



Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова»

Л.Л. Демиденко
Г.М. Коринченко

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

*Утверждено Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия*

Магнитогорск
2019

УДК 519.2.21
ББК 22.171

Рецензенты:

кандидат педагогических наук,
заместитель директора,
Филиал ОАНО ВО «Московский психолого-социальный университет»
в г. Магнитогорске
А.Ю. Воробьева

кандидат физико-математических наук,
заведующая кафедрой высшей математики,
ФГБОУ ВО «Магнитогорский государственный технический
университет им. Г.И. Носова»
Е.А. Пузанкова

Демиденко Л.Л., Коринченко Г.М.

Теория вероятностей [Электронный ресурс] : учебное пособие / Людмила Леонтьевна Демиденко, Гульнара Марсовна Коринченко ; ФГБОУ ВО «Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова». – Электрон. текстовые дан. (1,26 Мб). – Магнитогорск : ФГБОУ ВО «МГТУ им. Г.И. Носова», 2019. – 1 электрон. опт. диск (CD-R). – Систем. требования : IBM PC, любой, более 1 GHz ; 512 Мб RAM ; 10 Мб HDD ; MS Windows XP и выше ; Adobe Reader 8.0 и выше ; CD/DVD-ROM дисковод ; мышь. – Загл. с титул. экрана.

ISBN 978-5-9967-1653-1

Пособие составлено в соответствии с рабочей программой дисциплины «Теория вероятностей, математическая статистика» для специальности 10.05.03 Информационная безопасность автоматизированных систем. Содержит краткое изложение следующих тем: элементы теории множеств, комбинаторики и теории меры, аксиоматика теории вероятностей, независимость событий и условные вероятности, классические вероятностные схемы и классические предельные теоремы, случайные величины и случайные векторы. В каждом разделе приводятся краткое теоретическое введение, примеры решения типовых задач, контрольные вопросы и задачи для самостоятельного решения.

Пособие предназначено для студентов вузов, обучающихся по техническим специальностям и направлениям подготовки.

УДК 519.2.21
ББК 22.171

ISBN 978-5-9967-1653-1

© Демиденко Л.Л., Коринченко Г.М., 2019

© ФГБОУ ВО «Магнитогорский государственный
технический университет им. Г.И. Носова», 2019

Содержание

ВВЕДЕНИЕ.....	5
1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ, КОМБИНАТОРИКИ И ТЕОРИИ МЕРЫ	6
1.1. Множества и операции над ними.....	6
1.2. Алгебры и σ -алгебры подмножеств.....	10
1.3. Выборки из конечной генеральной совокупности: упорядоченные и неупорядоченные, с возвращением и без возвращений	11
1.4. Биномиальные и полиномиальные коэффициенты.....	15
1.5. Полиномиальная теорема, бином Ньютона	16
Решение типовых примеров.....	16
Контрольные вопросы и задачи.....	19
2. АКСИОМАТИКА ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ	21
2.1. События.....	21
2.2. Вероятностная мера (функция)	23
2.3. Аксиоматика Колмогорова теории вероятностей	24
2.4. Конечное вероятностное пространство с классическим типом вероятности.....	25
2.5. Вероятностное пространство с геометрическим типом вероятности	26
Решение типовых примеров.....	28
Контрольные вопросы и задачи.....	31
3. ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ	33
3.1. Независимость событий	33
3.2. Теоремы сложения	33
3.2.1. Теорема сложения вероятностей для двух событий.....	33
3.2.2. Теорема сложения вероятностей для нескольких событий	34
3.2.3. Полная группа событий	36
3.2.4. Противоположные события.....	37
3.2.5. Принцип практической невозможности маловероятных событий	38
3.2.6. Задачи на тему «Теорема сложения»	39
3.3. Теоремы умножения вероятностей	40
3.3.1. Произведение событий	40
3.3.2. Условная вероятность	40
3.3.3. Произведение двух событий	41
3.3.4. Теорема умножения вероятностей для двух событий	41
3.3.5. Зависимые события. Теорема умножения для зависимых событий ...	42
3.3.6. Независимые события. Теорема умножения вероятностей для независимых событий	43

3.3.7. Задачи на тему «теоремы сложения вероятностей несовместных» и «умножения вероятностей независимых событий».....	44
3.4. Формула полной вероятности для условных вероятностей	46
3.5. Вероятность гипотез и формула Байеса	50
Контрольные вопросы и задачи.....	56
4. КЛАССИЧЕСКИЕ ВЕРОЯТНОСТНЫЕ СХЕМЫ И КЛАССИЧЕСКИЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ.....	59
4.1. Биномиальная и полиномиальная схемы независимых испытаний	59
4.2. Классические предельные теоремы теории вероятностей: теоремы Муавра-Лапласа, теорема Пуассона	62
Решение типовых примеров.....	64
Контрольные вопросы и задачи.....	67
5. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И СЛУЧАЙНЫЕ ВЕКТОРЫ.....	69
5.1. Функция распределение случайной величины	70
5.2. Дискретная или дискретно распределенная случайная величина	71
5.2.1. Закон распределения вероятностей дискретной случайной величины и его свойства.....	71
5.3. Числовые характеристики случайной величины.....	74
5.3.1. Математическое ожидание и дисперсия дискретной случайной величины	74
5.4. Биноминальное распределение	77
5.5. Распределение Пуассона	79
5.6. Простейший поток событий	81
5.7. Геометрическое распределение.....	83
5.8. Гипергеометрическое распределение	86
5.8.1. Независимость случайных величин и операции над ними	89
5.9. Непрерывные случайные величины и их числовые характеристики.....	89
5.9.1. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины	91
5.9.2. Закон равномерной плотности распределения вероятности.....	95
5.9.3. Нормальный закон распределения	96
5.9.4. Показательный закон распределения	99
5.10. Случайные векторы	101
Контрольные вопросы и задачи.....	103
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	106
ПРИЛОЖЕНИЯ	107

ВВЕДЕНИЕ

Данное пособие ориентировано на студентов технических университетов, обучающихся по специальностям и направлениям подготовки, требующих усиленной математической подготовки.

Пособие имеет строгую структуру: после изложения теоретического материала, в конце каждого раздела представлены типовые примеры с решениями, а также контрольные вопросы и задачи для самостоятельного решения.

Пособие написано в соответствии с рабочей программой дисциплины «Теория вероятностей, математическая статистика» для специальности 10.05.03 Информационная безопасность автоматизированных систем, разработанной кафедрой информатики и информационной безопасности ФГБОУ ВО «МГТУ им. Г.И. Носова». Содержит краткое изложение следующих тем: элементы теории множеств, комбинаторики и теории меры, аксиоматика теории вероятностей, независимость событий и условные вероятности, классические вероятностные схемы и классические предельные теоремы, случайные величины и случайные векторы.

1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ, КОМБИНАТОРИКИ И ТЕОРИИ МЕРЫ

1.1. Множества и операции над ними

Определение 1.1. *Множество* относится к простейшим, неопределяемым понятиям и понимается как собрание, совокупность, коллекция объектов, объединяемых по какому – то правилу (характеристическому свойству).

Множество считается заданным, если каким- либо образом указаны все его элементы. Задание множества производится или перечислением его элементов, или указанием характеристического свойства.

Например, «множество студентов группы», «множество точек круга», «множество слонов в Индии».

Множество обозначают обычно заглавными буквами латинского алфавита, его элементы – строчными. В случае, когда элемент x принадлежит множеству A , пишут $x \in A$, в противном $x \notin A$.

Множество, состоящее из элементов $a_1, \dots, a_n$, обозначается $\{a_1, \dots, a_n\}$. Символ $\{x: S(x)\}$ применяется для обозначения множества всех таких объектов x , которые удовлетворяют некоторому свойству $S(x)$. Если объекты берутся из некоторого множества A , то множество всех таких объектов, удовлетворяющих свойству $S(x)$, обозначается $\{x \in A: S(x)\}$.

Пример 1.1. Составить список элементов множества $A = \{x: x \in \mathbb{N}; -11 < x \leq 3\}$.

Решение. Множество A задано характеристическим свойством, а именно: его элементы x есть натуральные числа ($x \in \mathbb{N}$), удовлетворяющие неравенству $-11 < x \leq 3$. Такими числами могут быть только числа 1, 2, 3. Следовательно, $A = \{1, 2, 3\}$.

Определение 1.2. Множество, не содержащее элементов, называется *пустым* и обозначается $\emptyset$.

Определение 1.3. *Множества A и B равны*, если они состоят из одних и тех же элементов, обозначается $A = B$. Для доказательства равенства двух множеств достаточно показать, что каждый элемент первого множества принадлежит второму и обратно, что каждый элемент второго множества принадлежит первому.

Пример 1.2. Пусть даны множества $A = \{a, b, c\}$ и $B = \{\{a, b\}, c\}$. Верно ли утверждение $A = B$?

Решение. Утверждение неверно хотя бы потому, что первое множество имеет три элемента: a, b, c , а второе только два: множество $\{a, b\}$ и элемент c . Или потому, что первое множество не содержит элемента $\{a, b\}$, содержащегося во втором множестве.

Определение 1.4. Если каждый элемент множества A является элементом множества B , то множество A называется *подмножеством множества B* , обозначается $A \subseteq B$.

Определение 1.5. Всякое непустое множество A имеет по крайней мере два подмножества: само себя A и пустое множество $\emptyset$, они называются *несобственными подмножествами* множества A .

Запись $A \subset B$ означает, что A - подмножество B , но $A \neq B$. В этом случае A - *собственное подмножество* множества B .

Определение 1.6. Множество U называют *универсальным* множеством, если оно содержит все объекты и все рассматриваемые множества.

Определение 1.7. Для любого множества X можно определить специальное множество всех подмножеств множества X , которое называется *булеаном* $\mathfrak{B}(X)$. Булеан включает в себя само множество X , все его подмножества и пустое множество $\emptyset$.

Пример 1.3. Пусть множество $X = \{a, b, c\}$. Найти булеан $\mathfrak{B}(X)$.

Решение. Определим булеан $\mathfrak{B}(X)$. Это множество:

$$\mathfrak{B}(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$$

Собственными подмножествами $\mathfrak{B}(X)$ являются следующие множества:

$$\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}.$$

В общем случае, если множество X содержит n элементов, то множество его подмножеств $\mathfrak{B}(X)$ состоит из 2^n элементов.

Определение 1.8. *Объединением* $A \cup B$ (суммой $A + B$) двух множеств A и B называют множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из данных множеств, то есть $C = A \cup B = \{x : x \in A \text{ или } x \in B\}$.

Схематически объединение множеств A и B изображено на рисунке 1.1.

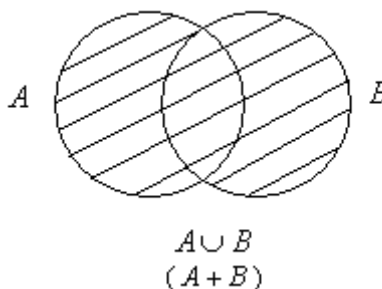


Рис. 1.1. Объединение множеств

Пример 1.4. Пусть $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$. Найти объединение множеств A и B .

Решение. $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$.

Определение 1.9. *Пересечением* $A \cap B$ (произведением AB) множеств A и B называют множество, состоящее из элементов, принадлежащих как множеству A , так и множеству B , и только из них, то есть $A \cap B = \{x : x \in A \text{ и } x \in B\}$.

Схематически пересечение множеств A и B представлено на рисунке 1.2.

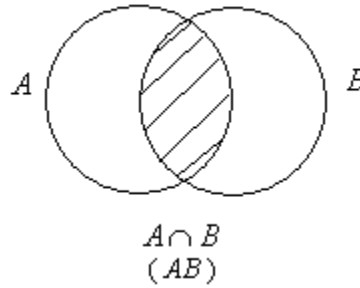


Рис. 1.2. Пересечение множеств

Если пересечение не является пустым, то множества называют пересекающимися.

Если пересечение множество – пусто, то множества называются непересекающимися (см. рисунок 1.3).

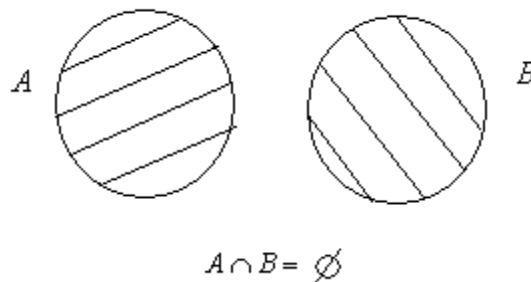


Рис. 1.3. Непересекающиеся множества

Пример 1.5. Пусть $A=\{1,2,4,7,8,9\}, B=\{1,3,5,7,8,10\}$. Найти пересечение множеств A и B .

Решение. $A \cap B = \{1,7,8\}$

Определение 1.10. *Разностью* $A \setminus B$ множеств A и B называют множество, состоящее из элементов множества A , не принадлежащих множеству B , то есть $A \setminus B = \{x : x \in A \text{ и } x \notin B\}$.

Схематически разность представлена на рисунке 1.4.

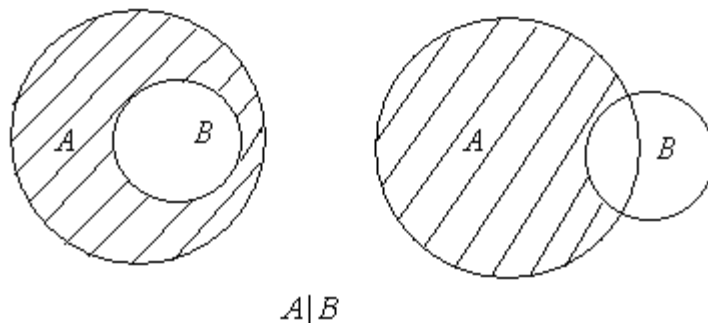


Рис. 1.4. Разность множеств

Пример 1.6. Пусть $A=\{1,3,4,7,8,9,10\}, B=\{2,3,4,5,6,7\}$. Найти разность множеств A и B .

Решение. Получим $A \setminus B = \{1, 8, 9, 10\}$, $B \setminus A = \{2, 5, 6\}$.

Определение 1.11. *Дополнением* множества A к B называют множество $\overline{A}$, состоящее из всех элементов множества B , не принадлежащих A .

Схематически дополнение представлено на рисунке 1.5.

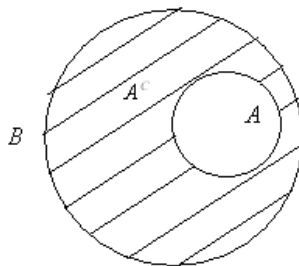


Рис. 1.5. Дополнение множества

Например, если U – множество вещественных чисел и A – множество рациональных чисел, то $\overline{A}$ – множество иррациональных чисел.

Определение 1.12. Если каждому элементу множества A по какому-то правилу можно поставить в соответствие (сопоставить) один и только один элемент множества B и обратно: каждому элементу множества B можно сопоставить один и только один элемент множества A , то говорят, что между множествами A и B установлено *взаимно-однозначное соответствие*.

Определение 1.13. Множества A и B называется *эквивалентными* (обозначается $A \sim B$), если между ними можно установить взаимно-однозначное соответствие.

Пример 1.7. Можно ли утверждать, что если $A = B$, то $A \sim B$, и наоборот, если $A \sim B$, то $A = B$?

Решение. Первое утверждение верное, так как если $A = B$, то это означает, что множества A и B состоят из одних и тех же элементов. Значит, если элементу множества A поставить в соответствие равный ему элемент множества B , то можно установить взаимно-однозначное соответствие между множествами A и B , что говорит об их эквивалентности.

Обратное утверждение неверно. Между эквивалентными множествами может быть установлено взаимно-однозначное соответствие, но множества могут быть не равны. Например, $A = \{a, b, c\}$ и $B = \{1, 2, 3\}$. Очевидно, что $A \sim B$, но $A \neq B$, так как множества состоят из разных элементов.

Определение 1.14. *Мощностью* множества A называют класс (совокупность) всех множеств, эквивалентных множеству A . Обозначается $|A|$.

Определение 1.15. Непустое множество A называют *конечным*, если существует такое натуральное число $n \in \mathbb{N}$, что $A \sim \{1, 2, \dots, n\}$. В этом случае говорят, что множество A имеет мощность, равную n , или что оно имеет n элементов. Множество, не являющееся конечным, называют *бесконечным*.

Пустое множество считается конечным: его мощность равна 0.

Множества A и B являются *равномощными*, если между множествами A и B существует взаимно-однозначное соответствие.

Например, сопоставим каждому числу n число $2n$. Тогда получим вложение множества всех натуральных чисел во множество всех натуральных четных чисел. Таким образом, множество всех натуральных чисел равномощно с множеством всех четных натуральных чисел.

Определение 1.16. *Счётным множеством* называется бесконечное множество, элементы которого возможно пронумеровать натуральными числами. Другими словами, счётное множество – это множество, равномощное множеству натуральных чисел.

Объединение конечного или счётного числа счётных множеств счётно. Множество всех конечных подмножеств счётного множества счётно; однако, множество всех подмножеств счётного множества счётным не является.

Счётными являются множества натуральных чисел N , целых чисел Z и рациональных чисел Q .

Определение 1.17. *Несчётным множеством* называется такое бесконечное множество, которое не является счётным.

Например, несчетными являются множества вещественных чисел R и комплексных чисел C .

1.2. Алгебры и σ -алгебры подмножеств

Определение 1.18. Семейство $\mathcal{A} \subset \mathfrak{B}(X)$, где $\mathfrak{B}(X)$ – булеан множества X , называется *алгеброй*, если оно удовлетворяет следующим свойствам:

1. $X \in \mathcal{A}$.
2. Если множество $A \in \mathcal{A}$, то и его дополнение $\bar{A} \in \mathcal{A}$.
3. Если множества $A, B \in \mathcal{A}$, то их объединение $A \cup B \in \mathcal{A}$.

В силу формул операций над множествами, в свойстве 3 определения 1.18 операцию объединения множеств можно заменить пересечением, тогда верно:

если $A \in \mathcal{A}$ и $B \in \mathcal{A}$, то $A \cap B \in \mathcal{A}$.

Пример 1.8. Пусть дано множество $X = \{\spadesuit \clubsuit \diamond \heartsuit\}$. Привести примеры наборов множеств, являющихся алгебрами.

Решение.

1. Так как $X \in \mathcal{A}$, то из свойства 2 следует, что $\bar{X} = \emptyset \in \mathcal{A}$. Отсюда, по свойству 3

$$\mathcal{A} = \{X, \emptyset\} = \{\{\spadesuit \clubsuit \diamond \heartsuit\}, \emptyset\} - \text{тривиальная алгебра.}$$

2. Легко доказать, что следующий набор подмножеств X также является алгеброй:

$$\mathcal{A} = \{X, \emptyset, \{\diamond\}, X \setminus \{\diamond\}\} = \{\{\spadesuit \clubsuit \diamond \heartsuit\}, \emptyset, \{\diamond\}, \{\spadesuit \clubsuit \heartsuit\}\}$$

Определение 1.19. Множество $\mathcal{F}$, элементами которого являются подмножества множества X (не обязательно все) называется *σ -алгеброй*, если выполнены следующие условия:

1. $X \in \mathcal{F}$;
2. Если $A \in \mathcal{F}$, то $\bar{A} \in \mathcal{F}$;
3. Если $A_i \in \mathcal{F}$, $i \in N$ то $\bigcup_{i=N} A_i \in \mathcal{F}$.

Этого набора аксиом достаточно для замкнутости множества относительно счётного числа операций пересечения над множествами. Свойство 3 в определении 1.19 можно заменить на

если $A_i \in \mathcal{F}$, $i \in N$ то $\bigcap_{i \in N} A_i \in \mathcal{F}$.

Всякая σ -алгебра автоматически является алгеброй. Действительно, если $\mathcal{F}$ – σ -алгебра, то она удовлетворяет свойству 3 определения 1.18, следовательно, для любых $A \in \mathcal{F}$ и $B \in \mathcal{F}$ выполняется $A \cup B \in \mathcal{F}$.

Обратное утверждение, вообще говоря, неверно: не всякая алгебра является сигма-алгеброй. Приведём пример алгебры, не являющейся σ -алгеброй.

Пример 1.9. Пусть $X = \mathbf{R}$, и пусть $\mathcal{A}$ – множество, содержащее любые конечные подмножества $\mathbf{R}$ (т.е. состоящие из конечного числа точек, в том числе пустое) и их дополнения. Проверить, является ли множество $\mathcal{A}$ алгеброй и сигма-алгеброй.

Решение. Легко проверить, что множество $\mathcal{A}$ является алгеброй. Действительно, пустое множество и само $X = \mathbf{R}$, там содержатся, дополнение к любому конечному подмножеству множества вещественных чисел содержится в $\mathcal{A}$ по определению, дополнение к множеству вида $\mathbf{R} \setminus A$ для конечных A совпадает с A и также принадлежит $\mathcal{A}$ по определению.

Свойство 3 определения 1.18 проверяется непосредственно: объединение любых конечных множеств снова конечно и поэтому принадлежит $\mathcal{A}$. Объединение конечного множества с множеством вида $\mathbf{R} \setminus A$, где A конечно, есть снова множество вида $\mathbf{R} \setminus B$, где B конечно (или пусто). Объединение двух множеств $\mathbf{R} \setminus A$ и $\mathbf{R} \setminus B$, являющихся дополнениями до $\mathbf{R}$ конечных множеств A и B , есть снова множество такого же вида.

Однако алгебра $\mathcal{A}$ не содержит ни одного счётного множества точек. Действительно, объединяя конечные множества в конечном числе, мы можем получить только конечное множество. Например, натуральный ряд N не принадлежит $\mathcal{A}$. Поэтому $\mathcal{A}$ не является σ -алгеброй: для бесконечной, но счётной последовательности одноточечных множеств $A_i = \{i\}$ из $\mathcal{A}$ их объединение $N = A_1 \cup A_2 \cup \dots$ не принадлежит $\mathcal{A}$.

Все алгебры из примера 1.8 являются σ -алгебрами, поскольку содержат лишь конечное число элементов. Вообще, на конечном множестве понятия алгебры и σ -алгебры совпадают. $\mathfrak{B}(X)$ является σ -алгеброй для любого X .

1.3. Выборки из конечной генеральной совокупности: упорядоченные и неупорядоченные, с возвращением и без возвращений

Определение 1.20. *Генеральной совокупностью* называют совокупность всех мыслимых наблюдений (или всех мысленно возможных объектов интересующего нас типа, с которых «снимаются» наблюдения), которые могли бы быть произведены при данном реальном комплексе условий.

Определение 1.21. Если исходное множество состоит из n различных элементов, и при каждом выборе мы будем извлекать из него новый элемент, отличный от всех других, — это выбор *без повторений* (или *без возвращения*).

Определение 1.22. Если элементы в выборке могут повторяться сколько угодно раз, т. е. извлеченный элемент возвращается и затем может появиться снова на другом месте — это выбор *с повторениями* (или *с возвращением*).

Пример 1.10. Используя схему выборки без повторений выбрать всевозможные пары различных чисел из множества $A = \{1, 2, 3\}$.

Решение. Этими парами будут: $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$, $\{2, 1\}$, $\{3, 2\}$, $\{3, 1\}$. Всего набралось $2 \cdot 3 = 6$ пар.

Пример 1.11. Используя схему выборки с повторениями получить всевозможные пары чисел из множества $A = \{1, 2, 3\}$.

Решение. Получили пары: $\{1, 1\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 1\}$, $\{2, 2\}$, $\{2, 3\}$, $\{3, 1\}$, $\{3, 2\}$, $\{3, 3\}$. Итого набралось $3 \cdot 3 = 9$ пар.

Определение 1.23. (Правило суммы) Если некоторый объект A можно выбрать m способами, а объект B — k способами (не такими, как A), то объект «либо A , либо B » можно выбрать $m + k$ способами.

Пример 1.12. Пусть имеется два ящика: в первом — m шаров, во втором — k . Произвольно из каждого ящика извлекается один шар. Сколькими разными способами можно это сделать?

Решение. Из первого ящика шар можно извлечь m разными способами, из второго — k разными способами. Всего $n = m + k$ способами.

Определение 1.24. (Правило произведения) Если объект A можно выбрать m способами, а после каждого такого выбора другой объект B можно выбрать (независимо от выбора объекта A) k способами, то пару объектов A и B (в указанном порядке) можно выбрать $m \cdot k$ способами.

Пример 1.13. В чемпионате страны по шахматам принимает участие 16 человек. Сколькими способами могут быть распределены золотая и серебряная медали?

Решение. Золотую медаль может получить один из 16 шахматистов. После того, как определен владелец золотой медали, серебряную медаль может иметь один из 15-ти человек. Отсюда, общее количество способов, которыми могут быть распределены золотая и серебряная медали, равно $16 \cdot 15 = 240$.

Основные виды комбинаций без повторений

Определение 1.25. Конечное множество называется *упорядоченным*, если каждому элементу этого множества поставлено в соответствие некоторое число (номер элемента) от 1 до n , где n — число элементов множества, так, что различным элементам соответствуют различные числа.

Всякое конечное множество можно сделать упорядоченным, если, например, переписать все элементы множества в некоторый список ($a, b, c, \dots$), а затем каждому элементу присвоить номер.

Упорядоченные множества считаются различными, если они отличаются либо своими элементами, либо их порядком.

Определение 1.26. Различные упорядоченные множества, которые отличаются лишь порядком элементов (т.е. могут быть получены из элементов одного и того же множества), называются *перестановками* этого множества. Число перестановок из n элементов $P_n = n!$

Пример 1.14. Получить все перестановки множества $A = \{a, b, c\}$.

Решение. Таких перестановок будет $P_3 = 3! = 9$:

$abc, acb, bac, bca, cab, cba$.

Пример 1.15. Сколькими способами можно разложить восемь различных писем по восьми различным конвертам, если в каждый конверт кладется только одно письмо?

Решение. Число всевозможных распределений восьми различных писем по восьми различным конвертам равно числу всех перестановок из восьми. Таким образом, таких способов будет $P_8 = 8! = 40320$.

Пример 1.16. Сколько всего шестизначных четных чисел можно составить из цифр 1, 3, 4, 5, 7 и 9, если из этих чисел ни одно не повторяется?

Решение. Чтобы искомое шестизначное число было четным, необходимо, чтобы в разряде единиц стояла четная цифра. Из всех указанных цифр четной является только цифра 4 – она и будет стоять в разряде единиц. Остальные пять цифр могут стоять на оставшихся пяти местах в любом порядке.

Таким образом, задача сводится к нахождению числа перестановок из 5 элементов. Следовательно, всего можно составить $P_5 = 5! = 120$ шестизначных четных чисел.

Определение 1.27. Пусть имеется множество, содержащее n элементов. Каждое его упорядоченное подмножество, состоящее из k элементов, называется *размещением из n элементов по k элементов* (размещением из n по k).

Из определения вытекает, что $0 \leq k \leq n$ и что размещения из n по k – это все k -элементные подмножества (n -элементного множества), отличающиеся составом элементов или порядком их следования.

Число всех размещений из n по k вычисляется по формуле

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Пример 1.17. Получить все размещения множества $A = \{a, b, c, d\}$ из 4-х элементов по 2.

Решение. Таких размещений будет $A_4^2 = 4 \cdot 3 = 12$:

$ab \ ac \ ad$

$ba \ bc \ bd$

$ca \ cb \ cd$

$da \ db \ dc$

Пример 1.18. Сколькими способами можно рассадить 4-х студентов на 25-ти местах?

Решение. $A_{25}^4 = 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 = 303600$.

Определение 1.28. Пусть имеется множество, содержащее n элементов. Каждое его подмножество, состоящее из k элементов, называется **сочетанием из n элементов по k элементов** (сочетанием из n по k).

Таким образом, сочетания из n по k – это все k -элементные подмножества n -элементного множества, причем различными подмножествами считаются только те, которые имеют неодинаковый состав элементов. Подмножества, отличающиеся друг от друга только порядком следования элементов, не считаются различными.

Число всех сочетаний из n по k вычисляется по формуле:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Пример 1.19. Получить все сочетания множества $A = \{a, b, c, d\}$ из 4-х элементов по 3.

Решение. Число сочетаний равно $C_4^3 = \frac{4!}{3!(4-3)!} = \frac{4!}{3!} = 4$ и имеет следующий вид:

$$abc, abd, acd, bcd.$$

Пример 1.20. В скольких точках пересекаются диагонали выпуклого восьмиугольника, если никакие три из них не пересекаются в одной точке?

Решение. Каждой точке пересечения двух диагоналей соответствует 4 вершины восьмиугольника, а каждым четверем вершинам восьмиугольника соответствует одна точка пересечения диагоналей (а именно, точка пересечения диагоналей, попарно соединяющих эти вершины). Поэтому число всех точек пересечения равно числу способов, которыми среди восьми вершин можно выбрать 4 вершины: $C_8^4 = \frac{8!}{4!(8-4)!} = \frac{8!}{4! \cdot 4!} = 70$.

Основные виды комбинаций с повторениями

Определение 1.29. Пусть $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ – множество из m элементов. Рассмотрим выборки, состоящие из элементов множества A , причем, элемент a_1 встречается k_1 раз, элемент a_2 – k_2 раз, ..., элемент a_m – k_m раз, такие, что $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$. Каждый упорядоченный набор n элементов, содержащий k_i раз элемент $a_i \in A$, $i = \overline{1, m}$, причем $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$, называются **перестановками с повторением** множества A и обозначаются $P_n(k_1, k_2, \dots, k_m)$. Количество перестановок с повторениями вычисляется по формуле:

$$P_n(k_1, k_2, \dots, k_m) = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_m!}$$

Пример 1.21. Сколько различных шестизначных чисел можно составить из цифр 1, 1, 1, 5, 5, 9?

Решение. По формуле вычисления количества перестановок с повторениями, получим:

$$P_6(3,2,1) = \frac{6!}{3! \cdot 2! \cdot 1!} = 120$$

Таким образом, получим 120 различных шестизначных чисел.

Определение 1.30. Любой упорядоченный набор элементов, содержащий k элементов множества $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, причем один и тот же элемент может повторяться в комбинации любое число раз, называется **размещением с повторением** из n элементов по k . Число различных размещений с повторениями обозначается $\tilde{A}_n^k$ и вычисляется по формуле:

$$\tilde{A}_n^k = n^k.$$

Пример 1.22. Четверо студентов сдают экзамен. Сколькими способами могут быть поставлены им отметки, если известно, что никто из них не получил неудовлетворительной отметки?

Решение. Так как известно, что все студенты сдали экзамен, то они могли получить любую из трех оценок: отлично, хорошо или удовлетворительно. Решение задачи сводится к вычислению количества размещений из 3 оценок по 4 студентам, причем оценки могут повторяться. Таким образом, получим:

$$\tilde{A}_3^4 = 3^4 = 81.$$

Определение 1.31. **Сочетаниями с повторениями** из n элементов по k множества $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, называются комбинации, содержащие k элементов (без учета порядка следования), причем любой элемент множества A может входить в комбинацию любое число раз. Число различных сочетаний с повторениями обозначается $\tilde{C}_n^k$ и вычисляется по формуле:

$$\tilde{C}_n^k = C_{n+k-1}^k.$$

Пример 1.23. Пусть имеются монеты по 2 рубля и по 5 рублей. Сколькими способами можно выбрать 4 монеты?

