{3}U_6} = -\frac{(41,5 - j15,8) \cdot 10^3}{\sqrt{3} \cdot 117} = -204,787 + j77,967 \text{ А};
\end{aligned}$$

$$j_7 = -\frac{\hat{S}_c \cdot 10^3}{\sqrt{3}U_6} = -\frac{(34,7 - j12,8) \cdot 10^3}{\sqrt{3} \cdot 117} = -171,231 + j63,163 \text{ A};$$

$$j_9 = -\frac{\hat{S}_a \cdot 10^3}{\sqrt{3}U_6} = -\frac{(59 - j22,4) \cdot 10^3}{\sqrt{3} \cdot 117} = -291,142 + j110,535 \text{ A}.$$

Схема замещения с нанесенными на нее величинами сопротивлений и узловых задающих токов нагрузки представлена на рис. 3.15.

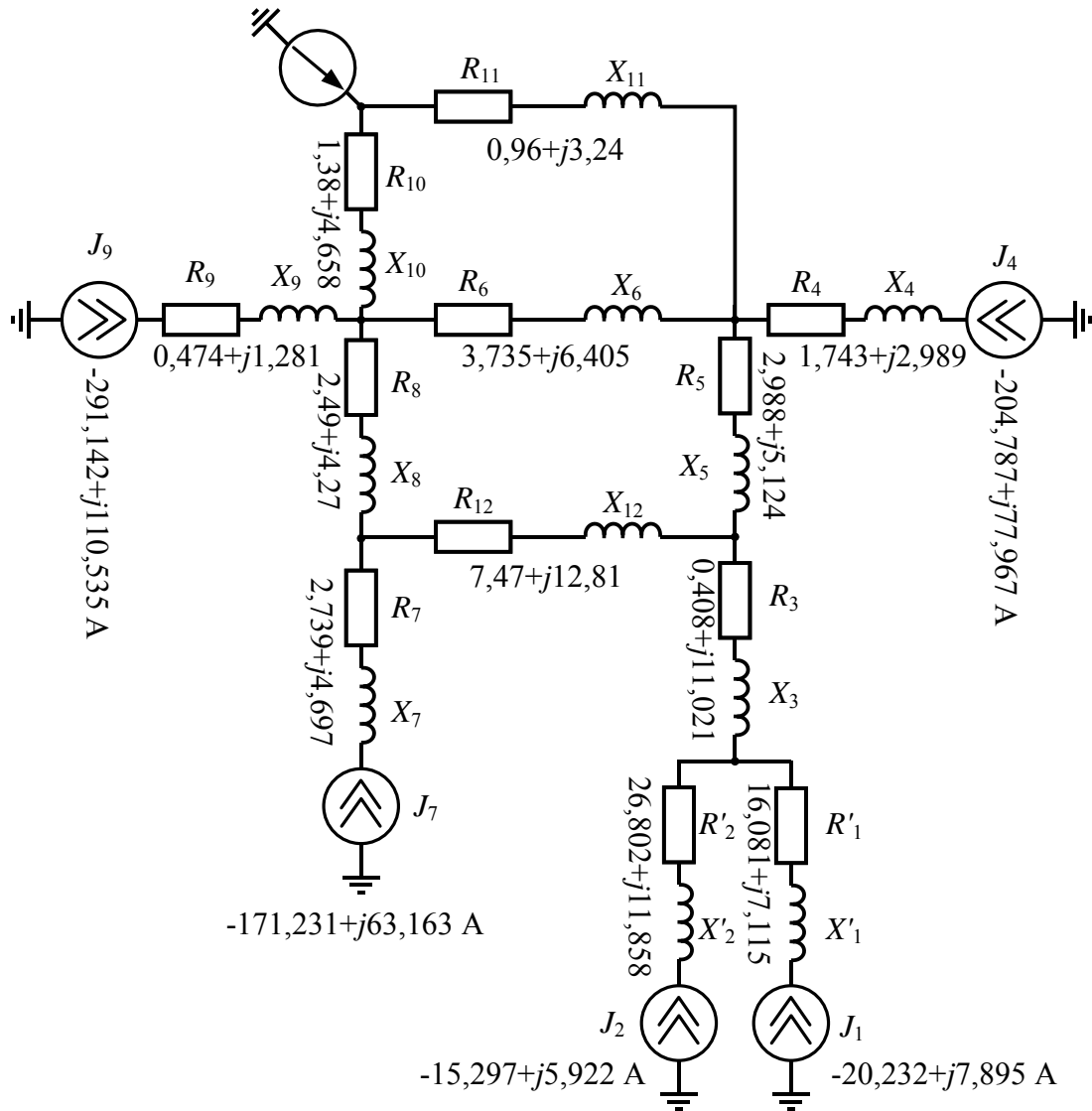


Рис. 3.15



### 3.6.2. Составление направленного графа и матриц инциденций

Составим направленный граф электрической сети, показанной на рис. 3.13. На этом этапе работы рекомендуется придерживаться следующих правил:

1. Нумерация узлов (вершин) ведется снизу вверх по иерархии дерева схемы, т.е. в направлении от наиболее удаленных узлов к балансирующему. Балансирующий узел является последним в нумерации узлов.

2. Далее нумеруются ветви *дерева схемы*. Их направление выбирается от балансирующего узла к нагрузке. Каждой ветви присваивается номер конечной вершины.

3. В схеме замещения выделяются и нумеруются *независимые контуры*, выбирается направление их обхода.

4. Выделяются *хорды* схемы, не допуская более одной хорды в каждом независимом контуре. Хорды нумеруются во вторую очередь и в соответствии с последовательностью нумерации контуров. Направления хорд должны совпадать с направлением обхода контуров.

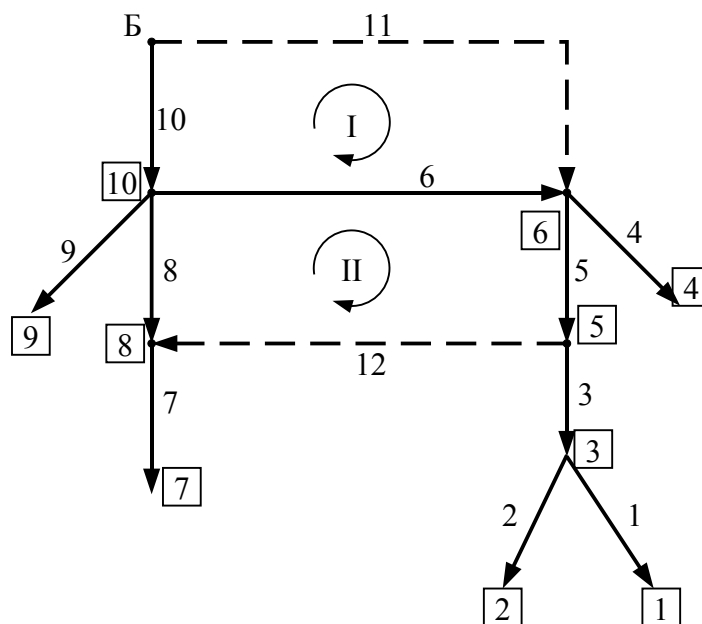


Рис. 3.16. Направленный граф электрической сети

На рис. 3.16 в квадратных рамках указаны номера узлов, римские цифры – номера контуров, остальные – номера ветвей. Дерево графа выполнено сплошными линиями, а хорды отмечены пунктиром.

Для направленного графа составим матрицы инциденций.

Матрица  $\mathbf{M}$  (первая матрица инциденций) в соответствии с п. 3.3.3

$$\mathbf{M} = \left( \begin{array}{cccccccccccc|cc}
 -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array} \right)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\mathbf{M}_\alpha} \qquad \underbrace{\hspace{3em}}_{\mathbf{M}_\beta}$

Матрица  $\mathbf{N}$  (вторая матрица инцидентий) в соответствии с п. 3.3.5

$$\mathbf{N} = \left( \begin{array}{cccccccccccc|cc}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{array} \right)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\mathbf{N}_\alpha} \qquad \underbrace{\hspace{3em}}_{\mathbf{N}_\beta}$

### 3.6.3. Расчет параметров установившегося режима прямым методом

Для схемы на рис. 3.13 выполнить расчет токов в ветвях и напряжений в узлах прямым методом. Расчеты выполнить в программном пакете MathCad.

Схема замещения и направленный граф составлены в п. 3.6.1 и п. 3.6.2.

При использовании прямого метода расчета параметров режима электрической сети целесообразно придерживаться следующего алгоритма:

1. Составить матрицы сопротивлений ветвей дерева  $\mathbf{Z}_{aa}$  и хорд  $\mathbf{Z}_{\beta\beta}$ .
2. Составить матрицы соединений для дерева  $\mathbf{M}_\alpha$  и  $\mathbf{N}_\alpha$ , для хорд  $\mathbf{M}_\beta$  и  $\mathbf{N}_\beta$ .
3. Составить матрицу коэффициентов распределения токов в ветвях дерева или рассчитать ее на основании матрицы  $\mathbf{M}_\alpha$ .
4. Рассчитать токи в хордах схемы замещения по выражению (3.83).
5. Рассчитать токи в ветвях дерева по формуле (3.63).
6. Определить матрицу узловых напряжений:

$$\mathbf{U}_y = \mathbf{C}_P^T \cdot \mathbf{Z}_{aa} \cdot \mathbf{I}_\alpha \tag{3.95}$$

На основе расчетов, выполненных в п. 3.6.1 и направленного графа, приведенного на рис. 3.16 составим матрицу сопротивлений:

$$Z := \begin{pmatrix} Z1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Z2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Z4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Z5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Z6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Z7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Z8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Z9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Z10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Z11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Z12 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16.081+ 7.115i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 26.802+ 11.858i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.408+ 11.021i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.743+ 2.989i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2.988+ 5.124i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3.735+ 6.405i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.739+ 4.697i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.49+ 4.27i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.747+ 1.281i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.38+ 4.658i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.96+ 3.24i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7.47+ 12.81i \end{pmatrix} \text{ Ом.}$$

С помощью функции submatrix(A, ir, jr, ic, jc), которая возвращает матрицу, состоящую из строк с  $i$ -й по  $j$ -ю и столбцов с  $i$ -го по  $j$ -й исходной матрицы A получим матрицы сопротивлений ветвей дерева  $Z_{\alpha\alpha}$

$$Z_{\alpha\alpha} := \text{submatrix}(Z, 1, 10, 1, 10) = \begin{table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;">
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	16.081+7.115i	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	26.802+11.858i	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0.408+11.021i	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	1.743+2.989i	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	2.988+5.124i	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	3.735+6.405i	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	2.739+4.697i	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	2.49+4.27i	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0.747+1.281i	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1.38+4.658i
 \text{ Ом}$$

и матрицу сопротивлений хорд  $Z_{\beta\beta}$

$$Z_{\beta\beta} := \text{submatrix}(Z, 11, 12, 11, 12) = \begin{pmatrix} 0.96+ 3.24i & 0 \\ 0 & 7.47+ 12.81i \end{pmatrix} \text{ Ом.}$$

Первая матрица соединений составлена в п. 3.6.2, а подматрицы для ветвей дерева и хорд получены также с использованием функции `submatrix(A, ir, jr, ic, jc)`

$$M := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$M_{\alpha} := \text{submatrix}(M, 1, 10, 1, 10) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \hline 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 3 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 4 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 5 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 6 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ \hline \end{array};$$

$$M_{\beta} := \text{submatrix}(M, 1, 10, 11, 12) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & 1 & 2 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 0 & 0 \\ \hline 3 & 0 & 0 \\ \hline 4 & 0 & 0 \\ \hline 5 & 0 & 1 \\ \hline 6 & -1 & 0 \\ \hline 7 & 0 & 0 \\ \hline 8 & 0 & -1 \\ \hline 9 & 0 & 0 \\ \hline 10 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}.$$

Аналогично получены матрицы  $N$ ,  $N_{\alpha}$ ,  $N_{\beta}$ :

$$N := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$N\alpha := \text{submatrix}(N, 1, 2, 1, 10) = \begin{array}{c|cccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array};$$

$$N\beta := \text{submatrix}(N, 1, 2, 11, 12) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Рассчитаем матрицу распределения токов в ветвях дерева:

$$Cp := M\alpha^{-1} = \begin{array}{c|cccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \hline 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 10 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{array}.$$

Токи в хордах направленного графа по (3.83)

$$I\beta := (Z\beta\beta + N\alpha \cdot Z\alpha\alpha \cdot N\alpha^T)^{-1} \cdot (-N\alpha \cdot Z\alpha\alpha \cdot Cp \cdot J) = \begin{pmatrix} 356.419 - 124.963i \\ 45.187 - 14.381i \end{pmatrix} A,$$

где **J** – матрица узловых задающих токов:

$$J := \begin{pmatrix} \frac{\overline{S_c} \cdot 1000}{\sqrt{3} \cdot U_b} \\ \frac{\overline{S_d} \cdot 1000}{\sqrt{3} \cdot U_b} \\ 0 \\ \frac{\overline{S_c} \cdot 1000}{\sqrt{3} \cdot U_b} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\overline{S_b} \cdot 1000}{\sqrt{3} \cdot U_b} \\ 0 \\ \frac{\overline{S_a} \cdot 1000}{\sqrt{3} \cdot U_b} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{array}{c|c} & 1 \\ \hline 1 & -20.232+7.895i \\ 2 & -15.297+5.922i \\ 3 & 0 \\ 4 & -204.787+77.967i \\ 5 & 0 \\ 6 & 0 \\ 7 & -171.231+63.163i \\ 8 & 0 \\ 9 & -291.142+110.535i \\ 10 & 0 \end{array} A.$$

Токи в ветвях дерева (3.63):

$$I\alpha := C_p \cdot (J - M\beta \cdot I\beta) =$$

	1
1	20.232-7.895i
2	15.297-5.922i
3	35.529-13.817i
4	204.787-77.967i
5	80.716-28.198i
6	-70.916+18.799i
7	171.231-63.163i
8	126.045-48.782i
9	291.142-110.535i
10	346.271-140.519i

А.

Узловые напряжения по (3.95)

$$U_y := C_p^T \cdot Z_{\alpha\alpha} \cdot I\alpha =$$

	1
1	-1.681·10 <sup>3</sup> -1.767i·10 <sup>3</sup>
2	-1.78·10 <sup>3</sup> -1.773i·10 <sup>3</sup>
3	-1.299·10 <sup>3</sup> -1.75i·10 <sup>3</sup>
4	-1.337·10 <sup>3</sup> -1.511i·10 <sup>3</sup>
5	-1.133·10 <sup>3</sup> -1.364i·10 <sup>3</sup>
6	-747.043-1.035i·10 <sup>3</sup>
7	-2.42·10 <sup>3</sup> -2.467i·10 <sup>3</sup>
8	-1.654·10 <sup>3</sup> -1.836i·10 <sup>3</sup>
9	-1.491·10 <sup>3</sup> -1.709i·10 <sup>3</sup>
10	-1.132·10 <sup>3</sup> -1.419i·10 <sup>3</sup>

В.

Напряжения в узлах схемы определяются как сумма напряжения на балансирующем узле  $U_B=117$  кВ и узловых напряжений:

$$U := U_b + \frac{U_y}{1000} =$$

	1
1	115.319-1.767i
2	115.22-1.773i
3	115.701-1.75i
4	115.663-1.511i
5	115.867-1.364i
6	116.253-1.035i
7	114.58-2.467i
8	115.346-1.836i
9	115.509-1.709i
10	115.868-1.419i

кВ.

### 3.6.4. Расчет параметров установившегося режима методом узловых напряжений

Для схемы на рис. 3.13 выполнить расчет токов в ветвях и напряжений в узлах методом узловых напряжений. Расчеты выполнить в программном пакете MathCad.

В данном методе в качестве независимых переменных используются узловые напряжения, количество которых значительно меньше числа ветвей схемы, поэтому рациональнее используется оперативная память ЭВМ и достигается большая сходимость расчета.

Алгоритм расчета:

1. Расчетным путем получить матрицы проводимостей ветвей:

– для всей схемы по (3.16)

– для дерева:

$$Y_{в.а} = Z_{аа}^{-1}, \quad (3.96)$$

– для хорд:

$$Y_{в.β} = Z_{ββ}^{-1}. \quad (3.97)$$

2. Рассчитать элементы матрицы узловых проводимостей:

$$Y_y = M_a \cdot Y_{в.а} \cdot M_a^T + M_β \cdot Y_{в.β} \cdot M_β^T. \quad (3.96)$$

3. По ней определить матрицу узловых сопротивлений:

$$Z_y = Y_y^{-1}. \quad (3.97)$$

4. Рассчитать матрицу узловых напряжений по (3.86).

5. Определить токи в ветвях схемы по (3.84).

На основе матриц сопротивления для ветвей дерева  $Z_{\alpha\alpha}$  и хорд  $Z_{\beta\beta}$ , рассчитанных в п. 3.6.3, определим матрицу проводимостей ветвей дерева по (3.96)

$$Y_{\alpha} := Z_{\alpha}^{-1} =$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0.052-0.023i	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0.031-0.014i	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0.003-0.091i	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0.146-0.25i	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0.085-0.146i	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0.068-0.117i	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0.093-0.159i	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0.102-0.175i	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0.34-0.583i	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.058-0.197i

См.

матрицу проводимостей для хорд по (3.97)

$$Y_{\beta} := Z_{\beta}^{-1} = \begin{pmatrix} 0.084 - 0.284i & 0 \\ 0 & 0.034 - 0.058i \end{pmatrix} \text{ См.}$$

По (3.96) рассчитаем матрицу узловых проводимостей

$$Y_{\gamma} := M_{\alpha} \cdot Y_{\alpha} \cdot M_{\alpha}^T + M_{\beta} \cdot Y_{\beta} \cdot M_{\beta}^T =$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0.052-0.023i	0	-0.052+0.023i	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0.031-0.014i	-0.031+0.014i	0	0	0	0	0	0	0
3	-0.052+0.023i	-0.031+0.014i	0.087-0.127i	0	-0.003+0.091i	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0.146-0.25i	0	-0.146+0.25i	0	0	0	0
5	0	0	-0.003+0.091i	0	0.122-0.295i	-0.085+0.146i	0	-0.034+0.058i	0	0
6	0	0	0	-0.146+0.25i	-0.085+0.146i	0.383-0.796i	0	0	0	-0.068+0.117i
7	0	0	0	0	0	0	0.093-0.159i	-0.093+0.159i	0	0
8	0	0	0	0	-0.034+0.058i	0	-0.093+0.159i	0.229-0.392i	0	-0.102+0.175i
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0.34-0.583i	-0.34+0.583i
10	0	0	0	0	0	-0.068+0.117i	0	-0.102+0.175i	-0.34+0.583i	0.568-1.071i

См.



По матрице узловых проводимостей определим матрицу узловых сопротивлений в соответствии с (3.97)

$$Z_y := Y_y^{-1} =$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	19.4+24.09i	3.32+16.97i	3.32+16.97i	0.67+2.14i	2.91+5.95i	0.67+2.14i	1.04+2.67i	1.04+2.67i	0.42+1.58i	0.42+1.58i
2	3.32+16.97i	0.12+28.83i	3.32+16.97i	0.67+2.14i	2.91+5.95i	0.67+2.14i	1.04+2.67i	1.04+2.67i	0.42+1.58i	0.42+1.58i
3	3.32+16.97i	3.32+16.97i	3.32+16.97i	0.67+2.14i	2.91+5.95i	0.67+2.14i	1.04+2.67i	1.04+2.67i	0.42+1.58i	0.42+1.58i
4	0.67+2.14i	0.67+2.14i	0.67+2.14i	2.55+5.42i	0.67+2.14i	0.81+2.43i	0.33+1.41i	0.33+1.41i	0.22+1.16i	0.22+1.16i
5	2.91+5.95i	2.91+5.95i	2.91+5.95i	0.67+2.14i	2.91+5.95i	0.67+2.14i	1.04+2.67i	1.04+2.67i	0.42+1.58i	0.42+1.58i
6	0.67+2.14i	0.67+2.14i	0.67+2.14i	0.81+2.43i	0.67+2.14i	0.81+2.43i	0.33+1.41i	0.33+1.41i	0.22+1.16i	0.22+1.16i
7	1.04+2.67i	1.04+2.67i	1.04+2.67i	0.33+1.41i	1.04+2.67i	0.33+1.41i	5.54+10.55i	2.8+5.85i	0.9+2.64i	0.9+2.64i
8	1.04+2.67i	1.04+2.67i	1.04+2.67i	0.33+1.41i	1.04+2.67i	0.33+1.41i	2.8+5.85i	2.8+5.85i	0.9+2.64i	0.9+2.64i
9	0.42+1.58i	0.42+1.58i	0.42+1.58i	0.22+1.16i	0.42+1.58i	0.22+1.16i	0.9+2.64i	0.9+2.64i	1.81+4.27i	1.06+2.99i
10	0.42+1.58i	0.42+1.58i	0.42+1.58i	0.22+1.16i	0.42+1.58i	0.22+1.16i	0.9+2.64i	0.9+2.64i	1.06+2.99i	1.06+2.99i

Ом.

Рассчитаем матрицу узловых напряжений по (3.86)

$$U_y := Z_y \cdot J =$$

	1
1	-1681.006-1767.069i
2	-1779.693-1772.777i
3	-1299.485-1750.088i
4	-1337.03-1511.043i
5	-1132.708-1364.166i
6	-747.043-1034.832i
7	-2420.151-2466.851i
8	-1654.472-1835.582i
9	-1491.4-1709.223i
10	-1132.321-1418.839i

В.

Токи в ветвях схемы по (3.84)

$$I := Z^{-1} \cdot M^T \cdot U_y =$$

	1
1	20.232-7.895i
2	15.297-5.922i
3	35.529-13.817i
4	204.787-77.967i
5	80.716-28.198i
6	-70.916+18.799i
7	171.231-63.163i
8	126.045-48.782i
9	291.142-110.535i
10	346.271-140.519i
11	356.419-124.963i
12	45.187-14.381i

А.

Напряжения в узлах схемы определяются как сумма напряжения на балансирующем узле  $U_B=117$  кВ и узловых напряжений:

$$U := U_b + \frac{U_y}{1000} =$$

	1
1	115.319-1.767i
2	115.22-1.773i
3	115.701-1.75i
4	115.663-1.511i
5	115.867-1.364i
6	116.253-1.035i
7	114.58-2.467i
8	115.346-1.836i
9	115.509-1.709i
10	115.868-1.419i

кВ.

Очевидно, что результаты расчетов совпали с полученными прямым методом. Проверка результатов по I закону Кирхгофа и приведение токов и напряжений в сети НН к напряжению 10 кВ выполнены в п. 3.6.3.

### 3.6.5. Расчет параметров установившегося режима методом контурных токов

Для схемы на рис. 3.13 выполнить расчет токов в ветвях и напряжений в узлах методом узловых напряжений. Расчеты выполнить в программном пакете MathCad.

