



Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова»

С.И. Кадченко
Л.С. Рязанова
О.А. Торшина

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ЯВЛЕНИЙ ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ В СРЕДЕ MAPLE**

*Утверждено Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия*

Магнитогорск
2019

УДК 517.9
ББК 22

Рецензенты:

кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры уравнений математической физики,
ФГАОУ ВО «Южно-Уральский государственный университет
(национальный исследовательский университет)»

Г.А. Закирова

кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры высшей математики,
ФГБОУ ВО «Магнитогорский государственный технический
университет им. Г.Н. Носова»

В.В. Шеметова

Кадченко С.И., Рязанова Л.С., Торшина О.А.

Математическое моделирование явлений естествознания в среде Maple
[Электронный ресурс] : учебное пособие / Сергей Иванович Кадченко, Любовь Сергеевна Рязанова, Ольга Анатольевна Торшина ; ФГБОУ ВО «Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова». – Электрон. текстовые дан. (0,71 Мб). – Магнитогорск : ФГБОУ ВО «МГТУ им. Г.И. Носова», 2019. – 1 электрон. опт. диск (CD-R). – Систем. требования : IBM PC, любой, более 1 GHz ; 512 Мб RAM ; 10 Мб HDD ; MS Windows XP и выше ; Adobe Reader 8.0 и выше ; CD/DVD-ROM дисковод ; мышь. – Загл. с титул. экрана.

ISBN 978-5-9967-1713-2

В учебном пособии рассмотрены основные понятия, определения и классификация математических моделей. Описаны основные этапы построения математических моделей. На примере задач, возникающих в естествознании рассмотрены примеры построения математических моделей позволяющие прогнозировать направление развития исследуемых процессов и управлять ими.

Каждый раздел включает теоретический материал, примеры решения задач и листинги программ. Пособие написано в соответствии с ФГОС ВПО по направлениям 01.03.02 «Прикладная математика и информатика», 03.03.02 «Физика».

Учебное пособие может быть использовано студентами естественнонаучных специальностей для выполнения домашних заданий и подготовки к контрольным работам. Оно так же будет полезным преподавателям при подготовке к лабораторным занятиям по «Математическому моделированию».

УДК 517.9
ББК 22

ISBN 978-5-9967-1713-2 © Кадченко С.И., Рязанова Л.С., Торшина О.А., 2019
© ФГБОУ ВО «Магнитогорский государственный
технический университет им. Г.И. Носова», 2019

Содержание

ВВЕДЕНИЕ.....	4
1. ОБЩЕЕ ПОНЯТИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА И ТРЕБОВАНИЯ.....	11
2. «ЖЕСТКИЕ» И «МЯГКИЕ» МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ.....	14
2.1. Модель сражения двух армий.....	14
2.1.1. Основные теоретические сведения.....	14
2.1.2. Листинг программы.....	17
2.2. Логистические модели.....	19
2.2.1. Основные теоретические сведения.....	19
2.2.2. Листинг программы.....	26
2.3. Модель типа хищник – жертва.....	30
2.3.1. Основные теоретические сведения.....	30
2.3.2. Листинг программы.....	33
2.4. Жесткие модели как путь к ошибочным предсказаниям.....	34
2.4.1. Основные теоретические сведения.....	34
2.4.2. Листинг программы.....	36
2.5. Опасность многоступенчатого управления.....	38
2.6. Статистика первых цифр степеней двойки и предел мира.....	40
2.7. Компаратментные модели.....	42
2.7.1. Основные теоретические сведения.....	42
2.7.2. Листинг программы.....	48
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	50

ВВЕДЕНИЕ

При написании учебного пособия были использованы источники, указанные в списке литературы.

В настоящее время деятельность людей очень многообразна и разнопланова, в результате чего возникает необходимость познания мира окружающего нас. Познание идет в самых различных направлениях. Каждая наука, а они выделены, чтобы удобнее было совершенствовать и разрабатывать методы, пригодные для изучения определенного круга явлений, ведает определенной областью знаний. Решение многих сложных научных и практических задач, относящихся к различным областям человеческой деятельности, существенно упрощается с помощью моделирования. При этом происходит замещение одних объектов другими, обеспечивающими фиксацию наиболее характерных свойств замещаемых объектов. Такое замещение позволяет получить новую информацию об объекте. Роль моделирования в современной науке настолько велика, что оно стало одним из основных инструментов научного познания.

Модель - это такой упрощенный материальный или абстрактный объект, который в процессе изучения замещает оригинал, сохраняя при этом важнейшие типичные его черты.

Хорошо построенная модель, как правило, доступнее для исследования, нежели реальный объект. С помощью модели выявляют наиболее существенные факты, формирующие те или иные свойства изучаемого объекта, поскольку сама модель отражает лишь основные характеристики исходного объекта.

Моделирование является мощным средством анализа и синтеза сложных объектов, позволяющим прогнозировать и управлять процессом (полетом ракеты, химической реакцией, экономикой страны, цепной реакцией в атомном реакторе и т. п.). Экспериментировать в этих целях с реальным объектом в лучшем случае бывает не удобно, а за частую просто вредно или не возможно.

Если объект исследования обладает динамическими характеристиками, т. е. характеристиками, зависящими от времени, особое значение в этом случае приобретает задача прогнозирования динамики состояния такого объекта под действием различных факторов.

С развитием вычислительных средств широкое применение в изучении фундаментальных наук, техники, экономики, медицине, в управляемых системах с участием людей находит математическое моделирование. Не следует считать, что математическая модель и математическое моделирование изобретены в XX веке. Первые опыты составления математических моделей были предприняты в древние века. Первыми математическими моделями являются, по-видимому, числа. В физике математическое моделирование использовалось со времен Архимеда.

Модель нужна:

1. Для того чтобы понять, как устроен конкретный объект. Какова его структура, основные свойства, законы развития и взаимодействия с окружающим миром.

2. Для того чтобы научиться управлять объектом или процессом и определить наилучшие способы управления при заданных целях и критериях.

3. Для того чтобы прогнозировать прямые и косвенные последствия реализации заданных способов и форм воздействия на объект.

Хорошо построенная модель, как правило, обладает удивительным свойством: ее изучение дает новые знания об объекте.

Процесс построения модели называется моделированием.

Существует несколько приемов моделирования, которые можно условно разбить на две группы: *материальное (предметное)* и *идеальное (абстрактное)*.

Основными видами материального моделирования являются *физическое* и *аналоговое* моделирование.

Физическим называется такое моделирование, при котором объект заменяется его уменьшенной или увеличенной копией, физически однородной с оригиналом, допускающая исследование, как правило в лабораторных условиях с помощью последующего переноса свойств изучаемых процессов и явлений с модели на объект на основе теории подобия.

Вот несколько примеров физических моделей: в астрономии - планетарий; в гидротехнике - лотки с водой, моделирующие руки и водоемы; в архитектуре - макеты зданий; в самолетостроении - макеты летательных аппаратов в аэродинамической трубе и т. д.

Аналоговым моделированием называется моделирование, основанное на аналогии процессов и явлений, имеющих различную физическую природу, но формально одинаково описываемые одними и теми же уравнениями, логическими схемами.

Простой пример аналогового моделирования - изучение механических колебаний с помощью электрической схемы, описываемой теми же дифференциальными уравнениями.

Анализ обоих типов материального моделирования показывает, что оно является *экспериментальным*.

От *предметного моделирования* принципиально отличается *идеальное моделирование*, которое основано не на материальной аналогии объекта и модели, а на аналогии идеальной, мысленной. Идеальное моделирование носит теоретический характер. Различают два типа идеального моделирования: *интуитивное* и *знаковое*.

Под интуитивным понимают моделирование, основанное на интуитивном представлении об объекте исследования, не поддающемся формализации либо не нуждающемся в ней.

Жизненный опыт каждого человека можно считать его интуитивной моделью окружающего мира. Интуитивное моделирование особенно развито у музыкантов, художников, ученых, шахматистов. Как составная часть оно присутствует во всех видах моделирования.

Знаковым моделированием называется моделирование, которое выражает свойства объекта с помощью условных знаков или символов. К ним относятся математические выражения и уравнения, химические формулы,

музыкальные фразы, записанные с помощью нот, тексты, записанные в каком-либо алфавите и т. п.

Существуют еще и образно-знаковые модели, которые обладают признаками, как образных, так и знаковых моделей. Это могут быть графики, схемы, чертежи, графы и т. п.

Важнейшим видом знакового моделирования является *математическое моделирование*.

Математическое моделирование есть приближенное описание исследуемого объекта посредством модели, сформулированной на языке математики с использованием математических методов.

Классическим примером математического моделирования является описание и исследования основных законов механики Ньютона и изучение с помощью их движения материальных тел.

Построение математической модели (м. м.) начинается с выделением тех факторов, которые следует принять во внимание. Например, рассмотрим математической модели полета реактивного снаряда запущенного под углом к поверхности Земли. Траектория полета снаряда будет зависеть от целого ряда факторов: характеристик снаряда (его формы, материала из которого сделан снаряд, реактивной тяги), сил действующих на снаряд (сопротивления воздуха, гравитационной силы, силы Кориолиса, силы и ветра), есть ли вращение снаряда вокруг собственной оси и т. д.

Чтобы построить м. м. этой задачи, мы должны сделать ряд упрощений. Во-первых, ограничимся рассмотрением снарядов, поднимающихся вверх и перемещающихся вдоль поверхности земли на расстояние не более 100 км. В этом случае без существенной потери точности можно считать, что Земля плоская.

$$\frac{h}{R_3} = \frac{100}{6400} = \frac{1}{64} \approx 0.016 = 1.6\%$$

Во-вторых, предположим, что вся траектория полета снаряда лежит в одной плоскости, т. е. Предполагается отсутствие бокового ветра и т. п. В-третьих, примем снаряд за материальную точку. Используя эти два предположения, выберем двумерную Декартову систему координат с началом в месте старта снаряда.

Функции $x(t)$ и $y(t)$ определяют координаты снаряда в момент времени t , причем

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0. \quad (0.1)$$

Если обозначить производные по времени, как $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ и $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$, то вектор скорости снаряда в момент времени t найдется в виде

$$\vec{v} = (\dot{x}(t), \dot{y}(t)), \quad |\vec{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \quad (0.2)$$

Известно, что движение материальной точки переменной массы описывается дифференциальным уравнением Мещерского

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \vec{\Phi}, \quad (0.3)$$

где $m = m(t)$ - масса снаряда, \vec{F} - результирующий вектор действующих на ракету сил, $\vec{\Phi}$ - вектор реактивной силы

$$\vec{\Phi} = (\vec{u} - \vec{v}) \frac{dm}{dt} = (\vec{u} - \vec{v}) \dot{m}, \quad (0.4)$$

\vec{u} - вектор скорости вытекающих из снаряда газов.

Результирующая действующих на снаряд сил состоит из двух слагаемых: силы гравитации $m\vec{g}$ и силы сопротивления $\frac{c \rho s v^2 \vec{v}}{2 |\vec{v}|}$, где c - коэффициент сопротивления, ρ - плотность воздуха, s - поперечное сечение снаряда, т. е.

$$\vec{F} = m\vec{g} + \frac{c \rho s v^2 \vec{v}}{2 |\vec{v}|} \quad (0.5)$$

Отметим, что сила сопротивления и тяги действуют вдоль оси снаряда. С учетом (0.4) и (0.5) спроектируем дифференциальное уравнение (0.4) на оси Декартовой системы координат

$$\begin{cases} m \ddot{x} = -\frac{c \rho s v^2}{2} \cos \Theta - (u \cos \Theta - \dot{x}) \dot{m}, \\ m \ddot{y} = -m g - \frac{c \rho s v^2}{2} \sin \Theta - (u \sin \Theta - \dot{y}) \dot{m} \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\frac{c \rho s v^2}{2m} \cos \Theta - (u \cos \Theta - \dot{x}) \frac{\dot{m}}{m}, \\ \ddot{y} = -g - \frac{c \rho s v^2}{2m} \sin \Theta - (u \sin \Theta - \dot{y}) \frac{\dot{m}}{m}. \end{cases} \quad (0.6)$$

В результате получили систему двух нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. Решение системы (0.6) должно удовлетворять четырем начальным условиям

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0, & y(0) &= y_0, \\ v(0) &= v_0, & \Theta(0) &= \Theta_0. \end{aligned} \quad (0.7)$$

Для численного решения задачи Коши (0.6) - (0.7) удобно преобразовать систему двух дифференциальных уравнений (0.6) второго порядка в систему четырех уравнений первого порядка. Для этого продифференцируем соотношения $\dot{x} = v \cos \Theta$ и $\dot{y} = v \sin \Theta$ по времени t , имеем

$$\ddot{x} = \dot{v} \cos \Theta - v \dot{\Theta} \sin \Theta, \quad \ddot{y} = \dot{v} \sin \Theta + v \dot{\Theta} \cos \Theta. \quad (0.8)$$

Подставляя (0.8) в (0.6), получим

$$\begin{cases} \dot{v} \cos \Theta - v \dot{\Theta} \sin \Theta = -\frac{c \rho s v^2}{2m} \cos \Theta - (u - v) \frac{\dot{m}}{m} \cos \Theta, \\ \dot{v} \sin \Theta + v \dot{\Theta} \cos \Theta = -\frac{c \rho s v^2}{2m} \sin \Theta - (u - v) \frac{\dot{m}}{m} \sin \Theta - g. \end{cases} \quad (0.9)$$

Если мы умножим первое уравнение полученной системы (0.9) на $\cos \Theta$, а второе на $\sin \Theta$ и сложим одно с другим и умножим второе уравнение на $\cos \Theta$, а первое на $\sin \Theta$ и вычтем, то найдем

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{y} = \frac{1}{m} \left(-\frac{c \rho s v^2}{2} - (u - v) \dot{m} \right) - g \sin \Theta, \\ \dot{\Theta} = -\frac{g}{v} \cos \Theta, \\ \dot{x} = v \cos \Theta, \\ \dot{y} = v \sin \Theta. \end{array} \right. \quad (0.10)$$

Система дифференциальных уравнений (0.10) вместе с начальными условиями (0.7) составляют систему четырех уравнений первого порядка относительно неизвестных функций $x(t)$, $y(t)$, $v(t)$, $\Theta(t)$. Задача Коши (0.10), (0.7) служит м. м. полета реактивного снаряда запущенного под углом к поверхности Земли. В силу нелинейности системы уравнений (0.10) ее решение может быть найдено только численными методами в частности методами Рунге - Кутты.

При расчетах можно использовать следующие значения параметров: $m = 15 \div 75$ кг, $m_o = 15$ кг, $c = 0,2$, $\rho = 1,29$ кг/м³, $s = 0,25$ м², $g = 9,81$ м/с², $u = 250 \div 450$ м/с, $v_o = 0 \div 120$ м/с. Закон изменения массы снаряда от времени задается произвольно.