Решение. Так как порядок выборки монет не важен, а также известно, что монеты могут повторяться, то это задача о числе сочетаний из двух по четыре:

$$\tilde{C}_2^4 = C_5^4 = \frac{5!}{4! 1!} = 5$$

1.4. Биномиальные и полиномиальные коэффициенты

Определение 1.32. Числа $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, где $k = \overline{0, n}$ называют **биномиальными коэффициентами**.

Свойства биномиальных коэффициентов:

1. $C_n^0 = C_n^n = 1$.
2. $C_n^k = C_n^{n-k}$.
3. $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$.
4. $\sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n$ при $n \geq 1$.
5. $\sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k = 0$ при $n \geq 1$.

Определение 1.33. Комбинаторные числа $P_n(k_1, k_2, \dots, k_m) = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_m!}$, где $n \geq 1$, $k_1, \dots, k_m \geq 0$ и $\sum_{i=1}^m k_i = n$, называют **полиномиальными коэффициентами**.

Для полиномиальных коэффициентов верно следующее свойство:

$$\sum_{\substack{k_1, \dots, k_m \geq 0 \\ k_1 + \dots + k_m = n}} P_n(k_1, k_2, \dots, k_m) = m^n, \text{ где } n \geq 1, m \geq 2.$$

Когда $m = 2$, полиномиальные коэффициенты совпадают биномиальными коэффициентами. Действительно,

$$P_n(k_1, k_2) = P_n(k, n - k) = \frac{n!}{k! \cdot (n - k)!} = C_n^k.$$

Поэтому полиномиальные коэффициенты – обобщение биномиальных коэффициентов.

1.5. Полиномиальная теорема, бином Ньютона

Полиномиальная теорема: Для любых натуральных чисел n и k и любых чисел $x_1, x_2, \dots, x_k$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} (x_1 + x_2 + \dots + x_m)^n &= \sum_{\substack{k_1, \dots, k_m \geq 0 \\ k_1 + \dots + k_m = n}} P_n(k_1, k_2, \dots, k_m) x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_m^{k_m} = \\ &= \sum_{\substack{k_1, \dots, k_m \geq 0 \\ k_1 + \dots + k_m = n}} \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \dots k_m!} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_m^{k_m} \end{aligned}$$

Частным случаем полиномиальной формулы является **формула бинома Ньютона**:

$$(x + y)^n = C_n^0 x^n y^0 + C_n^1 x^{n-1} y^1 + \dots + C_n^n x^0 y^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^{n-k} y^k$$

Действительно, если в полиномиальной формуле положить $m = 2, x_1 = x, x_2 = y$, то получим бином Ньютона.

Пример 1.24. Записать комплексное число $(2 + i)^6$ в алгебраической форме.

Решение. По формуле бинома Ньютона имеем:

$$\begin{aligned} (2 + i)^6 &= C_6^0 2^6 + C_6^1 2^5 i^1 + C_6^2 2^4 i^2 + C_6^3 2^3 i^3 + C_6^4 2^2 i^4 + C_6^5 2^1 i^5 + C_6^6 i^6 = \\ &= 64 + 192 \cdot i - 240 - 160 \cdot i + 60 + 12 \cdot i - 1 = -117 + 44 \cdot i. \end{aligned}$$

Таким образом, $(2 + i)^6 = -117 + 44 \cdot i$.

Решение типовых примеров

Пример 1.25. Составить список элементов множества $X = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - x - 6 < 0\}$.

Решение. Множество X задано характеристическим свойством, а именно: его элементы x есть числа, удовлетворяющие неравенству $x^2 - x - 6 < 0$.

Корнями квадратного уравнения $x^2 - x - 6 = 0$ являются числа -2 и 3 . Функция $f(x) = x^2 - x - 6$ задает параболу, направленную ветвями вверх. Следовательно, $X = (-2; 3)$ – множество всех действительных чисел x , удовлетворяющих соотношению $x^2 - x - 6 < 0$.

Пример 1.26. Составить все подмножества множества $\{\diamond, \Delta, -\}$.

Решение. Сначала выпишем несобственные подмножества данного множества: $\emptyset$ и $\{\diamond, \Delta, -\}$, а затем – все его собственные подмножества: $\{\diamond\}, \{\Delta\}, \{-\}, \{\diamond, \Delta\}, \{\diamond, -\}, \{\Delta, -\}$. Таким образом, заданное множество имеет восемь подмножеств.

Пример 1.27. Даны множества $A = \{1; 3; 6; 8\}$ и $B = \{2; 4; 6; 8\}$. Найти объединение, пересечение и разность множеств A и B .

Решение. Используя соответствующие определения, найдём объединение заданных множеств A и B : $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 6; 8\}$, их пересечение: $A \cap B = \{6; 8\}$, разность $A \setminus B = \{1; 3\}$ и разность $B \setminus A = \{2; 4\}$.

Пример 1.28. На потоке из 100 студентов: 28 человек изучают английский язык, 30 человек – немецкий язык, 42 человека – французский язык. Причем 8 человек изучают два языка – английский и немецкий, 10 человек изучает английский и французский языки, 5 человек – немецкий и французский языки. 3 человека изучают все 3 языка. Сколько студентов не изучает ни один из перечисленных языков?

Решение. Пусть S – множество студентов, $|S| = 100$;

A – множество студентов, изучающих английский язык, $|A| = 28$;

N – множество студентов, изучающих немецкий язык $|N| = 30$,

F – множество студентов, изучающих французский язык, $|F| = 42$.

Соответственно множества студентов, изучающих по 2 или 3 иностранных языка, заданы следующим образом:

$$|A \cap N| = 8, |A \cap F| = 10, |N \cap F| = 5, |A \cap N \cap F| = 3.$$

Y – множество студентов, изучающих иностранные языки.

$$|Y| = |A| + |N| + |F| - |A \cap N| - |A \cap F| - |N \cap F| + |A \cap N \cap F| = 28 + 30 + 42 - 8 - 10 - 5 + 3 = 80$$

X – множество студентов, не изучающих иностранных язык.

$$|X| = 100 - 80 = 20.$$

Пример 1.29. Пусть дано множество $X = \{a, b, c\}$. Привести пример набора множеств, являющийся нетривиальной алгеброй.

Решение. $\mathcal{A} = \{\{a, b, c\}, \emptyset, \{a\}, \{b, c\}, \{a, b\}, \{c\}\}$

Пример 1.30. Пусть $X = \mathbb{R}$ – вещественная прямая. Дополнить множество $\mathcal{A} = \{R, \emptyset, \{0\}, [0, 1]\}$ до σ -алгебры.

Решение. Множество $\mathcal{A} = \{R, \emptyset, \{0\}, [0, 1]\}$ не является σ -алгеброй, так как, например, $\overline{[0, 1]} = R \setminus [0, 1] = (-\infty, 0) \cup (1, \infty) \notin \mathcal{A}$. Самый маленький набор множеств, содержащий $\mathcal{A}$ и являющийся σ -алгеброй (минимальная σ -алгебра), получится, если включить в него всевозможные объединения, пересечения и дополнения множеств из $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{F} = \{R, \emptyset, \{0\}, [0, 1], (-\infty, 0) \cup (1, \infty), (0, 1], (-\infty, 0] \cup (1, \infty), (-\infty, 0) \cup (0, \infty)\}$$

Пример 1.31. Сколькими способами можно выстроить в линейку 10 человек (5 девушек и 5 юношей) с условием, чтобы девушки и юноши чередовались?

Решение. 5 девушек можно разместить $5! = 120$ способами. Аналогично количество размещений 5 юношей $5! = 120$.

Следовательно, всего способов $120^2 = 14400$.

Пример 1.32. В чемпионате России по футболу участвует 18 команд. Определить число всех способов назвать тройку призеров.

Решение. Исходы данного эксперимента — выборки объема 3 из 18 объектов (команд). Эти выборки упорядоченные и без повторений. Таким образом, количество способов определить тройку призеров составляет

$$A_{18}^3 = \frac{18!}{(18-3)!} = \frac{18!}{15!} = 16 \cdot 17 \cdot 18 = 4896.$$

Пример 1.33. Сколькими способами можно группу из 12 человек разбить на две подгруппы, в одной из которых должно быть не более пяти, а во второй — не более девяти человек?

Решение. Выбор первой подгруппы однозначно определяет вторую. В первой подгруппе не может быть менее трех человек (так как вторая — не должна содержать более 9 человек). Отсюда, первую подгруппу можно выбрать либо из трех, либо из четырех, либо из пяти человек:

$$C_{12}^3 + C_{12}^4 + C_{12}^5 = 1507.$$

Пример 1.34. Сколько различных слов можно получить, переставляя буквы слова «математика»?

Решение. Поскольку среди букв встречаются одинаковые, то необходимо вычислить число перестановок с повторениями. Определим, какие буквы встречаются в слове и сколько раз: «м» — 2, «а» — 3, «т» — 2, «е» — 1, «и» — 1, «к» — 1. Отсюда,

$$P_{10}(2,3,2,1,1,1) = \frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 2!} = 151200$$

Пример 1.35. Каждый телефонный номер состоит из шести цифр. Сколько всего шестизначных телефонных номеров можно составить только из цифр 2, 3, 5 и 7?

Решение. Так как каждая из возможных четырех цифр может находиться на любом месте шестизначного номера и повторяться любое число раз, то это задача о количестве размещений четырех цифр на шести местах с повторениями:

$$\tilde{A}_4^6 = 4^6 = 4096.$$

Пример 1.36. Сколько всего чисел, не больших 100000, можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, в каждом из которых цифры расположены в неубывающем порядке?

Решение. При условии, что из цифр 1, 2, 3, 4 и 5 можно составить числа не большие 100000, ставит ограничения на количество разрядов: числа могут состоять из одного, двух, трех, четырех и пяти разрядов. Из всех возможных размещений нам нужен только один вариант, когда цифры расположены в неубывающем порядке, поэтому это задача о числе сочетаний из пяти цифр по одному, по два, по три, по четыре и по пять с повторениями в каждом случае:

$$\tilde{C}_5^1 = C_5^1 = \frac{5!}{4! 1!} = 5$$

$$\tilde{C}_5^2 = C_6^2 = \frac{6!}{2!4!} = 15$$

$$\tilde{C}_5^3 = C_7^3 = \frac{7!}{3!4!} = 35$$

$$\tilde{C}_5^4 = C_8^4 = \frac{8!}{4!4!} = 70$$

$$\tilde{C}_5^5 = C_9^5 = \frac{9!}{5!4!} = 126$$

Таким образом, существует $5+15+35+70+126=251$ число, удовлетворяющее условию задачи.

Пример 1.37. Найти значение суммы $\sum_{k=0}^n C_n^k \cdot a^k$.

Решение. Несложно заметить, что указанную сумму можно представить в виде формулы бинома Ньютона, если домножить на 1^{n-k} :

$$\sum_{k=0}^n C_n^k \cdot a^k = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot a^k \cdot 1^{n-k} = (a + 1)^n.$$

Пример 1.38. Найти коэффициент при x^2yz в многочлене $(x + y + z)^4$.

Решение. По полиномиальной теореме при $n = 4, x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$ получим, что коэффициент при x^2yz буде равен:

$$\frac{4!}{2!1!1!} = 12$$

Контрольные вопросы и задачи

- 1.1. Чем отличаются равные множества от эквивалентных? Какое понятие шире?
- 1.2. Что называется мощностью множества?
- 1.3. Приведите примеры счетных и несчетных множеств.
- 1.4. Что включает тривиальная алгебра?
- 1.5. Записать перечислением элементов элементы множества S , которое состоит из положительных четных чисел меньших 30 и не кратных 3.
- 1.6. Даны множества $C=\{a, b, c, d, e\}$ и $D=\{c, a\}$. Найти мощности этих множеств. Является ли множество D подмножеством множества C ?
- 1.7. Даны множества $A=\{1, 2, 3\}$ и $B=\{3, 2, 1\}$. Равны ли они?
- 1.8. Даны множества $X=\{K, O, T\}$ и $Y=\{1, 2, 3, 4\}$. Составить булеаны множеств и определить их мощности.
- 1.9. Даны множества $A=\{0, 5, 6, 8, 9, 12\}$ и $B=\{1, 5, 6, 7, 8, 12\}$. Определить объединение, пересечение и разность множеств A и B .
- 1.10. Найти число целых положительных чисел, не превосходящих 300 и не делящихся ни на одно из чисел 2, 3 и 5.
- 1.11. Пусть $X=[0, 1]$. Доказать, что семейство подмножеств отрезка $[0, 1]$, представляющих собой объединение конечного числа промежутков вида $[a, b], (a, b), [a, b), (a, b]$, является алгеброй.
- 1.12. Найти минимальную σ -алгебру, содержащую следующий набор подмножеств R : $\mathcal{A}=\{R, \emptyset, \{3\}, [0, 1]\}$.
- 1.13. Какие выборки называются упорядоченными?
- 1.14. Что такое выбор с повторениями и выбор без повторений?

- 1.15. Сколькими способами можно разместить на плате 4 элемента?
- 1.16. Сколько «слов» можно получить, переставляя буквы o, n, p, c, t ?
- 1.17. Студенту необходимо сдать 4 экзамена за 8 дней. Сколькими способами можно это сделать, если в один день сдавать не более одного экзамена?
- 1.18. Сколько существует способов заполнить карточку в лотерее «Спортлото»: 5 из 36?
- 1.19. У 6 взрослых и 11 детей обнаружены признаки инфекционного заболевания. Необходимо произвести выборочный анализ у 2 взрослых и 3 детей. Сколькими способами это можно сделать?
- 1.20. На карточках написаны буквы, составляющие слово «МИССИСИПИ». Маленький ребенок перемешивает все карточки и выкладывает их в ряд. Сколько различных «слов» он мог бы составить таким образом?
- 1.21. Сколько можно составить комбинаций шифров автоматической камеры хранения, содержащей четыре диска с цифрами 0, 1, ..., 9?
- 1.22. В чемпионате страны по футболу участвуют 18 команд, причем каждые две команды встречаются между собой 2 раза. Сколько матчей играется в течение сезона?
- 1.23. Сколькими способами можно выбрать 8 пирожных из имеющихся в наличии 6 различных сортов?
- 1.24. Найти значение суммы $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} C_n^k$.
- 1.25. Найти значение суммы $\sum_{k=0}^n k 2^k$.
- 1.26. Дан многочлен $(x + y + z)^3$. Найти коэффициент при z^3 .

2. АКСИОМАТИКА ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

2.1. События

Определение 2.1. *Элементарным исходом* называют любой исход опыта. Множество всех элементарных исходов образует *пространство элементарных исходов*, если выполнены следующие условия:

- в результате опыта один из исходов обязательно происходит;
- появление одного из исходов опыта исключает появление любого другого;
- невозможно разделить элементарный исход на более мелкие составляющие в рамках рассматриваемого эксперимента.

Пространство элементарных исходов обозначается буквой Ω , а сами элементарные исходы – ω_i . Таким образом, $\Omega = \{\omega_i, i = 1, 2, \dots, n\}$.

Пример 2.1. Опыт состоит в однократном подбрасывании монеты. Определить пространство элементарных исходов.

Решение. При однократном подбрасывании монеты возможно лишь два исхода: ω_1 – выпал «орел», ω_2 – выпала «решка». Нетрудно убедиться, что эти элементарные исходы удовлетворяют всем трем условиям в определении 2.1. Таким образом, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$.

Пример 2.2. Опыт состоит в однократном подбрасывании двух монет. Определить пространство элементарных исходов.

Решение. В случае однократного подбрасывания двух монет возможно четыре исхода:

- ω_1 – выпали «орлы» на обеих монетах,
- ω_2 – выпали «решки» на обеих монетах,
- ω_3 – выпал «орел» на первой монете и выпала «решка» на второй монете,
- ω_4 – выпала «решка» на первой монете и выпал «орел» на второй монете.

В соответствии с определением 2.1 данные элементарные исходы образуют пространство элементарных исходов $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$.

Определение 2.2. *Событием* называется произвольное подмножество пространства элементарных исходов Ω . Элементарные исходы, которые являются элементами события, называют *благоприятными исходами*.

События обозначают прописными латинскими буквами, при необходимости с индексами, например, A, B, C_1, C_2 .

Пример 2.3. В примере 2.2. определить следующие события: A – «орел» выпал хотя бы один раз, B – выпали и «орел» и «решка».

Решение. В соответствии с элементарными исходами, полученными при решении примера 2.2, имеем:

$$A = \{\omega_1, \omega_3, \omega_4\}, B = \{\omega_3, \omega_4\}.$$

Определение 2.3. Событие, состоящее из всех элементарных исходов, т.е. событие, которое обязательно происходит в данном опыте, называется *достоверным событием*.

Достоверное событие, как и пространство элементарных исходов, обозначается Ω .

Определение 2.4. Событие, не содержащее ни одного элементарного исхода, т.е. событие, которое никогда не может произойти в данном опыте, называют **невозможным событием**.

Невозможное событие обозначают символом $\emptyset$.

Пример 2.4. Опыт состоит в однократном бросании игральной кости. Определить достоверное и невозможное событие.

Решение. Достоверное событие должно содержать множество всех возможных исходов. Примером такого события может быть событие $A = \Omega$ – выпадение хотя бы одного очка. Невозможное событие $B = \emptyset$ – выпадение семи очков.

Операции над событиями

Всем операциям над событиями можно дать теоретико-множественную интерпретацию (таблица 2.1).

Таблица 2.1

Основные обозначения и понятия теории вероятностей
и соответствующие им теоретико-множественные понятия

<i>Обозначение</i>	<i>Теоретико-множественная терминология</i>	<i>Теоретико-вероятностная терминология</i>
ω	Неопределяемый объект	Элементарный исход
Ω	Множество всех ω	Пространство элементарных исходов или достоверное событие
F	σ -алгебра подмножеств из F	Множество всех случайных событий
$A \in F$	Элемент из F (множество)	Случайное событие
$\omega \in A$	Элемент из A	Благоприятный исход для A
$\emptyset$	Пустое множество	Невозможное событие
$A \cup B$	Объединение множеств A и B	Событие A или B
$A \cap B$	Пересечение множеств A и B	Событие A и B
$A \subset B$	A есть подмножество B	Если A , то B
$\bar{A}$	Дополнение до A	Событие, противоположное A
$A \cap B = \emptyset$	A и B не пересекаются	A и B несовместны
$A \setminus B$	Разность множеств A и B	Событие A , но не B

Пример 2.5. По мишени производят три выстрела. Пусть событие A_i , $i = 1, 2, 3$ – попадание при i -том выстреле. Представьте в виде пересечения и объединения событий A_i или $\bar{A}_i$ следующие события:

- а) A – три попадания в мишень;
- б) B – три промаха;
- в) C – хотя бы одно попадание;
- г) D – попадание в мишень не раньше, чем при третьем выстреле.

Решение.

- а) Очевидно, что событие A произойдет, если произойдут все три события A_1, A_2 и A_3 . Отсюда, $A = A_1 \cap A_2 \cap A_3$.
- б) Событие B произойдет при условии, что одновременно не произойдет ни одно из событий A_1, A_2 и A_3 . Таким образом, получим $B = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3$.
- в) Выполнение события C предполагает, что должны произойти или событие A_1 , или A_2 , или A_3 . Соответственно, $C = A_1 \cup A_2 \cup A_3$.
- г) Событие D предполагает, что события A_1 и A_2 не должны произойти, т.е. $D = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2$.

2.2. Вероятностная мера (функция)

Определение 2.5. Пусть Ω – некоторое множество и $\mathcal{F}$ – σ -алгебра его подмножеств. Функция $\mu: \mathcal{F} \rightarrow R \cup \{+\infty\}$ называется **мерой** на $(\Omega, \mathcal{F})$, если она удовлетворяет условиям:

- (1) для любого множества $A \in \mathcal{F}$ его мера неотрицательна: $\mu(A) \geq 0$;
- (2) для любого счётного набора попарно непересекающихся множеств $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ (т.е. такого, что $A_i \cap A_j = \emptyset$ при всех $i \neq j$) мера их объединения равна сумме их мер:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

Пример 2.6. Пусть $\Omega = \{a, b, c\}$. Мера μ для элементов множества Ω задана следующим образом: $\mu(\{a\}) = 3$, $\mu(\{b\}) = 17$, $\mu(\{c\}) = 1$. Определить меру μ для $\mathcal{F} = 2^N$ – множество всех подмножеств Ω .

Решение. Определим все подмножества Ω , тогда в соответствии с условием (2) определения 2.5 имеем:

$$\mu(\{a, b\}) = 20, \mu(\{a, c\}) = 4, \mu(\{b, c\}) = 18, \mu(\{a, b, c\}) = 21, \mu(\{\emptyset\}) = 0.$$

Определение 2.6. Пусть Ω – множество и $\mathcal{F}$ – σ -алгебра его подмножеств. Мера $\mu: \mathcal{F} \rightarrow R$ называется нормированной, если $\mu(\Omega) = 1$. Другое название нормированной меры – **вероятность** или **вероятностная мера**.

2.3. Аксиоматика Колмогорова теории вероятностей

В современной теории вероятностей понятие вероятности события вводят аксиоматически. Академиком А.Н. Колмогоровым были сформулированы аксиомы, определяющие понятие вероятности.

Определение 2.7. Пусть Ω – пространство элементарных исходов и $\mathcal{F}$ – σ -алгебра его подмножеств (событий). **Вероятностью** или **вероятностной мерой** на $(\Omega, \mathcal{F})$ называется функция $P: \mathcal{F} \rightarrow R$, удовлетворяющая следующим аксиомам:

Аксиома 1 (аксиома неотрицательности): Для любого события $A \in \mathcal{F}$ выполняется неравенство $P(A) \geq 0$.

Аксиома 2 (аксиома нормированности): Вероятность достоверного события равна единице: $P(\Omega) = 1$.

Аксиома 3 (расширенная аксиома сложения): для любого счётного набора попарно несовместных событий $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ имеет место равенство

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Определение 2.8. Тройка $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ в которой Ω – пространство элементарных исходов, $\mathcal{F}$ – σ -алгебра его подмножеств и P – вероятностная мера на $\mathcal{F}$, называется **вероятностным пространством**.

Таким образом, понятие вероятностного пространства объединяет следующие понятия: исход опыта, событие, вероятность события.

Свойства вероятности на абстрактном вероятностном пространстве

Свойство 0. $P(\emptyset) = 0$.

Свойство 1. Для любого конечного набора попарно несовместных событий $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ имеет место равенство

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

Свойство 2. Для любого события A выполнено: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Свойство 3. Если $A \subseteq B$, то $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$.

Свойство 4. Если $A \subseteq B$, то $P(A) \leq P(B)$.

Свойство 5. Для любого события A выполнено: $0 \leq P(A) \leq 1$.

Свойство 6. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Свойство 7. $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$.

Свойство 8. $P(A_1 \cup \dots \cup A_n) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i)$.

Свойство 9. Для любого конечного набора событий $A_1, \dots, A_n$ имеет место равенство:

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup \dots \cup A_n) &\leq \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i < j} P(A_i \cap A_j) + \\ &+ \sum_{i < j < m} P(A_i \cap A_j \cap A_m) - \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap \dots \cap A_n) \end{aligned}$$

2.4. Конечное вероятностное пространство с классическим типом вероятности

Классическое определение вероятности основано на понятии **равновозможности** элементарных исходов испытания. Это означает, что нет оснований предпочесть какой-либо из исходов другим. Например, выпадение орла или решки при одном подбрасывании монеты или 36 вариантов выбора игровой карты из колоды в 36 листов.

Определение 2.9 (классическое определение вероятности). Пусть результаты эксперимента представляются конечным числом равновозможных и несовместных исходов, составляющих пространство элементарных исходов Ω . Тогда **вероятностью события A** называется отношение числа m благоприятствующих событию A элементарных исходов к общему числу n всех равновозможных исходов испытания, т.е.

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Пример 2.7. В урне 10 красных и 8 синих шаров. Наугад вынимают один. Какова вероятность того, что вынут шар красного цвета?

Решение. Каждый элементарный исход означает выбор одного шара. Сначала определим общее число равновозможных элементарных исходов: общее число шаров в урне равно $n = 10 + 8 = 18$.

Пусть событие A означает выбор красного шара. Число исходов, благоприятных событию A , равно десяти, т.к. в урне 10 красных шаров: $m = 10$. Итак, по определению 2.9

$$P(A) = \frac{10}{18} = \frac{5}{9} = 0,5556.$$

Ответ: вероятность того, что вынут шар красного цвета, равна 0,5556.

Пример 2.8. Из шести карточек, образующих слово «МАСТЕР», наудачу выбирают четыре. Найти вероятность того, что выбранные карточки образуют слово «СЕРА»?

Решение. Элементарным исходом в данном эксперименте является любые четыре карточки с учетом порядка выбора. Отсюда получим, что для вычисления общего числа исходов необходимо использовать формулу размещения из 6 элементов по 4 элемента. Таким образом,

$$n = A_6^4 = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6!}{2!} = 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 360.$$

Событие A – из карточек составилось слово «СЕРА». Очевидно, что число исходов, благоприятствующих событию равно $m = 1$.

Следовательно,

$$P(A) = \frac{1}{360} = 0,0028.$$

Ответ: вероятность того, что выбранные карточки образуют слово «СЕРА» равна 0,0028.

Пример 2.9. К экзамену нужно выучить 30 вопросов. Студент знает 20 из них. Каждому студенту предлагают 2 вопроса, которые выбираются случайным

образом. Положительная оценка ставится в том случае, если студент правильно ответил хотя бы на один вопрос. Какова вероятность успешной сдачи экзамена?

Решение. Рассмотрим испытание, состоящее в выборе двух из тридцати вопросов. Исходом испытания является пара вопросов. Поскольку порядок, в котором выбираются вопросы, несущественен, то число всех n исходов равно числу сочетаний из 30 по 2:

$$n = C_{30}^2 = \frac{30!}{2!(30-2)!} = \frac{30!}{2!28!} = \frac{29 \cdot 30}{1 \cdot 2} = 435.$$

Пусть событие A состоит в том, что студент знает хотя бы один вопрос из двух. Так как достаточно, чтобы студент правильно ответил хотя бы на один вопрос, к благоприятным событию A исходам относятся две группы исходов: первая – пары с одним известным студенту вопросом, вторая – пары с двумя известными ему вопросами.

Пары первого типа составляются так: один вопрос выбирается из двадцати знакомых, другой – из десяти незнакомых. По правилу умножения число таких пар равно $20 \cdot 10 = 200$.

Пары второго типа получаются выбором двух из двадцати знакомых вопросов. Это число сочетаний из 20 по 2:

$$C_{20}^2 = \frac{20!}{2!(20-2)!} = \frac{20!}{2!18!} = \frac{19 \cdot 20}{1 \cdot 2} = 190.$$

Отсюда, число всех благоприятных исходов $m = 200 + 190 = 390$.

Следовательно,

$$P(A) = \frac{390}{435} = 0,8965.$$

Ответ: вероятность успешной сдачи экзамена равна 0,8965.

2.5. Вероятностное пространство с геометрическим типом вероятности

Классическое определение вероятности предполагает, что число элементарных исходов испытания конечно или счетно. На практике довольно часто встречаются испытания, число возможных исходов которых бесконечно. В этих случаях рассматривают вероятностное пространство с геометрическим типом вероятности и вводят понятие геометрической вероятности.

Геометрическое определение вероятности обобщает классическое на случай, когда пространство элементарных исходов Ω представляет собой подмножество пространства R (числовой прямой), R^2 (плоскости), R^n (n -мерного евклидова пространства).

Определение 2.10 (*геометрическое определение вероятности*). Пусть рассматривается испытание с пространством событий, элементарные исходы которых представляются в виде точек, заполняющих некоторую область Ω . Событие A состоит в попадании брошенной случайным образом точки в подобласть A области Ω . **Вероятностью события A** называется число $P(A)$, равное отношению меры подмножества A к мере множества Ω , т.е.

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}.$$

Под мерой $\mu(A)$ подмножества A понимают его длину (в пространстве R), площадь (в пространстве R^2) или объем (в пространстве R^n).

Геометрическая вероятность события обладает всеми свойствами, присущими классическому определению вероятности.

Пример 2.10. В квадрат вписан круг радиуса R . Наугад в круг бросается точка. Найти вероятность непопадания точки в круг, вписанного в квадрат.

Решение. Найдем площадь круга радиуса R :

$$S_{\text{кр}} = \pi \cdot R^2.$$

Сторона квадрата, в который вписан круг радиуса R , равна ее радиусу. Отсюда, площадь квадрата

$$S_{\text{кв}} = 4 \cdot R^2.$$

Событие A – непопадание в круг. Найдем площадь фигуры, соответствующее событию A , как разность площадей квадрата и круга

$$S_A = S_{\text{кв}} - S_{\text{кр}} = 4 \cdot R^2 - \pi \cdot R^2 = (4 - \pi) \cdot R^2.$$

По формуле геометрической вероятности получим:

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{S_A}{S_{\text{кв}}} = \frac{(4 - \pi) \cdot R^2}{4 \cdot R^2} = \frac{(4 - \pi)}{4} \approx 0,27.$$

Ответ: вероятность непопадания точки в круг, вписанного в квадрат $\approx 0,27$.

Пример 2.11. Дан отрезок $[0; 1]$. На нем наудачу ставится точка. Какова вероятность того, что она попадет в промежуток $[0,4; 0,7]$?

Решение. Рассмотрим на числовой прямой отрезок $[0; 1]$ и отложим на нем точки с координатами 0,4 и 0,7 (рис. 2.1).

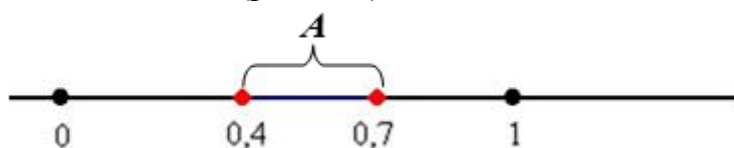


Рис. 2.1. Рисунок к примеру 2.11

Вычислим общее число исходов. Оно выражается длиной отрезка $[0; 1]$:

$$L = 1 - 0 = 1.$$

Событие A – брошенная на отрезок $[0; 1]$ точка, попала в промежуток $[0,4; 0,7]$. Поэтому благоприятствующие событию A исходы соответствуют длине отрезка $[0,4; 0,7]$:

$$l = 0,7 - 0,4 = 0,3.$$

По геометрическому определению вероятности имеем:

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{l}{L} = \frac{0,3}{1} = 0,3.$$

Ответ: вероятность того, что точка попадет в промежуток $[0,4; 0,7]$, равна 0,3.

Решение типовых примеров

Пример 2.12. Определить пространство элементарных исходов при однократном бросании игральной кости.

Решение. В случае однократного бросания игральной кости возможны следующие исходы, образующие пространство элементарных исходов:

- ω_1 – выпало одно очко,
- ω_2 – выпало два очка,
- ω_3 – выпало три очка,
- ω_4 – выпало четыре очка,
- ω_5 – выпало пять очков,
- ω_6 – выпало шесть очков.