При использовании метода контурных токов следует придерживаться алгоритма:

1. Определить элементы матрицы контурных сопротивлений  $\dot{\mathbf{Z}}_K$ :

$$\dot{\mathbf{Z}}_K = \mathbf{N} \cdot \dot{\mathbf{Z}} \cdot \mathbf{N}^T. \quad (3.98)$$

2. Рассчитать матрицу контурных проводимостей  $\dot{\mathbf{Y}}_K$

$$\dot{\mathbf{Y}}_K = \dot{\mathbf{Z}}_K^{-1}. \quad (3.99)$$

3. Рассчитать контурные токи (токи в хордах) по (3.94).
4. Определить токи в ветвях

$$\dot{\mathbf{I}} = -\mathbf{N}^T \cdot \dot{\mathbf{I}}_K + \begin{pmatrix} \mathbf{C}_P \\ 0 \end{pmatrix} \dot{\mathbf{J}}. \quad (3.100)$$

5. Рассчитать матрицу  $\dot{\mathbf{U}}_Y$

$$\dot{\mathbf{U}}_Y = \left( \mathbf{M}'^T \right)^{-1} \dot{\mathbf{Z}}_\alpha \cdot \dot{\mathbf{I}}_\alpha. \quad (3.101)$$

Для начала рассчитаем матрицу контурных сопротивлений на основе второй матрицы инцидентий и матрицы сопротивлений ветвей, полученных в п. 3.6.2 и 3.6.1 соответственно

$$\mathbf{Z}_K := \mathbf{N} \cdot \mathbf{Z} \cdot \mathbf{N}^T = \begin{pmatrix} 6.075 + 14.303i & -3.735 - 6.405i \\ -3.735 - 6.405i & 16.683 + 28.609i \end{pmatrix} \text{ Ом.}$$

Тогда, матрица контурных проводимостей

$$\mathbf{Y}_K := \mathbf{Z}_K^{-1} = \begin{pmatrix} 0.027 - 0.067i & 0.006 - 0.015i \\ 0.006 - 0.015i & 0.017 - 0.029i \end{pmatrix} \text{ См.}$$

Определим контурные токи по (3.94)

$$\dot{\mathbf{I}}_K := \mathbf{Y}_K \cdot \mathbf{N}_\alpha \cdot \mathbf{Z}_\alpha \cdot \mathbf{C}_P \cdot \dot{\mathbf{J}} = \begin{pmatrix} -356.419 + 124.963i \\ -45.187 + 14.381i \end{pmatrix} \text{ А.}$$

Тогда токи в ветвях схемы по (3.100)

$$I := -N^T \cdot Ik + \text{stack}(Cp, Zero) \cdot J =$$

	1
1	20.232-7.895i
2	15.297-5.922i
3	35.529-13.817i
4	204.787-77.967i
5	80.716-28.198i
6	-70.916+18.799i
7	171.231-63.163i
8	126.045-48.782i
9	291.142-110.535i
10	346.271-140.519i
11	356.419-124.963i
12	45.187-14.381i

$$A,$$

где

$$Zero := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Cp := M\alpha^{-1} =$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0
3	-1	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0
5	-1	-1	-1	0	-1	0	0	0	0	0
6	-1	-1	-1	-1	-1	-1	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	-1	-1	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0
10	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1

Матрица  $\begin{pmatrix} C_P \\ 0 \end{pmatrix}$  составлена с помощью функции  $\text{stack}(A,B)$ , которая возвращает матрицу состоящую из матриц **A** и **B**, расположенных одна под другой. Рассчитаем матрицу узловых напряжений по (3.101)

$$Uy := Cp^T \cdot Z\alpha \cdot I\alpha =$$

	1
1	-1681.006-1767.069i
2	-1779.693-1772.777i
3	-1299.485-1750.088i
4	-1337.03-1511.043i
5	-1132.708-1364.166i
6	-747.043-1034.832i
7	-2420.151-2466.851i
8	-1654.472-1835.582i
9	-1491.4-1709.223i
10	-1132.321-1418.839i

$$B,$$

где матрица токов в ветвях дерева  $\mathbf{I}_a$  получена с помощью функции `submatrix` (см. п. 3.6.3)

$$\mathbf{I}_a := \text{submatrix}(\mathbf{I}, 1, 10, 1, 1) = \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline 1 & 20.232-7.895i \\ \hline 2 & 15.297-5.922i \\ \hline 3 & 35.529-13.817i \\ \hline 4 & 204.787-77.967i \\ \hline 5 & 80.716-28.198i \\ \hline 6 & -70.916+18.799i \\ \hline 7 & 171.231-63.163i \\ \hline 8 & 126.045-48.782i \\ \hline 9 & 291.142-110.535i \\ \hline 10 & 346.271-140.519i \\ \hline \end{array} \quad \mathbf{A}.$$

Напряжения в узлах схемы определяются как сумма напряжения на балансирующем узле  $U_B=117$  кВ и узловых напряжений:

$$\mathbf{U} := \mathbf{U}_b + \frac{\mathbf{U}_y}{1000} = \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline 1 & 115.319-1.767i \\ \hline 2 & 115.22-1.773i \\ \hline 3 & 115.701-1.75i \\ \hline 4 & 115.663-1.511i \\ \hline 5 & 115.867-1.364i \\ \hline 6 & 116.253-1.035i \\ \hline 7 & 114.58-2.467i \\ \hline 8 & 115.346-1.836i \\ \hline 9 & 115.509-1.709i \\ \hline 10 & 115.868-1.419i \\ \hline \end{array} \quad \text{кВ}.$$

### 3.6.6. Проверка и анализ результатов расчета

Проверку результатов расчета выполним по I закону Крехгофа:  
для 3-го узла

$$\dot{I}_3 - \dot{I}_1 - \dot{I}_2 = (35,529 - j13,817) - (20,232 - j7,895) - (15,297 - j5,922) = -0,091 \text{ A};$$

для 5-го узла

$$\dot{I}_5 - \dot{I}_3 - \dot{I}_{12} = (80,716 - j28,198) - (35,529 - j13,817) - (45,187 - j14,381) = 0 \text{ A};$$

для 6-го узла

$$\begin{aligned} \dot{I}_6 + \dot{I}_{11} - \dot{I}_5 - \dot{I}_4 &= (-70,716 + j18,799) + (356,419 - j124,963) - \\ &- (80,716 - j28,198) - (204,787 - j77,967) = 0,2 + j0,001 \text{ A}; \end{aligned}$$

для 10-го узла

$$\dot{I}_{10} - \dot{I}_6 - \dot{I}_8 - \dot{I}_9 = (346,271 - j140,519) - (-70,716 + j18,799) - \\ - (126,045 - j48,782) - (291,142 - j110,535) = -0,2 - j0,001 \text{ A};$$

для 8-го узла

$$\dot{I}_8 + \dot{I}_{12} - \dot{I}_7 = (126,045 - j48,782) + \\ + (45,187 - j14,381) - (171,231 - j63,163) = 0,001 \text{ A}.$$

Так как ветви 1 и 2, а также узлы 1-3 находятся в сети 10 кВ, то значения токов и напряжений на этих участках необходимо привести к 10 кВ.

Токи в ветвях 1 и 2 (первая и вторая строки матрицы  $\mathbf{I}_a$ ):

$$\dot{I}_1 = \dot{I}'_1 \cdot k_T = (20,232 - j7,895) \cdot 11 = 222,551 - j86,849 \text{ A};$$

$$\dot{I}_2 = \dot{I}'_2 \cdot k_T = (15,297 - j5,922) \cdot 11 = 168,27 - j65,137 \text{ A}.$$

Напряжения в узлах 1-3 (строки 1-3 матрицы  $\mathbf{U}$ ):

$$\dot{U}_1 = \frac{U'_1}{k_T} = \frac{115,319 - j1,767}{11} = 10,484 - j0,161 \text{ кВ};$$

$$\dot{U}_2 = \frac{U'_2}{k_T} = \frac{115,22 - j1,773}{11} = 10,475 - j0,161 \text{ кВ};$$

$$\dot{U}_3 = \frac{U'_3}{k_T} = \frac{115,701 - j1,75}{11} = 10,518 - j0,159 \text{ кВ}.$$

Результаты расчета представим в виде структурной схемы электрической сети, на которую нанесены величины и направления токов в ветвях и значения напряжений в узлах.

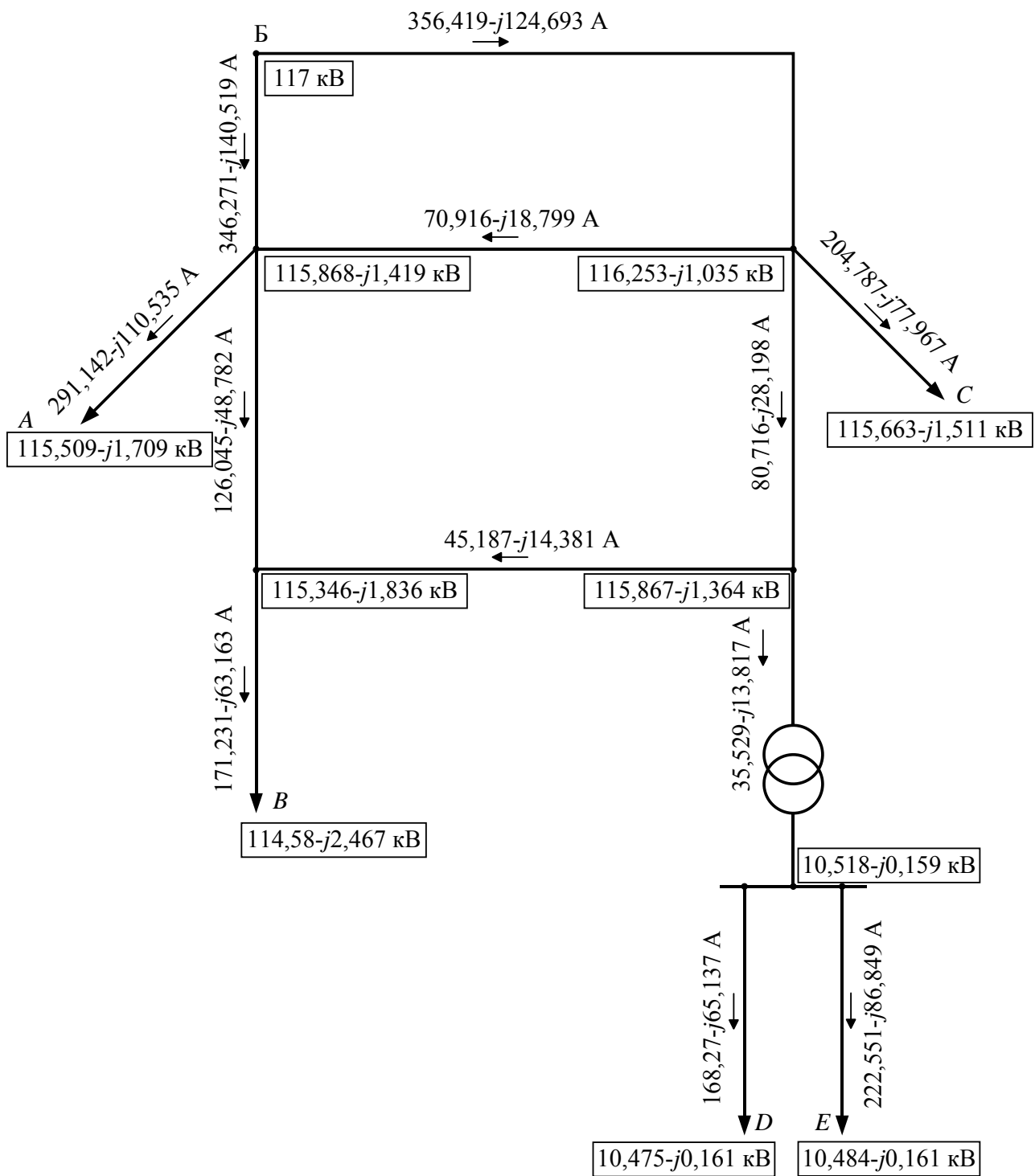


Рис. 3.17. Токораспределение и напряжения в узлах сложнзамкнутой сети

### 3.6.7. Расчет параметров установившегося режима в программном комплексе КАТРАН

Программный комплекс КАТРАН разработан на кафедре ЭПП МГТУ им. Г.И. Носова и предназначен для решения широкого круга задач, связанных с расчетом и анализом нормальных и аварийных режимов работы сложных систем электроснабжения.

Для запуска программы необходимо открыть файл Mdiapp.exe. В результате появится главное окно программы, внешний вид которого представлен на рис. 3.18.

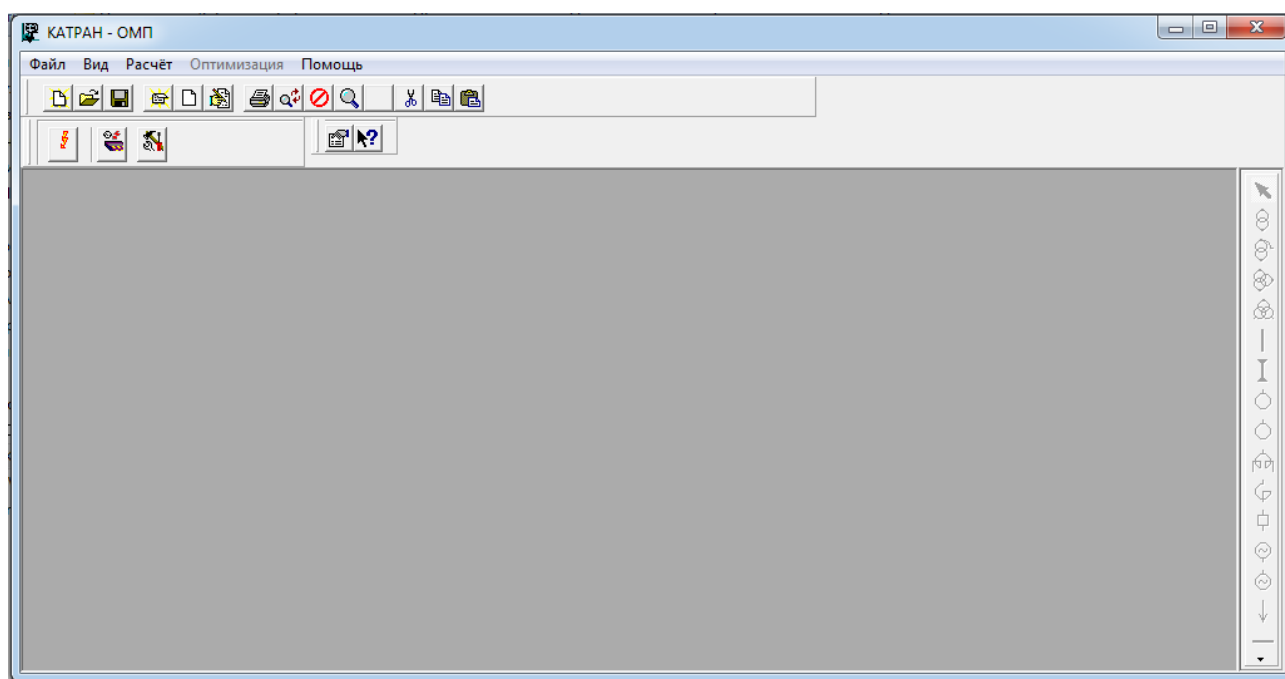


Рис. 3.18. Главное окно программы КАТРАН

В программе КАТРАН расчетная схема представляет собой проект, состоящий из множества связанных между собой листов, на которых можно вычертить отдельные схемы. Такой подход позволяет с достаточной детализацией представить, например, схему из нескольких связанных между собой подстанций и электростанций. Для создания новой схемы необходимо нажать кнопку «Создать проект», которая вызывает диалоговое окно, позволяющее ввести имя проекта (рис. 3.19). Рекомендуется, при выполнении курсовой работы, задать имя проекта в соответствии с фамилией студента её выполняющего.

После нажатия кнопки ОК вид главного окна изменится. На нем появится выпадающий список с надписью «Нет схем в проекте» (рис. 3.20). Пока схемы в проект не добавлены этот элемент будет недоступен.



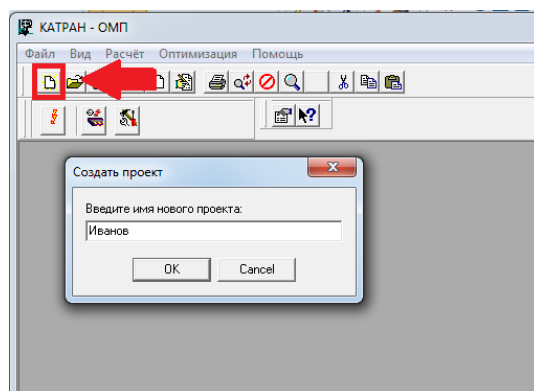


Рис. 3.19. Создание нового проекта

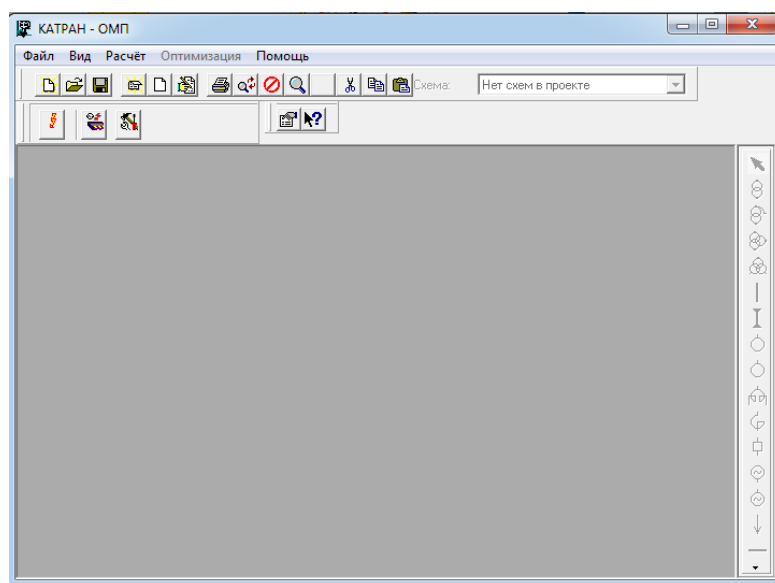


Рис. 3.20

Для добавления схемы необходимо нажать кнопку «Новая схема» на панели инструментов (рис. 3.21). При этом появляется диалоговое окно для ввода названия схемы. В курсовой работе название схемы должно соответствовать номеру варианта.

После этого проект и схему необходимо сохранить. Для этого нажмите кнопку «Сохранить» на панели инструментов. В появившемся диалоговом окне создайте новую папку и в ней сохраните сначала файл проекта (рис. 3.22, а), а затем файл схемы (рис. 3.22, б).

В результате в папке должно получиться два файла: файл проекта с расширением \*.спр и файл схемы с расширением \*.смс. **Обратите внимание**, что изменить название схемы либо проекта после их создания нельзя. Если сделать это вручную через проводник, то при открытии схемы будет возникать ошибка и данные будут потеряны.

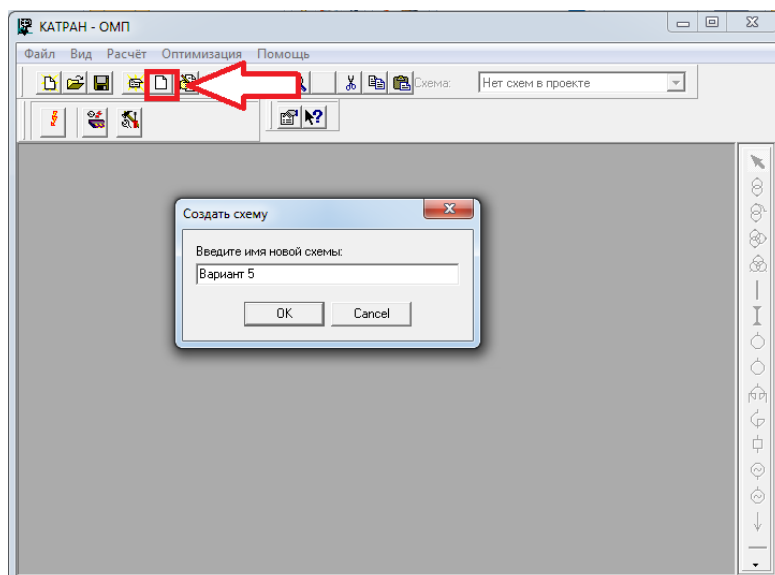
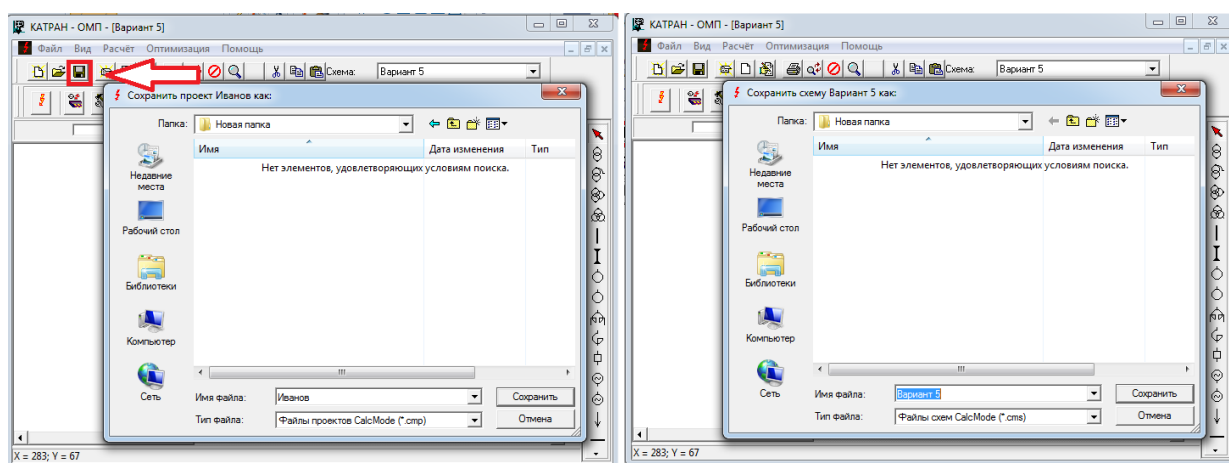


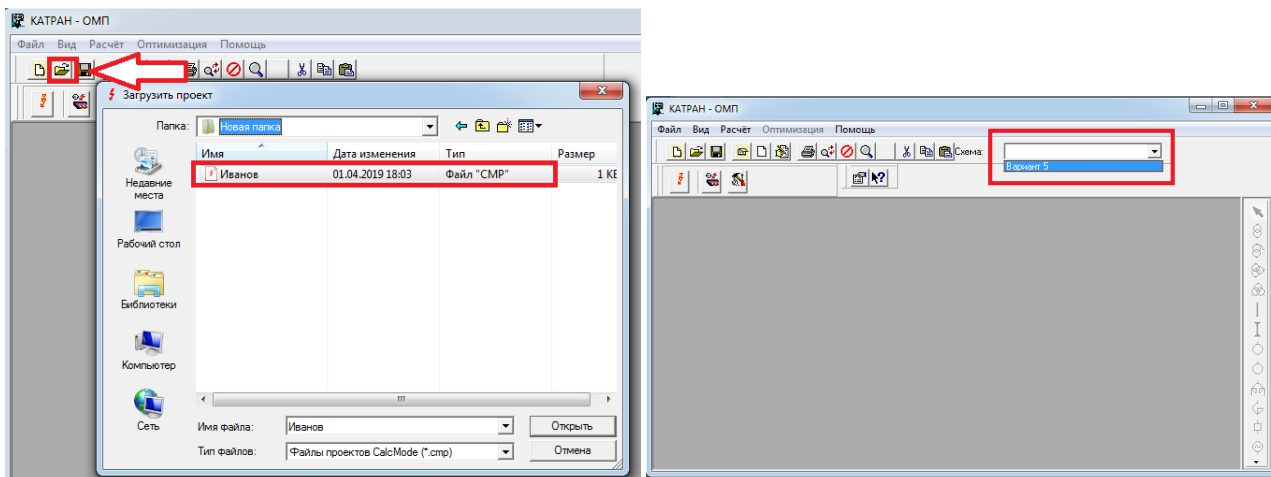
Рис. 3.21. Добавление новой схемы в проект



а б  
Рис. 3.22. Сохранение проекта (а) и схемы (б)

Если требуется закрыть программу и продолжить работу со схемой позднее, то для ее повторного открытия необходимо снова запустить файл программы Mdiapp.exe. Затем нажать кнопку на панели инструментов «Открыть» (см. рис. 3.23) и в появившемся диалоговом окне выбрать файл проекта (рис. 3.23, а). Далее из выпадающего списка на панели инструментов главного окна программы выбрать схему (рис. 3.23, б).

Для добавления новых элементов на схему в правой части главного окна предусмотрена панель инструментов. Необходимо выбрать на ней требуемый элемент и нажатием левой кнопки мыши в произвольной точке рабочей области окна поместить его на лист.



а б  
Рис. 3.23. Открытие проекта (а) и схемы (б)

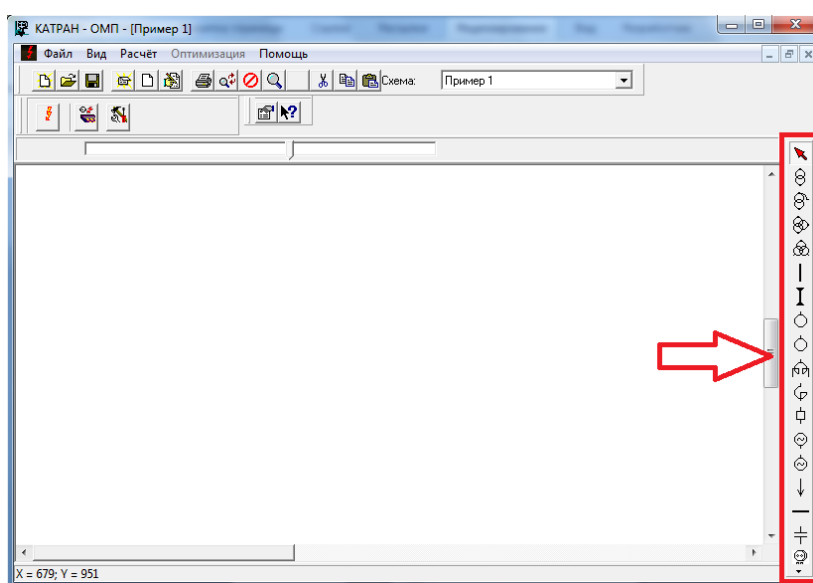


Рис. 3.24. Добавление элементов в схему

После добавления нужных элементов на схему и их соединения между собой, необходимо ввести их номинальные параметры. Для этого необходимо выделить нужный элемент (левой кнопкой мыши) и нажатием на нем правой кнопки мыши вызвать контекстное меню и выбрать пункт «Свойства» (см. рис. 3.25)

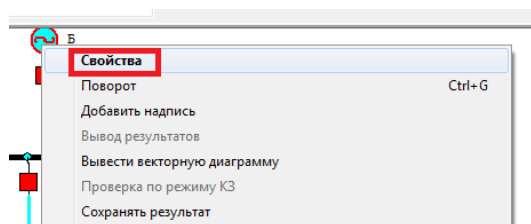


Рис. 3.25. Открытие диалогового окна, для ввода параметров элемента

После этого появится диалоговое окно «Характеристики выбранного элемента», внешний вид которого будет зависеть от типа элемента.

Для балансирующего узла (элемент «Энергосистема») необходимо ввести номинальное напряжение в кВ (рис. 3.26).

Характеристики выбранного элемента	
Элемент: Энергосистема	
Uном, кВ	117
X1, Ом	0
U реактив	0
Стоимость, коп/кВт*ч	0
R2, Ом	0
X2, Ом	0
R0, Ом	0
X0, Ом	0
R1, Ом	0

Рис. 3.26. Свойства элемента «Энергосистема»

Для воздушной ЛЭП (рис. 3.27) необходимо ввести номинальное напряжение ( $U_{ном}$ , кВ), удельные активное и реактивное сопротивление ( $r_0$  и  $x_0$ , Ом/км), длину линии в км и число цепей.

Характеристики выбранного элемента	
Элемент: Линия воздушная	
Тип	
Uном, кВ	110
$r_0$ , Ом/км	0,12
$x_0$ , Ом/км	0,405
Длина, км	16
Радиус, см	0
$b_0$ , См/км	0
Емкостной ток, А/км	0
Межремонтный период, лет	0
Время работы, лет	0
Кол-во грозозаш. троп	0
Сред. геом. расст., см	0
Давление, мм рт.ст.	0
Температура возд., град	0
Кэф. негладкости	P16
Кэф. ненастности	P17
Время восстановления, мин	0
Пар. потока отказов, 1/год	0
Кол-во цепей на опоре	2
инт. отказов. выкл., 1/год	P21
Твосст, лет	P22

Рис. 3.27. Свойства элемента «Линия воздушная»

Для кабельных ЛЭП нужно ввести номинальное напряжение ( $U_{ном}$ , кВ), удельные активное и реактивное сопротивление ( $r_0$  и  $x_0$ , Ом/км), длину линии в км, удельную емкостную проводимость ( $b_0$ , См/км), число ниток и число жил в одной нитке.