Теория полета реактивного снаряда описана выше. Приведем листинг программы позволяющий проводить вычислительные эксперименты.

```

> restart:
> Didits:=17:
> Dt:=0.1:
> N:=100:
> dt:=evalf(Dt/N):
> mo:=75: начальная масса снаряда
> mk:=15: конечная масса снаряда после сгорания топлива
> c:=0.1: коэффициент сопротивления среды
> ro:=1.29: плотность среды
> s:=0.25: площадь поперечного сечения снаряда
> g:=9.81: ускорение свободного падения
> Vo:=120: начальная скорость движения снаряда
> Uo:=350: скорость истечения газов
> tc:=10: время сгорания топлива
> xo:=0: начальная абсцисса
> yo:=0: начальная ордината
> teta0:=45: teta0:=evalf(teta0*Pi/180): начальный угол полета снаряда
> ПОДПРОГРАММЫ ФУНКЦИИ
> U :=(t)->if t <= tc then Vo else 0 fi:
> M :=(t)->if t <= tc then mo-(mo-mk)*t/tc: else mk: fi: масса снаряда в
момент времени t
> dM:=(t)->if t <= tc then -(mo-mk)/tc: else 0: fi: производная от
функции масса снаряда в момент времени t

```

```

> fv:=(V,teta,t)->-evalf((c*ro*s*V^2/2+(U(t)-V)*dM(t))/M(t)+g*sin(teta)):
> fteta:=(V,teta,t)->-evalf(g*cos(teta)/V):
> fx:=(V,teta)->evalf(V*cos(teta)):
> fy:=(V,teta)->evalf(V*sin(teta)):
>
ПРОЦЕДУРЫ РУНГЕ - КУТТЫ
> RUNGE_v:=proc(V,teta,t) local fo,f1,f2,f3:
>
> global dt:
> fo:=evalf(dt*fV(V,teta,t)):
> f1:=evalf(dt*fV(V+fo/2,teta,t)):
> f2:=evalf(dt*fV(V+f1/2,teta,t)):
> f3:=evalf(dt*fV(V+f2,teta,t)):
> RETURN((fo+2*f1+2*f2+f3)/6):
> end:
> RUNGE_teta:=proc(V,teta) local fo,f1,f2,f3:
>
> global dt:
> fo:=evalf(dt*fteta(V,teta)):
> f1:=evalf(dt*fteta(V,teta+fo/2)):
> f2:=evalf(dt*fteta(V,teta+f1/2)):
> f3:=evalf(dt*fteta(V,teta+f2)):
> RETURN((fo+2*f1+2*f2+f3)/6):
> end:
> RUNGE_x_y:=proc(V,teta,f) global dt:
> RETURN(evalf(dt*f(V,teta))):
> end:
> ВЫЧИСЛЕНИЕ КООРДИНАТ ТРАЕКТОРИИ ПОЛЕТА СНА-

```

РЯДА

```

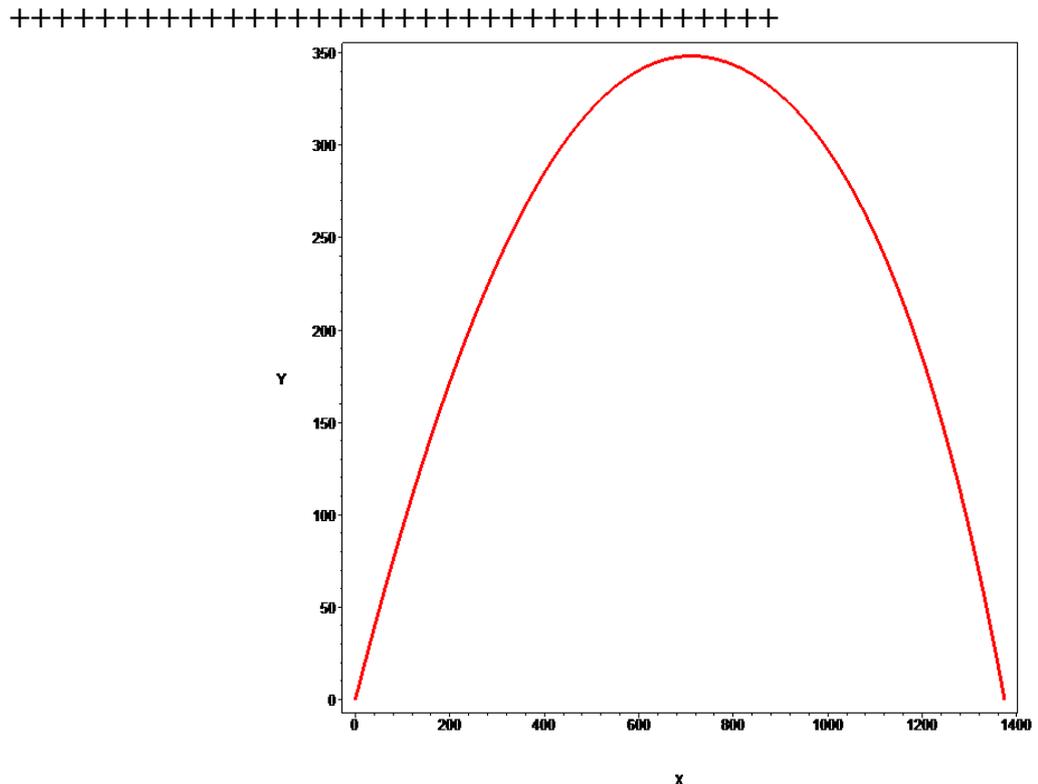
> X[1]:=xo: Y[1]:=yo:
> t:=0: i:=1:
> V:=Vo:
> teta:=teta0:
> x:=X[1]: y:=Y[1]:
> Ymax:=0:
> while Y[i] >= 0 do
> i:=i+1:
> for j from 1 to N do промежуточные вычисления координат траек-
тории
> t:=t+dt:
> V:=V+RUNGE_v(V,teta,t,fv):
> teta:=teta+RUNGE_teta(V,teta,t,fteta):
> x:=x+RUNGE_x_y(V,teta,fx):
> y:=y+RUNGE_x_y(V,teta,fy):
> od:
> if abs(x) < 1e-3 then x:=0: fi:
> if Ymax < y then Ymax:=y fi:
> X[i]:=x: Y[i]:=y:

```

```

> od:
> K:=i:
> ПЕЧАТЬ РЕЗУЛЬТАТА
> List:=[0,0]:
> for i from 1 to K do
> List:=List,[X[i],Y[i]]:
> od:
> printf(                               Высота полета %6.1f м. Дальность
полета %6.1f \n`,Ymax,X[K-1]):
> printf(                               ТРАЕКТОРИЯ ПОЛЕТА РА-
КЕТЫ \n`):
> printf(
+++++++ \n`):
> plot([List],thickness=3,scaling=unconstrained,style=line,axes=boxed,la-
bels=[`X`,`Y`]);
Высота полета 348.3 м. Дальность полета 1369.8
ТРАЕКТОРИЯ ПОЛЕТА РАКЕТЫ

```



Перейдем к общему определению математических моделей.

1. ОБЩЕЕ ПОНЯТИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА И ТРЕБОВАНИЯ

Предположим необходимо исследовать заданную совокупность S свойств предложенного объекта a с помощью методов математики. Для этого необходимо построить математический объект a' - систему алгебраических уравнений, задачу Коши, краевую задачу, вариационную задачу, систему соотношений, или геометрических объектов и т. д., - изучение, которого с помощью математических методов и должно дать ответы на вопросы о рассматриваемых свойствах S . В перечисленных условиях a' представляет собой *математическую модель a относительно совокупности S свойств объекта*. Так в предложенном выше примере объектом a был полет реактивного снаряда в гравитационном поле, объектом a' - задача Коши (0.6), (0.7), совокупностью S - траектория полета, максимальная дальность полета, максимальная высота полета.

Исходя из реального объекта, мы формируем интересующие нас свойства на языке той науки, к которой относится изучаемый нами объект. Иными словами строим, строим либо *физическую*, либо *механическую*, либо *биологическую*, либо *социальную*, либо *экономическую* и т. п. *модель* объекта. Такие модели мы будем называть *содержательными*. В предыдущем примере мы построили содержательную (механическую) модель полета реактивного снаряда. При рассмотрении содержательной модели рассматриваются соответствующие гипотезы или, так называемые, *постулаты модели*.

Процесс математического моделирования можно условно разбить на три этапа.

На основе содержательной модели мы осуществляем переход на язык математики и тем самым переходим к м. м.; в этом состоит первый этап работы - построение модели.

Второй этап заключается в решении полученной математической задачи. Мы выбираем тот или иной метод решения и реализуем его; сюда входит проведение всех необходимых вычислений, в том числе и на ПК.

Получив решение заданной математической задачи, нужно его осмыслить и проанализировать. Если можно сравнить с результатами, полученными в эксперименте. Разобраться в реальности полученного решения. В этом состоит третий этап - этап проверки модели на *адекватность*. На начальном этапе исследования, довольно-таки часто увиденные результаты не совпадают с уже известными свойствами исследуемого объекта, и приходится модель модифицировать, повторяя все этапы сверху вниз.

Настоящий объект может иметь несколько неэквивалентных м. м. Это в первую очередь связано с необходимостью изучения различных наборов S_1, S_2, \dots его свойств. Но даже принципиально разные м. м. рассматриваемого реального объекта могут появляться с таким же набором свойств. Таким образом, объект может быть описан с использованием *непрерывной* или *дискретной* модели, как *детерминированной*, так и *стохастической*, и т. д. Выбор типа модели, который очень важен для направления исследований, естественно, может быть вызван мо-

делируемым объектом или разумными традициями. Для сложного объекта сравнение результатов его исследований с помощью моделей разных типов может обогатить знания о нем, а также значительно повысить их надежность.

Умение правильно выбрать м.м. из уже известных, или, тем более ее построить требует больших математических и специальных знаний и соответствующих навыков.

Рассмотрим основные свойства м. м. К м. м. предъявляется требование *достаточной простоты модели* относительно изучаемой системе ее свойств. М. м. довольно проста, если современные инструменты исследования позволяют экономно провести исследование, но с разумной точностью, качественным или количественным - в зависимости от задачи - анализом изученных свойств и интерпретацией результата.

Также существенным является свойство полноты в м. м., заключающееся в том, что данная модель позволяет получить интересующий результат с использованием математических методов. Ещё одно важное требование, предъявляемое к м. м. можно назвать её *продуктивностью*. Оно состоит в том, что если речь идёт об измерениях *исходных данных*, то измерения исходных данных должны легче поддаваться измерению, чем получаемая совокупность свойств м. м.

Отметим ещё требование *устойчивости* относительно погрешности в исходных данных. Всегда надо помнить, что начальные данные известны лишь с определённой точностью и такая неопределённость не должна существенно влиять на результаты исследования.

Рассмотрим основные типы м. м. Обычно в м. м. отображаются структурные составляющие (устройство) объекта моделирования, наиболее значимые для данного исследования свойства и связи компонентов представленного объекта, такая м. м. называется *структурной*. Если модель характеризует только то, как работает объект –к примеру, как он отображает влияние внешнего воздействия - тогда она называется *функциональной*. Как известно, величины могут быть *дискретными*, т. е. принимающие не связанные друг с другом значения, допускающие произвольную нумерацию, и непрерывные все значения которых принадлежат некоторому интервалу. Аналогичным образом, содержательные и математические модели могут быть *дискретными, непрерывными* или *смешанными*. Например, рассмотренная выше м. м. является смешанной, т.к. формулировка м. м. непрерывная, а её решение может быть получено только дискретными методами.

М. м. может включать случайные компоненты - соответствующие статистическим законам. Такие модели носят название *вероятностных* или *стохастических*, в отличие от *детерминированных* моделей, которые таких компонент не содержат.

Вероятностные модели исследуются с помощью методов применяемых в теории вероятностей. При этом, довольно распространен тот факт, что вероятностные характеристики такие как дисперсии случайных величин, математические ожидания, оказываются известными с весьма не высокой точностью, т. е. Модель не удовлетворяет требованию *продуктивности*.

Например. Обозначим x - решение представленной задачи Коши

$$\frac{d x}{d t} + a(t, \omega)x = 0, \quad 0 \leq t < \infty, \quad x(0) = 1,$$

где a - случайная функция. Тогда решение рассмотренной задачи Коши $x = e^{-\int_0^t a(\tau, \omega) d\tau}$ существенно зависит от характеристик функции a . Если относительно a известно только, что $1 \leq a \leq 2$, то подставляя крайне предполагаемые значения, получим оценку решения: $e^{-2t} \leq x \leq e^{-t}$; отсюда следует, например, что $x(t, \omega) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Классификация м. м. может быть осуществлена и по другим признакам. Так например различают *линейные* и *нелинейные* модели, *статические* и *динамические* модели. Краевая задача, которая лежит в основе м. м. имеет аналитический и геометрический аспект. Если уравнения и граница области решения задачи линейны, то модель называется *линейной*. В противном случае – *нелинейной*. *Динамические* модели изучают изменение рассматриваемого объекта во времени. Промежуточное место между *статическими* и *динамическими* моделями занимают *квазистационарные*, *стационарные* и *квазистатические* модели. В *квазистатической* модели предполагается, что преобразование объекта осуществляется медленно, и при рассмотрении ситуации в каждый момент времени можно считать его *статическим*, а время рассматривать в качестве параметра. В *стационарных* моделях изучаются процессы, не зависящие от времени. Аналогично определяются и *квазистационарные* модели.

