Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова»

Ю.А. Извеков
В.В. Шеметова

СБОРНИК КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ ПО МАТЕМАТИКЕ. ЧАСТЬ 2

*Утверждено Редакционно-издательским советом университета
в качестве практикума*

Магнитогорск
2019

УДК 517

Рецензенты:

доктор физико-математических наук,
заведующий кафедры теоретической и математической физики,
ФГАОУ ВО «Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина»
Е.А. Елфимова

кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры прикладной математики и информатики,
ФГБОУ ВО «Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова»
О.А. Торшина

Извеков Ю.А., Шеметова В.В.
Сборник контрольных заданий по математике. Часть 2 [Электронный ресурс] : практикум / Юрий Анатольевич Извеков, Вероника Владимировна Шеметова ; ФГБОУ ВО «Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова». – Электрон. текстовые дан. (1,28 Мб). – Магнитогорск : ФГБОУ ВО «МГТУ им. Г.И. Носова», 2019. – 1 электрон. опт. диск (CD-R). – Систем. требования : IBM PC, любой, более l GHz ; 512 Мб RAM ; 10 Мб HDD ; MS Windows XP и выше ; Adobe Reader 8.0 и выше ; CD/DVD-ROM дисковод ; мышь. – Загл. с титул. экрана.

Практикум состоит из пяти разделов: дифференциальное исчисление функций нескольких переменных, интегральное исчисление функций нескольких переменных, комплексные числа, дифференциальные уравнения, ряды. Все эти разделы включены в программу дисциплин «Математика», «Алгебра и геометрия», «Математический анализ» технических и естественнонаучных направлений подготовки бакалавров и изучаются традиционно во втором и третьем семестрах.

Каждый раздел содержит по 30 вариантов контрольных заданий, направленных на отработку навыков решения различных задач из перечисленных разделов. Данный практикум может быть использован для организации и контроля самостоятельной работы студентов как очной, так и заочной форм обучения.

УДК 517

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

Данный практикум состоит из пяти разделов. Все эти разделы включаются в программы дисциплины «Математика» всех технических и естественнонаучных направлений подготовки бакалавров и изучаются традиционно во втором и третьем семестрах.

В раздел 1 «Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных» включены следующие типы заданий: область определения функции двух переменных; частные производные функций двух и трех переменных; производная по направлению, градиент; исследование функции на экстремум; задачи на нахождение наибольшего и наименьшего значений функции в замкнутой ограниченной области.

Раздел 2 «Интегральное исчисление функций нескольких переменных» содержит задачи на вычисление двойных и тройных интегралов; геометрические приложения: нахождение площадей фигур, объемов тел.

Раздел 3 «Комплексные числа» состоит из контрольных заданий по темам: действия над комплексными числами в алгебраической и тригонометрической формах; решение алгебраических уравнений над полем комплексных чисел; множества точек на комплексной плоскости; задачи на доказательство утверждений, связанных с комплексными числами.

Раздел 4 «Дифференциальные уравнения» включает в себя контрольные задания по темам: дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными; однородные ДУ первого порядка; линейные ДУ первого порядка; уравнения Бернулли; ДУ в полных дифференциалах; ДУ высших порядков, допускающие понижение порядка; линейные однородные ДУ с постоянными коэффициентами; линейные неоднородные ДУ с постоянными коэффициентами и специальной правой частью; метод Лагранжа вариации произвольных постоянных; системы ДУ.

В раздел 5 «Ряды» включены контрольные задания по темам: определение сходящегося числового ряда; необходимый признак и достаточные признаки сходимости числовых рядов; функциональные ряды; разложение функции в степенной ряд; применение степенных рядов для нахождения приближенных значений функций, определенных интегралов, решения дифференциальных уравнений; разложение функции в ряд Фурье.

В каждом разделе предлагается 30 вариантов контрольных заданий. Данный практикум может быть эффективно использован при проведении аудиторных и домашних контрольных работ, при проведении зачетов и экзаменов.

Раздел 1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Вариант 1

Задание 1. Найти область определения функции двух переменных и изобразить ее в координатной плоскости Oxy:

$$z = \ln(9 - x^2 - y^2).$$

Задание 2. Найти частные производные первого порядка следующих функций:

1) $z = 5x^3y^4 + \sin(2xy + 5y^6)$;

2) $u = \arcsin(x^2 + xy^3 + xz + 4z)$.

Задание 3. Найти производные $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$ сложной функции:

$$z = \frac{x^2}{y}, x = \sqrt{u} + 2v, y = u^2v.$$

Задание 4. Показать, что функция

$$z = \cos y + (y - x)\sin y$$

удовлетворяет уравнению

$$(x - y)\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Задание 5. Дана функция $z = f(x; y)$, вектор $\vec{l}$ и точка A:

$$z = x^2 + 3xy + 5y^2;\ \vec{l} = -3\vec{i} + 4\vec{j};\ A(2; 1).$$

Найти производную по направлению $\vec{l}$, градиент функции и его модуль в точке A.

Задание 6. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности

$$4x^2 + 2y^2 = z^2$$

в точке $A(1; 1; 6)$.

Задание 7. Исследовать на экстремум функцию двух независимых переменных:

$$z = 2x^2 - 5xy + 2y^3 - 3x + 4y.$$

Задание 8. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = f(x; y)$ в замкнутой ограниченной области D:

$$z = x - 2y + 5,$$
$$D: y \geq 0;\ x + y \leq 1.$$

Вариант 2

Задание 1. Найти область определения функции двух переменных и изобразить ее в координатной плоскости Oxy:

$$z = \arcsin x + \arccos y.$$

Задание 2. Найти частные производные первого порядка следующих функций:

1) $z = -2x^4y^5 + \cos(3xy + 7x^6)$;

2) $u = \ln(z + 4)\sin(2x + y^3)$.

Задание 3. Найти производные $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$ сложной функции:

$$z = \frac{y^2}{x}, x = \sqrt{u} + 2v, y = u^2v.$$

Задание 4. Показать, что функция

$$z = \frac{x}{y}$$

удовлетворяет уравнению

$$x\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Задание 5. Дана функция $z = f(x; y)$, вектор $\vec{l}$ и точка A:

$$z = x^2 + 4xy - 3y^2;\ \vec{l} = 2\vec{\imath} - 5\vec{\jmath};\ A(2; -1).$$

Найти производную по направлению $\vec{l}$, градиент функции и его модуль в точке A.

Задание 6. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности

$$x^2 + y^2 = z^2$$

в точке $A(3; 4; 5)$.

Задание 7. Исследовать на экстремум функцию двух независимых переменных:

$$z = -\frac{1}{2}x^2 + 8xy - y^3 - 14x - 12y.$$

Задание 8. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = f(x; y)$ в замкнутой ограниченной области D:

$$z = 3 - 2x^2 - xy - y^2,$$
$$D: y \geq 0;\ x \leq 1;\ y \leq x.$$

Вариант 3

Задание 1. Найти область определения функции двух переменных и изобразить ее в координатной плоскости Oxy:

$$z = \sqrt{y^2 - 1} + \sqrt{1 - x^2}.$$

Задание 2. Найти частные производные первого порядка следующих функций:

1) $z = 6x^2y^4 + \sin(3x^2y - 2y^4)$;

2) $u = x^2y - y^3z + \frac{x}{z}$.

Задание 3. Найти производные $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$ сложной функции:

$$z = \ln\frac{x}{y}, x = u + \sqrt[3]{v}, y = u^2v.$$

Задание 4. Показать, что функция

$$z = e^x \cos y$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

Задание 5. Дана функция $z = f(x; y)$, вектор $\vec{l}$ и точка A:

$$z = 2x^2 - xy + 3y^2;\ \vec{l} = -\vec{\imath} + 7\vec{\jmath};\ A(-3; 2).$$

Найти производную по направлению $\vec{l}$, градиент функции и его модуль в точке A.

Задание 6. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности

$$z = 5x^2 - y^2 + 10x - 2y - 7$$

в точке $A(1; 2; 0)$.

Задание 7. Исследовать на экстремум функцию двух независимых переменных:
$$z = 3x^2 + 10xy + 6y^3 + 2x + 2y - 1.$$
Задание 8. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = f(x; y)$ в замкнутой ограниченной области D:
$$z = x^2 + 2xy - 2x + 8y,$$
$$D: x \le 0;\ y \le 0;\ x + y + 3 \ge 0.$$

Вариант 4

Задание 1. Найти область определения функции двух переменных и изобразить ее в координатной плоскости Oxy:
$$z = \log_5(x^2 + y^2 - 16).$$
Задание 2. Найти частные производные первого порядка следующих функций:
1) $z = -4x^7y^3 + \cos(5xy + 7y^3)$;
2) $u = e^z \sin(6x - 8y)$.
Задание 3. Найти производные $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$ сложной функции:
$$z = e^{x+y}, x = \sin u + \sqrt{v}, y = uv.$$
Задание 4. Показать, что функция
$$z = xy \ln x$$
удовлетворяет уравнению
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$
Задание 5. Дана функция $z = f(x; y)$, вектор $\vec{l}$ и точка A:
$$z = x^2 - 6xy - y^2;\ \vec{l} = -3\vec{i} - 4\vec{j};\ A(-2; -3).$$
Найти производную по направлению $\vec{l}$, градиент функции и его модуль в точке A.
Задание 6. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности
$$x^3 + y^3 + z^3 + xyz = 6$$
в точке $A(1; 2; -1)$.
Задание 7. Исследовать на экстремум функцию двух независимых переменных:
$$z = 2x^3 + y^2 + 6xy + 12x.$$
Задание 8. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = f(x; y)$ в замкнутой ограниченной области D:
$$z = x^2 + x + 3y^2 - y,$$
$$D: x \le 0;\ y \ge 0;\ x - y \le 1.$$

Вариант 5

Задание 1. Найти область определения функции двух переменных и изобразить ее в координатной плоскости Oxy:
$$z = \arcsin\frac{x}{y}.$$
Задание 2. Найти частные производные первого порядка следующих функций:
1) $z = 3x^5y^4 + \sin(7xy^2 + 9x^6)$;
2) $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Задание 3. Найти производные $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$ сложной функции:

$$z = \cos^2(x + y)\,, x = e^{uv}, y = u^2 + v.$$

Задание 4. Показать, что функция

$$z = \ln(x^2 + y^2 + 2x + 1)$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

Задание 5. Дана функция $z = f(x; y)$, вектор $\vec{l}$ и точка A:

$$z = 4x^2 - 2xy + 3y^2;\ \vec{l} = 5\vec{\imath} - 4\vec{\jmath};\ A(3; -1).$$

Найти производную по направлению $\vec{l}$, градиент функции и его модуль в точке A.

Задание 6. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности

$$z = 3 - x^2 + 6y^2 - 4y + 1$$

в точке $A(1; 2; 19)$.

Задание 7. Исследовать на экстремум функцию двух независимых переменных:

$$z = 3x^2 - 6xy - y^3 - 12x + 12y.$$

Задание 8. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = f(x; y)$ в замкнутой ограниченной области D:

$$z = x^2 + 2xy + y^2 + 4x,$$
$$D: x \leq 0;\ y \leq 0;\ x + y \geq -2.$$

Вариант 6

Задание 1. Найти область определения функции двух переменных и изобразить ее в координатной плоскости Oxy:

$$z = \sqrt{x^2 - 3y + 6}.$$

Задание 2. Найти частные производные первого порядка следующих функций:

1) $z = -6x^5y^7 + \cos(6x^2y^2 - 4y^2)$;
2) $u = xy + yz + xz$.

Задание 3. Найти производные $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$ сложной функции:

$$z = \operatorname{arctg}\,(x^2 + y)\,, x = uv, y = \frac{u}{v}.$$

Задание 4. Показать, что функция

$$z = x \ln y$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{y}{x}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

Задание 5. Дана функция $z = f(x; y)$, вектор $\vec{l}$ и точка A:

$$z = -x^2 - 4xy + 2y^2;\ \vec{l} = -6\vec{\imath} + 2\vec{\jmath};\ A(-4; 1).$$

Найти производную по направлению $\vec{l}$, градиент функции и его модуль в точке A.

Задание 6. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности

$$x^2y^2 + 2x + z^3 = 16$$

в точке $A(2;1;2)$.

Задание 7. Исследовать на экстремум функцию двух независимых переменных:

$$z = 8x^3 - 12xy - y^3 - 1.$$

Задание 8. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = f(x;y)$ в замкнутой ограниченной области D:

$$z = x^3 + y^3 - 3xy,$$
$$D: -1 \le y \le 2;\ 0 \le x \le 2.$$

Вариант 7

Задание 1. Найти область определения функции двух переменных и изобразить ее в координатной плоскости Oxy:

$$z = \ln(25 - x^2 - y^2).$$

Задание 2. Найти частные производные первого порядка следующих функций:

1) $z = 8x^3y^5 + \sin(4xy - 5y^9)$;

2) $u = e^{x(x^2+y^2+z^2)}$.

Задание 3. Найти производные $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$ сложной функции:

$$z = e^{2x+y^2} - 4xy, x = u + v, y = u^3v.$$

Задание 4. Показать, что функция

$$z = \sqrt{x^2 + y}$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

Задание 5. Дана функция $z = f(x;y)$, вектор $\vec{l}$ и точка A:

$$z = 2x^2 - 3xy - 5y^2;\ \vec{l} = -3\vec{\imath} - 2\vec{\jmath};\ A(4;-5).$$

Найти производную по направлению $\vec{l}$, градиент функции и его модуль в точке A.

Задание 6. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности

$$xy^2 + z^3 = 12$$

в точке $A(1;2;2)$.

Задание 7. Исследовать на экстремум функцию двух независимых переменных:

$$z = 3x^3 + 7xy - \frac{7}{2}y^2 - 60x + 2.$$

Задание 8. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = f(x;y)$ в замкнутой ограниченной области D:

$$z = x^2 + 2y^2 + 1,$$
$$D: y \ge 0; x \ge 0;\ x + y - 3 \le 0.$$

Вариант 8

Задание 1. Найти область определения функции двух переменных и изобразить ее в координатной плоскости Oxy:

$$z = x^3y + \sqrt[4]{x^2 + y^2 - 4}.$$

Задание 2. Найти частные производные первого порядка следующих функций:

1) $z = 5x^8y^9 - \cos(3xy + 4x^6)$;

2) $u = (\sin x)^{yz}$.

Задание 3. Найти производные $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$ сложной функции:

$$z = \ln\frac{x^2}{y}, x = uv, y = u^2 + v^3.$$

Задание 4. Показать, что функция

$$z = \frac{y^2}{3x} + \arcsin(xy)$$

удовлетворяет уравнению

$$x^2\frac{\partial z}{\partial x} - xy\frac{\partial z}{\partial y} + y^2 = 0.$$

Задание 5. Дана функция $z = f(x; y)$, вектор $\vec{l}$ и точка A:

$$z = 4x^2 - 3xy - 2y^2;\ \vec{l} = -5\vec{\imath} - 3\vec{\jmath};\ A(-2; 6).$$

Найти производную по направлению $\vec{l}$, градиент функции и его модуль в точке A.

Задание 6. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности

$$z = x^2 - y^3 \mp 2y + 10$$

в точке $A(0; 2; 6)$.

Задание 7. Исследовать на экстремум функцию двух независимых переменных:

$$z = x^3 - 5xy + 5y^2 + 7x - 15y.$$

Задание 8. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = f(x; y)$ в замкнутой ограниченной области D:

$$z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1,$$
$$D: -1 \le y \le 1;\ 0 \le x \le 2.$$

Вариант 9

Задание 1. Найти область определения функции двух переменных и изобразить ее в координатной плоскости Oxy:

$$z = \frac{3x^2 + xy}{\sqrt{x - y + 1}}.$$

Задание 2. Найти частные производные первого порядка следующих функций:
1) $z = -10x^3y^6 - \sin(7xy + 2y^4)$;
2) $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2 + 1)$.

Задание 3. Найти производные $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$ сложной функции:

$$z = x^{\sin y}, x = \arccos\sqrt{uv}, y = \arcsin(u - v).$$

Задание 4. Показать, что функция

$$z = x^y$$

удовлетворяет уравнению

$$y\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (1 + y\ln x)\frac{\partial z}{\partial x}.$$

Задание 5. Дана функция $z = f(x; y)$, вектор $\vec{l}$ и точка A:

$$z = -x^2 - 5xy + 7y^2;\ \vec{l} = 3\vec{\imath} + 4\vec{\jmath};\ A(-2; -6).$$

Найти производную по направлению $\vec{l}$, градиент функции и его модуль в точке A.

Задание 6. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности

$$x^2 + y^2 - z = 10$$

в точке $A(1; 1; -8)$.

Задание 7. Исследовать на экстремум функцию двух независимых переменных:

$$z = x^3 + 6xy + 3y^2 - 18x - 18y.$$

Задание 8. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = f(x; y)$ в замкнутой ограниченной области D:

$$z = x^3 + y^3 - 9xy + 27,$$
$$D: 0 \le y \le 4;\ 0 \le x \le 4.$$

Вариант 10

Задание 1. Найти область определения функции двух переменных и изобразить ее в координатной плоскости Oxy:

$$z = \sqrt{4 - x - (y-2)^2}.$$

Задание 2. Найти частные производные первого порядка следующих функций:

1) $z = -3x^3y^4 + \cos(5xy^2 + x^8)$;

2) $u = \dfrac{xy}{z}\ln(x^2 + y^2 + z^2)$.

Задание 3. Найти производные $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ сложной функции:

$$z = \arcsin(2x + y^2),\ x = e^u - v,\ y = \cos(uv).$$

Задание 4. Показать, что функция

$$z = \operatorname{tg} xy + \frac{x}{y}$$

удовлетворяет уравнению

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Задание 5. Дана функция $z = f(x; y)$, вектор $\vec{l}$ и точка A:

$$z = 4x^2 + 3xy + 7y^2;\ \vec{l} = 3\vec{i} - 8\vec{j};\ A(-1; 2).$$

Найти производную по направлению $\vec{l}$, градиент функции и его модуль в точке A.

Задание 6. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности

$$z^2 - 4y + 1 = 0$$

в точке $A\left(0; \frac{1}{4}; 0\right)$.

Задание 7. Исследовать на экстремум функцию двух независимых переменных:

$$z = x^3 - 6xy - 8y^3 + 1.$$

Задание 8. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = f(x; y)$ в замкнутой ограниченной области D:

$$z = 5x^2 - 3xy + y^2 + 4,$$
$$D: y \ge -1;\ x \ge -1;\ x + y \le 1.$$

Вариант 11

Задание 1. Найти область определения функции двух переменных и изобразить ее в координатной плоскости Oxy:

$$z = \frac{3}{\sqrt{y - \sqrt{x}}}.$$

Задание 2. Найти частные производные первого порядка следующих функций:
1) $z = 2x^6y^4 + \sin(-3xy + 4y^5)$;
2) $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 2xz}$.

Задание 3. Найти производные $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$ сложной функции:

$$z = x^3 + y^3, x = uv, y = \frac{u}{v}.$$

Задание 4. Показать, что функция

$$z = \arcsin(xy)$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{x}{y} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{y}{x} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{2}{y} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0.$$

Задание 5. Дана функция $z = f(x;y)$, вектор $\vec{l}$ и точка A:

$$z = 3x^2 - 2xy + 4y^2;\ \vec{l} = -6\vec{\imath} - 4\vec{\jmath};\ A(-3;1).$$

Найти производную по направлению $\vec{l}$, градиент функции и его модуль в точке A.

Задание 6. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

в точке $A(1;1;\sqrt{2})$.

Задание 7. Исследовать на экстремум функцию двух независимых переменных:

$$z = x^3 + xy^2 - 6xy + 1.$$

Задание 8. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = f(x;y)$ в замкнутой ограниченной области D:

$$z = x^2 + y^2 + 4y - 6x,$$
$$D:\ -3 \le y \le 2;\ 1 \le x \le 4.$$

Вариант 12

Задание 1. Найти область определения функции двух переменных и изобразить ее в координатной плоскости Oxy:

$$z = \arcsin(6x + 2y - 7).$$

Задание 2. Найти частные производные первого порядка следующих функций:
1) $z = 3x^7y^5 - 2\cos(5xy - 7x^2)$;
2) $u = 2xy + e^{xyz}$.

Задание 3. Найти производные $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$ сложной функции:

$$z = \cos(xy), x = ue^v, y = v\ln u.$$

Задание 4. Показать, что функция

$$z = xe^{-\frac{y}{x}}$$

удовлетворяет уравнению

$$x^2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y^2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0.$$

Задание 5. Дана функция $z = f(x; y)$, вектор $\vec{l}$ и точка A:

$$z = -3x^2 + 4xy - 5y^2;\ \vec{l} = 2\vec{\imath} + 7\vec{\jmath};\ A(-5; 3).$$

Найти производную по направлению $\vec{l}$, градиент функции и его модуль в точке A.

Задание 6. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности

$$x^2 + 5y^2 + z^2 = 10$$

в точке $A(1; -1; 2)$.

Задание 7. Исследовать на экстремум функцию двух независимых переменных:

$$z = x^3 + 4xy - y^3 + 5.$$

Задание 8. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = f(x; y)$ в замкнутой ограниченной области D:

$$z = x^2 + 2xy - 2x + 3y,$$
$$D: 0 \le y \le 2;\ 0 \le x \le 1.$$

Вариант 13

Задание 1. Найти область определения функции двух переменных и изобразить ее в координатной плоскости Oxy:

$$z = \sqrt{x^2 - 9} + \sqrt{9 - y^2}.$$

Задание 2. Найти частные производные первого порядка следующих функций:

1) $z = -5x^6y^4 - 2\sin(3xy^9 + 5x)$;

2) $u = \sqrt{x^2 + y^2 - z^2}$.

Задание 3. Найти производные $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$ сложной функции:

$$z = \ln(x^2 + y^2), x = \frac{u}{2v}, y = u^2 + 3v.$$

Задание 4. Показать, что функция

$$z = \sin(x + 3y)$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 9\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Задание 5. Дана функция $z = f(x; y)$, вектор $\vec{l}$ и точка A:

$$z = 7x^2 - xy + 2y^2;\ \vec{l} = -2\vec{\imath} - 9\vec{\jmath};\ A(-2; -4).$$

Найти производную по направлению $\vec{l}$, градиент функции и его модуль в точке A.

Задание 6. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности

$$x^2 + 3y^2 - 9z = 0$$

в точке $A\left(2; 2; \frac{16}{9}\right)$.

Задание 7. Исследовать на экстремум функцию двух независимых переменных:

$$z = x^2y^2 + \frac{y}{x} - 5y.$$

Задание 8. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = f(x; y)$ в замкнутой ограниченной области D:

$$z = x^2 - 2x + y^2 - 2y + 2,$$
$$D: x \geq 0;\ y \geq 0;\ 3x + 4y \leq 12.$$

Вариант 14

Задание 1. Найти область определения функции двух переменных и изобразить ее в координатной плоскости Oxy:

$$z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}.$$

Задание 2. Найти частные производные первого порядка следующих функций:

1) $z = -3x^2y^6 + 2\sin(xy - 8y^7)$;

2) $u = \arcsin(xyz)$.

Задание 3. Найти производные $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$ сложной функции:

$$z = e^{xy}, x = u^3 + \cos v\,, y = uv^2.$$

Задание 4. Показать, что функция

$$z = xe^y \cos(xy)$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

Задание 5. Дана функция $z = f(x; y)$, вектор $\vec{l}$ и точка A:

$$z = 3x^2 - 6xy + 4y^2;\ \vec{l} = 2\vec{i} - 4\vec{j};\ A(-2; -8).$$

Найти производную по направлению $\vec{l}$, градиент функции и его модуль в точке A.

Задание 6. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности

$$2x^2 + 3y^2 = z^2$$

в точке $A(1; 1; 5)$.

Задание 7. Исследовать на экстремум функцию двух независимых переменных:

$$z = 7 - x - y^2 + 3y + y\sqrt{x}.$$

Задание 8. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = f(x; y)$ в замкнутой ограниченной области D:

$$z = x + 2y + 1,$$
$$D: y \leq 0; x \geq 0;\ x - y \leq 1.$$

Вариант 15

Задание 1. Найти область определения функции двух переменных и изобразить ее в координатной плоскости Oxy:

$$z = \ln(x^2 + y^2 - 1).$$

Задание 2. Найти частные производные первого порядка следующих функций:

1) $z = 4x^5y^4 - \cos(3xy - 2x^7)$;

2) $u = 2xz + \operatorname{tg}(yz)$.

Задание 3. Найти производные $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$ сложной функции:

$$z = \cos\frac{x^3}{y}, x = uv, y = 3u + v^4.$$

Задание 4. Показать, что функция

$$z = \ln(x + e^{-y})$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0.$$

Задание 5. Дана функция $z = f(x; y)$, вектор $\vec{l}$ и точка A:

$$z = 5x^2 - 3xy + 2y^2;\ \vec{l} = -7\vec{\imath} + 6\vec{\jmath};\ A(-5; 1).$$

Найти производную по направлению $\vec{l}$, градиент функции и его модуль в точке A.

Задание 6. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности

$$4x^2 + 3y^2 = z^2$$

в точке $A(1; 1; 7)$.

Задание 7. Исследовать на экстремум функцию двух независимых переменных:

$$z = xy - 4\ln(y - 7) - x^2.$$

Задание 8. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = f(x; y)$ в замкнутой ограниченной области D:

$$z = 10 + 2xy - x^2,$$
$$D: y \geq 0;\ y \leq 4 - x^2.$$

Вариант 16

Задание 1. Найти область определения функции двух переменных и изобразить ее в координатной плоскости Oxy:

$$z = x^3 + y^2 + \sqrt{16 - y^2 - x^2}.$$

Задание 2. Найти частные производные первого порядка следующих функций:

1) $z = 2x^4y^5 + 3\sin(7xy + 5x^3)$;
2) $u = xyz^4 + \mathrm{ctg}(xz)$.