Характеристики выбранного элемента

Элемент: Линия кабельная

Тип:

tg delta:

Uном, кВ	<input type="text" value="10"/>	Кол-во ниток	<input type="text" value="1"/>
r0, Ом/км	<input type="text" value="0,443"/>	Емкостной ток, А/км	<input type="text" value="0"/>
x0, Ом/км	<input type="text" value="0,196"/>	Зарядный ток, А/км	<input type="text" value="0"/>
Длина, км	<input type="text" value="0,5"/>	Инт.отк.выкл.,1/год	<input type="text" value="P17"/>
Идоп, А	<input type="text" value="P7"/>	Т восст.,лет	<input type="text" value="P18"/>
b0, См/км	<input type="text" value="2,9E-6"/>		
Пар. потока отказов	<input type="text" value="0"/>		
Время восстановлен	<input type="text" value="0"/>		
Межремонтный пери	<input type="text" value="0"/>		
Время работы, лет	<input type="text" value="0"/>		

Схема соединения:

Рис. 3.28. Свойства элемента «Линия кабельная»

Для силовых трансформаторов (см. рис. 3.29) нужно ввести номинальные напряжения всех обмоток ( $U_{\text{ном.вн}}$ ,  $U_{\text{ном.нн}}$ , кВ), потери холостого хода и короткого замыкания ( $P_{\text{хх}}$ ,  $P_{\text{кз}}$ , кВт), ток холостого хода ( $I_{\text{хх}}$ , %), напряжение короткого замыкания для двухобмоточных трансформаторов –  $U_{\text{к}}$ , %, для двухобмоточных трансформаторов с расщепленной обмоткой низшего напряжения –  $U_{\text{к.вн-нн||нн}}$ ,  $U_{\text{к.нн-нн}}$ , %, для трехобмоточных трансформаторов и автотрансформаторов –  $U_{\text{к.в-с}}$ ,  $U_{\text{к.с-н}}$ ,  $U_{\text{к.в-н}}$ , %, схему соединения обмоток с учетом режима заземления нейтрали и параметры РПН (выбрать на какой обмотке установлено и задать количество отпаяк и напряжение отпайки в процентах).

Характеристики выбранного элемента

Элемент: Трансформатор с расщепленными обмотками

Тип: [выпадающий список]

Сном, кВА	63000	Рк, кВт	245
Uвн, кВ	115	Uквн-нн, %	10,5
Uнн, кВ	10,5	Uкнн-нн, %	30
Рхх, кВт	50	Кэф.расщепления	2,8571428571428
Iхх, %	0,5	Схема соединения	Р17
		Пар. потока отказов, 1/г.	0
		Время восст-я, лет	0
		Межремонтный период	0
		Время работы, лет	0
		R в нейтрали, Ом	0
		Инт.отк.выкл.,1/г.	0

T восст.,лет: 0

Схема соединения: [У] [Д]

Регулирование напряжения трансформатора

Сторона ВН    Кольво отпаяк: 9    U отпайки: 1,77 %

Данные ДГК...

Рис. 3.29. Свойства элемента «Трансформатор силовой с расщепленной обмоткой»

Для узлов нагрузки (элемент «Обобщенная нагрузка») необходимо ввести активную и реактивную мощность нагрузки и напряжение. Пример заполнения свойств данного элемента показан на рис. 3.30.

Характеристики выбранного элемента

Элемент: Обобщенная нагрузка

P, МВт	31
Q, МВар	1,2
U, кВ	10,455
Кэф.ф.рег.эфф.(U,P)	0
Кэф.ф.рег.эфф.(U,Q)	0

Рис. 3.30. Свойства элемента «Обобщенная нагрузка»

Узлы на схеме моделируются элементами «Шина» (см. рис. 3.31, а), к которому можно присоединить произвольное число элементов (см. рис. 3.31, б).

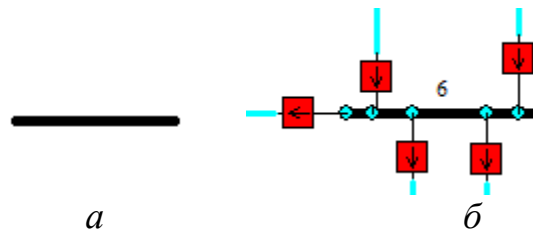


Рис. 3.31. Элемент «Шина» (а) с подключенными к нему выключателями (б)

Для изменения состояния схемы, а также для вывода результатов используются выключатели. Оперативное положение выключателя изменяется двойным нажатием по нему левой кнопкой мыши.

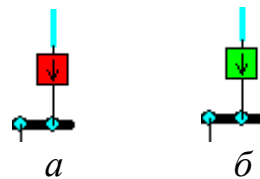


Рис. 3.32. Элемент «Выключатель» в положении включено (а) и отключено (б)

После создания схемы и заполнения свойств всех элементов можно выполнить расчет режима. Для этого на приборной панели нужно нажать кнопку «Расчет» (см. рис. 3.33) либо выбрать пункт меню Расчет / Выполнить. Также расчет запускается нажатием кнопки F5.

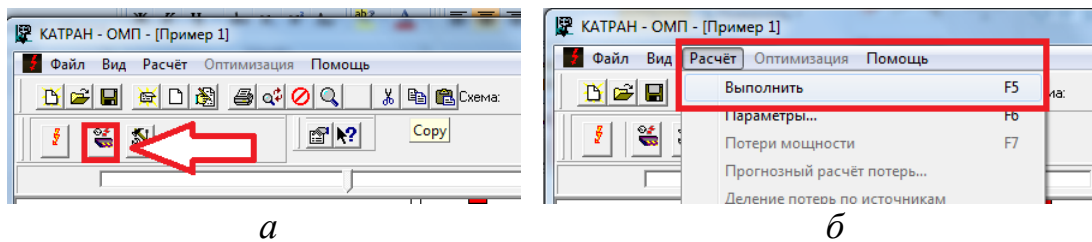


Рис. 3.33. Запуска расчета режима с панели инструментов (а) и через меню (б)

Результаты расчета параметров режима в программе КАТРАН выводятся на выключателях. Для их просмотра необходимо выделить нужный выключатель нажатием левой кнопки мыши и вызвать на нем контекстное меню правой кнопкой мыши. В появившемся контекстном меню выбрать пункт «Вывод результатов» (см. рис. 3.34, а). В появившемся диалоговом окне «Установите параметры вывода» можно выбрать те параметры, которые будут выводиться на данном выключателе.

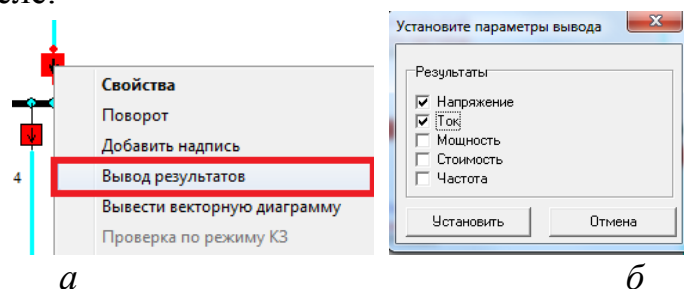


Рис. 3.34. Вывод результатов расчета (а) и выбор выводимых параметров (б)

Для сохранения схемы с результатами расчета в виде рисунка нужно выбрать на панели инструментов кнопку «Сохранить рисунок» (см. рис. 3.35).

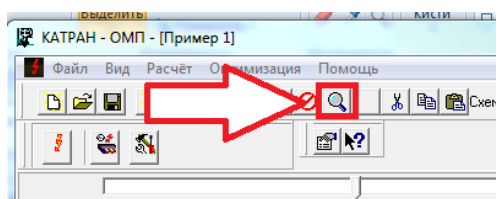


Рис. 3.35. Сохранение схемы как рисунка

В ПВК КАТРАН была смоделирована схема, приведенная на рис. 3.13. Параметры элементов соответствуют табл. 3.2 и 3.3.

На рис. 3.36 представлена схемы с результатами расчета параметров режима, а в табл. 3.3 и 3.4 сравнение результатов расчета токов и напряжений с теми, которые были получены прямым методом (п. 3.6.3), а также методами узловых напряжений (п. 3.6.4) и контурных токов (п. 3.6.5).

Таблица 3.4

Сравнение токов, рассчитанных матричными методами и в ПВК КАТРАН

№ ветви	Матричные методы расчета			Результаты расчета в КАТРАН			$\Delta$ , А	$\Delta$ , %
	$Re(I)$ , А	$Im(I)$ , А	$Abs(I)$ , А	$Re(I)$ , А	$Im(I)$ , А	$Abs(I)$ , А		
1	222,6	-86,849	238,9	222,4	-93,6	241,29	2,351	1,0
2	168,3	-65,1	180,5	168,4	-70,4	182,52	2,071	1,1
3	35,5	-13,8	38,1	36,2	-15	39,18	1,097	2,9
4	204,8	-78	219,2	204,8	-83,3	221,09	1,942	0,9
5	80,7	-28,2	85,5	80,7	-31,1	86,49	1,000	1,2
6	-70,9	18,8	73,4	-70,8	21,2	73,91	0,556	0,8
7	171,2	63,1	182,5	168,6	-69,4	182,32	0,134	0,1
8	126	-48,8	135,1	124,1	-53,4	135,10	0,019	0,0
9	291,1	-110,5	311,4	291,6	-119,3	315,06	3,693	1,2
10	346,3	140,5	373,7	345	-151,4	376,76	3,042	0,8
11	356,4	-125	377,7	356,2	-135,6	381,14	3,453	0,9
12	45,2	-14,4	47,4	-44,5	16	47,29	0,149	0,3



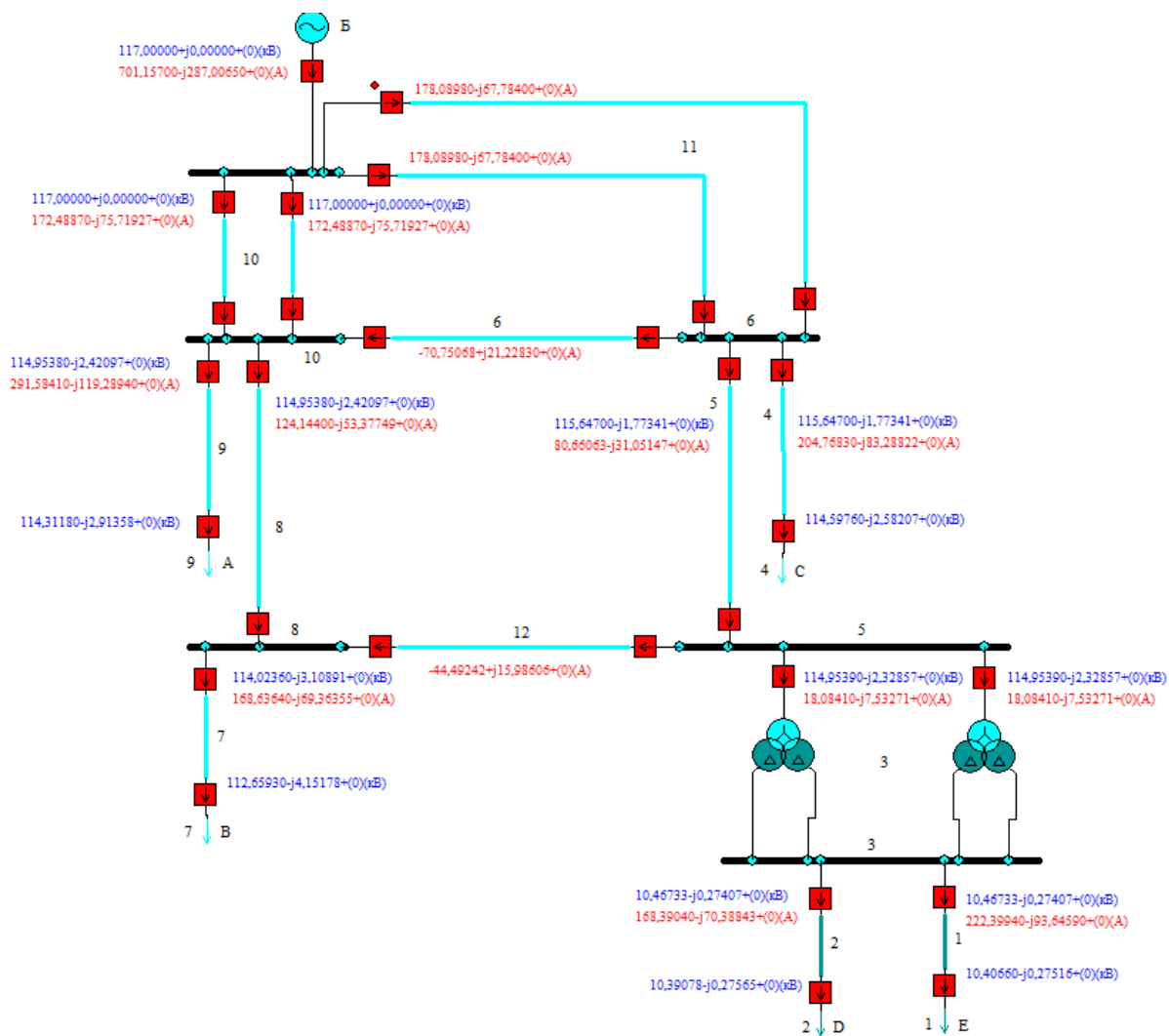


Рис. 3.36. Токи в ветвях и напряжения в узлах схемы

Таблица 3.5

Сравнение напряжений, рассчитанных матричными методами и в КАТРАН

№ узла	Матричные методы расчета			Результаты расчета в КАТРАН			Δ, кВ	Δ, %
	Re(U), кВ	Im(U), кВ	Abs(U), кВ	Re(U), кВ	Im(U), кВ	Abs(U), кВ		
1	10,5	-0,2	10,5	10,4	-0,3	10,40	0,098	0,9
2	10,5	-0,2	10,5	10,4	-0,3	10,40	0,098	0,9
3	10,5	-0,2	10,5	10,5	-0,3	10,50	0,002	0,0
4	115,7	-1,5	115,7	114,6	-2,6	114,63	1,080	0,9
5	115,9	-1,4	115,9	115	-2,3	115,02	0,885	0,8
6	116,3	-1,4	116,3	115,6	-1,8	115,61	0,694	0,6
7	114,6	-2,5	114,6	112,7	-4,2	112,78	1,849	1,6
8	115,3	-1,8	115,3	114	-3,1	114,04	1,272	1,1
9	115,5	-1,7	115,5	114,3	-2,9	114,34	1,176	1,0
10	115,9	-1,4	115,9	115	-2,4	115,03	0,883	0,8

#### 4. МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ И АНАЛИЗА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ И УСТОЙЧИВОСТИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Параметры электрических систем, внешние условия, в которых они работают, не бывают постоянными во времени. Изменение их во времени приводит к возникновению в эксплуатируемых электрических системах переходных процессов.

Поэтому для полной оценки работоспособности системы и установления качества работы ее в реальных условиях инженеру приходится изучать свойства переходных процессов, разрабатывать специальные мероприятия и устройства, обеспечивающие лучшие свойства переходных процессов.

Состояние автоматически регулируемых электрических систем в режиме переходных процессов может быть описано системой обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n a_{1j} \frac{d^2 x_j}{dt^2} + \sum_{j=1}^n b_{1j} \frac{d x_j}{dt} + \sum_{j=1}^n c_{1j} x_j = F_1(t) \\ \dots\dots\dots \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{d^2 x_j}{dt^2} + \sum_{j=1}^n b_{ij} \frac{d x_j}{dt} + \sum_{j=1}^n c_{ij} x_j = F_i(t) \\ \dots\dots\dots \\ \sum_{j=1}^n a_{nj} \frac{d^2 x_j}{dt^2} + \sum_{j=1}^n b_{nj} \frac{d x_j}{dt} + \sum_{j=1}^n c_{nj} x_j = F_n(t) \end{array} \right\}, \quad (4.1)$$

где  $a_{i,j}, a_{i,j}, a_{i,j}$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ) — постоянные коэффициенты, зависящие от параметров электрической системы;

$x_1, x_2, \dots, x_n$  — переменные, характеризующие состояние системы в любой момент времени;

$F_1(t), F_2(t), \dots, F_n(t)$  — внешние возмущающие воздействия, переменные во времени, отражающие изменения внешних условий работы системы.

Здесь предполагается линейность дифференциальных уравнений. В действительности дифференциальные уравнения, описывающие переходные процессы, нелинейны, т.к. параметры системы зависят от переменных  $x_j$ . Поэтому с целью снижения трудоемкости расчётов стремятся свести нелинейную систему уравнений к линейной с постоянными коэффициентами. Это возможно при введении следующих предположений-допущений:

1. Возмущающие воздействия  $F_i(t)$  изменяются во времени незначительно:

$$F_i(t) = F_i(0) + f_i(t),$$

где  $F_i(0)$  — возмущающее воздействие в установившемся режиме;

$f_i(t)$  — пренебрежимо малое возмущающее воздействие.

При  $F_i(t) = F_i(0)$  система (4.1) имеет решение вида:

$$\sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} = F_i(0)$$

т.е. соответствует состоянию равновесия.

2. Рассматриваются лишь такие изменения  $x_i(t)$ , при которых величины  $|x_i(t) - x_i(0)|$  очень малы. При необходимости для соблюдения этого положения приходится сокращать промежуток времени, на котором система рассматривается как линейная.

При указанных предположениях система дифференциальных уравнений (4.1) преобразуется к виду:

$$\sum_{j=1}^n \left( a_{ij} \frac{d^2 x_j}{dt^2} + b_{ij} \frac{dx_j}{dt} + c_{ij} x_{ij} \right) = f_i(t) \quad (4.2)$$

Изучение свойств переходных процессов на основе системы (4.2) сводится к следующему. Каждому набору функций  $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$  и набору начальных условий  $X_1(0) = X_{10}, X_2(0) = X_{20}, \dots, X_n(0) = X_{n0}$ , будет соответствовать решению системы (4.2) —  $X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)$ . Это решение и будет представлять собой переходный процесс во времени.

Возможны два решения поставленной задачи:

а) получение  $X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)$  при заданных начальных условиях и  $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$  в виде аналитических формул или набора значений этих функций через равностоящие промежутки времени;

б) получение суждения о свойствах процесса без попытки отыскать само решение.

Второй подход, очень удобный и наименее трудоёмкий, является наиболее подходящим для выявления работоспособности электрической системы.

#### 4.1. Определение устойчивости состояния равновесия

В общем случае устойчивость — это способность системы возвращаться в исходное или близкое к исходному положению после малого возмущения. При математической оценке устойчивости имеется в виду более строгое положение:

На промежутке времени  $(-\infty < t \leq t_0)$  возмущающие силы  $f_i(t)$  вызывают отклонение системы от состояния равновесия  $X_i(t_0) \neq 0$ . В момент времени  $t = t_0$  действие возмущающих сил прекращается [ $f_i(t) \equiv 0(t > t_0)$ ] и далее имеет место переходный процесс, обусловленный начальными возмущениями. Переходный процесс при этом соответствует решению системы уравнений:

$$\sum_{j=1}^n \left( a_{ij} \frac{d^2 x_j}{dt^2} + b_{ij} \frac{dx_j}{dt} + c_{ij} x_{ij} \right) = 0; \quad (4.3)$$

с начальными условиями, приобретёнными в силу действия возмущающих сил до  $(t < t_0)$ .

Положение равновесия системы (4.3) называется устойчивым, если для любого  $\varepsilon > 0$  можно найти такое  $\delta > 0$ , что все решения системы с начальными условиями  $|X_{i0}| < \delta$  для  $t > t_0$  будут удовлетворять условию  $|X_{i0}| < \varepsilon$ .

Положение равновесия называется **асимптотически устойчивым**, если оно устойчиво и решение, кроме того, удовлетворяет условию

$$\lim_{t \rightarrow \infty} X_i(t) = 0,$$

т.е. возмущенное движение в бесконечности приближается к состоянию равновесия.

Свойство, противоположное устойчивости, называется неустойчивостью.

Таким образом, устойчивость состояния равновесия является необходимым условием работоспособности системы. В противном случае малые начальные отклонения, которые всегда имеют место в реальных условиях, будут вызывать нарастающие со временем отклонения и, как следствие, недопустимое изменение работы системы.

Устойчивость или неустойчивость состояния равновесия являются чисто **качественной** характеристикой решений системы уравнений. Однако инженеру важно знать и **количественные** характеристики качества переходных процессов, которые позволяют сравнивать различные устойчивые системы между собой. Для этого необходимо решение системы дифференциальных уравнений переходного процесса.

Решение линейных дифференциальных уравнений возможно различными методами, известными из курса высшей математики. Так применив операционный метод решения, получим:

$$X_i(p) = \sum_{j=1}^n \frac{D_{ji}(p)\psi_j(p)}{D(p)}, \quad (4.4)$$

где  $D(p)$  — главный определитель системы уравнений;

$D_{ji}(p)$  — алгебраическое дополнение элемента, стоящего на  $j$ -й строке в  $i$ -м столбце главного определителя;

$\frac{D_{ji}(p)}{D(p)}$  — операторный коэффициент или передаточная функция системы от воздействия  $f_i$  к переменной  $X_{ij}$ ;

$p_1, p_2, \dots, p_m$  — корни характеристического уравнения  $D(p) = 0$ ;

$X_i(p)$  — изображение функции  $X_i(t)$ .

Сам оригинал  $X_i(t)$  можно записать как:

$$X_i(t) = \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{D_{ij}(p_k)\psi_j(p_k)}{D'(p_k)} e^{p_k t}. \quad (4.5)$$

Из этого выражения видно, что поведение решения во времени определяется корнями характеристического уравнения  $p_k$ .

Нахождение корней характеристического уравнения при построении переходного процесса во времени для систем высокого порядка представляет очень трудоёмкую задачу. Поэтому вместо полного изучения переходного процесса ограничиваются изучением устойчивости и оценкой переходного процесса с помощью прикладных методов, не требующих вычисления корней характеристического уравнения. В общем случае для этой цели могут быть использованы следующие критерии:

1. Состояние равновесия системы будет асимптотически устойчивым, если все корни характеристического уравнения имеют отрицательные вещественные части.

2. Положение равновесия будет неустойчивым, если хотя бы один корень характеристического уравнения имеет положительную вещественную часть.

## 4.2. Передаточные функции типовых звеньев и систем

При изучении устойчивости и качества переходных процессов в электрических системах первоочередной задачей является составление математической модели — системы дифференциальных уравнений, описывающих переходные процессы. Основой для составления дифференциальных уравнений является знание физических закономерностей протекания процессов в различных элементах системы. Однако таких элементов в системе может быть очень много и связь между ними может быть самой различной. Поэтому здесь используют структурное изображение системы, которое схематически показывает различные её элементы (звенья) и связь между ними.

Такое изображение системы, где в отличие от схемы замещения внимание обращено на взаимную связь элементов, а не на их содержание, называется **структурной схемой системы**. Структурная схема может быть **разомкнутой**, если цепь прохождения сигналов разомкнута, т.е. выходная величина не связана с входной (иначе говоря, отсутствует обратная связь) и **замкнутой**, если подобная обратная связь существует. Структурные схемы регулируемых электрических систем всегда замкнуты.

Элементы электрических систем имеют самую разнообразную природу, различные схемы и конструкции. Однако это многообразие может быть сведено к простой структурной схеме, состоящей из типовых звеньев.

**Типовым звеном** могут быть представлены звенья, имеющие различные физические принципы действия, но одинаковые дифференциальные уравнения и передаточные функции.

**Передаточной функцией звена** называется отношение изображения выходного сигнала к изображению входного сигнала звена. Каждому типовому звену соответствует определённая передаточная функция  $W(p)$ .

Кроме того, каждое типовое звено имеет **переходную функцию**  $h(t)$ , которая характеризует реакцию звена на единичный скачок входного сигнала:

$$X_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \geq 0 \\ 0 & \text{при } t < 0 \end{cases}.$$

Рассмотрим типовые звенья и их передаточные функции, применяемые в моделировании электрических систем.

1. **Безынерционное (усилительное) звено** является самым простым звеном, выходная величина которого прямо пропорциональна входной:

$$X_2 = K \cdot X_1, \quad (4.6)$$

где  $K$  — коэффициент усиления.

Соответственно, переходная функция такого звена будет равна  $h(t) = K$  (рис. 4.1), а передаточная функция звена  $W(p) = K$ . Примеры электрических схем такого звена показаны на рис. 4.2.

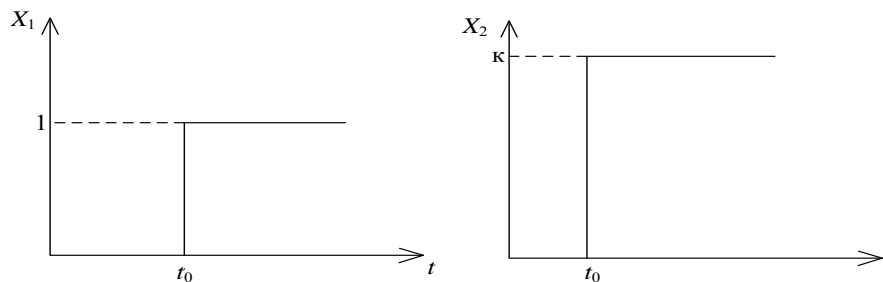


Рис. 4.1. Переходная функция безынерционного звена

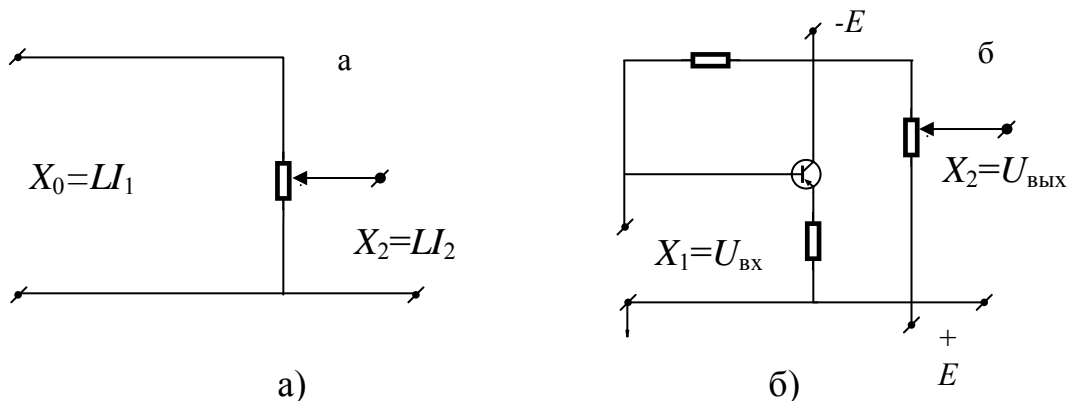


Рис. 4.2. Схемы делителя напряжения (а) и усилителя постоянного тока (б)

2. **Инерционное (апериодическое) звено** — самое распространённое звено в реальных системах. Оно описывается дифференциальным уравнением:

$$X_2 + T \frac{dX_2}{dt} = KX_1, \quad (4.7)$$

где  $K$  — коэффициент усиления;  
 $T$  — постоянная времени.