2. «ЖЕСТКИЕ» И «МЯГКИЕ» МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

2.1. Модель сражения двух армий

2.1.1. Основные теоретические сведения

Рассмотрим простейшую модель борьбы двух противников (двух армий). Впервые, такая модель была построена Ланкастером. Состояние системы будем описывать точкой (x, y) положительного квадранта Декартовой плоскости. Координаты точки (x, y) будут определять численность противостоящих армий. Допустим, что скорость изменения численности армии пропорционально численности армии противника, тогда математическая модель взаимодействия двух армий основано на решении задачи Коши

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -by \\ \frac{dy}{dt} = -ax \end{cases} \quad x(0) = x_0, y(0) = y_0. \quad (1.1)$$

Здесь a - мощность оружия армии x , а b - армии y ; x_0 и y_0 - численность армий до взаимодействия. Таким образом, предполагается, что один солдат армии x уничтожает за единицу времени a солдат из армии y (и, соответственно, каждый солдат армии y убивает b солдат армии x). Считается, что a и b - постоянные. Это жёсткая модель, которая допускает точное решение. Разделив левые и правые части уравнений (1.1) друг на друга получим

$$\frac{dx}{dy} = \frac{by}{ax}, \quad ax dx = by dy, \quad ax^2 - by^2 = C, \quad C = ax_0^2 - by_0^2. \quad (1.2)$$

Сделаем анализ полученного решения задачи Коши (1.1). Если $C = 0$, тогда взаимодействие двух армий идет по прямой

$$y = \sqrt{\frac{a}{b}}x. \quad (1.3)$$

Если $C > 0$, то $x_0 > \sqrt{\frac{b}{a}}y_0$. В этом случае взаимодействие двух армий идет по гиперболе

$$\frac{x^2}{(\sqrt{b})^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{a})^2} = \frac{C}{ab}. \quad (1.4)$$

Если $C < 0$, то $x_0 < \sqrt{\frac{b}{a}}y_0$. В этом случае взаимодействие двух армий идет по гиперболе

$$\frac{y^2}{(\sqrt{a})^2} - \frac{x^2}{(\sqrt{b})^2} = \frac{|C|}{ab}. \quad (1.5)$$

Изменение численностей армий x и y осуществляется вдоль гипербол (1.4), (1.5) которые задаются представленными уравнениями (рис. 1.1). По какой конкретно гиперболе будет осуществляться ход военных действий, зависит от

начальной точки. Графики представленных гипербол разделяются графиком прямой (1.3). Если точка отсчета находится выше прямой (случай 1 на рис. 1.1), то гипербола стремится на y . Это говорит о том, что в ходе военных действий численность армии x станет меньше и за ограниченное время дойдет до нуля. В результате армия y упобедит противника. Если же точка лежит ниже (случай 2), то победит армия x . В разделяющем состоянии, если точка окажется на прямой война закончится гибелью обеих армий, т.к. прямая стремится к нулю. Однако на это необходимо бесконечно-большое время: конфликт продолжает тлеть, когда оба противника уже обессилены.

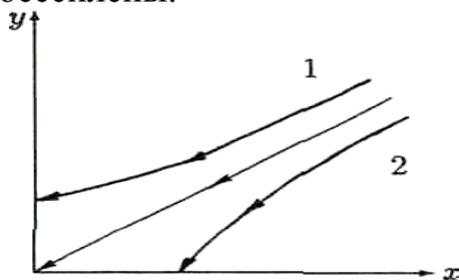


Рис. 1.1. «Жесткая» модель войны

По результатам рассмотрения данной задачи можно сформулировать следующий вывод: *для осуществления борьбы с примерно вдвое более превосходящим по счету противником необходимо в четыре раза более мощное оружие, с втрое более многочисленным - в девять раз и т. д. (на это указывают квадратные корни в уравнении прямой).*

Рассмотренная математическая модель идеализирована и ее не возможно применить её к реальной задаче, потому что она не принимает во внимание многих факторов, которые появляются в процессе ведения войны (такие как военные качества солдат, знание и умение полководцев и т. п.). В результате возникнет вопрос — как поменяется вывод, если рассматриваемая модель будет немного иной. К примеру, коэффициенты a и b зависят от x и y , и точный вид зависимости может быть неизвестным.

В результате систему уравнений (1.1) запишем в виде:

$$\begin{cases} \dot{x} = -b(x, y)y \\ \dot{y} = -a(x, y)x. \end{cases} \quad (1.6)$$

Получить решение системы уравнений (1.6) в явном виде нельзя. Однако в математике существуют разработаны методы, с помощью которых можно сделать выводы общего характера, не зная точно явного вида функций a и b . В рассмотренной ситуации говорят о мягкой модели - модели, поддающейся изменениям (например за счет выбора функций a и b).

Математическая модель, которая учитывает изменения, происходящие в изучаемом явлении, называется «мягкой» математической моделью.

Математический анализ системы уравнений (1.6) дает возможность сформулировать вывод о *структурной устойчивости* построенной модели. При этом преобразования функций a и b поменяет описывающие поведение военных действий построенные на плоскости XOY кривые, которые уже не будут являться

гиперболами с разделяющей прямой, но возникшее *изменение не изменит основного качественного вывода* об результатах военных действий.

Вывод состоит в следующем «*x* выигрывает», «*y* выигрывает» разделяются линией «две армии уничтожают друг друга за бесконечное время».

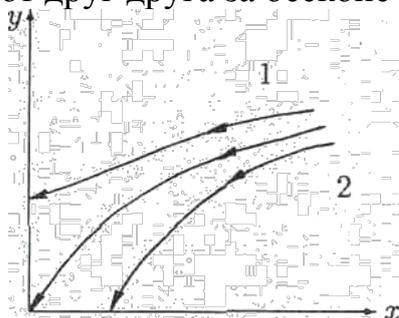


Рис. 1.2. «Мягкая» модель войны

Математики утверждают, что топологический тип системы (1.3) при рассмотрении на плоскости *XOY* не меняется при изменении функций *a* и *b*. Изменения дают лишь искривление нейтральной линии (рис. 1.2).

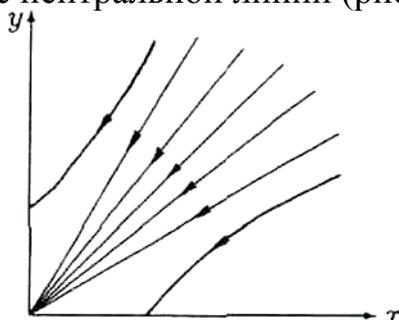


Рис. 1.3. Нереализуемая модель войны

Полученный вывод не является очевидным. Возможно, представить иную ситуацию, например, приведенную на рис. 1.3. В теории структурной устойчивости показано, что данная ситуация не имеет места, по крайней мере в случае для не слишком патологических функций *a* и *b* (например, она не получается, если представлены положительные в нуле многочлены).

В результате можно сделать вывод о *качественной применимости* «жесткой» модели сражения двух армий для примерного описания событий в целой области подобных моделей. Простейшая приведенная модель показывает полезное количественное предсказание: наклон нейтральной прямой определяется формулой $\sqrt{a}x = \sqrt{b}y$, где *a* и *b* - значения коэффициентов. Эти предсказания справедливы и для «мягких» моделей.

Принцип «если противник превышает численности вдвое, то необходимо иметь в четыре раза более мощное оружие» верен на конечном моменте взаимного уничтожения, при этом на начальном этапе военных действий число 4 нужно, возможно, уточнить, с учетом вида коэффициентов *a* и *b*.

Можно предполагать, что приведенная модель в некотором смысле объясняет неудачи Наполеона и Гитлера, а также успех Батыя и надежды мусульманских фундаменталистов.

2.1.2. Листинг программы

```
>restart:
>with(plots):
>Didits:=17:
>Dt:=0.01:
>N:=10: количество мелких шагов по времени
>dt:=evalf(Dt/N):
>t0:=10: время наблюдения за процессом
>K:=trunc(t0/Dt): количество больших шагов по времени
>X:=array(1..K):
>Y:=array(1..K):
>1. Истребление двух армий
>a:=1: мощность оружия армии x
>b:=1: мощность оружия армии y
>x0:=2: численность армии x
>y0:=4: численность армии y
> ПОДПРОГРАММЫ ФУНКЦИИ
>fx:=(y)->evalf(-b*y):
>fy:=(x)->evalf(-a*x):
> ПРОЦЕДУРЫ РУНГЕ - КУТТЫ
>RUNGE_x:=proc(y) local fo,f1,f2,f3:
>   global dt:
>   fo:=evalf(dt*fx(y)):
>   f1:=evalf(dt*fx(y+fo/2)):
>   f2:=evalf(dt*fx(y+f1/2)):
>   f3:=evalf(dt*fx(y+f2)):
>   RETURN((fo+2*f1+2*f2+f3)/6):
>end:
>RUNGE_y:=proc(x) local fo,f1,f2,f3:
>   global dt:
>   fo:=evalf(dt*fy(x)):
>   f1:=evalf(dt*fy(x+fo/2)):
>   f2:=evalf(dt*fy(x+f1/2)):
>   f3:=evalf(dt*fy(x+f2)):
>   RETURN((fo+2*f1+2*f2+f3)/6):
>end:
>
> МОДЕЛИРОВАНИЕ ЧИСЛЕННОСТИ АРМИЙ
>t:=0:
>x:=x0:
>y:=y0:
>X[1]:=x0: Y[1]:=y0:
>k:=1:
>while X[k] > 0 and Y[k] > 0 and k < K do
```

```

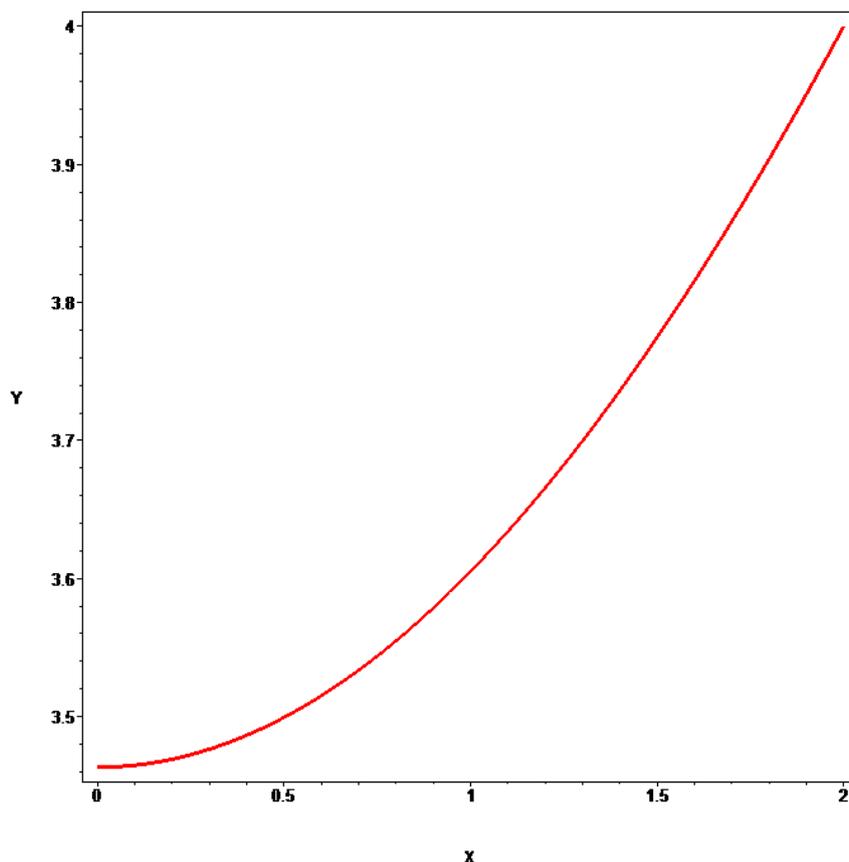
> k:=k+1:
> for n from 1 to N do
>   if i = 1 then t:=t+dt: fi:
>   x1:=RUNGE_x(y):
>   y1:=RUNGE_y(x):
>   x:=x+x1:
>   y:=y+y1:
> od:
> X[k]:=x:
> Y[k]:=y:
> od:
> K:=k:
>
> ПЕЧАТЬ РЕЗУЛЬТАТА
> List:=[x0,y0]:
> for k from 2 to K do
>   List:=List,[X[k],Y[k]]:
> od:
>
>
> printf(
СТИ АРМИЙ \n`):
> printf(
+++++++ \n`):
> g1:=plot([List]):
> display([g1,thickness=3,scaling=unconstrained,style=line,axes=boxed,la-
bels=[`X`,`Y`]);
>

```

ЭВОЛЮЦИЯ ЧИСЛЕННО-

ЭВОЛЮЦИЯ ЧИСЛЕННОСТИ АРМИЙ

+++++



>

2.2. Логистические модели

2.2.1. Основные теоретические сведения

Простейшая модель роста $\frac{dx}{dt} = kx$, $x(0) = x_0$ предложена Мальтусом может быть использована для описания численности населения планеты. Она приводит, как известно, к экспоненциальному росту населения Земли x с течением времени. Рассматриваемая «жесткая» модель применяется с некоторыми ограничениями, например, при рассмотрении науки в 1700-1950 годах измеряемому, предположим, количеством научных статей (рис. 1.4).

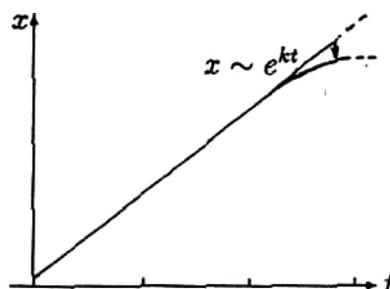


Рис. 1.4. Рост науки

В рамках предложенной модели продолжение экспоненциального роста науки привело бы к отсутствию бумаги и чернил, при этом количество ученых

достигло бы половины населения земли. Понятно, что общество не может это допустить, и, как следствие, развитие науки необходимо подавить, это мы и наблюдаем в некоторых странах; в России также идет реформирование науки.

Подобные явления насыщения возникают в любой популяции и, возможно, вскоре произойдут с человечеством, при этом население будет очень большими. При этом жёсткая Мальтусовская модель с коэффициентом роста k (постоянным числом) не может быть применима. Очевидно, при очень больших x борьба за пищу, ресурсы, гранты и т.п. приводит к тому, что k уменьшается и возникает необходимость замены жёсткой модели Мальтуса на мягкую модель

$$\frac{dx}{dt} = k(x)x, \quad x(0) = x_0 \quad (1.7)$$

с коэффициентом размножения $k(x)$ зависящим от населения. В элементарном случае возможно считать $k(x) = a - bx$, в результате получится так называемая логистическая модель (рис. 1.5):

$$\frac{dx}{dt} = ax - bx^2, \quad x(0) = x_0.$$

При этом с помощью выбора системы единиц x и t можно коэффициенты a и b преобразовать в 1.

$$\frac{dx}{dt} = x - x^2, \quad x(0) = x_0. \quad (1.8)$$

Акцентируем внимание на том, что выводы, сделанные ниже, остаются верными с точностью до числовых констант и при произвольных значениях коэффициентов a и b , даже для весьма широкого класса моделей с убывающими функциями $k(x)$. Другими словами, следующие далее выводы относятся ко всей «мягкой» модели, а не к специальной «жёсткой» логистической модели.