Ответ: таким образом, $\Omega = \{\omega_i, i = \overline{1,6}\}$.

Пример 2.13. В примере 2.12 определить состав подмножеств, соответствующих следующим событиям:

- а) A – число выпавших очков кратно трем;
- б) B – выпало нечетное число очков;
- в) D – число выпавших очков меньше семи;
- г) E – число выпавших очков не является целым числом.

Решение.

- а) Очевидно, что событие A произойдет, если выпадет либо три, либо шесть очков, т.е. $A = \{\omega_3, \omega_6\}$.
- б) Событие B произойдет, если на игральной кости выпадут одно, три или пять очков. Таким образом, $B = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$,
- в) На игральной кости может выпасть любое число от 1 до 6, поэтому D – достоверное событие. Отсюда, $D = \Omega$.
- г) Так как E – невозможное событие, получим $E = \emptyset$.

Пример 2.14. Из множества супружеских пар наугад выбирают одну пару. Рассматриваются следующие события: A – мужу больше 30 лет; B – муж старше жены; C – жене больше 30 лет. Выяснить смысл следующих событий:

- а) $A \cap B \cap C$;
- б) $A \cap \bar{B} \cap C$.

Решение.

- а) Событие $A \cap B \cap C$ означает, что одновременно произойдут все три события A, B и C , т.е. муж и жена старше 30 лет, причем муж старше жены.
- б) Событие $A \cap \bar{B} \cap C$ отличается от события в задании а) тем, что событие B стало противоположным. Таким образом, имеем: оба супруга старше 30 лет, причем муж не старше жены.

Пример 2.15. Набирая номер телефона, абонент забыл две последние цифры и набрал их наугад, помня лишь, что эти цифры нечетные и разные. Найти вероятность того, что номер набран правильно.

Решение. Испытание состоит в выборе двух цифр из пяти нечетных. Всего существует пять нечетных цифр: 1, 3, 5, 7 и 9. Рассчитаем общее количество исходов – это число размещений из пяти цифр по две:

$$n = A_5^2 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = 4 \cdot 5 = 20.$$

Отсюда,

$$P(A) = \frac{1}{20} = 0,05.$$

Ответ: вероятность того, что номер набран правильно, равна 0,05.

Пример 2.16. В студенческой группе, состоящей из 12 девушек и 8 юношей, разыгрываются 5 зарубежных путёвок. Какова вероятность того, что путёвки получат три девушки и двое юношей?

Решение. Рассмотрим испытание, состоящее в выборе пяти обладателей путёвок. Всего в группе – $12+8 = 20$ студентов. Рассчитаем общее количество исходов – это число сочетаний из 20 студентов по 5:

$$C_{20}^5 = \frac{20!}{5!(20-5)!} = \frac{20!}{5!15!} = \frac{16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 15504.$$

Пусть событие A состоит в том, что путёвки получают три девушки и двое юношей. Составление такой комбинации можно описать с помощью двух действий: первое действие — выбор трёх девушек из двенадцати (число способов равно числу сочетаний из 12 по 3) и второе — выбор двух юношей из восьми (число способов равно числу сочетаний из 8 по 2):

$$C_{12}^3 = \frac{12!}{3!(12-3)!} = \frac{12!}{3!9!} = \frac{10 \cdot 11 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 220.$$

$$C_8^2 = \frac{8!}{2!(8-2)!} = \frac{8!}{2!6!} = \frac{7 \cdot 8}{1 \cdot 2} = 28.$$

По правилу умножения: $m = C_{12}^3 \cdot C_8^2 = 6160$.

Отсюда,

$$P(A) = \frac{6160}{15504} = 0,3973.$$

Ответ: вероятность того, что путёвки получают три девушки и двое юношей равна 0,3973.

Пример 2.17. Две грузовые машины могут подойти на погрузку в промежуток времени от 19.00 до 20.30. Погрузка каждой машины длится 15 минут. Какова вероятность того, что одной машине придется ждать окончания погрузки другой?

Решение. Обозначим грузовые машины соответственно x и y . Длительность промежутка времени, когда может произойти погрузка машин составляет 90 минут. Таким образом, должны выполняться неравенства:

$$0 \leq x \leq 90$$

$$0 \leq y \leq 90$$

Введем прямоугольную систему координат xOy , в которой двойным неравенствам будут удовлетворять координаты любой точки квадрата размером 90 на 90 (рис. 2.2).

Рассчитаем общее число элементарных исходов, которое будет соответствовать площади данного квадрата:

$$S = 90^2 = 8100.$$

Событие A – встреча двух машин в один и тот же промежуток времени. Это может произойти, если разность между временем подхода двух машин на погрузку окажется 15 минут, т.е. если выполняться неравенства:

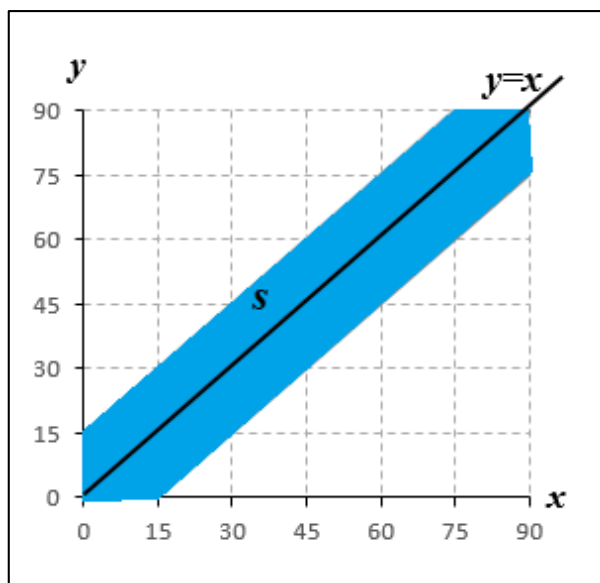


Рис. 2.2. Рисунок к примеру 2.17

$$y - x < 15 \text{ при } y > x,$$

$$x - y < 15 \text{ при } x > y.$$

Иначе это можно записать следующим образом:

$$y < x + 15 \text{ при } y > x, \quad (2.1)$$

$$y > x - 15 \text{ при } y < x. \quad (2.2)$$

Неравенство (2.1) будет выполнено для тех точек квадрата, которые лежат выше прямой $y = x$ и ниже прямой $y = x + 15$. Неравенству (2.2) будут удовлетворять точки, расположенные ниже прямой $y = x$ и выше прямой $y = x - 15$. На рис. 2.2 эта область выделена голубым цветом. Таким образом, множеству благоприятствующих исходов события A соответствует площадь фигуры s .

Вычислим площадь двух невыделенных треугольников:

$$S' = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 75 \cdot 75 = 5625.$$

Тогда площадь фигуры s вычисляется как разность:

$$s = S - S' = 8100 - 5625 = 2475.$$

По формуле геометрической вероятности:

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{s}{S} = \frac{2475}{8100} \approx 0,31.$$

Ответ: вероятность того, что одной машине придется ждать окончания погрузки другой $\approx 0,31$.

Пример 2.18. Ленту длиной 1 метр случайным образом разрезают ножницами. Найти вероятность того, что длина одного из обрезков составит не менее 80 см.

Решение. Длина обрезка составит не менее 80 см, если от ленты отрезать не более 20 сантиметров. Однако, искомый разрез можно сделать как с одного конца ленты, так и с другого (рис. 2.3):

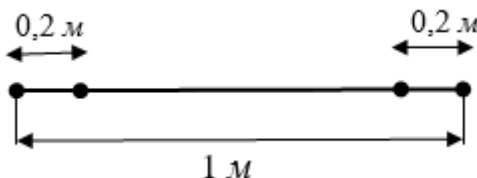


Рис. 2.3. Рисунок к примеру 2.18

Событие A – длина обрезка составит не менее 0,8 м. Общему числу элементарных исходов соответствует вся длина ленты:

$$L = 1 \text{ м.}$$

Благоприятствующие событию A участки разреза отмечены на рисунке 2.3 слева и справа отрезками длиной 0,2 м, их суммарная длина равна:

$$l = 2 \cdot 0,2 = 0,4 \text{ м.}$$

Вычислим вероятность события A по формуле геометрической вероятности:

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{l}{L} = \frac{0,4}{1} = 0,4.$$

Ответ: вероятность того, что длина одного из обрезков составит не менее 80 см, равна 0,4.

Контрольные вопросы и задачи

- 2.1. В чем разница между элементарным исходом и событием?
- 2.2. Какие события называются несовместными?
- 2.3. Перечислите основные свойства вероятности.
- 2.4. В чем проявляется ограниченность применения классического способа определения вероятности?
- 2.5. Приведите геометрическое определение вероятности.
- 2.6. Монету подбрасывают три раза. Опишите пространство элементарных исходов и определите следующие события:
 - а) A – «орел» выпал ровно один раз;
 - б) B – ни разу не выпала «решка»;
 - в) C – выпало больше «орлов», чем «решек»;
 - г) D – «орел» выпал не менее двух раз подряд.
- 2.7. Эксперимент состоит в двух выстрелах по мишени. Пусть событие A – попадание в мишень первым выстрелом, событие B – попадание в мишень вторым выстрелом. Постройте множество элементарных

исходов и выявите состав подмножеств, соответствующих событиям:

- а) $A \cap B$;
- б) $A \cup B$;
- в) $(A \cap B) \cup \bar{B}$.

2.8. Опыт состоит в бросании двух монет. Рассматриваются следующие события: A — появление «орла» на первой монете; D — появление «решки» на второй монете; E — появление двух «орлов». Определите, каким событиям данного списка равносильны следующие события:

- а) $D \cap E$;
- б) $A \cup E$.

2.9. Игральная кость брошена два раза. Какова вероятность того, что сумма выпавших очков окажется равной:

- а) 11;
- б) 7;
- в) 8?

2.10. В партии из 100 деталей имеется 10 бракованных. Для проверки отобрали 5 деталей. Найдите вероятность того, что среди отобранных деталей окажется только одна бракованная.

2.11. Для включения в избирательный бюллетень нужно выбрать 8 из десяти кандидатов. Какова вероятность того, что в бюллетень попадёт интересующий нас кандидат, если все кандидаты имеют одинаковые шансы?

2.12. На первом этаже в лифт семиэтажного дома вошли 3 человека. Каждый из них с одинаковой вероятностью может выйти на любом из этажей, начиная со второго. Найти вероятность следующих событий:

- а) A – все пассажиры выйдут на четвертом этаже;
- б) B – все пассажиры выйдут на одном и том же этаже;
- в) C – все пассажиры выйдут на разных этажах.

2.13. После бури на участке между 40-м и 70-м километрами телефонной линии произошёл обрыв провода. Какова вероятность того, что он произошёл между 50-м и 55-м километрами линии?

2.14. Стержень длиной l произвольным образом ломают на три части. Какова вероятность того, что из получившихся частей стержня можно составить треугольник?

2.15. Два приятеля договорились встретиться между 14.00 и 15.00 часами дня. Причем, каждый ждет другого не более 10 минут. Определить вероятность встречи друзей.

2.16. Загадываются два числа x и y в промежутке от 0 до 5. Какова вероятность, что $x \cdot y > 2$?

3. ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

3.1. Независимость событий

В теории вероятности используется предположение о независимости рассматриваемых событий, испытаний и случайных величин. Данное предположение является удобным с точки зрения формализации теории вероятностей и используется со времени ее разработки в 1933 г. А. Н. Колмогоровым в его работе «Основные понятия теории вероятностей». В реальных экспериментах все явления в какой-либо форме являются зависимы.

3.2. Теоремы сложения

Суммой двух событий A и B называется событие C , состоящее в появлении хотя бы одного из этих событий: A или B .

Суммой нескольких событий называется событие, состоящее в появлении хотя бы одного из этих событий. Например, для четырех несовместных событий A, B, C, D :

$$P(A + B + C + D) = P(A) + P(B) + P(C) + P(D).$$

3.2.1. Теорема сложения вероятностей для двух событий

Для начала вспомним, какие события являются несовместными и какие совместными. События являются **несовместными**, если появление в **отдельно взятом испытании** одного из них **исключает** появление другого. Например, студент взял на экзамене из нескольких возможных один билет. Это событие исключает выбор других билетов (событий), которые остались лежать на столе. Еще один пример - подбрасывание монеты: появление герба исключает появление решки. В этом случае исход этих двух событий образует **полную группу** (третьего и последующих вариантов не существует). Множество несовместных событий образуют **полную группу** событий, если в результате отдельно взятого испытания **обязательно** появится одно из этих событий.

События являются **совместными**, если появление в **отдельно взятом испытании** **одного из них** не исключает появления другого. Например, сегодня вечером по прогнозу будет облачность; возможно дождь с грозой. Событие облачность O не исключает одновременное появление событий **или** дождь D , **или** град G , **или** оба этих события.

Таким образом, сумма событий $O + D + G$ предполагает, что сегодня вечером будет **хотя бы одно из суммы всех событий** и может иметь следующие комбинации:

1. будет только облачность – одинарное событие;
2. будет только дождь – одинарное событие;
3. будет только гроза (погромыхало при солнечном небе и все..) – одинарное событие;
4. будет облачность + дождь – пара событий;

5. будет облачность + гроза – пара событий;
6. будет дождь + гроза – пара событий;
7. будет облачность + дождь + гроза – все три события одновременно.

Таким образом, по теореме сложения сумма событий $O + Д + Г$ возможна комбинация из 7 возможных вариантов.

Суммой $A + B$ двух несовместных событий A и B называют событие, состоящее в появлении или события A , или события B , или обоих этих событий. Например, если снайпер выстрелит два раза и события A и B – поражение цели при первом выстреле и втором выстреле, то суммой этих событий $A + B$ – будет являться поражение цели при первом или втором, или сразу в обоих выстрелах. Используя **алгебру логики**, в этом случае применяется **или**. Таким образом, если два события A и B – несовместные, то сумма этих событий $A + B$ – событие, состоящее в появлении хотя бы одного из этих событий, неважно какого.

Теорема 3.1. Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A + B) = P(A) + P(B)$$

В случае, когда события A и B **совместны**, вероятность их суммы выражается следующей формулой:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B),$$

где $A \cdot B$ — произведение событий A и B , знак умножения в формуле может опускаться.

3.2.2. Теорема сложения вероятностей для нескольких событий

Суммой нескольких событий называют событие, которое состоит в появлении хотя бы одного из этих событий. Например, событие $A + B + C$ состоит в появлении одного из следующих событий: A ; B ; C ; A и B ; A и C ; B и C и A и B и C .

Пример 3.1. В коробке 40 теннисных мячей: 10 желтых, 5 оранжевых и 25 белых. Продавец случайным образом извлекает мяч из коробки. Найти вероятность появления цветного мяча.

Решение. Появление цветного мяча означает появление либо красного, либо оранжевого мяча. Вероятность появления желтого мяча (событие A):

$$P(A) = 10/40 = 1/4.$$

Вероятность появления оранжевого мяча (событие B):

$$P(B) = 5/40 = 1/8.$$

Так как события A и B несовместны (появление мяча одного цвета исключает появление мяча другого цвета), поэтому можно применить теорему сложения.

Искомая вероятность по сумме составит:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}.$$

Ответ: вероятность появления цветного мяча равна $\frac{3}{8}$.

Пример 3.2. Баскетболист высшей лиги прорывается к корзине и бросает мяч около трехочковой линии. Его бросок может быть как из области меньшей, чем трехочковая (двухочковый бросок), так и трехочковым броском (из области из-за трехочковой линии). Вероятность попадания в корзину во время движения с меньшего расстояния (двухочковый бросок) равна 0,45, вероятность попадания в корзину из-за трехочковой линии (с большего расстояния) — 0,35. Найти вероятность того, что баскетболист при одном броске попадет в корзину либо из первой, либо из второй области.

Решение. Так как попадание из двухочковой области исключает попадание из трехочковой области, то события A - «баскетболист попал в корзину двухочковым броском» и B - «баскетболист попал в корзину трехочковым броском» - несовместны, поэтому теорема сложения применима.

По теореме сложения искомая вероятность равна:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) = 0,45 + 0,35 = 0,8.$$

Ответ: вероятность того, что баскетболист при одном броске попадет в корзину либо из первой, либо из второй области равна 0,8.

Теорема 3.2. Вероятность суммы нескольких несовместных событий равна сумме их вероятностей:

$$P\left(\sum_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i).$$

В тех случаях, когда события A_i являются совместными, вероятность их суммы выражается в общем виде следующей формулой:

$$P\left(\sum_{i=1}^n A_i\right) = \sum_i P(A_i) - \sum_{i,j} P(A_i A_j) + \sum_{i,j,k} P(A_i A_j A_k) - \dots + (-1)^{n-1} P\{A_1 A_2 A_3 \dots A_n\},$$

где возможна сумма всех комбинаций различных индексов i, j, k , взятых по одному, по два, по три индексу и т. д.

Пример 3.3. Книжный магазин получил на реализацию одну и ту же книгу сразу от четырех издательств по одной цене. Книжное издательство №1 прислало 15 экземпляров книги, книжное издательство №2 прислало 5 экземпляров книги, книжное издательство №3 прислало 7 экземпляров книги, книжное издательство №4 прислало 3 экземпляров книги. Покупателю, купившему эту книгу, продавец выносит ее из подсобного помещения, выбрав ее случайным образом. Какова вероятность того, что эта книга будет из издательства №2 или издательства №4?

Решение. Вычислим общее количество экземпляров книги:

$$S_{\text{кол-во}} = 15 + 5 + 7 + 3 = 30.$$

Рассчитаем по классическому определению вероятности, из какого издательства была выбрана книга:

По формуле вычисления вероятности какого-либо события, вероятность наступления события A в некотором испытании равна отношению:

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

где n – общее число всех **равновозможных**, элементарных исходов данного испытания, которые образуют **полную** группу событий – т.е. общее количество экземпляров книги;

m – количество **элементарных** исходов, благоприятствующих событию A – в данном случае, выбранная книга от конкретного издательства. Для издательства № 2 вероятность рассчитывается как:

$$P(A_2) = \frac{m}{n} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}.$$

Рассчитаем вероятность для издательства № 4:

$$P(A_4) = \frac{m}{n} = \frac{3}{30} = \frac{1}{10}.$$

Используя теорему сложения несовместных событий, рассчитаем вероятность продажи книги или издательства №2 или издательства №4:

$$P(A_2 + A_4) = P(A_2) + P(A_4) = \frac{5}{30} + \frac{3}{30} = \frac{8}{30} = 0,26.$$

Ответ: вероятность продажи книги издательства №2 или №4 равна 0,26.

3.2.3. Полная группа событий

Теорема 3.3. Сумма вероятностей событий $A_1, A_2, \dots, A_n$, образующих полную группу, равна единице:

$$P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots + P(A_n) = 1 \quad (3.1)$$

Если события $A_1, A_2, \dots, A_n$ несовместны и образуют полную группу, то сумма их вероятностей равна единице:

$$P\left(\sum_{i=1}^n A_i\right) = 1.$$

Пример 3.3. В магазин поступает продукция с трех заводов. Вероятность получения продукции с завода №1 составляет $P(A) = 0,55$, с завода №2 – $P(B) = 0,25$. Найти вероятность, что следующая поставка продукции будет с завода №3.

Решение. Все события: получена продукции с завода №1, получена продукции с завода №2 и получена продукции с завода №3 образуют полную группу событий «поставка определенной продукции в магазин». В этом случае сумма вероятностей этих событий по формуле 3.1 равна единице:

$$0,55 + 0,25 + x = 1.$$

Отсюда следует, вероятность, что поставка продукции произвелась с завода №3, будет рассчитана по формуле:

$$P(C) = 1 - 0,8 = 0,2.$$

Ответ: вероятность, что поставка продукции произвелась с завода №3, равна 0,2.

3.2.4. Противоположные события

Противоположными называют два единственно возможных события, образующих полную группу. Если одно из двух противоположных событий обозначено через A , то другое принято обозначать с чертой $\bar{A}$. Событие $\bar{A}$ называется противоположным событию A , если оно состоит в неоявлении события A .

Пример 3.4. Например, бросок мяча в баскетбольную корзину: попадание в цель и бросок мимо корзины — прямо противоположные события. Если A — попадание, то $\bar{A}$ — промах.

Пример 3.5. Из ящика случайным образом взят крепежный элемент. События «элемент стандартный» и «бракованный элемент» - противоположные.

Теорема. Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

Замечание 1. Если вероятность одного из двух противоположных событий обозначена через p , то вероятность другого события обозначают через q . Таким образом, исходя из описанной выше теоремы:

$$p + q = 1$$

Замечание 2. При решении задач на отыскание вероятности события A часто целесообразно сначала вычислить предварительно вероятность события $\bar{A}$, а затем найти искомую вероятность противоположного события:

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}).$$

Пример 3.6. По прогнозу погоды Гидрометцентр на следующий день вероятность того, что день будет туманным равна $p=0,65$. Найти вероятность того, что день будет ясным.

Решение. События «день туманный» и «день ясный» — прямо противоположные, поэтому искомая вероятность составит:

$$q = 1 - p = 1 - 0,65 = 0,35.$$

Ответ: искомая вероятность равна 0,35.

Пример 3.7. В ящике имеется n деталей, из которых m стандартных. Найти вероятность того, что среди k наудачу извлеченных деталей есть хотя бы одна стандартная.

Решение. События «среди извлеченных деталей есть хотя бы одна по ГОСТу» и «среди извлеченных деталей нет ни одной стандартной, все бракованные» - противоположные. Обозначим первое событие через A , второе — через $\bar{A}$, тогда следует: $P(A) = 1 - P(\bar{A})$.

Найдем $P(\bar{A})$. Общее число вариантов, которыми можно извлечь k деталей из общего количества n деталей, равно C_n^k . Число бракованных деталей равно $n-m$; из этого числа деталей можно C_{n-m}^k вариантами извлечь k бракованных деталей. Поэтому вероятность того, что среди извлеченных k деталей нет ни одной бракованной, равна:

$$P(\bar{A}) = \frac{C_{n-m}^k}{C_n^k}$$

Ответ: таким образом, искомая вероятность, что извлечется хотя бы одна деталь, сделанная по ГОСТ, будет равна:

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{C_{n-m}^k}{C_n^k}$$

3.2.5. Принцип практической невозможности маловероятных событий

Во многих практических задачах существуют события, вероятность наступления которых очень мала и приближается к нулю. Такие события называют маловероятными. В связи с этим резонно возникает вопрос: возможно ли, что в конкретном единичном испытании маловероятное событие A вообще не произойдет? Ответить на этот вопрос положительно нельзя: хотя вероятность наступления события A очень мала, но полностью исключить его наступление нельзя.

В единичном опыте появление (или непоявление) маловероятного события предсказать очень сложно. Но длительные опыты показывают, что маловероятное событие в одном испытании как правило не наступает и вот в этом случае теория вероятности использует «принцип практической невозможности маловероятных событий»:

если случайное событие имеет очень малую вероятность, то практически можно считать, что в единичном испытании это событие и не наступит.

Насколько малой должна быть вероятность события, чтобы считать, что появление этого события в одном испытании является невозможным, и оно не наступит - для каждой задачи это напрямую будет зависеть от конкретных условий и ситуаций.

Например, рассмотрим незначительную вероятность $P = 0,01$. Если это вероятность события «отказ электроники самолета в грозу», то вряд ли это устроило бы пассажиров самолета и такую вероятность применять недопустимо.

Если же вероятность события «междугородний автобус прибудет с опозданием», то можно сказать с уверенностью, что автобус все-таки прибудет точно по расписанию.

Задача. Предположим в лотерее разыгрывается один билет с крупным выигрыш ем в 10 000 000 рублей. Вероятность выигрыша составляет 0,000001. Может ли участник, купивший случайным образом билет, стать обладателем этого выигрыша? Является ли выигрыш маловероятным событием? В данной задаче читателям предлагается самостоятельно привести доказательство, что выигрыш невозможен.

Достаточно малую вероятность, при которой (в данной определенной задаче) событие можно считать практически невозможным, называют уровнем значимости.

В практических задачах обычно используют уровни значимости в интервале между 0,01 и 0,05. Уровень значимости, равный 0,01, называют однопроцентным; уровень значимости, равный 0,02, называют двухпроцентным, и т. д.

Рассмотренный в этом разделе принцип позволяет делать предсказания не только о событиях, имеющих малую вероятность, но и о событиях, чья вероятность близка к единице. Действительно, если событие A имеет вероятность, близкую к нулю, то вероятность противоположного события $\bar{A}$ будет близка к единице. С другой стороны, непоявление события A означает наступление противоположного события $\bar{A}$. Таким образом, из принципа невозможности маловероятных событий вытекает следующее важное для приложений следствие: **если случайное событие имеет вероятность, очень близкую к единице, то практически можно считать, что в единичном испытании это событие наступит.**

3.2.6. Задачи на тему «Теорема сложения»

1. Владельцы лотереи выпустили 10 000 билетов. Из них на 1500 билетов приходится 500 крупных и 1000 более мелких призов. Чему равна вероятность выигрыша для владельца одного лотерейного билета?

2. При сдаче норм ГТО вероятность того, что спортсмен при одном выстреле попадет в цент мишени (10 очков) составляет 0,1; вероятность выбить 9 очков равна 0,3; вероятность выбить 8 очков - 0,35; если меньше 8 очков – вероятность составляет 0,6. Найти вероятность того, что при одном выстреле спортсмен выбьет не менее 8 очков.

3. В магазине из пришедших 10 деталей оказалось 7 деталей, сделанных по ГОСТу. Найти вероятность того, что среди извлеченных 2 деталей есть хотя бы одна, выполненная в соответствии с ГОСТ.

4. На строительный объект были поставлены 10 плит перекрытия, среди которых оказалось 2 нестандартных. Найти вероятность того, что из отобранных прорабом «на глазок» 6 плит окажется не более одной нестандартной плиты перекрытия.

Примечание к задаче. Если за событие A примем постулат, что нет ни одной нестандартной детали, а за событие B — есть одна нестандартная деталь, то сумма вероятностей в этом случае запишется как:

$$P(A + B) = P(A) + P(B)$$

5. События A , B , C и D образуют полную группу. Вероятности событий таковы: $P(A) = 0,1$; $P(B) = 0,4$; $P(C) = 0,3$. Чему равна вероятность события D ?

6. По статистическим данным ремонтной мастерской, в среднем на 20 остановок токарного станка приходится: 10 — для смены резца; 3—из-за неисправности привода; 2 — из-за несвоевременной подачи заготовок. Остальные остановки происходят по другим причинам. Найти вероятность остановки станка по другим причинам

3.3. Теоремы умножения вероятностей

В предыдущих главах была рассмотрена классическая теория вероятности события - безусловная вероятность, которая записывается для некоторого комплекса условий. В данной главе будет рассмотрена условная вероятность – вероятность, которая дополняется к существующему комплексу условий еще и дополнительным условием или условиями. Для изучения зависимых событий предназначен аппарат условных вероятностей.

Наиболее известным инструментом применения условных вероятностей является формула полной вероятности и формулы Байеса, которые будут описаны чуть ниже. В частности, на формулах Байеса основаны многочисленные алгоритмы обработки информации (байесовские процедуры), которые должны использоваться в случаях, когда некоторая система должна изменять свои параметры (подстраиваться) по мере поступления информации. Процедуры пересчета параметров являются вариациями формул Байеса.

3.3.1. Произведение событий

Произведением двух событий A и B называется событие C , состоящее в совместном появлении события A и события B .

Произведением нескольких событий называется событие, состоящее в совместном появлении всех этих событий.

3.3.2. Условная вероятность

Выше рассматривалось, что случайное событие определено как событие, которое при осуществлении определенной совокупности условий S может произойти или не произойти.

Безусловной вероятностью называют вычисление вероятности события с определенной совокупностью условий S и никаких других ограничений не налагается; *условная вероятность* подразумевает наложение и некоторых других дополнительных условий.

Условной вероятностью $P_A(B)$ называют вероятность события B , вычисленную в предположении, что событие A уже наступило.

Пример 3.1. В шкатулке 3 белых и 3 зеленых бусины. Из шкатулки дважды случайным образом вынимают по одной бусине, не возвращая их обратно. Найти вероятность появления белой бусины при втором испытании (событие B), если при первом испытании была вытащена зеленая бусина (событие A).

Решение. После первого извлечения в шкатулке осталось 5 бусин, из них 3 белого цвета. Искомая условная вероятность $P_A(B) = \frac{3}{5}$.

Выполним решение этой же задачи другим способом:

$$P_A(B) = \frac{P(AB)}{P(A)}, \quad \text{где } P(A) > 0.$$

Если при выполнении первого испытания вероятность равна

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Найдем $P(AB)$ - вероятность того, что в первом испытании случайным образом вытащим зеленую бусину, а во втором – белую. Общее число таких исходов (появления двух бусин, независимо от цвета) равно числу размещений:

$$A_6^2 = 6 * 5 = 30.$$

Из этого следует событию AB следует возможных $3 \cdot 3 = 9$ исходов. Рассчитаем вероятность события $P(AB)$:

$$P(AB) = \frac{9}{30} = \frac{3}{10}.$$

Таким образом, искомая условная вероятность имеет тот же результат:

$$P_A(B) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{5}.$$

Таким образом, условная вероятность события B при условии, что событие A наступило, по определению будет равна:

$$P_A(B) = \frac{P(AB)}{P(A)}, \quad \text{где } P(A) > 0.$$

3.3.3. Произведение двух событий

Произведением двух событий A и B называют событие AB , состоящее в совместном появлении (совмещении) этих событий. Например, если A — деталь стандартная, B - деталь окрашенная, то AB - деталь стандартная и окрашена. Произведением нескольких событий называют событие, состоящее в совместном появлении всех этих событий. Например, если A , B , C - появление «герба» соответственно в первом, втором и третьем бросаниях монеты, то ABC — выпадение «герба» во всех трех испытаниях.

3.3.4. Теорема умножения вероятностей для двух событий

Предположим, имеются два события A и B и вероятности этих событий также $P(A)$ и $P(B)$ известны. Чтобы найти вероятность совмещения этих событий (т. е. вероятность того, что появится и событие A и событие B), применим теорему умножения.

Теорема 3.3. Вероятность совместного появления двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило:

$$P(AB) = P(A)P_A(B)$$

или

$$P(BA) = P(B)P_B(A).$$

Порядок, в котором встречаются эти события не имеет значения и может быть любым.

Так как событие BA не отличается от события AB , то можно записать:

$$P(AB) = P(B) P_B(A)$$

Сравнив эти формулы, можно записать следующее равенство:

$$P(A)P_A(B) = P(B) P_B(A)$$

Следствие. Вероятность совместного появления нескольких событий равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности всех остальных, причем вероятность каждого последующего события вычисляется в предположении, что все предыдущие события уже появились:

$$P(A_1 A_2 A_3 \dots A_n) = P(A_1) P_{A_1}(A_2) P_{A_1 A_2}(A_3) \dots P_{A_1 A_2 \dots A_{n-1}}(A_n).$$

где $P_{A_1 A_2 \dots A_{n-1}}(A_n)$ - вероятность события (A_n) , вычисленная в предположении, что события $A_1 A_2 \dots A_{n-1}$ наступили. В частности, для трех событий

$$P(ABC) = P(A) P_A(B) P_{AB}(C).$$

Порядок, в котором расположены события, может быть любым: безразлично, каким по счету может быть событие 1, событие 2 и т.д.