Переходная функция звена показана на рис. 4.3, а ее формула имеет вид:

$$h(t) = K(1 - e^{-\frac{t}{T}}). \quad (4.8)$$

Передаточная функция звена: 
$$W(p) = \frac{K}{1 + pT}, \quad (4.9)$$

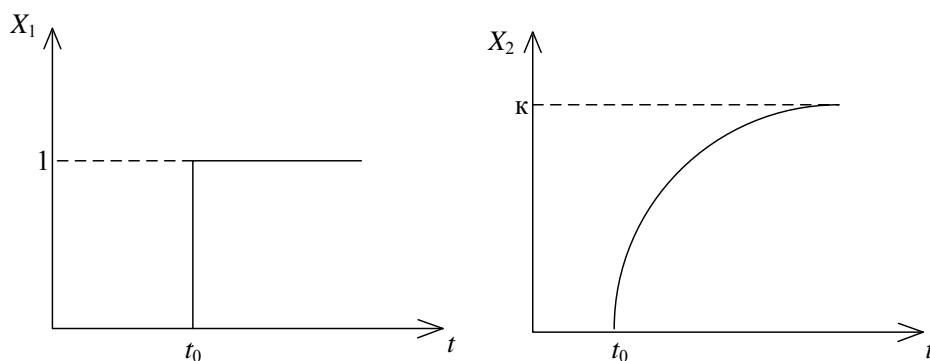


Рис. 4.3. Переходная функция инерционного звена

При  $t \rightarrow \infty$  значение  $h(t)$  асимптотически приближается к значению  $K$ . В установившемся режиме инерционное звено имеет те же параметры, что и усилительное звено.

Примеры схемной реализации этого звена приведены на рис. 4.4.

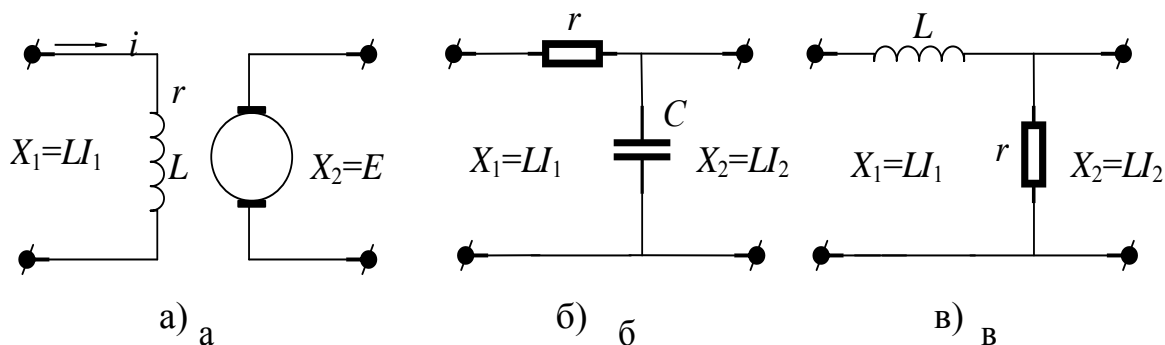


Рис. 4.4. Схема генератора постоянного тока (а) и четырёхполюсники (б,в)

3. Дифференцирующее звено определяется диф.уравнением:

$$X_2 + T \frac{dX_2}{dt} = K \frac{dX_1}{dt} \quad (4.10)$$

Переходная функция  $h(t) = \frac{K}{T} e^{-\frac{1}{T}t}$  представляет собой убывающую экспоненту. Установившееся значение выходной величины равно нулю (рис. 4.5).

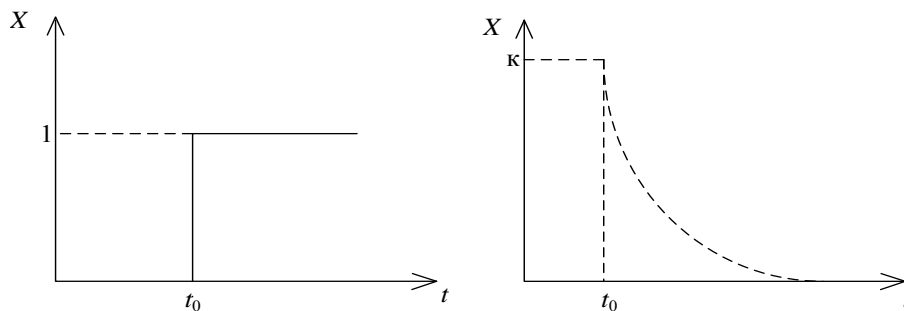


Рис. 4.5. Переходная функция дифференциального звена

Передаточная функция имеет вид:  $W(p) = \frac{K \cdot p}{1 + pT}$ , (4.11)

Дифференцирующее звено с постоянной времени  $T \ll 1$  имеет передаточную функцию  $W(p) = K \cdot p$  и называется **идеальным дифференцирующим звеном**.

На рис. 4.6 приведены примеры дифференцирующего звена.

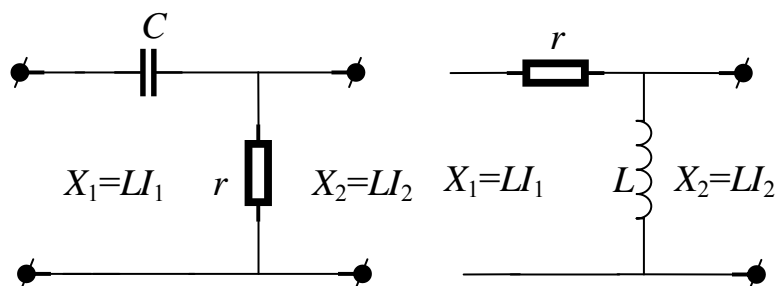


Рис. 4.6. Четырехполюсники - дифференцирующие звенья

4. **Интегрирующее звено** определяется уравнением:

$$X_2 = \frac{1}{T} \int_0^t X_1 dt \quad (4.12)$$

Передаточная функция  $W(p) = \frac{1}{pT}$ , переходная функция  $X_2 = \frac{1}{T} X_1$ , т.е. установившееся значение  $X_2$  растёт пропорционально времени (рис.4.7).

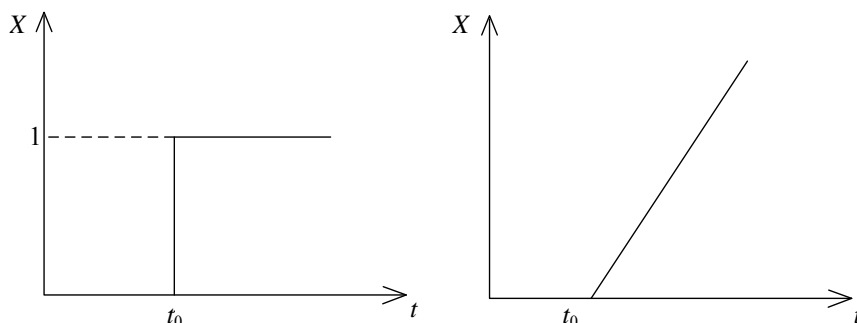


Рис. 4.7. Переходная функция интегрирующего звена

Примеры реализации этого звена приведены на рис. 4.8.

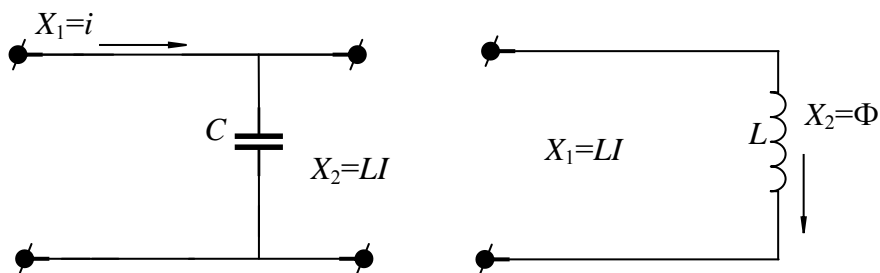


Рис. 4.8. Электрические цепи с емкостью (а) и индуктивностью (б)



5. Колебательное звено определяется уравнением:

$$p^2 X_2 + 2\beta \cdot pX_2 + \omega_0^2 X_2 = KX_1 \quad (4.13)$$

передаточная функция:

$$W(p) = \frac{K}{p^2 + 2\beta \cdot p + \omega_0^2}, \quad (4.14)$$

переходная функция (рис 4.9):

$$h(t) = \frac{K}{\omega_0^2} \left[ 1 - e^{-\beta t} \left( \cos \omega t + \frac{\beta}{\omega} \sin \omega t \right) \right], \quad (4.15)$$

где  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ .

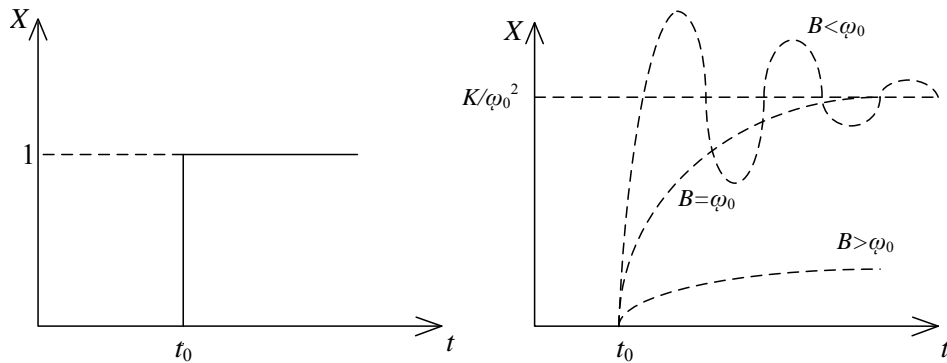


Рис. 4.9. Переходная функция колебательного звена

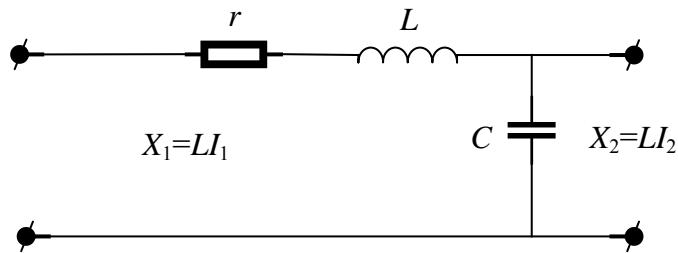


Рис. 4.10. Колебательный контур

6. Звено чистого запаздывания определяется уравнением:

$$X_2(t) = X_1(t - \tau)$$

Передаточная функция:  $W(p) = e^{-p\tau}$ , переходная функция  $h(t) = (t - \tau)$  (рис. 4.11).

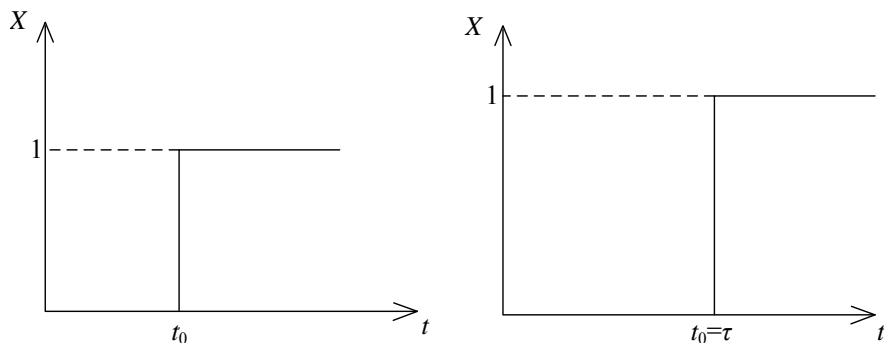


Рис. 4.11. Переходная функция запаздывающего звена

Примерами запаздывающего звена могут служить механический люфт, дрейф нуля в усилителях постоянного тока и т.д.

*Пример 6.1.* Вывести передаточную функцию для схемы на рис. 4.12, считая входным воздействием приложенное напряжение  $u$ , а выходным — ток в цепи  $i$ .

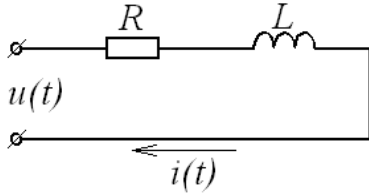


Рис. 4.12

Процессы в схеме описываются уравнением:

$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt} + R i(t).$$

От функции переменной времени перейдем к операторным изображениям по Лапласу:

$$U(p) = L p I(p) + R I(p) = I(p)(Lp + R).$$

Составим передаточную функцию, как отношение изображения выходной величины к изображению входной величины. При этом передаточные функции принято записывать в такой форме, чтобы свободные члены полиномов от  $p$  равнялись бы единице:

$$W(p) = \frac{I(p)}{U(p)} = \frac{1}{Lp + R} = \frac{1/R}{\frac{L}{R}p + 1} = \frac{k}{Tp + 1},$$

где  $k = 1/R$  — коэффициент передачи,  
 $T = L/R$  — постоянная времени.

### 4.3. Передаточные функции разомкнутых систем

Зная структурную схему системы и передаточные функции каждого типового звена, можно получить передаточную функцию системы.

На рис. 4.13 представлена структурная схема системы, состоящая из последовательно соединённых звеньев. Требуется определить передаточную функцию разомкнутой системы.

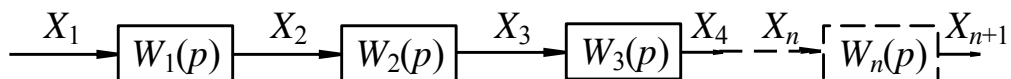


Рис. 4.13. Структурная схема системы

Здесь

$$\left. \begin{aligned} X_2 &= W_1(p)X_1 \\ X_3 &= W_2(p)X_2 \\ \dots\dots\dots \\ X_{n+1} &= W_n(p)X_n \end{aligned} \right\}$$

Если в последнее уравнение подставить значение  $X_n$  из предпоследнего, а затем значение  $X_{n+1}$  и т.д., то получим

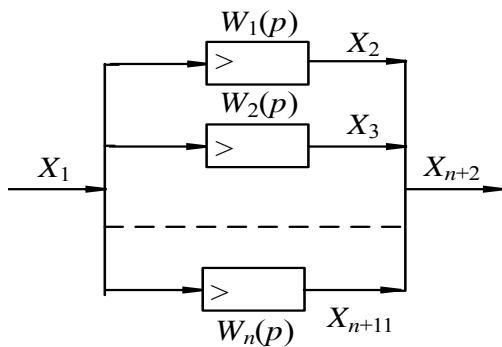
$$X_{n+1} = W_1(p)W_2(p)W_3(p)\dots W_n(p) \cdot X_1$$

Но так как по определению  $W(p) = \frac{X_{\text{вых}}}{X_{\text{вх}}}$ , то

$$W(p) = \frac{X_{n+1}}{X_1} = W_1(p)W_2(p)W_3(p)\dots W_n(p) \quad (4.16)$$

Таким образом, передаточная функция последовательно соединённых звеньев равна произведению передаточных функций отдельных звеньев.

На рис. 4.14 приведена система, состоящая из параллельно соединённых звеньев. Требуется определить передаточную функцию системы.



Здесь

$$\left. \begin{aligned} X_2 &= W_1(p)X_1 \\ X_3 &= W_2(p)X_2 \\ \dots\dots\dots \\ X_{n+1} &= W_n(p)X_n \end{aligned} \right\}$$

Рис. 4.14. Структурная схема системы

При параллельном соединении звеньев все выходные величины суммируются, следовательно

$$X_{n+2} = X_2 + X_3 + \dots + X_{n+1}$$

Так как  $W(p) = \frac{X_{\text{вых}}}{X_{\text{вх}}}$ , то

$$W(p) = \frac{X_{n+2}}{X_1} = W_1(p)W_2(p)\dots W_n(p) \quad (4.17)$$

Таким образом, передаточная функция параллельно соединённых звеньев равна сумме передаточных функций отдельных звеньев.

В общем случае передаточная функция разомкнутой системы, содержащей ряд последовательно и параллельно соединённых звеньев, представляет собой отношение двух многочленов:

$$W(p) = \frac{R(p)}{Q(p)}, \quad (4.18)$$

где  $Q(p) = 0$  - характеристическое уравнение разомкнутой системы.

#### 4.4. Передаточные функции замкнутых систем

Пусть звено I с передаточной функцией  $W_1(p)$  охвачено обратной связью (рис. 4.15), т.е. к выходу этого звена подключено звено II с передаточной функцией  $W_2(p)$ , выход которого подаётся на вход I звена с положительным знаком (положительная обратная связь) или с отрицательным знаком (отрицательная обратная связь).

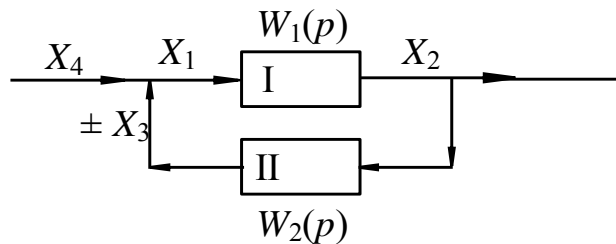


Рис. 4.15. Структурная схема системы

Найдём передаточную функцию  $W(p)$  эквивалентного звена, полученного из звена I, охваченного звеном II.

Вход эквивалентного звена обозначим  $X_4$  выход -  $X_2$ . Требуется найти такую функцию  $W(p)$  в которой  $X_2 = W(p)X_4$ .

Соотношения между переменными, соответствующими различным составляющим звеньям, определяются следующей системой уравнений:

$$\left. \begin{aligned} X_2 &= W_1(p)X_1 \\ X_3 &= W_2(p)X_2 \\ X_1 &= X_4 \pm X_3 \end{aligned} \right\}$$

где знак "+" соответствует положительной обратной связи, а знак "-" - отрицательной обратной связи.

Учитывая эти соотношения, получаем:

$$\begin{aligned} X_2 &= W_1(p)(X_4 \pm X_3); \\ X_2 &= W_1(p)[X_4 \pm W_2(p)X_2]; \\ X_2 &= W_1(p)X_4 \pm W_1(p)W_2(p)X_2; \\ X_2 [1 \pm W_1(p)W_2(p)] &= W_1(p)X_4 \\ X_2 &= \frac{W_1(p)X_4}{1 \pm W_1(p)W_2(p)}; \end{aligned}$$

откуда

$$W(p) = \frac{W_1(p)}{1 \pm W_1(p)W_2(p)} \quad (4.19)$$

где знак «−» соответствует положительной обратной связи, а знак «+» — отрицательной обратной связи.

Часто в системах автоматического регулирования инерционное звено охватывают обратной связью с целью получения нового эквивалентного инерционного звена с новыми параметрами. В качестве обратной связи применяются либо безынерционное звено (такая обратная связь называется **жесткой**), либо дифференцирующее звено (такая обратная связь называется **гибкой**).

#### 4.4.1. Инерционное звено, охваченное жесткой обратной связью

Передаточная функция инерционного звена:

$$W_1(p) = \frac{K_1}{1 + pT_1}.$$

Передаточная функция звена отрицательной обратной связи:

$$W_2(p) = K_2.$$

Передаточная функция эквивалентного звена согласно (4.19):

$$W(p) = \frac{\frac{K_1}{1 + pT_1}}{1 + \frac{K_1 K_2}{1 + pT_1}} = \frac{K}{1 + pT},$$

где  $K = \frac{K_1}{1 + K_1 K_2}$  — коэффициент усиления эквивалентного инерционного звена;

$T = \frac{T_1}{1 + K_1 K_2}$  — постоянная времени эквивалентного инерционного звена.

Таким образом, при охвате инерционного звена жесткой отрицательной обратной связью получается новое инерционное звено с уменьшенным коэффициентом усиления и постоянной времени. Например, в системах автоматического регулирования (САР) возбуждения синхронных машин часто возбудитель охватывают жесткой обратной связью для уменьшения его постоянной времени и повышения быстродействия.

#### 4.4.2. Инерционное звено, охваченное гибкой обратной связью

Передаточная функция звена обратной связи:

$$W_2(p) = \frac{pK_2}{1 + pT_2}.$$

Параметры звена обратной связи выбирают такими, чтобы  $T_2$  было много меньше 1, т.е. ( $T_2 \ll 1$ ), при этом получается идеальное дифференцирующее звено с передаточной функцией  $W_2(p) = pK_2$ .

Тогда передаточная функция эквивалентного звена согласно (4.19) запишется в следующем виде:

$$W(p) = \frac{\frac{K_1}{1+pT_1}}{1 + \frac{pK_1K_2}{1+pT_1}} = \frac{K_1}{1+pT}$$

где  $T = T_1 + K_1K_2$ .

Таким образом, при охвате инерционного звена гибкой обратной связью получается новое инерционное звено с неизменным коэффициентом усиления и с увеличенной постоянной времени. Гибкая связь не меняет статические характеристики инерционного звена, меняя его динамические характеристики:

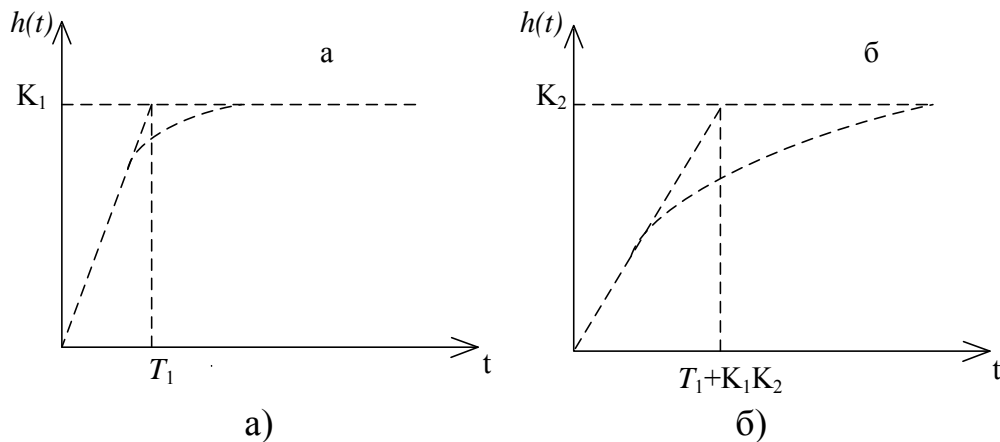


Рис. 4.16. Переходные функции инерционного звена:

а — без обратной связи; б — при с гибкой отрицательной обратной связью

*Пример 6.2.* Для разомкнутой электрической системы, структурная схема которой приведена на рис. 4.17, составить передаточную функцию и выделить в ней характеристическое уравнение.

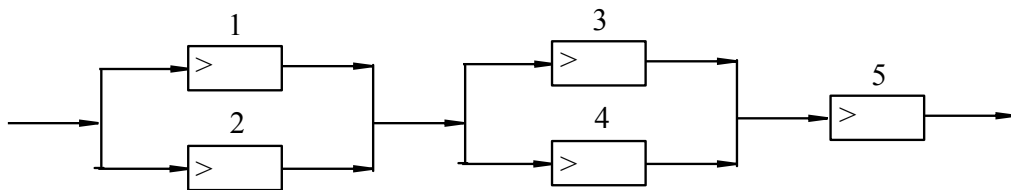


Рис. 4.17. Структурная схема системы

Типы звеньев и их передаточные функции следующие:

1 звено — усиленное  $W_1(p) = K_1$ ;

2 звено — дифференцирующее

$$W_2(p) = \frac{K_2 p}{1 + pT_2}$$

3 звено — интегрирующее  $W_3(p) = \frac{1}{pT_3}$ ;

4 звено — аperiodическое

$$W_4(p) = \frac{K_4}{1 + pT_4}$$

5 звено — усилительное  $W_5(p) = K_5$ .

Используя уравнения (4.16) и (4.17), запишем передаточную функцию системы в общем виде:

$$W_c(p) = [W_1(p) + W_2(p)] \cdot [W_3(p) + W_4(p)] \cdot W_5(p).$$

После подстановки передаточных функций типовых звеньев получим

$$W_c(p) = \left[ K_1 + \frac{K_2 p}{1 + pT_2} \right] \cdot \left[ \frac{1}{pT_3} + \frac{K_4}{1 + pT_4} \right] \cdot K_5 = \frac{K_1(1 + pT_2) + K_2 p}{1 + pT_2} \cdot \frac{(1 + pT_4) + K_4 pT_3}{pT_3(1 + pT_4)} \cdot K_5 = \frac{R(p)}{D(p)}.$$

Многочлен, стоящий в знаменателе, это и есть характеристическое уравнение, которое после преобразований запишется

$$D(p) = (1 + pT_2)(1 + pT_4)pT_3 = p^3(T_2T_3T_4) + p^2(T_2T_3 + T_3T_4) + pT_3 = 0.$$

Заменяя  $T_2T_3T_4 = a$ ;  $(T_2T_3 + T_3T_4) = a_1$  и  $T_3 = a_2$ , получим:

$$D(p) = a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p = 0.$$

#### 4.5. Алгебраические критерии устойчивости

Исследования устойчивости систем возможно при наличии методов, которые позволяют по доступным, легко получаемым признакам установить, устойчивая система или нет. В основе таких методов лежат критерии устойчивости.

**Критерием устойчивости** называется необходимое и достаточное условие или группа условий, при выполнении которых система устойчива. Основным критерием асимптотической устойчивости системы был сформулирован ранее: система устойчива тогда, когда все корни характеристического уравнения имеют отрицательные вещественные части.