Найдем решение задачи Коши (1.8). Вначале отметим, что функция $f(x) = x - x^2$ стоящая в правой части дифференциального уравнения (1.8) меняет знак в точке $x = 1$. Поэтому решение задачи Коши (1.8) на интервалах $(0,1)$ и $(1,\infty)$ надо находить отдельно. Запишем дифференциальное уравнение (1.8) в виде

$$\frac{dx}{\frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2} = dt. \quad (1.9)$$

Пусть $0 < x < 1$. В этом случае $\frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 > 0$. При интегрировании дифференциального уравнения (1.9) воспользуемся табличным интегралом

$$\int_{|x| < a} \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{a+x}{a-x} + C. \quad (1.10)$$

В результате с учетом начальных условий (1.8), получим

$$\ln \frac{x}{1-x} = t + C, \quad \frac{x}{1-x} = C e^t, \quad C = \frac{x_0}{1-x_0},$$

$$x = \frac{C}{C + e^{-t}}, \quad x \rightarrow 1 \text{ при } t \rightarrow \infty.$$

Если $x > 1$, то $\frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 < 0$ и уравнение (1.9) запишем в виде

$$\frac{dx}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}} = -dt. \quad (1.11)$$

При интегрировании дифференциального уравнения (1.11) воспользуемся табличным интегралом

$$\int_{|x|>a} \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{x-a}{x+a} + C. \quad (1.12)$$

В результате с учетом начальных условий (1.8), получим

$$\ln \frac{x-1}{x} = -t + C, \quad \frac{x-1}{x} = C e^{-t}, \quad C = \frac{x_0-1}{x_0},$$

$$x = \frac{1}{1 - C e^{-t}}, \quad x \rightarrow 1 \text{ при } t \rightarrow \infty.$$

При $x = 1$ из (1.8), получим $dx = 0$, $x = x_0 = 1$.

На рис. 1.5 слева изображён график функции $k(x)x$, причём $k(x)x \geq 0$ при $0 = A \leq x \leq B = 1$. По центру показано векторное поле различные положения системы на оси x . Которое характеризует скорость изменения состояния. В точках A и B наблюдается стационарное состояние, т.е. скорость равна нулю.

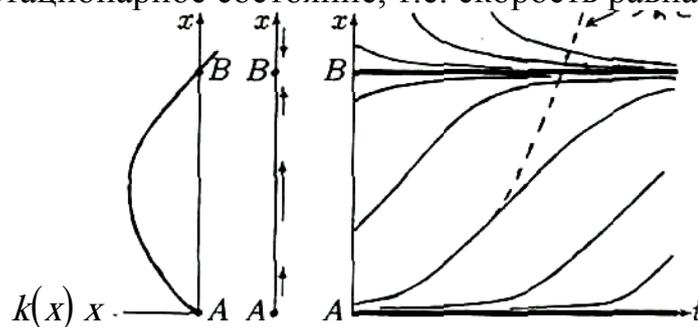


Рис. 1.5. Логистическая модель

Между точками A и B скорость положительна это говорит о том, что население увеличивается, а за точкой B скорость отрицательна (население уменьшается). Справа показаны результирующие зависимости количества населения от времени при различных начальных условиях. Логистическая модель не достаточно точно описывает многочисленные явления насыщения. Вблизи точки A , когда население еще мало, она фактически совпадает с мальтузианской моделью. Однако при достаточно больших x (при наших коэффициентах порядка $\frac{1}{2}$) мы видим резкое отличие от мальтузианского роста (на рис. 1.5 обозначенного пунктиром): вместо стремления к бесконечности население стремится к стационарному числу B . Население Земли на данный момент составляет примерно 6 миллиардов. Стационарное значение оценивается 16-20 миллиардами человек.

Логистическая модель часто используется в экологии. Например, предположим, что это количество рыб в мировом океане или озере. Выясним, как отразиться на численности рыб рыболовство с интенсивностью c :

$$\frac{dx}{dt} = x - x^2 - c, \quad x(0) = x_0. \quad (1.13)$$

Найдём решение представленной задачи Коши (1.13). Для этого разделим в нем переменные

$$\frac{dx}{\frac{1}{4} - c - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2} = dt. \quad (1.14)$$

Дифференциальное уравнение (1.12) с разделяющимися переменными является уравнением с параметром c .

Вначале рассмотрим случай когда $c < \frac{1}{4}$.

В этом случае функция, стоящая в знаменателе (1.14) меняет знак при

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - c}.$$

Обозначим $\sqrt{\frac{1}{4} - c} = b$. Если $0 < x < \frac{1}{2} - b$, то уравнение (1.14) запишем в виде

$$\frac{dx}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - b^2} = -dt.$$

Используя (1.12), получим

$$x = \frac{2b + 1 + (2b - 1)Ce^{-2bt}}{2(1 - Ce^{-2bt})}. \quad (1.15)$$

Используя начальное условие (1.13), найдем

$$C = \frac{2x_0 - 2b - 1}{2x_0 + 2b - 1}.$$

Если $\frac{1}{2} - b < x < \frac{1}{2} + b$, то запишем уравнение (1.14) в виде

$$\frac{dx}{b^2 - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2} = dt.$$

Используя (1.10), получим

$$x = \frac{(1 - 2a)e^{-2at} + (1 + 2a)C}{2(C + e^{-2at})}, \quad \text{где } C = \frac{2a + 2x_0 - 1}{2a - 2x_0 + 1}. \quad (1.16)$$

Если $x > \frac{1}{2} + b$, то решение задачи Коши (1.13) имеет вид (1.15)

В случае, когда $c > \frac{1}{4}$ имеем $x - x^2 - c = \frac{1}{4} - c - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 < 0$. Поэтому уравнение (1.14) запишем в виде

$$\frac{dx}{c - \frac{1}{4} + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2} = -dt.$$

При интегрировании этого дифференциального уравнения воспользуемся табличным интегралом

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$

В результате интегрирования, найдем

$$\frac{1}{d} \operatorname{arctg} \frac{x - \frac{1}{2}}{d} = C - t, \text{ где } C = \frac{1}{d} \operatorname{arctg} \frac{x_0 - \frac{1}{2}}{d}, \quad d = \sqrt{c - \frac{1}{4}}.$$

Если $c = \frac{1}{4}$ уравнение (1.14) запишется в виде

$$\frac{dx}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2} = -dt.$$

При $x = \frac{1}{2}$ решение задачи (1.13) есть $x = x_0 = \frac{1}{2}$.

При $x < \frac{1}{2}$ решение задачи (1.13) $x = \frac{1}{2} - \frac{1}{C+t}$, где $C = \frac{1}{\frac{1}{2} - x_0}$.

При $x > \frac{1}{2}$ решение задачи (1.13) $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{C+t}$, где $C = \frac{1}{x_0 - \frac{1}{2}}$.

В итоге получаем резкое изменение результатов при критическом значении нормы вылова c . Для нашей жёсткой модели $c = \frac{1}{4}$ является критическим значением.

Критическое значение c является максимум функции $k(x)x$. Ход изменения численности рыб x в течение времени t показан на рис. 6. Когда квота c маленькая, то преобразования (по сравнению с квотой $c = 0$) представляются в следующем.

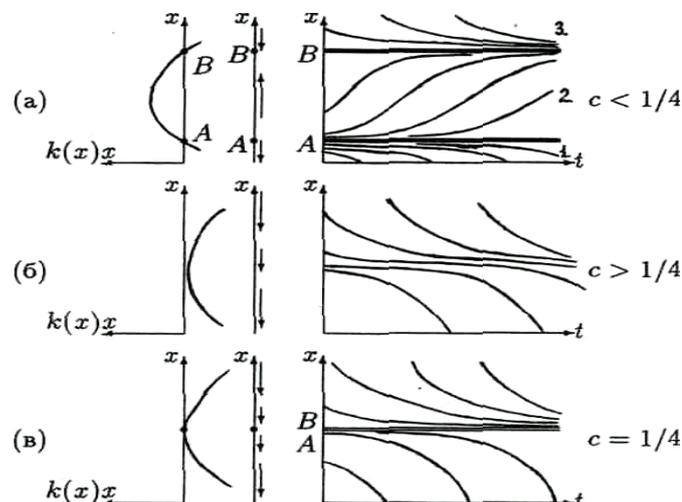


Рис. 1.6. Недолов (а), перелов (б), и оптимизация (в) рыболовства

Аналогичные явления имеют место и для мягкой модели

$$\frac{dx}{dt} = k(x)x - c.$$

Для системы существует два равновесных состояния, A и B . B устойчиво: популяция несколько меньше, по сравнению с необлавливаемой, но происходит восстановление при незначительных отклонениях x от B .

A неустойчиво: если из-за браконьерства, мора или других причин размер популяции упадет даже незначительно ниже уровня A , то в бедующем популяция (медленно, если отличие от A незначительное) будет полностью уничтожена за определенное время.

По мнению академика РАН Владимира Игоревича Арнольда, положение науки в России на сегодняшний день характеризуется примерно точкой A то есть оно еще стационарно, но квазистационарно так как небольшое изменение может легко дать толчок к необратимому уничтожению.

При масштабных критических квотах вылова популяция х истребляется за ограниченное время, какой бы большой она ни была в изначальном состоянии.

Данная модель описывает судьбу бизонов, мамонтов, многих видов китов. Экологи привели статистику показывающую, количество видов погибающих *ежедневно* под воздействием деятельности человека, и эти цифры потрясают. Рассмотренные модели описывают также банкротство концернов, фирм и даже государств. Угроза *уничтожения* в модели *появляется только тогда*, когда неустойчивое состояние A *стремится* к устойчивому состоянию B , таким образом когда x опускается приблизительно до половины начального стационарного состояния необлавливаемой популяции.

Численность населения России, по мнению академика Арнольда В.И., пока не понизилось до этого критического уровня, но, ужасающе продвигается к нему. При это состояние науки в России уже находится на уровне «перелома».

Из приведенных выше рассуждений следует, что *выбор* параметра c является определяющим фактором *управления* изменениями популяции x . Стремясь к максимальной квоте эксплуатации c , при разумном планировании предприятие не должно перешагивать через максимальный уровень (в предложенной модели $c \leq \frac{1}{4}$). Оптимизация заключается в выборе *именно критического показателя* $c = \frac{1}{4}$, при котором эксплуатируемый вид не уничтожится, но даст максимально возможный доход от эксплуатации.

На рис. 1.б показано, что будет происходить при «оптимальном» выборе, $c = \frac{1}{4}$. При любой начальной популяции $x \geq \frac{1}{2}$, с течением времени будет получен стационарный режим $A = B = \frac{1}{2}$. Это стационарное состояние является неустойчивым. Незначительное *уменьшение* x приводит к истреблению популяции за ограниченное время.

Следовательно, *оптимизация параметров плана может приводить* (и приводит во многих случаях, из которых наша модель — лишь простейший пример)

к полному уничтожению планируемой системы вследствие возникающей из-за оптимизации неустойчивости.

Наша мягкая модель, при всей своей очевидной примитивности, позволяет, однако, предъявить способ борьбы с указанным злом. Оказывается, устойчивость восстанавливается, если заменить жёсткое планирование *обратной связью*. Иными словами, решение о величине эксплуатации (квоты вылова, налогового пресса и т.д.) следует принимать не директивно ($c = const$), а в зависимости от достигнутого состояния системы:

$$c = kx,$$

где параметр x («дифференциальная квота») подлежит выбору. В этом случае модель принимает вид (рис. 1.7)

$$\dot{x} = x - x^2 - kx. \quad (1.17)$$

При $k < 1$ с течением времени устанавливается стационарное состояние B , которое устойчиво. Средний многолетний «доход» $c = kx$ в этом состоянии *оптимален*, когда прямая $y = kx$ проходит через вершину параболы $y = x - x^2$, т.е.

при $k = \frac{1}{2}$.

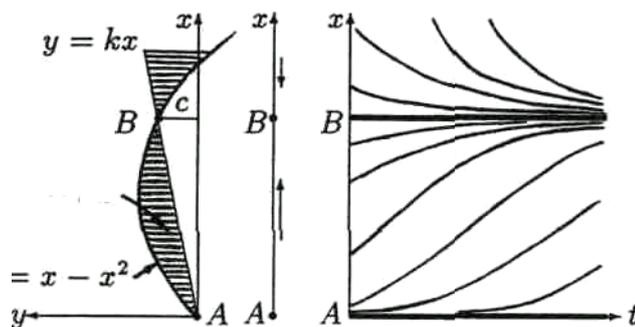


Рис. 1.7. Устойчивая система с обратной связью

При этом выборе дифференциальной квоты k средний «доход» $c = \frac{1}{4}$ достигает максимального возможного в надшей системе значения. Но, в отличие от жёстко планируемой системы, система с обратной связью устойчива и при оптимальном значении коэффициента k (небольшое случайное уменьшение по отношению к стационарному уровню $x = B$ приводит к *автоматическому восстановлению* стационарного уровня силами самой системы).

Более того, небольшое отклонение коэффициента k от оптимального значения $k = \frac{1}{2}$ приводит не к самоуничтожению системы (как это было при небольшом отклонении от оптимального жёсткого плана c), а лишь к *небольшому уменьшению* «дохода».

Итак, *введение обратной связи (т.е. зависимости принимаемых решений от реального состояния дел, а не только от планов) стабилизирует систему, которая без обратной связи разрушилась бы при оптимизации параметров.*

Все сказанное выше останется справедливым и для мягкой модели (с соответствующим пересчётом коэффициентов). Следует подчеркнуть, что именно

эта не зависимость от деталей жёсткой модели (которые, как правило, не слишком хорошо известны) делает выводы мягкого моделирования полезными.

Попытки заменить мягкое моделирование жёстким обычно приводят к иерархии все более сложных и громоздких математических построений, исследование которых доставляет прекрасный материал для большого количества диссертаций, но реальная ценность которых зачастую не превосходит в сущности простых (хотя без математики и не очевидных) выводов, основанных на анализе именно простейших моделей, подобных описанной выше.