3.3.5. Зависимые события. Теорема умножения для зависимых событий

Событие X называют **зависимым**, если его вероятность $P(X)$ зависит от одного или нескольких уже произошедших событий. Студент перед экзаменом выучил несколько простых билетов. Если он будет отвечать не самым первым, то событие вытягивания билета X будет зависимым, так как его вероятность $P(X)$ предполагает зависимость от того, какие билеты вытянули его однокурсники.

Пример 3.4. В шкатулке 15 белых, 11 желтых и 8 синих бусинок, из которых формируется узор. Мастерница случайным образом (не глядя) извлекает и нанизывает одну бусинку. Найти вероятность того, что мастерница сначала извлечет белую бусинку (событие A), затем — желтую (событие B) и в третий раз — синюю (событие C).

Решение. Вероятность вытаскивания белой бусинки в первом испытании

$$P(A) = \frac{15}{34} = 0,44.$$

Вероятность появления черной бусинки во втором испытании, вычисленная в предположении, что первоначально была вытащена белая бусинка, т. е. условная вероятность

$$P_A(B) = \frac{11}{33} = \frac{1}{3}.$$

Вероятность появления синей бусинки в третьем случае, вычисленном в предположении, что первоначально была вытащена белая бусинка, а во втором случае - желтая, т. е. условная вероятность

$$P_{AB}(C) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}.$$

Искомая вероятность будет найдена по теореме умножения:

$$P(ABC) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{AB}(C) = 0,44 \cdot 0,33 \cdot 0,25 = 0,0363.$$

Ответ: искомая вероятность равна 0,0363.

3.3.6. Независимые события. Теорема умножения вероятностей для независимых событий

События A и B называются *независимыми*, если появление одного из них не меняет вероятности появления другого. Вероятность для независимых событий:

$$P_A(B) = P(B); P_B(A) = P(A).$$

Пусть вероятность появления события B не зависит от появления события A . Событие B называют независимым от события A , если появление события A не изменяет вероятности события B , т. е. если условная вероятность события B равна его безусловной вероятности:

$$P_A(B) = P(B).$$

Подставив эту формулу в соотношение $P(A) \cdot P_A(B) = P(B) P_B(A)$ из теоремы умножения вероятностей для двух событий из предыдущего параграфа, получим:

$$P(A) \cdot P(B) = P(B) \cdot P_B(A).$$

Отсюда следует: $P_B(A) = P(B)$ – то есть условная вероятность события A в предположении, что наступило событие B , равна его безусловной вероятности. Другими словами, событие A не зависит от события B .

Итак, если событие B не зависит от события A , то и событие A не зависит от события B ; это означает, что свойство независимости событий взаимно.

Для независимых событий A и B теорема умножений вероятностей событий имеет следующий вид: $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$.

Два события называют независимыми, если вероятность их совмещения равна произведению вероятностей этих событий; в противном случае события называют зависимыми.

На практике о независимости событий заключают по смыслу задачи. Например, вероятности поражения цели каждым из двух орудий не зависят от того, поразило ли цель другое орудие, поэтому события «первое орудие поразило цель» и «второе орудие поразило цель» независимы.

Рассмотрим пример из предыдущего параграфа о выборе билета на экзамене. Если студент пошел сдавать первым, то вероятность вытянуть нужный билет **не зависит** никак от того, какие билеты вытянут его однокурсники впоследствии.

Задача 3.5. На испытательный стенд привезли три коробки, в каждой из которых находится по 10 деталей, выполненных по ГОСТ или ТУ. В первой коробке находится 9 деталей, выполненных в строгом соответствии с ГОСТ, во второй – 8 деталей, в третьей – 7. Из каждой коробки случайным образом извлекают по одной детали. Найти вероятность того, что все извлеченные детали окажутся выполнены по ГОСТ.

Решение: так как выбранная случайным образом деталь не зависит от того, какие детали были выбраны из других коробок, то в этом случае события независимы друг от друга.

Запишем эти события:

A – из первой коробки была вытащена деталь, сделанная в соответствии с ГОСТ;

B – из второй коробки была вытащена деталь, сделанная в соответствии с ГОСТ;

C – из третьей коробки была вытащена деталь, сделанная в соответствии с ГОСТ.

Соответствующие вероятности по классическому определению равны:

$$P(A) = \frac{9}{10} = 0,9; \quad P(B) = \frac{8}{10} = 0,8; \quad P(C) = \frac{7}{10} = 0,7.$$

Событие: «из каждой коробки извлекается деталь по ГОСТ» будет выражаться произведением: $P(A \cdot B \cdot C)$.

Используя теорему умножения вероятности независимых событий, получим ответ:

$$P(A \cdot B \cdot C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = 0,9 \cdot 0,8 \cdot 0,7 = 0,504.$$

Ответ: вероятность того, что все извлеченные детали окажутся выполнены по ГОСТ равна 0,504.

Задача 3.6. Может ли сумма двух событий A и B совпадать с их произведением?

Решение. Может только в том случае, если эти события равнозначны (эквиваленты), т. е. если из события A вытекает событие B и, наоборот, из события B вытекает событие A . Например, пусть производится один выстрел по мишени. Предположим, что попадание в мишень непременно приводит к ее разрушению и никаким другим способом мишень разрушена быть не может; тогда два события A — попадание в мишень, B — разрушение мишени эквивалентны ($A = B$), и для них:

$$A + B = A = B;$$

$$A \cdot B = A = B.$$

3.3.7. Задачи на тему «теоремы сложения вероятностей несовместных» и «умножения вероятностей независимых событий»

Два баскетболиста сделали по одному броску в кольцо. Вероятность попадания для первого стрелка равна 0,8, для второго – 0,7. Найти вероятность того, что:

а) только один баскетболист попадёт в корзину;

б) хотя бы один из баскетболистов попадет в корзину.

Решение. В данной задаче вероятность попадания одного баскетболиста не зависит от результатов попадания в цель другого.

1. Запишем следующие события: A_1 первый баскетболист попадет в корзину, вероятность этого события = 0,8; A_2 – второй баскетболист попадет в корзину – вероятность этого события = 0,7.

Вероятности противоположных событий будут равны:

$$P(\bar{A}_1) = 1 - P(A_1) = 1 - 0,8 = 0,2;$$

$$P(\bar{A}_2) = 1 - P(A_2) = 1 - 0,7 = 0,3.$$

Запишем решение первой части задачи.

а) Если только один баскетболист попадет в корзину – в этом случае это может сделать либо первый, либо второй игрок. Событие имеет два несовместных исхода:

- первый баскетболист попадет в корзину, второй – промахнется;
- второй баскетболист будет точен - первый игрок промахнется.

Запишем эти исходы с помощью алгебры событий:

$$B = A_1\bar{A}_2 + \bar{A}_1A_2.$$

Для решения этой части задачи будем вначале использовать теорему сложения вероятности несовместных событий и впоследствии теорему умножения вероятностей независимых событий:

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1\bar{A}_2 + \bar{A}_1A_2) = P(A_1\bar{A}_2) + P(\bar{A}_1A_2) = \\ &= P(A_1) \cdot P(\bar{A}_2) + P(\bar{A}_1) \cdot P(A_2) = 0,8 \cdot 0,3 + 0,2 \cdot 0,7 = 0,24 + 0,14 = 0,38. \end{aligned}$$

Таким образом, вероятность попадания в кольцо только одним баскетболистом составляет 0,38.

б) запишем решение второй части задачи – хотя бы один из игроков попадет в корзину. Вариантов несовместных исходов этого события C будет сразу три:

- первый баскетболист попадет в корзину, второй – промахнется;
- второй баскетболист будет точен - первый игрок промахнется;
- оба баскетболиста попадут в цель.

Используя решение первой части, представим событие C как сумму двух несовместных событий: $C = B + D$. Событие B состоит из двух несовместных исходов (см. пункт первый). Событие - попадут оба игрока – обозначим буквой D .

Рассчитаем вероятность попадания и первого, и второго баскетболиста (обоих игроков в корзину) $P(D)$ по теореме умножения:

$$P(D) = P(A_1A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) = 0,8 \cdot 0,7 = 0,56.$$

Используя теорему сложения вероятностей несовместных событий вычислим вероятность попадания в кольцо хотя бы одного баскетболиста:

$$P(C) = P(B + D) = P(B) + P(D) = 0,38 + 0,56 = 0,94.$$

2. Можно рассмотреть это решение и вторым вариантом: $\bar{C}$ – событие, при котором промахнутся сразу оба игрока. По теореме умножения вероятности независимых событий:

$$P(\bar{C}) = P(\bar{A}_1\bar{A}_2) = P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) = 0,2 \cdot 0,3 = 0,06.$$

$$P(C) = 1 - P(\bar{C}) = 1 - 0,06 = 0,94.$$

3. Рассмотрим решение этой задачи третьим способом. События $A_1 A_2$ совместны и в соответствии с алгеброй событий $A_1 + A_2$ их сумма выразит событие: «хотя бы один баскетболист попадет в кольцо». По теореме сложения вероятностей совместных событий и теореме умножения вероятностей независимых событий

$$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cdot A_2) = 0,8 + 0,7 - 0,8 * 0,7 = 1,5 - 0,56 = 0,94.$$

Для проверки выполним проверку: события $B, \bar{C}, D$ образуют полную группу, поэтому их сумма должна быть равна единице:

$$P(B) + P(\bar{C}) + P(D) = 0,38 + 0,06 + 0,56 = 1.$$

Ответ. Рассчитанные вероятности:

- а) только один баскетболист попадет в корзину – 0,38;
- б) хотя бы один из баскетболистов попадет в корзину – 0,94.

Задачи для самостоятельного решения по теме совместное использование теорем «сложения вероятностей несовместных» и «умножения вероятностей независимых событий».

1. Программист установил антивирусную программу на три ПК в офисе. Вероятность того, что в течение всего рабочего дня, на первый компьютер запишется вирус «тroyан» равна 0,3, на второй компьютер – 0,4 и на третий компьютер – 0,5.

Найдите вероятность того, что вирус запишется: а) на все три компьютера; б) только на один компьютер; в) хотя бы на один компьютер.

Примечание: хотя бы один компьютер окажется заражен – в этом случае вирус может оказаться как на одном компьютере, так на двух и на всех трех компьютерах.

2. В квартире установили два независимых датчика, которые сигнализируют об обнаружении угарного газа и метана. Вероятности работы этих датчиков составляют 0,85 и 0,93. Найти вероятность, что при не выключенном газовом кране при незажженной газовой горелке:

- сработает сигнализация сразу двух датчиков;
- откажут сразу оба датчика;
- с помощью теоремы сложения вероятностей событий найти вероятность срабатывания сигнализации только у одного датчика.

Результат проверить с помощью теорем сложения несовместных вероятностей и умножения вероятностей независимых событий (т.е. прямым вычислением этой вероятности).

3.4. Формула полной вероятности для условных вероятностей

Рассмотрим следующую гипотезу: если зависимое событие A появляется только в результате появления одного из группы несовместных событий $B_1, B_2, \dots, B_n$, образующих полную группу и известны вероятности этих событий $P(B_1), P(B_2), \dots, P(B_n)$ и соответствующие условные вероятности

$P_{B_1}(A), P_{B_2}(A), \dots, P_{B_n}(A)$, то вероятность наступления такого события рассчитывается по формуле:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A) \quad (3.2)$$

Формула 3.2 позволяет рассчитать полную вероятность зависимого события, наступление которого зависит от появления или события B_1 , или события B_2 , или события B_n .

Так как все несовместные события $B_1, B_2, \dots, B_n$, образуют полную группу, то при выводе этой формулы применяется теоремы сложения несовместных и умножения вероятностей зависимых событий:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(B_1A + B_2A + B_3A + \dots + B_nA) = \\ &= P(B_1A) + P(B_2A) + P(B_3A) + \dots + P(B_nA) = \\ &= P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + P(B_3) \cdot P_{B_3}(A) + \dots + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A) \end{aligned}$$

Пример 3.6. В упаковочном цехе детских игрушек для упаковки готовой продукции расположены три контейнера с одинаковыми по размеру куклами. В первом контейнере имеется 5 кукол в красном платье и 8 кукол – в синем платье. Во втором контейнере куклы только в красном платье и в третьем - только в синем. Работница хаотично выбирает любой контейнер и из него извлекает одну куклу для упаковки ее в коробку. С какой вероятностью цвет платья куклы будет синим?

Решение. Для определения вероятности появления события A (кукла, взятая для упаковки в синем платье) рассмотрим следующие варианты событий:

- B_1 – будет выбран первый контейнер;
- B_2 – будет выбран второй контейнер;
- B_3 – будет выбран третий контейнер.

Так как работница выбирает контейнер беспорядочно и выбор любого из трех контейнеров имеет равные шансы, то вероятность выбора равна:

$$P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = \frac{1}{3}.$$

Чтобы убедиться, что все рассмотренные варианты образуют полную группу событий и равны единице, проведем простую проверку - просуммировав соответствующие вероятности:

$$P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1.$$

В первом контейнере 5 кукол в красном платье и 8 кукол в синем платье, суммарно 13 кукол; по классическому определению вероятность выбора для упаковки куклы в синем платье, при условии, что работница выбрала первый контейнер:

$$P_{B_1}(A) = \frac{8}{13}.$$

Так как во втором контейнере куклы только в красном платье, то в случае выбора этого контейнера вероятность появления куклы в синем платье в принципе невозможна:

$$P_{B_2}(A) = 0.$$

Поскольку в третьем контейнере все куклы только в синем платье, то условная вероятность извлечения куклы в синем платье является раной единице:

$$P_{B_3}(A) = 1.$$

Рассчитаем вероятность извлечения куклы в синем платье по формуле полной вероятности:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + P(B_3) \cdot P_{B_3}(A) = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{8}{13} + \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{8}{39} + 0 + \frac{1}{3} = \frac{21}{39} = \frac{7}{13} \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{7}{13}$.

Пример 3.7. Программист для компьютерной игры написал различные алгоритмы для пяти видов огнестрельного оружия, которые отличаются различной степенью точности боевого поражения. Для игрока вероятности уничтожения противника одним выстрелом записаны как 0,7; 0,75; 0,8; 0,9; 0,6 соответственно. Вычислить вероятность поражения противника одним выстрелом из случайно выбранного оружия.

Решение. Для определения вероятности появления события A (уничтожения противника из наугад взятого оружия) рассмотрим следующие варианты событий:

- B_1 - будет выбран первый вид оружия;
- B_2 - будет выбран второй вид оружия;
- B_3 - будет выбран третий вид оружия;
- B_4 - будет выбран четвертый вид оружия;
- B_5 - будет выбран пятый вид оружия.

Так как игрок выбирает стрелковое оружие беспорядочно и выбор любого из пяти вариантов имеет равные шансы, то вероятность выбора равна:

$$P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = P(B_4) = P(B_5) = \frac{1}{5}.$$

Чтобы убедиться, что все рассмотренные варианты образуют полную группу событий и равны единице, проведем простую проверку - просуммировав соответствующие вероятности:

$$\begin{aligned} P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) + P(B_4) + P(B_5) &= \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \\ &= 0,2 + 0,2 + 0,2 + 0,2 + 0,2 = 1. \end{aligned}$$

По классическому определению условные вероятности запишутся, соответственно:

$$P_{B_1}(A) = 0,7; P_{B_2}(A) = 0,75; P_{B_3}(A) = 0,8; P_{B_4}(A) = 0,9; P_{B_5}(A) = 0,6.$$

Рассчитаем вероятность появления события A по формуле полной вероятности:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + P(B_3) \cdot P_{B_3}(A) + P(B_4) \cdot P_{B_4}(A) + \\ &+ P(B_5) \cdot P_{B_5}(A) = 0,2 \cdot 0,7 + 0,2 \cdot 0,75 + 0,2 \cdot 0,8 + 0,2 \cdot 0,9 + 0,2 \cdot 0,6 = \\ &= 0,14 + 0,15 + 0,16 + 0,18 + 0,12 = 0,75. \end{aligned}$$

Ответ: 0,75.

Пример 3.8. Изменим условие предыдущей задачи. Программист для компьютерной игры написал алгоритм для пяти видов огнестрельного оружия, из которых две – с оптическим прицелом и три – обычного вида. Для игрока вероятности уничтожения противника одним выстрелом из огнестрельного оружия с оптическим прицелом составляет 0,9, а без прицела - 0,7. Вычислить вероятность поражения противника одним выстрелом из случайно выбранного оружия.

Решение. Для определения вероятности появления события A (уничтожения противника из наугад взятого оружия) рассмотрим следующие варианты событий:

B_1 - будет выбран вид оружия с оптическим прицелом;

B_2 - будет выбрано обычное оружие.

С учетом классического определения вероятности:

$$P(B_1) = \frac{2}{5} = 0,4$$

$$P(B_2) = \frac{3}{5} = 0,6$$

Чтобы убедиться, что все рассмотренные варианты образуют полную группу событий и равны единице, вычислим их сумму:

$$P(B_1) + P(B_2) = 0,4 + 0,6 = 1$$

Условная вероятность, что игрок уничтожит противника оружием с оптическим прицелом, составляет: $\cdot P_{B_1}(A) = 0,9$.

Условная вероятность, что игрок уничтожит противника оружием без оптического прицела, составляет: $\cdot P_{B_2}(A) = 0,7$.

Вероятность, что противник будет уничтожен первым выстрелом, рассчитаем по формуле полной вероятности 3.2:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) = 0,4 \cdot 0,9 + 0,6 \cdot 0,7 = 0,36 + 0,42 = 0,78.$$

Ответ: 0,78.

Пример 3.9. Твердотопливный отопительный котел работает в следующих режимах: пусковом, переходном и рабочем. В этих режимах существует следующая вероятность его поломки: в пусковом – вероятность его выхода из строя равна 0,65; в переходном – 0,1 и в рабочем – 0,25. Приблизительно 95% времени котел работает в рабочем режиме, 2% - в режиме пуска и 3% - в переходном режиме. Какова вероятность поломки котла во время работы?

Решение. По условиям задачи, всего три режима работы котла.

Рассчитаем вероятности работы котла в разных режимах: $P(B_1)$ – котел работает в пусковом режиме; $P(B_2)$ – котел работает в переходном режиме и $P(B_3)$ – котел работает в рабочем режиме:

$$P(B_1) = \frac{2}{100} = 0,02; \quad P(B_2) = \frac{3}{100} = 0,03; \quad P(B_3) = \frac{95}{100} = 0,95.$$

Вероятностные поломки котла в каждом из режимов составляют:

$$\cdot P_{B_1}(A) = 0,65; \quad \cdot P_{B_2}(A) = 0,1 \quad \cdot P_{B_3}(A) = 0,25.$$

По формуле полной вероятности, определение вероятности поломки котла составляет:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + P(B_3) \cdot P_{B_3}(A) = \\ = 0,02 \cdot 0,65 + 0,03 \cdot 0,1 + 0,95 \cdot 0,25 = 0,013 + 0,003 + 0,2375 = 0,2535.$$

Ответ: 0,2535.

3.5. Вероятность гипотез и формула Байеса

Данный параграф основывается на материалах предыдущего параграфа. Предположим, что зависимое событие A появляется только в результате появления одного из несовместных событий $B_1, B_2, \dots, B_n$, образующих полную группу. Несовместные события $B_1, B_2, \dots, B_n$ называют **гипотезами**, так как заранее неизвестно, какое из этих событий произойдет.

Зависимое событие A появляется с вероятностью, определяемой по формуле полной вероятности 3.2, т.е. событие A может наступить при выполнении одного из варианта (гипотезы).

Представим себе, что событие A уже наступило. Каким образом определить вероятность, в результате какой из гипотез оно произошло?

То есть, необходимо найти условные вероятности $P_A(B_1), P_A(B_2), \dots, P_A(B_n)$.

Для переоценки вероятности появления какой-либо гипотезы из всех гипотез, используется формула английского священника Томаса Байеса. Для ее вывода вначале рассчитаем условную вероятность, используя теорему умножения:

$$P(AB_1) = P(A) \cdot P_A(B_1) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A)$$

Таким образом, условная вероятность рассчитывается по формуле **Байеса**:

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A)}{P(A)}$$

Если расписать $P(A)$, используя формулу 3.2, то условная вероятность появления события A в результате гипотезы B_1 :

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A)}{P(A)} = \frac{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A)}{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + \dots + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A)}$$

Аналогично, для других гипотез:

$$P_A(B_2) = \frac{P(B_2) \cdot P_{B_2}(A)}{P(A)} = \\ = \frac{P(B_2) \cdot P_{B_2}(A)}{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + \dots + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A)}$$

$$P_A(B_3) = \frac{P(B_3) \cdot P_{B_3}(A)}{P(A)} = \\ = \frac{P(B_3) \cdot P_{B_3}(A)}{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + \dots + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A)}$$

$$P_A(B_n) = \frac{P(B_n) \cdot P_{B_n}(A)}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(B_n) \cdot P_{B_n}(A)}{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + \dots + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A)}$$

Разница между вероятностями $P(B_1), P(B_2), P(B_3)$ и вероятностями $P_A(B_1), P_A(B_2), P_A(B_3), \dots, P_A(B_n)$ заключается во времени их оценивания: **до** или **после** проведения испытания.

Примечание. Вероятности гипотез, вычисленные до проведения испытаний называют **априорными**, а вычисленные после проведения испытания – **апостериорными** вероятностями – пересчитанных тех же гипотез, в связи с тем фактом, что событие A произошло достоверно.

Рассмотрим общий вид задач, которые решаются по формуле Байеса.

1. В первую очередь, возможно рассчитать формула полной вероятности какого-либо события: имеются некоторые гипотезы H_i , $i = 1, 2, \dots, n$ и известны вероятности этих гипотез.
2. Далее произошло событие A , которое влияет на вероятности гипотез H_i .
3. Производится пересчет величин вероятности гипотез по формулам Байеса с учетом вновь поступившей информации.

Рассмотрим примеры, в которых используется формула Байеса.

Пример 3.10. На промышленное предприятие поступили две партии комплектующих деталей разных заводов: первая партия из 700 деталей завода №1, вторая партия – из 300 деталей завода №2. Нестандартных деталей усреднено, из первой партии примерно 10%, а из второй - около 15%. Взятая случайным образом комплектующая деталь оказалась стандартной. Найти вероятность, что взятая комплектующая окажется: а) из первой партии, выпущенной заводом №1 ; б) из второй партии, выпущенной заводом №2.

Решение этой задачи состоит из 2 частей: первая часть предполагает, что комплектующая деталь как бы еще не выбрана и событие - выбранная деталь оказалась стандартной – еще не наступило. В этом случае рассматриваются две гипотезы: случайным образом выбранная комплектующая деталь окажется а) из первой партии (с завода №1) – B_1 ; б) из второй партии – B_2 (с завода №2)

Так как всего на предприятие пришли $700 + 300 = 1000$ комплектующих деталей, то по классическому определению:

$$P(B_1) = \frac{700}{1000} = 0,7;$$

$$P(B_2) = \frac{300}{1000} = 0,3.$$

Для проверки сложим вероятности двух событий:

$$P(B_1) + P(B_2) = 0,7 + 0,3 = 1.$$

Рассмотрим зависимое условие A – случайным образом выбранная комплектующая деталь окажется **стандартной**.

Рассчитаем условную вероятность того, что выбранная комплектующая деталь окажется стандартной **при условии**, что она принадлежит первой партии (с завода №1):

$P_{B_1}(A) = \frac{90}{100} = 0,9$ - так как в первой партии всего 100% - 10%=90% стандартных комплектующих деталей (по условию задачи).

Рассчитаем условную вероятность того, что выбранная комплектующая деталь окажется стандартной **при условии**, что она принадлежит второй партии (с завода №2):

$P_{B_2}(A) = \frac{85}{100} = 0,85$, - так как во второй партии по условию задачи всего 85% стандартных комплектующих деталей.

Рассчитаем полную вероятность того, что выбранная случайным образом комплектующая деталь оказалась стандартной:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) = 0,7 \cdot 0,9 + 0,3 \cdot 0,85 = 0,63 + 0,255 = 0,885.$$

Вторая часть решения задачи учитывает, что случайным образом взятая комплектующая деталь является стандартной, т.е. событие A уже произошло (из условия задачи).

Используя формулу Байеса, вычислим вероятность того, что выбранная стандартная комплектующая деталь принадлежит той партии, которая выпущена заводом №1:

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A)}{P(A)} = \frac{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A)}{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A)} = \frac{0,7 \cdot 0,9}{0,885} = \frac{0,63}{0,885} \approx 0,71.$$

По формуле Байеса вычислим вероятность того, что выбранная стандартная комплектующая деталь принадлежит второй партии, выпущенной заводом №2:

$$P_A(B_2) = \frac{P(B_2) \cdot P_{B_2}(A)}{P(A)} = \frac{P(B_2) \cdot P_{B_2}(A)}{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A)} = \frac{0,3 \cdot 0,85}{0,885} = \frac{0,255}{0,885} \approx 0,29.$$

Выполним проверку, что гипотезы B_1 и B_2 после переоценки образуют полную группу:

$$P_A(B_1) + P_A(B_2) = \frac{0,63}{0,885} + \frac{0,255}{0,885} = 1.$$

Ответ: а) $\frac{0,63}{0,885} \approx 0,71$. б) $\frac{0,255}{0,885} \approx 0,29$.

Для чего происходит переоценка гипотез? Если рассмотреть эту задачу с практической точки зрения, то, скорее всего выбранная комплектующая деталь, является стандартной из первой партии, выпущенной заводом №1. Этот завод и комплектующих деталей выпускает больше и детали делает качественнее. Таким образом, вероятность первой гипотезы будет переоцениваться в более лучшую сторону и повышаться ($\approx 0,71$), а вероятность второй гипотезы, соответственно, понижаться ($\approx 0,29$). В трактовке Байеса апостериорные вероятности рассматриваются как уровень доверия. По условию задачи, априорные (предварительные) вероятности выхода стандартных комплектующих деталей (0,9 и 0,85, соответственно, для завода №1 и завода №2) всего лишь усредненные на какой-то момент времени. Но вполне возможно в течение времени благополучный завод №1 повысил качество своих деталей и увеличил процент выпуска стандартных, а мог и (или) завод №2 понизить число своих стандартных деталей. И в этом случае, если проверить

все пришедшие на предприятие комплектующие детали (1000 штук), то переоцененные гипотезы будут ближе к истине.

Аналогично рассматривается противоположный вариант с выбранной нестандартной комплектующей деталью: вероятность ее извлечения заводом №2 после переоценки будет выше.

Пример 3.11. В трех цехах изготавливаются утюги: первый цех изготавливает 20% от общего количества, второй цех – 50% от общего количества и 3 цех – остальную часть. Магазин берет на реализацию продукцию всех трех цехов. Утюги первого цеха имеют 3% брака, второго цеха – 2% брака и третьего – 1% брака. Покупатель приобрел бракованный утюг, который не нагревается. Какова вероятность, что приобретенный утюг был произведен во втором цеху?

Решение этой задачи аналогично решению предыдущей (см. задачу 3.10).

Так как в задаче **уже произошло** какое-то **событие** (покупка бракованного утюга), то это и является основанием для применения формулы Байеса.

Применяем ту же схему решения, что и в предыдущей задаче: на 1 этапе считаем **вероятность** того, что купленный утюг будет **бракованный**.

Переведем проценты в вероятности, исходя из поставленных условий задачи:

$$P(B_1) = \frac{20}{100} = 0,2 \text{ - вероятность, что утюг произведен в цехе №1;}$$

$$P(B_2) = \frac{50}{100} = 0,5 \text{ - вероятность, что утюг произведен в цехе №2;}$$

$$P(B_3) = \frac{30}{100} = 0,3 \text{ - вероятность, что утюг произведен в цехе №3.}$$

Для проверки сложим вероятности всех трех событий:

$$P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) = 0,2 + 0,5 + 0,3 = 1.$$

Аналогично рассчитываем вероятности, что купленный утюг будет с браком:

$$P_{B_1}(A) = \frac{3}{100} = 0,03;$$

$$P_{B_2}(A) = \frac{2}{100} = 0,02;$$

$$P_{B_3}(A) = \frac{1}{100} = 0,01.$$

По формуле полной вероятности рассчитаем, что купленный утюг попался с браком:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + P(B_3) \cdot P_{B_3}(A) = \\ &= 0,2 \cdot 0,03 + 0,5 \cdot 0,02 + 0,3 \cdot 0,01 = 0,006 + 0,01 + 0,003 = 0,019. \end{aligned}$$

На втором этапе рассмотрим **уже произошедшее** событие – купленный утюг оказался с браком.

По формуле Байеса рассчитаем вероятность того, что купленный бракованный утюг был произведен только вторым цехом:

$$\begin{aligned} P_A(B_2) &= \frac{P(B_2) \cdot P_{B_2}(A)}{P(A)} = \frac{P(B_2) \cdot P_{B_2}(A)}{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + P(B_3) \cdot P_{B_3}(A)} = \\ &= \frac{0,01}{0,019} = \frac{1}{19} \approx 0,53. \end{aligned}$$

Ответ: - вероятность купить бракованный утюг, изготовленный именно вторым цехом, составляет $\frac{1}{19} \approx 0,053$.

После переоценки **апостериорная** вероятность второй гипотезы увеличилась (0,53 - против первоначальной 0,5). Возникает вопрос: почему увеличился процент брака именно у второго цеха, хотя цех имеет средние показатели по качеству? Ответом на этот вопрос является наибольшее количество выпущенной продукции этим цехом – половина от всех выпущенных изделий.

Вероятности двух других гипотез также переоценились и составили:

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A)}{P(A)} = \frac{P(B_1) \cdot \bar{P}(B_1)}{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + P(B_3) \cdot P_{B_3}(A)} = \\ = \frac{0,006}{0,019} = \frac{0,6}{19} \approx 0,32.$$

$$P_A(B_3) = \frac{P(B_3) \cdot P_{B_3}(A)}{P(A)} = \frac{P(B_3) \cdot P_{B_3}(A)}{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + P(B_3) \cdot P_{B_3}(A)} = \\ = \frac{0,003}{0,019} = \frac{1}{19} \approx 0,15.$$

После переоценки гипотезы вероятности составляют полную группу, что легко проверяется:

$$P_A(B_1) + P_A(B_2) + P_A(B_3) = 0,32 + 0,53 + 0,15 = 1.$$

Пример 3.12. Производственное объединение имеет три кирпичных завода и поставляет одинарный кирпич на черновую кладку. Первый завод поставляет кирпичей в 3 раза больше, чем второй цех и в 6 раз больше, чем третий. Доля кирпича, не соответствующего ГОСТу, составляет: для первого завода – 10%, для второго завода – 7%, для третьего завода – 6%. Для контроля качества случайным образом выбирается кирпич. Какова вероятность, что он окажется выпущенным не по ГОСТу и его поставил третий завод?

Решение данной задачи по формуле полной вероятности будет отличаться от решенных задач выше (см. 3.10, 3.11), так как вопрос задан в явном виде.