Задание 3. Найти производные $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$ сложной функции:

$$z = \ln(x^2 + y^2), x = u^3v^2, y = 3u - 2v.$$

Задание 4. Показать, что функция

$$z = \frac{y}{y^2 - 4x^2}$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 4\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Задание 5. Дана функция $z = f(x; y)$, вектор $\vec{l}$ и точка A:

$$z = -2x^2 - 4xy + 5y^2;\ \vec{l} = 3\vec{\imath} - 4\vec{\jmath};\ A(5; -6).$$

Найти производную по направлению $\vec{l}$, градиент функции и его модуль в точке A.

Задание 6. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности

$$3x^2 + 2y^2 = z^2$$

в точке $A(1; 1; 5)$.

Задание 7. Исследовать на экстремум функцию двух независимых переменных:

$$z = x^3 + y^3 - 15xy.$$

Задание 8. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = f(x; y)$ в замкнутой ограниченной области D:

$$z = x^2 - xy + y^2 - 4x,$$
$$D: y \geq 0; x \geq 0;\ 2x + 3y \leq 12.$$

Вариант 17

Задание 1. Найти область определения функции двух переменных и изобразить ее в координатной плоскости Oxy:

$$z = 1 + 5\mathrm{xy} - \ln(4 - x^2 - y^2).$$

Задание 2. Найти частные производные первого порядка следующих функций:

1) $z = -7x^3y^5 + \cos(8xy^4 + 5x)$;
2) $u = 3xy^4z + \ln(x + y + z)$.

Задание 3. Найти производные $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$ сложной функции:

$$z = \mathrm{tg}(xy),\ x = e^u + 2v, y = u + v.$$

Задание 4. Показать, что функция

$$z = \ln\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

Задание 5. Дана функция $z = f(x; y)$, вектор $\vec{l}$ и точка A:

$$z = -7x^2 - 2xy - 3y^2;\ \vec{l} = \vec{\imath} - 5\vec{\jmath};\ A(-2; -1).$$

Найти производную по направлению $\vec{l}$, градиент функции и его модуль в точке A.

Задание 6. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности

$$x^2 + 5y^2 = z^2$$

в точке $A(2; 1; 3)$.

Задание 7. Исследовать на экстремум функцию двух независимых переменных:

$$z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y.$$

Задание 8. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = f(x; y)$ в замкнутой ограниченной области D:

$$z = x^2 + xy,$$
$$D: 0 \leq y \leq 3;\ -1 \leq x \leq 1.$$

Вариант 18

Задание 1. Найти область определения функции двух переменных и изобразить ее в координатной плоскости Oxy:

$$z = \arccos(2x + 4y - 3).$$

Задание 2. Найти частные производные первого порядка следующих функций:

1) $z = 4x^3y^4 + \sin(7xy - 3y^8)$;
2) $u = xz + \arcsin(xyz)$.

Задание 3. Найти производные $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$ сложной функции:

$$z = \sqrt{x^2 - y^2}, x = u^v, y = v \ln u.$$

Задание 4. Показать, что функция

$$z = e^x (x \cos y - y \sin y)$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

Задание 5. Дана функция $z = f(x; y)$, вектор $\vec{l}$ и точка A:

$$z = 2x^2 - 4xy - 8y^2;\ \vec{l} = 3\vec{\imath} - 5\vec{\jmath};\ A(2; -3).$$

Найти производную по направлению $\vec{l}$, градиент функции и его модуль в точке A.

Задание 6. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности

$$36x^2 + y^2 = z$$

в точке $A(1; 6; 72)$.

Задание 7. Исследовать на экстремум функцию двух независимых переменных:

$$z = -x^2 y + xy - xy^2.$$

Задание 8. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = f(x; y)$ в замкнутой ограниченной области D:

$$z = 2xy - 2y - 4x,$$
$$D: y \geq 0;\ x \geq 0;\ x + y \leq 3.$$

Вариант 19

Задание 1. Найти область определения функции двух переменных и изобразить ее в координатной плоскости Oxy:

$$z = \frac{xy^4}{\sqrt{y - x^2 + 5}}.$$

Задание 2. Найти частные производные первого порядка следующих функций:

1) $z = -5x^6 y^4 + \cos(9xy + 5x^2)$;

2) $u = yz + \dfrac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$.

Задание 3. Найти производные $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$ сложной функции:

$$z = \sqrt{x + y}, x = u \operatorname{tg} v, y = u \operatorname{ctg} v.$$

Задание 4. Показать, что функция

$$z = e^{xy}$$

удовлетворяет уравнению

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

Задание 5. Дана функция $z = f(x; y)$, вектор $\vec{l}$ и точка A:

$$z = x^2 - 7xy + 3y^2;\ \vec{l} = 2\vec{\imath} - 4\vec{\jmath};\ A(1; -5).$$

Найти производную по направлению $\vec{l}$, градиент функции и его модуль в точке A.

Задание 6. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности

$$2y^2 - 5z^2 - 20 = 0$$

в точке $A(0; \sqrt{10}; 0)$.

Задание 7. Исследовать на экстремум функцию двух независимых переменных:

$$z = -x^2 - xy + y^2 + 3x + 6y.$$

Задание 8. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = f(x; y)$ в замкнутой ограниченной области D:

$$z = x^3 + y^3 - 9xy - 25,$$
$$D: 0 \le y \le 5;\ 0 \le x \le 5.$$

Вариант 20

Задание 1. Найти область определения функции двух переменных и изобразить ее в координатной плоскости Oxy:

$$z = 5xy + 10 + \ln(-x + y).$$

Задание 2. Найти частные производные первого порядка следующих функций:

1) $z = 8x^3y^5 + 3\sin(x^4y + 2y)$;

2) $u = xyz + e^{xyz}$.

Задание 3. Найти производные $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$ сложной функции:

$$z = \operatorname{arctg}(xy), x = \sqrt{u^2 + v^2}, y = u - v.$$

Задание 4. Показать, что функция

$$z = \ln(e^x + e^y)$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = 0.$$

Задание 5. Дана функция $z = f(x; y)$, вектор $\vec{l}$ и точка A:

$$z = 4x^2 - xy - y^2;\ \vec{l} = -3\vec{i} + 5\vec{j};\ A(-3; -2).$$

Найти производную по направлению $\vec{l}$, градиент функции и его модуль в точке A.

Задание 6. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

в точке $A(3; 4; 5)$.

Задание 7. Исследовать на экстремум функцию двух независимых переменных:

$$z = x^2 + xy + y^2 - 4x + 5y.$$

Задание 8. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = f(x; y)$ в замкнутой ограниченной области D:

$$z = xy + x + y,$$
$$D: 2 \le y \le 3;\ 1 \le x \le 2.$$

Вариант 21

Задание 1. Найти область определения функции двух переменных и изобразить ее в координатной плоскости Oxy:

$$z = \sqrt{1 + y - x^2} - \sqrt{1 - y - x^2}.$$

Задание 2. Найти частные производные первого порядка следующих функций:

1) $z = -2x^3y^9 + \cos(3xy + 4y^7)$;

2) $u = x^2z - \ln(x + y - z)$.

Задание 3. Найти производные $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$ сложной функции:

$$z = \ln(x^2 + y^2)\,, x = uv, y = \frac{u}{v}.$$

Задание 4. Показать, что функция

$$z = \cos x \cdot \sin y$$

удовлетворяет уравнению

$$z\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Задание 5. Дана функция $z = f(x; y)$, вектор $\vec{l}$ и точка A:

$$z = 4x^2 - 2xy + 3y^2;\ \vec{l} = 2\vec{\imath} - 6\vec{\jmath};\ A(-2; -5).$$

Найти производную по направлению $\vec{l}$, градиент функции и его модуль в точке A.

Задание 6. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности

$$x^2 - y^2 - z^2 = 1$$

в точке $A(3; 2; 2)$.

Задание 7. Исследовать на экстремум функцию двух независимых переменных:

$$z = 2x^3y^2 - x^4y^2 - x^3y^3.$$

Задание 8. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = f(x; y)$ в замкнутой ограниченной области D:

$$z = x + 2y + 1,$$
$$D: y \geq 0;\ x \geq 0;\ x + y \leq 1.$$

Вариант 22

Задание 1. Найти область определения функции двух переменных и изобразить ее в координатной плоскости Oxy:

$$z = xy^2 \ln(x^2 + y).$$

Задание 2. Найти частные производные первого порядка следующих функций:

1) $z = 2x^8y^4 + 9\sin(3xy + 5x^6)$;

2) $u = xyz^4 + \arccos(xyz)$.

Задание 3. Найти производные $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$ сложной функции:

$$z = 2^x \operatorname{arctg} y\,, x = \frac{u}{v}, y = uv.$$

Задание 4. Показать, что функция

$$z = ye^{x^2 - y^2}$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}.$$

Задание 5. Дана функция $z = f(x; y)$, вектор $\vec{l}$ и точка A:

$$z = 2x^2 + 3xy - 7y^2;\ \vec{l} = 3\vec{\imath} - 6\vec{\jmath};\ A(2; -1).$$

Найти производную по направлению $\vec{l}$, градиент функции и его модуль в точке A.

Задание 6. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности

$$z = 2x^2 + 3y^2 - 6x + 2y + 1$$

в точке $A(1; -2; 5)$.

Задание 7. Исследовать на экстремум функцию двух независимых переменных:

$$z = xy - \ln(x + y).$$

Задание 8. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = f(x; y)$ в замкнутой ограниченной области D:

$$z = x^2 + 3y^2 - y + x,$$
$$D: y \geq -1;\ x \geq 1;\ x + y \leq 1.$$

Вариант 23

Задание 1. Найти область определения функции двух переменных и изобразить ее в координатной плоскости Oxy:

$$z = 4 + \sqrt[6]{1 - x^2 + y}.$$

Задание 2. Найти частные производные первого порядка следующих функций:
1) $z = 5x^7y^4 - 9\cos(xy + 10x^4)$;
2) $u = \operatorname{arctg}(x^2 + y + 4z)$.

Задание 3. Найти производные $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$ сложной функции:

$$z = \frac{x^2}{y}, x = u - 2v, y = 2u + v.$$

Задание 4. Показать, что функция

$$z = \sin x + y \cos x$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Задание 5. Дана функция $z = f(x; y)$, вектор $\vec{l}$ и точка A:

$$z = 3x^2 - 4xy - 5y^2;\ \vec{l} = 2\vec{\imath} - 4\vec{\jmath};\ A(-1; 1).$$

Найти производную по направлению $\vec{l}$, градиент функции и его модуль в точке A.

Задание 6. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности

$$z = x^2 - 3y^2 + 4x + 2y - 1$$

в точке $A(-2; 0; -5)$.

Задание 7. Исследовать на экстремум функцию двух независимых переменных:

$$z = -x^2 + xy - y^2 + 6x - 9y - 35.$$

Задание 8. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = f(x; y)$ в замкнутой ограниченной области D:

$$z = x^2 + xy - 2,$$
$$D: y \leq 0;\ y \geq x^2 - 4.$$

Вариант 24

Задание 1. Найти область определения функции двух переменных и изобразить ее в координатной плоскости Oxy:

$$z = \sqrt{y - \sqrt{4 - x}}.$$

Задание 2. Найти частные производные первого порядка следующих функций:
1) $z = -3x^8y^4 + 12\sin(xy + 4y^6)$;
2) $u = \operatorname{arcctg}(xy^3 + 4z)$.

Задание 3. Найти производные $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$ сложной функции:

$$z = x^2 \ln y\,, x = \frac{v}{u}, y = u^2 + v^2.$$

Задание 4. Показать, что функция

$$z = \frac{1}{y}(\cos(2x + y) + \sin(2x - y))$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{4}{y^2} \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(y^2 \frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

Задание 5. Дана функция $z = f(x; y)$, вектор $\vec{l}$ и точка A:

$$z = x^2 - 4xy + 6y^2;\ \vec{l} = -2\vec{\imath} - 4\vec{\jmath};\ A(3; -1).$$

Найти производную по направлению $\vec{l}$, градиент функции и его модуль в точке A.

Задание 6. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности

$$x^2y^2 + 2y + z^3 = 10$$

в точке $A(2; -1; 2)$.

Задание 7. Исследовать на экстремум функцию двух независимых переменных:

$$z = 2x^3 - 36xy + 2y^3 + 10.$$

Задание 8. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = f(x; y)$ в замкнутой ограниченной области D:

$$z = x^2y + xy + xy^2,$$

$$D\!: y = \frac{1}{x};\ x = 1;\ \ x = 2;\ y = 0.$$

Вариант 25

Задание 1. Найти область определения функции двух переменных и изобразить ее в координатной плоскости Oxy:

$$z = xy + \ln(25 - x^2 - y^2).$$

Задание 2. Найти частные производные первого порядка следующих функций:
1) $z = 8x^3y^5 + 7\cos(2xy - 5y^9)$;
2) $u = \ln(x^2 + xy^3 + xz - 2z)$.

Задание 3. Найти производные $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$ сложной функции:

$$z = x^2y - xy^2, x = u\sin v\,, y = v\cos u.$$

Задание 4. Показать, что функция

$$z = \frac{1}{x}(\cos(x - y) + \sin(x + y))$$

удовлетворяет уравнению

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 \frac{\partial z}{\partial x}\right).$$

Задание 5. Дана функция $z = f(x; y)$, вектор $\vec{l}$ и точка A:

$$z = -4x^2 - 2xy + y^2;\ \vec{l} = 3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath};\ A(-5; -2).$$

Найти производную по направлению $\vec{l}$, градиент функции и его модуль в точке A.

Задание 6. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности

$$z = x^2 + y^2$$

в точке $A(1; 1; 2)$.

Задание 7. Исследовать на экстремум функцию двух независимых переменных:

$$z = -x^2 + xy - y^2 - 9x + 3y - 20.$$

Задание 8. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = f(x; y)$ в замкнутой ограниченной области D:

$$z = 4x^2y - x^3y - x^2y^2,$$
$$D: y \geq 0;\ x \geq 0;\ x + y \leq 6.$$

Вариант 26

Задание 1. Найти область определения функции двух переменных и изобразить ее в координатной плоскости Oxy:

$$z = \frac{4x}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}}.$$

Задание 2. Найти частные производные первого порядка следующих функций:

1) $z = -7x^2y^5 - \sin(8xy + 9x^4)$;

2) $u = xyz^3 + \sqrt{x + 2y}$.

Задание 3. Найти производные $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$ сложной функции:

$$z = \arcsin\frac{x}{y}, x = \sqrt{u} + v, y = uv.$$

Задание 4. Показать, что функция

$$z = y\sin(x^2 - y^2)$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}.$$

Задание 5. Дана функция $z = f(x; y)$, вектор $\vec{l}$ и точка A:

$$z = 2x^2 - 7xy + 8y^2;\ \vec{l} = -2\vec{i} - 5\vec{j};\ A(-2; -4).$$

Найти производную по направлению $\vec{l}$, градиент функции и его модуль в точке A.

Задание 6. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности

$$x^2 - y^2 - z^2 = 1$$

в точке $A(3; 2; 2)$.

Задание 7. Исследовать на экстремум функцию двух независимых переменных:

$$z = 12x^3y^2 - x^4y^2 - x^3y^3.$$

Задание 8. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = f(x; y)$ в замкнутой ограниченной области D:

$$z = x^2 + 2xy - 4x + 8y,$$
$$D: 0 \leq y \leq 2;\ 0 \leq x \leq 1.$$

Вариант 27

Задание 1. Найти область определения функции двух переменных и изобразить ее в координатной плоскости Oxy:

$$z = \sqrt{y^2 - 16} + \sqrt{16 - x^2}.$$

Задание 2. Найти частные производные первого порядка следующих функций:
1) $z = 2x^8y^{10} + 7\cos(3xy + 5x^6)$;
2) $u = xyz + \dfrac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$.

Задание 3. Найти производные $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$ сложной функции:

$$z = 1 + \sin(x^2y)\,, x = \sqrt{u} + \sqrt{v}, y = u^2v^3.$$

Задание 4. Показать, что функция

$$z = x\ln(x + y) + y\cos(x + y)$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

Задание 5. Дана функция $z = f(x; y)$, вектор $\vec{l}$ и точка A:

$$z = x^2 - 6xy + 7y^2;\ \vec{l} = -4\vec{\imath} + 5\vec{\jmath};\ A(-2; -1).$$

Найти производную по направлению $\vec{l}$, градиент функции и его модуль в точке A.

Задание 6. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности

$$4x^2 + y^2 = 9z$$

в точке $A(0; 3; 1)$.

Задание 7. Исследовать на экстремум функцию двух независимых переменных:

$$z = x^2 + xy + y^2 - 2x - 3y + \frac{17}{3}.$$

Задание 8. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = f(x; y)$ в замкнутой ограниченной области D:

$$z = 4xy - x^2y - xy^2,$$
$$D: y \geq 0;\ x \geq 1;\ x + y \leq 6.$$

Вариант 28

Задание 1. Найти область определения функции двух переменных и изобразить ее в координатной плоскости Oxy:

$$z = \arcsin(4x - 2y + 3).$$

Задание 2. Найти частные производные первого порядка следующих функций:
1) $z = -9x^3y^4 - \sin(4xy - 3x^8)$;
2) $u = \arcsin(x + 2y - 5z)$.

Задание 3. Найти производные $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$ сложной функции:

$$z = x^y, x = \sin u + 2v, y = \mathrm{u} + \cos v.$$

Задание 4. Показать, что функция

$$z = \sin x + \cos y - (x - y)\sin y$$

удовлетворяет уравнению

$$(x - y)\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Задание 5. Дана функция $z = f(x; y)$, вектор $\vec{l}$ и точка A:

$$z = -5x^2 + 2xy - 8y^2;\ \vec{l} = -2\vec{i} + 5\vec{j};\ A(-3; -1).$$

Найти производную по направлению $\vec{l}$, градиент функции и его модуль в точке A.

Задание 6. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности

$$9x^2 + 12y^2 + 4z^2 = 36$$

в точке $A(0; 0; 3)$.

Задание 7. Исследовать на экстремум функцию двух независимых переменных:

$$z = 4x^2y + 24xy + 32y + y^2 - 6.$$

Задание 8. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = f(x; y)$ в замкнутой ограниченной области D:

$$z = x^2y - xy^2,$$
$$D: y \geq -5;\ y \leq x;\ y \leq -x.$$

Вариант 29

Задание 1. Найти область определения функции двух переменных и изобразить ее в координатной плоскости Oxy:

$$z = 3xy + \log_3(y - x^2 + 2).$$

Задание 2. Найти частные производные первого порядка следующих функций:

1) $z = -6x^9y^4 + 5\cos(2xy^3 + x^8)$;

2) $u = \dfrac{4}{(xyz)^3} + xy - z$.

Задание 3. Найти производные $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ сложной функции:

$$z = \ln(x^2 + y^2), x = uv, y = \frac{u}{v}.$$

Задание 4. Показать, что функция

$$z = x^3 + 5xy^2$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

Задание 5. Дана функция $z = f(x; y)$, вектор $\vec{l}$ и точка A:

$$z = -4x^2 + 5xy - 2y^2;\ \vec{l} = -5\vec{i} - 6\vec{j};\ A(2; -7).$$

Найти производную по направлению $\vec{l}$, градиент функции и его модуль в точке A.

Задание 6. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

в точке $A(1; 1; \sqrt{2})$.

Задание 7. Исследовать на экстремум функцию двух независимых переменных:

$$z = \frac{1}{3}x^3 - xy^2 + \frac{1}{2}x^2 - 3xy + 3y - 2x + y^2.$$

Задание 8. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = f(x; y)$ в замкнутой ограниченной области D:

$$z = x^2 - xy + 2y^2 + 3x + 2y + 1,$$

$$D: y \le 0;\ x \le 0;\ x + y \ge -5.$$

Вариант 30

Задание 1. Найти область определения функции двух переменных и изобразить ее в координатной плоскости Oxy:

$$z = e^{xy} + \sqrt{2 - y - x^2}.$$

Задание 2. Найти частные производные первого порядка следующих функций:
1) $z = -4x^5y^9 - 8\sin(3xy + 9y^{10})$;
2) $u = \operatorname{arctg}(x^2 + yz + 1)$.

Задание 3. Найти производные $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$ сложной функции:

$$z = x\cos(xy),\ x = u\ln(uv),\ y = u\arcsin\frac{1}{v}.$$

Задание 4. Показать, что функция

$$z = \ln\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

Задание 5. Дана функция $z = f(x;y)$, вектор $\vec{l}$ и точка A:

$$z = 4x^2 - 6xy - 3y^2;\ \vec{l} = 6\vec{i} + 2\vec{j};\ A(-7;9).$$

Найти производную по направлению $\vec{l}$, градиент функции и его модуль в точке A.

Задание 6. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности

$$3x^2 + y^2 = z^2$$

в точке $A(1;1;2)$.

Задание 7. Исследовать на экстремум функцию двух независимых переменных:

$$z = 6x^2 - 7xy + 2y^2 - 3y + 6x.$$

Задание 8. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = f(x;y)$ в замкнутой ограниченной области D:

$$z = x^2 + y^2,$$
$$D: 3|x| + 4|y| \le 0.$$

Раздел 2. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Вариант 1

Задание 1. Изменить порядок интегрирования:

$$\int_0^1 dy \int_0^y f(x;y)dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_0^{\sqrt{2-y^2}} f(x;y)dx.$$

Задание 2. Вычислить двойной интеграл:

$$\iint_D (8xy + 9x^2y^2)\, dxdy;$$

$$D: x = 1; y = \sqrt[3]{x}; y = -x^3.$$

Задание 3. Вычислить двойной интеграл:

$$\iint_D y\cos 2xy\, dxdy\,;$$

$$D: y = \frac{\pi}{2}; y = \pi; x = \frac{1}{2}; x = 1.$$

Задание 4. Вычислить тройной интеграл:

$$\iiint_V y^2 e^{-xy}\, dxdydz\,;$$

$$V: x = 0; y = -2; y = 4x; z = 0; z = 1.$$

Задание 5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $y = 32 - x^2; y = -4x;$

2) $x^2 - 2x + y^2 = 0; x^2 - 10x + y^2 = 0; y = 0; y = \sqrt{3}x.$

Задание 6. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями:

$$y = 17\sqrt{2x};\ y = 2\sqrt{2x};\ z = 0;\ x + z = \frac{1}{2}.$$

Вариант 2

Задание 1. Изменить порядок интегрирования:

$$\int_0^1 dx \int_{1-x^2}^1 f(x;y)dy + \int_1^e dx \int_{\ln x}^1 f(x;y)dy.$$

Задание 2. Вычислить двойной интеграл:

$$\iint_D (27x^2y^2 + 48x^3y^3)\, dxdy;$$

$$D: x = 1; y = -\sqrt[3]{x}; y = x^2.$$

Задание 3. Вычислить двойной интеграл:

$$\iint_D y^2\, \mathrm{e}^{-\mathrm{xy}/4}\, dxdy\,;$$

$$D: x = 0; y = 2; y = x.$$

Задание 4. Вычислить тройной интеграл:

$$\iiint\limits_V x^2 \sin(4\pi xy)\ dxdydz\,;$$

$$V: x = 1; y = \frac{x}{2}; y = 0; z = 0; z = 8\pi.$$

Задание 5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $x = \sqrt{72 - y^2}; 6x = y^2; y = 0\ (y \geq 0);$

2) $x^2 - 2x + y^2 = 0; x^2 - 6x + y^2 = 0; y = \dfrac{x}{\sqrt{3}}; y = \sqrt{3}x.$

Задание 6. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями:

$$y = \sqrt{x};\ z = 0;\ z = 12y;\ x + y = 2.$$

Вариант 3

Задание 1. Изменить порядок интегрирования:

$$\int\limits_0^{\sqrt{3}} dx \int\limits_0^{2-\sqrt{4-x^2}} f(x;y)dy + \int\limits_{\sqrt{3}}^{2} dx \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x;y)dy.$$

Задание 2. Вычислить двойной интеграл:

$$\iint\limits_D (9x^2y^2 + 25x^4y^4)\, dxdy;$$

$$D: x = 1; y = \sqrt{x}; y = -x^2.$$

Задание 3. Вычислить двойной интеграл:

$$\iint\limits_D y \sin xy\ dxdy\,;$$

$$D: y = \frac{\pi}{2}; y = \pi; x = 1; x = 2.$$

Задание 4. Вычислить тройной интеграл:

$$\iiint\limits_V y^2 e^{xy/2}\ dxdydz\,;$$

$$V: x = 0; y = 2; y = 2x; z = 0; z = -1.$$

Задание 5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $y = \sin x\,; y = \cos x\,; x = 0\ (x \geq 0);$

2) $y^2 - 2y + x^2 = 0; y^2 - 4y + x^2 = 0; y = \dfrac{x}{\sqrt{3}}; y = \sqrt{3}x.$

Задание 6. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями:

$$x = 19\sqrt{2y};\ x = 4\sqrt{2y};\ z = 0;\ x + y = 2.$$

Вариант 4

Задание 1. Изменить порядок интегрирования:

$$\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f(x;y)dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_0^{\sqrt{2-y^2}} f(x;y)dx.$$

Задание 2. Вычислить двойной интеграл:

$$\iint_D (4xy + 3x^2y^2)\,dxdy;$$

$$D: x = 1; y = -\sqrt{x}; y = x^2.$$

Задание 3. Вычислить двойной интеграл:

$$\iint_D y \cos xy\; dxdy\,;$$

$$D: y = \pi; y = 3\pi; x = \frac{1}{2}; x = 1.$$

Задание 4. Вычислить тройной интеграл:

$$\iiint_V 2x^2 z\,\mathrm{sh}(xyz)\;\; dxdydz\,;$$

$$V: x = 0;\; x = 1; y = 0;\; y = -1; z = 0; z = 1.$$

Задание 5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $y = \dfrac{3}{x}; y = 8e^x; y = 3; y = 8;$