2.2.2. Листинг программы

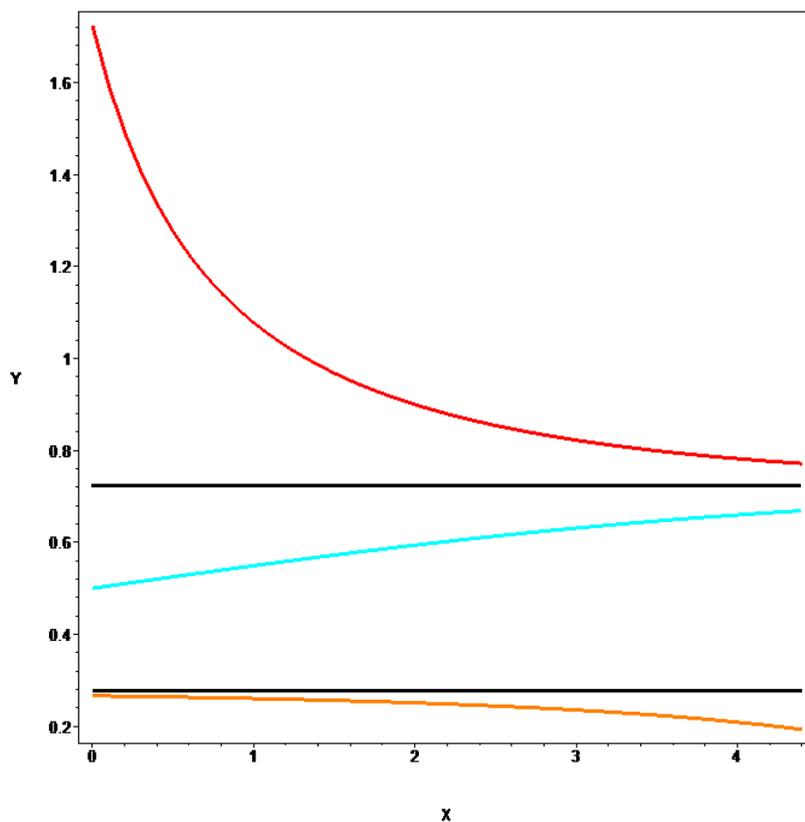
2.2.2.1. Логистическая модель рыболовства с жестким планированием вылова

```
>
>restart:
>with(plots):
>Didits:=25:
>Dt:=0.1:
>N:=45: K:=31:
>dt:=evalf(Dt/K):
>q:=1:
>if q = 1 then c:=evalf(1/5): c < 0.25
>    a:=sqrt(0.25-c):
>    A:=0.5+a:
>    B:=0.5-a:
>    xo:=A+1:
>    yo:=evalf((A+B)/2):
>    zo:=evalf(B-0.01):
> elif q = 2 then c:=evalf(1/2): c > 0.25
>    A:=0:
>    B:=0:
>    xo:=6:
>    yo:=4:
>    zo:=2.5:
> elif q = 3 then c:=evalf(1/4): c = 0.25
>    A:=0.5: B:=A:
>    xo:=A+2.5:
>    yo:=A-0.15:
>    zo:=A+1:
>fi:
>f:=(x)->evalf(x-x^2-c):
>
> ПРОЦЕДУРА РУНГЕ-КУТТА
>RUNGE:=proc(x) local fo,f1,f2,f3:
```

```

> fo:=evalf(dt*f(x)):
> f1:=evalf(dt*f(x+fo/2)):
> f2:=evalf(dt*f(x+f1/2)):
> f3:=evalf(dt*f(x+f2)):
> RETURN(evalf((fo+2*f1+2*f2+f3)/6)):
>end:
>ОСНОВНОЙ МОДУЛЬ
>X[1]:=xo: Y[1]:=yo: Z[1]:=zo: T[1]:=0:
>Xa[1]:=A: Ya[1]:=B:
>t:=0:
>x:=X[1]: y:=Y[1]: z:=Z[1]:
>for i from 2 to N do
> for j from 1 to K do
> t:=t+dt:
> x:=x+RUNGE(x):
> y:=y+RUNGE(y):
> z:=z+RUNGE(z): if z <= 0 then z:=0: fi:
> od:
> X[i] :=x: Y[i]:=y: Z[i]:=z: T[i]:=t:
> Xa[i]:=A: Ya[i]:=B:
>od:
>ГРАФИКА
>List1:=[T[1],X[1]]:
>List2:=[T[1],Y[1]]:
>List3:=[T[1],Z[1]]:
>List4:=[T[1],Xa[1]]:
>List5:=[T[1],Ya[1]]:
>for n from 2 to N do
> List1:=List1,[T[n],X[n]]:
> List2:=List2,[T[n],Y[n]]:
> List3:=List3,[T[n],Z[n]]:
> List4:=List4,[T[n],Xa[n]]:
> List5:=List5,[T[n],Ya[n]]:
>od:
>g1:=plot([List1],color=red):
>g2:=plot([List2],color=cyan):
>g3:=plot([List3],color=coral):
>g4:=plot([List4],color=black):
>g5:=plot([List5],color=black):
>display([g1,g2,g3,g4,g5],thickness=3,scaling=uncon-
strained,style=line,axes=boxed,labels=[`X`, `Y`]);
>

```



2.2.2.2. Логистическая модель рыболовства с обратной связью

```

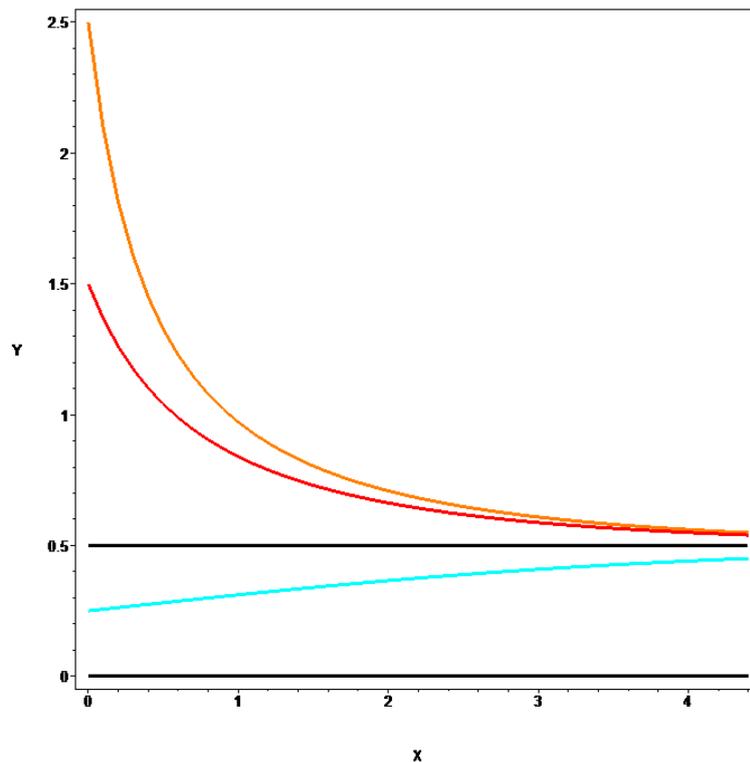
>
>restart:
>with(plots):
>Didits:=25:
>Dt:=0.1:
>N:=45: K:=31:
>dt:=evalf(Dt/K):
>k:=0.5:
>A:=0:
>B:=0.5:
>x0:=B+1:
>y0:=evalf((A+B)/2):
>z0:=B+2:
>c:=(x)->k*x:
>f:=(x)->evalf(x-x^2-c(x)):
>
> ПРОЦЕДУРА РУНГЕ-КУТТА
>RUNGE:=proc(x) local fo,f1,f2,f3:
> fo:=evalf(dt*f(x)):
> f1:=evalf(dt*f(x+fo/2)):
> f2:=evalf(dt*f(x+f1/2)):
> f3:=evalf(dt*f(x+f2)):
> RETURN(evalf((fo+2*f1+2*f2+f3)/6)):
>end:

```

```

>ОСНОВНОЙ МОДУЛЬ
>X[1]:=xo: Y[1]:=yo: Z[1]:=zo: T[1]:=0:
>Xa[1]:=A: Ya[1]:=B:
>t:=0:
>x:=X[1]: y:=Y[1]: z:=Z[1]:
>for i from 2 to N do
> for j from 1 to K do
> t:=t+dt:
> x:=x+RUNGE(x):
> y:=y+RUNGE(y):
> z:=z+RUNGE(z): if z <= 0 then z:=0: fi:
> od:
> X[i] :=x: Y[i]:=y: Z[i]:=z: T[i]:=t:
> Xa[i]:=A: Ya[i]:=B:
>od:
>ГРАФИКА
>List1:=[T[1],X[1]]:
>List2:=[T[1],Y[1]]:
>List3:=[T[1],Z[1]]:
>List4:=[T[1],Xa[1]]:
>List5:=[T[1],Ya[1]]:
>for n from 2 to N do
> List1:=List1,[T[n],X[n]]:
> List2:=List2,[T[n],Y[n]]:
> List3:=List3,[T[n],Z[n]]:
> List4:=List4,[T[n],Xa[n]]:
> List5:=List5,[T[n],Ya[n]]:
>od:
>g1:=plot([List1],color=red):
>g2:=plot([List2],color=cyan):
>g3:=plot([List3],color=coral):
>g4:=plot([List4],color=black):
>g5:=plot([List5],color=black):
>display([g1,g2,g3,g4,g5],thickness=3,scaling=uncon-
strained,style=line,axes=boxed,labels=[`X`, `Y`]);
>

```



>

2.3. Модель типа хищник – жертва

2.3.1. Основные теоретические сведения

Рассмотрим динамику популяции двух видов, взаимодействующих между собой по типу хищник – жертва. При этом будем предполагать, что жертва может найти достаточно пищи для питания, но при каждой встрече с хищником последние убивает жертву. Примеры таких межвидовых взаимоотношений дают зайцы и волки; паразиты и некоторые организмы, на которых они паразитируют. Исследуем изменение во времени популяций хищников и жертв. Обозначим через $x(t)$ и $y(t)$ количество жертв и хищников в момент времени t соответственно. Чтобы получить математические уравнения, которые приближенно описывают динамику популяций, сделаем ряд упрощений. Во - первых, допустим, что норма рождаемости жертв x_p и норма естественной смертности (т. е. без учета уничтожения хищниками) x_c являются константами, причем $x_p > x_c$. Тогда в отсутствие хищников популяция жертв будет расти со скоростью $(x_p - x_c) x$. Во - вторых, предположим, что число случаев, когда хищник убивает жертву, зависит от вероятности их встречи и, следовательно, пропорционально произведению $x y$. Объединяя эти два предположения, получаем, что популяция жертв подчиняется обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d x}{d t} = \alpha x - \beta x y ,$$

где $\alpha = x_p - x_c > 0$, а $\beta > 0$.

Для вывода уравнения, описывающего динамику популяции хищников, предположим, что при отсутствии жертв число хищников по естественным причинам убывает. Это задается членом $-\gamma y$. В тоже время в результате встреч с жертвами число хищников увеличивается. Поэтому

$$\frac{d y}{d t} = -\gamma y + \delta x y.$$

Здесь $\gamma > 0$ и $\delta > 0$. Таким образом, мы приходим к нелинейной системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{d x}{d t} = \alpha x - \beta x y, \\ \frac{d y}{d t} = -\gamma y + \delta x y. \end{cases} \quad (1.18)$$

Эти уравнения впервые были получены в 1925 г. и известны как *уравнения Лотки – Вольтерра*. Дополняем систему уравнений (1.18) двумя начальными условиями

$$x(0) = x_o, \quad y(0) = y_o. \quad (1.19)$$

В силу нелинейности системы уравнений (1.18) не известно никакого аналитического ее решения. Поэтому обратимся к приближенному методу решения задачи Коши (1.18) - (1.19) основанному на теории возмущений. При этом подходе непрерывная задача заменяется близкой к ней, но более простой непрерывной задачей, решение которой может быть найдено аналитически.

Первый шаг состоит в определении *стационарных* состояний (x_s, y_s) , называемых *точками равновесия*. В нашем случае стационарные состояния определяются формулами

$$\begin{aligned} \left. \frac{d x}{d t} \right|_{(x_s, y_s)} &= x_s (\alpha - \beta y_s) = 0, \\ \left. \frac{d y}{d t} \right|_{(x_s, y_s)} &= y_s (-\gamma + \delta x_s) = 0. \end{aligned}$$

Отсюда

$$x = x_s = \frac{\gamma}{\delta}, \quad y = y_s = \frac{\alpha}{\beta}. \quad (1.20)$$

Вспомним, как разложить функцию $z = f(x, y)$ в двойной ряд Тейлора в окрестности точки (x_o, y_o)

$$f(x, y) = f(x_o, y_o) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_o, y_o)} (x - x_o) + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(x_o, y_o)} (y - y_o) + \dots$$

Разлагая правые части (1.18) в ряд Тейлора в окрестности точки (x_s, y_s) , получим

$$x(\alpha - \beta y) = -\beta x_s (y - y_s) + \dots, \quad y(-\gamma + \delta x) = \delta y_s (x - x_s) + \dots$$

Следовательно, в окрестности стационарной точки можем аппроксимировать исходные уравнения (1.18) линейными

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\beta x_s (y - y_s), \\ \frac{dy}{dt} = \delta y_s (x - x_s). \end{cases} \quad (1.21)$$

Разделив правые и левые части уравнений системы (1.21) друг на друга, найдем

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{\beta x_s (y - y_s)}{\delta y_s (x - x_s)} \quad \text{или} \quad \frac{x - x_s}{\beta x_s} dx = -\frac{y - y_s}{\delta y_s} dy.$$

Интегрируя выше записанное выражение, получим

$$\frac{(x - x_s)^2}{\beta x_s} + \frac{(y - y_s)^2}{\delta y_s} = C. \quad (1.22)$$

C - постоянная, определяемая начальными условиями. Полученное уравнение (1.22) является уравнением эллипса с центром в точке (x_s, y_s) .

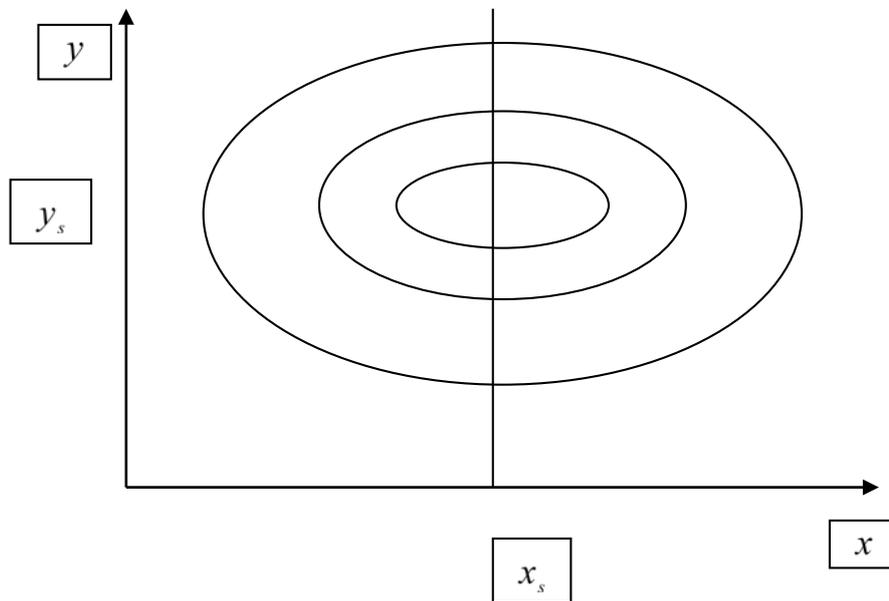


Рис. 1.8. Семейство подобных эллипсов

На рисунке 1.8. показано семейство подобных эллипсов с центром (x_s, y_s) , причем направление возрастания времени соответствует обходу эллипсов против часовой стрелки. Видно, что развитие популяций носит циклический характер: через определенное время популяции возвращаются к первоначальному уровню. При уменьшении численности жертв популяция хищников также уменьшается, поэтому шансы жертв на выживание возрастают. Поведение популяции хищников все время следует за изменением популяции жертв, и цикл повторяется.