Для решения этой задачи составим уравнения и за x примем наименьшее значение – количество кирпичей, выпущенных третьим заводом.

По условию задачи, первый завод производит продукции в 6 раз больше, чем третий завод: доля в общем выпуске продукции первого завода составляет $6x$.

Кроме того, первый завод выпускает в 3 раза больше, чем второй завод, поэтому доля второго завода составляет:

$$\frac{6x}{3} = 2x.$$

После составления и решения уравнений получим:

$$6x + 2x + x = 1 \\ 9x = 1$$

$$x = \frac{1}{9}.$$

Рассчитаем вероятности гипотез, что выбранный кирпич был произведен на первом, втором или третьем заводе.

Вероятность того, что кирпич произведен на первом заводе:

$$P(B_1) = 6x = 6 \cdot \frac{1}{9} = \frac{6}{9}.$$

Вероятность того, что кирпич произведен на втором заводе:

$$P(B_2) = 2x = \frac{2}{9}.$$

Вероятность того, что кирпич произведен на третьем заводе:

$$P(B_3) = x = \frac{1}{9}.$$

В сумме вероятности всех трех событий должны составлять единицу:

$$P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) = \frac{6}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{9}{9} = 1.$$

Аналогично рассчитываем вероятности, что выбранный кирпич произведен с нарушением ГОСТ:

$$P_{B_1}(A) = \frac{10}{100} = 0,1;$$

$$P_{B_2}(A) = \frac{7}{100} = 0,07;$$

$$P_{B_3}(A) = \frac{6}{100} = 0,06.$$

По формуле полной вероятности (3.1) рассчитаем вероятность того, что выбранный случайным образом кирпич не соответствует ГОСТ:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + P(B_3) \cdot P_{B_3}(A) = \\ &= \frac{6}{9} \cdot 0,1 + \frac{2}{9} \cdot 0,07 + \frac{1}{9} \cdot 0,06 = \frac{6}{9} \cdot \frac{10}{100} + \frac{2}{9} \cdot \frac{7}{100} + \frac{1}{9} \cdot \frac{6}{100} = \\ &= \frac{60}{900} + \frac{14}{900} + \frac{6}{900} = \frac{80}{900} = \frac{8}{90} = 0,088. \end{aligned}$$

Так как, по условию задачи нужно определить вероятность, что этот кирпич выпустил не ГОСТу третий завод, то считаем, что событие **уже произошло** и с помощью формулы Байеса произведем переоценку гипотез.

Для третьего завода:

$$\begin{aligned} P_A(B_3) &= \frac{P(B_3) \cdot P_{B_3}(A)}{P(A)} = \frac{P(B_3) \cdot P_{B_3}(A)}{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + P(B_3) \cdot P_{B_3}(A)} = \\ &= \frac{\frac{1}{9} \cdot \frac{6}{100}}{\frac{80}{900}} = \frac{\frac{1}{150}}{\frac{8}{90}} = \frac{1}{150} \cdot \frac{90}{8} = \frac{9}{120} = \frac{3}{40} \approx 0,075. \end{aligned}$$

Для второго кирпичного завода:

$$P_A(B_2) = \frac{P(B_2) \cdot P_{B_2}(A)}{P(A)} = \frac{P(B_2) \cdot P_{B_2}(A)}{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + P(B_3) \cdot P_{B_3}(A)} =$$

$$= \frac{\frac{2}{9} * \frac{7}{100}}{\frac{80}{900}} = \frac{\frac{7}{450}}{\frac{80}{900}} = \frac{7}{450} \cdot \frac{900}{80} = \frac{14}{80} = \frac{7}{40} \approx 0,175.$$

Для первого кирпичного завода:

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A)}{P(A)} = \frac{P(B_1) \cdot \bar{P}(B_1)}{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + P(B_3) \cdot P_{B_3}(A)} =$$

$$= \frac{\frac{6}{9} * \frac{10}{100}}{\frac{80}{900}} = \frac{\frac{6}{90}}{\frac{80}{900}} = \frac{60}{900} \cdot \frac{900}{80} = \frac{60}{80} = \frac{30}{40} = \frac{3}{4} \approx 0,75.$$

После переоценки гипотезы вероятности составляют полную группу, что легко проверяется:

$$P_A(B_1) + P_A(B_2) + P_A(B_3) = 0,75 + 0,175 + 0,0075 = 1.$$

Ответ: вероятность, что выбранный кирпич был произведен с нарушением ГОСТ $P(A) = 0,088$ и выпущен третьим заводом составляет $P_A(B_3) = 0,075$. Это закономерный результат, так как количество кирпичей, выпущенных третьим заводом – наименьшее, а качество завода – наилучшее.

Контрольные вопросы и задачи

Вопросы.

- 3.1. Перечислите виды событий.
- 3.2. Приведите пример независимых и зависимых испытаний.
- 3.3. Как рассчитать полную вероятность события?
- 3.4. Чем отличается сложение зависимых испытаний от сложения независимых испытаний?
- 3.5. Какие события называются противоположными?
- 3.6. В чем отличие теоремы сложения вероятности от теоремы умножения вероятностей?
- 3.7. Что является полной группой событий?
- 3.8. Как отличить зависимое событие от независимого события?
- 3.9. Какие вероятности гипотез называют априорными? Апостериорными?
- 3.10. В каких случаях применяется формула Байеса?
- 3.11. Для чего производится переоценка гипотез?
- 3.12. Каким образом выполняются повторные независимые испытания?

Задачи для самостоятельного решения.

На полную вероятность:

- 3.13. В цехе эмали посуды производят кастрюли двух расцветок: белые и с цветами. Вся продукция фасуется в коробки и поступает в контейнерах в цех готовой продукции для маркировки. После последней смены на цех готовой продукции привезли 3 контейнера: в одном только белые кастрюли, в другом только с цветами, в третьем 15 кастрюль с цветами и

25 белых. Работник произвольно выбирает коробку для маркировки и указывает цену кастрюли. С какой вероятностью выбранная кастрюля будет с цветами?

- 3.14. На предприятии изготавливают изделия 3 видов. На склад поступают 4 коробки с изделиями. В коробках могут находиться изделия первого, второго и третьего вида: в первой коробке изделия только первого вида; во второй коробке изделия только второго вида; в третьей коробке 20 штук изделий первого вида; 30 штук изделий второго вида и 10 изделий третьего вида; в четвертой коробке изделия только третьего вида. С какой вероятностью выбранное случайным образом изделие окажется третьего вида?
- 3.15. Тонерный пылесос АП работает в двух режимах: при мощности двигателя 600 и 1100 Вт. Для ремонта оргтехники предназначена мощность 1100 Вт, и для заправки картриджей – 600 Вт. Около 70% времени пылесос работает в режиме ремонта оргтехники и 30% времени – для заправки картриджей. Вероятность поломки пылесоса в режиме ремонта составляет 0,3 и во время заправки картриджей – 0,15. Найти вероятность отказоустойчивой работы пылесоса во время его эксплуатации.
- 3.16. В химической лаборатории исследуются пять различных лекарственных средств, вероятности излечения которыми составляет, соответственно, 0,6; 0,65; 0,9; 0,75 и 0,85. Чему равна вероятность выздоровления, если подопытный кролик получил одну таблетку случайно выбранного лекарства?

На формулу Байеса:

- 3.17. На промышленное предприятие поступили две партии комплектующих деталей разных заводов: первая партия из 1000 деталей завода №1, вторая партия – из 500 деталей завода №2. Нестандартных деталей усреднено, из первой партии примерно 20%, а из второй - около 10%. Взятая случайным образом комплектующая деталь оказалась стандартной. Найти вероятность, что взятая комплектующая окажется: а) из первой партии, выпущенной заводом №1; б) из второй партии, выпущенной заводом №2.
- 3.18. На вход технического канала с вероятностью 0,9 поступает смесь защищаемого сигнала и речеподобных помех, а с вероятностью 0,1 только речеподобные помехи. При поступлении смеси полезного защищаемого сигнала и речеподобных помех, регистратор фиксирует поступление сигнала с вероятностью 0,8, а поступление только речеподобных помех – с вероятностью 0,2. Злоумышленник пытается подключиться к техническому каналу и зафиксировал какой-то сигнал. Найти вероятность, что произойдет утечка по техническому каналу и злоумышленник получит нужную информацию (в составе смеси есть защищаемые сигналы).
- 3.19. Промышленное предприятие имеет три цеха, в которых производится одна и та же продукция. Первый цех поставяет изделий в 5 раз больше, чем второй цех и в 10 раз больше, чем третий. Доля изделий, не соответствующей техническим условиям (ТУ), составляет: для первого

цеха – 10%, для второго цеха – 2%, для третьего цеха - 4%. Для контроля качества случайным образом выбирается готовое изделие. Какова вероятность, что оно окажется выпущенным не по ТУ и его поставил первый завод?

- 3.20. Биолог - исследователь изучал подопытных животных и использовал лекарства из двух заказанных партий: 30 ампул и 100 ампул. Часть ампул оказалась с истекающим сроком хранения: из первой партии усредненно 10%, из второй – 15%. Взятая ампула оказалась с истекающим сроком использования. Найти вероятность, что взятая ампула оказалась а) из первой партии; б) из второй партии.

4. КЛАССИЧЕСКИЕ ВЕРОЯТНОСТНЫЕ СХЕМЫ И КЛАССИЧЕСКИЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ

4.1. Биномиальная и полиномиальная схемы независимых испытаний

Пусть одно за другим проводится n независимых одинаковых испытаний (экспериментов), причем каждый раз проверяется, произошло или нет некоторое событие A .

Определение 4.1. *Схемой Бернулли* (или *биномиальной схемой*) называют последовательность испытаний, удовлетворяющую следующим условиям:

- 1) при каждом испытании различают лишь два исхода: появление некоторого события A , называемого «успехом», либо появление его дополнения $\bar{A}$, называемого «неудачей»;
- 2) испытания являются независимыми,
- 3) вероятность «успеха» во всех испытаниях постоянна и равна $P(A) = p$, а вероятность «неудачи» обозначается q и равна $P(\bar{A}) = q = 1 - p$.

Рассмотрим событие A_k – в n независимых испытаниях «успех» произошел k раз, где $0 \leq k \leq n$. Событию A_k благоприятствуют все элементарные исходы, при которых «успех» произошел k раз, а «неудача» случилась $n - k$ раз. Тогда вероятность любого такого исхода равна $p^k q^{n-k}$. Очевидно, что всего таких элементарных исходов, благоприятствующих событию A_k , может быть C_n^k .

Теорема 4.1. Вероятность $P_n(k)$ того, что в n независимых испытаниях по схеме Бернулли произойдет ровно k успехов, определяется *формулой Бернулли*

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad 0 \leq k \leq n. \quad (4.1)$$

Вероятности $P_n(k)$ называют *биномиальными*, так как произведение $C_n^k p^k q^{n-k}$ представляет собой общий член разложения бинома Ньютона

$$(p + q)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Из формулы Бернулли вытекают три следствия.

Следствие 1. Так как $p + q = 1$, то отсюда следует, что сумма всех биномиальных вероятностей равна 1:

$$\sum_{k=0}^n P_n(k) = 1.$$

Следствие 2. Так как события A_k являются несовместными, вероятность появления успеха в n независимых испытаниях не более k_1 раз и не менее k_2 раз равна:

$$P\{k_1 \leq k \leq k_2\} = \sum_{k=k_1}^{k_2} C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Следствие 3. Из следствия 2 при $k_1 = 1$ и $k_2 = n$ получаем формулу для вычисления вероятности хотя бы одного успеха в n испытаниях:

$$P\{k \geq 1\} = 1 - q^n.$$

Пример 4.1. Имеется крупная партия одинаковых по форме деталей. Известно, что часть деталей изготовлено из стали, а часть – из чугуна, причем,

стальных деталей вдвое больше чугунных. Найти вероятность того, что из трех наугад взятых деталей окажутся две стальные.

Решение. Испытание состоит в том, что выбрали одну деталь из партии. Успех – выбор стальной детали, неудача – выбор чугунной детали.

Тогда по условию задачи имеем:

$$p = \frac{2}{3}, q = 1 - p = \frac{1}{3}, n = 3, k = 2.$$

По формуле Бернулли вероятность того, что из трех наугад взятых деталей окажутся две выполнены из стали, равна

$$P_3(2) = C_3^2 p^2 q^1 = 3 \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{3} = 0,444.$$

Биномиальная схема независимых испытаний позволяет, установить, какое число появлений события A наиболее вероятно. **Формула для наиболее вероятного числа успехов k** (появлений события A) имеет вид:

$$np - q \leq k \leq np + p, \quad \text{где } q = 1 - p$$

Так как левая часть неравенства равна $np - q = np + p - 1$, то эти границы отличаются на 1. Поэтому k , являющееся целым числом, может принимать либо одно значение, когда $np + p$ (а отсюда и $np - q$) нецелое число, либо два значения, когда $np - q$ целое число.

Пример 4.2. При автоматической наводке орудия вероятность попадания по быстро движущейся цели равна 0,9. Найти наивероятнейшее число попаданий при 50 выстрелах.

Решение. По условию задачи имеем:

$$n = 50, p = 0,9, q = 1 - p = 0,1.$$

Отсюда получаем неравенства:

$$\begin{aligned} np - q &\leq k \leq np + p \\ 50 \cdot 0,9 - 0,1 &\leq k \leq 50 \cdot 0,9 + 0,9 \\ 44,9 &\leq k \leq 45,9 \end{aligned}$$

Следовательно, $k = 45$.

Неравенства для наивероятнейшего числа успехов k позволяют решить и обратную задачу: по данному k и известному значению p определить общее число n всех испытаний.

Пример 4.3. При каком числе выстрелов наивероятнейшее число попаданий равно 16, если вероятность попадания в отдельном выстреле составляет 0,7?

Решение. По условию задачи определяем значения:

$$k = 16, p = 0,7, q = 1 - p = 0,3.$$

Составляем неравенства:

$$\begin{aligned} np - q &\leq k \leq np + p \\ 0,7 \cdot n - 0,3 &\leq 16 \leq 0,7 \cdot n + 0,7 \end{aligned}$$

После преобразования получаем систему:

$$\begin{cases} 0,7 \cdot n \leq 16,3 \\ 0,7 \cdot n \geq 15,3 \end{cases} \quad \begin{cases} n \leq 23,3 \\ n \geq 21,9 \end{cases}$$

Таким образом, число всех выстрелов здесь может быть 22 или 23.

Определение 4.2. Опыт, состоящий в n -кратном повторении одинаковых независимых событий, в каждом из которых может произойти одно и только одно из m несовместных событий $A_1, \dots, A_m$, причем событие A_i наступает с вероятностью p_i , называют **полиномиальной схемой**.

Теорема 4.2. Вероятность $P_n(k_1, \dots, k_m)$ того, что в n испытаниях событие A_1 произойдет ровно k_1 раз, ..., событие A_m произойдет ровно k_m раз ($k_1 + \dots + k_m = n$), определяется выражением

$$P_n(k_1, \dots, k_m) = \frac{n!}{k_1! \dots k_m!} p_1^{k_1} \dots p_m^{k_m}.$$

Пример 4.4. Десять занумерованных шаров случайным образом размещают по трём урнам. Найти вероятность того, что в первой урне окажется два шара, во второй – три и в третьей урне – пять шаров.

Решение. Это задача на полиномиальную схему. Рассматривается три несовместных события A_1, A_2, A_3 – попадание шара в одну из трёх урн. По условию задачи имеем:

- всего проводится $n = 10$ опытов;
- количество возможных вариантов событий $m = 3$;
- вероятность наступления каждого события $p_i = P(A_i) = \frac{1}{3}$;
- каждое событие должно произойти соответственно $k_1 = 2, k_2 = 3, k_3 = 5$ раз.

По формуле для полиномиальной схемы искомая вероятность равна:

$$P_{10}(2, 3, 5) = \frac{10!}{2! 3! 5!} \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^{10} = \frac{280}{6561} \approx 0,043.$$

Пример 4.5. Игральную кость бросают 10 раз. Найти вероятность того, что «шестерка» выпадет 2 раза, а «пятерка» выпадет 3 раза.

Решение. Испытание состоит в бросании игральной кости. Возможно три исхода (три несовместных события): выпала «шестерка», выпала «пятерка», выпали любые другие грани кости (кроме «пятерки» и «шестерки»). Переформулируем задачу в терминах полиномиальной схемы:

$n = 10$ – число испытаний;

$m = 3$ – число вариантов, которые мы различаем в каждом испытании;

1 вариант – выпадение «шестерки»

$$p_1 = \frac{1}{6} \quad k_1 = 2$$

2 вариант – выпадение «пятерки»

$$p_2 = \frac{1}{6} \quad k_2 = 3$$

3 вариант – выпадение остальных граней

$$p_3 = \frac{4}{6} \quad k_3 = 5$$

Проведём расчёт по формуле для полиномиальной схемы:

$$P_{10}(2, 3, 5) = \frac{10!}{2! 3! 5!} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{4}{6}\right)^5 = \frac{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{2} \cdot \frac{4^5}{6^{10}} = \frac{280}{6561} \approx 0,043.$$

4.2. Классические предельные теоремы теории вероятностей: теоремы Муавра-Лапласа, теорема Пуассона

При больших значениях числа испытаний n использование формулы Бернулли затруднительно в вычислительном плане. Тогда используют приближенные формулы.

Теорема 4.3 (локальная теорема Муавра-Лапласа). Если вероятность p появления события A в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность $P_n(k)$ того, что событие A появится в n испытаниях ровно k раз, приближенно равна (чем больше n , тем точнее) значению функции

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x),$$

при

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}.$$

Функцию $\varphi(x)$ называют **плотностью стандартного нормального (или гауссова) распределения**. Существуют таблицы, в которых приведены значения функции $\varphi(x)$, соответствующие положительным значениям аргумента x . Так как функция $\varphi(x)$ – четная, то для вычисления $\varphi(x)$ для отрицательных x нужно воспользоваться правилом $\varphi(x) = \varphi(-x)$. Значения функции $\varphi(x)$ для некоторых x приведены в приложении 1.

Пример 4.6. Найти вероятность того, что при 400 выстрелах произойдет ровно 300 попаданий, если вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,8.

Решение. По условию задачи: $n = 400$, $k = 300$, $p = 0,8$, $q = 1 - p = 0,2$. Воспользуемся формулой локальной теоремы Муавра-Лапласа. Сначала вычислим величину:

$$\sqrt{npq} = \sqrt{400 \cdot 0,8 \cdot 0,2} = \sqrt{64} = 8.$$

Значение переменной x равно:

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{300 - 400 \cdot 0,8}{8} = \frac{-20}{8} = -2,5.$$

Отсюда,

$$P_{400}(300) \approx \frac{\varphi(-2,5)}{8} = \frac{\varphi(2,5)}{8} \approx \frac{0,01753}{8} \approx 0,0022.$$

Теорема 4.4 (интегральная теорема Муавра-Лапласа). Если вероятность p появления события A в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность $P_n(k_1, k_2)$ того, что событие A появится в n испытаниях от k_1 до k_2 раз, приближенно равна определенному интегралу

$$P_n(k_1, k_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{z^2}{2}} dz,$$

при

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

При решении задач на применение формулы интегральной теоремы Муавра-Лапласа пользуются специальными таблицами для вычисления определенного интеграла

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

Функцию $\Phi(x)$ называют **интегралом Лапласа**. В таблицах приводятся значения функции $\Phi(x)$ для положительных значений аргумента x . Так как функция $\Phi(x)$ – нечетная, то для вычисления $\Phi(x)$ для отрицательных x нужно воспользоваться формулой $\Phi(x) = -\Phi(-x)$. В приложении 2 пособия приведены значения интеграла Лапласа для некоторых значений переменной x .

Преобразуем формулу в теореме 4.2 таким образом, чтобы было удобно пользоваться таблицами для вычисления интеграла Лапласа:

$$\begin{aligned} P_n(k_1, k_2) &\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^0 e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x_2} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x_2} e^{-\frac{z^2}{2}} dz - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x_1} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \Phi(x_2) - \Phi(x_1). \end{aligned}$$

Пример 4.7. Найти вероятность того, что если бросить монету 200 раз, то орел выпадет от 90 до 110 раз.

Решение. По условию задачи: $n = 200$, $k_1 = 90$, $k_2 = 110$, $p = q = 0,5$. Так как n достаточно велико, воспользуемся интегральной теоремой Лапласа:

$$P_{200}(90, 110) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1).$$

Вычислим значения x_1 и x_2 :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{90 - 200 \cdot 0,5}{\sqrt{200 \cdot 0,5 \cdot 0,5}} = \frac{-10}{\sqrt{50}} = -1,41 \\ x_2 &= \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{110 - 200 \cdot 0,5}{\sqrt{200 \cdot 0,5 \cdot 0,5}} = \frac{10}{\sqrt{50}} = 1,41 \end{aligned}$$

Вычислим искомую вероятность, используя специальные таблицы для нахождения значений интеграла Лапласа:

$$\begin{aligned} P_{200}(90, 110) &= \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = \Phi(1,41) - \Phi(-1,41) = \Phi(1,41) + \Phi(1,41) = \\ &= 2 \cdot \Phi(1,41) = 0,8414. \end{aligned}$$

Теорема 4.5 (теорема Пуассона). Если вероятность p появления события A в каждом испытании постоянна и мала, а число независимых испытаний n достаточно велико, то вероятность $P_n(k)$ того, что событие A появится в n испытаниях ровно k раз, приближенно равна

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad \text{где } \lambda = np.$$

Значения функции $P_n(k; \lambda) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ для некоторых λ приведены в приложении 3. Формула Пуассона применима также, если необходимо найти вероятность числа неудач; в этом случае должна быть мала вероятность q , при этом рассматривают величину $\lambda' = np$.

Пример 4.8. Вероятность искажения одного символа при передаче данных составляет 0,001. Найти вероятность того, что сообщение, состоящее из 20 слов по 100 символов каждое будет передано без искажений.

Решение. По условию задачи имеем схему Бернулли, причем:

$$n = 20 \cdot 100 = 2000, p = 0,001, k = 0.$$

Значение p достаточно мало при большом количестве n . Поэтому для вычисления искомой вероятности применим теорему Пуассона:

$$\lambda = np = 2000 \cdot 0,001 = 2$$

$$P_{2000}(0) \approx P(0; 2) = 0,13534.$$

В таблице 4.1 приведены некоторые рекомендации по применению приближенных формул.

Таблица 4.1

Рекомендации по применению приближённых формул
(выбор осуществляется по числам λ и n)

<i>Число испытаний</i>	<i>Формула Пуассона</i>	<i>Формулы Муавра-Лапласа</i>	<i>Качество оценки</i>
$n < 10$	$\lambda \leq 2$	$\lambda > 2$	оценки грубы
$10 \leq n \leq 20$	$\lambda \leq 3$	$\lambda > 3$	используются для грубых прикидочных расчётов
$20 \leq n \leq 100$	$\lambda \leq 5$	$\lambda > 5$	используются для прикладных инженерных расчётов
$100 \leq n \leq 1000$	$\lambda \leq 10$	$\lambda > 10$	используются для любых инженерных расчётов
$n > 1000$	$\lambda \leq \frac{1}{2}\sqrt{n}$	$\lambda > \frac{1}{2}\sqrt{n}$	очень хорошее качество оценок

Решение типовых примеров

Пример 4.9. Симметричную монету подбрасывают 10 раз. Определить вероятность выпадение герба:

- а) ровно 5 раз;

- б) не более пяти раз;
- в) хотя бы один раз.

Решение. По условию задачи имеем схему независимых испытаний Бернулли. Причем, $n = 10, p = q = 0,5$.

а) По формуле Бернулли вероятность того, что герб выпадет ровно 5 раз, равна ($k = 5$):

$$P_{10}(5) = C_{10}^5 p^5 q^5 = \frac{10!}{5!5!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{252}{1024} = 0,246.$$

б) По теореме сложения вероятностей имеем:

$$\begin{aligned} P\{k \leq 5\} &= P_{10}(0) + P_{10}(1) + P_{10}(2) + P_{10}(3) + P_{10}(4) + P_{10}(5) = \\ &= C_{10}^0 q^{10} + C_{10}^1 p^1 q^9 + C_{10}^2 p^2 q^8 + C_{10}^3 p^3 q^7 + C_{10}^4 p^4 q^6 + C_{10}^5 p^5 q^5 = \\ &= (C_{10}^0 + C_{10}^1 + C_{10}^2 + C_{10}^3 + C_{10}^4 + C_{10}^5) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{638}{1024} = 0,623. \end{aligned}$$

в) По формуле из следствия 3 получим:

$$P\{k \geq 1\} = 1 - q^n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \approx 0,999.$$

Пример 4.10. Найти вероятность того, что среди 10 случайным образом выбранных человек у четырёх дни рождения будут в первом квартале, у трёх – во втором, у двух – в третьем и у одного – в четвёртом.

Решение. Это задача на полиномиальную схему. Опыт состоит в определении квартала (одного из четырех), в который попадают даты рождения. Переформулируем задачу в терминах полиномиальной схемы:

- $n = 10$ – число испытаний (равно числу людей);
- $m = 4$ – число вариантов, которые мы различаем в каждом испытании;
- $p_i = P(A_i) = \frac{1}{4}$ – предполагаем, что вероятность родиться в любом квартале одинакова;
- количество попаданий дней рождений в соответствующий квартал составляет $k_1 = 4, k_2 = 3, k_3 = 2, k_4 = 1$.

Проведём расчёт по формуле для полиномиальной схемы:

$$P_{10}(4, 3, 2, 1) = \frac{10!}{4!3!2!1!} \left(\frac{1}{4}\right)^{10} \approx 0,012.$$

Ответ: вероятность дней рождения по схеме $\approx 0,012$.

Пример 4.11. Данные длительной проверки качества выпускаемых стандартных деталей показали, что в среднем брак составляет 7,5%. Определить наиболее вероятное число исправных деталей в партии из 39 штук.

Решение. По условию задачи $n = 39$, а вероятность брака составляет $q = 0,075$. Отсюда, $p = 1 - q = 1 - 0,075 = 0,925$.

Искомое значение можно найти из неравенств:

$$\begin{aligned} np - q &\leq k \leq np + p \\ 39 \cdot 0,925 - 0,075 &\leq k \leq 39 \cdot 0,925 + 0,925 \\ 36 &\leq k \leq 37 \end{aligned}$$

Ответ: наивероятнейшее число исправных деталей равно 36 или 37.

Пример 4.12. За смену мастер изготовил 400 деталей. Найти вероятность того, что в их числе 280 деталей отличного качества, если вероятность изготовить деталь отличного качества равна 0,75.

Решение. По условию задачи:

$$n = 400, k = 280, p = 0,75, q = 1 - p = 0,25.$$

Имеем схему Бернулли с большим числом испытаний. Применим локальную теорему Муавра-Лапласа. Отсюда

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{280 - 400 \cdot 0,75}{\sqrt{400 \cdot 0,75 \cdot 0,25}} = \frac{280 - 300}{\sqrt{75}} = -2,31.$$

По таблицам найдем $\varphi(-2,31) = \varphi(2,31) \approx 0,0277$.

Вероятность того, что из 400 деталей 280 окажется отличного качества равна:

$$P_{400}(280) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x) \approx \frac{0,0277}{\sqrt{75}} \approx 0,0032.$$

Ответ: вероятность деталей отличного качества окажется $\approx 0,0032$.

Пример 4.13. В жилом доме насчитывается 6400 ламп. Вероятность включения каждой из них в вечернее время равна 0,5. Найти вероятность того, что одновременно включено будет от 3120 до 3200 ламп. Найти наивероятнейшее число включенных ламп и его соответствующую вероятность.

Решение. В соответствии с условием задачи имеем:

$$n = 6400, k_1 = 3120, k_2 = 3200, p = q = 0,5.$$

Для ответа на первый вопрос используем интегральную теорему Лапласа, значения интеграла Лапласа берутся из таблицы:

$$\begin{aligned} P_{6400}(3200, 3120) &= \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right) = \\ &= \Phi\left(\frac{3200 - 6400 \cdot 0,5}{\sqrt{6400 \cdot 0,5 \cdot 0,5}}\right) - \Phi\left(\frac{3120 - 6400 \cdot 0,5}{\sqrt{6400 \cdot 0,5 \cdot 0,5}}\right) = \\ &= \Phi\left(\frac{0}{\sqrt{1600}}\right) - \Phi\left(\frac{-80}{\sqrt{1600}}\right) = \Phi(0) - \Phi(-2) = \Phi(0) + \Phi(2) = 0 + 0,4772 = \\ &= 0,4772 \end{aligned}$$

Наивероятнейшее число включенных ламп m найдем из неравенства:

$$\begin{aligned} np - q &\leq m \leq np + p \\ 6400 \cdot 0,5 - 0,5 &\leq m \leq 6400 \cdot 0,5 + 0,5 \\ 3199,5 &\leq m \leq 3200,5 \end{aligned}$$

Отсюда получим $m=3200$.

Найдем вероятность для значения $m=3200$ по формуле локальной теоремы Лапласа:

$$\begin{aligned} P_{6400}(3200) &\approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi\left(\frac{k - np}{\sqrt{npq}}\right) \approx \frac{1}{\sqrt{6400 \cdot 0,5 \cdot 0,5}} \cdot \varphi\left(\frac{3200 - 6400 \cdot 0,5}{\sqrt{6400 \cdot 0,5 \cdot 0,5}}\right) \approx \\ &\approx \frac{1}{\sqrt{1600}} \cdot \varphi(0) \approx \frac{0,3989}{40} = 0,00998 \end{aligned}$$

Таким образом, наивероятнейшее число включенных ламп равно 0,00998.

Ответ: наивероятнейшее число включенных ламп равно 0,00998.

Пример 4.14. Магазин получил 1000 бутылок минеральной воды. Вероятность того, что при перевозке бутылка окажется разбитой, равна 0,003. Найти вероятность того, что магазин получит более двух разбитых бутылок.

Решение. По условию задачи дано:

$$n = 1000, p = 0,003, k > 2.$$

Так как значение n велико, а p достаточно мало, применим теорему Пуассона:

$$\lambda = np = 1000 \cdot 0,003 = 3.$$

Чтобы найти вероятность $P_{1000}(> 2)$ того, что магазин получит более двух разбитых бутылок, используем переход к противоположному событию: разбито не более 2 бутылок, то есть 0, 1 или 2. Тогда получим:

$$\begin{aligned} P_{1000}(> 2) &= 1 - P_{1000}(\leq 2) = 1 - (P_{1000}(0) + P_{1000}(1) + P_{1000}(2)) \approx \\ &\approx 1 - (P(0; 3) + P(1; 3) + P(2; 3)) \approx 1 - (0,04979 + 0,14936 + 0,22404) \approx \\ &\approx 0,57681. \end{aligned}$$

Ответ: вероятность того, что магазин получит более двух разбитых бутылок составляет $\approx 0,57681$.