Рассматривая корни характеристического уравнения как точки комплексной плоскости (рис. 4.18)  $p_1 = -a_1 + jw_1$ ;  $p_2 = -a_2 + jw_2$ ; ...  $p_n = -a_n + jw_n$ , приведенный критерий можно сформулировать так: для того, чтобы система была асимптотически устойчива, необходимо и достаточно, чтобы все корни  $p_1, p_2, \dots, p_n$  характеристического уравнения лежали в левой полуплоскости.

Таким образом, исследование устойчивости электрической системы и определения состояния равновесия может быть проведено путём отыскания корней характеристического уравнения. Однако при высокой степени характеристического уравнения задача определения его корней оказывается весьма сложной и трудоёмкой.

Поэтому при исследовании устойчивости часто используют закономерности, связывающие положение корней уравнения в левой полуплоскости со знаками коэффициентов  $a_0, a_1, \dots, a_n$  этого уравнения, а также закономерности, связывающие частотные характеристики системы с устойчивостью.

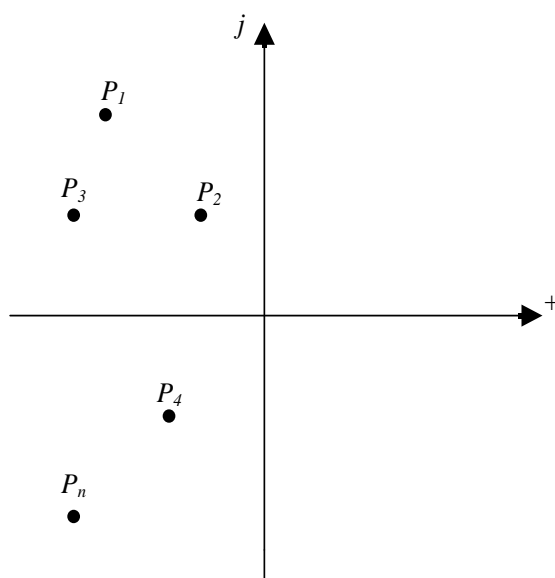


Рис. 4.18. Расположение корней характеристического уравнения на комплексной плоскости

Ниже будет рассмотрен ряд наиболее распространённых критериев и методов изучения устойчивости.

**Алгебраические критерии устойчивости** содержат группу условий (группу неравенств), при соблюдении которых система устойчива. Если хотя бы одно из таких условий нарушено, то система неустойчива.

Для проведения анализа устойчивости с помощью алгебраических критериев необходимо предварительно вычислить коэффициенты характеристического уравнения  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ . При исследовании устойчивости полезно иметь в виду следующее необходимое условие: если система асимптотически устойчива, то все коэффициенты положительны, т.е.  $a_0 > 0, a_1 > 0, \dots, a_n > 0$ . Однако этого условия ещё недостаточно, чтобы система была устойчивой. Кроме положительности всех коэффициентов необходимо, чтобы эти коэффициенты удовлетворяли некоторым соотношениям.

#### 4.5.1. Критерий Гурвица

Критерий Гурвица устанавливает эти соотношения в форме, соблюдение которых является необходимым и достаточным условием устойчивости системы.

Система неравенств Гурвица строится следующим образом. Из коэффициентов характеристического уравнения  $n$ -й степени

$$D(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + \dots + a_n$$

составляется матрица Гурвица:



$$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-3} & a_{n-1} & 0 & & \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-n} & a_{n-2} & a_{n-1} & & \end{vmatrix}.$$

Матрица получается квадратная,  $n$ -го порядка.

По главной диагонали располагаются коэффициенты характеристического уравнения в порядке их нумерации, начиная с  $a_1$  до  $a_n$ . В строках матрицы помещены поочередно коэффициенты только с нечётными или только с чётными индексами (включая и коэффициент  $a_0$ ), причём влево от диагонали с уменьшающимися, а вправо - с увеличивающимися индексами. Все недостающие коэффициенты, т.е. коэффициенты с индексами меньше нуля или больше  $n$  заменяются нулями.

Для соблюдения устойчивости системы требуется, чтобы все  $n$  диагональных минора этой матрицы были положительны. Диагональные миноры (они называются **определителями Гурвица**) получают отчеркиванием их слева и сверху. Таким образом, критерий устойчивости Гурвица записывается так:

$$\Delta_1 = a_1 > 0; \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} > 0; \dots \Delta_n > 0.$$

Последний определитель  $\Delta_n$  включает в себя уже всю матрицу целиком. Если его раскрыть по элементам последнего столбца, содержащего только коэффициент  $\Delta_n$ , то можно записать  $\Delta_n = a_n \cdot \Delta_{n-1}$ .

Гурвиц показал, что если непрерывно изменять коэффициенты характеристического уравнения, ухудшая устойчивость системы, то при потере устойчивости в нуль прежде всего обратится определитель  $\Delta_n$ .

Если при этом  $\Delta_{n-1} > 0$ , то граница устойчивости определяется условием  $a_n = 0$ . Это граница аperiodической устойчивости, когда один действительный корень находится на мнимой оси плоскости корней.

Если  $\Delta_n > 0$ , то в нуль обращается  $\Delta_{n-1}$ , что соответствует наличию на мнимой оси пары чисто мнимых корней  $p_{1,2} = \pm j\omega_1$ . Это *граница колебательной устойчивости*. При переходе через эту границу начинается самораскачивание системы с частотой  $\omega_1$ .

Если и дальше продолжать изменять коэффициенты характеристического уравнения, то могут стать отрицательными и другие определители Гурвица, а  $\Delta_{n-1}$  снова может стать положительным. Поэтому положительность  $a_n$  и  $\Delta_{n-1}$  ещё не свидетельствует об устойчивости системы: должны быть положительны также и остальные определители Гурвица.

В качестве примера рассмотрим условие Гурвица для характеристического уравнения третьего порядка:

$$D(p) = a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3$$

Матрица Гурвица имеет вид:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}.$$

Условием устойчивости являются:

$$a_0 > 0; \Delta_1 = a_1 > 0; \Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0; \Delta_3 = a_3 \Delta_2 > 0; a_3 > 0.$$

Алгебраический критерий Гурвица применяется при анализе устойчивости систем, имеющих характеристические уравнения невысокого порядка (третьего, четвертого).

#### 4.5.2. Критерий Рауса

Критерий Рауса более удобен для систем, имеющих характеристические уравнения высокого порядка (пятого и более)

Из коэффициентов характеристического уравнения составляют таблицу Рауса с  $(n+1)$  числом строк.

Элементами первой строки являются все коэффициенты с четными индексами, а элементами второй строки - коэффициенты с нечетными индексами.

Элементы каждой следующей строки находятся по формуле:

$$C_{li} = \frac{C_{1,i-1} \cdot C_{k+1,i-2} - C_{1,i-2} \cdot C_{k+1,i-1}}{C_{1,i-1}} = C_{k+1,i-2} - \lambda_{i-2} \cdot C_{k+1,i-1},$$

где  $k$  — номер столбца;

$i$  — номер строки;

$$\lambda_{i-2} = \frac{C_{1,i-2}}{C_{1,i-1}}, \quad i \geq 3.$$

Критерий устойчивости Рауса формулируется следующим образом: для того, чтобы система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы все коэффициенты первого столбца были положительны:

$$C_{13} > 0, C_{14} > 0, C_{15} > 0, \dots, C_{1,n+1} > 0.$$

Число перемен знака в первом столбце таблицы Рауса указывает на число корней, расположенных в правой полуплоскости. Таким образом, если требуется определить только устойчивость системы, то составление таблицы Рауса прекращают, как только элемент первого столбца какой-либо строки станет отрицательным. Если требуется определить число корней в правой полуплоскости, то таблица Рауса составляется полностью.

Таблицы Рауса

	$C_{11} = a_0$	$C_{21} = a_2$	$C_{31} = a_4$	$C_{41} = a_6$
	$C_{12} = a_1$	$C_{22} = a_3$	$C_{32} = a_5$	$C_{42} = a_7$
$\lambda_1 = \frac{a_0}{a_1}$	$C_{13} = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1} = a_2 - \lambda_1 a_3$	$C_{23} = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1} = a_4 - \lambda_1 a_5$	$C_{33} = \frac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1} = a_6 - \lambda_1 a_7$	$C_{43} = \dots$
$\lambda_2 = \frac{a_1}{C_{13}}$	$C_{14} = \frac{C_{13} a_3 - C_{23} a_1}{C_{13}} = a_3 - \lambda_1 C_{23}$	$C_{24} = \frac{C_{13} a_5 - C_{33} a_1}{C_{13}} = a_5 - \lambda_2 C_{33}$	$C_{34} = \frac{C_{13} a_7 - C_{43} a_1}{C_{13}} = a_7 - \lambda_2 C_{43}$	$C_{44} = \dots$
$\lambda_3 = \frac{C_{13}}{C_{14}}$	$C_{15} = \frac{C_{14} C_{23} - C_{24} C_{13}}{C_{14}} = C_{23} - \lambda_3 C_{24}$	$C_{25} = \frac{C_{14} C_{33} - C_{13} C_{34}}{C_{14}} = C_{33} - \lambda_3 C_{34}$	$C_{35} = \frac{C_{14} C_{43} - C_{13} C_{44}}{C_{14}} = C_{43} - \lambda_3 C_{44}$	$C_{45} = \dots$

### 4.6. Частотные критерии устойчивости

Если на вход устойчивой линейной системы действуют гармонически изменяющиеся воздействия  $f(t) = a_f \sin \alpha t$ , то после затухания переходных процессов на выходе системы устанавливаются гармонические колебания с той же частотой. Однако амплитуда и начальная фаза их будут зависеть от динамических свойств системы (рис. 4.19).

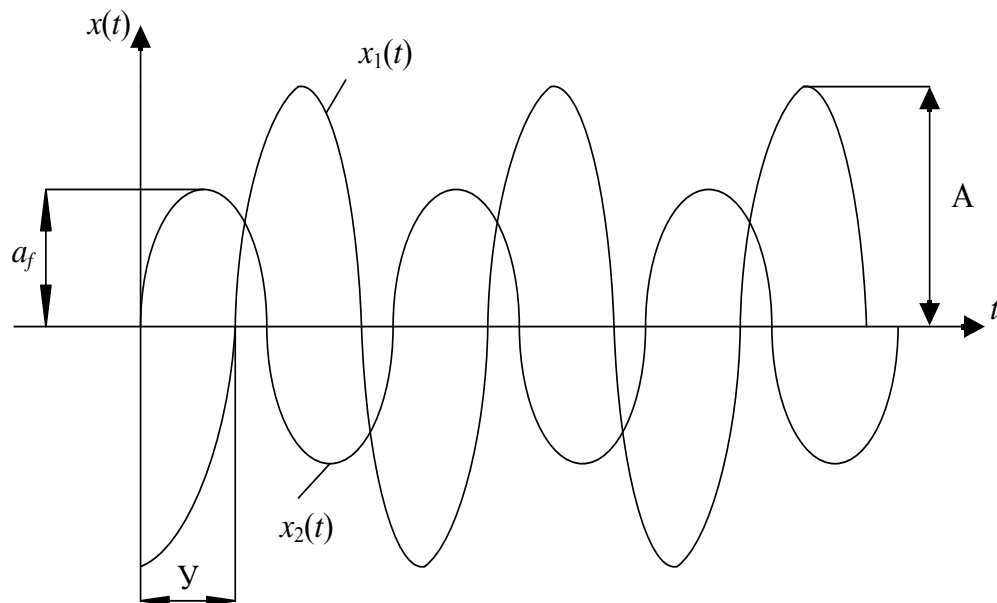


Рис. 4.19. Прохождение гармонических колебаний через линейную систему

Запишем дифференциальное уравнение, связывающее входные и выходные величины:

$$a_0 \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_n x = b_0 \frac{d^m f(t)}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} f(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_m f(t). \quad (4.20)$$

Задавшись функциями  $f(t) = a_f \sin \omega t$  и  $x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$  подставим в уравнение (4.10):

$$e^{j\omega t} \left[ a_0 (j\omega)^n + a_1 (j\omega)^{n-1} + \dots + a_n \right] A e^{j\varphi} = e^{j\omega t} \left[ b_0 (j\omega)^m + b_1 (j\omega)^{m-1} + \dots + b_m \right] a_f,$$

откуда для  $A$  и  $\varphi$  после преобразований получим:

$$A e^{j\varphi} = \frac{b_0 (j\omega)^m + \dots + b_m}{a_0 (j\omega)^n + a_1 (j\omega)^{n-1} + \dots + a_n} \cdot a_f.$$

Так как уравнение

$$\frac{b_0 (j\omega)^m + \dots + b_m}{a_0 (j\omega)^n + a_1 (j\omega)^{n-1} + \dots + a_n} = W(p)$$

есть передаточная функция рассматриваемой системы, то окончательно имеем:

$$A(\omega) e^{j\varphi(\omega)} = W(j\omega) a_f.$$

Значение передаточной функции  $W(p)$  при замене  $p = j \cdot \omega$  называется комплексным коэффициентом усиления системы при частоте  $\omega$ , или просто комплексным коэффициентом усиления.

Геометрически  $W(j\omega)$  представляет собой вектор на комплексной плоскости (рис. 4.20):

$$W(j\omega) = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)} = P(\omega) + Q(\omega).$$

Модуль этого вектора показывает, во сколько раз амплитуда установившихся колебаний выходной величины больше амплитуды входной величины; аргумент  $\varphi(\omega)$  показывает сдвиг фаз между гармониками, соответствующими выходу и входу.

Зависимости  $A(\omega)$ ,  $\varphi(\omega)$ ,  $P(\omega)$  и  $Q(\omega)$  называются частотными характеристиками системы. Изучение их при изменении  $\omega$  от 0 до  $+\infty$  позволяет исследовать устойчивость и качество переходных процессов.

Вектор-годограф  $W(j\omega)$ , построенный на комплексной плоскости, называется **амплитудно-фазочастотной характеристикой (АФЧХ)** системы (рис. 4.21).

Зависимость  $A(\omega)$  называется амплитудно-частотной характеристикой системы, зависимость  $\varphi(\omega)$  — фазочастотной характеристикой,  $P(\omega)$  и  $Q(\omega)$  соответственно вещественной и мнимой частотными характеристиками. Примерный вид этих характеристик показан на рис. 4.22. Комплексный коэффициент усиления и частотные характеристики являются весьма важными характеристиками системы, позволяющими исследовать устойчивость и характер протекания переходного процесса.

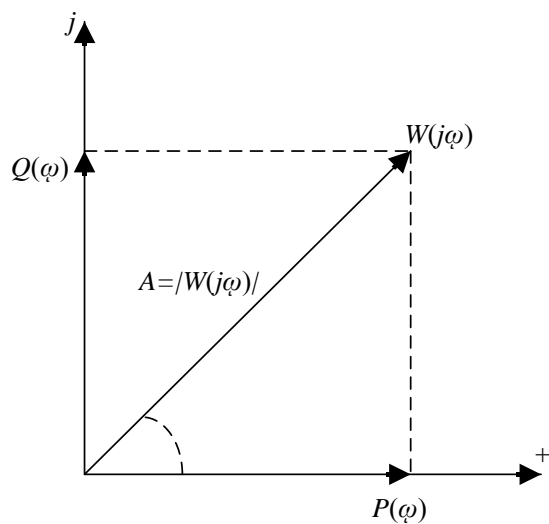


Рис. 4.20. Геометрическая интерпретация  $W(j\omega)$

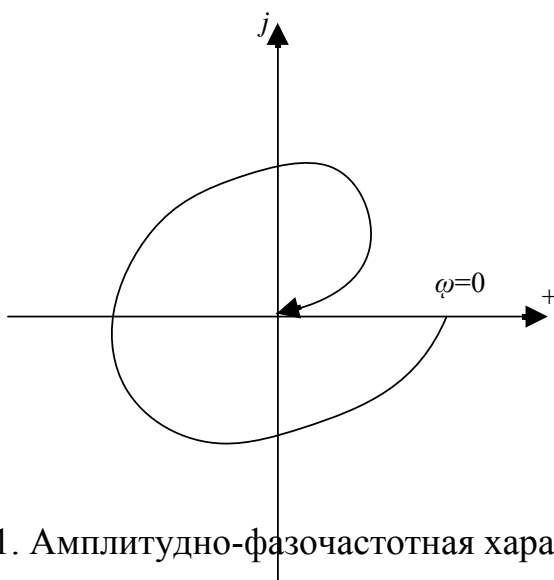
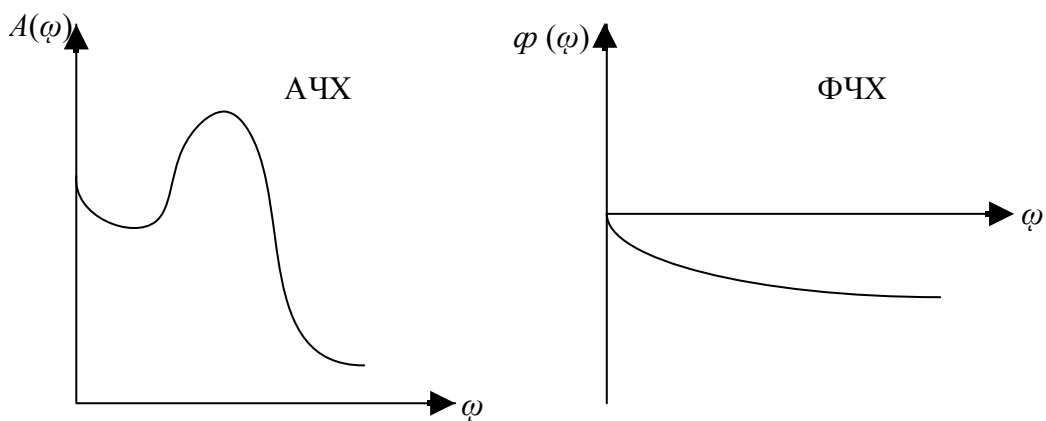


Рис. 4.21. Амплитудно-фазочастотная характеристика



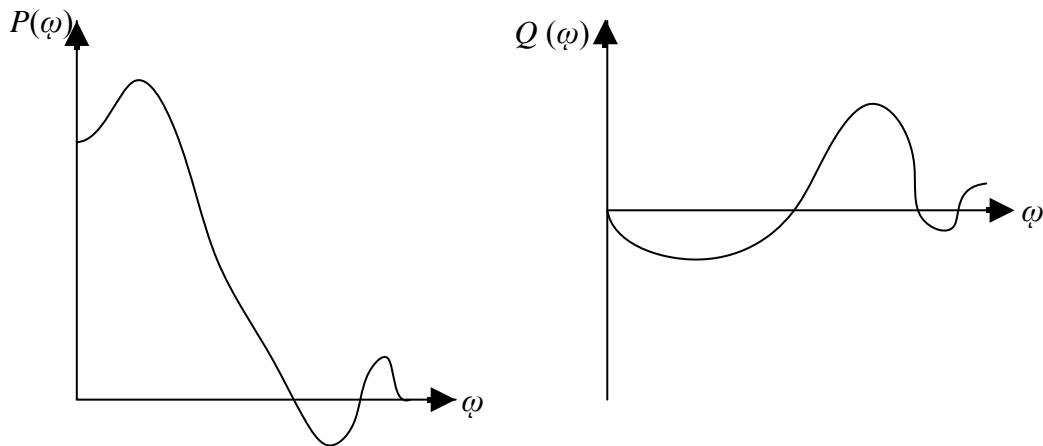


Рис. 4.22. Частные характеристики

Порядок построения частотных характеристик:

В передаточной функции системы  $W(p)$  производится замена  $p$  на  $j\omega$ , получается комплексный коэффициент усиления  $W(j\omega)$ .

В комплексном коэффициенте усиления  $W(j\omega)$  выделяются вещественная и мнимая части, которые при подстановке частот в интервале от 0 до  $+\infty$  дают две характеристики — вещественную частотную  $P(\omega)$  и мнимую частотную  $Q(\omega)$ .

Определяется модуль  $|W(j\omega)| = A = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)}$ , который при подстановке частот от 0 до  $+\infty$  дает амплитудно-частотную характеристику  $A(\omega)$ .

Определяется аргумент  $\arg W(j\omega)$ , который при подстановке частот от 0 до  $+\infty$  даёт фазочастотную характеристику  $\varphi(\omega)$ :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{Q(\omega)}{P(\omega)}; \quad \varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \varphi.$$

Строится вектор-годограф  $W(j\omega)$  при изменении частот от 0 до  $+\infty$  получается амплитудно-фазочастотная характеристика.

#### 4.6.1. Принцип аргумента

Представим характеристический многочлен:

$$D(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n$$

в виде

$$D(p) = a_0 (p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n),$$

где  $p_1, p_2, \dots, p_n$  — корни характеристического уравнения  $D(p) = 0$ .

Каждому корню на комплексной плоскости соответствует точка. Геометрический корень  $p_i$  можно представить вектором, соединяющим начало координат с точкой  $p_i$ , множитель  $(p - p_i)$  представляет собой на плоскости разный векторов:  $p$ , направленного произвольно, и  $p_i$  (рис. 4.23).

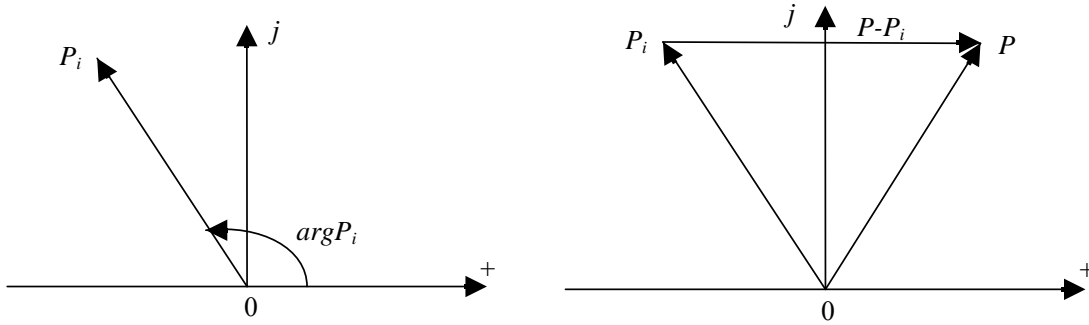


Рис. 4.23. Геометрическая интерпретация корня  $p_i$  и множителя  $(p - p_i)$

Направим вектор  $p$  по мнимой оси  $j\omega$ , т.е.  $p = j\omega$ . Тогда конец вектора  $j\omega - p_i$  будет лежать на мнимой оси  $j\omega$ , поворачиваясь в направлении, зависящем от расположения корня  $p_i$  на плоскости.

Рассмотрим корень  $p_i$ , лежащий на левой полуплоскости, т.е.  $p_i = -a_i + j\omega$  (рис. 4.24). Вектор  $j\omega - p_i$  при изменении частоты  $\omega$  от  $-\infty$  до  $+\infty$  перемещается снизу вверх по оси  $j$  и вращается вокруг точки  $p_i$  против часовой стрелки. Такое направление вектора принято за положительное.

Аргумент вектора  $j\omega - p_i$  при изменении  $\omega$  от  $-\infty$  до  $+\infty$  получает приращение  $+\pi$ , т.е. поворачивается на угол  $180^\circ$  против часовой стрелки.

Теперь рассмотрим корень  $p_i$ , лежащий в правой полуплоскости, т.е.  $p_i = a_i + j\omega$ . Вектор  $j\omega - p_i$  вращается при изменении частоты  $\omega$  от  $-\infty$  до  $+\infty$  по часовой стрелке (отрицательное направление) (рис. 4.25).

Аргумент вектора  $j\omega - p_i$  получает приращение  $-\pi$ , т.е. поворачивается на угол  $180^\circ$  по часовой стрелке:  $\Delta \arg(j\omega - p_i) = -\pi$ .

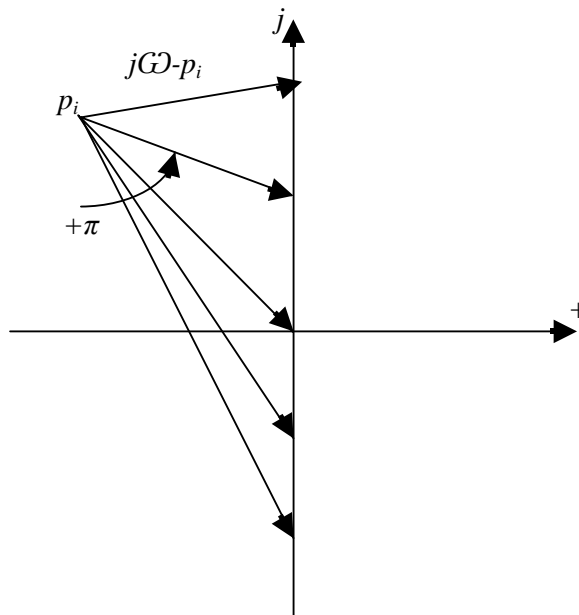


Рис. 4.24. Приращение аргумента вектора  $j\omega - p_i$  при левом расположении корня

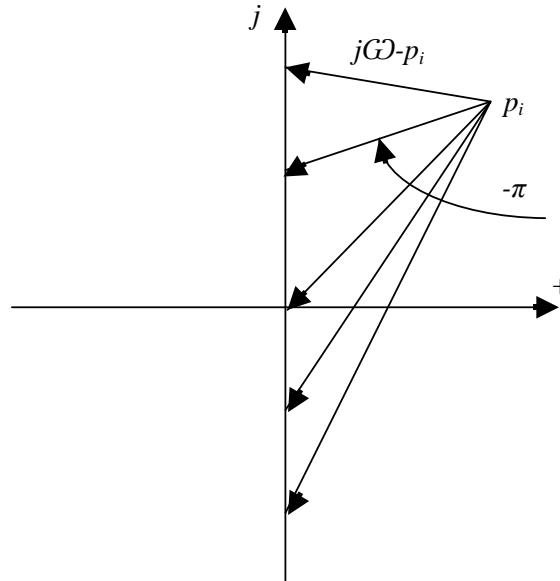


Рис. 4.25. Приращение аргумента вектора  $j\omega - p_i$  при правом расположении корня

Многочлен  $D(p)$  при подстановке  $p = j\omega$  представляет собой вектор, который называется характеристическим:

$$D(j\omega) = a_0(j\omega - p_1)(j\omega - p_2)\dots(j\omega - p_n).$$

Модуль  $D(j\omega)$  равен произведению модулей единичных векторов, а фаза или аргумент - сумме аргументов единичных векторов:

$$\arg D(j\omega) = \arg(j\omega - p_1) + \arg(j\omega - p_2) + \dots + \arg(j\omega - p_n).$$

Если все корни  $p_1, p_2, \dots, p_n$  лежат в левой полуплоскости (случай устойчивой системы), то

$$\begin{aligned} \Delta \arg D(j\omega) &= n\pi \\ -\infty \leq \omega \leq +\infty \end{aligned} \quad (4.21)$$

Если среди  $n$  корней характеристического уравнения  $m$  корней лежат в правой полуплоскости,  $a(n-m)$  корней - в левой полуплоскости, то при изменении  $\omega$  от  $-\infty$  до  $+\infty$  приращение аргумента равно

$$\begin{aligned} \Delta \arg D(j\omega) &= (n-m)\pi - m\pi = (n-2m)\pi \\ -\infty \leq \omega \leq +\infty \end{aligned} \quad (4.22)$$

Таким образом, правило аргумента гласит: приращение аргумента вектора  $D(j\omega)$  при изменении  $\omega$  от  $-\infty$  до  $+\infty$  равно разности между числом  $(n-m)$  корней характеристического уравнения  $D(p) = 0$ , расположенных в левой полуплоскости, и числом  $m$  корней, лежащих в правой полуплоскости, помноженной на  $\pi$ .