2) $x^2 - 4x + y^2 = 0; x^2 - 8x + y^2 = 0; y = 0; y = x.$

Задание 6. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями:

$$y = \sqrt{4x};\; z = 0;\; z = 3y;\; x + y = 8.$$

Вариант 5

Задание 1. Изменить порядок интегрирования:

$$\int_{-2}^{-1} dy \int_{-2-y}^{0} f(x;y)dx + \int_{-1}^{\sqrt{2}} dy \int_{\sqrt[3]{y}}^{0} f(x;y)dx.$$

Задание 2. Вычислить двойной интеграл:

$$\iint_D (18x^2y^2 + 32x^3y^3)\,dxdy;$$

$$D: x = 1; y = \sqrt[3]{x}; y = -x^2.$$

Задание 3. Вычислить двойной интеграл:

$$\iint_D 4y\,\mathrm{e}^{2\mathrm{xy}}\;\; dxdy\,;$$

$$D: y = \ln 3\,; y = \ln 4\,; x = \frac{1}{2}; x = 1.$$

Задание 4. Вычислить тройной интеграл:

$$\iiint_V y^2\,\mathrm{ch}(3xy)\;\; dxdydz\,;$$

$$V: x = 0; y = 2; y = 6x; z = 0; z = -3.$$

Задание 5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $x = 8 - y^2; x = -2y;$

2) $y^2 - 4y + x^2 = 0; y^2 - 8y + x^2 = 0; x = 0; y = \sqrt{3}x.$

Задание 6. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями:

$$x = 0; x = \sqrt{5y};\ z = 0;\ z = \frac{6y}{11};\ \ x^2 + y^2 = 50.$$

Вариант 6

Задание 1. Изменить порядок интегрирования:

$$\int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x}}^0 f(x;y)dy + \int_1^2 dx \int_{-\sqrt{2-x}}^0 f(x;y)dy.$$

Задание 2. Вычислить двойной интеграл:

$$\iint_D (24xy + 18x^2y^2)\, dxdy;$$

$$D: x = 1; y = -\sqrt[3]{x}; y = x^3.$$

Задание 3. Вычислить двойной интеграл:

$$\iint_D 4y^2 \sin 2xy\, dxdy\,;$$

$$D: y = 2x; y = \sqrt{2\pi}; x = 0.$$

Задание 4. Вычислить тройной интеграл:

$$\iiint_V 8y^2ze^{-xyz}\, dxdydz\,;$$

$$V: x = 0; x = 2; y = 0;\ y = -1;\ z = 0; z = 2.$$

Задание 5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $y = \sqrt{6 - x^2}; y = \sqrt{6} - \sqrt{6 - x^2};$

2) $x^2 - 4x + y^2 = 0; x^2 - 8x + y^2 = 0; y = \dfrac{x}{\sqrt{3}}; y = \sqrt{3}x.$

Задание 6. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями:

$$y = 16\sqrt{2x};\ y = \sqrt{2x};\ z = 0;\ x + z = 2.$$

Вариант 7

Задание 1. Изменить порядок интегрирования:

$$\int_{-\sqrt{2}}^{-1} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^0 f(x;y)dx + \int_{-1}^0 dy \int_y^0 f(x;y)dx.$$

Задание 2. Вычислить двойной интеграл:

$$\iint_D (27x^2y^2 + 48x^3y^3)\, dxdy;$$

$$D: x = 1; y = \sqrt{x}; y = -x^3.$$

Задание 3. Вычислить двойной интеграл:

$$\iint\limits_D 6y\, \mathrm{e}^{\mathrm{xy}/3}\ dxdy\,;$$

$$D: y = \ln 2\,; y = \ln 3\,; x = 3; x = 6.$$

Задание 4. Вычислить тройной интеграл:

$$\iiint\limits_V y^2 \cos(\pi xy)\ dxdydz\,;$$

$$V: x = 0; y = 1; y = 2x; z = 0; z = \pi^2.$$

Задание 5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $y = 3\sqrt{x}; y = \dfrac{3}{x}; x = 9;$

2) $y^2 - 2y + x^2 = 0; y^2 - 10y + x^2 = 0; y = \dfrac{x}{\sqrt{3}}; y = \sqrt{3}x.$

Задание 6. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями:

$$x = 20\sqrt{2y};\ x = 5\sqrt{2y};\ z = 0;\ y + z = \frac{1}{2}.$$

Вариант 8

Задание 1. Изменить порядок интегрирования:

$$\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^0 f(x;y)dx + \int_1^e dy \int_{-1}^{-\ln y} f(x;y)dx.$$

Задание 2. Вычислить двойной интеграл:

$$\iint\limits_D \left(3x^2y^2 + \frac{50}{3}x^4y^4\right)dxdy;$$

$$D: x = 1; y = \sqrt[3]{x}; y = -x^3.$$

Задание 3. Вычислить двойной интеграл:

$$\iint\limits_D y\cos xy\ dxdy\,;$$

$$D: y = \frac{\pi}{2}; y = \pi; x = 1; x = 2.$$

Задание 4. Вычислить тройной интеграл:

$$\iiint\limits_V 8y^2ze^{2xyz}\ dxdydz\,;$$

$$V: x = -1;\ x = 0; y = 0;\ y = 2;\ z = 0; z = 1.$$

Задание 5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $y = 11 - x^2; y = -10x;$

2) $x^2 - 6x + y^2 = 0; x^2 - 10x + y^2 = 0; y = \dfrac{x}{\sqrt{3}}; y = \sqrt{3}x.$

Задание 6. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями:

$$y = \sqrt{2x};\ z = 0;\ z = 3y;\ x + y = 4.$$

Вариант 9

Задание 1. Изменить порядок интегрирования:

$$\int_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int_{0}^{\sqrt{2-x^2}} f(x;y)dy + \int_{-1}^{0} dx \int_{0}^{x^2} f(x;y)dy.$$

Задание 2. Вычислить двойной интеграл:

$$\iint_D (6xy + 24x^3y^3)\, dxdy;$$

$$D: x = 1; y = \sqrt{x}; y = -x^2.$$

Задание 3. Вычислить двойной интеграл:

$$\iint_D y^2\, \mathrm{e}^{-\mathrm{xy}/8}\ dxdy\,;$$

$$D: y = \frac{x}{2}; y = 2; x = 0.$$

Задание 4. Вычислить тройной интеграл:

$$\iiint_V y^2 z \cos\frac{xyz}{3}\ dxdydz\,;$$

$$V: x = 0; x = 3; y = 0;\ y = 1;\ z = 0; z = 2\pi.$$

Задание 5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $x^2 + y^2 = 12; -\sqrt{6}y = x^2\ (y \leq 0)$;

2) $y^2 - 6y + x^2 = 0; y^2 - 10y + x^2 = 0; y = x; x = 0$.

Задание 6. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями:

$$y = \sqrt{15x};\ y = \sqrt{15}x;\ z = 0;\ z = \sqrt{15}\big(1 + \sqrt{x}\big).$$

Вариант 10

Задание 1. Изменить порядок интегрирования:

$$\int_{0}^{1} dy \int_{0}^{\sqrt{y}} f(x;y)dx + \int_{1}^{2} dy \int_{0}^{\sqrt{2-y}} f(x;y)dx.$$

Задание 2. Вычислить двойной интеграл:

$$\iint_D (12x^2y^2 + 16x^3y^3)\, dxdy;$$

$$D: x = 1; y = -\sqrt{x}; y = x^2.$$

Задание 3. Вычислить двойной интеграл:

$$\iint_D y^2 \cos\frac{xy}{2}\ dxdy\,;$$

$$D: y = 2x; y = \sqrt{2\pi}; x = 0.$$

Задание 4. Вычислить тройной интеграл:

$$\iiint\limits_V y^2 z\,\mathrm{ch}(xyz)\ dxdydz\,;$$

$$V: x = 0; x = 1; y = 0;\ y = 1;\ z = 0; z = 1.$$

Задание 5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $y = \frac{3}{2}\sqrt{x}; y = \frac{3}{2x}; x = 4;$

2) $y^2 - 4y + x^2 = 0; y^2 - 6y + x^2 = 0; x = 0; y = \sqrt{3}x.$

Задание 6. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями:

$$x = 0;\ x = \sqrt{y};\ z = 0;\ z = 30y;\ x^2 + y^2 = 2.$$

Вариант 11

Задание 1. Изменить порядок интегрирования:

$$\int\limits_{-2}^{-1} dy \int\limits_{-\sqrt{2+y}}^{0} f(x;y)dx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{-\sqrt{-y}}^{0} f(x;y)dx.$$

Задание 2. Вычислить двойной интеграл:

$$\iint\limits_D (44xy + 16x^3y^3)\,dxdy;$$

$$D: x = 1; y = -\sqrt[3]{x}; y = x^2.$$

Задание 3. Вычислить двойной интеграл:

$$\iint\limits_D 12y\sin 2xy\,dxdy\,;$$

$$D: y = \frac{\pi}{4}; y = \frac{\pi}{2}; x = 2; x = 3.$$

Задание 4. Вычислить тройной интеграл:

$$\iiint\limits_V x^2 \sin(\pi xy)\ dxdydz\,;$$

$$V: x = 1; y = 0; y = 2x; z = 0; z = 4\pi.$$

Задание 5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $y = 6 - \sqrt{36 - x^2}; y = \sqrt{36 - x^2}; x = 0\ (x \geq 0);$

2) $x^2 - 2x + y^2 = 0; x^2 - 8x + y^2 = 0; y = \frac{x}{\sqrt{3}}; y = \sqrt{3}x.$

Задание 6. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями:

$$y = 5\sqrt{x};\ y = \frac{5x}{3};\ z = 0;\ z = 5 + \frac{5\sqrt{x}}{3}.$$

Вариант 12

Задание 1. Изменить порядок интегрирования:

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{x}} f(x;y)dy + \int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{\sqrt{2-x}} f(x;y)dy.$$

Задание 2. Вычислить двойной интеграл:

$$\iint\limits_D \left(6x^2y^2 + \frac{25}{3}x^4y^4\right) dxdy;$$

$$D: x = 1; y = -\sqrt{x}; y = x^2.$$

Задание 3. Вычислить двойной интеграл:

$$\iint\limits_D 8ye^{4xy} dxdy\,;$$

$$D: y = \ln 3\,; y = \ln 4\,; x = \frac{1}{4}; x = \frac{1}{2}.$$

Задание 4. Вычислить тройной интеграл:

$$\iiint\limits_V 2y^2ze^{xyz}\, dxdydz\,;$$

$$V: x = 0; x = 1;\ y = 0; y = 1;\ z = 0; z = 1.$$

Задание 5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $y = \dfrac{3}{x}; y = 4e^x; y = 3; y = 4;$

2) $y^2 - 8y + x^2 = 0; y^2 - 10y + x^2 = 0; y = \dfrac{x}{\sqrt{3}}; y = \sqrt{3}x.$

Задание 6. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями:

$$x = 17\sqrt{2y};\ x = 2\sqrt{2y};\ z = 0;\ y + z = \frac{1}{2}.$$

Вариант 13

Задание 1. Изменить порядок интегрирования:

$$\int\limits_0^{\sqrt{3}} dx \int\limits_{\sqrt{4-x^2}-2}^{0} f(x;y)dy + \int\limits_{\sqrt{3}}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{0} f(x;y)dy.$$

Задание 2. Вычислить двойной интеграл:

$$\iint\limits_D (12xy + 27x^2y^2)\, dxdy;$$

$$D: x = 1; y = -\sqrt[3]{x}; y = x^2.$$

Задание 3. Вычислить двойной интеграл:

$$\iint\limits_D y \sin xy\, dxdy\,;$$

$$D: y = \pi; y = 2\pi; x = \frac{1}{2}; x = 1.$$

Задание 4. Вычислить тройной интеграл:

$$\iiint\limits_V x^2\, \mathrm{sh}(xy)\ \ dxdydz\,;$$

$$V: x = 2; y = 0; y = \frac{x}{2}; z = 0; z = 1.$$

Задание 5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $y=\frac{3}{2}\sqrt{x}; y=\frac{3}{2x}; x=9;$
2) $y^2-6y+x^2=0; y^2-8y+x^2=0; y=x; x=0.$
Задание 6. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями:
$$y=6\sqrt{3x};\ y=\sqrt{3x};\ z=0;\ x+z=3.$$

Вариант 14

Задание 1. Изменить порядок интегрирования:
$$\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{y}} f(x;y)dx+\int_1^e dy\int_{\ln y}^1 f(x;y)dx.$$
Задание 2. Вычислить двойной интеграл:
$$\iint_D (54x^2y^2+150x^4y^4)\,dxdy;$$
$$D: x=1; y=-\sqrt[3]{x}; y=x^2.$$
Задание 3. Вычислить двойной интеграл:
$$\iint_D y^2\sin\frac{xy}{2}\,dxdy;$$
$$D: y=\frac{x}{2}; y=\sqrt{\pi}; x=0.$$
Задание 4. Вычислить тройной интеграл:
$$\iiint_V 2y^2z\,\mathrm{ch}(2xyz)\ dxdydz;$$
$$V: x=0; x=\frac{1}{2};\ y=0; y=2; z=0; z=-1.$$
Задание 5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:
1) $y=\sin x; y=\cos x; x=0\ (x\le 0);$
2) $y^2-4y+x^2=0; y^2-8y+x^2=0; x=0; y=\frac{x}{\sqrt{3}}.$
Задание 6. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями:
$$y=\sqrt{3x};\ z=4y;\ z=0;\ x+y=6.$$

Вариант 15

Задание 1. Изменить порядок интегрирования:
$$\int_0^1 dx\int_0^{x^2} f(x;y)dy+\int_1^{\sqrt{2}} dx\int_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x;y)dy.$$
Задание 2. Вычислить двойной интеграл:
$$\iint_D (12xy+9x^2y^2)\,dxdy;$$
$$D: x=1; y=\sqrt{x}; y=-x^2.$$
Задание 3. Вычислить двойной интеграл:

$$\iint\limits_D ye^{xy/2}dxdy\,;$$

$$D\colon y = \ln 2\,; y = \ln 3\,; x = 2; x = 4.$$

Задание 4. Вычислить тройной интеграл:

$$\iiint\limits_V y^2 \cos\left(\frac{\pi}{4}xy\right)\, dxdydz\,;$$

$$V\colon x = 0; y = -1; y = \frac{x}{2}; z = 0; z = -\pi^2.$$

Задание 5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $y = \dfrac{25}{4} - x^2; y = x - \dfrac{5}{2};$

2) $x^2 - 4x + y^2 = 0; x^2 - 8x + y^2 = 0; y = 0; y = \dfrac{x}{\sqrt{3}}.$

Задание 6. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями:

$$x = \frac{5\sqrt{y}}{2};\ x = \frac{5y}{6};\ z = 0;\ z = \frac{5}{6}\left(3 + \sqrt{y}\right).$$

Вариант 16

Задание 1. Изменить порядок интегрирования:

$$\int\limits_0^{\pi/4} dx \int\limits_0^{\sin x} f(x;y)dy + \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} dx \int\limits_0^{\cos x} f(x;y)dy.$$

Задание 2. Вычислить двойной интеграл:

$$\iint\limits_D (18x^2y^2 + 32x^3y^3)\, dxdy;$$

$$D\colon x = 1; y = -\sqrt{x}; y = x^3.$$

Задание 3. Вычислить двойной интеграл:

$$\iint\limits_D 2y\cos 2xy\, dxdy\,;$$

$$D\colon y = \frac{\pi}{4}; y = \frac{\pi}{2}; x = 1; x = 2.$$

Задание 4. Вычислить тройной интеграл:

$$\iiint\limits_V 2x^2z\,\mathrm{sh}(2xyz)\, dxdydz\,;$$

$$V\colon x = 0; x = 2;\ y = 0; y = \frac{1}{2}; z = 0; z = \frac{1}{2}.$$

Задание 5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $x^2 + y^2 = 72; 6y = -x^2\ (y \le 0);$

2) $y^2 - 2y + x^2 = 0; y^2 - 4y + x^2 = 0; x = 0; y = \sqrt{3}x.$

Задание 6. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями:

$$x = 15\sqrt{y};\ x = 15y;\ z = 0;\ z = 15\left(1 + \sqrt{y}\right).$$

Вариант 17

Задание 1. Изменить порядок интегрирования:

$$\int_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{0} f(x;y)dy + \int_{-1}^{0} dx \int_{x}^{0} f(x;y)dy.$$

Задание 2. Вычислить двойной интеграл:

$$\iint_D (4xy + 176x^3y^3)\,dxdy;$$

$$D: x = 1; y = \sqrt[3]{x}; y = -x^2.$$

Задание 3. Вычислить двойной интеграл:

$$\iint_D 4y^2 \sin xy\; dxdy\,;$$

$$D: y = \sqrt{\frac{\pi}{2}}; y = x; x = 0.$$

Задание 4. Вычислить тройной интеграл:

$$\iiint_V 8y^2ze^{-xyz}\,dxdydz\,;$$

$$V: x = 0; x = 2;\ y = 0; y = -1; z = 0; z = 2.$$

Задание 5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $y = \dfrac{1}{x}; y = 6e^x; y = 1; y = 6;$

2) $x^2 - 4x + y^2 = 0; x^2 - 6x + y^2 = 0; y = \dfrac{x}{\sqrt{3}}; y = \sqrt{3}x.$

Задание 6. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями:

$$y = \sqrt{x};\ y = 0;\ z = 0;\ z = 15x;\ x^2 + y^2 = 2.$$

Вариант 18

Задание 1. Изменить порядок интегрирования:

$$\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt[3]{y}} f(x;y)dx + \int_1^2 dy \int_0^{2-y} f(x;y)dx.$$

Задание 2. Вычислить двойной интеграл:

$$\iint_D (4xy + 16x^3y^3)\,dxdy;$$

$$D: x = 1; y = -\sqrt[3]{x}; y = x^3.$$

Задание 3. Вычислить двойной интеграл:

$$\iint_D ye^{xy/4}dxdy\,;$$

$$D: y = \ln 2\,; y = \ln 3\,; x = 4; x = 8.$$

Задание 4. Вычислить тройной интеграл:

$$\iiint\limits_V y^2 z\cos(xyz)\ dxdydz\,;$$

$$V\colon x=1;y=0;y=2x;z=0;z=36.$$

Задание 5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $y=\sqrt{24-x^2}; 2\sqrt{3}y=x^2; x=0\ (x\geq 0)$;

2) $x^2-2x+y^2=0; x^2-6x+y^2=0; y=0; y=x$.

Задание 6. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями:

$$x=\frac{5}{6}\sqrt{y};\ x=\frac{5}{18}y;\ z=0;\ z=\frac{5}{18}\left(3+\sqrt{y}\right).$$

Вариант 19

Задание 1. Изменить порядок интегрирования:

$$\int\limits_0^{\pi/4} dy \int\limits_0^{\sin y} f(x;y)dx + \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} dy \int\limits_0^{\cos y} f(x;y)dx.$$

Задание 2. Вычислить двойной интеграл:

$$\iint\limits_D (36x^2y^2-96x^3y^3)\,dxdy;$$

$$D\colon x=1;y=\sqrt[3]{x};y=-x^3.$$

Задание 3. Вычислить двойной интеграл:

$$\iint\limits_D y\sin 2xy\ dxdy\,;$$

$$D\colon y=\frac{\pi}{2};y=\frac{3\pi}{2};x=\frac{1}{2};x=2.$$

Задание 4. Вычислить тройной интеграл:

$$\iiint\limits_V x^2\sin\left(\frac{\pi}{2}xy\right)\ dxdydz\,;$$

$$V\colon x=2;y=0;y=x;z=0;z=\pi.$$

Задание 5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $x=5-y^2; x=-4y$;

2) $y^2-2y+x^2=0; y^2-10y+x^2=0; y=\frac{x}{\sqrt{3}}; y=\sqrt{3}x$.

Задание 6. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями:

$$x=7\sqrt{3y};\ x=2\sqrt{3y};\ z=0;\ y+z=3.$$

Вариант 20

Задание 1. Изменить порядок интегрирования:

$$\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{0} f(x;y)dx + \int\limits_1^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f(x;y)dx.$$

Задание 2. Вычислить двойной интеграл:

$$\iint\limits_D (18x^2y^2 + 32x^3y^3)\,dxdy;$$

$$D: x = 1; y = -\sqrt[3]{x}; y = x^3.$$

Задание 3. Вычислить двойной интеграл:

$$\iint\limits_D y^2 \cos xy\, dxdy\,;$$

$$D: y = x; y = \sqrt{\pi}; x = 0.$$

Задание 4. Вычислить тройной интеграл:

$$\iiint\limits_V y^2 \operatorname{ch}(2xy)\; dxdydz\,;$$

$$V: x = 0; y = 1; y = x; z = 0; z = 8.$$

Задание 5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $y = 20 - x^2; y = -8x;$

2) $x^2 - 2x + y^2 = 0; x^2 - 10x + y^2 = 0; y = 0; y = \sqrt{3}x.$

Задание 6. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями:

$$x = 16\sqrt{2y};\; x = \sqrt{2y};\; z = 0;\; y + z = 2.$$

Вариант 21

Задание 1. Изменить порядок интегрирования:

$$\int_0^1 dy \int_{-y}^0 f(x;y)dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^0 f(x;y)dx.$$

Задание 2. Вычислить двойной интеграл:

$$\iint\limits_D (9x^2y^2 + 48x^3y^3)\,dxdy;$$

$$D: x = 1; y = \sqrt{x}; y = -x^2.$$

Задание 3. Вычислить двойной интеграл:

$$\iint\limits_D y^2 \cos\frac{xy}{2}\; dxdy\,;$$

$$D: y = \sqrt{\frac{\pi}{2}}; y = \frac{x}{2}; x = 0.$$

Задание 4. Вычислить тройной интеграл:

$$\iiint\limits_V x^2 \operatorname{sh}(2xy)\; dxdydz\,;$$

$$V: x = -1; y = 0; y = x; z = 0; z = 8.$$

Задание 5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{2}; y = \dfrac{1}{2x}; x = 16;$

2) $x^2 - 4x + y^2 = 0; x^2 - 8x + y^2 = 0; y = 0; y = \sqrt{3}x.$

Задание 6. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями:

$$x = 0; x = \sqrt{2y};\ z = 0;\ z = \frac{30y}{11};\ \ x^2 + y^2 = 8.$$

Вариант 22

Задание 1. Изменить порядок интегрирования:

$$\int_0^1 dy \int_0^y f(x;y)dx + \int_1^e dy \int_{\ln y}^1 f(x;y)dx.$$

Задание 2. Вычислить двойной интеграл:

$$\iint_D (54x^2y^2 + 150x^4y^4)\,dxdy;$$

$$D: x = 1; y = -\sqrt{x}; y = x^3.$$

Задание 3. Вычислить двойной интеграл:

$$\iint_D y^2 e^{-xy/2} dxdy\,;$$

$$D: y = \sqrt{2}; y = x; x = 0.$$

Задание 4. Вычислить тройной интеграл:

$$\iiint_V x^2 z \sin\frac{xyz}{2}\ dxdydz\,;$$

$$V: x = 0; x = 1;\ y = 0; y = 4; z = 0; z = \pi.$$

Задание 5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $x^2 + y^2 = 12; x\sqrt{6} = y^2\ (x \geq 0)$;

2) $y^2 - 4y + x^2 = 0; y^2 - 8y + x^2 = 0; x = 0; y = \sqrt{3}x$.