Поскольку уравнения (1.18) аппроксимируются уравнениями (1.21), можно ожидать, что решения системы уравнений (1.18) будут близкими к эллипсам. Это действительно подтверждается результатами численных расчетов.

Для численных расчетов на лабораторных работах используйте следующие значения параметров: $\alpha = 0.25$, $\beta = 0.01$, $\gamma = 1.00$, $\delta = 0.01$. Начальные условия нужно выбрать такими: $x(0) = 80$, $y(0) = 30$.

2.3.2. Листинг программы

```
>Лабораторная работа № 3 " Жесткая модель Хищник Жертва"  
>  
>restart:  
>with(plots):  
>Didits:=25:  
>Dt:=0.1:  
>N:=130: K:=10:  
>dt:=evalf(Dt/K):  
>alfa:=0.25:  
>beta:=0.01:  
>gama:=1.00:  
>delta:=0.01:  
>xo:=80:  
>yo:=30:  
>  
                  ПОДПРОГРАММЫ ФУНКЦИИ  
>fx:=(x,y)->evalf( alfa*x-beta*x*y):  
>fy:=(x,y)->evalf(-gama*y+delta*x*y):  
>  
                  ПРОЦЕДУРЫ  
>RUNGE_x:=proc(x,y) local fo,f1,f2,f3: global dt:  
> fo:=evalf(dt*fx(x,y)):  
> f1:=evalf(dt*fx(x+fo/2,y)):  
> f2:=evalf(dt*fx(x+f1/2,y)):  
> f3:=evalf(dt*fx(x+f2,y)):  
> RETURN(evalf((fo+2*f1+2*f2+f3)/6)):  
>end:  
>RUNGE_y:=proc(x,y) local fo,f1,f2,f3: global dt:  
> fo:=evalf(dt*fy(x,y)):  
> f1:=evalf(dt*fy(x,y+fo/2)):  
> f2:=evalf(dt*fy(x,y+f1/2)):  
> f3:=evalf(dt*fy(x,y+f2)):  
> RETURN(evalf((fo+2*f1+2*f2+f3)/6)):  
>end:  
>  
>X[1]:=xo: Y[1]:=yo:  
>t:=0:  
>x:=xo: y:=yo:  
>for n from 1 to N do  
> for k from 1 to K do  
> t:=t+dt:  
> x:=x+RUNGE_x(x,y):  
> y:=y+RUNGE_y(x,y):  
> od:
```

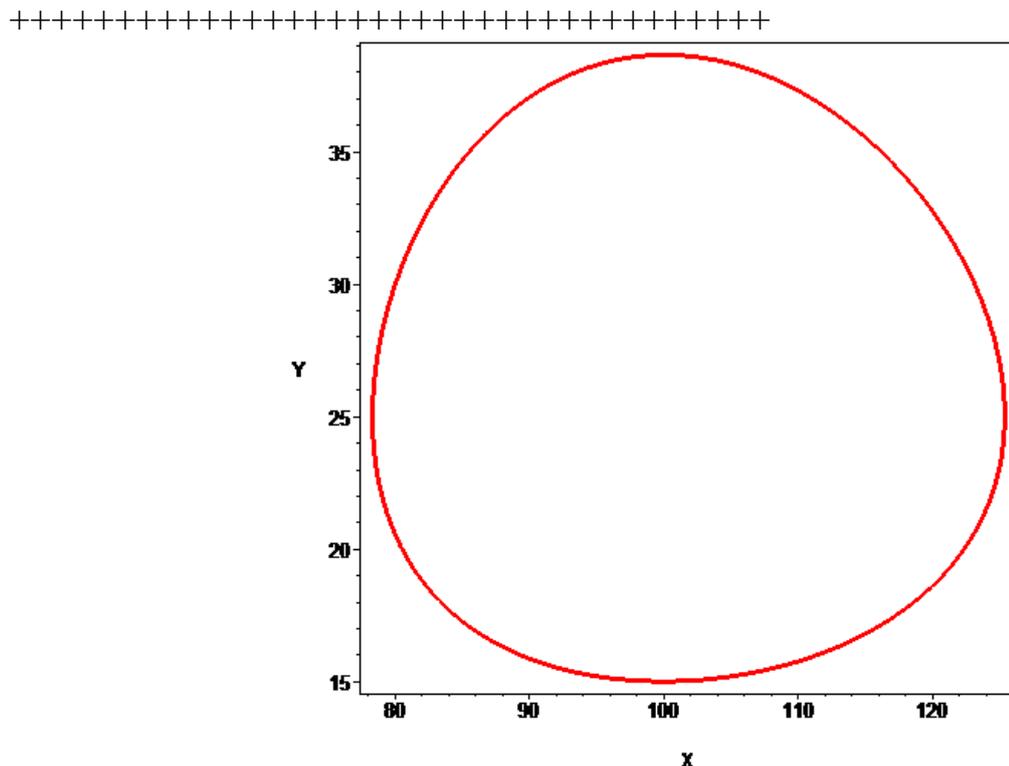
```

> X[n]:=x: Y[n]:=y:
>od:
>
>List:=[x0,y0]:
>for n from 2 to N do
> List:=List,[X[n],Y[n]]:
>od:
>g:=plot([List]):
>printf(
популяций\n`):
>printf(
+++++++ \n`):
>display([g],thickness=3,scaling=unconstrained,style=line,axes=boxed,la-
bels=[`X`,`Y`]);
>

```

Динамика

Динамика популяций



2.4. Жесткие модели как путь к ошибочным предсказаниям

2.4.1. Основные теоретические сведения

Важно, чтобы простейшая модель была структурно устойчивой, т.е. чтобы выводы непрерывно зависели от параметров и функций, описывающих модель. Логистические модели, которые мы рассмотрели выше, обладают свойством структурной устойчивости. Пример модели, не обладающей этим свойством - знаменитая модель Лотка - Вольтерра борьбы за существование.

При малом изменении модели (1.18) к правым частям добавляются малые члены (учитывающие, например, конкуренцию жертв за пищу и хищников за жертв)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy + \varepsilon f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = -\gamma x + \delta xy + \varepsilon g(x, y), \quad \varepsilon \ll 1. \end{cases} \quad (1.23)$$

В результате вывод о периодичности (возвращении системы в исходное состояние), справедливый для жёсткой системы Лотка-Вольтерра, теряет силу. В зависимости от вида малых поправок f и g возможны, например, сценарии 1-3 рис. 1.9 (которые уже структурно устойчивы).

В случае 1 равновесное состояние A устойчиво. При любых других начальных условиях через большое время устанавливается именно оно.

В случае 2 система «идет в разнос». Стационарное состояние неустойчиво. Эволюция приводит то к резкому увеличению числа бандитов, то к их почти полному вымиранию (вследствие того, что они настолько ограбили трудящихся, что взять уже нечего). Такая система, в конце концов, попадает в область столь больших или столь малых значений x и y , что модель перестает быть применимой: происходит изменение законов эволюции, т.е. революция.

В случае 3 в системе с неустойчивым стационарным состоянием A устанавливается с течением времени периодический режим C , (в котором, скажем, радикалы, и консерваторы периодически сменяют друг друга). В отличие от исходной жёсткой модели Лотка - Вольтерра, в этой модели установившийся периодический режим не зависит от начального условия. Первоначально незначительное отклонение от стационарного состояния A приводит не к малым колебаниям около A , как в модели

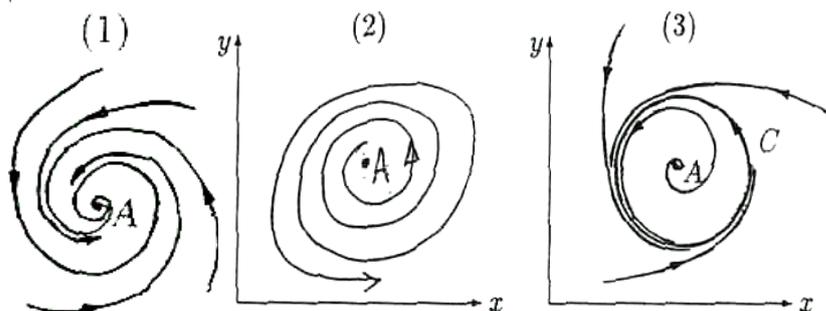


Рис. 1.9. Мягкая структурно-устойчивая модель борьбы за существование

Лотка - Вольтерра, а к колебаниям вполне определенной (и независимой от малости отклонения) амплитуды. Возможны и другие структурно-устойчивые сценарии (например, с несколькими периодическими режимами).

Вывод: *жёсткую модель всегда надлежит исследовать на структурную устойчивость полученных при её изучении результатов по отношению к малым изменениям модели (делающим ее мягкой).*

В случае модели Лотка - Вольтерра — для суждения о том, *какой* же из сценариев 1-3 (или иных возможных) реализуется в данной системе, совершенно необходима дополнительная информация о системе (о виде малых поправок f и g в нашей формуле). Математическая теория мягких моделей указывает, какую именно информацию для этого нужно иметь. Без этой информации жёсткая модель может привести к качественно ошибочным предсказаниям. Доверять выводам, сделанным на основании жёсткой модели, можно, *лишь* тогда, когда они *подтверждаются*, исследованием их структурной устойчивости.

2.4.2. Листинг программы

```

>Лабораторная работа № 4 "Мягкая модель Хищник Жертва"
>
>restart:
>with(plots):
>Didits:=25:
>Dt:=0.1:
>N:=600: K:=10:
>dt:=evalf(Dt/K):
>alfa:=0.25:;
>beta:=0.01:
>gama:=1.00:
>delta:=0.01:
>xo:=80:
>yo:=30:
>q:=1:
>ifq = 1 theneps:=0.1: Равновесное состояние устойчивое.
>      F:=(x,y) ->evalf(x+y):
>      G:=(x,y) ->evalf(x+y):
>elifq = 2 theneps:=0.01: Система идет в разнос. Стационарное состоя-
ние неустойчиво.
>F:=(x,y) ->evalf(x+y):
>      G:=(x,y) ->evalf(x+y):
>elifq = 3 theneps:=0.1: Неустойчивое стационарное состояние с перио-
дическим режимом.
>      F:=(x,y) ->evalf(sin(x*y)):
>      G:=(x,y) ->evalf(cos(x*y)):
>fi:
>fx:=(x,y)->evalf( alfa*x-beta*x*y +eps*F(x,y)):
>fy:=(x,y)->evalf(-gama*y+delta*x*y+eps*G(x,y)):
>      ПРОЦЕДУРЫ
>RUNGE_x:=proc(x,y) local fo,f1,f2,f3: global dt:
> fo:=evalf(dt*fx(x,y)):
> f1:=evalf(dt*fx(x+fo/2,y)):

```

```

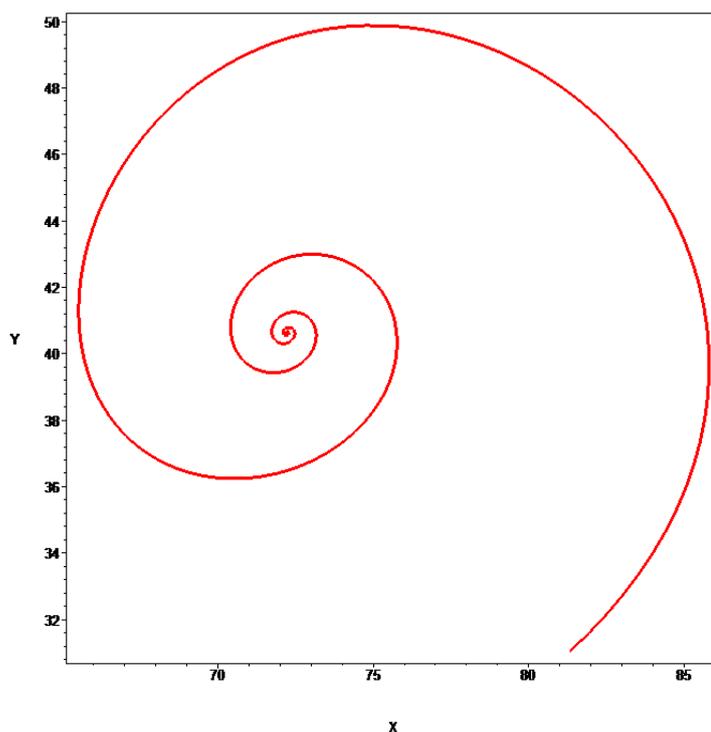
> f2:=evalf(dt*fx(x+f1/2,y)):
> f3:=evalf(dt*fx(x+f2,y)):
> RETURN(evalf((fo+2*f1+2*f2+f3)/6)):
>end:
>RUNGE_y:=proc(x,y) local fo,f1,f2,f3: global dt:
> fo:=evalf(dt*fy(x,y)):
> f1:=evalf(dt*fy(x,y+fo/2)):
> f2:=evalf(dt*fy(x,y+f1/2)):
> f3:=evalf(dt*fy(x,y+f2)):
> RETURN(evalf((fo+2*f1+2*f2+f3)/6)):
>end:
>
>X[1]:=x0: Y[1]:=y0:
>t:=0:
>x:=X[1]: y:=Y[1]:
>for n from 1 to N do
> for k from 1 to K do
> t:=t+dt:
> x:=x+RUNGE_x(x,y):
> y:=y+RUNGE_y(x,y):
> od:
> X[n]:=x: Y[n]:=y:
>od:
>
>List:=[x0,y0]:
>for n from 2 to N do
> List:=List,[X[n],Y[n]]:
>od:
>g:=plot([List]):
>printf(
популяций \n`):
>printf(
+++++++ \n`):
>display([g],thickness=3,scaling=unconstrained,style=line,axes=boxed,la-
bels=[`X`,`Y`]);
>
>

```

Динамика

Динамика популяций

+++++



2.5. Опасность многоступенчатого управления

Явление, описываемое в этом разделе, хорошо известно в теории управления техническими системами. Пусть производство какого-либо продукта x , управляется некоторым руководителем, принимающим решение о скорости производства:

$$\frac{dx}{dt} = y.$$

В свою очередь, поведение руководителя, y , управляется руководителем второго ранга, принимающим решение о том, как нужно менять скорость производства:

$$\frac{dy}{dt} = z.$$

В свою очередь, поведение руководителя второго ранга, z , управляется руководителем третьего ранга, и т.д., вплоть до генерального руководителя (ранга n). Генеральный руководитель в нашей модели реализует *обратную связь*: его решение основывается не на желании выполнить приказ начальства (как у руководителей предыдущих рангов), а на интересах *дела*. Например, он может желать достичь уровня X величины x и будет влиять на руководителя предыдущего ранга в положительную сторону, если уровень X не достигнут, и в отрицательную - если он превзойден.