Для устойчивой системы необходимо выполнение условия (4.21), условие (4.22) справедливо для неустойчивой системы.



#### 4.6.2. Частотный критерий Михайлова

Как было показано выше, изменение аргумента вектора  $D(j\omega)$  однозначно с расположением корней характеристического уравнения.

При практическом применении этого правила аргумента разделяют вектор  $D(j\omega)$  на действительную и мнимую части:

$$D(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega).$$

Вектор  $D(j\omega)$ , изображенный в декартовых координатах на плоскости  $D(j\omega)$ , при изменении  $\omega$  от  $-\infty$  до  $+\infty$  вращается и концом описывает кривую, которая называется характеристической кривой или годографом характеристического уравнения (рис. 3.25, а).

Многочлен  $U(\omega) = a_n + a_{n-2}(j\omega)^4 + a_{n-4}(j\omega)^4 + \dots = a_n - a_{n-2}\omega^2 + a_{n-4}\omega^4 - \dots$  является четным относительно частоты  $\omega$ , т.е.  $U(\omega) = U(-\omega)$ .

Многочлен  $jV(\omega) = a_{n-1}j\omega + a_{n-3}(j\omega)^3 + a_{n-5}(j\omega)^5 + \dots = j(a_{n-1}\omega - a_{n-3}\omega^3 + a_{n-5}\omega^5 - \dots)$  является нечетным относительно частоты  $\omega$ , т.е.  $V(\omega) = -V(-\omega)$ .

Отсюда следует, что годограф характеристического уравнения симметричен относительно действительной оси (рис.4.26, б).

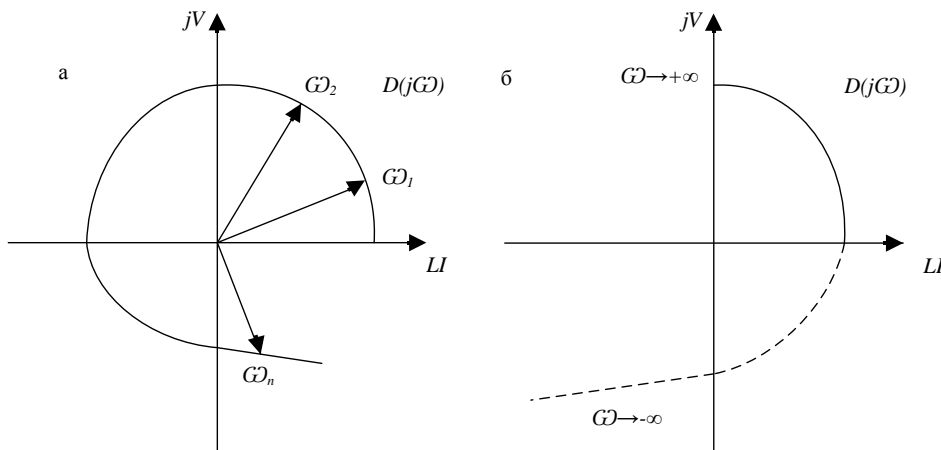


Рис. 4.26. Годографы характеристического уравнения

Учитывая это, запишем критерий Михайлова. Система будет устойчива тогда, когда при изменении частоты  $\omega$  от 0 до  $+\infty$  вектор  $D(j\omega)$  повернется на угол  $n \frac{\pi}{2}$ , где  $n$  - степень характеристического уравнения, или, это то же самое, если при изменении частоты  $\omega$  от 0 до  $+\infty$  годограф, начинаясь с положительной части действительной оси, проходит последовательно в положительном направлении  $n$  квадрантов:

$$\Delta \arg D(j\omega) = n \frac{\pi}{2} \quad (4.23)$$

$$0 \leq \omega \leq +\infty$$

Если система неустойчива и  $m$  корней расположено в правой части полуплоскости, то

$$\Delta \arg D(j\omega) = (n-2m) \frac{\pi}{2} \quad (4.24)$$

$$-\infty \leq \omega \leq +\infty$$

Это условие даёт возможность по кривой Михайлова судить не только об устойчивости системы, но и о числе корней в правой полуплоскости неустойчивой системы.

В качестве примера на рис.4.27 приведены годографы устойчивых и неустойчивых систем.

### 4.6.3. Критерий устойчивости Найквиста

Критерий устойчивости Найквиста основан на применении принципа аргумента к вектору-годографу комплексного коэффициента усиления разомкнутой системы. При этом вычисления корней характеристического уравнения (как в алгебраических критериях, так и в случае Михайлова) не требуется.

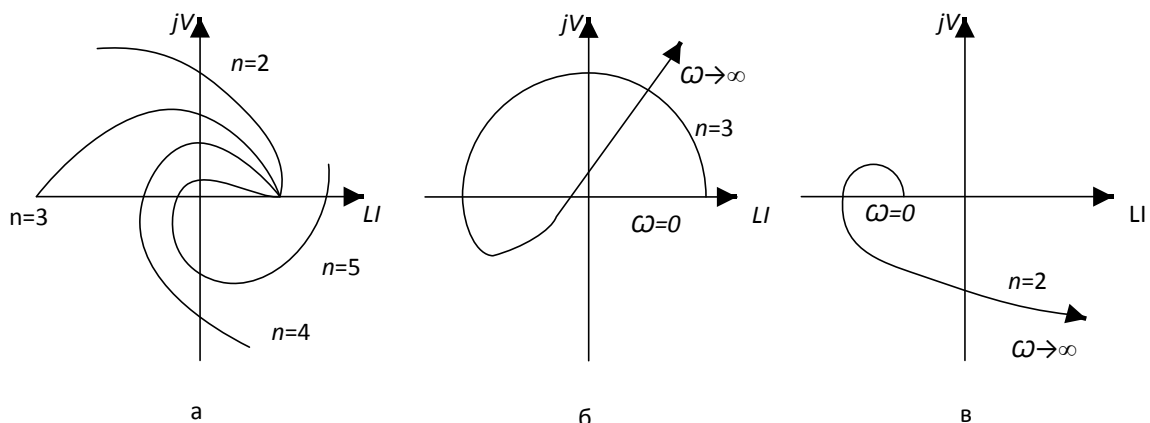


Рис. 4.27. Годографы (кривые Михайлова):  
а - для устойчивых систем; б и в - для неустойчивых систем

Пусть  $W_p(p)$  - передаточная функция разомкнутой системы. При этом

$$W_p(p) = \frac{R(p)}{Q(p)},$$

где  $Q(p)$  - характеристическое уравнение разомкнутой системы.

Замкнём систему через звено обратной связи с передаточной функцией  $W_p(p)=1$ .

Тогда

$$W_p(p) = \frac{W_p(p)}{1+W_p(p)} = \frac{R(p)/Q(p)}{1+R(p)/Q(p)} = \frac{R(p)}{Q(p)+R(p)} = \frac{R(p)}{D(p)},$$

где  $D(p) = Q(p) + R(p)$  - характеристическое уравнение замкнутой системы.

Рассмотрим функцию  $1 + W_p(p)$ .

$$1 + W_p(p) = 1 + \frac{R(p)}{Q(p)} = \frac{Q(p) + R(p)}{Q(p)} = \frac{D(p)}{Q(p)} \quad (4.25)$$

Найдём приращение аргумента вектора  $[1 + W_p(j\omega)]$  при изменении частоты  $\omega$  от 0 до  $+\infty$ . Согласно уравнению (4.15) имеем

$$\Delta \arg [1 + W_p(j\omega)] = \Delta \arg D(j\omega) - \Delta \arg Q(j\omega), \quad (4.26)$$

т.е. приращение аргумента годографа  $[1 + W_p(j\omega)]$  определяется разностью приращений аргументов кривых Михайлова для замкнутой и разомкнутой систем.

Критерий Найквиста заключается в том, что, зная состояние разомкнутой системы и правило аргумента для кривой Михайлова, можно определить по уравнению (4.16) устойчивость замкнутой системы.

Рассмотрим два возможных случая.

1. Пусть разомкнутая система устойчива.

Тогда

$$\Delta \arg Q(j\omega) = n \frac{\pi}{2} \\ -\infty \leq \omega \leq +\infty$$

и правая часть уравнения (4.16) при устойчивой замкнутой системе превращается в нуль:

$$\Delta \arg D(j\omega) - \Delta \arg Q(j\omega) = n \frac{\pi}{2} - n \frac{\pi}{2} = 0 \\ 0 \leq \omega \leq +\infty \quad 0 \leq \omega \leq +\infty$$

В этом случае необходимое и достаточное условие устойчивости замкнутой системы - критерий Найквиста запишется так:

$$\Delta \arg [1 + W_p(j\omega)] = 0 \quad (4.27)$$

Если это условие не выполняется, то замкнутая система неустойчива.

2. Пусть разомкнутая система неустойчива, из  $n$  корней характеристического уравнения  $m$  находятся в правой плоскости. Тогда по правилу аргумента

$$\Delta \arg Q(j\omega) = (n - 2m) \frac{\pi}{2} \\ -\infty \leq \omega \leq +\infty$$

и правая часть уравнения (4.16) при устойчивой замкнутой системе равна

$$\Delta \arg D(j\omega) - \Delta \arg Q(j\omega) = n \frac{\pi}{2} - (n - m) \frac{\pi}{2} = m\pi$$

В этом случае критерий Найквиста запишется так:

$$\Delta \arg [1 + W_p(j\omega)] = m\pi \quad (4.28)$$

$$0 \leq \omega \leq +\infty$$

Если это условие не выполняется, то замкнутая система неустойчива.

Критерий Найквиста можно сформулировать ещё иначе. Условия устойчивости (4.17) и (4.18) сформулированы для вектора  $[1 + W_p(j\omega)]$ , т.е. для вектора, начало которого расположено в точке с координатами  $(-1; j0)$ , а конец совпадает с концом вектора  $W_p(j\omega)$  (рис.4.28).

Если

$$[1 + W_p(j\omega)] = 0,$$

то амплитудно-фазочастотная характеристика  $W_p(j\omega)$  не охватывает точку с координатами  $(-1; j0)$ .

Если

$$[1 + W_p(j\omega)] = m\pi,$$

то АФЧХ охватывает  $m/2$  раз точку с координатами  $(-1; j0)$ .



Рис. 4.28. АФЧХ устойчивой системы

В соответствии с этим критерий устойчивости Найквиста формулируется следующим образом:

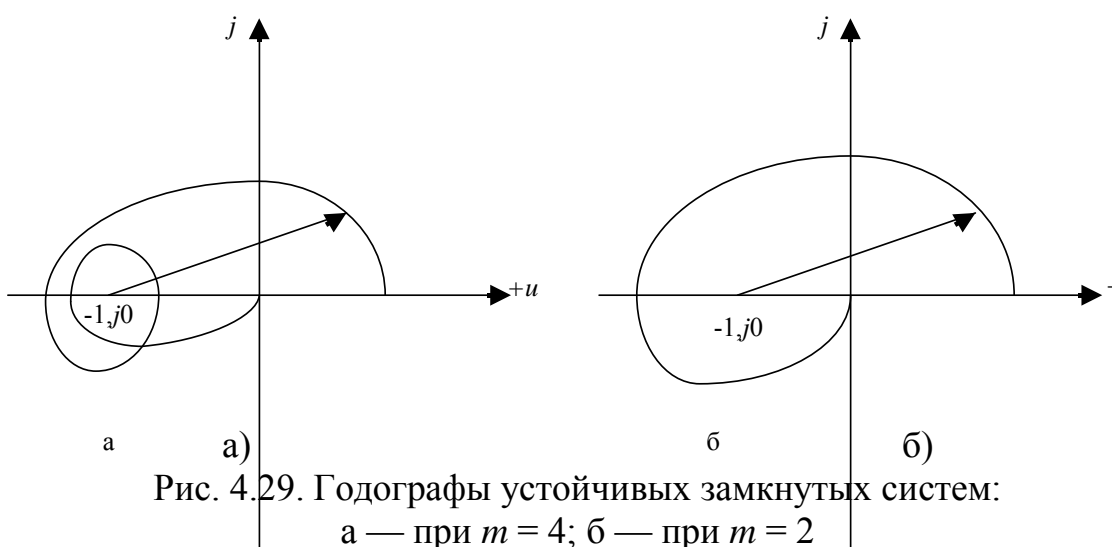
1. Для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы АФЧХ устойчивой разомкнутой системы не охватывала точку с координатами  $(-1; j0)$  (рис. 4.28).

2. Для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы АФЧХ неустойчивой разомкнутой системы охватывала  $m/2$  раз точку с координатами  $(-1; j0)$ .

натами  $(-1; j0)$  в положительном направлении, где  $m$  - число корней характеристического уравнения разомкнутой системы в правой полуплоскости. Примеры таких годографов представлены на рис. 4.29.

#### 4.7. Построение и оценка переходного процесса электрической системы

Переходные процессы в электрических системах происходят в результате действия внешних возмущающих воздействий. Так как обычно возмущения и внешние воздействия заранее не известны, то рассматривается реакция системы на типовые возмущающие воздействия, наиболее характерные для исследуемой системы.



Для электрической системы возмущающим воздействием, характерным при внезапном отключении или включении потребителя электрической энергии, является сброс или наброс нагрузок, сопровождающийся переходом из одного равновесного состояния в другое. Для ряда электрических систем характерна разнопеременная нагрузка, сопровождающаяся кратковременным ее увеличением с последующим восстановлением исходного равновесного состояния. Подобные же явления наблюдаются в электрической системе и при коротких замыканиях с последующим отключением их средствами релейной защиты.

Идеализируя несколько характер этих воздействий, будем в дальнейшем рассматривать их в виде функций типа скачка или импульса, прикладываемых к системе, находящейся в равновесном состоянии.

Функцию вида скачка представляем как

$$f(t) = 1(t),$$

$$\text{где } 1(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ 1 & \text{при } t \geq 0. \end{cases}$$

Функция типа единичного импульса  $\delta(t)$  - дельта-функция определяется условием  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$  и является производной от единичной функции по времени.

Идеальные типовые возмущающие воздействия видов единичного скачка и дельта-функции представлены на рис. 4.30.

Известны следующие способы построения переходного процесса:

- а) по передаточной функции системы;
- б) по частным характеристикам системы;
- в) графический способ (только для систем, состоящих из одноемкостных звеньев).

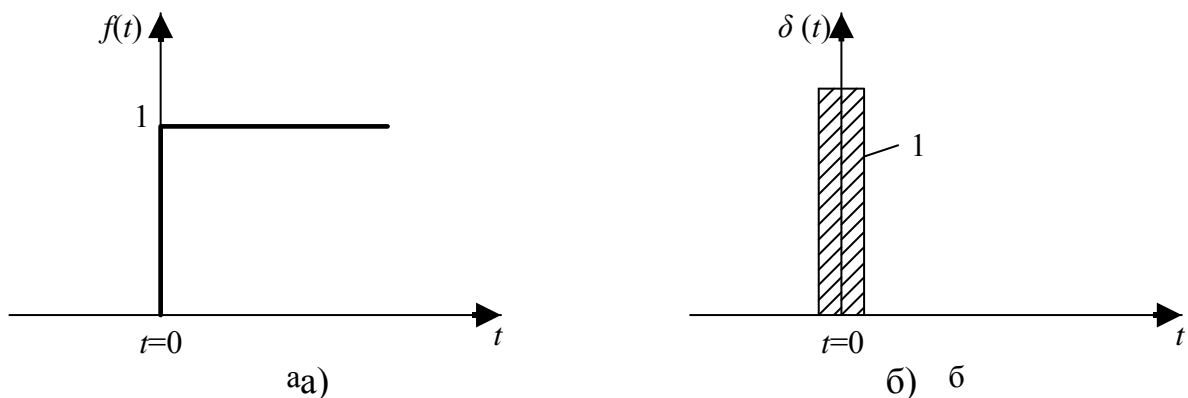


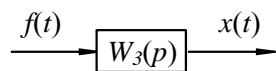
Рис. 4.30. Типовые возмущающие воздействия:  
а — функция единичного скачка; б —  $\delta$ -функция

В большинстве случаев построение переходного процесса связано с трудоемкими математическими расчётами. Поэтому особое значение приобретают различные приближенные и косвенные методы оценки переходных процессов, не требующие построения интегральных кривых.

#### 4.7.1. Построение переходного процесса по заданной передаточной функции системы

Рассмотрим переходный процесс при наличии одного возмущающего воздействия  $f(t)$ .

Изображение выходной координаты  $X$  можно найти по структурной схеме системы:



$$x(p) = W_3(p) \cdot f(p), \tag{4.29}$$

где  $W_3(p)$  - передаточная функция замкнутой системы

$$W_3(p) = \frac{R(p)}{D(p)}. \tag{4.30}$$

В качестве возмущающего воздействия  $f(t)$  рассмотрим вначале функцию скачка  $f(t) = 1(t)$ .

Изображение по Лапласу этого возмущающего воздействия имеет вид

$$L\{1(t)\} = \frac{1}{p}. \quad (4.31)$$

Подставив в уравнение (4.19) значение  $W_3(p)$  и  $f(p)$ , согласно выражениям (4.20) и (4.21) получим:

$$X(p) = \frac{R(p)}{p \cdot D(p)}. \quad (4.32)$$

Применив формулу разложения, запишем оригинал:

$$X(t) = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{R(p_i) e^{p_i t}}{\{p \cdot D(p)\}'}. \quad (4.33)$$

Теперь возьмём в качестве возмущающего воздействия дельта функцию  $\delta(t)$ .

Изображение по Лапласу для дельта функции  $L\{\delta(t)\} = 1$ .

Тогда согласно (4.19)  $X(p) = \frac{R(p)}{D(p)}$ , а сам оригинал имеет вид

$$X(t) = \sum_{i=1}^n \frac{R(p_i)}{D'(p_i)} e^{p_i t}. \quad (4.34)$$

Таким образом, при известных корнях характеристического уравнения  $p_i$  задача построения переходного процесса сводится к построению отдельных слагаемых согласно уравнению (4.23) или (4.24) и суммированию их координат, соответствующих одинаковым значениям времени  $t$ .

Основная трудность данного способа заключается в определении корней характеристического уравнения. Для этой цели может быть использован итерационный метод приближенного вычисления корней. Рабочие формулы для вычисления корней характеристических уравнений третьего и четвертого порядков представлены в таблице 4.2.

#### **4.7.2. Построение переходного процесса по частным характеристикам системы**

В тех случаях, когда свойства системы заданы её частотными характеристиками, процесс при любом возмущающем воздействии может быть построен с помощью частотных характеристик, без вычисления корней характеристического уравнения. С этой целью определяется преобразование Фурье рассматриваемой координаты системы при заданном возмущении.

Пусть требуется построить переходный процесс изменения во времени координаты  $X$  под действием возмущения  $f(t)$ , приложенного к системе. Обозначим  $\hat{U}_\epsilon = M_t \cdot \hat{U}_\Delta$ , преобразованием Фурье искомой функции  $\hat{U}_\Delta$ . Тогда

$$\Phi_x(j\omega) = \Phi(j\omega) \cdot \Phi_{f(t)}(j\omega),$$

где  $\Phi(j\omega)$  — частотная характеристика замкнутой системы;

$\Phi_{f(t)}(j\omega)$  — преобразование Фурье для возмущающего воздействия  $f(t)$ .

Таблица 4.2

Итерационный метод выражения корней

Вид уравнения	Расположение корней	Рабочие формулы
$x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$	Наименьший по модулю действительный корень	$\alpha = \frac{a_3}{a_2 - \beta};$ $\beta = \alpha(a_1 - \alpha)$
	Наименьшие по модулю комплексные сопряженные корни	$\alpha = \frac{a_2}{a_1 - \beta} - \frac{a_3}{(a_1 - \beta)^2}$
$x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0$	Наименьший по модулю действительный корень	$\alpha = \frac{a_4}{a_3 - \gamma};$ $\beta = \alpha(a_1 - \alpha)$ $\gamma = \alpha(a_2 - \beta)$
	Наименьшие по модулю комплексные сопряженные корни	$\alpha = \frac{a_3}{a_2 - \beta} - \frac{a_4(a_1 - \alpha)}{(a_2 - \beta)^2}$ $\beta = \alpha(a_1 - \alpha) + \frac{a_4}{a_2 - \beta}$
	Наибольший по модулю действительный корень	$\alpha = \frac{a_2}{a_1 - \alpha} - \frac{a_3}{(a_1 - \alpha)^2} + \frac{a_4}{(a_1 - \alpha)^3}$

$$\Phi_{f(t)}(j\omega) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt.$$

Здесь  $\Phi(j\omega)$  и  $\Phi_{f(t)}(j\omega)$  получаются заменой  $p$  на  $j\omega$  соответственно в передаточной функции системы  $W_3(p)$  и в преобразовании Лапласа функции  $f(t)$ .

Если преобразование Фурье  $\Phi_x(j\omega)$  для координаты  $X$  вычислено, то искомая функция  $X(t)$  определяется обратным преобразованием Фурье:

$$X(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_x(j\omega)e^{j\omega t} d\omega. \quad (4.35)$$

Рассмотрим построение переходного процесса в случае исчезающего возмущения. Если  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$ , то возмущение называется *исчезающим*, и переход-



ный процесс может быть построен непосредственно по уравнению (4.35). С этой целью это уравнение преобразуется следующим образом.

Выделим в  $\Phi_x(j\omega)$  действительную и мнимую части

$$\Phi_x(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$$

и воспользуемся тождеством Эйлера

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t .$$

Подставив эти значения в произведение  $\Phi_x(j\omega)e^{j\omega t}$ , получим:

$$\Phi_x(j\omega)e^{j\omega t} = [P(\omega) \cos \omega t - Q(\omega) \sin \omega t] + j[Q(\omega) \cos \omega t + P(\omega) \sin \omega t].$$

Тогда

$$X(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [P(\omega) \cos \omega t - Q(\omega) \sin \omega t] d\omega + \frac{j}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [Q(\omega) \cos \omega t + P(\omega) \sin \omega t] d\omega$$

Функция  $P(\omega)$  - четная, а  $Q(\omega)$  - нечетная.

Следовательно, во втором интеграле подынтегральная функция - нечетная и интеграл этот равен нулю:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [Q(\omega) \cos \omega t + P(\omega) \sin \omega t] d\omega = 0$$

Действительная часть записанного выше равенства определит  $X(t)$  :

$$X(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [P(\omega) \cos \omega t - Q(\omega) \sin \omega t] d\omega . \quad (4.36)$$

Ограничимся рассмотрением функций  $f(t)$ , которые равны нулю при любом  $t < 0$ . Тогда и  $X(t) = 0$  при  $t < 0$ . Считая  $t$  величиной положительной, заменим в уравнении (4.26)  $t$  на  $-t$  и приравняем после этого  $X(t)$  нулю:

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [P(\omega) \cos \omega t + Q(\omega) \sin \omega t] d\omega . \quad (4.37)$$

Сложим равенства (4.26) и (4.27). В результате получим

$$X(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} P(\omega) \cos \omega t d\omega . \quad (4.38)$$

Но  $p(\omega)$  - функция четная.

Тогда  $\int_{-\infty}^{+\infty} P(\omega) \cos \omega t d\omega = 2 \int_0^{+\infty} P(\omega) \cos \omega t d\omega$ , и уравнение (4.28) запишется

$$X(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} P(\omega) \cos \omega t d\omega . \quad (4.39)$$

Равенство (4.29) определяет функцию  $X(t)$  через действительную часть  $P(\omega)$  преобразования Фурье этой функции, которое равно произведению частотной характеристики системы  $W(j\omega)$  на преобразование Фурье, действующего возмущения.

Задача построения переходного процесса сводится теперь к вычислению интеграла (4.29) с помощью каких-либо приближенных методов.

*1 метод*

Разобьём ось  $\omega$  на интервалы  $\Delta\omega$  и для каждой точки деления найдём ординату  $P(\omega_j)$  (рис. 4.31). Заметим, что  $P(\omega)$  всегда стремится к нулю при  $\omega \rightarrow \infty$  (при условии устойчивости системы).

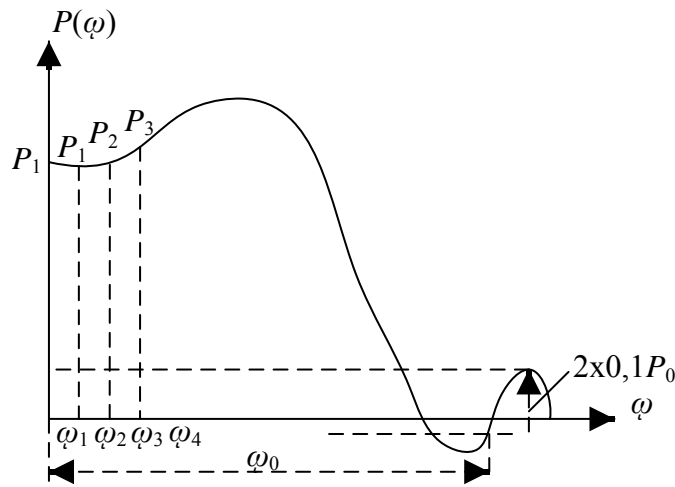


Рис. 4.31. К вычислению интеграла (4.29)

Обычно достаточно брать не весь диапазон изменения  $\omega$ . Абсциссу  $\omega_0$ , после которой все  $P_j < 0,1P_0$ , считают граничной.