Задание 6. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями:

$$x = \sqrt{y};\ z = 0;\ z = \frac{12x}{5};\ x + y = 2.$$

Вариант 23

Задание 1. Изменить порядок интегрирования:

$$\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^0 f(x;y)dx + \int_1^2 dy \int_{-\sqrt{2-y}}^0 f(x;y)dx.$$

Задание 2. Вычислить двойной интеграл:

$$\iint_D (8xy + 18x^2y^2)\,dxdy;$$

$$D: x = 1; y = \sqrt[3]{x}; y = -x^2.$$

Задание 3. Вычислить двойной интеграл:

$$\iint_D 3y^2 \sin\frac{xy}{2}\ dxdy\,;$$

$$D: y = \frac{2}{3}x; y = \sqrt{\frac{4\pi}{3}}; x = 0.$$

Задание 4. Вычислить тройной интеграл:

$$\iiint\limits_V 2y^2 e^{xy}\, dxdydz\,;$$

$$V: x = 0; y = 1; y = x; z = 0; z = 1.$$

Задание 5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $x = \sqrt{36 - y^2}; x = 6 - \sqrt{36 - y^2};$

2) $y^2 - 2y + x^2 = 0; y^2 - 6y + x^2 = 0; y = \dfrac{x}{\sqrt{3}}; x = 0.$

Задание 6. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями:

$$y = \frac{5}{6}\sqrt{x};\ y = \frac{5}{18}x;\ z = 0;\ z = \frac{5}{18}\left(3 + \sqrt{x}\right).$$

Вариант 24

Задание 1. Изменить порядок интегрирования:

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} f(x;y)dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{2-x} f(x;y)dy.$$

Задание 2. Вычислить двойной интеграл:

$$\iint\limits_D (xy - 4x^3y^3)\, dxdy;$$

$$D: x = 1; y = -\sqrt{x}; y = x^3.$$

Задание 3. Вычислить двойной интеграл:

$$\iint\limits_D y^2 \cos 2xy\, dxdy\,;$$

$$D: y = \sqrt{\frac{\pi}{2}}; y = \frac{x}{2}; x = 0.$$

Задание 4. Вычислить тройной интеграл:

$$\iiint\limits_V x^2\,\mathrm{sh}(3xy)\ dxdydz\,;$$

$$V: x = 1; y = 0; y = 2x; z = 0; z = 36.$$

Задание 5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $y = \dfrac{2}{x}; y = 7e^x; y = 2; y = 7;$

2) $x^2 - 2x + y^2 = 0; x^2 - 4x + y^2 = 0; y = 0; y = \dfrac{x}{\sqrt{3}}.$

Задание 6. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями:

$$y = 0; y = \sqrt{3x};\ z = 0;\ z = \frac{5x}{11};\ \ x^2 + y^2 = 18.$$

Вариант 25

Задание 1. Изменить порядок интегрирования:

$$\int_{0}^{1/\sqrt{2}} dy \int_{0}^{\arcsin y} f(x;y)dx + \int_{1/\sqrt{2}}^{1} dy \int_{0}^{\arccos y} f(x;y)dx.$$

Задание 2. Вычислить двойной интеграл:

$$\iint_D (24xy - 48x^3y^3)\,dxdy;$$

$$D: x = 1; y = -\sqrt{x}; y = x^2.$$

Задание 3. Вычислить двойной интеграл:

$$\iint_D y\cos 2xy\,dxdy\,;$$

$$D: y = \frac{\pi}{2}; y = \frac{3\pi}{2}; x = \frac{1}{2}; x = 2.$$

Задание 4. Вычислить тройной интеграл:

$$\iiint_V y^2\,\mathrm{ch}(xy)\;\; dxdydz\,;$$

$$V: x = 0; y = -1; y = x; z = 0; z = 2.$$

Задание 5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $y = 3\sqrt{x}; y = \dfrac{3}{x}; x = 4;$

2) $x^2 - 2x + y^2 = 0; x^2 - 6x + y^2 = 0; y = 0; y = \dfrac{x}{\sqrt{3}}.$

Задание 6. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями:

$$x = \sqrt{3y};\; z = 0;\; z = \frac{4x}{5};\; x + y = 6.$$

Вариант 26

Задание 1. Изменить порядок интегрирования:

$$\int_{-2}^{-1} dy \int_{0}^{\sqrt{2+y}} f(x;y)dx + \int_{-1}^{0} dy \int_{0}^{\sqrt{-y}} f(x;y)dx.$$

Задание 2. Вычислить двойной интеграл:

$$\iint_D \left(\frac{4}{5}xy + \frac{9}{11}x^2y^2\right) dxdy;$$

$$D: x = 1; y = -\sqrt{x}; y = x^3.$$

Задание 3. Вычислить двойной интеграл:

$$\iint_D 12ye^{6xy}dxdy\,;$$

$$D: y = \ln 3\,; y = \ln 4\,; x = \frac{1}{6}; x = \frac{1}{3}.$$

Задание 4. Вычислить тройной интеграл:

$$\iiint\limits_V x^2 z \sin(xyz)\ dxdydz\,;$$

$$V: x = 0; x = 2;\ y = 0; y = \pi; z = 0; z = 1.$$

Задание 5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $y = \sqrt{12 - x^2}; y = 2\sqrt{3} - \sqrt{12 - x^2}; x = 0\ (x \geq 0);$

2) $x^2 - 2x + y^2 = 0; x^2 - 4x + y^2 = 0; y = 0; y = \sqrt{3}x.$

Задание 6. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями:

$$x = 0; x = \sqrt{3y};\ z = 0;\ z = \frac{10y}{11};\ \ x^2 + y^2 = 18.$$

Вариант 27

Задание 1. Изменить порядок интегрирования:

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x f(x;y)dy + \int\limits_1^{\sqrt{2}} dx \int\limits_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x;y)dy.$$

Задание 2. Вычислить двойной интеграл:

$$\iint\limits_D \left(\frac{4}{5}xy + 9x^2y^2\right) dxdy;$$

$$D: x = 1; y = \sqrt{x}; y = -x^3.$$

Задание 3. Вычислить двойной интеграл:

$$\iint\limits_D y^2 \sin\frac{xy}{2}\ dxdy\,;$$

$$D: y = x; y = \sqrt{\pi}; x = 0.$$

Задание 4. Вычислить тройной интеграл:

$$\iiint\limits_V y^2 \cos\frac{\pi xy}{2}\ dxdydz\,;$$

$$V: x = 0; y = -1; y = x; z = 0; z = 2\pi^2.$$

Задание 5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $y = 27 - x^2; y = -6x;$

2) $x^2 - 2x + y^2 = 0; x^2 - 4x + y^2 = 0; y = \dfrac{x}{\sqrt{3}}; y = \sqrt{3}x.$

Задание 6. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями:

$$x = \frac{5}{3}\sqrt{y};\ x = \frac{5}{9}y;\ z = 0;\ z = \frac{5}{9}\left(3 + \sqrt{y}\right).$$

Вариант 28

Задание 1. Изменить порядок интегрирования:

$$\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{y^3} f(x;y)dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{2-y} f(x;y)dx.$$

Задание 2. Вычислить двойной интеграл:

$$\iint\limits_D (4xy + 176x^3y^3)\,dxdy;$$
$$D: x = 1; y = \sqrt{x}; y = -x^3.$$

Задание 3. Вычислить двойной интеграл:

$$\iint\limits_D 3y\sin xy\,dxdy\,;$$
$$D: y = \frac{\pi}{2}; y = 3\pi; x = 1; x = 3.$$

Задание 4. Вычислить тройной интеграл:

$$\iiint\limits_V y^2\,\mathrm{ch}(2xy)\;\;dxdydz\,;$$
$$V: x = 0; y = -2; y = 4x; z = 0; z = 2.$$

Задание 5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $x^2 + y^2 = 36; 3\sqrt{2}y = -x^2$ $(y \geq 0)$;

2) $y^2 - 4y + x^2 = 0; y^2 - 6y + x^2 = 0; x = 0; y = x.$

Задание 6. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями:

$$y = 0; y = \sqrt{2x};\; z = 0;\; z = \frac{15x}{11};\;\; x^2 + y^2 = 8.$$

Вариант 29

Задание 1. Изменить порядок интегрирования:

$$\int\limits_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{4-x^2}} f(x;y)dy + \int\limits_{-\sqrt{3}}^{0} dy \int\limits_{0}^{2-\sqrt{4-x^2}} f(x;y)dy.$$

Задание 2. Вычислить двойной интеграл:

$$\iint\limits_D (4xy + 16x^3y^3)\,dxdy;$$
$$D: x = 1; y = \sqrt[3]{x}; y = -x^3.$$

Задание 3. Вычислить двойной интеграл:

$$\iint\limits_D y^2\cos xy\,dxdy\,;$$
$$D: y = 2x; y = \sqrt{\pi}; x = 0.$$

Задание 4. Вычислить тройной интеграл:

$$\iiint\limits_V x^2z\,\mathrm{sh}(xyz)\;\;dxdydz\,;$$
$$V: x = 0; x = 2;\; y = 0; y = 1;\; z = 0; z = 1.$$

Задание 5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $y = \sqrt{x}; y = \dfrac{1}{x}; x = 16;$

2) $y^2 - 4y + x^2 = 0; y^2 - 10y + x^2 = 0; y = \dfrac{x}{\sqrt{3}}; y = \sqrt{3}x.$

Задание 6. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями:

$$x=\sqrt{2y};\ z=0;\ z=\frac{3x}{5};\ x+y=4.$$

Вариант 30

Задание 1. Изменить порядок интегрирования:

$$\int_{-2}^{-\sqrt{3}}dx\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{0}f(x;y)dy+\int_{-\sqrt{3}}^{0}dx\int_{\sqrt{4-x^2}-2}^{0}f(x;y)dy.$$

Задание 2. Вычислить двойной интеграл:

$$\iint_D (9x^2y^2+25x^4y^4)\,dxdy;$$
$$D: x=1; y=-\sqrt[3]{x}; y=x^3.$$

Задание 3. Вычислить двойной интеграл:

$$\iint_D y^2e^{-xy/2}dxdy\,;$$
$$D: y=\frac{x}{2}; y=1; x=0.$$

Задание 4. Вычислить тройной интеграл:

$$\iiint_V y^2z\cos\frac{xyz}{9}\ dxdydz\,;$$
$$V: x=0; x=9;\ y=0; y=1; z=0; z=2\pi.$$

Задание 5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $y=\frac{2}{x}; y=5e^x; y=2; y=5;$

2) $y^2-2y+x^2=0; y^2-10y+x^2=0; y=\frac{x}{\sqrt{3}}; x=0.$

Задание 6. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями:

$$y=0; y=\sqrt{5x};\ z=0;\ z=\frac{3x}{11};\ \ x^2+y^2=50.$$

Раздел 3. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Вариант 1

Задание 1. Даны комплексные числа:

$$z_1=2-3i;\ \ z_2=4+5i.$$

Вычислить:

1) z_1+z_2;

2) z_1-z_2;

3) $z_1\cdot z_2$;

4) $\frac{z_1}{z_2}$.

Задание 2. Выполнить действия над комплексными числами, результат представить в алгебраической форме:

$$\frac{3i^{27}-\left(i\sqrt{3}\right)^2}{i^{17}}.$$

Задание 3. Даны комплексные числа:

$$z_1 = -2i;\ \ z_2 = 2 - 2i;\ \ z_3 = -\sqrt{3} + i.$$

Изобразить эти числа на комплексной плоскости и представить их в тригонометрической и показательной формах.

Задание 4. Используя тригонометрическую форму комплексных чисел, полученную в задании 3, вычислить:

1) $(z_2)^{44}$;

2) $\sqrt{z_3}$.

Задание 5. Решить уравнение:

1) $x^4 - 4x^3 + 16x^2 = 0, x \in \mathbb{C}$;

2) $z^2 + |\bar{z}| = 0, z \in \mathbb{C}$.

Задание 6. Изобразить на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ множество точек, определяемое следующими условиями:

$$\begin{cases} |z + 2i| > 5; \\ Re\, z < 1. \end{cases}$$

Задание 7. Доказать:

$$z + \bar{z} = 2Re\, z;\ \ z - \bar{z} = 2iIm\, z.$$

Вариант 2

Задание 1. Даны комплексные числа:

$$z_1 = 7 - 2i;\ \ z_2 = -3 + i.$$

Вычислить:

1) $z_1 + z_2$;

2) $z_1 - z_2$;

3) $z_1 \cdot z_2$;

4) $\dfrac{z_1}{z_2}$.

Задание 2. Выполнить действия над комплексными числами, результат представить в алгебраической форме:

$$\left(\frac{1 - 2i}{i^6}\right)^2 + \frac{1}{2 - i}.$$

Задание 3. Даны комплексные числа:

$$z_1 = 16i;\ \ z_2 = 1 + \sqrt{3}i;\ \ z_3 = -1 - i.$$

Изобразить эти числа на комплексной плоскости и представить их в тригонометрической и показательной формах.

Задание 4. Используя тригонометрическую форму комплексных чисел, полученную в задании 3, вычислить:

1) $(z_3)^{21}$;

2) $\sqrt[4]{z_1}$.

Задание 5. Решить уравнение:

1) $x^4 - 2x^3 + 5x^2 = 0, x \in \mathbb{C}$;

2) $|z| - iz = 1 - 2i, z \in \mathbb{C}$.

Задание 6. Изобразить на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ множество точек, определяемое следующими условиями:

$$2 \le |2z + i| \le 4.$$

Задание 7. Доказать:

$$\overline{\overline{z_1} + \overline{z_2}} = z_1 + z_2.$$

Вариант 3

Задание 1. Даны комплексные числа:

$$z_1 = -5 - i;\;\; z_2 = -4 + 8i.$$

Вычислить:

1) $z_1 + z_2$;
2) $z_1 - z_2$;
3) $z_1 \cdot z_2$;
4) $\frac{z_1}{z_2}$.

Задание 2. Выполнить действия над комплексными числами, результат представить в алгебраической форме:

$$\frac{3}{1 - i^3} - \frac{1}{2i^4}.$$

Задание 3. Даны комплексные числа:

$$z_1 = 2;\;\; z_2 = -2\sqrt{3} + 2i;\;\; z_3 = \sqrt{2} - \sqrt{2}i.$$

Изобразить эти числа на комплексной плоскости и представить их в тригонометрической и показательной формах.

Задание 4. Используя тригонометрическую форму комплексных чисел, полученную в задании 3, вычислить:

1) $(z_2)^{40}$;
2) $\sqrt[4]{z_1}$.

Задание 5. Решить уравнение:

1) $x^2 - 4x + 8 = 0, x \in \mathbb{C}$;
2) $z + 2i\overline{z} - 3 = 0, z \in \mathbb{C}$.

Задание 6. Изобразить на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ множество точек, определяемое следующими условиями:

$$1 \le |z - i + 1| \le 2.$$

Задание 7. Доказать формулу Эйлера:

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}.$$

Вариант 4

Задание 1. Даны комплексные числа:

$$z_1 = 7 - 5i;\;\; z_2 = -6 + 2i.$$

Вычислить:

1) $z_1 + z_2$;
2) $z_1 - z_2$;
3) $z_1 \cdot z_2$;
4) $\frac{z_1}{z_2}$.

Задание 2. Выполнить действия над комплексными числами, результат представить в алгебраической форме:

$$\frac{3 + 2i}{(4i - 1) \cdot i} + 7i^{35}.$$

Задание 3. Даны комплексные числа:

$$z_1 = 5i;\;\; z_2 = -3 - 3\sqrt{3}i;\;\; z_3 = -4 + 4i.$$

Изобразить эти числа на комплексной плоскости и представить их в тригонометрической и показательной формах.

Задание 4. Используя тригонометрическую форму комплексных чисел, полученную в задании 3, вычислить:

1) $(z_2)^6$;
2) $\sqrt[3]{z_3}$.

Задание 5. Решить уравнение:

1) $x^4+2x^2+1=0, x\in\mathbb{C}$;

2) $\dfrac{2+5i}{x-y}-\dfrac{1-3i}{x+y}=\dfrac{-7x+12i}{y^2-x^2}, x,y\in\mathbb{R}$.

Задание 6. Изобразить на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ множество точек, определяемое следующими условиями:

$$\begin{cases}|z|\le 2;\\ |z-2|\le 2.\end{cases}$$

Задание 7. Доказать формулу Эйлера:

$$\sin\varphi=\frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}.$$

Вариант 5

Задание 1. Даны комплексные числа:

$$z_1=-1+9i;\;\; z_2=-3-7i.$$

Вычислить:

1) z_1+z_2;

2) z_1-z_2;

3) $z_1\cdot z_2$;

4) $\dfrac{z_1}{z_2}$.

Задание 2. Выполнить действия над комплексными числами, результат представить в алгебраической форме:

$$(1+2i)^2-\frac{8-i}{i^{33}}.$$

Задание 3. Даны комплексные числа:

$$z_1=-3;\;\; z_2=-4-4i;\;\; z_3=\sqrt{2}-\sqrt{\frac{2}{3}}i.$$

Изобразить эти числа на комплексной плоскости и представить их в тригонометрической и показательной формах.

Задание 4. Используя тригонометрическую форму комплексных чисел, полученную в задании 3, вычислить:

1) $(z_2)^{64}$;

2) $\sqrt[4]{z_1}$.

Задание 5. Решить уравнение:

1) $x^3+2x^2+10x=0, x\in\mathbb{C}$;

2) $\overline{z}=-4z+1, z\in\mathbb{C}$.

Задание 6. Изобразить на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ множество точек, определяемое следующими условиями:

$$\begin{cases}|z-i|\le 1;\\ Im\,\overline{z}\ge -1.\end{cases}$$

Задание 7. Доказать:

$$Re\,\frac{z-1}{z+1}=0\Leftrightarrow |z|=1,\;\; (z\ne -1).$$

Вариант 6

Задание 1. Даны комплексные числа:

$$z_1=4-6i;\;\; z_2=-1-9i.$$

Вычислить:

1) $z_1 + z_2$;

2) $z_1 - z_2$;

3) $z_1 \cdot z_2$;

4) $\frac{z_1}{z_2}$.

Задание 2. Выполнить действия над комплексными числами, результат представить в алгебраической форме:

$$\frac{(3-2i)^2}{1+i} - \frac{i}{1-i}.$$

Задание 3. Даны комплексные числа:

$$z_1 = 5i;\ \ z_2 = -3+3i;\ \ z_3 = 5 - 5\sqrt{3}i.$$

Изобразить эти числа на комплексной плоскости и представить их в тригонометрической и показательной формах.

Задание 4. Используя тригонометрическую форму комплексных чисел, полученную в задании 3, вычислить:

1) $(z_3)^{15}$;

2) $\sqrt[4]{z_2}$.

Задание 5. Решить уравнение:

1) $x^3 - 4x^2 + 16x = 0, x \in \mathbb{C}$;

2) $\frac{i}{x} + \frac{i}{y} + \frac{1}{6} = \frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{5i}{y}, x, y \in \mathbb{R}$.

Задание 6. Изобразить на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ множество точек, определяемое следующим условием:

$$Im\,\overline{z}^2 \le 1.$$

Задание 7. Доказать:

$$z + \overline{z} = 2Re\,z;\ \ z - \overline{z} = 2iIm\,z.$$

Вариант 7

Задание 1. Даны комплексные числа:

$$z_1 = 2 - 10i;\ \ z_2 = 3 + 7i.$$

Вычислить:

1) $z_1 + z_2$;

2) $z_1 - z_2$;

3) $z_1 \cdot z_2$;

4) $\frac{z_1}{z_2}$.

Задание 2. Выполнить действия над комплексными числами, результат представить в алгебраической форме:

$$(3+2i)(4i-1) + \frac{2i^{17}}{2-i}.$$

Задание 3. Даны комплексные числа:

$$z_1 = -3;\ \ z_2 = 2+2i;\ \ z_3 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Изобразить эти числа на комплексной плоскости и представить их в тригонометрической и показательной формах.

Задание 4. Используя тригонометрическую форму комплексных чисел, полученную в задании 3, вычислить:

1) $(z_2)^9$;

2) $\sqrt[3]{z_3}$.

Задание 5. Решить уравнение:

1) $x^5 - 4x^4 + 9x^3 = 0, x \in \mathbb{C}$;
2) $z^2 + \overline{z} = 0, z \in \mathbb{C}$.

Задание 6. Изобразить на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ множество точек, определяемое следующим условием:

$$1 \le |z + 2 + i| \le 3.$$

Задание 7. Доказать:

$$\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}.$$

Вариант 8

Задание 1. Даны комплексные числа:

$$z_1 = -5 - 6i;\ \ z_2 = 8 - 9i.$$

Вычислить:

1) $z_1 + z_2$;
2) $z_1 - z_2$;
3) $z_1 \cdot z_2$;
4) $\dfrac{z_1}{z_2}$.

Задание 2. Выполнить действия над комплексными числами, результат представить в алгебраической форме:

$$(i - 1)^3 + \frac{5}{2i - 3}.$$

Задание 3. Даны комплексные числа:

$$z_1 = -7i;\ \ z_2 = 7 + 7i;\ \ z_3 = -\sqrt{3} + i.$$

Изобразить эти числа на комплексной плоскости и представить их в тригонометрической и показательной формах.

Задание 4. Используя тригонометрическую форму комплексных чисел, полученную в задании 3, вычислить:

1) $(z_2)^{80}$;
2) $\sqrt[4]{z_1}$.

Задание 5. Решить уравнение:

1) $x^4 + 9x^2 + 20 = 0, x \in \mathbb{C}$;
2) $|z| - z = 1 + 2i, z \in \mathbb{C}$.

Задание 6. Изобразить на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ множество точек, определяемое следующими условиями:

$$\begin{cases} |z| \le 4; \\ |Re\,\overline{z}| \le 2. \end{cases}$$

Задание 7. Доказать:

$$\overline{\overline{z_1} + \overline{z_2}} = z_1 + z_2.$$

Вариант 9

Задание 1. Даны комплексные числа:

$$z_1 = 11 - 2i;\ \ z_2 = -4 - 7i.$$

Вычислить:

1) $z_1 + z_2$;
2) $z_1 - z_2$;
3) $z_1 \cdot z_2$;
4) $\dfrac{z_1}{z_2}$.

Задание 2. Выполнить действия над комплексными числами, результат представить в алгебраической форме:

$$\frac{1+i}{2-i}+\frac{2-i}{1+2i}+2i^{43}.$$

Задание 3. Даны комплексные числа:

$$z_1=-4;\ \ z_2=-4+4i;\ \ z_3=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i.$$

Изобразить эти числа на комплексной плоскости и представить их в тригонометрической и показательной формах.

Задание 4. Используя тригонометрическую форму комплексных чисел, полученную в задании 3, вычислить:

1) $(z_3)^{15}$;
2) $\sqrt[3]{z_1}$.

Задание 5. Решить уравнение:

1) $x^4+x^3+x^2=0, x\in\mathbb{C}$;
2) $(1+i)x+(-2+5i)y=-4+17i, x,y\in\mathbb{R}$.

Задание 6. Изобразить на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ множество точек, определяемое следующими условиями:

$$\begin{cases}|Im\,\overline{z}|\geq 2;\\ |z|\leq 4.\end{cases}$$

Задание 7. Доказать формулу Эйлера:

$$\sin\varphi=\frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}.$$

Вариант 10

Задание 1. Даны комплексные числа:

$$z_1=7-5i;\ \ z_2=-8+2i.$$

Вычислить:

1) z_1+z_2;
2) z_1-z_2;
3) $z_1\cdot z_2$;
4) $\frac{z_1}{z_2}$.

Задание 2. Выполнить действия над комплексными числами, результат представить в алгебраической форме:

$$\frac{i^5+2}{5i^{14}}+\frac{i-1}{i+2}.$$

Задание 3. Даны комплексные числа:

$$z_1=-4;\ \ z_2=-4-4i;\ \ z_3=-\sqrt{3}+i.$$

Изобразить эти числа на комплексной плоскости и представить их в тригонометрической и показательной формах.

Задание 4. Используя тригонометрическую форму комплексных чисел, полученную в задании 3, вычислить:

1) $(z_3)^{12}$;
2) $\sqrt[3]{z_1}$.

Задание 5. Решить уравнение:

1) $x^4+6x^2+8=0, x\in\mathbb{C}$;
2) $z+2i\cdot\overline{z}-3=0, z\in\mathbb{C}$.

Задание 6. Изобразить на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ множество точек, определяемое следующими условиями:

$$\begin{cases}|z-i|\leq 2;\\ Im\,z\geq 1.\end{cases}$$

Задание 7. Доказать:

$$e^{\pi n i} = (-1)^n, n \in \mathbb{N}.$$

Вариант 11

Задание 1. Даны комплексные числа:

$$z_1 = -3 + 5i;\ \ z_2 = 12 - i.$$

Вычислить:

1) $z_1 + z_2$;
2) $z_1 - z_2$;
3) $z_1 \cdot z_2$;
4) $\dfrac{z_1}{z_2}$.

Задание 2. Выполнить действия над комплексными числами, результат представить в алгебраической форме:

$$\frac{4 + i^{17}}{2 - i} + i^6 + \frac{1}{i}.$$

Задание 3. Даны комплексные числа:

$$z_1 = 3i;\ \ z_2 = 3 - 3i;\ \ z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i.$$

Изобразить эти числа на комплексной плоскости и представить их в тригонометрической и показательной формах.

Задание 4. Используя тригонометрическую форму комплексных чисел, полученную в задании 3, вычислить:

1) $(z_3)^{39}$;
2) $\sqrt{z_2}$.

Задание 5. Решить уравнение:

1) $x^3 - 6x^2 + 10x = 0, x \in \mathbb{C}$;
2) $x + y - ixy = 1, x, y \in \mathbb{R}$.

Задание 6. Изобразить на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ множество точек, определяемое следующим условием:

$$|\pi - \arg z| < \frac{\pi}{4}.$$

Задание 7. Доказать формулу Эйлера:

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}.$$

Вариант 12

Задание 1. Даны комплексные числа:

$$z_1 = 4 - 10i;\ \ z_2 = -2 + 7i.$$

Вычислить:

1) $z_1 + z_2$;
2) $z_1 - z_2$;
3) $z_1 \cdot z_2$;
4) $\dfrac{z_1}{z_2}$.

Задание 2. Выполнить действия над комплексными числами, результат представить в алгебраической форме:

$$8i^{65} - \frac{2 + 5i}{1 + i}.$$

Задание 3. Даны комплексные числа:

$$z_1 = -2;\ \ z_2 = \sqrt{3} + i;\ \ z_3 = -2 + 2i.$$

Изобразить эти числа на комплексной плоскости и представить их в тригонометрической и показательной формах.

Задание 4. Используя тригонометрическую форму комплексных чисел, полученную в задании 3, вычислить:

1) $(z_2)^{21}$;

2) $\sqrt[3]{z_1}$.

Задание 5. Решить уравнение:

1) $x^3 + 2x^2 + 5x = 0, x \in \mathbb{C}$;

2) $\dfrac{1}{z-i} + \dfrac{2+i}{1+i} = 1, z \in \mathbb{C}$.

Задание 6. Изобразить на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ множество точек, определяемое следующим условием:

$$Im\,\overline{z}^2 \geq 1.$$

Задание 7. Доказать:

$$Re\,\frac{z-1}{z+1} = 0 \Leftrightarrow |z| = 1, \ \ (z \neq -1).$$

Вариант 13

Задание 1. Даны комплексные числа:

$$z_1 = -6 - 8i; \ \ z_2 = 5 - 9i.$$

Вычислить:

1) $z_1 + z_2$;

2) $z_1 - z_2$;

3) $z_1 \cdot z_2$;

4) $\dfrac{z_1}{z_2}$.

Задание 2. Выполнить действия над комплексными числами, результат представить в алгебраической форме:

$$\frac{2i}{2+i} - \frac{i^{96}}{5}.$$

Задание 3. Даны комплексные числа:

$$z_1 = 1; \ \ z_2 = 1 + i; \ \ z_3 = -\sqrt{3} - i.$$

Изобразить эти числа на комплексной плоскости и представить их в тригонометрической и показательной формах.

Задание 4. Используя тригонометрическую форму комплексных чисел, полученную в задании 3, вычислить:

1) $(z_2)^{104}$;

2) $\sqrt[4]{z_1}$.

Задание 5. Решить уравнение:

1) $x^4 + 4x^2 + 4 = 0, x \in \mathbb{C}$;

2) $(2x + i)(1 + i) + 3(x + y)i = 0, x, y \in \mathbb{R}$.