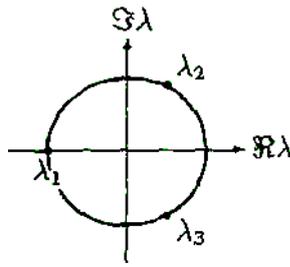


Рис. 10. Неустойчивость многоступенчатого управления

Например, для $n=3$ простейшая модель этого рода имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = z \\ \dot{z} = -k(x - X), \quad k > 0. \end{cases} \quad (1.24)$$

Эту систему можно переписать в виде линейного дифференциального уравнения порядка $n=3$:

$$x^{(n)} = -k(x - X). \quad (1.25)$$

Решение дифференциального уравнения (1.25) легко находится в явном виде. Найдем точку стационарного состояния системы (1.24) ($x = X, y = z = \dots = 0$). Разложим правую часть дифференциального уравнения (1.25) в ряд Тейлора в окрестности стационарной точки, тогда получим

$$x^{(n)} = -k x.$$

Полученное уравнение является дифференциальным уравнением Эйлера. Его решения имеют вид $e^{\lambda t}$. Коэффициенты λ являются корнями характеристического уравнения

$$\lambda^n = -k. \quad (1.26)$$

Устойчивость желаемого стационарного состояния ($x = X, y = z = \dots = 0$) определяется тем, отрицательны ли вещественные части корней λ характеристического уравнения (1.26). Эти корни - комплексные числа, изображенные на рис. 10. Корни образуют на плоскости комплексного переменного λ вершины правильного n -угольника. Если $n \geq 3$, некоторые вершины обязательно лежат в (неустойчивой) правой полуплоскости ($\text{Re } \lambda > 0$). При $n=1$ корень $\lambda = -k$ лежит в устойчивой полуплоскости, а при $n=2$ корни $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{k}$ лежат на границе устойчивости.

Вывод. Многоступенчатое управление, описываемое нашей моделью при $n \geq 3$, неустойчиво. Двухступенчатое управление приводит к периодическим колебаниям, но не вызывает катастрофического нарастания колебаний, происходящего при трех- и более ступенчатом управлении. Настоящую устойчивость обеспечивает только одноступенчатое управление, при котором управляющее лицо более заинтересовано в интересах дела, чем в поощрении со стороны начальства.

Эти выводы, сделанные выше на основании анализа простейшей жёсткой модели, на самом деле выдерживают проверку на структурную устойчивость, исключая лишь случай $n=2$: двухступенчатое управление может оказаться как устойчивым, так и неустойчивым, в зависимости от деталей организации дела,

которыми мы выше пренебрегли при составлении нашей самой простой модели. Длительное и, по-видимому, устойчивое функционирование системы многоступенчатого управления в СССР объяснялось, вероятно, неисполнением директивных указаний и существованием «теневой» системы заинтересовывания управляющих различных рангов в интересах дела. Без такой реальной заинтересованности (которая в современных условиях уже не обязательно обеспечивается коррупцией) многоступенчатое управление всегда ведёт к разрухе.

К счастью, необходимость в независимости Центробанка уже хорошо понята, но многоступенчатое («административное») управление сохраняется во многих других случаях.

2.6. Статистика первых цифр степеней двойки и предел мира

Первая цифра числа 2^n бывает единицей примерно в 6 раз чаще, чем девяткой. Так же распределены первые цифры населений и площадей стран мира. По мнению Академика РАН Владимира Игоревича Арнольда первые цифры, скажем, численностей или капиталов компаний подчиняются тому же распределению. Последовательность первых цифр первых чисел 2^n ($n = 0, 1, 2, \dots$):

1, 2, 4, 8, 1, 3, 6, 1, 2, 5, 1, ...

содержит очень много единиц. Можно проверить, продолжив вычисление, что единицы составляют асимптотически около 30% членов этой последовательности. Этот результат следует из теоремы Г. Вейля (доказанной около ста лет назад), согласно которой последовательность дробных долей $\{nx\}$ чисел nx , где x иррационально, равномерно распределена на отрезке от 0 до 1. (Дробная доля числа a - это разность $\{a\} = a - [a]$ между a и наибольшим целым числом $[a]$, не превосходящим a).

Теорема Вейля означает, что если точка прыгает по окружности длины 1 шагами, несоизмеримыми с её длиной (рис. 11), то доля времени, проводимого прыгающей точкой в каждой дуге, пропорциональна длине дуги.

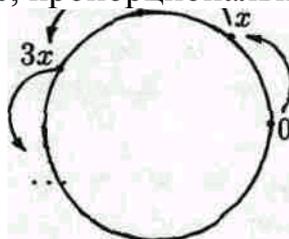


Рис. 11. К теореме Вейля

Первая цифра i числа определяется тем, в какой из отрезков между точками $\lg i$ и $\lg(i+1)$ попадает дробная часть (мантисса) его логарифма (здесь и далее логарифмы - десятичные).

Поскольку $\lg 2^n = n \lg 2$, а число $x = \lg 2$ иррационально, теорема Вейля доставляет равномерное распределение точек $\{\lg 2^n\}$ на отрезке от 0 до 1. Следовательно, доля чисел 2^n , имеющих первой цифрой десятичного разложения i , составляет

длину p_i отрезка от $\lg i$ до $\lg(i+1)$. Мы получаем таким образом следующую статистику первых цифр чисел 2^n (в процентах):

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$100 p_i$	30	17	12	10	8	7	6	5	5

Например, доля единиц составляет $p_1 = \lg 2 \approx 0.30103\dots$, что примерно в 6 раз больше доли девяток. Такое же распределение имеют первые цифры членов любой геометрической прогрессии (например 3^n). Исключение составляют, конечно, прогрессии $10^n, (\sqrt{10})^n, \dots$ и вообще прогрессии со знаменателями 10^q , где p и q целые.

Лет двадцать назад Н. Н. Константинов обратил внимание на то, что первые цифры население стран мира подчиняются тому же странному распределению: единиц примерно вшестеро больше, чем девяток. Вот объяснение этого явления. Рассмотрим последовательность, образованную численностями населения фиксированной страны в последовательные годы. Согласно теории Мальтуса, эти числа образуют геометрическую прогрессию. Согласно теореме Вейля, первые цифры распределены так же как первые цифры степеней двойки. Перейдем теперь к статистике населения разных стран в *один* и тот же год. Согласно «эргодическому принципу» временные средние можно заметить пространственными: статистика первых цифр должна оказаться такой же, как для одной страны.

Эргодический принцип - то же самое соображение, согласно которому для исследования эволюции дерева в лесу нет необходимости ждать, когда оно вырастет из семени взрослого и умрёт, а можно просто посмотреть на деревья разных возрастов. Здесь мы применили этот принцип в обратную сторону, вычисляя статистику по странам на основании знаний об эволюции одной страны.

Для контроля сравнивались числа страниц в книгах на полке в библиотеке, длины рек и высоты гор. Во всех этих случаях доли единиц и доли девяток среди первых цифр полученных чисел оказались близкими. Книги, горы и реки не растут в геометрической прогрессии, теория Мальтуса к ним не применима. Поэтому различие статистик первых цифр в числах, выражающих численности населения и, скажем, длины рек, служат своеобразным подтверждением формулы Мальтуса (согласно которой население либо растет в геометрической прогрессии, либо убывает, как мы это сейчас наблюдаем в России).

Однако лет десять назад М. Б. Севрюк обнаружил, что не только населения, но и площади стран мира подчиняются такому, же странному закону распределения первых цифр, как степени двойки. Это распределение может показаться менее странным, если заметить, что это – единственное распределение, не зависящее от того, в каких единицах измеряется площадь (будь – то квадратные километры, квадратные мили, квадратные фунты, квадратные дюймы и т. д.). К площадям теория Мальтуса, по-видимому, неприменима, так что возникает вопрос - как объяснить это поведение площадей:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$100 p_i$	29	21	10	11	6	6	8	3	6

Оказывается, целый ряд моделей передела мира приводит именно к такому распределению. Простейшая модель (для которой установление указанного распределения - теорема) такова: за единицу времени страна с вероятностью 50% *делится*, пополам, а с вероятностью 50% *объединяется* с другой страной такой же площади.

Эта жёсткая модель допускает точное математическое исследование, показывающее, что доля времени, в течение которого первая цифра площади страны будет единицей (соответственно i) составляет $\lg 2 \approx 0,3\dots$ (соответственно, $\lg(i+1) - \lg i$).

Компьютерные эксперименты (проведенные М. В. Хесиной в Торонто и Ф. Аикарди в Триесте летом 1997 года) показывают, что такое же распределение устанавливается в большом числе других моделей. Например, можно предположить, что за единицу времени любая из стран (с площадями x_k) с вероятностью 1/2 объединяется со случайно выбранной другой (образуя страну площади $x_k + x_i$), а с вероятностью половина делится на две равные части.

Начиная с сотни стран площадей, скажем, $x_k = k$, можно уже через сотню шагов получить хорошее приближение к нашему стандартному распределению.

Деление на равные части можно заменить делением на части площадей $p x_k$ и $(1-p)x_k$ (Квебек, Украина, ...), вероятности объединения и деления можно сделать различными - результаты численного эксперимента малочувствительны к этим изменениям модели. Можно даже ввести в рассмотрение географическое положение стран, разрешив объединение лишь с соседями (пренебрегая существованием в своё время Восточной Пруссии, а ныне — Калининградской области). Численные эксперименты приводят к тому же распределению (будем ли мы моделировать географию земного шара окружностью, или сферой, отрезком или прямоугольником).

Таким образом, наше *распределение* является, по-видимому, *свойством мягкой* модели, но доказательство того, что оно устанавливается в её конкретных реализациях в виде жёстких моделей — трудная и далеко не решённая математическая задача.

Математика, подобно физике, экспериментальная наука, отличающаяся от физики лишь тем, что в математике эксперименты очень дешёвы.

2.7 Компаратментные модели

2.7.1 .Основные теоретические сведения

В этом параграфе мы начинаем изучение математических задач, возникающих в фармакокинетике, уделяя внимание на описательных аспектах в случае

– одно - и двухкомпарментных моделей (однокамерные и двухкамерные модели).

Первой задачей будет определение классов математических моделей, позволяющих предсказывать с различной степенью точности изменение во времени концентрации лекарства и его активных метаболитов в различных участках тела.

Несмотря на то, что практически все процессы, встречающиеся в фармакокинетике, чрезвычайно сложны и лишь немногие из них изучены досконально, весьма полезной при их рассмотрении оказалась простая схема компарментной модели.

Для получения математического описания представим себе организм или его отдельную часть в виде нескольких взаимосвязанных участков. Каждый участок содержит некоторое количество лекарственного препарата, которое благодаря определенным механизмам постоянно переходит из одного компартамента в другой. Цель нашего исследования заключается в том, чтобы предсказать, какое количество лекарственного препарата будет в каждом участке в зависимости от времени. Данные знания углубляют в области общей физиологии и фармакокинетики.

Как и в любой науке, задача разработки системы концептуальных и аналитических моделей, дающих осмысленные результаты при тщательно выбранных условиях достаточно сложна и трудоемка. Это означает, что на пути непрерывных математических, физиологических и клинических экспериментов, в ходе которых медленно создается фонд заслуживающих доверия математических моделей, делается много проб и совершается немало ошибок.

Компарменты могут соответствовать действительным физиологическим объектам, таким, как кровь, кишечник, ухо, либо могут представлять собой, лишь удобную математическую абстракцию, возникающую, возможно, вследствие применения какой-либо стандартной аналитической процедуры вроде метода конечных разностей или метода конечных элементов. Как правило, то, что появляется на свет в виде математической модели, представляет собой совокупность различных математических теорий и условий.

Начнем с простой, но полезной схемы введения лекарственного препарата в кровяное русло и его утилизации, причем кровь рассматривается как единый компонент. Пусть $x_1(t)$ - концентрация в крови лекарственного препарата в момент времени $t \geq 0$. Препарат вводится со скоростью $f(t)$ и выводится со скоростью пропорциональной количеству препарата в крови. Пусть V_1 - эффективный объем компартамента. Допустим, что существует некоторый физиологический механизм, который уменьшает количество препарата в момент времени t до фракции $(1 - k_1 \Delta t)$ за отрезок времени $[t, t + \Delta t]$, где k_1 - известная постоянная. Запишем приближенное равенство относительно малых величин Δt

$$V_1 x_1(t + \Delta t) = (1 - k_1 \Delta t) V_1 x_1(t) + f(t) \Delta t. \quad (1.27)$$

Как обычно, предположим, что $x_1(t)$ является достаточно гладкой функцией времени. Тогда

$$x_1(t + \Delta t) = x_1(t) + \frac{d x_1}{d t} \Delta t + \dots \quad (1.28)$$

Тогда из (1.27), найдем:

$$V_1 x_1(t) + V_1 \frac{d x_1}{d t} \Delta t + \dots = (1 - k_1 \Delta t) V_1 x_1(t) + f(t) \Delta t,$$

или

$$V_1 \frac{d x_1}{d t} = -k_1 V_1 x_1(t) + f(t). \quad (1.29)$$

Параметр k_1 называется постоянной скорости. Его можно выбрать равным единице, выбрав соответствующий масштаб времени и функции $f(t)$. Подобным образом можно добиться и относительно коэффициента V_1 . Легко получить аналитическое решение дифференциального уравнения (1.29)

$$x_1(t) = C e^{-k_1 t} + \frac{1}{V_1} \int_0^t e^{-k_1(t-s)} f(s) ds. \quad (1.30)$$

Отметим, что линейность процесса позволяет утверждать, что мгновенная концентрация является суммой двух эффектов, определяемых начальной концентрацией и скоростью введения препарата.

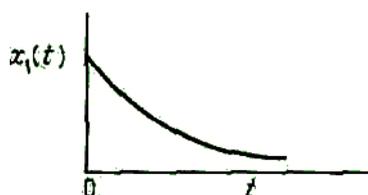


Рис. 12

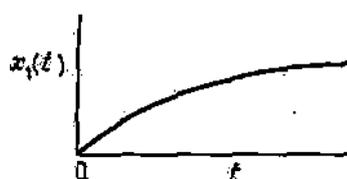


Рис. 13

Если препарат не вводится, его концентрация экспоненциально убывает; если начальная концентрация равна нулю, функция $x_1(t)$ дается выражением

$$x_1(t) = \frac{1}{V_1} \int_0^t e^{-k_1(t-s)} f(s) ds. \quad (1.31)$$

В важном частном случае, когда $f(t)$ постоянна равна a , уравнение (1.31) можно проинтегрировать. Получим

$$x_1(t) = \frac{a}{k_1 V_1} (1 - e^{-k_1 t}).$$

Таким образом, если наблюдается изменение концентрации препарата в некотором органе или ткани, такое, как это изображено на рис. 12 или 13, то можно уже дать простейшую интерпретацию исследуемого процесса.