Интегрирование производится от нуля до  $\omega_0$  по всем интервалам  $\Delta\omega_j$ :

$$X(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\omega_1} P_1 \cos \omega t d\omega + \frac{2}{\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} P_2 \cos \omega t d\omega + \dots + \frac{2}{\pi} \int_{\omega_{n-1}}^{\omega_n} P_n \cos \omega t d\omega.$$

$$X(t) = \frac{2}{t\pi} [P_1(\sin \omega_1 t - \sin 0 \cdot t) + P_2(\sin \omega_2 t - \sin \omega_1 t) + P_3(\sin \omega_3 t - \sin \omega_2 t) + P_4(\sin \omega_4 t - \sin \omega_3 t) + \dots + P_n(\sin \omega_n t - \sin \omega_{n-1} t)]$$

Приведя подобные члены, получим:

$$X(t) = \frac{2}{t\pi} [(P_1 - P_2) \cdot \sin \omega_1 t + (P_2 - P_3) \cdot \sin \omega_2 t + (P_3 - P_4) \cdot \sin \omega_3 t + (P_4 - P_5) \cdot \sin \omega_4 t + \dots + (P_{n-1} - P_n) \cdot \sin \omega_{n-1} t + P_n \sin \omega_n t]$$

При использовании этим методом используют тригонометрические таблицы функций, но иногда приходится для построения одной точки  $X(t)$  подсчитывать большое число (до 30-40) слагаемых. Для сокращения числа слагаемых за-

меняют кривую  $P(\omega)$  не ступенчатой, а ломаной прямой с наклонными участками.

### 2 метод

Заменяем кривую  $P(\omega)$  ломанной прямой, достаточно хорошо описывающей кривую  $chbfe$  (рис. 4.32).

Спроектируем точки излома прямой  $chbfe$  на ось ординат. Звенья ломаной и проектируемые прямые, параллельные оси абсцисс, образуют трапеции и треугольники, одна из сторон которых лежит на оси ординат. Площадь между ломаной прямой и осью абсцисс может быть получена суммированием с учётом знаков площадей указанных трапеций и треугольников.

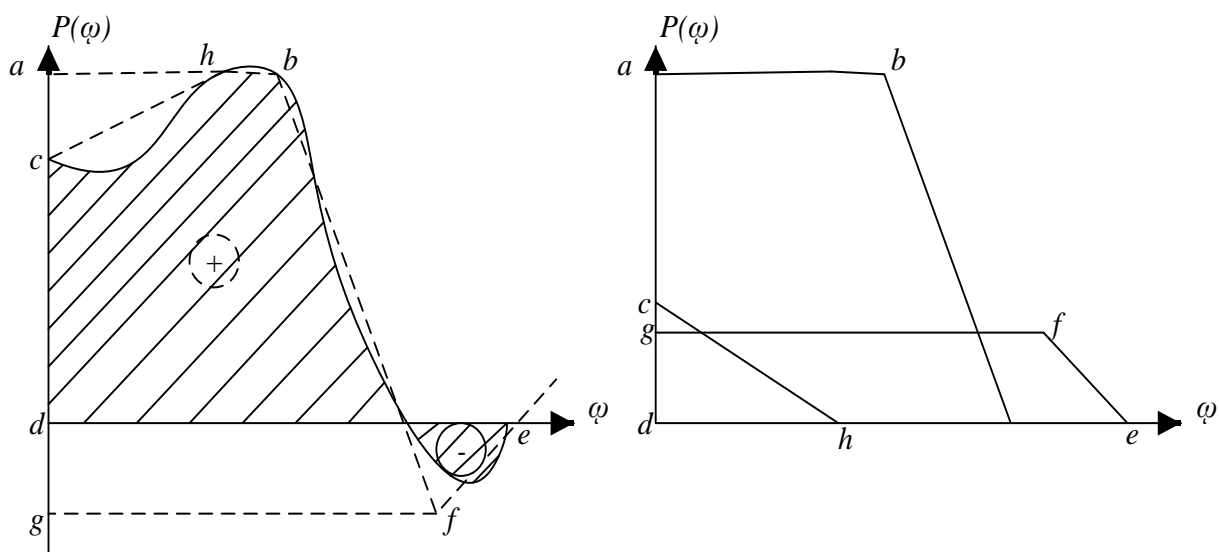


Рис. 4.32. К определению интеграла (4.29)

Так, площадь, ограниченную ломаной  $chbfe$  с учетом знаков, можно получить, отняв от площади трапеции  $abfc$  площадь трапеции  $dqfe$  и площадь треугольника  $ahc$ .

Разумеется, площади эти не изменятся, если сместить эти фигуры так, чтобы одна их вершина была расположена вдоль оси абсцисс, а вторая из сторон - вдоль оси ординат.

Тогда интеграл (4.29) можно записать так:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(\omega) \cos \omega t d\omega \approx \int (chbfe) \cos \omega t d\omega = \int (\text{трапеция } qabf) \cos \omega t d\omega - \int (\text{трапеция } dqfe) \cos \omega t d\omega - \int (\Delta acg) \cos \omega t d\omega$$

Треугольники с вершиной в начале координат можно рассматривать как частные случаи трапеций, у которых верхние основания равны нулю. Задача сводится к вычислению интегралов для трапеций.

Обозначим  $\lambda(\omega)$  уравнение кривой, ограничивающей одну из указанных трапеций.

Тогда

$$X(t) \approx \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^n \int_0^{\infty} \lambda_j(\omega) \cos \omega t \cdot d\omega,$$

где суммирование ведётся по всем трапециям.

$$\lambda(\omega) \cos \omega t \cdot d\omega = A \frac{\sin \omega_1 t}{\omega_1 t} \cdot \frac{\sin \Delta_1 t}{\Delta_1 t}. \quad (4.40)$$

По уравнению (4.30) можно вычислить интеграл для трапеции, где  $A$  - площадь трапеции. Параметры  $\omega_1$  и  $\Delta_1$  определяются в соответствии с рис. 4.33.

$$\omega_1 = \frac{\omega_a + \omega_b}{2}; \quad \Delta_1 = \frac{\omega_b - \omega_a}{2}.$$

Окончательно для  $X(t)$  получим

$$X_j(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^n A_j \left( \frac{\sin \omega_1 t}{\omega_1 t} \right) \left( \frac{\sin \Delta_1 t}{\Delta_1 t} \right). \quad (4.41)$$

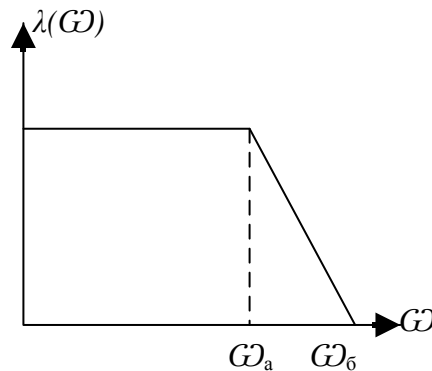


Рис. 4.33. К вычислению интеграла (4.30)

Суммирование в уравнении (4.31) производится по всем трапециям. Для удобства расчётов в справочниках приводятся функции  $\frac{\sin X}{X}$ .

Таким образом, для построения переходного процесса необходимо:

Вычислить частотную характеристику системы  $W_3(j\omega)$ .

Вычислить преобразование Фурье для действующего на систему возмущения  $f(t)$ .

Составить произведение комплексных функций, найденных в п.1 и 2 и выделить в этом произведении действительную часть  $P(\omega)$ .

Вычертить график функции  $P(\omega)$  и заменить её ломаной прямой.

Спроектировать точки излома на ось ординат и построить трапеции.

По формуле (4.31) подсчитать с помощью таблиц точки переходного процесса для разных значений времени.

### 4.7.3. Косвенные методы и оценки переходного процесса

При анализе переходных процессов в электрических системах используются три типа косвенных оценок:

а) оценки, связанные с распределением нулей и полюсов передаточной функции;

б) интегральные оценки;

в) оценки процесса по протеканию частотных характеристик системы.

Среди оценок, связанных с распределением нулей и полюсов  $W(p)$ , наиболее простой и распространенной является оценка процесса по расстоянию в плоскости корней от мнимой оси до ближайшего к ней корня. Это расстояние получило название "**степени устойчивости**".

Нулями передаточной функции  $W(p) = \frac{R(p)}{D(p)}$  называются корни числителя

$R(p)$ , а полюсами - соответственно корни знаменателя  $D(p)$ .

Рассмотрим уравнение, определяющее переходный процесс через корни  $p_i$ :

$$X(t) = \sum_{i=1}^n \frac{R(p_i)}{D'(p_i)} e^{p_i t} = \sum_{i=1}^n C_i e^{p_i t}.$$

Часто в этой сумме доминирующее значение имеет те слагаемые, у которых мал модуль действительной части корня  $p_i = -a_i \pm j\omega_i$ , т.е. преобладают те корни, которые ближе расположены к мнимой оси. В таких случаях оценивают переходный процесс по расстоянию от мнимой оси до ближайшего корня, т.е. по степени устойчивости. При этом система предполагается устойчивой.

Обозначим степень устойчивости  $\delta$ . Степень устойчивости называется **апериодической**, если ближайший корень к мнимой оси действительный.

Степень устойчивости называется **колебательной**, если ближайший корень к мнимой оси - комплексный.

Если степень устойчивости апериодическая, то преобладающее значение в переходном процессе будет иметь экспонента, определяемая этим корнем. Быстрота затухания переходного процесса в общих чертах будет определяться этой экспонентой.

Если степень устойчивости колебательная, то переходный процесс характеризуется затухающей синусоидой, огибающая которой имеет уравнение  $X(t) = C \cdot e^{-\delta t}$ , поэтому  $\delta$  является косвенной мерой быстроты затухания процесса (рис. 4.34).

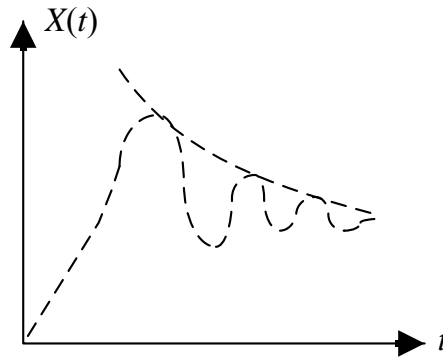


Рис. 4.34. Кривая переходного процесса при колебательной степени устойчивости

Для определения степени устойчивости могут быть использованы критерии Гурвица или Михайлова.

Согласно критерию Гурвица  $\Delta_n = a_n \Delta_{n-1}$ . Обращение  $\Delta_n$  в нуль может иметь место при  $a_n = 0$  (апериодическая устойчивость) и при  $\Delta_{n-1} = 0$  (колебательная устойчивость).

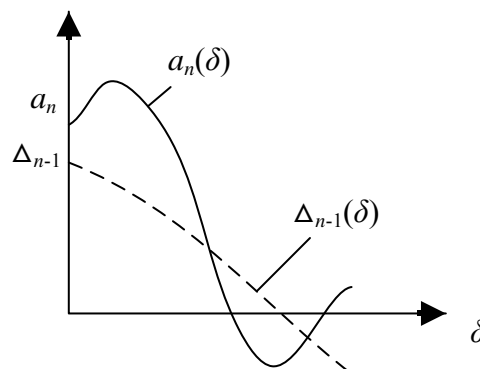


Рис. 4.35. Критерий Гурвица при определении степени устойчивости

Если ближайшая к началу координат точка пересечения с осью  $\delta$  принадлежит кривой  $a_n(\delta)$ , то имеет место апериодическая степень устойчивости (рис. 4.35), если первой пересекает ось  $\delta$  кривая  $\Delta_{n-1}(\delta)$ , то степень устойчивости - колебательная.

Используя критерий Михайлова для определения степени устойчивости, вычеркивают годограф при изменении  $\delta$  до тех пор, пока он не пройдет через начало координат рис. 4.36.

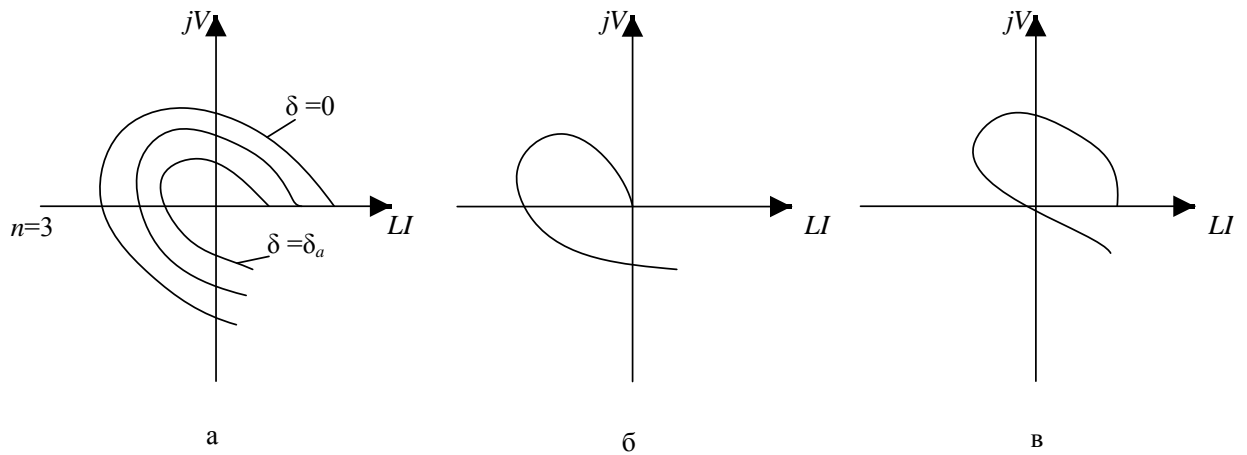


Рис. 4.36. Критерий Михайлова при определении степени устойчивости:  
 а- промежуточные положения годографа; б - аperiodическая степень устойчивости; в - колебательная степень устойчивости

### Интегральные оценки

Если в качестве возмущающего воздействия рассматривать функцию единичного скачка  $f(t) = 1(t)$ , то в идеальном случае переходный процесс протекает так, как изображено на рис. 4.37 (кривая 1). Реально переходный процесс изображается кривой 2.

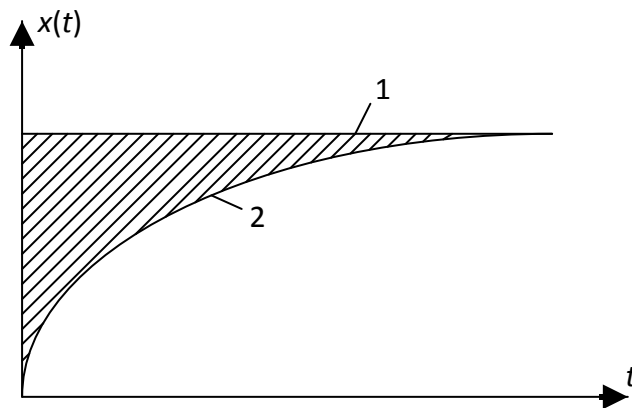


Рис. 4.37. Кривые идеального (1) и реального (2) переходных процессов

Реальный переходный процесс тем меньше отличается от идеального, чем меньше площадь, заключающаяся между кривыми истинного и идеального процессов. Эта площадь определяется интегралом

$$S = \int_0^{\infty} X(t) dt .$$

Чтобы исключить влияние на величину площади  $S$  отрицательных значений выходной координаты  $X(t)$  при колебательных процессах, применяется оценка вида

$$S = \int_0^{\infty} X^2(t) dt .$$

#### *Оценка переходного процесса по виду частотных характеристик*

Ранее было установлено, что переходный процесс выражается через действительную частотную характеристику замкнутой системы  $P(\omega)$  при помощи интеграла (4.29). Из этого выражения следует, что самые различные системы имеют мало отличающиеся переходные процессы, если их действительные частотные характеристики похожи.

Это даёт возможность по виду действительных частотных характеристик  $P(\omega)$  без построения самого переходного процесса высказать некоторые предварительные оценки о характере и особенностях переходного процесса.

Эти оценки строятся на основании некоторых признаков.

*Признак 1* — Если две системы имеют незначительно отличающиеся действительные частотные характеристики, то переходные процессы в этих системах отличаются мало. Разница в переходных процессах будет тем меньше, чем при больших частотах наступает различие в протекании частотных характеристик.

*Признак 2* — Для того, чтобы переходный процесс протекал монотонно, достаточно, чтобы действительная частотная характеристика была положительной функцией частоты с отрицательной и убывающей по абсолютной величине производной.

*Признак 3* — Процесс заведомо немонотонный и имеется перерегулирование, если не выполняется условие  $|p(\omega)| < p(0)$  при всех частотах.

*Признак 4* — Если в интервале положительных частот  $0 < \omega < \omega_n$  одна действительная частотная характеристика проходит выше другой, т.е.  $p_2(\omega) > p_1(\omega)$ , то переходные процессы  $X_2(t)$  и  $X_1(t)$ , соответствующие им, протекают в интервале времени  $0 < t < \frac{\pi}{\omega_n}$ , так что выполняется неравенство  $X_2(t) > X_1(t)$ .

#### **4.7.4. Задачи для самостоятельного решения [6]**

**Задача 4.1.** Найти передаточную функцию и дифференциальное уравнение пассивной электрической цепи (рис. 4.38) для напряжений  $u_1$  и  $u_2$ .

**Задача 4.2.** Составить дифференциальное уравнение и найти передаточную функцию для трансформатора (рис. 4.39):

а) относительно напряжений  $u_1$  и  $u_2$ ;

б) если входной величиной является ток  $i_1$ , а выходной - напряжение  $u_2$ .



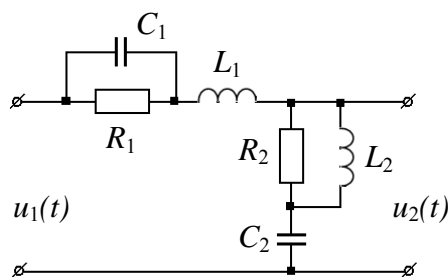


Рис. 4.38

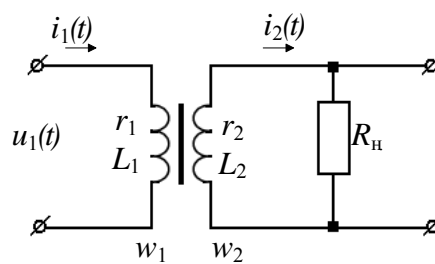


Рис. 4.39

**Задача 4.3.** Составить дифференциальное уравнение и передаточную функцию относительно напряжений  $u_1$  и  $u_2$  для пассивной электрической  $R$ - $C$  цепи с мостовой схемой (рис. 4.40):

- в общем виде при  $R_1 \neq R_2$  и  $C_1 \neq C_2$ ;
- если сопротивление резисторов  $R_1 = R_2$  и емкость конденсаторов  $C_1 = C_2$ .

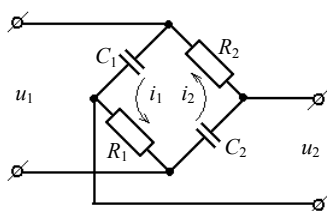


Рис. 4.40

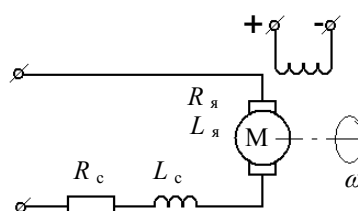


Рис. 4.41

**Задача 4.4.** Составить дифференциальное уравнение движения и передаточную функцию двигателя с независимым возбуждением (рис. 4.41) относительно угловой скорости  $\omega$  на холостом ходу ( $M_H = 0$ ).

**Задача 4.5.** Для компенсации индуктивного сопротивления обмотки управления двухфазного асинхронного двигателя в ее цепь включают конденсатор емкостью  $C$ . Запишите передаточную функцию двигателя с учетом динамических свойств образовавшегося контура  $L$ - $C$ - $R$ .

**Задача 4.6.** Определите, какое динамическое звено имеет динамическую характеристику, описываемую функцией

$$y(t) = 50(e^{-5t} - e^{-10t}).$$

Рассчитайте параметры этого звена и запишите выражение передаточной функции.

**Задача 4.7.** Составьте передаточную функцию разомкнутой системы на основании структурной схемы (рис. 4.42):

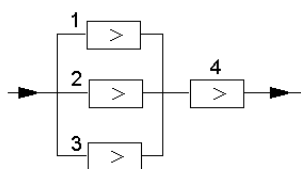


Рис. 4.42

- 1 – интегрирующее звено ( $T_1 = 10$  с);
- 2 – дифференцирующее звено ( $T_2 = 5$  с,  $k_2 = 2$ );
- 3 – апериодическое ( $T_3 = 2$  с,  $k_3 = 4$ );
- 4 – безинерционное ( $k_4 = 25$ ).

**Задача 4.8.** Составьте передаточную функцию замкнутой системы, структурная схема которой показана на рис. 4.43.

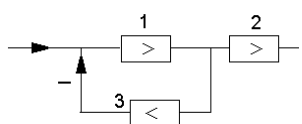


Рис. 4.43

- 1 – апериодическое ( $T_1 = 10$  с,  $k_1 = 5$ );
- 2 – дифференцирующее ( $T_2 = 5$  с,  $k_2 = 2$ );
- 3 – усилительное ( $k_3 = 12$ ).

**Задача 4.9.** Оцените устойчивость системы по критерию Гурвица на основании характеристического уравнения:

$$D(p) = 12p^3 + 4p^2 + 10p + 8.$$

**Задача 4.10.** Оцените устойчивость системы по критерию Рауса на основании характеристического уравнения:

$$D(p) = 2p^5 + 14p^4 + 36p^3 + 54p^2 + 18p + 5.$$

**Задача 4.11.** Оцените устойчивость систем на основании ее АФЧХ (рис. 4.44):

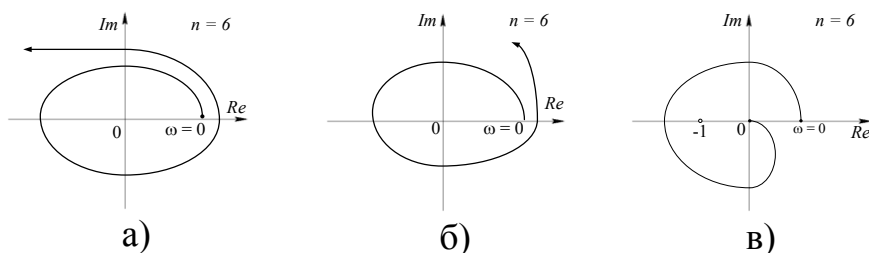


Рис. 4.44

## 5. КУРСОВАЯ РАБОТА: СТРУКТУРА И ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ

### 5.1. Структура и содержание курсовой работы

Курсовая работа – это документ, представляющий собой форму отчетности о самостоятельной работе студента по дисциплине, включающий аналитическую и расчетную части, и представляющий собой законченное решение поставленной проблемы в рамках изучаемой дисциплины.

Основной задачей курсовой работы по дисциплине «Математические задачи энергетики и применение ЭВМ» является расчет и анализ установившихся режимов системы электроснабжения крупного предприятия, которая имеет наряду со сложнзамкнутой сетью достаточно развитую разомкнутую сеть и питается от одного источника (районной энергосистемы).

Курсовая работа состоит из трех разделов: статистическая обработка и анализ графиков электрических нагрузок, расчет параметров схемы замещения сети и расчет естественного распределения потоков мощности для разомкнутой и замкнутой сети.

Исходными данными для выполнения курсовой работы являются структурная схема системы электроснабжения и параметры ее элементов, которые выдаются индивидуально. Питание системы электроснабжения завода осуществляется от районной энергосистемы через одну крупную системную подстанцию (узел Б). Электрические сети представлены структурной схемой с указанием длины линии (км), марки и сечения проводов. При этом сети высокого напряжения выполнены воздушными линиями электропередачи, а низковольтные являются кабельными.

Районная энергосистема имеет характерные часы максимальной нагрузки: утром – с 9 до 11 ч, вечером – с 18 до 22 ч и часы минимальных нагрузок – ночью с 0 до 5 ч.

В индивидуальном задании представлены электрические нагрузки в узлах сети  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  в форме суточных графиков активной и реактивной мощности. Мощность нагрузки в узлах  $E$ ,  $F$ ,  $G$  считается неизменной во времени.

Напряжение на шинах районной подстанции в часы максимальных нагрузок энергосистемы задается вариантом задания, а в часы минимальных нагрузок – принимается равным номинальной величине.

#### *5.1.1. Раздел 1. Статистическая обработка графиков электрических нагрузок*

Исходными данными для выполнения раздела являются суточные графики электрических нагрузок узлов  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ , которые представляют собой зависимости потребляемой мощности, записанные по показаниям счетчиков активной и реактивной энергии, снятым через определенные одинаковые интервалы времени (30 мин.).

В индивидуальных заданиях график представлен в табличном виде, где

первое значение соответствует 0:30 ч, а последнее – 0:00 ч. Значения активной и реактивной мощностей заданы в МВт и Мвар соответственно.

Первый раздел курсовой работы подразумевает выполнение следующих пунктов:

1. Построение графиков электрических нагрузок в программном пакете MS Excel. График нагрузки должен представлять собой гистограмму, отображающую соответствие величин нагрузок интервалам времени (см. рис. 5.1).