Задание 6. Изобразить на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ множество точек, определяемое следующим условием:

$$|z| \geq 2 - Im\,z.$$

Задание 7. Доказать:

$$e^{2\pi n i} = 1, n \in \mathbb{N}.$$

Вариант 14

Задание 1. Даны комплексные числа:

$$z_1 = 3 - 9i;\ \ z_2 = -5 + 4i.$$

Вычислить:

1) $z_1 + z_2$;
2) $z_1 - z_2$;
3) $z_1 \cdot z_2$;
4) $\frac{z_1}{z_2}$.

Задание 2. Выполнить действия над комплексными числами, результат представить в алгебраической форме:

$$\frac{1}{(2-i)^2} + 2i(1 + i^{32}).$$

Задание 3. Даны комплексные числа:

$$z_1 = -3;\ \ z_2 = 2 - 2i;\ \ z_3 = -2\sqrt{3} + 2i.$$

Изобразить эти числа на комплексной плоскости и представить их в тригонометрической и показательной формах.

Задание 4. Используя тригонометрическую форму комплексных чисел, полученную в задании 3, вычислить:

1) $(z_2)^{84}$;
2) $\sqrt[3]{z_3}$.

Задание 5. Решить уравнение:

1) $x^3 + 2x^2 + 4x = 0, x \in \mathbb{C}$;
2) $(-x + 3yi) + \left(\frac{3}{2}y + 2xi\right) = 4 + 8i, x, y \in \mathbb{R}$.

Задание 6. Изобразить на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ множество точек, определяемое следующими условиями:

$$\begin{cases} Im\,(z - i) \le 0; \\ -\frac{\pi}{4} \le \arg z \le \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Задание 7. Доказать:

$$e^{\pi n i} = (-1)^n, n \in \mathbb{N}.$$

Вариант 15

Задание 1. Даны комплексные числа:

$$z_1 = -10 + 3i;\ \ z_2 = 6 + 2i.$$

Вычислить:

1) $z_1 + z_2$;
2) $z_1 - z_2$;
3) $z_1 \cdot z_2$;
4) $\frac{z_1}{z_2}$.

Задание 2. Выполнить действия над комплексными числами, результат представить в алгебраической форме:

$$\frac{(i^{31} - 2)^3}{2 - i} - \frac{i}{i + 3}.$$

Задание 3. Даны комплексные числа:

$$z_1 = 32;\ \ z_2 = \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}i;\ \ z_3 = \sqrt{3} + i.$$

Изобразить эти числа на комплексной плоскости и представить их в тригонометрической и показательной формах.

Задание 4. Используя тригонометрическую форму комплексных чисел, полученную в задании 3, вычислить:

1) $(z_3)^{60}$; 2) $\sqrt[5]{z_1}$.

Задание 5. Решить уравнение:

1) $x^3 + 4x^2 + 5x = 0, x \in \mathbb{C}$;

2) $(4 - x)(1 + i) + (i - y)i = 13 + i, x, y \in \mathbb{R}$.

Задание 6. Изобразить на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ множество точек, определяемое следующими условиями:

$$\begin{cases} |z| \le 4; \\ 0 \le \arg z \le \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Задание 7. Выразить $\sin 3\varphi$ через $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ с помощью формулы Муавра.

Вариант 16

Задание 1. Даны комплексные числа:

$$z_1 = -1 - 10i;\ \ z_2 = 11 - i.$$

Вычислить:

1) $z_1 + z_2$; 3) $z_1 \cdot z_2$;

2) $z_1 - z_2$; 4) $\dfrac{z_1}{z_2}$.

Задание 2. Выполнить действия над комплексными числами, результат представить в алгебраической форме:

$$i^{63} - \frac{1 + i}{1 - i}.$$

Задание 3. Даны комплексные числа:

$$z_1 = -i;\ \ z_2 = 2 + 2i;\ \ z_3 = -1 - \sqrt{3}i.$$

Изобразить эти числа на комплексной плоскости и представить их в тригонометрической и показательной формах.

Задание 4. Используя тригонометрическую форму комплексных чисел, полученную в задании 3, вычислить:

1) $(z_2)^{120}$; 2) $\sqrt[3]{z_1}$.

Задание 5. Решить уравнение:

1) $x^4 + 6x^2 + 9 = 0, x \in \mathbb{C}$;

2) $(2 - 7i)x + (8 + 6i)y = (-6 + 5i)x - 8, x, y \in \mathbb{R}$.

Задание 6. Изобразить на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ множество точек, определяемое следующими условиями:

$$\begin{cases} |z - 1| \le 1; \\ -\dfrac{\pi}{4} \le \arg z \le \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Задание 7. Доказать:

$$\overline{\overline{z_1} + \overline{z_2}} = z_1 + z_2.$$

Вариант 17

Задание 1. Даны комплексные числа:

$$z_1 = -5 + 7i;\ \ z_2 = -9 + 2i.$$

Вычислить:

1) $z_1 + z_2$; 3) $z_1 \cdot z_2$;

2) $z_1 - z_2$;

4) $\frac{z_1}{z_2}$.

Задание 2. Выполнить действия над комплексными числами, результат представить в алгебраической форме:

$$\frac{-1-3i}{1-i^{14}}-\frac{1}{i}.$$

Задание 3. Даны комплексные числа:

$$z_1 = -9i;\ \ z_2 = -2+2\sqrt{3}i;\ \ z_3 = 4-4i.$$

Изобразить эти числа на комплексной плоскости и представить их в тригонометрической и показательной формах.

Задание 4. Используя тригонометрическую форму комплексных чисел, полученную в задании 3, вычислить:

1) $(z_2)^{60}$;

2) $\sqrt[4]{z_1}$.

Задание 5. Решить уравнение:

1) $x^4 + 4x^2 + 3 = 0, x \in \mathbb{C}$;

2) $y^2 + iy^2 + 6 + i = 2x + ix, x, y \in \mathbb{R}$.

Задание 6. Изобразить на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ множество точек, определяемое следующими условиями:

$$\begin{cases} |z+1+i| \geq 1; \\ Re\, z \geq -1. \end{cases}$$

Задание 7. Доказать:

$$z+\overline{z} = 2Re\, z;\ \ z-\overline{z} = 2iIm\, z.$$

Вариант 18

Задание 1. Даны комплексные числа:

$$z_1 = 3-12i;\ \ z_2 = 8-5i.$$

Вычислить:

1) $z_1 + z_2$;

2) $z_1 - z_2$;

3) $z_1 \cdot z_2$;

4) $\frac{z_1}{z_2}$.

Задание 2. Выполнить действия над комплексными числами, результат представить в алгебраической форме:

$$(2i-1)^2-\frac{4}{i^{49}}.$$

Задание 3. Даны комплексные числа:

$$z_1 = -\frac{1}{2}i;\ \ z_2 = -1+\sqrt{3}i;\ \ z_3 = -\sqrt{2}-\sqrt{2}i.$$

Изобразить эти числа на комплексной плоскости и представить их в тригонометрической и показательной формах.

Задание 4. Используя тригонометрическую форму комплексных чисел, полученную в задании 3, вычислить:

1) $(z_2)^{27}$;

2) $\sqrt[4]{z_3}$.

Задание 5. Решить уравнение:

1) $x^4 - 6x^3 + 25x^2 = 0, x \in \mathbb{C}$;

2) $|z| - z = 1 + 2i, z \in \mathbb{C}$.

Задание 6. Изобразить на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ множество точек, определяемое следующими условиями:

$$2 \le |z-2| \le 3.$$

Задание 7. Доказать формулу Эйлера:

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}.$$

Вариант 19

Задание 1. Даны комплексные числа:

$$z_1 = -6+8i;\;\; z_2 = -14+3i.$$

Вычислить:

1) z_1+z_2;
2) z_1-z_2;
3) $z_1 \cdot z_2$;
4) $\frac{z_1}{z_2}$.

Задание 2. Выполнить действия над комплексными числами, результат представить в алгебраической форме:

$$\frac{2i}{2+i}-\frac{1}{5i^{34}}.$$

Задание 3. Даны комплексные числа:

$$z_1 = -8i;\;\; z_2 = 1+i;\;\; z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i.$$

Изобразить эти числа на комплексной плоскости и представить их в тригонометрической и показательной формах.

Задание 4. Используя тригонометрическую форму комплексных чисел, полученную в задании 3, вычислить:

1) $(z_2)^{80}$;
2) $\sqrt[3]{z_1}$.

Задание 5. Решить уравнение:

1) $x^5-6x^4+11x^3=0, x\in\mathbb{C}$;
2) $z^2+\overline{z}=0, z\in\mathbb{C}$.

Задание 6. Изобразить на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ множество точек, определяемое следующим условием:

$$|z-i| = |z+2|.$$

Задание 7. Доказать формулу Эйлера:

$$\sin\varphi = \frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}.$$

Вариант 20

Задание 1. Даны комплексные числа:

$$z_1 = 6-7i;\;\; z_2 = -9-5i.$$

Вычислить:

1) z_1+z_2;
2) z_1-z_2;
3) $z_1 \cdot z_2$;
4) $\frac{z_1}{z_2}$.

Задание 2. Выполнить действия над комплексными числами, результат представить в алгебраической форме:

$$\frac{(2-i)^2}{i-1}+2i^{56}.$$

Задание 3. Даны комплексные числа:

$$z_1=3;\ \ z_2=2+2\sqrt{3}i;\ \ z_3=2i.$$

Изобразить эти числа на комплексной плоскости и представить их в тригонометрической и показательной формах.

Задание 4. Используя тригонометрическую форму комплексных чисел, полученную в задании 3, вычислить:

1) $(z_2)^{30}$;
2) $\sqrt[4]{z_1}$.

Задание 5. Решить уравнение:

1) $x^3-4x^2+16x=0, x\in\mathbb{C}$;
2) $-\dfrac{1}{2}i(x-iy)+i\left(\dfrac{1}{2}x^2+ixy\right)=-\dfrac{1}{2}+i, x,y\in\mathbb{R}$.

Задание 6. Изобразить на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ множество точек, определяемое следующими условиями:

$$\begin{cases}|z-i|\le 1;\\ \dfrac{\pi}{4}\le \arg z\le\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Задание 7. Выразить $\cos 3\varphi$ через $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ с помощью формулы Муавра.

Вариант 21

Задание 1. Даны комплексные числа:

$$z_1=5-9i;\ \ z_2=-11+4i.$$

Вычислить:

1) z_1+z_2;
2) z_1-z_2;
3) $z_1\cdot z_2$;
4) $\dfrac{z_1}{z_2}$.

Задание 2. Выполнить действия над комплексными числами, результат представить в алгебраической форме:

$$\frac{1}{1+4i}-\frac{i^{29}}{4-i}.$$

Задание 3. Даны комплексные числа:

$$z_1=5i;\ \ z_2=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{3}}i;\ \ z_3=\sqrt{3}-\sqrt{3}i.$$

Изобразить эти числа на комплексной плоскости и представить их в тригонометрической и показательной формах.

Задание 4. Используя тригонометрическую форму комплексных чисел, полученную в задании 3, вычислить:

1) $(z_3)^{10}$;
2) $\sqrt[3]{z_1}$.

Задание 5. Решить уравнение:

1) $x^4+2x^2+1=0, x\in\mathbb{C}$;
2) $(2+3i)x+(8+i)y=2i-6, x,y\in\mathbb{R}$.

Задание 6. Изобразить на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ множество точек, определяемое следующими условиями:

$$\begin{cases}|Im\,z|\le 2;\\ |z|>4.\end{cases}$$

Задание 7. Доказать:

$$\overline{\overline{z_1} + \overline{z_2}} = z_1 + z_2.$$

Вариант 22

Задание 1. Даны комплексные числа:

$$z_1 = -7 - 3i;\;\; z_2 = 4 + 8i.$$

Вычислить:

1) $z_1 + z_2$;
2) $z_1 - z_2$;
3) $z_1 \cdot z_2$;
4) $\dfrac{z_1}{z_2}$.

Задание 2. Выполнить действия над комплексными числами, результат представить в алгебраической форме:

$$(1 + 3i)^2 + \frac{1 + i}{2i^{30}}.$$

Задание 3. Даны комплексные числа:

$$z_1 = -2i;\;\; z_2 = -2 - 2\sqrt{3}i;\;\; z_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i.$$

Изобразить эти числа на комплексной плоскости и представить их в тригонометрической и показательной формах.

Задание 4. Используя тригонометрическую форму комплексных чисел, полученную в задании 3, вычислить:

1) $(z_3)^{24}$;
2) $\sqrt[3]{z_1}$.

Задание 5. Решить уравнение:

1) $4x^4 - 2x^3 + x^2 = 0, x \in \mathbb{C}$;
2) $\dfrac{2 + 5i}{x - y} - \dfrac{1 - 3i}{x + y} = \dfrac{-7x + 12i}{y^2 - x^2}, x, y \in \mathbb{R}$.

Задание 6. Изобразить на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ множество точек, определяемое следующими условиями:

$$\begin{cases} |z - 1| \le 1; \\ 0 \le \arg z \le \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Задание 7. Доказать:

$$e^{2\pi n i} = 1, n \in \mathbb{N}.$$

Вариант 23

Задание 1. Даны комплексные числа:

$$z_1 = -3 + 6i;\;\; z_2 = 8 - 2i.$$

Вычислить:

1) $z_1 + z_2$;
2) $z_1 - z_2$;
3) $z_1 \cdot z_2$;
4) $\dfrac{z_1}{z_2}$.

Задание 2. Выполнить действия над комплексными числами, результат представить в алгебраической форме:

$$\frac{1 + 2i}{i^{50}} + \frac{1 + i}{1 - i}.$$

Задание 3. Даны комплексные числа:

$$z_1 = -9i;\ \ z_2 = 1 - i;\ \ z_3 = -\sqrt{3} - i.$$

Изобразить эти числа на комплексной плоскости и представить их в тригонометрической и показательной формах.

Задание 4. Используя тригонометрическую форму комплексных чисел, полученную в задании 3, вычислить:

1) $(z_3)^{36}$;

2) $\sqrt[4]{z_2}$.

Задание 5. Решить уравнение:

1) $x^6 - 12x^4 + 20x^2 = 0, x \in \mathbb{C}$;

2) $|z| + z = 2 + i, z \in \mathbb{C}$.

Задание 6. Изобразить на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ множество точек, определяемое следующим условием:

$$|z| = \left|z + \frac{3}{i}\right|.$$

Задание 7. Доказать:

$$Re\,\frac{z-1}{z+1} = 0 \Leftrightarrow |z| = 1,\ \ (z \neq -1).$$

Вариант 24

Задание 1. Даны комплексные числа:

$$z_1 = -1 - 5i;\ \ z_2 = 3 - 8i.$$

Вычислить:

1) $z_1 + z_2$;

2) $z_1 - z_2$;

3) $z_1 \cdot z_2$;

4) $\frac{z_1}{z_2}$.

Задание 2. Выполнить действия над комплексными числами, результат представить в алгебраической форме:

$$\frac{i^{17}}{(1-i)^2} + 2i^{79}.$$

Задание 3. Даны комплексные числа:

$$z_1 = 8i;\ \ z_2 = -3 + 3i;\ \ z_3 = \sqrt{2} - \sqrt{\frac{2}{3}}\,i.$$

Изобразить эти числа на комплексной плоскости и представить их в тригонометрической и показательной формах.

Задание 4. Используя тригонометрическую форму комплексных чисел, полученную в задании 3, вычислить:

1) $(z_3)^{17}$;

2) $\sqrt[3]{z_1}$.

Задание 5. Решить уравнение:

1) $x^3 + 4x^2 + 8x = 0, x \in \mathbb{C}$;

2) $\overline{z} = -4z + 1, z \in \mathbb{C}$.

Задание 6. Изобразить на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ множество точек, определяемое следующими условиями:

$$\begin{cases} 1 \leq |z + 2i| \leq 3; \\ -2 \leq \operatorname{Re} z \leq \dfrac{5}{2}. \end{cases}$$

Задание 7. Доказать:

$$z+\bar{z}=2Re\,z;\ \ z-\bar{z}=2iIm\,z.$$

Вариант 25

Задание 1. Даны комплексные числа:

$$z_1=2-7i;\ \ z_2=-3+5i.$$

Вычислить:

1) z_1+z_2;
2) z_1-z_2;
3) $z_1\cdot z_2$;
4) $\frac{z_1}{z_2}$.

Задание 2. Выполнить действия над комплексными числами, результат представить в алгебраической форме:

$$(1-2i)^3-\frac{4i^9}{4-3i}.$$

Задание 3. Даны комплексные числа:

$$z_1=-9i;\ \ z_2=1-i;\ \ z_3=-\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i.$$

Изобразить эти числа на комплексной плоскости и представить их в тригонометрической и показательной формах.

Задание 4. Используя тригонометрическую форму комплексных чисел, полученную в задании 3, вычислить:

1) $(z_3)^{60}$;
2) $\sqrt[4]{z_2}$.

Задание 5. Решить уравнение:

1) $x^5-6x^4+11x^3=0, x\in\mathbb{C}$;
2) $\sqrt{x^2-2x+8}+(x+4)i=y(2+i), x,y\in\mathbb{R}$.

Задание 6. Изобразить на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ множество точек, определяемое следующими условиями:

$$\begin{cases}|z-1-i|<1;\\ |\arg z|\le\frac{\pi}{4}.\end{cases}$$

Задание 7. Доказать:

$$\frac{\sqrt{1+x^2}+ix}{x-i\sqrt{1+x^2}}=i, x\in\mathbb{R}.$$

Вариант 26

Задание 1. Даны комплексные числа:

$$z_1=-9+8i;\ \ z_2=2-4i.$$

Вычислить:

1) z_1+z_2;
2) z_1-z_2;
3) $z_1\cdot z_2$;
4) $\frac{z_1}{z_2}$.

Задание 2. Выполнить действия над комплексными числами, результат представить в алгебраической форме:

$$\sqrt{5}\cdot\left(\frac{1}{1+4i}+\frac{1}{4-i}\right)+\frac{1}{\sqrt{5}\cdot i^{36}}.$$

Задание 3. Даны комплексные числа:

$$z_1=4i;\ \ z_2=1-i;\ \ z_3=-1-\sqrt{3}i.$$

Изобразить эти числа на комплексной плоскости и представить их в тригонометрической и показательной формах.

Задание 4. Используя тригонометрическую форму комплексных чисел, полученную в задании 3, вычислить:

1) $(z_2)^{76}$;   2) $\sqrt[4]{z_1}$.

Задание 5. Решить уравнение:

1) $x^4 + 18x^2 + 81 = 0, x \in \mathbb{C}$;

2) $z + 2i \cdot \overline{z} - 3 = 0, z \in \mathbb{C}$.

Задание 6. Изобразить на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ множество точек, определяемое следующими условиями:

$$\begin{cases} |Re\, z| \leq 2; \\ |\operatorname{Im} z| < 1. \end{cases}$$

Задание 7. Доказать:

$$\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}.$$

Вариант 27

Задание 1. Даны комплексные числа:

$$z_1 = 2 + 10i;\ \ z_2 = -5 - 6i.$$

Вычислить:

1) $z_1 + z_2$;   3) $z_1 \cdot z_2$;

2) $z_1 - z_2$;   4) $\frac{z_1}{z_2}$.

Задание 2. Выполнить действия над комплексными числами, результат представить в алгебраической форме:

$$\left(\frac{i^{31} + 2}{i^{38} - 1}\right)^2.$$

Задание 3. Даны комплексные числа:

$$z_1 = 5i;\ \ z_2 = 2 - 2i;\ \ z_3 = -\sqrt{3} + i.$$

Изобразить эти числа на комплексной плоскости и представить их в тригонометрической и показательной формах.

Задание 4. Используя тригонометрическую форму комплексных чисел, полученную в задании 3, вычислить:

1) $(z_3)^{42}$;   2) $\sqrt[3]{z_2}$.

Задание 5. Решить уравнение:

1) $x^3 - 5x^2 + 12x = 0, x \in \mathbb{C}$;

2) $x - y + ixy = i, x, y \in \mathbb{R}$.

Задание 6. Изобразить на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ множество точек, определяемое следующими условиями:

$$\begin{cases} |z + i| \leq 2; \\ Re\, z > \sqrt{2}. \end{cases}$$

Задание 7. Доказать:

$$e^{2\pi n i} = 1, n \in \mathbb{N}.$$

Вариант 28

Задание 1. Даны комплексные числа:

$$z_1 = -5 + 7i;\;\; z_2 = 2 - 3i.$$

Вычислить:

1) $z_1 + z_2$;

2) $z_1 - z_2$;

3) $z_1 \cdot z_2$;

4) $\frac{z_1}{z_2}$.

Задание 2. Выполнить действия над комплексными числами, результат представить в алгебраической форме:

$$\frac{2-i}{1+i} + i^{125}.$$

Задание 3. Даны комплексные числа:

$$z_1 = 16i;\;\; z_2 = 3 + 3i;\;\; z_3 = -1 - \sqrt{3}i.$$

Изобразить эти числа на комплексной плоскости и представить их в тригонометрической и показательной формах.

Задание 4. Используя тригонометрическую форму комплексных чисел, полученную в задании 3, вычислить:

1) $(z_3)^{90}$;

2) $\sqrt[4]{z_1}$.

Задание 5. Решить уравнение:

1) $x^4 + 6x^2 + 9 = 0, x \in \mathbb{C}$;

2) $\frac{i}{x} + \frac{i}{y} + \frac{1}{6} = \frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{5i}{y}, x, y \in \mathbb{R}$.

Задание 6. Изобразить на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ множество точек, определяемое следующими условиями:

$$\begin{cases} |z + i| \le 1; \\ |z + 1| > 1. \end{cases}$$

Задание 7. Выразить $\sin 3\varphi$ через $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ с помощью формулы Муавра.

Вариант 29

Задание 1. Даны комплексные числа:

$$z_1 = 3 - 4i;\;\; z_2 = -6 + 7i.$$

Вычислить:

1) $z_1 + z_2$;

2) $z_1 - z_2$;

3) $z_1 \cdot z_2$;

4) $\frac{z_1}{z_2}$.

Задание 2. Выполнить действия над комплексными числами, результат представить в алгебраической форме:

$$\frac{2-i}{1+i} + i^{125}.$$

Задание 3. Даны комплексные числа:

$$z_1 = 3i;\;\; z_2 = -5 + 5i;\;\; z_3 = -1 - \sqrt{3}i.$$

Изобразить эти числа на комплексной плоскости и представить их в тригонометрической и показательной формах.

Задание 4. Используя тригонометрическую форму комплексных чисел, полученную в задании 3, вычислить:

1) $(z_3)^{30}$;

2) $\sqrt[3]{z_1}$.

Задание 5. Решить уравнение:

1) $x^5 + 6x^4 + 5x^3 = 0, x \in \mathbb{C}$;

2) $(-x+3yi)+\left(\frac{3}{2}y+2xi\right)=4+8i, x, y\in\mathbb{R}$.

Задание 6. Изобразить на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ множество точек, определяемое следующим условием:

$$|z-i|=|z+2|.$$

Задание 7. Доказать:

$$Re\,\frac{z-1}{z+1}=0\Leftrightarrow|z|=1,\ \ (z\neq-1).$$

Вариант 30

Задание 1. Даны комплексные числа:

$$z_1=-8+5i;\ \ z_2=7-2i.$$

Вычислить:

1) z_1+z_2;
2) z_1-z_2;
3) $z_1\cdot z_2$;
4) $\frac{z_1}{z_2}$.

Задание 2. Выполнить действия над комплексными числами, результат представить в алгебраической форме:

$$\left(\frac{1+i^3}{1-i}\right)^{10}+i^{10}+\frac{1}{1-i}.$$

Задание 3. Даны комплексные числа:

$$z_1=-i;\ \ z_2=-2+2i;\ \ z_3=1-\sqrt{3}i.$$

Изобразить эти числа на комплексной плоскости и представить их в тригонометрической и показательной формах.

Задание 4. Используя тригонометрическую форму комплексных чисел, полученную в задании 3, вычислить:

1) $(z_3)^{60}$;
2) $\sqrt[3]{z_1}$.

Задание 5. Решить уравнение:

1) $x^3-6x^4+11x^3=0, x\in\mathbb{C}$;
2) $\frac{2+5i}{x-y}-\frac{1-3i}{x+y}=\frac{-7x+12i}{y^2-x^2}, x, y\in\mathbb{R}$.

Задание 6. Изобразить на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ множество точек, определяемое следующим условием:

$$\left|\frac{1}{z-i}\right|\geq 1.$$

Задание 7. Доказать:

$$\frac{\sqrt{1+x^2}+ix}{x-i\sqrt{1+x^2}}=i, x\in\mathbb{R}.$$

Раздел 4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Вариант 1

Задание 1. Найти общий интеграл дифференциального уравнения с разделяющимися переменными:

$$x\sqrt{4+y^2}dx+y\sqrt{1+x^2}dy=0.$$

Задание 2. Найти общий интеграл однородного дифференциального уравнения первого порядка:

$$y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 12.$$

Задание 3. Найти решение задачи Коши линейного дифференциального уравнения первого порядка:

$$y' - \frac{y}{x} = -2\frac{\ln x}{x}, \qquad y(1) = 1.$$

Задание 4. Найти решение задачи Коши уравнения Бернулли:

$$y' + 2xy = 2x^3y^3, \qquad y(0) = \sqrt{2}.$$

Задание 5. Найти общий интеграл дифференциального уравнения в полных дифференциалах:

$$\frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x}dx - \left(\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x} + 2y\right)dy = 0.$$

Задание 6. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$xy''' + y'' + x = 0.$$

Задание 7. Найти решение задачи Коши дифференциального уравнения:

$$y'' = 2y^3, \qquad y(-1) = 1, y'(-1) = 1.$$

Задание 8. Найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

1) $y'' - 5y' + 6y = 0$; 2) $y'' + 6y' + 9y = 0$;
3) $y'' + 4y' + 29y = 0$; 4) $y''' - 4y' = 0$;
5) $y^{IV} - 8y''' + 16y'' = 0$.