Контрольные вопросы и задачи

- 4.1. Дайте определение схемы Бернулли.
- 4.2. Что называют полиномиальной схемой?
- 4.3. В каких случаях стоит применять локальную теорему Муавра-Лапласа, а в каких – интегральную?
- 4.4. Сформулируйте теорему Пуассона.
- 4.5. Определить вероятность того, что в семье, имеющей 5 детей, будет не больше трех девочек. Вероятности рождения мальчика и девочки предполагаются одинаковыми.
- 4.6. При каждом отдельном выстреле из орудия вероятность поражения цели равна 0,9. Найти вероятность того, что из 20 выстрелов число удачных будет не менее 16 и не более 19.
- 4.7. В урне находятся 30 шаров, которые различаются только цветом: 10 белых, 5 зелёных, 8 синих и 7 жёлтых. Из урны случайным образом выбирают 10 шаров с возвращением. Найти вероятность того, что среди выбранных шаров будет 3 белых, 2 зелёных, 4 синих и 1 жёлтый.
- 4.8. В некотором государстве живут 60% блондинов, 25% брюнетов и 15% шатенов. Найти вероятность того, что среди 8 наудачу отобранных жителей окажутся 4 блондина, 3 брюнета и 1 шатен.
- 4.9. Вероятность рождения мальчика равна 0,51. Найти вероятность того, что среди 100 новорожденных окажется 50 мальчиков.
- 4.10. Вычислительное устройство состоит из 1000 элементов, работающих независимо друг от друга. Вероятность отказа каждого элемента за

смену равна 0,024. Найти вероятность, что за смену откажут 6 элементов.

- 4.11. Найти вероятность того, что при бросании 600 раз игральной кости выпадет от 90 до 120 шестерок.
- 4.12. Вероятность изготовления годной детали равна 0,8. Произведено 500 деталей. Какое число годных деталей вероятнее получить: а) менее 390; б) от 390 до 410?
- 4.13. Устройство состоит из 1000 элементов, работающих независимо один от другого. Вероятность отказа любого элемента в течение времени t равна 0,002. Найти вероятность того, что за время t откажут ровно три элемента.
- 4.14. Завод отправил на базу 500 изделий. Вероятность повреждения изделия в пути 0,004. Найти вероятность того, что в пути повреждено меньше трех изделий.

5. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И СЛУЧАЙНЫЕ ВЕКТОРЫ

Случайной величиной называется величина, которая в результате опыта может принять **только одно** любое **непредсказуемое** и **заранее неизвестное** значение. Например, колебания химического состава сырья, потери и подсосы воздуха, неточности взвешивания компонентов шихты, степень усвоения кислорода – все эти случайные величины заранее предсказать не получится. Т.е., случайная величина рассматривается как функция, аргументом которой служит элементарное случайное событие поля испытаний. Например, при игре «камень, ножницы, бумага» противник может выбрать любой из этих вариантов, т.е. значение будет непредсказуемое и при этом только одно. Если бросить игральный кубик, то вариантами выпадения числа на верхней грани могут быть числа 1, 2, 3, 4, 5, 6 - заранее определить число выпавших очков также невозможно. Таким образом, число выпавших очков величина случайная и все возможные значения этой величины - числа 1, 2, 3, 4, 5, 6. Таким образом, **случайная величина** – это переменная, которая принимает в результате испытания то или иное числовое значение, но только одно и зависит от случайного исхода испытания.

Случайную величину обычно обозначают большими буквами латинского алфавита X, Y, Z , а ее возможные варианты (значения) обычно записываются соответствующими маленькими буквами x, y, z . Например, если случайная величина X имеет всего три возможных значения (например, камень, ножницы, бумага), то они будут обозначены как x_1, x_2, x_3 .

Определение 5.1. Скалярную функцию $X(\omega)$, заданную на пространстве элементарных исходов, называют **случайной величиной**, если для любого $x \in R$ множество $\{\omega: X(\omega) < x\}$ элементарных исходов, удовлетворяющих условию $X(\omega) < x$, является событием. Для простоты записи обычно записывают: $\{X < x\}$.

Определение 5.2. Множеством возможных значений случайной величины называют множество всех значений, которые может принимать случайная величина.

Пример 5.1. В опыте с однократным бросанием игрального кубика случайной величиной является одно число X – число выпадающих очков. Множество возможных значений случайной величины X имеет следующий вид:

$$\{x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4, x_5 = 5, x_6 = 6\}$$

Иными словами, каждому элементарному исходу w_i , $i = \overline{1,6}$, ставится в соответствие число i .

Пример 5.2. Число родившихся девочек среди 10 новорожденных детей есть случайная величина X , которая имеет следующие возможные значения 0, 1, 2, 3...10:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2, x_4 = 3, x_5 = 4, x_6 = 5, x_7 = 6, x_8 = 7, x_9 = 8, x_{10} = 9, \\ x_{11} = 10 \end{array} \right\}.$$

Каждому элементарному исходу $w_i, i = \overline{1, 11}$, ставится в соответствие число i .

Пример 5.3. Количество опечаток в книге — случайная величина, которая принимает целые неотрицательные значения; ее минимальное значение — 0, максимальное превышает количество символов в книге (например, вместо одного символа могут быть вставлены два, три...).

5.1. Функция распределение случайной величины

Чтобы исследовать случайную величину — выявить ее свойства и вероятность появления какого либо значения из всех возможных ее значений, хотелось бы найти какую-то закономерность, по которой случайная величина принимает какое-либо определенное значение из подмножества всех ее значений.

Такие закономерности существуют и называются **законом распределения** вероятностей, или **распределением** (вероятностей) случайной величин (слово «вероятностей» обычно отбрасывают).

Таким законом распределения, который характерен всем случайным величинам, является **функция распределения**.

Определение 5.3. Функцией распределения (вероятностей) случайной величины X называют функцию $F(x)$, значение которой в точке x равно вероятности появления события $\{X < x\}$, т.е. события, состоящего только из тех элементарных исходов ω , которые может принимать случайная величина, для которых $X(\omega) < x$:

$$F(x) = P\{X < x\}.$$

Обычно говорят, что значение функции распределения в точке x равно вероятности того, что случайная величина X примет значение, меньшее, чем x .

На рис. 5.1 показан вид одной из функций распределения случайной величины.

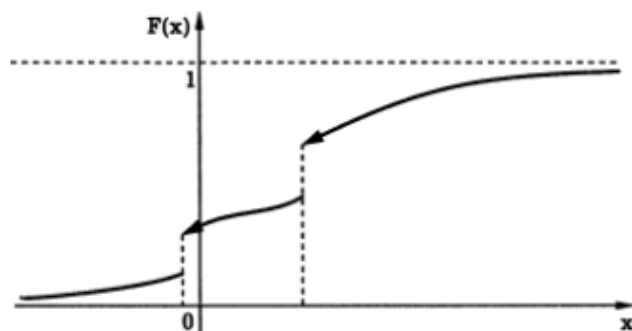


Рис. 5.1. Вид функции распределения

Случайные величины могут быть **дискретными** и **непрерывными** (**непрерывно распределенными**).

5.2. Дискретная или дискретно распределенная случайная величина

Если вернуться к примеру 5.2, то случайная величина может быть представлена конкретными значениями 0, 1, 2, 3, ..., 10. Случайная величина может принять одно из этих, обособленных друг от друга, значений, т.е. все значения отделены промежутками, в которых значения случайной величины отсутствуют. Случайная величина в этом примере принимает отдельные, изолированные друг от друга, значения.

Таким образом, дискретная случайная величина (ДСВ) может принимать конечное или бесконечное счетное число множества значений, элементы которого могут быть пронумерованы и выписаны в последовательность данных: $x_1, x_2, x_3 \dots x_n$.

В том случае, когда все возможные значения $x_1, x_2, x_3 \dots x_n$, которые может принять дискретная величина известны и известны также вероятности $p(x_i)$ их появления для каждого события $X = x_i$ для всего поля испытаний, то считают распределение этой величины **теоретически заданным**.

С учетом того, что все возможные множества значения $x_1, x_2, x_3 \dots x_n$ появления случай величины в результате какого-то испытания (опыта) составляют полную группу событий, то вероятность появления хоть какой-то величины из возможных после произошедшего испытания всегда составляет единицу:

$$\sum_i p(x_i) = 1.$$

Действительно, подброшенный игральный кубик, в конце концов, с вероятностью, равной единице, упадет (а не зависнет!) и в результате на верхней грани обязательно окажется количество выпавших очков (один любой вариант из шести возможных будет обязательно с вероятностью 100%).

Определение 5.4. Случайную величину X называют **дискретной**, если множество ее возможных значений конечно или счетно.

Дискретные величины часто называют **дискретно распределенными** и на практике они принимают целочисленные значения.

На первый взгляд может показаться достаточным для задания случайной величины перечислить все значения. Но это не так: случайные величины могут иметь одинаковые перечни возможных значений, а вероятности их появления будут различными. Поэтому для задания случайной дискретной величины не достаточно перечислить все возможные ее значения, нужно еще указать вероятности их появления.

5.2.1. Закон распределения вероятностей дискретной случайной величины и его свойства

Дадим определение закона распределения дискретной случайной величины.

Определение 5.5. Законом распределения дискретной случайной величины называют соответствие между возможными значениями появления случайной величины и их вероятностями. Его можно задать таблично, аналитически в виде формулы или графически.

При табличном задании закона распределения дискретной случайной величины первая строка содержит все возможные значения, а вторая - вероятности их появления (см. таблицу 5.1).

Таблица 5.1

Задание закона распределения дискретной случайной величины
в общем виде

X	x_1	x_2	...	x_i	...	x_n
P	p_1	p_2		p_i		p_n

Так как в одном испытании случайная величина принимает одно и только одно возможное значение, можно сделать вывод о том, что события $X = x_1, X = x_2, \dots, X = x_n$ образуют полную группу. Следовательно, сумма вероятностей этих событий (сумма вероятностей во второй строке) равна единице.

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1.$$

Если множество возможных значений X бесконечно и счетно, то ряд $p_1 + p_2 + \dots + p_n$ сходится и его сумма равна единице.

Таким образом, для приведенных пар чисел должно выполняться **условие нормирования**:

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1 \quad (5.1)$$

Закон распределения можно задать и графически. На графике 5.2 $x_1, x_2, \dots, x_5$ - возможные значения случайной величины; $p_1, p_2, \dots, p_5$ - соответствующие им вероятности. График называется **многоугольником распределения**

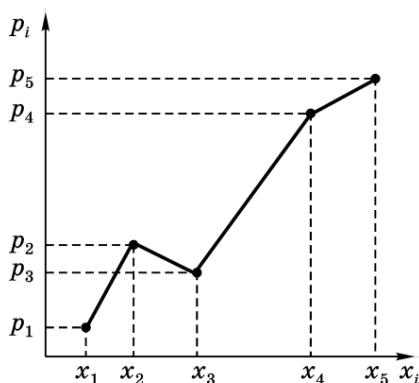


Рис. 5.2. Многоугольник распределения

Пример 5.4. Было выпущено 1000 билетов денежной лотереи. Разыгрывается 1 выигрыш в 10000 рублей, 4 выигрыша по 5000 рублей, 5 выигрышей по 4000 рублей, 10 билетов с выигрышами по 1000 рублей. Все остальные билеты без выигрыша! Найти закон распределения случайной величины X – величины возможного выигрыша для участника лотереи, который купил только один билет.

Решение. Составим ряд распределения стоимости выигрыша для владельца одного лотерейного билета и построим многоугольник распределения.

Для удобства запишем все возможные значения дискретной величины X с помощью ряда распределения: $x_1=10000$, $x_2=5000$, $x_3=4000$, $x_4=1000$, $x_5=0$. В соответствии с условием задачи вероятности принимают следующие значения:

$$p_1 = 0,001; p_2 = 0,004; p_3 = 0,005; p_4 = 0,01,$$

$$p_5 = 1 - (p_1 + p_2 + p_3 + p_4) = 0,98;$$

где p_5 определим в соответствии с условием нормирования по формуле (5.2).

Ответ: запишем искомый ряд распределения (закон распределения) в виде таблицы 5.2:

Таблица 5.2

Таблица распределения случайной величины

X	10000	5000	4000	1000	0
P	0,001	0,004	0,005	0,01	0,98

Проверим сумму вероятностей этих событий по формуле 5.1:

$$0,001 + 0,004 + 0,005 + 0,01 + 0,98 = 1.$$

Для наглядности отобразим закон распределения случайной величины в графическом виде.

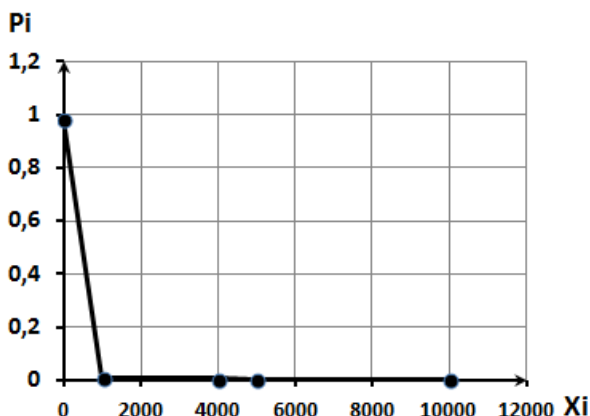


Рис. 5.3. Многоугольник распределения стоимости выигрыша

Запишем следующие свойства функции распределения:

Свойство 1. $0 \leq F(x) \leq 1$.

Свойство 2.

$$F(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0; F(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1.$$

Свойство 3. $F(x)$ — неубывающая функция своего аргумента.

Свойство 4. $P(a \leq X < b) = F(b) - F(a)$, то есть вероятность попадания случайной величины на промежуток $[a, b)$ равна приращению функции распределения на этом промежутке.

5.3. Числовые характеристики случайной величины

Закон распределения полностью определяет и характеризует случайную величину. Однако, в большинстве случаев закон распределения неизвестен, и приходится ограничиваться меньшими сведениями, а именно использовать числа, которые описывают случайную величину суммарно. Такие числа называют *числовыми характеристиками* случайной величины.

Числовые характеристики случайной величины — это параметры, которые выражают наиболее существенные черты ее распределения.

Они характеризуют случайную величину не с помощью функциональных зависимостей, а сжато, с помощью небольшого набора чисел (хотя и неполно). В некоторых случаях для решения задач удобнее пользоваться именно такими ее характеристиками. Одной из таких наиболее значимых характеристик является точка, которая отмечает положение случайной величины X на числовой оси; вокруг этой точки группируются возможные значения X — *центр распределения*.

Существует несколько важных числовых параметров центра распределения, из которых наибольшее распространение получило **математическое ожидание** (теоретическое среднее), являющееся *средним взвешенным* значением случайной величины X .

Другой такой характеристикой является **дисперсия** (*в пер. с латыни рассеивание*) случайной величины. Характеристики рассеивания (разброса) значений дают представление о том, как сильно могут отклоняться от своего центра группирования (математического ожидания) значения случайной величины.

5.3.1. Математическое ожидание и дисперсия дискретной случайной величины

Каждая случайная величина полностью определяется своей функцией распределения. При решении практических задач достаточно знать несколько числовых характеристик, которые позволяют представить основные особенности случайной величины в сжатой форме. К таким величинам относятся в первую очередь *математическое ожидание* и *дисперсия*.

Физическим смыслом математического ожидания дискретной случайной величины является ее **среднее ожидаемое значение** при многократно повторяемых испытаниях.

Предположим, случайная величина может принимать следующие значения: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, а соответствующие им значения вероятности равны $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$. Тогда математическое ожидание случайной величины X рассчитывается как:

$$M(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + x_3 \cdot p_3 + \dots + x_n \cdot p_n = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i. \quad (5.2)$$

Таким образом, **математическим ожиданием** $M(X)$ дискретной случайной величины называют сумму произведений всех ее возможных значений на их соответствующие вероятности.

Если дискретная величина принимает счетное множество возможных значений, то математическое ожидание можно записать в виде:

$$M(X) = \sum x_i \cdot p_i.$$

Математическое ожидание существует, если ряд справа абсолютно сходится. Из определения следует, что математическое ожидание дискретной случайной величины является постоянной величиной.

Кроме обозначения $M(X)$ могут использоваться следующие обозначения математического ожидания: MX, mx, m .

Свойства математического ожидания:

Свойство 1. Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной: $M(C) = C$.

Свойство 2. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания: $M(CX) = CM(X)$.

Свойство 3. Математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых:

$$M(X + Y) = M(X) + M(Y).$$

Свойство 4. Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий:

$$M(XY) = M(X) \cdot M(Y).$$

Свойство 1 говорит о том, что математическое ожидание постоянной (неслучайной) величины равно самой постоянной. По свойству 2 постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания. Свойство 3 выражает математическое ожидание суммы случайных величин X и Y как сумму их математических ожиданий. По свойству 4 можно вычислять математическое ожидание произведения двух случайных величин X и Y , однако условие независимости сокращает область применения.

Пример 5.5. Для игрального кубика, который многократно подбрасывается, вычислить математическое ожидание случайной величины X - количество выпавших очков. Рассчитаем математическое ожидание по формуле (5.2):

$$\begin{aligned} M(X) &= x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + x_3 \cdot p_3 + \dots + x_6 \cdot p_6 = \\ &= 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6}{6} = \frac{21}{6} = 3,5. \end{aligned}$$

Ответ: математическое ожидание случайной величины составит 3,5.

Пример 5.6. Найти математическое ожидание случайной величины X , зная ее закон распределения (таблица 5.3):

Таблица 5.3

Закон распределения случайной величины

x_i	2	4	3	1
p_i	0,1	0,5	0,3	0,1

Решение. Так как математическое ожидание равно сумме произведений всех возможных значений на их вероятности, то:

$$M(X) = x_i \cdot p_i = 2 \cdot 0,1 + 4 \cdot 0,5 + 3 \cdot 0,3 + 1 \cdot 0,1 = 0,2 + 2 + 0,9 + 0,1 = 3,2.$$

Ответ: математическое ожидание случайной величины составит 3,2.

Пример 5.7. Найти математическое ожидание количества лотерейных билетов, на которые выпадет выигрыш, если приобретено 20 билетов, причем вероятность выигрыша по одному билету равна 0,1.

Решение. Математическое ожидание $M(X)$ числа появлений события A в n независимых испытаниях равно произведению числа испытаний на вероятность появления события в каждом испытании: $M(X) = n \cdot p$. Таким образом:

$$M(X) = n \cdot p = 20 \cdot 0,1 = 2.$$

Ответ: математическое ожидание билетов с выигрышем равно двум билетам.

Для исследования случайной величины одного математического ожидания недостаточно и используется еще одна характеристика – **дисперсия**.

На практике часто требуется оценить, как происходит рассеяние возможных значений случайной величины вокруг ее среднего значения.

Мерилом рассеяния является разность между X – случайной величиной и ее центром - математическим ожиданием $M(X)$, которая называется **отклонением**:

$$X - M(X)$$

Можно предположить, что удобно вычислить все возможные значения отклонений случайной величины и найти их среднее значение разброса. Но так как некоторые возможные отклонения будут положительными, а другие - отрицательными, то среднее значение отклонения будет равно нулю [6]:

$$M[X - M(X)] = 0$$

Для выхода из сложившейся ситуации принято отклонения возводить в квадрат и обозначать дисперсию как $D(X)$:

$$D(X) = M[(X - M(X))^2] \quad (5.3)$$

Таким образом, дисперсия не может быть отрицательной.

Пример 5.8. Найти дисперсию и среднее квадратичное отклонение дискретной случайной величины, если известен закон ее распределения (табл.5.4):

Таблица 5.4

Закон распределения случайной величины

x_i	-2	0	3	5
p_i	0,4	0,1	0,4	0,1

Решение: для удобства вывода результатов сведем все расчеты в таблицу (табл. 5.5):

Таблица 5.5

Расчеты примера 5.8

x_i	-2	0	3	5	Суммы
p_i	0,4	0,1	0,4	0,1	1
$x_i \cdot p_i$	-0,8	0	1,2	0,5	0,9
$x_i^2 \cdot p_i$	1,6	0	3,6	2,5	7,7

Так как сумма произведений $x_i \cdot p_i$ и есть математическое ожидание случайной величины, то в третьей строке видим полученный результат:

$$M(X) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i = 0,9$$

Рассчитаем дисперсию:

$$D(X) = M[(X - M(X))^2] = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i - (0,9)^2 = 7,7 - 0,81 = 6,89$$

Рассчитаем среднее квадратическое отклонение или стандартное отклонение:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{6,89} = 2,625$$

Ответ: дисперсия равна 6,89; среднее квадратическое отклонение 2,625.

5.4. Биномиальное распределение

Пусть проводится n независимых испытаний, в каждом из которых событие A может как появиться, так и не появиться. Вероятность наступления во всех этих испытаниях постоянна и равна p . Таким образом, вероятность не появления события $q = 1 - p$. В качестве дискретной случайной величины X рассмотрим число появлений в этих испытаниях события A .

Для решения поставленной задачи - нахождения закона распределения случайной величины X – необходимо определить ее возможные значения и вероятности их появления. Очевидно, что событие A в n испытаниях может либо не появиться, либо появиться 1 раз, либо 2 раза, либо n раз. Таким образом, возможные значения X могут быть равны:

$$x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2, \dots, x_{n+1} = n.$$

Вероятности этих возможных значений можно найти по формуле Бернулли (4.1), которая и является аналитическим выражением искомого закона распределения:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad k \leq n, \quad q = 1 - p,$$

Этот закон также называется биномиальным (см. п. 4.1), так как правую часть формулы можно рассматривать как общий член разложения бинома Ньютона

$$(p + q)^n = C_n^n p^n + C_n^{n-1} p^{n-1} q + \dots + C_n^k q^{n-k} + \dots + C_n^0 q^n \quad (5.4)$$

Таким образом, первый член разложения p^n определяет вероятность наступления рассматриваемого события n раз в n независимых испытаниях, второй член правой части определяет вероятность наступления события $n-1$ раз, ..., последний - q^n - вероятность того, что событие не появится ни разу.

В правой части формулы стоит сумма вероятностей всех возможных значений случайной величины X . О. Эта сумма равна единице, так как $(p + q)^n = 1^n = 1$

Запишем биномиальный закон в табличном виде (таблица 5.6).

Таблица 5.6

Таблица распределения случайной величины

x_i	n	$n - 1$	...	k	...	1	0
p_i	p^n	$np^{n-1}q$	...	$C_n^k p^k q^{n-k}$	...	npq^{n-1}	q^n

Пример 5.9. Монета брошена два раза. Написать в виде таблицы закон распределения случайной величины X — числа выпадений «герба».

Решение. Вероятность появления герба в каждом бросании монеты $p = 1/2$, следовательно, вероятность появления решки $q = 1 - 1/2 = 1/2$. При двух бросаниях монеты герб может появиться либо два раза, либо один раз, либо вообще не появиться. Таким образом, все возможные значения X следующие: $x_1 = 2$; $x_2 = 1$; $x_3 = 0$. Найдем вероятность всех этих возможных значений по формуле Бернулли (4.1):

$$P_2(2) = C_2^2 p^2 = (1/2)^2 = 0,25;$$

$$P_2(1) = C_2^1 pq = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) = 0,5;$$

$$P_2(0) = C_2^0 q^2 = (1/2)^2 = 0,25.$$

Ответ: напомним искомым закон распределения в виде таблицы (табл. 5.7). Для контроля сложим все значения вероятностей: $0,25+0,5+0,25=1$.

Таблица 5.7

Таблица распределения случайной величины

X	2	1	0
p	0,25	0,5	0,25

5.5. Распределение Пуассона

Распределение Пуассона называют законом распределения редких событий, так как оно появляется там, где производится большое число испытаний, в каждом из которых с малой вероятностью происходит «редкое» событие.

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A равна p .

Для определения числа появлений события A в этих испытаниях используют формулу Бернулли. Если число независимых испытаний n велико, то можно использовать асимптотическую формулу Лапласа. Но эта формула является непригодной к применению, если вероятность события слишком мала ($p \leq 0,1$). В этих случаях (если n велико, а значение p чрезмерно мало) используют асимптотическую формулу Пуассона.

Пусть имеется следующая задача: найти вероятность того, что при большом количестве испытаний (в каждом из которых вероятность появления события очень мала) событие наступит ровно k раз при допущении - произведение n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A равна p , будем считать постоянным: $n \cdot p = \lambda$. Это означает, что среднее появление события в различных сериях испытаний (при различных значениях n) остается неизменным.

Применим формулу Бернулли, чтобы вычислить вероятность:

$$P_n(k) = \frac{n(n-1)(n-2) \dots [n-(k-1)]}{k!} p^k (1-p)^{n-k}$$

Так как $n \cdot p = \lambda$, то $p = \frac{\lambda}{n}$, откуда следует

$$P_n(k) = \frac{n(n-1)(n-2) \dots [n-(k-1)]}{k!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

Так как n имеет очень большое конечное значение, можно использовать допущение - вместо $P_n(k)$ найдем приближенное значение вероятности:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(k) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)(n-2) \dots [n-(k-1)]}{k!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \right] = \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \end{aligned}$$

Таким образом, **закон распределения Пуассона** вероятностей массовых (n велико) и редких (p мало) событий можно записать в виде:

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad (5.5)$$

По специальным таблицам можно найти рассчитанное значение функции Пуассона $P_n(k)$, зная k и λ . (смотри приложение 3).

Пример 5.10. Поставщик отправил потребителям 10000 доброкачественных изделий. Вероятность того, что потребителям придет поврежденное в пути изделие, равна 0,0002. Найти вероятность того, что потребителям придет сразу 5 поврежденных изделий.

Решение.

По условию задачи $n=10000$, $p = 0,0002$, $k=5$. Найдем λ :

$$\lambda = n \cdot p = 10000 \cdot 0,0002 = 2$$

Найдем искомую вероятность с помощью формулы Пуассона:

$$P_{10000}(5) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \frac{2^5}{5!} e^{-2} = \frac{32}{120} \cdot 0,135335 \approx 0,036089.$$

Ответ: вероятность прихода сразу пяти поврежденных изделий $\approx 0,036089$.

Пример 5.11. Телефонная станция обслуживает 10000 абонентов. Вероятность того, что один из них позвонит на АТС, равна 0,0001. Найти закон распределения X — числа возможных абонентов, которые могут позвонить в течение часа.

Решение.

По условию задачи $n = 10000$; $p = 0,0001$. Найдем λ :

$$\lambda = n \cdot p = 10000 \cdot 0,0001 = 1.$$

Вероятность возможных значений случайной величины X будем искать с помощью формулы Пуассона:

$$P_{10000}(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \text{ где } k = 0, 1, 2, \dots, 10000.$$

$$P_{10000}(0) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \frac{1^0}{0!} e^{-1} = 1 \cdot e^{-1} \approx 0,367879.$$

$$P_{10000}(1) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \frac{1^1}{1!} e^{-1} = 1 \cdot e^{-1} \approx 0,367879.$$

$$P_{10000}(2) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \frac{1^2}{2!} e^{-1} = 0,5 \cdot e^{-1} \approx 0,18394.$$

$$P_{10000}(3) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \frac{1^3}{3!} e^{-1} = \frac{1}{6} \cdot e^{-1} = 0,166667 \cdot e^{-1} \approx 0,061313.$$

$$P_{10000}(4) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \frac{1^4}{4!} e^{-1} = \frac{1}{24} \cdot e^{-1} = 0,041667 \cdot e^{-1} \approx 0,015328.$$

$$P_{10000}(5) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \frac{1^5}{5!} e^{-1} = \frac{1}{120} \cdot e^{-1} = 0,008333 \cdot e^{-1} \approx 0,003066.$$

$$P_{10000}(10) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \frac{1^{10}}{10!} e^{-1} = \frac{1}{3628800} \cdot e^{-1} = 2,75573E - 07 \cdot e^{-1} \approx \approx$$

$\approx 1,01E - 07$.

Ответ: выведем распределение для случайной величины X в таблице (табл. 5.8):

Таблица 5.8

Распределение Пуассона случайной величины

x_i	0	1	2	3	4	5	...	10
p_i	0,367879	0,367879	0,18394	0,061313	0,015328	0,003066	...	1,01E-07

5.6. Простейший поток событий

Определение 5.6. Если рассмотреть случайные события, которые наступают в случайные моменты времени, то **потоком событий** называют последовательность событий, которые наступают в случайные моменты времени.

Например, случайными потоками называют поступление телефонных вызовов на АТС, скорую медицинскую помощь, прилет самолетов в аэропорт и т.д.

Потоки могут обладать некоторыми свойствами. Рассмотрим следующие основные свойства потоков.

Свойство **стационарности** – вероятность появления нескольких событий зависит только от числа событий и длительности временного промежутка и не зависит от начала его отсчета; все временные промежутки являются непересекающимися. Например, вероятности появления k событий на промежутках времени (1;9) (10;17) (T ; $T+8$) одинаковой длительности $t = 8$ единиц времени являются равными между собой.

Таким образом, если поток обладает свойством стационарности, то вероятность появления k событий за промежутки времени длительности t , есть функция, зависящая от k и t .

Свойство **отсутствия последствия** характеризуется тем, что вероятность появления нескольких событий не зависит от того, появлялись или не появлялись события в моменты времени, предшествующие началу рассматриваемого промежутка времени. Таким образом, условная вероятность появления нескольких событий k на любом промежутке времени, вычисленная при различных предположениях о том, что происходило до рассматриваемого промежутка времени (сколько и в какой последовательности события появлялись) равна безусловной вероятности. То есть, другими словами, предыстория потока не оказывает влияние на вероятности появления событий в будущем.

Итак, если поток обладает свойством отсутствия последствий, то имеет место взаимная независимость появлений того или иного числа событий в непересекающиеся промежутки времени.

Простейшим пуассоновским потоком называют поток событий, который обладает свойствами стационарности, отсутствия последствия и ординарности.

На практике бывает сложно установить, обладает ли поток всеми перечисленными свойствами. Поэтому рассматриваются другие условия, при выполнении которых поток считается простейшим или близко к простейшему. Так, определено, что если поток представляет собой сумму очень большого числа независимых стационарных потоков и влияние каждого из таких потоков на весь суммарный поток ничтожно мало, то такой суммарный поток близок к простейшему.

Определение 5.7. *Интенсивностью потока λ* называется среднее число событий, которые появляются в единицу времени.

Если постоянная интенсивность потока известна, то вероятность появления количества событий k простейшего потока за время, длительностью t определяется формулой Пуассона, которая отражает все свойства простейшего потока. Так, вероятность появления k событий за время t при заданной интенсивности является функцией k и t , что характеризует свойство стационарности. В формуле нет информации до начала рассматриваемого промежутка, что характеризует свойство отсутствия последствий.

Для проверки свойства ординарности при $k = 1$ и $k = 0$ найдем вероятности появления одного события и вероятность не появления события:

$$P_t(0) = e^{-\lambda t}$$
$$P_t(1) = \lambda t e^{-\lambda t}$$

Вероятность появления более одного события:

$$P_t(k > 1) = 1 - [P_t(0) + P_t(1)] = 1 - [e^{-\lambda t} + \lambda t e^{-\lambda t}]$$

Используя разложение и преобразование:

$$e^{-\lambda t} = 1 - \lambda t + \frac{(\lambda t)^2}{2!} - \dots,$$
$$P_t(k > 1) = \frac{(\lambda t)^2}{2} + \dots$$

При сравнении $P_t(1)$ и $P_t(k > 1)$ получим, что при малых значениях t вероятность появления более одного события пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью наступления одного события – что и характеризует свойство ординарности. Т.о., формулу Пуассона можно считать математической моделью простейшего потока событий.