Введение единичной дозы препарата в момент времени $t = 0$ можно описать уравнением

$$\frac{d x_1(t)}{d t} = -k_1 x_1(t), \quad x_1(0) = 1, \quad (1.32)$$

имеющим решение $x_1 = e^{-k_1 t}$. Здесь предполагается, что временем достижения лекарством требуемого участка можно пренебречь.

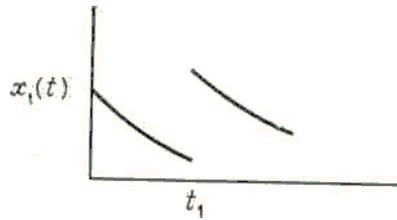


Рис. 14

Если затем будет сделана другая такая же инъекция, можно описать эту ситуацию с помощью уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d x_1(t)}{d t} &= -k_1 x_1(t), \quad x_1(0) = 1, \quad 0 \leq t \leq t_1, \\ \frac{d x_1(t)}{d t} &= -k_1 x_1(t), \quad x_1(t_1) = 1 + e^{-k_1(t-t_1)}, \quad t \geq t_1. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} x_1(t) &= e^{-k_1 t}, \quad 0 \leq t \leq t_1, \\ x_1(t) &= \left(1 + e^{-k_1 t_1}\right) e^{-k_1(t-t_1)}, \quad t \geq t_1. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Концентрация препарата как функция времени в этом случае будет иметь вид, указанный на рис. 14.

Теперь обсудим некоторые основные аналитические свойства более сложных компартментных процессов. Начнем с простейшего случая двухкомпарментной системы и изучим динамику лекарственного препарата только одного типа.

Пусть $x_1(t)$ - концентрация препарата при $t \geq 0$ в компартменте I , $x_2(t)$ - концентрация препарата при $t \geq 0$ в компартменте II .

Заметим, что на рис. 15 изображена консервативная система без экскреции или других потерь лекарственного препарата. В дальнейшем будем говорить о концентрациях, а не об объемах препарата, хотя по-прежнему главной задачей является определение эффективного объема этих мистических «компарментов».

Предположим, что изменение концентрации препарата в компартаментах обусловлено движением жидкости из одного компартамента в другой. В качестве первого приближения разумно предположить, что поток жидкости в том или другом направлении прямо пропорционален концентрации препарата в компартаментах, создающем этот поток, и что других взаимодействий между компартаментами нет.



Рис. 15

Выбирая Δ достаточно малым и учитывая приведенные выше замечания, приходим к соотношению

$$x_1(t + \Delta t) = x_1(t) - k_1 x_1(t) \Delta t + k_2 x_2(t) \Delta t + O(\Delta t). \quad (1.34)$$

Здесь $O(\Delta t)$ - количество препарата, стремящееся к нулю при Δt , стремящемся к нулю; k_1 и k_2 - постоянные скорости. Объемы нормированы. Аналогично

$$x_2(t + \Delta t) = x_2(t) - k_2 x_2(t) \Delta t + k_1 x_1(t) \Delta t + O(\Delta t). \quad (1.35)$$

Записывая, как и раньше

$$x_1(t + \Delta t) = x_1(t) + \frac{d x_1}{d t} \Delta t + O(\Delta t),$$

$$x_2(t + \Delta t) = x_2(t) + \frac{d x_2}{d t} \Delta t + O(\Delta t),$$

преобразуем соотношения (1.34) и (1.35) в систему линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d x_1(t)}{d t} &= -k_1 x_1(t) + k_2 x_2(t), \\ \frac{d x_2(t)}{d t} &= -k_2 x_2(t) + k_1 x_1(t). \end{aligned} \quad (1.36)$$

Эти уравнения по понятным причинам иногда называют уравнениями линейной кинетики. Будем считать, что параметры k_1 и k_2 неотрицательны.

Наша цель заключается в том, чтобы с помощью этих уравнений определить концентрацию препарата в любой момент времени, используя данные о значениях концентрации препарата в некоторые моменты времени, например данные о начальных значениях концентрации

$$x_1(0) = c_1, \quad x_2(0) = c_2, \quad c_1, c_2 > 0.$$

Существуют также условия других типов. Полезно получить точное аналитическое решение этих двух уравнений, поскольку оно поможет при изучении более сложных моделей. К тому же это легко сделать. Суммируя уравнения (1.36), получим

$$\frac{d x_1(t)}{d t} + \frac{d x_2(t)}{d t} = -k_2 x_2(t) + k_1 x_1(t) + k_2 x_2(t) - k_1 x_1(t) = 0,$$

откуда следует, что $\frac{d(x_1 + x_2)}{d t} = 0$. Другими словами, $x_1 + x_2$ является константой.

Обозначим ее буквой b .

Разумеется, это свойство консервативности следует из первоначальной формулировки модели, в которой не происходит потери материала. В этом случае постоянная b есть сумма начальных концентраций. Следовательно, имеет место соотношение

$$x_1 + x_2 = c_1 + c_2. \quad (1.37)$$

Выразив x_2 через x_1, c_1, c_2 и подставив в (1.36), получим уравнение

$$\frac{d x_1}{d t} = -k_1 x_1 + k_2 (c_1 + c_2 - x_1) = -(k_1 + k_2) x_1 + k_2 (c_1 + c_2). \quad (1.38)$$

Предположим, что существует стационарное значение концентрации препарата. Под стационарным значением мы понимаем концентрацию препарата, которая

достигается при неограниченном увеличении t . Это значение легко найти, приравняв $\frac{dx_2}{dt}$ к нулю:

$$x_1(\infty) = \frac{k_2(c_1 + c_2)}{k_1 + k_2}$$

Для нахождения явного решения $x_1(t)$ сделаем замену переменных:

$$x_1(t) = \frac{k_2(c_1 + c_2)}{k_1 + k_2} + y_1.$$

Тогда

$$\frac{dy_1}{dt} = -(k_1 + k_2)y_1.$$

Новое начальное условие

$$y_1(0) = x_1(0) - \frac{k_2(c_1 + c_2)}{k_1 + k_2} = c_1 - \frac{k_2(c_1 + c_2)}{k_1 + k_2} = \frac{k_1c_1 - k_2c_2}{k_1 + k_2}$$

не обязательно положительно. Таким образом, мы видим, что

$$y_1 = \frac{k_1c_1 - k_2c_2}{k_1 + k_2} e^{-(k_1 + k_2)t}.$$

Откуда

$$x_1 = \frac{k_1(c_1 + c_2)}{k_1 + k_2} + \frac{k_1c_1 - k_2c_2}{k_1 + k_2} e^{-(k_1 + k_2)t}.$$

Функцию x_2 легко определить из соотношения $x_2 = c_1 + c_2 - x_1$. Однако решение можно получить более изящно, заменив k_1 на k_2 и c_1 на c_2 в выражении для x_1 .

Систему (1.36) можно решить, преобразовав исходную систему в систему линейных уравнений второго порядка относительно x_1 или x_2 . Этот метод важен, поскольку он наиболее удобен для моделей с тремя или четырьмя компартментами. Продифференцируем первое уравнение системы (1.38):

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = -k_1 \frac{dx_1}{dt} + k_2 \frac{dx_2}{dt} = -k_1 \frac{dx_1}{dt} + k_2(k_1x_1 - k_2x_2).$$

Заменяя x_2 его выражением через x_1 и $\frac{dx_1}{dt}$, приходим к уравнению

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = -(k_1 + k_2) \frac{dx_1}{dt}$$

с начальными условиями $x_1(0) = c_1$, $\frac{dx_1(0)}{dt} = -k_1c_1 + k_2c_2$. Поскольку характеристические корни данного уравнения равны 0 и $-(k_1 + k_2)$, легко получить его решение

$$x_1 = \frac{1}{k_1 + k_2} [k_2(c_1 + c_2) + (k_1c_1 - k_2c_2)e^{-(k_1 + k_2)t}].$$

Представленное выше точное решение модели позволяет получить ряд важных качественных результатов:

1) функции $x_1(t)$ и $x_2(t)$ положительны для $t > 0$ в интересующей нас области параметров $c_1, c_2 \geq 0$, $k_1, k_2 \geq 0$, $c_1 + c_2 > 0$;

2) при увеличении t концентрации x_1 и x_2 стремятся к своим стационарным значениям;

3) эти стационарные значения, естественно, зависят от общего начального количества препарата, а не от соотношения начальных концентраций препарата в различных компартментах. Другими словами, имеет место перемешивание.

Вернемся к модели, которая была описана выше системой уравнений (1.36)

$$\begin{aligned}\frac{d x_1(t)}{d t} &= -k_1 x_1(t) + k_2 x_2(t), \quad x_1(0) = c_1, \\ \frac{d x_2(t)}{d t} &= -k_2 x_2(t) + k_1 x_1(t), \quad x_2(0) = c_2.\end{aligned}$$

В этой модели основными предположениями являются стационарность и линейность. Но, во – первых, в человеческом организме скорости протекающих процессов часто зависят от времени. Во – вторых, они зависят от концентрации. И поэтому необходимо рассматривать мягкую модель вида

$$\begin{aligned}\frac{d x_1(t)}{d t} &= -k_1(x_1, x_2) x_1(t) + k_2(x_1, x_2) x_2(t), \quad x_1(0) = c_1, \\ \frac{d x_2(t)}{d t} &= -k_2(x_1, x_2) x_2(t) + k_1(x_1, x_2) x_1(t), \quad x_2(0) = c_2.\end{aligned}\tag{1.39}$$

Поскольку, за исключением некоторых особых случаев, получить аналитическое решение этой задачи Коши невозможно, для нахождения решения задачи (1.39) необходимо использовать численные методы.

2.7.2. Листинг программы

```
>restart:
>with(plots):
>Didits:=25:
>Dt:=0.1:
>N:=145: K:=31:
>dt:=evalf(Dt/K):
>c1:=0.3:
>c2:=0.5:
>T :=array(1..N):
>X1:=array(1..N):
>X2:=array(1..N):
>описание процедур
>k1:=(x1,x2)->x1^2+x2:
>k2:=(x1,x2)->x1+x2^2:
>f1:=(x1,x2)->-k1(x1,x2)*x1+k2(x1,x2)*x2:
>f2:=(x1,x2)->-k2(x1,x2)*x2+k1(x1,x2)*x1:
>RUNGE_x1:=proc(x1,x2) local go,g1,g2,g3:
> go:=evalf(dt*f1(x1,x2)):
> g1:=evalf(dt*f1(x1+go/2,x2+go/2)):
> g2:=evalf(dt*f1(x1+g1/2,x2+g1/2)):
> g3:=evalf(dt*f1(x1+g2,x2+g2)):
```

```

> RETURN(evalf((go+2*g1+2*g2+g3)/6)):
>end:
>RUNGE_x2:=proc(x1,x2) local go,g1,g2,g3:
> go:=evalf(dt*f2(x1,x2)):
> g1:=evalf(dt*f2(x1+go/2,x2+go/2)):
> g2:=evalf(dt*f2(x1+g1/2,x2+g1/2)):
> g3:=evalf(dt*f2(x1+g2,x2+g2)):
> RETURN(evalf((go+2*g1+2*g2+g3)/6)):
>end:
>основная программа
>X1[1]:=c1: X2[1]:=c2: T[1]:=0:
>tau:=0:
>x1:=X1[1]: x2:=X2[1]:
>for i from 2 to N do
> for j from 1 to K do
> tau:=tau+dt:
> x1:=x1+RUNGE_x1(x1,x2):
> x2:=x2+RUNGE_x2(x1,x2):
> od:
> X1[i]:=x1: X2[i]:=x2: T[i]:=tau:
>od:
>графика
>List1:=[T[1],X1[1]]:
>List2:=[T[1],X2[1]]:
>for n from 2 to N do
> List1:=List1,[T[n],X1[n]]:
> List2:=List2,[T[n],X2[n]]:
>od:
>g1:=plot([List1],color=red):
>g2:=plot([List2],color=cyan):
>display([g1,g2],thickness=3,scaling=uncon-
strained,style=line,axes=boxed,labels=[`t`,`X`]);

```

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Арнольд В.И. «Жесткие» и «мягкие» математические модели / В.И. Арнольд. – М.: МЦНМО, 2008. – 32 с.
2. Бережная Е. В. Математические методы моделирования экономических систем: учеб. пособие для вузов / Е. В. Бережная. - М. : Финансы и статистика, 2006. - 431 с.
3. Вержбицкий В. М. Численные методы: Математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения :учеб. пособие для вузов -/В. М. Вержбицкий. - М.: ОНИКС 21 век, 2005. - 399 с.
4. Волков Е.А. Численные методы [Электронный ресурс]: учеб. пособие / Е.А. Волков.– СПб.: Издательство «Лань», 2008. - 256 с. – Режим доступа: <http://e.lanbook.com/view/book/54/> - Численные методы
5. Демидович Б.П. Численные методы анализа. Приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения [Электронный ресурс]: учеб. пособие / Б.П. Демидович, И.А. Марон., Э.З. Шувалова.– СПб.: Издательство Лань, 2010. – 400 с. – Режим доступа: <http://e.lanbook.com/view/book/537/> - Численные методы анализа. Приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения.
6. Карпухин Э.В. К вопросу применения эффективных численных методов для моделирования магнитострикционных приборов уровня [Электронный ресурс] / Э.В. Карпухин, Е.С. Демин, С.Б. Демин // Вестник ТГТУ. 2012. Т. 18. № 1. С. 58-64. – Режим доступа: <http://e.lanbook.com/view/journal/93516/> - К вопросу применения эффективных численных методов для моделирования магнитострикционных приборов уровня.
7. Охорзин В.А. Прикладная математика в системе MATHCAD [Электронный ресурс]: учеб. пособие / В. А. Охорзин - СПб. [и др.]: Издательство Лань, 2009. - 348 с. – Режим доступа: <http://e.lanbook.com/view/book/294/> - Прикладная математика в системе MATHCAD.

Учебное текстовое электронное издание

**Кадченко Сергей Иванович
Рязанова Любовь Сергеевна
Торшина Ольга Анатольевна**

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ЯВЛЕНИЙ ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ В СРЕДЕ MAPLE**

Учебное пособие

0,71 Мб

1 электрон. опт. диск

г. Магнитогорск, 2019 год
ФГБОУ ВО «МГТУ им. Г.И. Носова»
Адрес: 455000, Россия, Челябинская область, г. Магнитогорск,
пр. Ленина 38

ФГБОУ ВО «Магнитогорский государственный
технический университет им. Г.И. Носова»
Кафедра прикладной математики и информатики
Центр электронных образовательных ресурсов и
дистанционных образовательных технологий
e-mail: ceor_dot@mail.ru