Задание 9. Найти общее решение (для уравнения 4 решить задачу Коши) линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

1) $y''' - 13y'' + 12y' = x - 1$;
2) $y''' - 5y'' + 7y' - 3y = (20 - 16x)e^{-x}$;
3) $y'' + 2y' + 5y = -2\sin x$;
4) $y'' + 16y' = \dfrac{16}{\sin 4x}, \qquad y\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = 3, y'\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = 2\pi.$

Задание 10. Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 7x + 3y. \end{cases}$$

Вариант 2

Задание 1. Найти общий интеграл дифференциального уравнения с разделяющимися переменными:

$$6xdx - 6ydy = 2x^2ydy - 3xy^2dx.$$

Задание 2. Найти общий интеграл однородного дифференциального уравнения первого порядка:

$$xy' = \frac{3y^3 + 8yx^2}{2y^2 + 4x^2}.$$

Задание 3. Найти решение задачи Коши линейного дифференциального уравнения первого порядка:

$$y' - \frac{y}{x} = x^2, \qquad y(1) = 0.$$

Задание 4. Найти решение задачи Коши уравнения Бернулли:

$$y' + xy = y^2 e^{-x}(1 + x), \qquad y(0) = 1.$$

Задание 5. Найти общий интеграл дифференциального уравнения в полных дифференциалах:

$$e^y dx + (\cos y + xe^y)dy = 0.$$

Задание 6. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$(1 + \sin x)y''' = \cos x \cdot y''.$$

Задание 7. Найти решение задачи Коши дифференциального уравнения:

$$y'' = 8y^3, \qquad y(0) = 1, y'(0) = 2.$$

Задание 8. Найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

1) $y'' - 8y' + 7y = 0$; 2) $y'' - 4y' + 4y = 0$;
3) $y'' - 4y' + 13y = 0$; 4) $y''' - 16y' = 0$;
5) $y^{IV} + 5y'' - 36y = 0$.

Задание 9. Найти общее решение (для уравнения 4 решить задачу Коши) линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

1) $y^{IV} + y''' = 12x + 6$;
2) $y''' - 7y'' + 15y' - 9y = (8x - 12)e^x$;
3) $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x} \cos 5x$;
4) $y'' + 9y = \dfrac{9}{\cos 3x}, \qquad y(0) = 1, y'(0) = 0$.

Задание 10. Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y. \end{cases}$$

Вариант 3

Задание 1. Найти общий интеграл дифференциального уравнения с разделяющимися переменными:

$$\sqrt{3 + y^2}dx - ydy = x^2 ydy.$$

Задание 2. Найти общий интеграл однородного дифференциального уравнения первого порядка:

$$xy' = \frac{3y^3 + 14yx^2}{2y^2 + 7x^2}.$$

Задание 3. Найти решение задачи Коши линейного дифференциального уравнения первого порядка:

$$y' - y\cos x = -\sin 2x, \qquad y(0) = 3.$$

Задание 4. Найти решение задачи Коши уравнения Бернулли:

$$y' + 4x^3 y = 4y^2 e^{4x}(1 - x^3), \qquad y(0) = -1.$$

Задание 5. Найти общий интеграл дифференциального уравнения в полных дифференциалах:

$$\left(3x^2+\frac{2}{y}\cos\frac{2x}{y}\right)dx-\frac{2x}{y^2}\cos\frac{2x}{y}dy=0.$$

Задание 6. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$xy'''+y''=1.$$

Задание 7. Найти решение задачи Коши дифференциального уравнения:

$$4y^2y''=y^4-1,\qquad y(0)=\sqrt{2}, y'(0)=\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Задание 8. Найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

1) $y''+y'-6y=0$; 2) $y''-8y'+16y=0$;
3) $y''+6y'+10y=0$; 4) $y'''+y''=0$;
5) $y^{IV}-3y''-4y=0$.

Задание 9. Найти общее решение (для уравнения 4 решить задачу Коши) линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

1) $y'''-4y''=32-384x^2$;
2) $y'''-y''-4y'+4y=(7-6x)e^x$;
3) $y''+y'=2\cos 5x+3\sin 5x$;
4) $y''+y=4\operatorname{ctg} x$, $\quad y\left(\frac{\pi}{2}\right)=4, y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=4$.

Задание 10. Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-x+8y,\\ \dfrac{dy}{dt}=x+y.\end{cases}$$

Вариант 4

Задание 1. Найти общий интеграл дифференциального уравнения с разделяющимися переменными:

$$4xdx-3ydy=3x^2ydy-2xy^2dx.$$

Задание 2. Найти общий интеграл однородного дифференциального уравнения первого порядка:

$$y'=\frac{x^2+xy-3y^2}{x^2-4xy}.$$

Задание 3. Найти решение задачи Коши линейного дифференциального уравнения первого порядка:

$$y'-\frac{2x-5}{x^2}y=5,\qquad y(2)=4.$$

Задание 4. Найти решение задачи Коши уравнения Бернулли:

$$2y'+y\cos x=y^{-1}\cos x\,(1+\sin x),\qquad y(0)=1.$$

Задание 5. Найти общий интеграл дифференциального уравнения в полных дифференциалах:

$$\left(xy^2+\frac{x}{y^2}\right)dx+\left(x^2y-\frac{x^2}{y^3}\right)dy=0.$$

Задание 6. Найти общее решение дифференциального уравнения:
$$xy''' - y'' + \frac{1}{x} = 0.$$
Задание 7. Найти решение задачи Коши дифференциального уравнения:
$$y''y^3 + 4 = 0, \qquad y(0) = -1, y'(0) = -2.$$
Задание 8. Найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

1) $y'' - 4y' + 3y = 0$;
2) $y'' + 4y' + 4y = 0$;
3) $y'' + 4y' + 29y = 0$;
4) $y''' - 10y'' + 25y' = 0$;
5) $y^{IV} + 49y'' = 0$.

Задание 9. Найти общее решение (для уравнения 4 решить задачу Коши) линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

1) $y^{IV} + y''' = x$;
2) $y''' - y'' - 2y' = (6x - 11)e^{-x}$;
3) $y'' + 2y' + 5y = 10\cos x$;
4) $y'' + 4y = 4\operatorname{ctg} 2x$, $\qquad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3, y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2.$

Задание 10. Решить систему дифференциальных уравнений:
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x - 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y. \end{cases}$$

Вариант 5

Задание 1. Найти общий интеграл дифференциального уравнения с разделяющимися переменными:
$$(1 + e^x)y' = ye^x.$$
Задание 2. Найти общий интеграл однородного дифференциального уравнения первого порядка:
$$y' = \frac{y^2}{x^2} + 4\frac{y}{x} + 2.$$
Задание 3. Найти решение задачи Коши линейного дифференциального уравнения первого порядка:
$$y' + \frac{y}{x} = \sin x, \qquad y(\pi) = \frac{1}{\pi}.$$
Задание 4. Найти решение задачи Коши уравнения Бернулли:
$$8xy' - 12y = -y^3(3 + 5x^2), \qquad y(1) = \sqrt{2}.$$
Задание 5. Найти общий интеграл дифференциального уравнения в полных дифференциалах:
$$\left(2x - 1 - \frac{y}{x^2}\right)dx - \left(2y - \frac{1}{x}\right)dy = 0.$$
Задание 6. Найти общее решение дифференциального уравнения:
$$y''' \operatorname{tg} 5x = 5y''.$$
Задание 7. Найти решение задачи Коши дифференциального уравнения:
$$y'' = 18y^3, \qquad y(1) = 1, y'(1) = 3.$$

Задание 8. Найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

1) $y'' - 9y' + 8y = 0$; 2) $y'' - 2y' + y = 0$;
3) $y'' - 4y' + 13y = 0$; 4) $y''' - 144y' = 0$;
5) $y^{IV} + 5y'' - 36y = 0$.

Задание 9. Найти общее решение (для уравнения 4 решить задачу Коши) линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

1) $y''' + y'' = 49 - 24x^2$;
2) $y''' - 3y' - 2y = -4xe^x$;
3) $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x}\cos x$;
4) $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{1}{1+e^{-x}}, \qquad y(0) = 1 + 2\ln 2, y'(0) = 3\ln 2$.

Задание 10. Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x + 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -3x - y. \end{cases}$$

Вариант 6

Задание 1. Найти общий интеграл дифференциального уравнения с разделяющимися переменными:

$$\sqrt{4 - x^2}y' + xy^2 + x = 0.$$

Задание 2. Найти общий интеграл однородного дифференциального уравнения первого порядка:

$$xy' = \frac{3y^3 + 12yx^2}{2y^2 + 6x^2}.$$

Задание 3. Найти решение задачи Коши линейного дифференциального уравнения первого порядка:

$$y' - y\operatorname{ctg} x = 2x\sin x, \qquad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Задание 4. Найти решение задачи Коши уравнения Бернулли:

$$xy' + y = xy^2, \qquad y(1) = 1.$$

Задание 5. Найти общий интеграл дифференциального уравнения в полных дифференциалах:

$$(y^3 + \cos x)dx + (3xy^2 + e^y)dy = 0.$$

Задание 6. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$-xy''' + 2y'' = \frac{2}{x^2}.$$

Задание 7. Найти решение задачи Коши дифференциального уравнения:

$$y''y^3 + 36 = 0, \qquad y(0) = 3, y'(0) = 2.$$

Задание 8. Найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

1) $y'' + 6y' + 10y = 0$; 2) $y'' + 28y' + 196y = 0$;
3) $y'' - 4y' + 8y = 0$; 4) $y''' - 9y' = 0$;
5) $y^{IV} - 3y'' - 4y = 0$.

Задание 9. Найти общее решение (для уравнения 4 решить задачу Коши) линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:
1) $y^{IV} - 6y''' + 9y'' = 3x - 1$;
2) $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = (18 - 12x)e^{-x}$;
3) $y'' + 2y' = 6e^{x}(\sin x + \cos x)$;
4) $y'' + 4y = 8\operatorname{ctg} 2x, \qquad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 5, y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4.$

Задание 10. Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y, \\ \frac{dy}{dt} = x + 3y. \end{cases}$$

Вариант 7

Задание 1. Найти общий интеграл дифференциального уравнения с разделяющимися переменными:

$$2xdx - ydy = x^2ydy - xy^2dx.$$

Задание 2. Найти общий интеграл однородного дифференциального уравнения первого порядка:

$$xy' = 4\sqrt{x^2 + y^2} + y.$$

Задание 3. Найти решение задачи Коши линейного дифференциального уравнения первого порядка:

$$y' + \frac{3y}{x} = \frac{2}{x^3}, \qquad y(1) = 1.$$

Задание 4. Найти решение задачи Коши уравнения Бернулли:

$$y' - y = xy^2, \qquad y(0) = 1.$$

Задание 5. Найти общий интеграл дифференциального уравнения в полных дифференциалах:

$$2(3xy^2 + 2x^3)dx + 3(2x^2y + y^2)dy = 0.$$

Задание 6. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y'''x\ln x = y''.$$

Задание 7. Найти решение задачи Коши дифференциального уравнения:

$$y'' = 128y^3, \qquad y(0) = 1, y'(0) = 8.$$

Задание 8. Найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:
1) $y'' + 6y' + 5y = 0$;
2) $y'' - 24y' + 144y = 0$;
3) $y'' - 14y' + 49y = 0$;
4) $y^{IV} - 169y'' = 0$;
5) $y^{IV} + 17y'' + 16y = 0$.

Задание 9. Найти общее решение (для уравнения 4 решить задачу Коши) линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:
1) $y^{IV} + 2y''' + y'' = x^2 + x + 1$;
2) $y''' - y'' - y' + y = (3x + 7)e^{2x}$;
3) $y'' + 2y' + 5y = -\cos x$;
4) $y'' + y = \frac{1}{\sin x}, \qquad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$

Задание 10. Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - 3y. \end{cases}$$

Вариант 8

Задание 1. Найти общий интеграл дифференциального уравнения с разделяющимися переменными:

$$x\sqrt{5 + y^2}dx + y\sqrt{4 + x^2}dy = 0.$$

Задание 2. Найти общий интеграл однородного дифференциального уравнения первого порядка:

$$y' = \frac{x + 2y}{2x - y}.$$

Задание 3. Найти решение задачи Коши линейного дифференциального уравнения первого порядка:

$$y' + \frac{y}{x} = 3x, \qquad y(1) = 1.$$

Задание 4. Найти решение задачи Коши уравнения Бернулли:

$$3(xy' + y) = xy^2, \qquad y(1) = 3.$$

Задание 5. Найти общий интеграл дифференциального уравнения в полных дифференциалах:

$$\frac{y}{x^2}dx - \frac{xy + 1}{x}dy = 0.$$

Задание 6. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y''' \operatorname{th} 7x = 7y''.$$

Задание 7. Найти решение задачи Коши дифференциального уравнения:

$$y'' + 18 \sin y \cos^3 y, \qquad y(0) = 0, y'(0) = 3.$$

Задание 8. Найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

1) $y'' - 4y' - 21y = 0$; 2) $y'' + 16y' + 64y = 0$;
3) $y'' - 8y' + 20y = 0$; 4) $y''' - 9y' = 0$;
5) $y^{IV} - 8y''' + 16y'' = 0$.

Задание 9. Найти общее решение (для уравнения 4 решить задачу Коши) линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

1) $y''' + y'' = 15x^2 - 1$;
2) $y''' - 4y'' + 3y' = -4xe^x$;
3) $y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \sin 5x$;
4) $y'' - 6y' + 8y = \dfrac{4}{1 + e^{-2x}}, \qquad y(0) = 1 + 2\ln 2, y'(0) = 6\ln 2.$

Задание 10. Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x - 5y. \end{cases}$$

Вариант 9

Задание 1. Найти общий интеграл дифференциального уравнения с разделяющимися переменными:

$$y(4+e^x)dy - e^x dx = 0.$$

Задание 2. Найти общий интеграл однородного дифференциального уравнения первого порядка:

$$xy' = \frac{3y^3 + 2yx^2}{2y^2 + x^2}.$$

Задание 3. Найти решение задачи Коши линейного дифференциального уравнения первого порядка:

$$y' - 4xy = -4x^3, \qquad y(0) = -\frac{1}{2}.$$

Задание 4. Найти решение задачи Коши уравнения Бернулли:

$$y' + xy = y^2 e^x (x-1), \qquad y(0) = 1.$$

Задание 5. Найти общий интеграл дифференциального уравнения в полных дифференциалах:

$$\frac{dx}{y} - \frac{x + y^2}{y^2} dy = 0.$$

Задание 6. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$(1 + x^2)y'' + 2xy' = x^3.$$

Задание 7. Найти решение задачи Коши дифференциального уравнения:

$$y^3 y'' = 4(y^4 - 1), \qquad y(0) = \sqrt{2}, y'(0) = \sqrt{2}.$$

Задание 8. Найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

1) $y'' - 2y' - 8y = 0$;
2) $y'' - 18y' + 81y = 0$;
3) $y'' - 4y' + 5y = 0$;
4) $y''' - 121y' = 0$;
5) $y^{IV} + 3y'' = 0$.

Задание 9. Найти общее решение (для уравнения 4 решить задачу Коши) линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

1) $y''' + 3y'' + 2y' = 1 - x^2$;
2) $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = (2x - 5)e^x$;
3) $y'' + 2y' = 10e^x(\sin x + \cos x)$;
4) $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}, \qquad y(0) = 1, y'(0) = 0.$

Задание 10. Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y. \end{cases}$$

Вариант 10

Задание 1. Найти общий интеграл дифференциального уравнения с разделяющимися переменными:

$$\sqrt{3 + y^2} + \sqrt{1 - x^2}\, yy' = 0.$$

Задание 2. Найти общий интеграл однородного дифференциального уравнения первого порядка:

$$y' = \frac{x^2 + xy - y^2}{x^2 - 2xy}.$$

Задание 3. Найти решение задачи Коши линейного дифференциального уравнения первого порядка:

$$y' - y\cos x = \sin 2x\,, \qquad y(0) = -1.$$

Задание 4. Найти решение задачи Коши уравнения Бернулли:

$$y' - y\,\mathrm{tg}\,x = -(2/3)y^4\sin x\,, \qquad y(0) = 1.$$

Задание 5. Найти общий интеграл дифференциального уравнения в полных дифференциалах:

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + y\right)dx + \left(x + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)dy = 0.$$

Задание 6. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$2xy''' = y''.$$

Задание 7. Найти решение задачи Коши дифференциального уравнения:

$$4y^3y'' = 16y^4 - 1, \qquad y(0) = \frac{\sqrt{2}}{2}, y'(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Задание 8. Найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

1) $y'' - 5y' - 14y = 0$; 2) $y'' + 14y' + 49y = 0$;
3) $y'' - 7y' + 10y = 0$; 4) $y''' - 9y' = 0$;
5) $y^{IV} - 4y'' + 4y = 0$.

Задание 9. Найти общее решение (для уравнения 4 решить задачу Коши) линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

1) $7y''' - y'' = 12x$;
2) $y''' + y'' - 2y' = (6x + 5)e^x$;
3) $y'' + 2y' = 4e^x(\sin x + \cos x)$;
4) $y'' - 6y' + 8y = \dfrac{4}{2 + e^{-2x}}, \qquad y(0) = 1 + 3\ln 3\,, y'(0) = 10\ln 3$.

Задание 10. Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + 8y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y. \end{cases}$$

Вариант 11

Задание 1. Найти общий интеграл дифференциального уравнения с разделяющимися переменными:

$$(e^x + 8)dy - ye^x dx = 0.$$

Задание 2. Найти общий интеграл однородного дифференциального уравнения первого порядка:

$$xy' = 4\sqrt{2x^2 + y^2} + y.$$

Задание 3. Найти решение задачи Коши линейного дифференциального уравнения первого порядка:

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{x+1}{x}e^x, \qquad y(1) = e.$$

Задание 4. Найти решение задачи Коши уравнения Бернулли:

$$xy' + y = 2y^2 \ln x, \qquad y(1) = \frac{1}{2}.$$

Задание 5. Найти общий интеграл дифференциального уравнения в полных дифференциалах:

$$(5xy^2 - x^3)dx + (5x^2y - y)dy = 0.$$

Задание 6. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$\operatorname{th} x \cdot y^{IV} = y''.$$

Задание 7. Найти решение задачи Коши дифференциального уравнения:

$$y'' = 72y^3, \qquad y(2) = 1, y'(2) = 6.$$

Задание 8. Найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

1) $y'' - 8y' + 12y = 0;$ 2) $y'' + 10y' + 25y = 0;$
3) $y'' + 2y' + 5y = 0;$ 4) $y^{IV} + 4y'' = 0;$
5) $y^{IV} - 2y'' + y = 0.$

Задание 9. Найти общее решение (для уравнения 4 решить задачу Коши) линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

1) $y^{IV} - 3y''' + 3y'' - y' = x - 3;$
2) $y''' + 5y'' + 7y' + 3y = (16x + 20)e^x;$
3) $y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \sin 6x\,;$
4) $y'' + \dfrac{y}{4} = \dfrac{1}{4}\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}, \qquad y(\pi) = 2, y'(\pi) = \dfrac{1}{2}.$

Задание 10. Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - 3y. \end{cases}$$

Вариант 12

Задание 1. Найти общий интеграл дифференциального уравнения с разделяющимися переменными:

$$20xdx - 3ydy = 3x^2ydy - 5xy^2dx.$$

Задание 2. Найти общий интеграл однородного дифференциального уравнения первого порядка:

$$xy' = \frac{3y^3 + 6yx^2}{2y^2 + 3x^2}.$$

Задание 3. Найти решение задачи Коши линейного дифференциального уравнения первого порядка:

$$y' + y\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x\,, \qquad y(0) = 0.$$

Задание 4. Найти решение задачи Коши уравнения Бернулли:

$$y' + 4x^3y = 4y^2e^{-4x}(1 + x^3), \qquad y(0) = 1.$$

Задание 5. Найти общий интеграл дифференциального уравнения в полных дифференциалах:

$$\left(\frac{y}{x^2+y^2}+e^x\right)dx-\frac{xdy}{x^2+y^2}=0.$$

Задание 6. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y''+\frac{2x}{x^2+1}y'=2x.$$

Задание 7. Найти решение задачи Коши дифференциального уравнения:

$$y''+2\sin y\cos^3 y=0, \qquad y(0)=0, y'(0)=1.$$

Задание 8. Найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

1) $y''-2y'-15y=0$; 2) $y''+12y'+36y=0$;
3) $y''+2y'+10y=0$; 4) $y'''+25y'=0$;
5) $y^{IV}-5y''+4y=0$.

Задание 9. Найти общее решение (для уравнения 4 решить задачу Коши) линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

1) $y^{IV}+2y'''+y''=4x^2$;
2) $y'''+6y''+9y'=(16x+24)e^x$;
3) $y''+6y'+13y=e^{-3x}\cos 8x$;
4) $y''+3y'+2y=\frac{e^{-x}}{2+e^x}, \qquad y(0)=0, y'(0)=0.$

Задание 10. Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=2x+3y,\\ \frac{dy}{dt}=6x-y.\end{cases}$$

Вариант 13

Задание 1. Найти общий интеграл дифференциального уравнения с разделяющимися переменными:

$$x\sqrt{3+y^2}dx+y\sqrt{2+x^2}dy=0.$$

Задание 2. Найти общий интеграл однородного дифференциального уравнения первого порядка:

$$y'=\frac{x^2+xy-5y^2}{x^2-6xy}.$$

Задание 3. Найти решение задачи Коши линейного дифференциального уравнения первого порядка:

$$y'-\frac{y}{x+1}=e^x(x+1), \qquad y(0)=1.$$

Задание 4. Найти решение задачи Коши уравнения Бернулли:

$$2xy'-3y=-y^3(12+20x^2), \qquad y(1)=\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Задание 5. Найти общий интеграл дифференциального уравнения в полных дифференциалах:

$$\left(xe^x + \frac{y}{x^2}\right)dx - \frac{1}{x}dy = 0.$$

Задание 6. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$x^2y'' + xy' = 1.$$

Задание 7. Найти решение задачи Коши дифференциального уравнения:

$$y''y^3 + 16 = 0, \qquad y(1) = 2, y'(1) = 2.$$

Задание 8. Найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

1) $y'' - 7y' + 12y = 0$;
2) $y'' - 16y' + 64y = 0$;
3) $y'' - 6y' + 10y = 0$;
4) $y''' - 14y'' + 49y' = 0$;
5) $y^{IV} - 15y'' - 16y = 0$.

Задание 9. Найти общее решение (для уравнения 4 решить задачу Коши) линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

1) $y^{IV} - y''' = 5(x + 2)^2$;
2) $y''' + y'' - y' - y = (8x + 4)e^x$;
3) $y'' + 2y' = -2e^x(\sin x + \cos x)$;
4) $y'' - 3y' = \dfrac{9e^{-3x}}{3 + e^{-3x}}, \qquad y(0) = 4\ln 4, y'(0) = 3(3\ln 4 - 1)$.

Задание 10. Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 8x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -3x + 15y. \end{cases}$$

Вариант 14

Задание 1. Найти общий интеграл дифференциального уравнения с разделяющимися переменными:

$$6xdx - 2ydy = 2x^2ydy - 3xy^2dx.$$

Задание 2. Найти общий интеграл однородного дифференциального уравнения первого порядка:

$$xy' = \frac{3y^3 + 10yx^2}{2y^2 + 5x^2}.$$

Задание 3. Найти решение задачи Коши линейного дифференциального уравнения первого порядка:

$$y' - 3x^2y = \frac{x^2(1 + x^3)}{3}, \qquad y(0) = 0.$$

Задание 4. Найти решение задачи Коши уравнения Бернулли:

$$2(xy' + y) = xy^2, \qquad y(1) = 2.$$

Задание 5. Найти общий интеграл дифференциального уравнения в полных дифференциалах:

$$(x^2 - 4xy - 2y^2)dx + (y^2 - 4xy - 2x^2)dy = 0.$$

Задание 6. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$xy''' + 2y'' = 0.$$

Задание 7. Найти решение задачи Коши дифференциального уравнения:

$$y'' = 2\sin^3 y \cos y, \qquad y(1) = \frac{\pi}{2}, y'(1) = 1.$$

Задание 8. Найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

1) $y'' + 3y' - 10y = 0$;
2) $y'' - 10y' + 25y = 0$;
3) $y'' + 4y' + 13y = 0$;
4) $y^{IV} + 16y'' = 0$;
5) $y^{IV} - 8y'' - 9y = 0$.

Задание 9. Найти общее решение (для уравнения 4 решить задачу Коши) линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

1) $3y^{IV} + y''' = 6x - 1$;
2) $y''' - 6y'' + 9y' = 4xe^{x}$;
3) $y'' + 2y' + 5y = -\sin 2x$;
4) $y'' + 3y' = \dfrac{9e^{3x}}{1 + e^{3x}}$, $\quad y(0) = 4\ln 4, y'(0) = 3(1 - \ln 2)$.

Задание 10. Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 7x + 3y. \end{cases}$$

Вариант 15

Задание 1. Найти общий интеграл дифференциального уравнения с разделяющимися переменными:

$$\sqrt{5 + y^2} + y'y\sqrt{1 - x^2} = 0.$$

Задание 2. Найти общий интеграл однородного дифференциального уравнения первого порядка:

$$y' = \frac{x + y}{x - y}.$$

Задание 3. Найти решение задачи Коши линейного дифференциального уравнения первого порядка:

$$y' - \frac{y}{x} = -\frac{2}{x^2}, \qquad y(1) = 1.$$

Задание 4. Найти решение задачи Коши уравнения Бернулли:

$$4y' + x^3y = y^2e^{-2x}(8 + x^3), \qquad y(0) = 1.$$

Задание 5. Найти общий интеграл дифференциального уравнения в полных дифференциалах:

$$3x^2e^{y}dx + (x^3 e^{y} - 1)dy = 0.$$

Задание 6. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y''' \operatorname{tg} x = y'' + 1.$$

Задание 7. Найти решение задачи Коши дифференциального уравнения:

$$y'' = 50y^3, \qquad y(3) = 1, y'(3) = 5.$$

Задание 8. Найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

1) $y'' + 9y' + 14y = 0$;
2) $y'' + 6y' + 9y = 0$;
3) $y'' + 4y' + 29y = 0$;
4) $y^{IV} + 9y'' = 0$;
5) $y^{IV} + 3y'' - 4y = 0$.