Пример 5.12. Среднее число вызовов, поступающих на АТС в одну минуту, равно 2. Найти вероятность того, что за 10 минут поступит:

- а) два вызова;
- б) менее двух вызовов;
- в) не менее двух вызовов.

Поток вызовов предполагается простейшим.

Решение. По условию $\lambda = 2$, $t = 10$, $k = 2$. Для решения воспользуемся формулой Пуассона

$$P_t(k) = (\lambda t)^k e^{-\lambda t} / k!$$

а) Рассчитаем, вероятность того, что за 10 минут поступит 2 вызова:
 $P_{10}(2) = 2 \cdot 10^2 \cdot e^{-2 \cdot 10} / 2! = 400 \cdot 2,06115 \cdot 10^{-9} / 2 = 4,12231 \cdot 10^{-7}$
 Это событие практически невозможно.

б) События «не поступило ни одного вызова» и «поступил один вызов» несовместны, поэтому по теореме сложения искомая вероятность того, что за 10 минут поступит менее двух вызовов, равна:

$$P_{10}(k < 2) = P_{10}(0) + P_{10}(1) = e^{-20} + \frac{20^1 \cdot e^{-20}}{1!} =$$

$$= 2,06 \cdot 10^{-9} + 4,12 \cdot 10^{-8} = 4,33 \cdot 10^{-8}$$

Это событие представляет мало вероятным и мало возможным.

в) Событие «поступило менее двух вызовов» и «поступило не менее двух вызовов» противоположны, поэтому искомая вероятность того события, что за 10 минут поступит не менее двух вызовов, практически достоверна:

$$P_{10}(k \geq 2) = 1 - P_{10}(k < 2) = 1 - 4,33 \cdot 10^{-8} = 0,99999995$$

Ответ: а) вероятность двух вызовов составит $4,12231 \cdot 10^{-7}$;

б) вероятность менее двух вызовов составит $4,33 \cdot 10^{-8}$;

в) вероятность не менее двух вызовов составит 0,99999995.

5.7. Геометрическое распределение

Предположим, проводятся независимые испытания, в каждом из которых вероятность появления события A равна p ($0 < p < 1$). Вероятность его не появления $q = 1 - p$. Испытания заканчиваются, как только появится событие A . То есть, если испытание появилось в k -испытании, то в предшествующих испытаниях оно не появлялось.

Обозначим через X дискретную случайную величину – число испытаний, которые нужно провести до первого появления события A . Очевидно, возможными значениями X являются натуральные числа: $x_1 = 1, x_2 = 2, \dots$.

Пусть в первых $k-1$ испытаниях событие A не наступило, но появилось на k -м испытании. Вероятность этого события рассчитаем по теореме умножения вероятностей независимых событий:

$$P(X = k) = q^{k-1}p.$$

Это распределение называют **геометрическим**. Подставляя в эту формулу $k = 1, 2, \dots$ получим геометрическую прогрессию с первым членом p и знаменателем q ($0 < q < 1$):

$$p, qp, q^2p, \dots, q^{k-1}p, \dots \quad (5.6)$$

Проверим, что ряд (5.6) сходится и его сумма равна 1.

$$\frac{p}{1 - q} = \frac{p}{p} = 1$$

Предположим, во время серии испытаний случайное событие A может появиться с определенной вероятностью p . и испытания заканчиваются при первом же появлении данного события. Тогда случайная величина X , которая

описывает количество совершенных попыток, имеет **геометрическое распределение**.

Например, будем ронять бутерброд с маслом, и рассмотрим исход следующего события A : бутерброд упадет маслом вверх (законы Мэрфи не учитываем!). Вероятность появления этого события в любом опыте составляет $p = \frac{1}{2}$. Для количественной оценки появления этого события (насколько быстро оно наступит) составим закон распределения случайной величины X - количество упавших бутербродов («бросков») до появления события «бутерброд упал маслом вверх» - в этом случае серия испытаний закончится.

Предположим, бутерброд упал маслом вверх в первой же попытке (серия испытаний $x = 1$): вероятность этого события равна $p_1 = p = \frac{1}{2}$.

Если серия испытаний закончилась при $x = 2$, значит первоначально бутерброд упал все-таки маслом вниз $q = 1 - p = \frac{1}{2}$ и только во второй раз – маслом вверх.

Используя теорему умножения вероятности зависимых событий:

$$p_2 = q \cdot p = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

При $x=3$ бутерброд упал маслом вверх только в третьем испытании. По теореме умножения вероятности зависимых событий:

$$p_3 = q \cdot q \cdot p = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

При $x = 4$ по теореме умножения вероятности зависимых событий:

$$p_4 = q \cdot q \cdot q \cdot p = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$$

Закон распределения дискретной величины при счетном количестве значений представлен в таблице 5.9:

Таблица 5.9

Закон распределения дискретной величины
при счетном количестве значений

X	x_i	1	2	3	4	...	n	...
	p_i	p	qp	q^2p	q^3p	...	$q^{n-1}p$	...

Вероятности, представленные в таблице 5.9 представляют собой геометрическую убывающую прогрессию с основанием q и первым членом p , что и дало название геометрическому распределению вероятностей.

Сумма этой прогрессии равна единице:

$$p + q \cdot p + q^2 \cdot p + q^3 \cdot p + \dots = \frac{p}{1 - q} = \frac{p}{p} = 1$$

Пример 5.13. Соревнование среди баскетболистов НБА заключается в бросках в кольцо с центра поля. Каждый спортсмен имеет всего по пять попыток и если мяч не попал в кольцо после пятой попытки, то спортсмен

выбывает из соревнования. После попадания мяча в кольцо, броски завершаются. Вероятность попадания мяча в кольцо составляет $p = 0,7$. Найти вероятность того, что попадание произойдет при: втором, третьем, четвертом, пятом броске.

Решение. Из условия задачи: $p = 0,7$, $q = 0,3$, рассматриваем попытки со второй по пятую. Выведем закон распределения случайной величины X .

Найдем вероятности попадания:

1 бросок: баскетболист попал в кольцо: $P(1) = p = 0,7$

Во втором броске возможен как промах, так и попадание. Используя теорему умножения вероятностей зависимых событий:

$$P(2) = q \cdot p = 0,3 \cdot 0,7 = 0,21.$$

Если баскетболист попал с третьей попытки, то

$$P(3) = q \cdot q \cdot p = q^{k-1}p = 0,3^2 \cdot 0,7 = 0,063?$$

где k – число попыток.

Аналогично рассчитаем вероятность попадания с четвертой попытки:

$$P(4) = q \cdot q \cdot q \cdot p = q^{k-1}p = 0,3^3 \cdot 0,7 = 0,0189.$$

В пятом испытании баскетболист может попасть в кольцо или промахнуться, но по условиям соревнований броски в любом случае завершаются. По теоремам умножения вероятностей зависимых и сложения несовместных событий получим:

$$P(5) = q \cdot q \cdot q \cdot q \cdot q + q \cdot q \cdot q \cdot p = q \cdot q \cdot q \cdot q(q + p) = q^{k-1}p = 0,3^4 \cdot 1 = 0,0081.$$

Т.е. пять промахов или четыре промаха +одно попадание.

Таким образом, получили закон распределения, который запишем в таблицу 5.10:

Таблица 5.10

x_i	1	2	3	4	5
p_i	0,7	0,21	0,063	0,0189	0,0081

Выполним проверку, в результате которой должна получиться единица:

$$P(1) + P(2) + P(3) + p(4) + P(5) = 0,7 + 0,21 + 0,063 + 0,0189 + 0,0081 = 1$$

На рис. 5.4 построен многоугольник распределения:

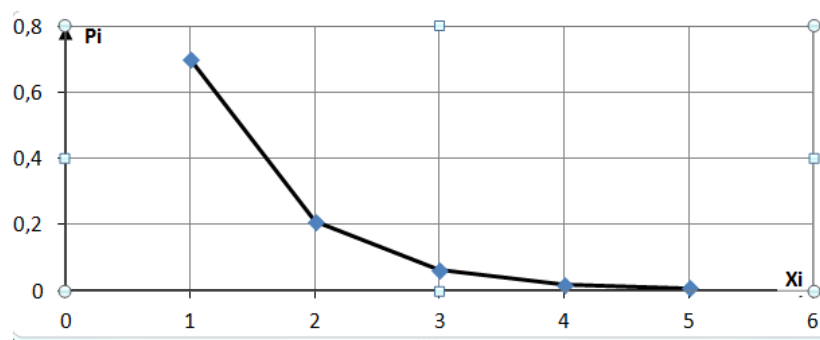


Рис. 5.4. Многоугольник распределения

Ответ: вероятности попадания в кольцо со второй, третьей, четвертой и пятой попытками составляют, соответственно: 0,21; 0,063; 0,0189; 0,0081.

5.8. Гипергеометрическое распределение

Прежде чем перейти к гипергеометрическому распределению, рассмотрим следующую задачу.

Пусть в партии из N изделий имеется M стандартных изделий ($M < N$). Из партии случайно отбирают n изделий, каждое из которых может быть отобрано с одинаковой вероятностью и перед выбором следующего не возвращается обратно – в этом случае формула Бернулли не используется.

Обозначим через X случайную величину – число m стандартных изделий среди всех отобранных n . Возможные значения случайной величины X могут принимать следующие значения: $0, 1, 2, \dots, \min(M, n)$.

Найдем вероятность того, что $X=m$, то есть что среди n отобранных изделий ровно m стандартных. Для этого будем использовать классическое определение вероятности. Общее число возможных элементарных исходов испытания равно числу способов, которыми можно извлечь n изделий из общего количества N изделий, т.е. числу сочетаний C_N^n .

Найдем число исходов, благоприятствующих событию $X = m$, то есть среди всех взятых n изделий будет ровно m стандартных. Общее число возможных элементарных исходов, которыми можно стандартные изделия n извлечь из N изделий, равно числу сочетаний C_N^n .

Для определения числа исходов появления события $X = m$ (среди всех взятых n изделий будет ровно m стандартных), m можно извлечь из M стандартных изделий C_M^m способами; остальные $n-m$ должны быть нестандартными. Для определения числа исходов $n-m$ нестандартных изделий из $N - m$ нестандартных изделий можно C_{N-M}^{n-m} способами. Таким образом, число благоприятных исходов события равно $C_M^m C_{N-M}^{n-m}$ (по правилу умножения).

Искомая вероятность равна отношению числа исходов с благоприятным событием $X = m$ к числу всех элементарных исходов

$$P(X = m) = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$$

Эта формула определяет *гипергеометрическое* распределение вероятностей.

Так как m – случайная величина, определяем, что гипергеометрическое распределение определяется всего тремя параметрами: общим количеством изделий N , общим количеством стандартных изделий M среди n отобранных изделий. В задачах иногда рассматривают N , n и вероятность того, что первое выбранное изделие является стандартным – $p=M/N$

При условии n много меньше N ($n < 0,1N$) гипергеометрическое распределение дает вероятности, близкие к вероятностям, найденным по биномиальному закону.

Пример 5.14. В партии из 12 изделий 5 изделий имеют скрытый дефект. Найти вероятность того, что из взятых наугад 4 изделий 2 изделия окажутся дефектными?

Решение. По условию задачи $N=12$, $M=5$, $n=4$, $m=2$.

Определим общую формулу для нахождения вероятности. Так как речь идет о выборе объектов из совокупности, используем классическое определение вероятности $P(A) = m/n$, где n - общее число всех равновозможных элементарных исходов, а m - число исходов, благоприятствующих событию A .

Определим общее число исходов - это число способов выбрать любые 4 изделия из партии в 12 изделий. Так как порядок выбора несущественен, применим формулу для числа сочетаний из 12 объектов по 4 дефектных:

$$n = C_{12}^4$$

Для определения числа благоприятствующих событию исходов. Для этого нужно, чтобы из 4 выбранных изделий 2 были дефектные (выбираем любые 2 дефектные изделия из 5 дефектных изделий - C_5^2 способами) и еще 2 должны быть стандартными (выбираем любые 2 стандартные изделия из $12-5=7$ имеющихся в партии C_7^2 способами). Тогда всего способов выбрать 2 дефектных и 2 обычных изделия из партии будет:

$$m = C_5^2 C_7^2$$

$$C_5^2 = \frac{5!}{2! \cdot (5-2)!} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{4 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 10$$

$$C_7^2 = \frac{7!}{2! \cdot (7-2)!} = \frac{7!}{2! \cdot (5)!} = \frac{6 \cdot 7}{1 \cdot 2} = 21$$

$$C_{12}^4 = \frac{12!}{4! \cdot (12-4)!} = \frac{12!}{4! \cdot 8!} = \frac{9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 495$$

Таким образом, искомая вероятность, что из взятых наугад 4 изделий 2 изделия окажутся дефектными:

$$P(X=2) = \frac{m}{n} = \frac{C_5^2 C_7^2}{C_{12}^4} = \frac{10 \cdot 21}{495} = 0,424.$$

Ответ: вероятность того, что из взятых наугад 4 изделий 2 изделия окажутся дефектными составляет 0,424.

Пример 5.15 В ящике 16 стандартных и 7 бракованных деталей. Наудачу извлечены 6 деталей. Найти вероятность того, что среди извлеченных деталей окажется ровно 4 стандартных детали.

Решение. По условию задачи общее количество деталей N включает все стандартные (16) и бракованные (7) детали, общее количество $N=23$, $M=7$, $n=6$, $m=4$.

$$C_{16}^4 = \frac{16!}{4! \cdot (16-4)!} = \frac{16!}{4! \cdot 12!} = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{43680}{24} = 1820$$

$$C_7^2 = \frac{7!}{2! \cdot (7-2)!} = \frac{7!}{2! \cdot (5)!} = \frac{6 \cdot 7}{1 \cdot 2} = 21$$

$$C_{23}^6 = \frac{23!}{6! \cdot (23-6)!} = \frac{23!}{6! \cdot 17!} = \frac{18 \cdot 19 \cdot 20 \cdot 21 \cdot 22 \cdot 23}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{72681840}{720} = 100947$$

Найдем искомую вероятность:

$$P(X = 4) = \frac{m}{n} = \frac{C_{16}^4 C_7^2}{C_{23}^6} = \frac{1820 \cdot 21}{100947} = 0,379$$

Таким образом, рассчитанная вероятность, что среди извлеченных деталей окажется ровно 4 стандартных детали, равна 0,379.

Ответ: вероятность того, что среди извлеченных деталей окажется ровно 4 стандартных детали составляет 0,379.

Пример 5.16. Среди 100 изготовленных изделий 40 окрашенных. Найти вероятность того, что из извлеченных случайным образом 10 изделий окажется ровно 6 окрашенных.

Решение. По условию задачи $N=100$, $M=40$, $n=10$, $m=6$.

Найдем искомую вероятность:

$$P(X = m) = P(X = 6) = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n} = \frac{C_{40}^6 C_{100-40}^{10-6}}{C_{100}^{10}} = \frac{3838380 \cdot 487635}{17310309456440} = 0,10812$$

Вычисления сделаны следующим образом:

$$C_{40}^6 = \frac{40!}{6! \cdot (40-6)!} = \frac{40!}{6! \cdot 34!} = \frac{35 \cdot 36 \cdot 37 \cdot 38 \cdot 39 \cdot 40}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 3838380$$

$$C_{60}^4 = \frac{60!}{4! \cdot (60-4)!} = \frac{60!}{4! \cdot 56!} = \frac{57 \cdot 58 \cdot 59 \cdot 60}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 487635$$

$$C_{100}^{10} = \frac{100!}{10! \cdot (100-10)!} = \frac{100!}{10! \cdot 90!} = \frac{91 \cdot 92 \cdot 93 \cdot \dots \cdot 98 \cdot 99 \cdot 100}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10} = 17310309456440$$

Ответ: вероятность составит 0,10812.

Пример 5.17. В партии из 12 изделий 8 стандартных. Найти вероятность того, что среди выбранных 3 наугад изделий есть хотя бы одно нестандартное.

Решение. Для решения этой задачи помимо исходного события

$A =$ (среди 3 наугад взятых изделия есть хотя бы одно нестандартное)

введем противоположное ему событие, которое можно записать как:

$\bar{A} =$ (все три выбранные изделия стандартные). Найдем вероятность противоположного события $\bar{A}$. Выпишем все значения параметров: $N = 12$, $M = 8$, $n = 3$, $m = 0$. Все извлеченные изделия должны оказаться стандартными $n = 3$ и $n - m = 0$.

$$P(\bar{A}) = \frac{m}{n} = \frac{C_8^3 \cdot C_4^0}{C_{12}^3} = \frac{56 \cdot 1}{220} = \frac{14}{55} = 0,255.$$

Вернемся к исходной вероятности искомого события – будет хотя бы одно нестандартное изделия из 3:

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 0,255 = 0,745$$

Ответ: вероятность того, что среди выбранных 3 наугад изделий есть хотя бы одно нестандартное составляет 0,745.

5.8.1. Независимость случайных величин и операции над ними

Определение 5.8. Две случайные величины X и Y называются независимыми, если закон распределения одной из них не зависит от того, какие возможные значения приняла другая величина. В противном случае случайные величины зависимы.

Определение 5.9. Несколько случайных величин называют взаимно независимыми, если законы распределения любого числа из них не зависят от того, какие возможные значения приняли остальные величины.

Определение 5.10. Суммой случайных величин X и Y называется случайная величина $X + Y$, возможные значения которой равны суммам каждого возможного значения X с каждым возможным значением Y . Вероятность возможных значений $X + Y$ для независимых величин X и Y — произведение вероятностей слагаемых, для зависимых величин — произведение вероятности одного слагаемого на условную вероятность второго. Если среди возможных значений $X + Y$ окажутся равные между собой числа, то такое повторяющееся возможное значение (при написании закона распределения) следует записать только один раз, сложив соответствующие

Определение 5.11. Произведением независимых случайных величин называется случайная величина XY , возможные значения которой равны произведениям каждого возможного значения X на каждое возможное значение Y . Вероятность возможных значений произведения равна произведению вероятностей возможных значений сомножителей.

5.9. Непрерывные случайные величины и их числовые характеристики

Наиболее важными для специалистов инженерного профиля являются непрерывные случайные величины. Именно непрерывные случайные величины описывают точность и погрешность обработки поверхностей деталей, измерительной аппаратуры; разнообразные электро- и радиосигналы, помехи, шумы; вибрации механизмов и т. п. Базовые знания о непрерывных случайных величинах, их свойствах и характеристиках, являются основой для изучения теории случайных процессов и математической статистики, применяемых в технических дисциплинах.

В противоположность дискретно распределенным случайным величинам масса вероятности непрерывно распределенных случайных величин распределена сплошной полосой по всей оси Ox или по некоторым участкам этой оси.

Непрерывная случайная величина (НСВ) - это такая величина, которая может принимать любые значения в одном или нескольких заданных интервалах (областях плоскости или пространства). В отличие от дискретной случайной величины, которая может быть задана перечислением всех ее возможных значений, перечислить все несчетные бесконечные множества значений непрерывной величины невозможно!

Непрерывную случайную величину можно задать функциями двух типов: ее функцией распределения и функцией плотности распределения.

Полную информацию о случайной величине дает ее **закон распределения**, который может задаваться в разных формах. Универсальным способом задания закона распределения случайной величины (как непрерывной, так и дискретной) является **функция распределения**.

Для непрерывной случайной величины добавляется важное свойство $F(x)$, а именно — непрерывность и дифференцируемость:

Свойство 1. $F(x)$ непрерывна в любой точке x и дифференцируема всюду, кроме, возможно, отдельных точек, где она терпит излом (рис. 5.5)

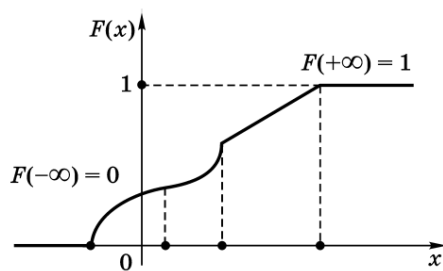


Рис. 5.5. Изломы для непрерывной функции, в которых она не дифференцируема

Вероятность того или иного значения непрерывной случайной величины X вычисляется по свойству 4 (гл. 5, §5.1) с помощью предельного перехода (промежуток $[a, b)$ сжимается в точку), и в силу непрерывности $F(x)$ равна нулю:

$$P(X = a) = \lim_{b \rightarrow a} [F(b) - F(a)] = 0$$

Таким образом, событие $\{X = a\}$ возможно, но его вероятность равна нулю. Поэтому при работе с непрерывной случайной величиной обычно оценивается вероятность попадания значения X в некоторую окрестность заданной точки a .

Плотностью вероятности (или плотностью распределения) непрерывной случайной величины X называется функция $f(x)$, которая является первой производной функции распределения $F(x)$.

$$f(x) = F'(x) = \frac{d}{dx} F(x)$$

Плотность вероятности $f(x)$, как и функция распределения $F(x)$, еще одна из форм закона распределения; но в отличие от функции распределения, эта форма не универсальна: она существует только для непрерывных случайных величин. График плотности вероятности $f(x)$ часто называют *кривой распределения* (рис. 5.6).

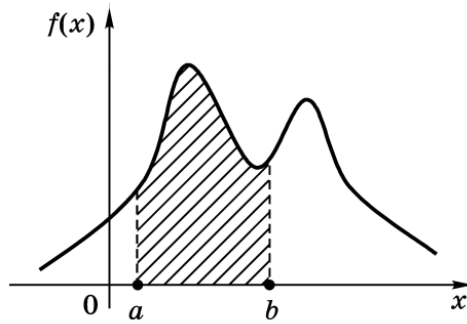


Рис. 5.6. График плотности вероятности $f(x)$

При этом вероятность события $\{a \leq X \leq b\}$ равна площади криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком плотности вероятности. Рассмотрим некоторые свойства плотности вероятности:

Свойство 1. $f(x) \geq 0$ - следует из неубывания функции распределения:

$$(F(x) \geq 0).$$

Свойство 2. Вероятность достоверного события x всегда равна единице:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

Свойство 3. $P(a \leq X \leq b) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$

Свойство 4. $F(x)$ можно определить по плотности вероятности:

$$f(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt.$$

В соответствии с рассмотренными свойствами, дадим более полное определение НСВ.

Определение 5.12. Случайную величину называют **непрерывной**, если ее функция распределения является непрерывной, кусочно-дифференцируемой функцией с непрерывной производной.

5.9.1. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины X на отрезке $[a; b]$ называют определенный интеграл:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx \quad (5.7)$$

где $f(x)$ — плотность распределения вероятности для непрерывной случайной величины X , а несобственный интеграл абсолютно сходится. Если все возможные значения X распределены на конечном отрезке $[a, b]$, то формула для математического ожидания принимает вид:

$$M(X) = \int_a^b x f(x)dx \quad (5.8)$$

Свойства математического ожидания дискретных величин (гл. 5, §5.1.1) сохраняются и для непрерывных величин.

Дисперсию непрерывной величины определяют также по аналогии с дисперсией дискретной величины.

Дисперсией непрерывной случайной величины X называют математическое ожидание квадрата ее отклонения. Если все возможные значения случайной непрерывной величины принадлежат отрезку $[a; b]$, то расчет дисперсии производится по формуле:

$$D(X) = \int_a^b [(X - M(X))^2] f(x) dx. \quad (5.9)$$

В случае, если все возможные значения случайной непрерывной величины принадлежат всей оси x , то расчет дисперсии производится по формуле:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [(X - M(X))^2] f(x) dx. \quad (5.10)$$

Дисперсию также можно рассчитать по более удобным формулам:

$$D(X) = \int_a^b x^2 f(x) dx - [M(X)]^2. \quad (5.11)$$

Среднее квадратичное отклонение непрерывной случайной величины определяется так же, как и для дискретных величин:

$$\sigma(X) = \sigma_x = \sqrt{D(X)} = \sqrt{D_x} \quad (5.12)$$

Интеграл от функции плотности вероятности $f(x)$ с пределами интегрирования на интервале $[-\infty; +\infty]$ **всегда равен единице**:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1 \quad (5.13)$$

Пример 5.18. Найти математическое ожидание и дисперсию непрерывной случайной величины, заданной следующей функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0 \\ x, & \text{при } 0 < x \leq 1; \\ 1, & \text{при } x > 1 \end{cases}$$

Решение. Вычислим плотность распределения:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0 \\ 1, & \text{при } 0 < x \leq 1; \\ 0, & \text{при } x > 1 \end{cases}$$

Найдем математическое ожидание по формуле (5.8) и дисперсию по формуле (5.11):

$$M(X) = \int_0^1 x \cdot 1 \cdot dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$D(X) = \int_0^1 x^2 f(x) dx - [M(X)]^2 = \int_0^1 x^2 \cdot 1 \cdot dx - \left[\frac{1}{2}\right]^2 = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

Пример 5.19. Функция распределения непрерывной случайной величины задана в кусочном виде [7]:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 0 \\ \frac{x^2}{9}, & \text{при } 0 \leq x \leq 3; \\ 1, & \text{при } x > 3 \end{cases}$$

Убедимся, что в точках соединений нет разрывов: $F(0) = \frac{0^2}{9} = 0$; $F(3) = \frac{3^2}{9} = 1$.

Рассматриваемая случайная величина может принимать любые случайные значения на интервале $(-\infty; +\infty)$.

Вероятность того, что нормальная случайная величина X примет значение из интервала $(\alpha; \beta)$ является одной из основных задач. Чтобы рассчитать вероятность значения непрерывной случайной величины из какого-либо промежутка, используется формула:

$$P(a \leq X < b) = F(b) - F(a) \quad (5.14)$$

Формула 5.14 справедлива как для отрезков, так и для полуинтервалов (например, $(0;3]$ или $[0;3)$) или интервалов (например, $(0;3)$).

$$P(a \leq X < b) = \int_a^b f(x)dx \quad (5.15)$$

Воспользуемся этой формулой для определения вероятности значения случайной величины из диапазона $[0; 1]$:

$$P(0 \leq X \leq 1) = F(1) - F(0) = \frac{1^2}{9} - \frac{0^2}{9} = \frac{1}{9}$$

Рассчитаем вероятность того, что случайная величина будет выбрана из отрезка $[2;3]$:

$$P(2 \leq X \leq 3) = F(3) - F(2) = \frac{3^2}{9} - \frac{2^2}{9} = \frac{5}{9}$$

В данном примере результаты вероятностей появления случайной величины в отрезках одинаковой длины различны: на отрезке $[0; 1]$ вероятности значения случайной величины $\frac{1}{9}$, а на отрезке $[2;3]$ - $\frac{5}{9}$. Это объясняется тем, что функция распределения $F(x)$ характеризует накопление вероятностей по мере возрастания x (рис.5.7).

В этом случае удобнее использовать **функцию плотности распределения** вероятностей или дифференциальную функцию распределения. Она представляет собой производную функции распределения:

$$f(x) = F'(x) \quad (5.16)$$

Рассчитаем плотности распределения вероятности по формуле 5.10:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} (0)', & \text{при } x < 0 \\ \left(\frac{x^2}{9}\right)', & \text{при } 0 \leq x \leq 3 \\ (1)', & \text{при } x > 3. \end{cases}$$

В результате получим:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 0 \\ \frac{2x}{9}, & \text{при } 0 \leq x \leq 3 \\ 0, & \text{при } x > 3 \end{cases}$$

Используя свойство аддитивности, рассчитаем функцию плотности вероятности непрерывной случайной величины:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 0 \cdot dx + \int_0^3 \frac{2x}{9} dx + \int_3^{+\infty} 0 \cdot dx = 0 + \frac{2}{9} \int_0^3 x dx + 0 = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{2} (x^2) \Big|_0^3 = \frac{1}{9} (9 - 0) = 1$$

Результат вычисления интеграла от функции плотности вероятности $f(x)$ с пределами интегрирования на интервале $[-\infty; +\infty]$ равен единице, что соответствует формуле 5.13. То есть, случайная непрерывная величина в любом случае примет одно из множества значений отрезка $[0; 3]$. На рисунке 5.7 показана площадь, равная единице (треугольник ABC) - геометрическая интерпретация плотности вероятности непрерывной величины на отрезке $[0; 3]$. Отрезок AB является частью прямой $y = \frac{x^2}{9}$

По результатам на рис.5.7 можно видеть, что по оси x на отрезке $[0; 1]$ и $[2; 3]$ заштрихованные площади характеризуют различные вероятности появления случайной величины $\left(\frac{1}{9} < \frac{5}{9}\right)$. Функция плотности является неотрицательной, т.к. «накапливает» вероятности и ее график располагается выше оси OX .

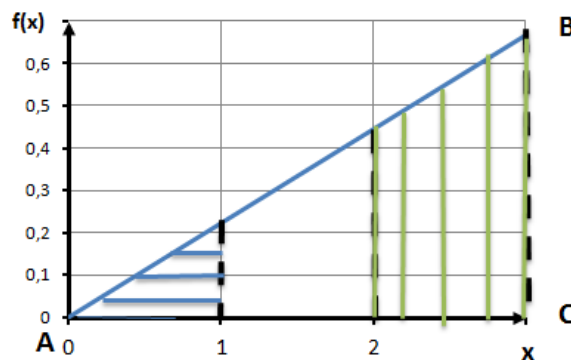


Рис. 5.7. К решению примера 5.19. Геометрическая интерпретация плотности вероятности

Пример 5.20. Непрерывная случайная величина X распределена по закону:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cos x, & \text{при } x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right), \\ 0, & \text{при } x \notin \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right). \end{cases}$$

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $y = \sin X$.

Решение. Найдем математическое ожидание по формуле 5.8 и дисперсию по формуле 5.11:

$$M(Y) = \int_a^b x f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x dx = 0;$$

$$D(Y) = \int_a^b x^2 f(x) dx - [M(Y)]^2 = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx - 0 = \frac{1}{3}$$

Ответ: $M(Y) = 0$, $D(Y) = \frac{1}{3}$.

Пример 5.21. Непрерывная случайная величина X , все возможные значения которой находятся в интервале $(0; \frac{\pi}{3})$ задана плотностью распределения вероятностей $f(x) = C * \sin(3x)$. Найти коэффициент C .

Решение. Если функция $f(x)$ является плотностью распределения вероятностей непрерывной случайной величины X , заданной в интервале $(a; b)$, то выполняется условие:

$$\int_a^b f(x) dx = 1 \quad (5.17)$$

Запишем неизвестный коэффициент C в выражении $f(x) = C \sin(3x)$ так, чтобы условие 5.17 для данной величины X выполнялось.

Вычислим:

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} C \cdot \sin(3x) dx = -\frac{C}{3} (\cos \pi - \cos 0) = -\frac{C}{3} (-1 - 1) = \frac{2C}{3}$$

$$\frac{2C}{3} = 1; \text{ отсюда } C = \frac{3}{2}.$$

Ответ: $C = \frac{3}{2}$.

При решении задач плотности распределений непрерывных значений величин часто называют законами распределений. Наиболее часто используются законы равномерного, нормального и показательного распределений.