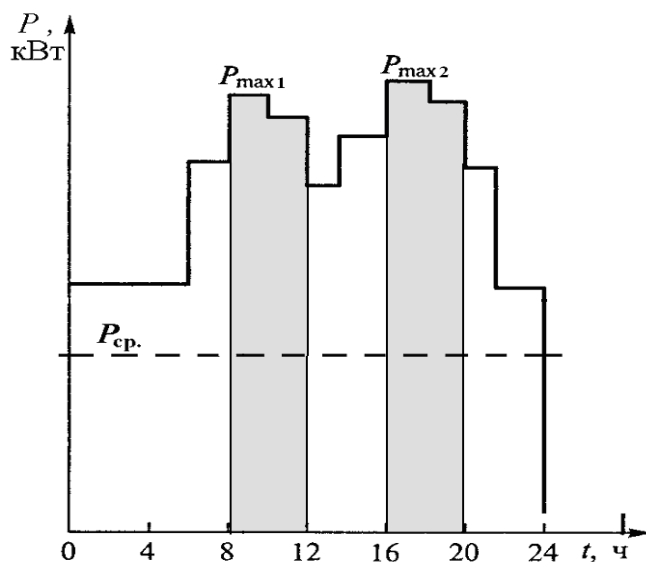


Рис. 5.1. Суточный график электрических нагрузок

2. Расчет точечных оценок случайных величин (значений активной и реактивной мощности) для суточного графика нагрузки, а также интервалов ночного минимума, утреннего и вечернего максимумов. Для указанных интервалов графиков нагрузки по активной и реактивной мощности в каждом узле необходимо рассчитать выборочную среднюю мощность (математическое ожидание) нагрузки (1.29), среднее квадратическое (стандартное) отклонение (1.36), выборочную дисперсию (1.34), коэффициент вариации.

3. Расчет интервальных оценок случайных величин (значений активной и реактивной мощности): доверительный интервал средней величины (1.38), доверительный интервал стандартного отклонения (или дисперсии) (1.39).

4. Расчет коэффициентов парной корреляции между нагрузками в узлах схемы и математическое моделирование зависимости между статистически наиболее тесно связанными нагрузками.

В разделе необходимо привести подробные расчеты для одного из интервалов, а результаты остальных расчетов должны быть сведены в таблицы.

Все расчеты выполняются с использованием программного пакета MS Excel или MathCad.

### 5.1.2. Раздел 2. Расчет параметров схемы замещения сети

Используя типовые схемы замещения отдельных фрагментов сети (воздушные и кабельные линии, трансформаторы) и ее структурную схему, надо

составить схему замещения сети. Схема замещения вычерчивается с использованием специализированного программного обеспечения (КОМПАС, AutoCAD, Visio и т.п.) или вручную. После вычерчивания схемы замещения сети на нее наносятся полученные в соответствии с разделом XX значения сопротивлений и мощности или токи нагрузки. В зависимости от принятого метода расчета эти характеристики могут быть представлены числами в комплексной форме. В случае предварительного использования метода расщепления составляются две схемы замещения. Одна содержит активные сопротивления и реактивные мощности (токи) нагрузки, а вторая схема – реактивные сопротивления и активные мощности (токи) нагрузки.

### ***5.1.3. Раздел 3. Расчет естественного распределения потоков мощности для разомкнутой и замкнутой сети***

Расчет рабочего состояния сети (системы) по составленной схеме замещения предполагает выполнения следующих пунктов:

1. Составление направленного графа электрической сети и матриц инцидентов в соответствии с п. X.X.

2. Расчет напряжений в узлах и токов в ветвях схемы с использованием методов, приведенных в п. X.X-X.X. Выбор наиболее рационального метода расчета параметров режима осуществляется студентом самостоятельно на основе структурной схемы электрической сети. Все расчеты выполняются в программном пакете MathCad.

3. Расчет напряжений в узлах и токов в ветвях схемы с использованием программно-вычислительного комплекса КАТРАН (см. п. X.X).

4. Проверка результатов расчета по первому закону Кирхгофа.

В пояснительную записку должны быть включены структурные схемы с результатами расчетов режимов (токи в ветвях и напряжения в узлах) для утреннего и вечернего максимумов, а также ночного минимума.

В основной части курсовой приводится расчет параметров режима для одного из характерных интервалов максимальных или минимальных нагрузок. Остальные расчеты должны быть приведены в приложениях.

### ***5.1.4. Оформление курсовой работы***

Работа оформляется в виде рукописи (пояснительной записки), объемом не более 20-25 страниц, излагающей постановку и решение задачи, содержание исследования и его основные результаты. Обязательным структурным элементом курсовой работы является аналитический обзор темы, содержащий обобщенные, систематизированные и критически осмысленные сведения об истории, современном состоянии, тенденциях и перспективах развития предмета исследования. Курсовая работа завершается заключением, в котором излагаются выводы, сформулированные из анализа параметров расчетных режимов и возможностей разработанных программ-приложений.

Оформление курсовой работы должно соответствовать СМК-О-СМГТУ-

42-29 «Курсовой проект (работа): структура, содержание, общие правила выполнения и оформления» [X].

Курсовая работа должна содержать следующие элементы:

- титульный лист;
- задание;
- содержание;
- введение;
- основная часть;
- заключение;
- список использованных источников;
- приложения.

*Титульный лист* является первой страницей работы и оформляется по установленной форме, приведенной на рис. 5.2.

*Содержание* должно отражать перечень структурных элементов работы с указанием номеров страниц, с которых начинается их месторасположение в тексте, в том числе введение, разделы, подразделы, пункты (если они имеют наименование), заключение, список использованных источников, приложения.

*Введение* кратко характеризует актуальность и социальную значимость темы, степень ее разработанности в отечественной и мировой теории и практике, цели и задачи, объект и предмет, базу исследования или проектирования, методы сбора и обработки информации, научные гипотезы.

Основную часть следует делить на разделы, подразделы, пункты. Каждый элемент основной части должен представлять собой законченный в смысловом отношении фрагмент работы.

В «*Заключении*» раскрывается значимость рассмотренных вопросов для науки и практики, приводятся главные выводы, характеризующие итоги проделанной работы, излагаются предложения и рекомендации по внедрению полученных результатов и дальнейшему развитию темы.

В «*Список использованных источников*» включают все источники информации, на которые имеются ссылки в тексте и которые использовались при написании курсовой работы. Сведения об источниках информации приводятся в соответствии с требованиями ГОСТ 7.05 и ГОСТ 7.82. Источники в списке нумеруются арабскими цифрами без точки в порядке их упоминания в тексте, либо в алфавитном порядке. Ниже приведен пример оформления списка использованных источников.

### **Пример**

#### **Список использованных источников**

1 Андреев В.А., Бондаренко Е.В. Релейная защита, автоматика и телемеханика в системах электроснабжения: учебник для вузов; под ред. В.А. Андреева. М.: «Высш. школа», 1975. 375 с.

Поляков И.Д., Паздерин А.В. Обзор подходов к трехфазному оцениванию состояния распределительных сетей // Электротехнические системы и комплексы. 2018. № 2(39). С. 18-27. [https://doi.org/10.18503/2311-8318-2018-2\(39\)-18-27](https://doi.org/10.18503/2311-8318-2018-2(39)-18-27)

**Министерство науки и высшего образования РФ**

**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Магнитогорский государственный технический университет  
им. Г.И. Носова»**

Институт энергетики и автоматизированных систем

Кафедра электроснабжения промышленных предприятий

**КУРСОВАЯ РАБОТА**

по дисциплине «Математические задачи энергетики и применение ЭВМ»

На тему: \_\_\_\_\_

Исполнитель: \_\_\_\_\_ студент \_\_\_ курса гр. \_\_\_\_\_  
Ф.И.О.

Руководитель: \_\_\_\_\_  
Ф.И.О., уч. степень, уч. звание, должность

Работа допущена к защите «\_\_\_» \_\_\_\_\_ 20\_\_ г. \_\_\_\_\_  
(подпись)

Работа защищена «\_\_\_» \_\_\_\_\_ 20\_\_ г. с оценкой \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_ (оценка) (подпись)

Магнитогорск, 20\_\_

Рис. 5.2. Форма титульного листа курсовой работы

3 **Малафеев, Алексей Вячеславович.** Конструкции элегазовых выключателей: учебное пособие / Малафеев А.В., Панова Е.А., Варганова А.В.; ФГБОУ ВО «Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова». – Изд. 2-е, испр. – Электрон. текстовые дан. (11,1 Мб). – Магнитогорск: ФГБОУ ВО «МГТУ им. Г.И. Носова», 2016. – 1 электрон. опт. диск (CD-R). – Систем. требования: IBM PC, любой, более 1GHz; 512 Мб RAM; 10 Мб HDD; MS Windows XP и выше; Adobe Reader 8.0 и выше; CD/DVD-ROM дисковод; мышь. – Загл. с титул. экрана.

В «*Приложения*» рекомендуется включать материалы иллюстрационного и вспомогательного характера, например дополнительные либо повторяющиеся расчеты. На все приложения в тексте работы должны быть даны ссылки. Приложения оформляют как продолжение курсовой работы на следующих ее страницах. Каждое приложение должно начинаться с нового листа и иметь тематический заголовок и обозначение.

*Текст* должен быть выполнен с одной стороны листа белой бумаги формата А4 с применением печатающих и графических устройств с соблюдением следующих размеров полей: левое – 20 мм, правое – 10 мм, верхнее – 20 мм, нижнее – 20 мм. При наборе текста в MS Word следует придерживаться следующих требований: основной шрифт Times New Roman, размер шрифта 12 пт, цвет – черный, абзацный 12,5 мм, межстрочный интервал – полуторный. Решается использовать компьютерные возможности акцентирования внимания на определенных терминах, формулах, применяя шрифты разной гарнитуры.

Каждый раздел текста рекомендуется начинать с новой страницы. *Заголовки* разделов курсовой работы должны иметь порядковые номера, обозначенные арабскими цифрами и записанные с абзацного отступа. Подразделы должны иметь нумерацию в пределах каждого раздела, пункты – в пределах подраздела, подпункты – в пределах пункта. Точка в конце номеров разделов, подразделов, пунктов, подпунктов не ставится. Расстояние между заголовком и текстом должно быть равно удвоенному межстрочному расстоянию; между заголовками раздела и подраздела - одному межстрочному расстоянию.

Заголовки структурных элементов (содержание, введение, заключение, список использованных источников) записываются симметрично тексту, с прописной буквы и не нумеруются.

Заголовок «*Приложение*» и его буквенное обозначение (заглавные буквы русского алфавита, начиная с А, за исключением букв Ё, З, Й, О, Ч, Ь, Ы, Ъ) располагают наверху посередине страницы, а под ним в скобках указывают статус приложения, например: (рекомендуемое), (справочное), (обязательное). Каждое приложение должно начинаться с нового листа и иметь тематический заголовок и обозначение.

*Таблицы* помещаются в тексте сразу же за первым упоминанием о ней или на следующей странице. Таблицы, за исключением приведенных в приложении, нумеруются в пределах каждого раздела. В этом случае номер таблицы состоит из номера раздела и порядкового номера таблицы в пределах раздела, разделенных точкой. Допускается сквозная нумерация таблиц арабскими цифрами



по всему тексту курсовой работы. Таблицы каждого приложения обозначают отдельной нумерацией арабскими цифрами с добавлением перед цифрой обозначения приложения. Название таблицы помещают над таблицей после ее номера через тире, с прописной буквы (остальные строчные), без абзацного отступа (см. пример на рис. 5.3). Надпись «Таблица...» пишется над левым верхним углом таблицы.

Если строки и графы таблицы выходят за формат страницы, то в первом случае в каждой части таблицы повторяется шапка, во втором случае – боковик. Над последующими частями таблиц указывается слово: «Продолжение», а при наличии нескольких таблиц в тексте курсовой работы указывается номер таблицы, например: «Продолжение таблицы 2.3». На все таблицы в тексте должны быть даны ссылки следующего вида: «... показано в таблице 3.1».

Таблица 1.7 – Элегазовые выключатели

Тип выключателя	Номинальное напряжение, кВ	Номинальный ток, А
38PM31-12	38	1200
38PM31-20	38	2000
38PM31-30	38	3000

Рис. 5.3. Пример оформления таблицы

*Иллюстрации* (чертежи, графики, схемы, компьютерные распечатки, диаграммы, фотоснимки и т.п.) следует располагать непосредственно после первого упоминания в тексте, или на следующей странице. Иллюстрации могут быть в компьютерном исполнении, в том числе и цветные. Все иллюстрации именуется в тексте рисунками и нумеруются в пределах каждого раздела. Номер иллюстрации составляется из номера раздела и порядкового номера иллюстрации в пределах данного раздела, разделенных точкой, например: «рисунок 5.1» (первый рисунок пятого раздела). На все иллюстрации должны быть даны ссылки. При ссылках на иллюстрации следует писать «... в соответствии с рисунком 1.2».

Иллюстрация располагается по тексту документа, если она помещается на листе формата А4. Если формат иллюстрации больше А4, то ее следует помещать в приложении. Иллюстрации следует размещать так, чтобы их можно было рассматривать без поворота документа или с поворотом по часовой стрелке.

Иллюстрации должны иметь наименование «Рисунок В.2 – Схема алгоритма» и пояснительные данные (подрисуночный текст). Слово «рисунок», его номер и наименование помещают ниже изображения после пояснительных данных симметрично иллюстрации.

*Формулы* следует выделять из текста в отдельную строку. Выше и ниже каждой формулы или уравнения должно быть оставлено не менее одной свободной строки. Формулы должны приводиться в общем виде с расшифровкой входящих в них буквенных значений. Буквы греческого, латинского алфавитов и цифры следует выполнять с помощью компьютерного набора курсивом или

чертежным шрифтом, в соответствии с требованиями стандартов ЕСКД, высота букв и цифр при компьютерном наборе должна быть на 2 пт больше, чем в основном тексте работы. Пояснение значения символов и числовых коэффициентов, входящих в формулу, должны быть приведены непосредственно под формулой. Значение каждого символа дают в той последовательности, в какой они приведены в формуле. Первая строка расшифровки должна начинаться со слова «где» без двоеточия после него. Формулы, следующие одна за другой и не разделенные текстом, отделяют запятой. Формулы, за исключением приведенных в приложении, должны нумероваться в пределах всего текста курсовой арабскими цифрами в круглых скобках в крайнем правом положении на строке. Например:

$$U = IR, \quad (5.1)$$

где  $I$  – ток, А;  $R$  – сопротивление, Ом.

Допускается нумерация формул в пределах раздела. В этом случае номер формулы состоит из номера раздела и порядкового номера формулы в пределах раздела, разделенных точкой, например (2.10) – десятая формула второго раздела. Ссылки в тексте на порядковые номера формул дают в скобках. Например «... определяется в соответствии с (1.5)».

Страницы курсовой работы следует нумеровать арабскими цифрами, соблюдая сквозную нумерацию по всему тексту. *Номер страницы* без точки проставляют в центре нижней части листа. Титульный лист и задание включают в общую нумерацию страниц, но номер страницы на них не проставляют.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Электрические системы. Т.1. Математические задачи энергетики / Под ред. В.А. Веникова. — М.: Высш.шк., 1981. — 288с.
2. Белых, Г.Б. Математические задачи энергетики и применение ЭВМ: учеб. пособие. — Магнитогорск: ГОУ ВПО «МГТУ», 2008. — 138 с.
3. Румшицкий, Л.З. Элементы теории вероятностей. — М.: Наука, 1970. — 256 с.
4. Гук, Ю.Б. Теория и расчет надёжности систем электроснабжения / Ю.Б. Гук, Н.А. Казак, А.В. Мясников; под ред. Р.Я. Федосенко. — М.: Энергия, 1970. — 176 с.
5. Шапкин, А.С. Задачи по высшей математике, теории вероятностей, математической статистике, математическому программированию с решениями. — М.: Изд.-торг. корпорация «Дашков и К°», 2006. — 432 с.
6. Пригода, В.П. Введение в теорию эксперимента: учебное пособие. — Магнитогорск: ГОУ ВПО «МГТУ им. Г.И. Носова», 2006. — 160 с.
7. Ильинский, Н.Ф. Элементы теории эксперимента. — М.: МЭИ, 1983. — 92 с.
8. Шеметов, А.Н. Сборник практических заданий по дисциплине «Математические задачи энергетики и применение ЭВМ» для студентов направления 140200 всех форм обучения. Магнитогорск: Издв-во Магнитогорск. гос. техн. ун-та им. Г.И. носова, 2011. — 53 с.
9. Электрическая часть электростанций и подстанций. Справочные материалы для курсового и дипломного проектирования : учебное пособие для вузов / Б. Н. Неклепаев, И. П. Крючков. - 4-е изд., перераб. и доп. - Москва : Энергоатомиздат, 1989. - 605, [2] с

## ГЛОССАРИЙ

**Амплитудно-фазовая частотная характеристика (АФЧХ)** — вариант графического представления частотного отклика линейной стационарной динамической системы в виде графика в комплексных (полярных) координатах. На таком графике частота выступает в качестве параметра кривой, фаза и амплитуда системы на заданной частоте представляется углом и длиной радиус-вектора каждой точки характеристики. По сути такой график объединяет на одной плоскости амплитудно-частотную и фазо-частотную характеристики.

**Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ)** — зависимость амплитуды выходного сигнала (комплексной передаточной функции) некоторой линейной системы от частоты её входного гармонического сигнала. Значение АЧХ показывает, во сколько раз амплитуда сигнала этой частоты на выходе системы отличается от амплитуды выходного сигнала на другой частоте. На графике АЧХ в декартовых координатах по оси абсцисс откладывается частота, а по оси ординат — отношение амплитуд выходного и входного сигналов системы.

**Вариационный ряд** — расположенная в порядке возрастания последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин, которая служит для построения функции эмпирического распределения в виде полигона или гистограммы.

**Вектор** — упорядоченный набор (массив) элементов, каждый из которых хранит одно значение, идентифицируемое с помощью одного числового индекса. В простейшем случае массив имеет постоянную длину и хранит единицы данных одного и того же типа, а в качестве индексов выступают целые числа.

**Вероятность** — количественная оценка (относительная мера) возможности наступления некоторого события, принимающая значения от 0 до 1, где значение 1 соответствует достоверному событию, а невозможное событие имеет вероятность 0. В экспериментальных исследованиях вероятностью случайного события принято называть отношение числа положительных исходов к общему количеству проведенных опытов.

**Восстановление** — в теории надежности возврат системы в исходное состояние после какого-либо нарушения ее работоспособности (отказа), или возврат к исходным значениям нарушенных параметров режима.

**Вырожденная матрица** — (синонимы: сингулярная матрица, особая матрица, особенная матрица) — квадратная матрица, определитель которой равен нулю. У вырожденной матрицы нет стандартной обратной матрицы.

**Гистограмма** — способ графического представления табличных данных, при котором количественные соотношения показателей представлены в виде прямоугольников, площади которых пропорциональны искомым значениям. Чаще всего для удобства восприятия ширину прямоугольников принимают одинаковой, а соотношения отображаемого параметра определяет высота. В математической статистике гистограмма дает наглядное представление функции плотности вероятности (количества повторений) случайной величины, построенное по ее выборке.

**Годограф** — кривая, соединяющая концы вектора переменной величины (скорости, ускорения, силы тока, напряжения и т.д), отложенного в разные моменты времени от одной точки. В теории автоматического управления годограф описывает траекторию перемещения вершины вектора передаточной функции при изменении частоты входного сигнала от 0 до  $+\infty$ .

**Граф** — абстрактный математический объект, представляющий собой упорядоченное (нумерованное) множество узлов-вершин и соединений между ними (ребер). При помощи графа можно описать наличие и последовательность связей между отдельно расположенными объектами (например схему ЛЭП и подстанций).

**Динамическая устойчивость** — способность энергосистемы сохранять синхронную параллельную работу генераторов при значительных возмущающих воздействиях, связанных с короткими замыканиями или внезапными отключениями оборудования (генераторов, линий, трансформаторов).

**Дисперсия случайной величины** — мера разброса значений случайной величины, рассчитывается как математическое ожидание квадратов отклонений случайной величины от её среднего значения.

**Доверительный интервал** — интервал значений, в пределах которого с заданной доверительной вероятностью (как правило 90%, 95% или 99%) находится истинное математическое ожидание (генеральное среднее).

**Ковариация** — мера линейной зависимости двух случайных величин. Если ковариация положительна, то с ростом значений одной случайной величины значения второй имеют тенденцию возрастать, а если знак отрицательный — то убывать.

**Корреляция** — статистическая взаимосвязь двух (или более) случайных величин, при которой изменения значений одной из этих величин сопровождается систематическому изменению значений другой (или других) величин. Корреляция двух величин может свидетельствовать о существовании общей причины их изменения, хотя сами явления напрямую не взаимодействуют.

**Математическое ожидание** — среднее значение случайной величины при стремлении количества её измерений к бесконечности. Среднее арифметическое для конечного числа испытаний обычно называют точечной оценкой (приближенным значением) математического ожидания.

**Матрица** — математический объект, записываемый в виде прямоугольной таблицы элементов, многомерная совокупность строк и столбцов, на пересечении которых находятся единицы данных (элементы) одного типа.

**Матрица инцидентий (инцидентности)** — одна из форм представления графа, в которой указываются связи между его элементами — ребрами и вершинами. Столбцы матрицы соответствуют ребрам, строки — вершинам. Ненулевое значение в ячейке матрицы указывает на наличие связи между вершиной и ребром (их инцидентность).

**Медиана** — в математической статистике приближенное среднее значение выборки, середина вариационного ряда. Если все элементы выборки различны, то медиана — это такое число, что ровно половина из элементов выборки больше него, а другая половина меньше него. В более общем случае медиану

можно найти, упорядочив элементы выборки по возрастанию или убыванию и взяв средний элемент.

**Мода** — в математической статистике приближенное среднее значение выборки — значение во множестве наблюдений, которое встречается наиболее часто (с наибольшей вероятностью). Мода упорядоченного вариационного ряда — элемент с наибольшей относительной частотой появления.

**Направленный (ориентированный) граф** — абстрактный математический объект, представляющий собой упорядоченное множество вершин и соединений между ними, ребрам которого присвоено направление. Путь графа от начальной (балансирующей) вершины до конечной не должен содержать повторяющихся ребер-направлений.

**Обратная связь** — это процесс, приводящий к тому, что результат функционирования какой-либо системы влияет на параметры, от которых зависит функционирование этой системы. При этом на вход системы подаётся сигнал, пропорциональный её выходному сигналу (или, в общем случае, являющийся функцией этого сигнала). Различают положительную и отрицательную обратную связь. Отрицательная обратная связь изменяет входной сигнал таким образом, чтобы противодействовать изменению выходного сигнала, это делает систему более устойчивой к случайному изменению параметров. Положительная обратная связь, наоборот, усиливает изменение выходного сигнала, поэтому такая система проявляет тенденции к неустойчивости, в ней могут возникать незатухающие колебания.

**Параметр потока отказов** — предел отношения математического ожидания числа отказов восстанавливаемого объекта за достаточно малую его наработку к значению этой наработки. Характеризует среднее количество отказов в единицу времени.

**Передаточная функция** — один из способов математического описания динамической системы, представляет собой дифференциальный оператор (преобразование Лапласа), выражающий связь между входом и выходом линейной стационарной системы при нулевых начальных условиях.

**Полигон** — в математической статистике один из способов графического представления плотности вероятности случайной величины. Представляет собой ломаную, соединяющую точки, соответствующие срединным значениям интервалов группировки выборки и частотам этих интервалов.

**Регрессия** — в математической статистике выражение, отражающее форму связи зависимой переменной  $y$  от независимых переменных  $x$  при условии, что это выражение будет иметь статистическую значимость. В отличие от чисто функциональной зависимости, когда каждому значению независимой переменной  $x$  соответствует только одно определённое значение величины  $y$ , при регрессионной связи одному и тому же значению  $x$  могут соответствовать в зависимости от случая различные значения величины  $y$ .

**Резервирование** — метод повышения надёжности технических устройств посредством введения аппаратной или временной избыточности — включения в схему запасных (резервных) элементов и связей, дополнительных по сравне-

нию с минимально необходимым для выполнения заданных функций в данных условиях работы.

**Случайная величина** — это численное выражение результата случайного события, которое в результате испытания в одних и тех же условиях может принимать различные числовые значения, зависящие от случайных факторов и заранее непредсказуемые.

**Случайное событие** — базовое понятие теории вероятностей — такое событие, которое при определенных заданных условиях (при воспроизведении опыта) может наступить, а может и не наступить.

**Среднеквадратическое отклонение** — в теории вероятностей и мат.статистике наиболее распространённый показатель рассеивания значений случайной величины относительно её математического ожидания. Определяется как квадратный корень из дисперсии случайной величины.

**Статическая устойчивость** — способность энергосистемы сохранять синхронную параллельную работу генераторов при малых возмущениях, вызванных медленными изменениями параметров режима (мощности нагрузки или напряжения сети).

**Схема замещения** — электрическая схема, в которой все реальные элементы заменены их эквивалентными схемами (идеализированными сопротивлениями и ЭДС), рассчитанные напряжения и токи на зажимах которых совпадают (часто с какой-то погрешностью) с измеренными токами и напряжениями на зажимах реального элемента. Уравнения для токов и напряжений эквивалентной схемы реального элемента являются его математической моделью.

**Фазо-частотная характеристика (ФЧХ)** — зависимость разности фаз между выходным и входным гармоническими сигналами от частоты гармонических колебаний на входе. Часто ФЧХ используют для оценки фазовых искажений формы сложного сигнала, вызываемых неодинаковой задержкой во времени его отдельных гармонических составляющих при их прохождении по цепи. В теории управления ФЧХ звена определяется тангенсом отношения мнимой части передаточной функции к действительной.

Учебное текстовое электронное издание

**Белых Герман Борисович**

**Шеметов Андрей Николаевич**

**Кондрашова Юлия Николаевна**

**Варганова Александра Владимировна**

**Панова Евгения Александровна**

## **МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ЭНЕРГЕТИКИ**

Учебное пособие

4,82 Мб

1 электрон. опт. диск

г. Магнитогорск, 2019 год

ФГБОУ ВО «МГТУ им. Г.И. Носова»

Адрес: 455000, Россия, Челябинская область, г. Магнитогорск,  
пр. Ленина 38

ФГБОУ ВО «Магнитогорский государственный  
технический университет им. Г.И. Носова»

Кафедра электроснабжения промышленных предприятий

Центр электронных образовательных ресурсов и

дистанционных образовательных технологий

e-mail: ceor\_dot@mail.ru