Задание 9. Найти общее решение (для уравнения 4 решить задачу Коши) линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:
1) $y''' - y'' = 6x^2 + 3x$;
2) $y''' + 2y'' - 3y' = (8x + 6)e^x$;
3) $y'' - 4y' + 8y = e^x(2\sin x - \cos x)$;
4) $y'' + y = 2\operatorname{ctg} x, \qquad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$.

Задание 10. Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 3y, \\ \frac{dy}{dt} = 3x + y. \end{cases}$$

Вариант 16

Задание 1. Найти общий интеграл дифференциального уравнения с разделяющимися переменными:

$$(3 + e^x)yy' = e^x.$$

Задание 2. Найти общий интеграл однородного дифференциального уравнения первого порядка:

$$2y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 8.$$

Задание 3. Найти решение задачи Коши линейного дифференциального уравнения первого порядка:

$$y' - \frac{y}{x} = -\frac{\ln x}{x}, \qquad y(1) = 1.$$

Задание 4. Найти решение задачи Коши уравнения Бернулли:

$$2y' + 3y\cos x = y^{-1}e^{2x}(2 + 3\cos x), \qquad y(0) = 1.$$

Задание 5. Найти общий интеграл дифференциального уравнения в полных дифференциалах:

$$\frac{1 + xy}{x^2y}dx + \frac{1 - xy}{xy^2}dy = 0.$$

Задание 6. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$\operatorname{tg} x \cdot y'' - y' + \frac{1}{\sin x} = 0.$$

Задание 7. Найти решение задачи Коши дифференциального уравнения:

$$y''y^3 + 25 = 0, \qquad y(2) = -5, y'(2) = -1.$$

Задание 8. Найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:
1) $y'' + y' - 6y = 0$;
2) $y'' - 8y' + 16y = 0$;
3) $y'' + 6y' + 10y = 0$;
4) $y''' + y'' = 0$;
5) $y^{IV} - 3y'' - 4y = 0$.

Задание 9. Найти общее решение (для уравнения 4 решить задачу Коши) линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:
1) $y''' - y'' = 4x^2 - 3x + 2$;
2) $y''' - 3y'' - y' + 3y = (4 - 8x)e^x$;

3) $y'' + 2y' + 5y = -17\sin 2x$;

4) $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{1}{3 + e^{-x}}, \qquad y(0) = 1 + 8\ln 2, y'(0) = 14\ln 2.$

Задание 10. Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + y. \end{cases}$$

Вариант 17

Задание 1. Найти общий интеграл дифференциального уравнения с разделяющимися переменными:

$$3(x^2y + y)dy + \sqrt{2 + y^2}dx = 0.$$

Задание 2. Найти общий интеграл однородного дифференциального уравнения первого порядка:

$$xy' = \sqrt{2x^2 + y^2} + y.$$

Задание 3. Найти решение задачи Коши линейного дифференциального уравнения первого порядка:

$$y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3, \qquad y(0) = \frac{1}{2}.$$

Задание 4. Найти решение задачи Коши уравнения Бернулли:

$$y' - y = 2xy^2, \qquad y(0) = \frac{1}{2}.$$

Задание 5. Найти общий интеграл дифференциального уравнения в полных дифференциалах:

$$(3x^3 + 6x^2y + 3xy^2)dx + (2x^3 + 3x^2y)dy = 0.$$

Задание 6. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$x^3y''' + x^2y'' = \sqrt{x}.$$

Задание 7. Найти решение задачи Коши дифференциального уравнения:

$$y'' = 32y^3, \qquad y(4) = 1, y'(4) = 4.$$

Задание 8. Найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

1) $y'' - 4y' + 3y = 0$;
2) $y'' + 4y' + 4y = 0$;
3) $y'' + 4y' + 29y = 0$;
4) $y''' - 10y'' + 25y' = 0$;
5) $y^{IV} + 49y'' = 0$.

Задание 9. Найти общее решение (для уравнения 4 решить задачу Коши) линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

1) $y^{IV} - 3y''' + 3y'' - y' = 2x$;

2) $y''' + 2y'' + y' = (18x + 21)e^{2x}$;

3) $y'' - 4y' + 4y = -e^{2x}\sin 4x$;

4) $y'' + 9y = \dfrac{9}{\sin 3x}, \qquad y\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 4, y'\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{3\pi}{2}.$

Задание 10. Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 4y. \end{cases}$$

Вариант 18

Задание 1. Найти общий интеграл дифференциального уравнения с разделяющимися переменными:

$$xdx - ydy = x^2ydy - xy^2dx.$$

Задание 2. Найти общий интеграл однородного дифференциального уравнения первого порядка:

$$xy' = \frac{3y^3 + 4yx^2}{2y^2 + 2x^2}.$$

Задание 3. Найти решение задачи Коши линейного дифференциального уравнения первого порядка:

$$y' + \frac{y}{2x} = x^2, \qquad y(1) = 1.$$

Задание 4. Найти решение задачи Коши уравнения Бернулли:

$$3y' + 2xy = 2xy^{-2}e^{-2x^2}, \qquad y(0) = -1.$$

Задание 5. Найти общий интеграл дифференциального уравнения в полных дифференциалах:

$$xy^2dx + y(x^2 + y^2)dy = 0.$$

Задание 6. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$xy''' + y'' = x + 1.$$

Задание 7. Найти решение задачи Коши дифференциального уравнения:

$$y'' = 18\sin^3 y \cos y, \qquad y(1) = \frac{\pi}{2}, y'(1) = 3.$$

Задание 8. Найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

1) $y'' - 9y' + 8y = 0$; 2) $y'' - 2y' + y = 0$;
3) $y'' - 4y' + 13y = 0$; 4) $y''' - 144y' = 0$;
5) $y^{IV} + 5y'' - 36y = 0$.

Задание 9. Найти общее решение (для уравнения 4 решить задачу Коши) линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

1) $y''' - 2y'' = 3x^2 + x - 4$;
2) $y''' + 4y'' + 4y' = (9x + 15)e^x$;
3) $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}\sin 4x$;
4) $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{1}{2 + e^{-x}}, \qquad y(0) = 1 + 3\ln 3, y'(0) = 5\ln 3.$

Задание 10. Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 5y. \end{cases}$$

Вариант 19

Задание 1. Найти общий интеграл дифференциального уравнения с разделяющимися переменными:

$$x\sqrt{1+y^2}+y'y\sqrt{1+x^2}=0.$$

Задание 2. Найти общий интеграл однородного дифференциального уравнения первого порядка:

$$y'=\frac{x^2+2xy-y^2}{2x^2-2xy}.$$

Задание 3. Найти решение задачи Коши линейного дифференциального уравнения первого порядка:

$$y'+y\operatorname{tg}x=\cos^2 x, \qquad y\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}.$$

Задание 4. Найти решение задачи Коши уравнения Бернулли:

$$3(xy'+y)=y^2\ln x, \qquad y(1)=3.$$

Задание 5. Найти общий интеграл дифференциального уравнения в полных дифференциалах:

$$\left(\sin y+y\sin x+\frac{1}{x}\right)dx+\left(x\cos y-\cos x+\frac{1}{y}\right)dy=0.$$

Задание 6. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$x^4y''+x^3y'=4.$$

Задание 7. Найти решение задачи Коши дифференциального уравнения:

$$y''y^3+1=0, \qquad y(1)=-1, y'(1)=-1.$$

Задание 8. Найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

1) $y''+6y'+10y=0$;
2) $y''+28y'+196y=0$;
3) $y''-4y'+8y=0$;
4) $y'''-9y'=0$;
5) $y^{IV}-3y''-4y=0$.

Задание 9. Найти общее решение (для уравнения 4 решить задачу Коши) линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

1) $y^{V}-y^{IV}=2x+3$;
2) $y'''+3y''+2y'=(1-2x)e^{-x}$;
3) $y''+2y'=3e^{x}(\sin x+\cos x)$;
4) $y''-y'=\dfrac{e^{-x}}{2+e^{-x}}, \qquad y(0)=\ln 27, y'(0)=\ln 9-1.$

Задание 10. Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=3x+y,\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=x+3y.\end{cases}$$

Вариант 20

Задание 1. Найти общий интеграл дифференциального уравнения с разделяющимися переменными:

$$y(1+\ln y)+xy'=0.$$

Задание 2. Найти общий интеграл однородного дифференциального уравнения первого порядка:

$$xy' = 3\sqrt{2x^2 + y^2} + y.$$

Задание 3. Найти решение задачи Коши линейного дифференциального уравнения первого порядка:

$$y' - \frac{y}{x+2} = x^2 + 2x, \qquad y(-1) = \frac{3}{2}.$$

Задание 4. Найти решение задачи Коши уравнения Бернулли:

$$2(y' + xy) = y^2 e^{-x}(1 + x), \qquad y(0) = 2.$$

Задание 5. Найти общий интеграл дифференциального уравнения в полных дифференциалах:

$$(3x^2y + 2y + 3)dx + (x^3 + 2x + 3y^2)dy = 0.$$

Задание 6. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$xy''' + y'' = \sqrt{x}.$$

Задание 7. Найти решение задачи Коши дифференциального уравнения:

$$y'' = 32\sin^3 y\cos y, \qquad y(1) = \frac{\pi}{2}, y'(1) = 4.$$

Задание 8. Найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

1) $y'' + 6y' + 5y = 0$;
2) $y'' - 24y' + 144y = 0$;
3) $y'' - 14y' + 49y = 0$;
4) $y^{IV} - 169y'' = 0$;
5) $y^{IV} + 17y'' + 16y = 0$.

Задание 9. Найти общее решение (для уравнения 4 решить задачу Коши) линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

1) $y''' - y' = x^2 + x$;
2) $y''' - 2y'' + y' = (2x + 5)e^{2x}$;
3) $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x}\cos 4x$;
4) $y'' + \pi^2 y = \dfrac{\pi^2}{\sin \pi x}, \qquad y\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1, y'\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi^2}{2}$.

Задание 10. Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 6y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + 9y. \end{cases}$$

Вариант 21

Задание 1. Найти общий интеграл дифференциального уравнения с разделяющимися переменными:

$$6xdx - 6ydy = 3x^2ydy - 2xy^2dx.$$

Задание 2. Найти общий интеграл однородного дифференциального уравнения первого порядка:

$$y' = \frac{y^2}{x^2} + 6\frac{y}{x} + 6.$$

Задание 3. Найти решение задачи Коши линейного дифференциального уравнения первого порядка:

$$y' - \frac{2}{x+1}y = e^x(x + 1)^2, \qquad y(0) = 1.$$

Задание 4. Найти решение задачи Коши уравнения Бернулли:

$$2(y' + y) = xy^2, \qquad y(0) = 2.$$

Задание 5. Найти общий интеграл дифференциального уравнения в полных дифференциалах:

$$(3x^2 + 4y^2)dx + (8xy + e^y)dy = 0.$$

Задание 6. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$\operatorname{cth} x \cdot y'' + y' = \operatorname{ch} x.$$

Задание 7. Найти решение задачи Коши дифференциального уравнения:

$$y'' = 98y^3, \qquad y(1) = 1, y'(1) = 7.$$

Задание 8. Найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

1) $y'' - 4y' - 21y = 0$;
2) $y'' + 16y' + 64y = 0$;
3) $y'' - 8y' + 20y = 0$;
4) $y''' - 9y' = 0$;
5) $y^{IV} - 8y''' + 16y'' = 0$.

Задание 9. Найти общее решение (для уравнения 4 решить задачу Коши) линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

1) $y''' + 3y'' + 2y' = x^2 + 2x + 3$;
2) $y''' - 5y'' + 3y' + 9y = (32x - 32)e^{-x}$;
3) $y'' + y = 2\cos 7x - 3\sin 7x$;
4) $y'' + 6y' + 8y = \dfrac{4e^{-2x}}{2 + e^{2x}}, \qquad y(0) = 0, y'(0) = 0.$

Задание 10. Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 9x + 6y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 8y. \end{cases}$$

Вариант 22

Задание 1. Найти общий интеграл дифференциального уравнения с разделяющимися переменными:

$$2x + 2xy^2 + \sqrt{2 - x^2}y' = 0.$$

Задание 2. Найти общий интеграл однородного дифференциального уравнения первого порядка:

$$3y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 4.$$

Задание 3. Найти решение задачи Коши линейного дифференциального уравнения первого порядка:

$$y' + xy = -x^3, \qquad y(0) = 3.$$

Задание 4. Найти решение задачи Коши уравнения Бернулли:

$$2xy' - 3y = -y^3(5x^2 + 3), \qquad y(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Задание 5. Найти общий интеграл дифференциального уравнения в полных дифференциалах:

$$\left(\frac{1}{x^2} + \frac{3y^2}{x^4}\right)dx - \frac{2y}{x^3}dy = 0.$$

Задание 6. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$xy''' + y'' = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Задание 7. Найти решение задачи Коши дифференциального уравнения:

$$y^3 y'' = y^4 - 16, \qquad y(0) = 2\sqrt{2}, y'(0) = \sqrt{2}.$$

Задание 8. Найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

1) $y'' - 2y' - 8y = 0$; 2) $y'' - 18y' + 81y = 0$;

3) $y'' - 4y' + 5y = 0$; 4) $y''' - 121y' = 0$;

5) $y^{IV} + 3y'' = 0$.

Задание 9. Найти общее решение (для уравнения 4 решить задачу Коши) линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

1) $y^{IV} - 2y''' + y'' = 2x + 2x^2$;

2) $y''' - 3y' + 2y = (4x + 9)e^{2x}$;

3) $y'' - 4y' + 4y = -e^{2x}\sin 6x$;

4) $y'' + \frac{1}{\pi^2}y = \frac{1}{\pi^2 \cos\frac{x}{\pi}}, \qquad y(0) = 2, y'(0) = 0.$

Задание 10. Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x + y. \end{cases}$$

Вариант 23

Задание 1. Найти общий интеграл дифференциального уравнения с разделяющимися переменными:

$$2xdx - 2ydy = x^2ydy - 2xy^2dx.$$

Задание 2. Найти общий интеграл однородного дифференциального уравнения первого порядка:

$$y' = \frac{x^2 + 3xy - y^2}{3x^2 - 2xy}.$$

Задание 3. Найти решение задачи Коши линейного дифференциального уравнения первого порядка:

$$y' - \frac{y}{x} = -\frac{12}{x^3}, \qquad y(1) = 4.$$

Задание 4. Найти решение задачи Коши уравнения Бернулли:

$$xy' - y = -y^2(\ln x + 2)\ln x, \qquad y(1) = 1.$$

Задание 5. Найти общий интеграл дифференциального уравнения в полных дифференциалах:

$$(\sin 2x - 2\cos(x + y))dx - 2\cos(x + y)\,dy = 0.$$

Задание 6. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$x^4y'' + x^3y' = 1.$$

Задание 7. Найти решение задачи Коши дифференциального уравнения:

$$y''y^3 + 64 = 0, \qquad y(0) = 4, y'(0) = 2.$$

Задание 8. Найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

1) $y'' - 5y' - 14y = 0$;
2) $y'' + 14y' + 49y = 0$;
3) $y'' - 7y' + 10y = 0$;
4) $y''' - 9y' = 0$;
5) $y^{IV} - 4y'' + 4y = 0$.

Задание 9. Найти общее решение (для уравнения 4 решить задачу Коши) линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

1) $y''' - 5y'' + 6y' = (x-1)^2$;
2) $y''' + 4y'' + 5y' + 2y = (12x + 16)e^x$;
3) $y'' - 4y' + 8y = e^x(-\sin x + 2\cos x)$;
4) $y'' + 4y = \dfrac{4}{\sin 2x}, \qquad y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 2, y'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \pi$.

Задание 10. Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x + 6y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 2y. \end{cases}$$

Вариант 24

Задание 1. Найти общий интеграл дифференциального уравнения с разделяющимися переменными:

$$y'y\sqrt{\frac{1-x^2}{1-y^2}} + 1 = 0.$$

Задание 2. Найти общий интеграл однородного дифференциального уравнения первого порядка:

$$xy' = 2\sqrt{x^2 + y^2} + y.$$

Задание 3. Найти решение задачи Коши линейного дифференциального уравнения первого порядка:

$$y' + 2xy = -2x^3, \qquad y(1) = e^{-1}.$$

Задание 4. Найти решение задачи Коши уравнения Бернулли:

$$3xy' + 5y = y^4(4x - 5), \qquad y(1) = 1.$$

Задание 5. Найти общий интеграл дифференциального уравнения в полных дифференциалах:

$$\left(10xy - \frac{1}{\sin y}\right)dx + \left(5x^2 + \frac{x\cos y}{\sin^2 y} - y^2\sin y^3\right)dy = 0.$$

Задание 6. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$(x+1)y''' + y'' = x + 1.$$

Задание 7. Найти решение задачи Коши дифференциального уравнения:

$$y'' + 50\sin y\cos^3 y = 0, \qquad y(0) = 0, y'(0) = 5.$$

Задание 8. Найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

1) $y'' - 8y' + 12y = 0$;
2) $y'' + 10y' + 25y = 0$;
3) $y'' + 2y' + 5y = 0$;
4) $y^{IV} + 4y'' = 0$;
5) $y^{IV} - 2y'' + y = 0$.

Задание 9. Найти общее решение (для уравнения 4 решить задачу Коши) линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

1) $y''' - y'' = 6x + 5$;

2) $y''' - y'' - 5y' - 3y = -(8x + 4)e^x$;

3) $y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \sin 3x$;

4) $y'' - 2y' = \dfrac{4e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}, \qquad y(0) = \ln 4 \, , y'(0) = \ln 4 - 2.$

Задание 10. Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x + 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + 11y. \end{cases}$$

Вариант 25

Задание 1. Найти общий интеграл дифференциального уравнения с разделяющимися переменными:

$$(1 + e^x)yy' = e^x.$$

Задание 2. Найти общий интеграл однородного дифференциального уравнения первого порядка:

$$3y' = \frac{y^2}{x^2} + 10\frac{y}{x} + 10.$$

Задание 3. Найти решение задачи Коши линейного дифференциального уравнения первого порядка:

$$y' + \frac{2x}{1 + x^2}y = \frac{2x^2}{1 + x^2}, \qquad y(0) = \frac{2}{3}.$$

Задание 4. Найти решение задачи Коши уравнения Бернулли:

$$y' + y = xy^2, \qquad y(0) = 1.$$

Задание 5. Найти общий интеграл дифференциального уравнения в полных дифференциалах:

$$xdx + ydy + (xdy - ydx)/(x^2 + y^2) = 0.$$

Задание 6. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$\operatorname{tg} x \cdot y''' = 2y''.$$

Задание 7. Найти решение задачи Коши дифференциального уравнения:

$$y'' + 32 \sin y \cos^3 y = 0 \, , \qquad y(0) = 0, y'(0) = 4.$$

Задание 8. Найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

1) $y'' - 2y' - 15y = 0$;

2) $y'' + 12y' + 36y = 0$;

3) $y'' + 2y' + 10y = 0$;

4) $y''' + 25y' = 0$;

5) $y^{IV} - 5y'' + 4y = 0$.

Задание 9. Найти общее решение (для уравнения 4 решить задачу Коши) линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

1) $y^{IV} + 2y''' + y'' = 2 - 3x^2$;

2) $y''' + y'' - 6y' = (20x + 14)e^{2x}$;

3) $y'' - 4y' + 8y = e^x(-3 \sin x + 4 \cos x)$;

4) $y'' + 16y = \dfrac{16}{\cos 4x}$, $\qquad y(0) = 3, y'(0) = 0.$

Задание 10. Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y. \end{cases}$$

Вариант 26

Задание 1. Найти общий интеграл дифференциального уравнения с разделяющимися переменными:

$$y \ln y + xy' = 0.$$

Задание 2. Найти общий интеграл однородного дифференциального уравнения первого порядка:

$$2y' = \frac{y^2}{x^2} + 6\frac{y}{x} + 3.$$

Задание 3. Найти решение задачи Коши линейного дифференциального уравнения первого порядка:

$$y' + \frac{2y}{x} = x^3, \qquad y(1) = -\frac{5}{6}.$$

Задание 4. Найти решение задачи Коши уравнения Бернулли:

$$2(xy' + y) = y^2 \ln x, \qquad y(1) = 2.$$

Задание 5. Найти общий интеграл дифференциального уравнения в полных дифференциалах:

$$\left(1 + \frac{1}{y}e^{x/y}\right)dx + \left(1 - \frac{x}{y^2}e^{x/y}\right)dy = 0.$$

Задание 6. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$x^3 y''' + x^2 y'' = 1.$$

Задание 7. Найти решение задачи Коши дифференциального уравнения:

$$y'' = 8\sin^3 y \cos y, \qquad y(1) = \frac{\pi}{2}, y'(1) = 2.$$

Задание 8. Найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

1) $y'' - 7y' + 12y = 0;$ $\qquad$ 2) $y'' - 16y' + 64y = 0;$

3) $y'' - 6y' + 10y = 0;$ $\qquad$ 4) $y''' - 14y'' + 49y' = 0;$

5) $y^{IV} - 15y'' - 16y = 0.$

Задание 9. Найти общее решение (для уравнения 4 решить задачу Коши) линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

1) $y''' - 5y'' + 6y' = 6x^2 + 2x - 5;$

2) $y''' - 3y'' + 2y' = (1 - 2x)e^x;$

3) $y'' + y = 2\cos 7x + 3\sin 7x;$

4) $y'' - 6y' + 8y = \dfrac{4e^{2x}}{1 + e^{-2x}}$, $\qquad y(0) = 0, y'(0) = 0.$

Задание 10. Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x + 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 3y. \end{cases}$$

Вариант 27

Задание 1. Найти общий интеграл дифференциального уравнения с разделяющимися переменными:

$$\sqrt{1-x^2}y' + xy^2 + x = 0.$$

Задание 2. Найти общий интеграл однородного дифференциального уравнения первого порядка:

$$xy' = \sqrt{x^2+y^2} + y.$$

Задание 3. Найти решение задачи Коши линейного дифференциального уравнения первого порядка:

$$y' - \frac{2xy}{1+x^2} = 1 + x^2, \qquad y(1) = 3.$$

Задание 4. Найти решение задачи Коши уравнения Бернулли:

$$2(y' + xy) = y^2 e^x (x-1), \qquad y(0) = 2.$$

Задание 5. Найти общий интеграл дифференциального уравнения в полных дифференциалах:

$$(y^2 + y\sec^2 x)dx + (2xy + \operatorname{tg} x)dy = 0.$$

Задание 6. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$x^3 y''' + x^4 y'' = 1.$$

Задание 7. Найти решение задачи Коши дифференциального уравнения:

$$y'' = 50\sin^3 y \cos y, \qquad y(1) = \frac{\pi}{2}, y'(1) = 5.$$

Задание 8. Найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

1) $y'' + 3y' - 10y = 0$;
2) $y'' - 10y' + 25y = 0$;
3) $y'' + 4y' + 13y = 0$;
4) $y^{IV} + 16y'' = 0$;
5) $y^{IV} - 8y'' - 9y = 0$.

Задание 9. Найти общее решение (для уравнения 4 решить задачу Коши) линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

1) $y''' - y' = 3x^2 - 2x + 1$;
2) $y''' - 2y'' - 3y' = (8x - 14)e^{-x}$;
3) $y'' - 4y' + 8y = e^x(5\sin x - 3\cos x)$;
4) $y'' - 9y' + 18y = \dfrac{9e^{3x}}{1+e^{-3x}}, \qquad y(0) = 0, y'(0) = 0.$

Задание 10. Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x - y. \end{cases}$$

Вариант 28

Задание 1. Найти общий интеграл дифференциального уравнения с разделяющимися переменными:

$$6xdx - ydy = x^2ydy - 3xy^2dx.$$

Задание 2. Найти общий интеграл однородного дифференциального уравнения первого порядка:

$$y' = \frac{x^2 + 2xy - 5y^2}{2x^2 - 6xy}.$$

Задание 3. Найти решение задачи Коши линейного дифференциального уравнения первого порядка:

$$y' - \frac{y}{x} = x\sin x, \qquad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

Задание 4. Найти решение задачи Коши уравнения Бернулли:

$$2y' + 3y\cos x = y^{-1}e^{2x}(8 + 12\cos x), \qquad y(0) = 2.$$

Задание 5. Найти общий интеграл дифференциального уравнения в полных дифференциалах:

$$\frac{x - y}{x^2 + y^2}dx + \frac{x + y}{x^2 + y^2}dy = 0.$$

Задание 6. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$\operatorname{cth} x \cdot y'' - y' + \frac{1}{\operatorname{ch} x} = 0.$$

Задание 7. Найти решение задачи Коши дифференциального уравнения:

$$y'' + 8\sin y\cos^3 y = 0, \qquad y(0) = 0, y'(0) = 2.$$

Задание 8. Найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

1) $y'' + 9y' + 14y = 0$; 2) $y'' + 6y' + 9y = 0$;
3) $y'' + 4y' + 29y = 0$; 4) $y^{IV} + 9y'' = 0$;
5) $y^{IV} + 3y'' - 4y = 0$.