5.9.2. Закон равномерной плотности распределения вероятности

Определение 5.13. Распределение вероятностей называется **равномерным**, если на интервале, которому принадлежат все возможные значения случайной величины, плотность распределения сохраняет постоянное значение.

Случайная величина имеет равномерное распределение на отрезке $[a; b]$, если она имеет следующую плотность распределения вероятностей.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < a \\ \frac{1}{b-a}, & \text{при } a \leq x \leq b \\ 0, & \text{при } x > b. \end{cases} \quad (5.17)$$

На рис. 5.8 показан график функции распределения, на рис. 5.9 график плотности равномерного распределения.

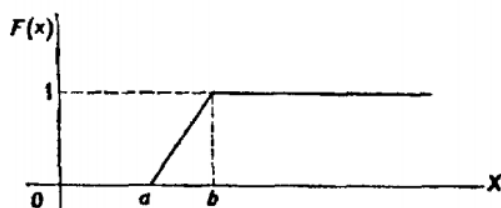


Рис. 5.8. График функции равномерного распределения

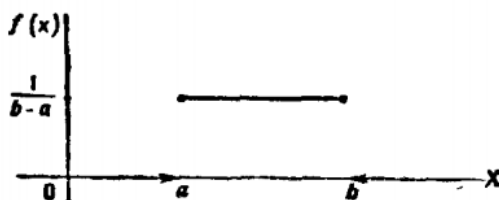


Рис. 5.9. График плотности равномерного распределения

Пример 5.22. Найти математическое ожидание и дисперсию непрерывной случайной величины, распределенной равномерно в интервале $[a; b]$.
Примечание: плотность равномерного распределения определяется по формуле $f(x) = \frac{1}{b-a}$

Найдем математическое ожидание по формуле (5.8) и дисперсию по формуле (5.11):

$$M(X) = \int_a^b x f(x) dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x dx = \frac{(a+b)}{2}$$

$$D(X) = \int_a^b x^2 f(x) dx - [M(X)]^2 = \frac{1}{b-a} \int_a^b x^2 dx - \left[\frac{(a+b)}{2} \right]^2 = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

5.9.3. Нормальный закон распределения

Нормальное распределение вероятностей непрерывной случайной величины описывается плотностью:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \quad (5.16)$$

Для его построения достаточно знать два параметра: a – математическое ожидание и σ – среднее квадратическое отклонение нормального распределения.

На рис. 5.8 показано нормальное распределение (кривая Гаусса) при значениях параметров: $a = 1$ и $\sigma = 2$.

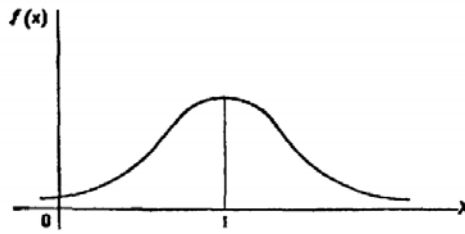


Рис. 5.8. Нормальное распределение при $a=1$ и $\sigma = 2$

Функция 5.16 является определенной на всей оси x и при всех значениях x принимает положительные значения.

Математическое ожидание непрерывной случайной величины рассчитывается по формулам:

$$M(x) = \int_a^b x f(x) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_a^b x e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx \quad (5.17)$$

или

$$M(x) = a \quad (5.18)$$

Дисперсия рассчитывается как:

$$D(x) = \sigma^2 \quad (5.19)$$

Если принять значение параметра $a = 0$, то влияние параметра σ на форму кривой показано на рис. 5.9:

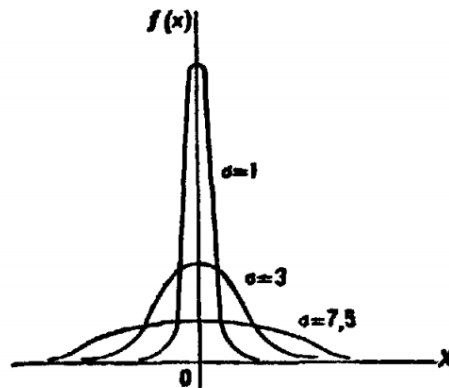


Рис. 5.9. Влияние параметра σ на форму кривой

При любых значениях параметров a и σ , площадь, ограниченная нормальной кривой и осью x остается равной единице.

При значениях параметра $a = 0$ и $\sigma = 1$, нормальную кривую 5.16 называют **нормированной**.

Для того, чтобы найти вероятность того, что непрерывная случайная величина X попадет в интервал $P(\alpha < X < \beta)$, будем использовать формулу:

$$P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha) \quad (5.20)$$

На рис. 5.10 показан геометрический смысл формулы (5.20): вероятность равна заштрихованной площади.

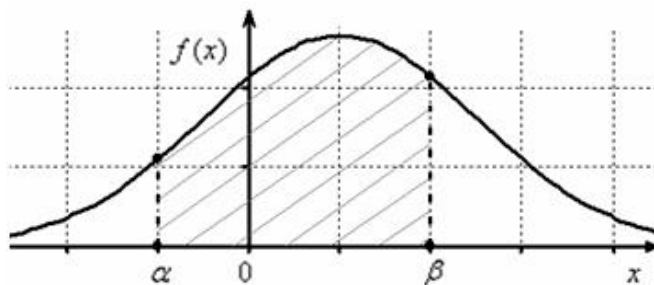


Рис. 5.10. Площадь как вероятность попадания непрерывной случайной величины X в интервал

Пример 5.23. Диаметр болтов, изготовленных для крепления, представляет собой случайную величину, с нормальным распределением. математическое ожидание $M(x) = a = 1,5$ мм; среднее квадратическое отклонение $0,04$ мм. Найти вероятность того, что размер наугад взятого болта находится в диапазоне $(1,4; 1,6)$ мм.

Решение. Так как интервал $(\alpha; \beta)$ является симметричным относительно математического ожидания, то его можно записать как:

$(a - \delta; a + \delta)$, где δ - отклонение от математического ожидания; $\Phi(x)$ – функция Лапласа. Упростим формулу, используя нечётность функции Лапласа:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)$$

Вычислим вероятность того, что значение случайной величины X отклонится от математического ожидания менее чем на δ , т.е. значение диаметра болта находится в диапазоне $(1,4; 1,6)$ и отличается от математического ожидания не более, чем на $0,1$ мм.

$$P(1,4 \leq X \leq 1,6) = \Phi\left(\frac{1,6 - 1,5}{0,04}\right) - \Phi\left(\frac{1,4 - 1,5}{0,04}\right) = \Phi\left(\frac{0,1}{0,04}\right) - \Phi\left(\frac{-0,1}{0,04}\right) = \\ = \Phi(2,5) + \Phi(2,5) = 0,4938 + 0,4938 = 0,9876$$

Второй вариант решения:

$$P(a - \delta < X < a + \delta) = \Phi\left(\frac{a + \delta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \delta - a}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) \\ 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{0,1}{0,04}\right) = 2\Phi(2,5) \approx 2 \cdot 0,4938 = 0,9876.$$

$\Phi(x)$ выбирается из таблицы значений функции Лапласа, см. приложение 2. Чтобы определить границы диапазона, в которых находятся значения диаметра болтов, можно использовать правило **трех сигм**:

нормально распределённая случайная величина X имеет значение из промежутка $a - 3\sigma, a + 3\sigma$

Вероятность отклонения размера болта от математического ожидания менее чем на $\delta = 3\sigma$ составляет:

$$P(|X - a| < 3\sigma) = 2\Phi\left(\frac{3\sigma}{\sigma}\right) = 2 \cdot \Phi(3) \approx 2 \cdot 0,4987 = 0,9973$$

Ответ: вероятность того, что размер наугад взятого болта находится в диапазоне $(1,4; 1,6) \approx 0,9876$ мм.

5.9.4. Показательный закон распределения

Показательным (или экспоненциальным) называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины X , которая описывается плотностью:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0 \\ \lambda \cdot e^{-\lambda x} & \text{при } x \geq 0 \end{cases} \quad (5.21)$$

где λ - постоянная положительная величина. Преимуществом этого распределения является наличие только одного параметра, что упрощает нахождение его приближенного значения, в отличие от распределений со множеством параметрами.

Функция распределения показательного закона

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx = \int_{-\infty}^0 0 \cdot dx + \lambda \int_0^x e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda x}$$

таким образом,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{при } x \geq 0 \end{cases}$$

На рис. 5.11 показаны график плотности и функция распределения показательного закона распределения.

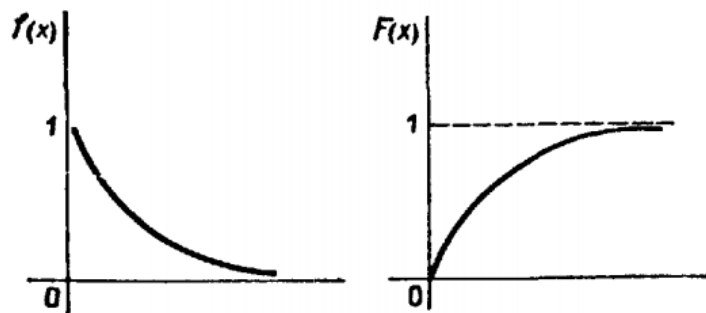


Рис. 5.11. График плотности и функция распределения показательного закона

Пример 5.24. Написать плотность и функцию распределения показательного закона, если параметр $\lambda = 6$.

Решение. Плотность распределения:

$$f(x) = 6 \cdot e^{-6x} \text{ при } x \geq 0; f(x) = 0 \text{ при } x < 0$$

Функция распределения:

$$F(x) = 1 - e^{-6x} \text{ при } x \geq 0; F(x) = 0 \text{ при } x < 0$$

Вероятность попадания в интервал $(a; b)$ непрерывной случайной величины, распределенной по показательному закону можно определить по формуле:

$$P(a < X < b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b} \quad (5.22)$$

Значения функции $e^{-\lambda x}$ можно найти по таблицам или вычислить по таблицам. Можно вычислить в электронных таблицах (например, Excel, Calc) или найти по специальным таблицам.

Пример 5.25. Непрерывная случайная величина распределена по показательному закону

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0 \\ 4e^{-4x} & \text{при } x \geq 0 \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания X попадает в интервал $(0,4; 1)$.

Решение. Так как, по условию задачи $\lambda = 4$, то можно применить формулу 5.22:

$$P(a < X < b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b} = e^{-(4 \cdot 0,4)} - e^{-(4 \cdot 1)} = 0,20189 - 0,01831 \approx 0,184$$

Ответ: вероятность того, что в результате испытания X попадает в интервал $(0,4; 1) \approx 0,184$.

Математическое ожидание и дисперсия показательного закона распределения находится по формуле:

$$M(x) = \frac{1}{\lambda}$$

$$D(x) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Среднеквадратичное отклонение получается извлечением квадратного корня из дисперсии:

$$\sigma(x) = \frac{1}{\lambda}$$

Таким образом, математическое ожидание и среднеквадратичное отклонение равны.

Пример 5.26: Рассмотрим предыдущий пример. Непрерывная случайная величина распределена по показательному закону

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0 \\ 4e^{-4x} & \text{при } x \geq 0 \end{cases}$$

Найти математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратичное отклонение.

Решение. По условию задачи $\lambda = 4$. Математическое ожидание и среднеквадратичное отклонение равны:

$$M(x) = \sigma(x) = \frac{1}{4} = 0,25$$

Рассчитаем дисперсию:

$$D(x) = \frac{1}{16} = 0,0625$$

Ответ: $M(x) = \sigma(x) = 0,25$; $D(x) = 0,0625$

Функция надежности работы агрегата $R(t)$ определяет вероятность безотказности работы элемента за время, длительностью t .

$$R(t) = P(T > t)$$

где T – непрерывная случайная величина, характеризующая длительность времени работы агрегата без поломки;

t – длительность времени, после которой происходит отказ работы агрегата.

Показательным законом надежности называют функцию надежности:

$$R(t) = e^{-\lambda t}$$

где λ - интенсивность отказов.

Показательный закон имеет важное **свойство**, используемое на практике: **вероятность безотказной работы агрегата** на интервале времени длительностью t не зависит от времени предшествующей работы до начала рассматриваемого интервала, а **зависит только от длительности времени t** .

5.10. Случайные векторы

Совокупность двух случайных величин (X, Y) , рассматриваемых совместно, называется системой двух случайных величин. Каждая из величин, входящих в систему, называется составляющей или компонентой. Обе величины, входящие в систему, рассматриваются одновременно.

Система двух случайных величин (X, Y) геометрически интерпретируется как случайная точка с координатами (X, Y) на плоскости xOy (рис. 5.12, а) или как **случайный вектор**, направленный из начала координат в точку (X, Y) , где X и Y - случайные величины (рис. 5.12, б).



Рис. 5.12. Геометрическая интерпретация системы двух случайных величин

Функцией распределения $F(x, y)$ системы двух случайных величин (X, Y) называется вероятность совместного выполнения двух неравенств: $X < x$ и $Y < y$:

$$F(x, y) = P((X < x) \cdot (Y < y)).$$

Геометрически $F(x, y)$ интерпретируется как вероятность попадания случайной точки (X, Y) в квадрант с вершиной (x, y) , заштрихованный на рис. 5.13.

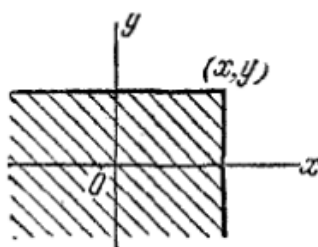


Рис. 5.13. Вероятность попадания случайной точки (X, Y) в квадрант

Функция распределения $F(x, y)$ обладает следующими свойствами:

- 1) $F(-\infty, -\infty) = F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = 0$;
- 2) $F(+\infty, +\infty) = 1$;

3) $F(x, +\infty) = F_1(x)$; $F(+\infty, y) = F_2(y)$, где $F_1(x)$; $F_2(y)$ - функции распределения случайных величин X и Y ;

4) $F(x, y)$ — неубывающая функция x и y .

Плотностью распределения $f(x, y)$ системы двух случайных величин (X, Y) называется предел отношения вероятности попадания случайной точки в элементарный участок плоскости, примыкающий к точке (x, y) , к площади этого участка, когда его размеры стремятся к нулю. Плотность распределения выражается через функцию распределения формулой:

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = F''_{xy}(x, y)$$

Свойства плотности распределения

1) $f(x, y) \geq 0$.

$$2) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1$$

Функция распределения системы выражается через плотность распределения формулой:

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(x, y) dx dy$$

В этом случае интегрирование производится сначала по y , а потом по x .

Плотности распределения отдельных величин, входящих в систему, можно рассчитать по формулам:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$$

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx$$

Условным законом распределения случайной величины, входящей в систему, называется ее закон распределения, вычисленный при условии, что другая случайная величина приняла определенное значение.

Задача 5.27. Стрелок производит по мишени один выстрел. Вероятность попадания им в цель равна p . Рассмотрим две случайные величины: X — число попаданий; Y — число промахов. Построить функцию распределения $F(x, y)$ для системы случайных величин (X, Y) .

Решение. Так как случайные величины (X, Y) являются зависимыми, то $X + Y = 1$.

Запишем в таблицу 5.11 возможные значения X , Y с соответствующими вероятностями:

Таблица 5.11

$x_i \backslash y_i$	0	1
0	0	q
1	p	0

Сведем в таблицу 5.12 значения функции $F(x, y)$:

Таблица 5.12

$y \backslash x$	$x \leq 0$	$0 < x \leq 1$	$x > 1$
$y \leq 0$	0	0	0
$0 < y \leq 1$	0	0	p
$y > 1$	0	q	1

Контрольные вопросы и задачи

- 5.1. Укажите отличие непрерывной случайной величины от дискретной.
 - 5.2. Дайте определение закона распределения случайной дискретной величины.
 - 5.3. Укажите способы задания закона распределения случайной величины.
 - 5.4. Какими свойствами обладает функция распределения?
 - 5.5. Какими характеристиками обладает случайная величина?
 - 5.6. Укажите свойства математического ожидания для ДСВ.
 - 5.7. Какие виды распределений вы знаете для ДСВ и НСВ?
 - 5.8. Укажите отличие распределений.
 - 5.9.. Может ли при каком-либо значении аргумента быть:
 - 1) Функция распределения больше единицы?
 - 2) Плотность распределения больше единицы?
 - 3) Функция распределения отрицательной?
 - 4) Плотность распределения отрицательной?
 - 5.10. Что является простейшим потоком событий?
 - 5.11. Укажите свойства потока событий.
 - 5.12. Какими функциями можно задать непрерывную случайную величину?
 - 5.13. Какими свойствами обладает непрерывная случайная величина?
 - 5.14. Чем отличается дисперсия непрерывной случайной величины от дисперсии дискретной случайной величины?
 - 5.15. Как вычислить плотность распределения непрерывной случайной величины.
 - 5.16. Перечислите свойства плотности вероятности распределения непрерывной случайной величины.
 - 5.17. Как вычислить $P(a \leq X < b)$ с помощью плотности вероятности и функции распределения?
 - 5.18. Дайте определение случайного вектора.
- Задачи:

5.19. Дискретная случайная величина задана своим законом распределения:

x_i	12	16	21	26	30
p_i	0,2	0,1	0,4	a	0,1

Рассчитать $M(X), D(X), \sigma(X)$.

5.20. Непрерывная случайная величина X задана своей функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ A \sin 2x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \\ 1, & x > \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

Вычислить математическое ожидание, дисперсию и стандартное отклонение.

5.21. Задана плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины X

$$f(x) = \begin{cases} Ax, & \text{если } x \in [1; 5) \\ 0, & \text{если } x \notin [1; 5) \end{cases}$$

- определить коэффициент A ;
- найти функцию распределения $F(x)$;
- построить графики $f(x), F(x)$.
- найти вероятность того, что X примет значение из промежутка $[1; 3)$.

5.22. Случайная величина задана плотностью распределения:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq -\frac{\pi}{2}, \\ a \cos x, & \text{при } -\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{при } x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Найти коэффициент a .

5.23. Случайная величина задана плотностью распределения:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0, \\ \frac{\sin x}{2}, & \text{при } 0 < x \leq \pi \\ 0, & \text{при } x > \pi. \end{cases}$$

Найти функцию распределения и вероятность того, что случайная величина примет значение из интервала $(0; \frac{\pi}{4})$.

5.24. Нормально распределенная случайная величина X задана своим математическим ожиданием $a = -1$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma = 3$.

- а) записать плотность вероятности и схематически изобразить ее график;
- б) найти вероятность того, что X примет значение из интервала $(\alpha, \beta) = (-4, 0)$;
- в) найти вероятность того, что X отклонится по модулю от a не более чем на $\delta = 2$;
- г) применяя правило «трех сигм», найти значения случайной величины X .

5.25. Непрерывная случайная величина распределена по показательному закону:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0 \\ 9e^{-9x} & \text{при } x \geq 0 \end{cases}$$

Найти математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратичное отклонение.

- 5.26. Создать программу для получения равномерно распределенной переменной, значения диапазона (a,b) задаются пользователем.
- 5.27. Создать программу, генерирующую случайные величины, распределенные по закону Пуассона. Величина математического ожидания вводится пользователем.
- 5.28. Создать программу, генерирующую нормально распределенные случайные величины.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Теория вероятностей: Учеб. для вузов / А. В. Печинкин, О. И. Тескин, Г. М. Цветкова и др.; Под ред. В. С. Зарубина, А. П. Крищенко. - М. : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. — 456 с.
2. Палий И.А. Теория вероятностей: Учеб. пособие. – М.: ИНФРА-М, 2012. – 236с.
3. Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие / Л.Г. Бирюкова, Г.И. Бобрик, В.И. Ермаков и др.; Под ред. В.И. Ермакова. - М.: ИНФРА-М, 2004. - 287 с.
4. Теория вероятностей и математическая статистика / Балдин К.В., Башлыков В.Н., Рукоуев А.В., - 2-е изд. - М.: Дашков и К, 2018. - 472 с.
5. Болотюк В.А., Болотюк Л.А., Гринь А.Г., Гринь И.П. — Практикум и индивидуальные задания по курсу теории вероятностей (типовые расчеты). - М.: Лань, 2010. – 288 с.
6. Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие для вузов/ В.Е. Гмурман. – 9-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2003. – 479 с.
7. <http://mathprofi.ru/>

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Таблица значений функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0.3989	0.3989	0.3989	0.3988	0.3986	0.3984	0.3982	0.3980	0.3977	0.3973
0,1	0.3970	0.3965	0.3961	0.3956	0.3951	0.3945	0.3939	0.3932	0.3925	0.3918
0,2	0.3910	0.3902	0.3894	0.3885	0.3876	0.3867	0.3857	0.3847	0.3836	0.3825
0,3	0.3814	0.3802	0.3790	0.3778	0.3765	0.3752	0.3739	0.3726	0.3712	0.3698
0,4	0.3683	0.3668	0.3652	0.3637	0.3621	0.3605	0.3589	0.3572	0.3555	0.3538
0,5	0.3521	0.3503	0.3485	0.3467	0.3448	0.3429	0.3410	0.3391	0.3372	0.3352
0,6	0.3332	0.3312	0.3292	0.3271	0.3251	0.3230	0.3209	0.3187	0.3166	0.3144
0,7	0.3123	0.3101	0.3079	0.3056	0.3034	0.3011	0.2989	0.2966	0.2943	0.2920
0,8	0.2897	0.2874	0.2850	0.2827	0.2803	0.2780	0.2756	0.2732	0.2709	0.2685
0,9	0.2661	0.2637	0.2613	0.2589	0.2565	0.2541	0.2516	0.2492	0.2468	0.2444
1	0.2420	0.2396	0.2371	0.2347	0.2323	0.2299	0.2275	0.2251	0.2227	0.2203
1,1	0.2179	0.2155	0.2131	0.2107	0.2083	0.2059	0.2036	0.2012	0.1989	0.1965
1,2	0.1942	0.1919	0.1895	0.1872	0.1849	0.1826	0.1804	0.1781	0.1758	0.1736
1,3	0.1714	0.1691	0.1669	0.1647	0.1626	0.1604	0.1582	0.1561	0.1539	0.1518
1,4	0.1497	0.1476	0.1456	0.1435	0.1415	0.1394	0.1374	0.1354	0.1334	0.1315
1,5	0.1295	0.1276	0.1257	0.1238	0.1219	0.1200	0.1182	0.1163	0.1145	0.1127
1,6	0.1109	0.1092	0.1074	0.1057	0.1040	0.1023	0.1006	0.0989	0.0973	0.0957
1,7	0.0940	0.0925	0.0909	0.0893	0.0878	0.0863	0.0848	0.0833	0.0818	0.0804
1,8	0.0790	0.0775	0.0761	0.0748	0.0734	0.0721	0.0707	0.0694	0.0681	0.0669
1,9	0.0656	0.0644	0.0632	0.0620	0.0608	0.0596	0.0584	0.0573	0.0562	0.0551
2	0.0540	0.0529	0.0519	0.0508	0.0498	0.0488	0.0478	0.0468	0.0459	0.0449
2,1	0.0440	0.0431	0.0422	0.0413	0.0404	0.0395	0.0387	0.0379	0.0371	0.0363
2,2	0.0353	0.0347	0.0339	0.0332	0.0325	0.0317	0.0310	0.0303	0.0297	0.0290
2,3	0.0283	0.0277	0.0270	0.0264	0.0258	0.0252	0.0246	0.0241	0.0235	0.0229

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,4	0.0224	0.0219	0.0213	0.0208	0.0203	0.0198	0.0194	0.0189	0.0184	0.0180
2,5	0.0175	0.0171	0.0167	0.0163	0.0158	0.0154	0.0151	0.0147	0.0143	0.0139
2,6	0.0136	0.0132	0.0129	0.0126	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110	0.0107
2,7	0.0104	0.0101	0.0099	0.0096	0.0093	0.0091	0.0088	0.0086	0.0084	0.0081
2,8	0.0079	0.0077	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0067	0.0065	0.0063	0.0061
2,9	0.0060	0.0058	0.0056	0.0055	0.0053	0.0051	0.0050	0.0048	0.0047	0.0046
3	0.0044	0.0043	0.0042	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036	0.0035	0.0034
3,1	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026	0.0025	0.0025
3,2	0.0024	0.0023	0.0022	0.0022	0.0021	0.0020	0.0020	0.0019	0.0018	0.0018
3,3	0.0017	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014	0.0013	0.0013
3,4	0.0012	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010	0.0010	0.0009	0.0009
3,5	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007	0.0007	0.0007	0.0006
3,6	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004
3,7	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003
3,8	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002
3,9	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	

Приложение 2

Таблица значений интеграла Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$

<i>x</i>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	00000	00798	01596	02393	03191	03988	04784	05581	06376	07171
0,1	07966	08759	09552	10348	11134	11924	12712	13499	14285	15069
0,2	15852	16633	17413	18191	18967	19741	20514	21284	22052	22818
0,3	23582	24344	25103	25860	26614	27366	28115	28862	29605	30346
0,4	31084	31819	32552	33280	34006	34729	35448	36164	36877	37587
0,5	38292	38995	39694	40387	41080	41768	42452	43132	43809	44481
0,6	45149	45814	46474	47131	47783	48431	49075	49714	50350	50981
0,7	51607	52230	52848	53461	54070	54675	55275	55870	56461	57047
0,8	57629	58206	58778	59346	59909	60468	61021	61570	62114	62653
0,9	63188	63718	64243	64763	65278	65789	66294	66795	67291	67783
1	68269	68750	69227	69699	70166	70628	71086	71538	71986	72429
1,1	72867	73300	73729	74152	74571	74986	75395	75800	76200	76595
1,2	76986	77372	77754	78130	78502	78870	79233	79592	79945	80295
1,3	80640	80980	81316	81648	81975	82298	82617	82931	83241	85547
1,4	83849	84146	84439	84728	85013	85294	85571	85844	86113	86378
1,5	86639	86696	87149	87398	87644	87886	88124	88358	88589	88817
1,6	89040	89260	89477	89690	89890	90106	90309	90508	90704	90897
1,7	91087	91273	91457	91637	91814	91988	92159	92327	92492	92655
1,8	92814	92970	93124	93275	93423	93569	93711	93852	93989	94124
1,9	94257	94387	94514	94639	94762	94882	95000	95116	95230	95341
2	95450	95557	95662	95764	95865	95964	96060	96155	96247	96338
2,1	96427	96514	96599	96683	96765	96844	96923	96999	97074	97148
2,2	97219	97289	97358	97425	97491	97555	97618	97679	97739	87798
2,3	97855	97911	97966	98019	98072	98123	98172	98221	98269	98315
2,4	98360	98405	98448	98490	98531	98571	98611	98649	98686	98723
2,5	98758	98793	98826	98859	98891	98923	98953	98983	99012	99040
2,6	99068	99095	99121	99146	99171	99195	99219	99241	99263	99285
2,7	99307	99327	99347	99367	99386	99404	99422	99439	99456	99473
2,8	99489	99505	99520	99535	99549	99563	99576	99590	99602	99615
2,9	99627	99639	99650	99661	99672	99682	99692	99702	99712	99721

Окончание прил. 2

3	99730	99739	99747	99755	99763	99771	99779	99786	99793	99800
3,1	99806	99813	99819	99825	99831	99837	99842	99848	99853	99858
3,2	99863	99867	99872	99876	99880	99885	99889	99892	99896	99900
3,3	99903	99907	99910	99913	99916	99919	99922	99925	99928	99930
3,4	99933	99935	99937	99940	99942	99944	99946	99948	99950	99952
3,5	99953	99955	99957	99958	99960	99961	99963	99964	99966	99967
3,6	99968	99969	99971	99972	99973	99974	99975	99976	99977	99978
3,7	99978	99979	99980	99981	99982	99982	999S3	99984	99984	99985
3,8	99986	99986	99987	99987	99988	99988	99989	99989	99990	99990
3,9	99990	99991	99991	99992	99992	99992	99992	99993	99993	99993

Приложение 3

Таблица значений функции Пуассона $P_n(k; \lambda) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

k	λ									
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0	0.9048	0.8187	0.7408	0.6703	0.6065	0.5488	0.4966	0.4493	0.4066	0.3679
1	0.0905	0.1637	0.2223	0.2681	0.3033	0.3293	0.3476	0.3595	0.3659	0.3679
2	0.0045	0.0164	0.0333	0.0536	0.0758	0.0988	0.1216	0.1438	0.1647	0.1839
3	0.0002	0.0011	0.0033	0.0072	0.0126	0.0198	0.0284	0.0383	0.0494	0.0613
4		0.0001	0.0003	0.0007	0.0016	0.0030	0.0050	0.0077	0.0111	0.0153
5				0.0001	0.0002	0.0003	0.0007	0.0012	0.0020	0.0031
6							0.0001	0.0002	0.0003	0.0005
7										0.0001

k	λ								
	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0
0	0.1353	0.0498	0.0183	0.0067	0.0025	0.0009	0.0003	0.0001	0.0001
1	0.2707	0.1494	0.0733	0.0337	0.0149	0.0064	0.0027	0.0011	0.0005
2	0.2707	0.2240	0.1465	0.0842	0.0446	0.0223	0.0107	0.0050	0.0023
3	0.1805	0.2240	0.1954	0.1404	0.0892	0.0521	0.0286	0.0150	0.0076
4	0.0902	0.1681	0.1954	0.1755	0.1339	0.0912	0.0572	0.0337	0.0189
5	0.0361	0.1008	0.1563	0.1755	0.1606	0.1277	0.0916	0.0607	0.0378
6	0.0120	0.0504	0.1042	0.1462	0.1606	0.1490	0.1221	0.0911	0.0631
7	0.0034	0.0216	0.0595	0.1045	0.1377	0.1490	0.1396	0.1171	0.0901
8	0.0009	0.0081	0.0298	0.0653	0.1033	0.1304	0.1396	0.1318	0.1126
9	0.0002	0.0027	0.0132	0.0363	0.0689	0.1014	0.1241	0.1318	0.1251
10		0.0008	0.0053	0.0181	0.0413	0.0710	0.0993	0.1186	0.1251
11		0.0002	0.0019	0.0082	0.0225	0.0452	0.0722	0.0970	0.1137
12		0.0001	0.0006	0.0034	0.0113	0.0264	0.0481	0.0728	0.0948
13			0.0002	0.0013	0.0052	0.0142	0.0296	0.0504	0.0729
14			0.0001	0.0005	0.0022	0.0071	0.0169	0.0324	0.0521
15				0.0002	0.0009	0.0033	0.0090	0.0194	0.0347

Учебное текстовое электронное издание

**Демиденко Людмила Леонтьевна
Коринченко Гульнара Марсовна**

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Учебное пособие

1,26 Мб

1 электрон. опт. диск

г. Магнитогорск, 2019 год
ФГБОУ ВО «МГТУ им. Г.И. Носова»
Адрес: 455000, Россия, Челябинская область, г. Магнитогорск,
пр. Ленина 38

ФГБОУ ВО «Магнитогорский государственный
технический университет им. Г.И. Носова»
Кафедра информатики и информационной безопасности
Центр электронных образовательных ресурсов и
дистанционных образовательных технологий
e-mail: ceor_dot@mail.ru