Задание 9. Найти общее решение (для уравнения 4 решить задачу Коши) линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

1) $y^{IV} + 4y''' + 4y'' = x - x^2$;
2) $y''' - y'' - 9y' + 9y = (12 - 16x)e^x$;
3) $y'' + y = 2\cos 3x - 3\sin 3x$;
4) $y'' + 4y = \dfrac{4}{\cos 2x}, \qquad y(0) = 2, y'(0) = 0.$

Задание 10. Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 7x - 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x + 8y. \end{cases}$$

Вариант 29

Задание 1. Найти общий интеграл дифференциального уравнения с разделяющимися переменными:

$$\sqrt{5 + y^2}dx + 4(x^2y + y)dy = 0.$$

Задание 2. Найти общий интеграл однородного дифференциального уравнения первого порядка:

$$xy' = 2\sqrt{3x^2 + y^2} + y.$$

Задание 3. Найти решение задачи Коши линейного дифференциального уравнения первого порядка:

$$y' + \frac{1-2x}{x^2}y = 1, \qquad y(1) = 1.$$

Задание 4. Найти решение задачи Коши уравнения Бернулли:

$$y' + 2y\operatorname{cth} x = y^2 \operatorname{ch} x, \qquad y(1) = \frac{1}{\operatorname{sh} 1}.$$

Задание 5. Найти общий интеграл дифференциального уравнения в полных дифференциалах:

$$(\cos(x + y^2) + \sin x)dx + 2y\cos(x + y^2)\,dy = 0.$$

Задание 6. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$(1 + x^2)y'' + 2xy' = 12x^3.$$

Задание 7. Найти решение задачи Коши дифференциального уравнения:

$$y''y^3 + 49 = 0, \qquad y(3) = -7, y'(3) = -1.$$

Задание 8. Найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

1) $y'' + y' - 6y = 0$;
2) $y'' - 8y' + 16y = 0$;
3) $y'' + 6y' + 10y = 0$;
4) $y''' + y'' = 0$;
5) $y^{IV} - 3y'' - 4y = 0$.

Задание 9. Найти общее решение (для уравнения 4 решить задачу Коши) линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

1) $y''' - 13y'' + 12y' = 18x^2 - 39$;
2) $y''' + 4y'' + 3y' = (-4x + 4)e^{-x}$;
3) $y'' - 4y' + 8y = e^x(3\sin x + 5\cos x)$;
4) $y'' + \pi^2 y = \dfrac{\pi^2}{\cos \pi x}, \qquad y(0) = 3, y'(0) = 0.$

Задание 10. Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -3x + 9y. \end{cases}$$

Вариант 30

Задание 1. Найти общий интеграл дифференциального уравнения с разделяющимися переменными:

$$\sqrt{4 + y^2}dx - ydy = x^2ydy.$$

Задание 2. Найти общий интеграл однородного дифференциального уравнения первого порядка:

$$xy' = 3\sqrt{x^2 + y^2} + y.$$

Задание 3. Найти решение задачи Коши линейного дифференциального уравнения первого порядка:

$$y' - \frac{y}{x+1} = e^x(x+1), \qquad y(0) = 1.$$

Задание 4. Найти решение задачи Коши уравнения Бернулли:

$$2y' - 3y\cos x = -y^{-1}e^{-2x}(2 + 3\cos x), \qquad y(0) = 1.$$

Задание 5. Найти общий интеграл дифференциального уравнения в полных дифференциалах:

$$(5xy^2 - x^3)dx + (5x^2y - y)dy = 0.$$

Задание 6. Найти общее решение дифференциального уравнения :

$$y''' \operatorname{ctg} 2x + 2y'' = 0.$$

Задание 7. Найти решение задачи Коши дифференциального уравнения:

$$4y^3y'' = y^4 - 16, \qquad y(0) = 2\sqrt{2}, y'(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Задание 8. Найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

1) $y'' - 4y' + 3y = 0$;
2) $y'' + 4y' + 4y = 0$;
3) $y'' + 4y' + 29y = 0$;
4) $y''' - 10y'' + 25y' = 0$;
5) $y^{IV} + 49y'' = 0$.

Задание 9. Найти общее решение (для уравнения 4 решить задачу Коши) линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

1) $y^{IV} + 2y''' + y'' = 2 - 3x^2$;
2) $y''' - 7y'' + 15y' - 9y = (8x - 12)e^x$;
3) $y'' + y = 2\cos 4x + 3\sin 4x$;
4) $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{e^x}{1 + e^{-x}}, \qquad y(0) = 0, y'(0) = 0.$

Задание 10. Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 6y. \end{cases}$$

Раздел 5. РЯДЫ

Вариант 1

Задание 1. Исследовать ряд на сходимость по определению сходящегося ряда:

$$\frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 9} + \cdots.$$

Задание 2. Исследовать ряд на сходимость, применяя необходимый признак:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n - 1}{3n + 1}.$$

Задание 3. Исследовать ряд на сходимость, применяя достаточные признаки сходимости рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n - 1)!}{n!}.$$

Задание 4. Исследовать ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{n^2+n+1}.$$

Задание 5. Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимости:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}}.$$

Задание 6. Найти область сходимости данного степенного ряда:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n(n+2)}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n}}{2^n\sqrt{n^2+1}}$.

Задание 7.

а) Разложить в ряд Тейлора по степеням $(x-1)$.

б) Разложить в ряд Маклорена, используя известные разложения функций в ряды.

а) $f(x)=3x^4+2x^2-4$; б) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Задание 8.

а) Найти приближенное значение функции с точностью до 0,001.

б) Найти приближенное значение интегралов с точностью до 0,001.

а) $\sqrt[3]{1{,}005}$; б) $\int\limits_0^{0{,}25}\frac{1-\cos 4x}{x^2}dx$.

Задание 9. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего данным начальным условиям:

$$y''+3x^2y=1,\qquad y(0)=0, y'(0)=0.$$

Задание 10.

а) Разложить функцию в ряд Фурье.

б) Разложить функцию в неполный ряд Фурье в указанном интервале.

а) $f(x)=\begin{cases}1, -2<x\le 0;\\ 1-x, 0<x<2;\end{cases}$ б) $f(x)=\pi-2x, \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ по синусам.

Вариант 2

Задание 1. Исследовать ряд на сходимость по определению сходящегося ряда:

$$\frac{1}{1\cdot 7}+\frac{1}{3\cdot 9}+\frac{1}{5\cdot 11}+\cdots.$$

Задание 2. Исследовать ряд на сходимость, применяя необходимый признак:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{n^2+1}.$$

Задание 3. Исследовать ряд на сходимость, применяя достаточные признаки сходимости рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\cdot n^2}{n!}.$$

Задание 4. Исследовать ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 2n + 2}.$$

Задание 5. Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимости:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n^2}{n!}.$$

Задание 6. Найти область сходимости данного степенного ряда:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^{n+1} x^n}{2n+1}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 (x-1)^{2n}}{n!}$.

Задание 7.

а) Разложить в ряд Тейлора по степеням $(x-1)$.

б) Разложить в ряд Маклорена, используя известные разложения функций в ряды.

а) $f(x) = x^3 + 2x + 1$;

б) $f(x) = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

Задание 8.

а) Найти приближенное значение функции с точностью до $0{,}001$.

б) Найти приближенное значение интегралов с точностью до $0{,}001$.

а) $\sqrt{1{,}08}$;

б) $\int_0^{0{,}2} \frac{\arcsin 2x}{x} dx$.

Задание 9. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего данным начальным условиям:

$$y'' + 0{,}5x^2 y = x^2, \qquad y(0) = 0, y'(0) = 0.$$

Задание 10.

а) Разложить функцию в ряд Фурье.

б) Разложить функцию в неполный ряд Фурье в указанном интервале.

а) $f(x) = \begin{cases} 0, -\pi < x \leq 0; \\ \pi - x, 0 < x < \pi; \end{cases}$

б) $f(x) = \frac{x}{2} - 1, (0; 2)$ по косинусам.

Вариант 3

Задание 1. Исследовать ряд на сходимость по определению сходящегося ряда:

$$\frac{5}{1 \cdot 2} + \frac{5}{2 \cdot 3} + \frac{5}{3 \cdot 4} + \cdots.$$

Задание 2. Исследовать ряд на сходимость, применяя необходимый признак:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-2}{4n-1}.$$

Задание 3. Исследовать ряд на сходимость, применяя достаточные признаки сходимости рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n-2}\right)^n.$$

Задание 4. Исследовать ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)^3}.$$

Задание 5. Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимости:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln n}.$$

Задание 6. Найти область сходимости данного степенного ряда:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)x^n}{n^2+1}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^{2n-1}}{2^n(n+1)(n+2)}$.

Задание 7.

а) Разложить в ряд Тейлора по степеням $(x-1)$.

б) Разложить в ряд Маклорена, используя известные разложения функций в ряды.

а) $f(x)=x^4+x^2+2x-1$; б) $f(x)=(1+x)\cdot e^{-x}$.

Задание 8.

а) Найти приближенное значение функции с точностью до 0,001.

б) Найти приближенное значение интегралов с точностью до 0,001.

а) $\sqrt[3]{30}$; б) $\int_0^1 \cos\sqrt[3]{x}\,dx$.

Задание 9. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего данным начальным условиям:

$$y''+2x^2y=1, \qquad y(0)=0, y'(0)=0.$$

Задание 10.

а) Разложить функцию в ряд Фурье.

б) Разложить функцию в неполный ряд Фурье в указанном интервале.

а) $f(x)=\begin{cases}0, -1<x\le 0;\\ \frac{x}{2}, 0<x<1;\end{cases}$ б) $f(x)=4x, (0;\pi)$ по косинусам.

Вариант 4

Задание 1. Исследовать ряд на сходимость по определению сходящегося ряда:

$$\frac{4}{2\cdot 3}+\frac{4}{3\cdot 4}+\frac{4}{4\cdot 5}+\cdots.$$

Задание 2. Исследовать ряд на сходимость, применяя необходимый признак:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+4}{2n^2+n+1}.$$

Задание 3. Исследовать ряд на сходимость, применяя достаточные признаки сходимости рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n-1}}{e^n}.$$

Задание 4. Исследовать ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(1+\ln n)}.$$

Задание 5. Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимости:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n(n+1)}.$$

Задание 6. Найти область сходимости данного степенного ряда:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^3 x^n}{n!}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(x-2)^{2n-1}}{n^2}$.

Задание 7.

а) Разложить в ряд Тейлора по степеням $(x-1)$.

б) Разложить в ряд Маклорена, используя известные разложения функций в ряды.

а) $f(x)=x^4+3x^2+6x-1$; б) $f(x)=\sqrt{x}\sin\sqrt{x}$.

Задание 8.

а) Найти приближенное значение функции с точностью до 0,001.

б) Найти приближенное значение интегралов с точностью до 0,001.

а) $\cos\frac{1}{4}$; б) $\int_0^{0,5}\frac{dx}{1+x^4}$.

Задание 9. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего данным начальным условиям:

$$y''+1{,}5x^2y=x^2,\qquad y(0)=0, y'(0)=0.$$

Задание 10.

а) Разложить функцию в ряд Фурье.

б) Разложить функцию в неполный ряд Фурье в указанном интервале.

а) $f(x)=\begin{cases}0, 0<x\le 1;\\ x-1, 1<x<2;\end{cases}$ б) $f(x)=\frac{\pi+x}{2}, (0;\pi)$ по косинусам.

Вариант 5

Задание 1. Исследовать ряд на сходимость по определению сходящегося ряда:

$$\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 8}+\frac{1}{8\cdot 11}+\cdots.$$

Задание 2. Исследовать ряд на сходимость, применяя необходимый признак:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-1}{3n+2}.$$

Задание 3. Исследовать ряд на сходимость, применяя достаточные признаки сходимости рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2^n}.$$

Задание 4. Исследовать ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n^2}.$$

Задание 5. Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимости:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{(n+1)^2}}.$$

Задание 6. Найти область сходимости данного степенного ряда:

1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n} x^{n+1}}{2n+1}$; 2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^{2n-1}}{2^n(3n+4)}$.

Задание 7.

а) Разложить в ряд Тейлора по степеням $(x-1)$.

б) Разложить в ряд Маклорена, используя известные разложения функций в ряды.

а) $f(x) = 4x^4 - x^2 + 5$; б) $f(x) = \frac{1}{e^{\frac{\pi x}{4}}}$.

Задание 8.

а) Найти приближенное значение функции с точностью до 0,001.

б) Найти приближенное значение интегралов с точностью до 0,001.

а) e^{-1}; б) $\int_0^{0,25} \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

Задание 9. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего данным начальным условиям:

$$y'' + x^2 y = x, \qquad y(0) = 0, y'(0) = 0.$$

Задание 10.

а) Разложить функцию в ряд Фурье.

б) Разложить функцию в неполный ряд Фурье в указанном интервале.

а) $f(x) = \begin{cases} 2x-1, 0 < x \le \frac{1}{2}; \\ 0, \frac{1}{2} < x < 1; \end{cases}$ б) $f(x) = 3x, (0; \pi)$ по косинусам.

Вариант 6

Задание 1. Исследовать ряд на сходимость по определению сходящегося ряда:

$$\frac{1}{2\cdot 5} + \frac{1}{3\cdot 6} + \frac{1}{4\cdot 7} + \cdots.$$

Задание 2. Исследовать ряд на сходимость, применяя необходимый признак:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n}{2n^2+1}.$$

Задание 3. Исследовать ряд на сходимость, применяя достаточные признаки сходимости рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n-1}{2n+3}\right)^n.$$

Задание 4. Исследовать ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+1}{(n^2+1)^2}.$$

Задание 5. Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимости:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n \cdot 3^n}.$$

Задание 6. Найти область сходимости данного степенного ряда:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{4^n n^2}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x+2)^n}{n^2+1}$.

Задание 7.

а) Разложить в ряд Тейлора по степеням $(x-1)$.

б) Разложить в ряд Маклорена, используя известные разложения функций в ряды.

а) $f(x) = (x+1)^3(x^2-4)$; б) $f(x) = \frac{1}{10+x}$.

Задание 8.

а) Найти приближенное значение функции с точностью до $0{,}001$.

б) Найти приближенное значение интегралов с точностью до $0{,}001$.

а) $\sqrt[5]{33}$; б) $\int_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt{x}}}$.

Задание 9. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего данным начальным условиям:

$$y'' + x^2 y = 1, \qquad y(0) = 0, y'(0) = 0.$$

Задание 10.

а) Разложить функцию в ряд Фурье.

б) Разложить функцию в неполный ряд Фурье в указанном интервале.

а) $f(x) = \begin{cases} x+1, -1 < x \le 0; \\ 1-x, 0 < x < 1; \end{cases}$ б) $f(x) = \frac{x}{3}, (0; \pi)$ по косинусам.

Вариант 7

Задание 1. Исследовать ряд на сходимость по определению сходящегося ряда:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots.$$

Задание 2. Исследовать ряд на сходимость, применяя необходимый признак:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n-3}{4n+1}.$$

Задание 3. Исследовать ряд на сходимость, применяя достаточные признаки сходимости рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}.$$

Задание 4. Исследовать ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\ln n}}.$$

Задание 5. Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимости:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{n^2}{2^n}.$$

Задание 6. Найти область сходимости данного степенного ряда:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n-1}}{2n-1}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x\mp 2)^n}{n\cdot 2^n}$.

Задание 7.

а) Разложить в ряд Тейлора по степеням $(x-1)$.

б) Разложить в ряд Маклорена, используя известные разложения функций в ряды.

а) $f(x)=(x^2+4)(x-3)^3$; б) $f(x)=x\cdot\ln(1+x^2)$.

Задание 8.

а) Найти приближенное значение функции с точностью до 0,001.

б) Найти приближенное значение интегралов с точностью до 0,001.

а) $\cos 10°$; б) $\int_0^{1/2}\ln(1+x^3)\,dx$.

Задание 9. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего данным начальным условиям:

$$y''+2{,}6x^2y=1,\qquad y(0)=0, y'(0)=0.$$

Задание 10.

а) Разложить функцию в ряд Фурье.

б) Разложить функцию в неполный ряд Фурье в указанном интервале.

а) $f(x)=\begin{cases}x, -\pi<x\le 0;\\ 0, 0<x<\pi;\end{cases}$ б) $f(x)=\frac{x-2}{2}$, $(0;2)$ по синусам.

Вариант 8

Задание 1. Исследовать ряд на сходимость по определению сходящегося ряда:

$$1+\frac{4}{3}+\frac{16}{9}+\frac{64}{27}+\cdots.$$

Задание 2. Исследовать ряд на сходимость, применяя необходимый признак:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{4n+1}{3n-1}}.$$

Задание 3. Исследовать ряд на сходимость, применяя достаточные признаки сходимости рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{3n}.$$

Задание 4. Исследовать ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2+1}.$$

Задание 5. Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимости:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\sqrt{\ln n}}.$$

Задание 6. Найти область сходимости данного степенного ряда:

1) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n-1)^2\sqrt{3^n}}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-4)^n}{2^n(n+1)}$.

Задание 7.

а) Разложить в ряд Тейлора по степеням $(x-1)$.

б) Разложить в ряд Маклорена, используя известные разложения функций в ряды.

а) $f(x)=(2x+1)^4$; б) $f(x)=\sqrt{1+\frac{\pi x}{4}}$.

Задание 8.

а) Найти приближенное значение функции с точностью до $0{,}001$.

б) Найти приближенное значение интегралов с точностью до $0{,}001$.

а) $\sqrt[11]{2050}$; б) $\int_2^4 e^{\frac{1}{x}}\,dx$.

Задание 9. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего данным начальным условиям:

$$y''+0{,}5x^2y=0,\qquad y(0)=1, y'(0)=0.$$

Задание 10.

а) Разложить функцию в ряд Фурье.

б) Разложить функцию в неполный ряд Фурье в указанном интервале.

а) $f(x)=\begin{cases}-x, -2<x\le 0;\\ 0, 0<x<2;\end{cases}$ б) $f(x)=1, (0;2)$ по синусам.

Вариант 9

Задание 1. Исследовать ряд на сходимость по определению сходящегося ряда:

$$\frac{1}{5}+\frac{3}{25}+\frac{7}{125}+\frac{15}{625}+\cdots.$$

Задание 2. Исследовать ряд на сходимость, применяя необходимый признак:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{3n-2}.$$

Задание 3. Исследовать ряд на сходимость, применяя достаточные признаки сходимости рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot n!}{(2n)!}.$$

Задание 4. Исследовать ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4n-3}}.$$

Задание 5. Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимости:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n}{n^2+1}.$$

Задание 6. Найти область сходимости данного степенного ряда:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x+3)^n}{n(1+\ln n)}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^{2n-1}}{(2n-1)!}$.

Задание 7.

а) Разложить в ряд Тейлора по степеням $(x-1)$.

б) Разложить в ряд Маклорена, используя известные разложения функций в ряды.

а) $f(x) = x^2(2-3x)$; б) $f(x) = (e^x-1)^2$.

Задание 8.

а) Найти приближенное значение функции с точностью до 0,001.

б) Найти приближенное значение интегралов с точностью до 0,001.

а) $\ln 1{,}03$; б) $\int_0^{2/5} \sqrt[3]{1+x^2}\, dx$.

Задание 9. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего данным начальным условиям:

$$y'' + \frac{2}{3}x^2 y = x^2, \qquad y(0) = 0, y'(0) = 0.$$

Задание 10.

а) Разложить функцию в ряд Фурье.

б) Разложить функцию в неполный ряд Фурье в указанном интервале.

а) $f(x) = \begin{cases} 1, -2 < x \le 0; \\ x, 0 < x < 2; \end{cases}$ б) $f(x) = 2x, (0;\pi)$ по косинусам.

Вариант 10

Задание 1. Исследовать ряд на сходимость по определению сходящегося ряда:

$$\frac{3}{1\cdot 3} + \frac{3}{2\cdot 4} + \frac{3}{3\cdot 5} + \cdots.$$

Задание 2. Исследовать ряд на сходимость, применяя необходимый признак:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{2n+1}.$$

Задание 3. Исследовать ряд на сходимость, применяя достаточные признаки сходимости рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n-1}}{n^2+1}.$$

Задание 4. Исследовать ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+2}{n^2+1}.$$

Задание 5. Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимости:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n+1)(n+2)}.$$

Задание 6. Найти область сходимости данного степенного ряда:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^3 (x-3)^{2n}}{3^n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}\cdot x^n}{(2n-1)!}$.

Задание 7.

а) Разложить в ряд Тейлора по степеням $(x-1)$.

б) Разложить в ряд Маклорена, используя известные разложения функций в ряды.

а) $f(x)=x^4-x^2+3x+1$; б) $f(x)=\sin x - x\cos x$.

Задание 8.

а) Найти приближенное значение функции с точностью до 0,001.

б) Найти приближенное значение интегралов с точностью до 0,001.

а) $\sqrt[3]{e}$; б) $\int_0^{0,5}\frac{dx}{1+x^3}$.

Задание 9. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего данным начальным условиям:

$$y''+2x^2y=x,\qquad y(0)=0, y'(0)=0.$$

Задание 10.

а) Разложить функцию в ряд Фурье.

б) Разложить функцию в неполный ряд Фурье в указанном интервале.

а) $f(x)=\begin{cases}-2, -1<x\le 0;\\ 3, 0<x<1;\end{cases}$ б) $f(x)=\pi-x, (0;\pi)$ по косинусам.

Вариант 11

Задание 1. Исследовать ряд на сходимость по определению сходящегося ряда:

$$\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{8}{27}+\frac{16}{81}+\cdots.$$

Задание 2. Исследовать ряд на сходимость, применяя необходимый признак:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{2n}{n+1}}.$$

Задание 3. Исследовать ряд на сходимость, применяя достаточные признаки сходимости рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n-3}{\pi^n}.$$

Задание 4. Исследовать ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n^3+1}}.$$

Задание 5. Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимости:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{\sin 3^n}.$$

Задание 6. Найти область сходимости данного степенного ряда:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-3)^{2n}}{2n^2+1}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\, x^n}{(n+1)^n}$.

Задание 7.

а) Разложить в ряд Тейлора по степеням $(x-1)$.

б) Разложить в ряд Маклорена, используя известные разложения функций в ряды.

а) $f(x) = (x^2+1)(x+1)$; б) $f(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2}$.

Задание 8.

а) Найти приближенное значение функции с точностью до 0,001.

б) Найти приближенное значение интегралов с точностью до 0,001.

а) $\sin 2$; б) $\int_0^{2/3} e^{-\frac{9}{4}x^2}\, dx$.

Задание 9. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего данным начальным условиям:

$$y'' + 1{,}5x^2 y = 0, \qquad y(0) = 1, y'(0) = 0.$$

Задание 10.

а) Разложить функцию в ряд Фурье.

б) Разложить функцию в неполный ряд Фурье в указанном интервале.

а) $f(x) = \begin{cases} -1, 0 < x \le 1; \\ 1, 1 < x < 2; \end{cases}$ б) $f(x) = \pi + x, (0; 2\pi)$ по косинусам.

Вариант 12

Задание 1. Исследовать ряд на сходимость по определению сходящегося ряда:

$$\frac{1}{1\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 9} + \frac{1}{9\cdot 13} + \frac{1}{13\cdot 17} + \cdots.$$

Задание 2. Исследовать ряд на сходимость, применяя необходимый признак:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)}.$$

Задание 3. Исследовать ряд на сходимость, применяя достаточные признаки сходимости рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+1}{n^2+1} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Задание 4. Исследовать ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}.$$

Задание 5. Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимости:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2n}{n^2+n+1}.$$

Задание 6. Найти область сходимости данного степенного ряда:

1) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(x-4)^{2n-1}}{2n-1}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n\cdot 3^{2n-1}}$.

Задание 7.

а) Разложить в ряд Тейлора по степеням $(x-1)$.

б) Разложить в ряд Маклорена, используя известные разложения функций в ряды.

а) $f(x)=2x^4+x^2-x+3$; б) $f(x)=e^{2x-1}$.

Задание 8.

а) Найти приближенное значение функции с точностью до 0,001.

б) Найти приближенное значение интегралов с точностью до 0,001.

а) $\sin 0{,}7$; б) $\int_0^{0{,}1} e^{1-3x^2}\,dx$.

Задание 9. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего данным начальным условиям:

$$y''+x^2y=x^2,\qquad y(0)=0, y'(0)=0.$$

Задание 10.

а) Разложить функцию в ряд Фурье.

б) Разложить функцию в неполный ряд Фурье в указанном интервале.

а) $f(x)=\begin{cases} x, -\pi<x\le 0; \\ -\dfrac{x}{2}, 0<x<\pi; \end{cases}$ б) $f(x)=\frac{3}{2}x, (0;2)$ по синусам.

Вариант 13

Задание 1. Исследовать ряд на сходимость по определению сходящегося ряда:

$$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\cdots.$$

Задание 2. Исследовать ряд на сходимость, применяя необходимый признак:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2-1}{2n^2+1}.$$

Задание 3. Исследовать ряд на сходимость, применяя достаточные признаки сходимости рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{e^n}.$$

Задание 4. Исследовать ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^3}.$$

Задание 5. Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимости:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 5^{2n-1}}{(n+1)!}.$$

Задание 6. Найти область сходимости данного степенного ряда:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n x^{n-1}}{3n+2}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n\,(x+1)^{2n}}{4^n}$.

Задание 7.

а) Разложить в ряд Тейлора по степеням $(x-1)$.

б) Разложить в ряд Маклорена, используя известные разложения функций в ряды.

а) $f(x)=2x^3-x^2+5$; б) $f(x)=\ln(1+x^3)$.

Задание 8.

а) Найти приближенное значение функции с точностью до 0,001.

б) Найти приближенное значение интегралов с точностью до 0,001.

а) $\sqrt[3]{e}$; б) $\int_0^{0,2}\cos\frac{x^3}{2}\,dx$.

Задание 9. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего данным начальным условиям:

$$y''+2{,}5x^2y=x^2, \qquad y(0)=0, y'(0)=0.$$

Задание 10.

а) Разложить функцию в ряд Фурье.

б) Разложить функцию в неполный ряд Фурье в указанном интервале.

а) $f(x)=\begin{cases}-1, -1<x\le 0;\\ 1, 0<x<1;\end{cases}$ б) $f(x)=x, (0;\pi)$ по косинусам.

Вариант 14

Задание 1. Исследовать ряд на сходимость по определению сходящегося ряда:

$$1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+\cdots.$$

Задание 2. Исследовать ряд на сходимость, применяя необходимый признак:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{5n+3}.$$

Задание 3. Исследовать ряд на сходимость, применяя достаточные признаки сходимости рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot n^2}{5^n}.$$

Задание 4. Исследовать ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(\,n^2+1)}}.$$

Задание 5. Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимости:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2+2}}.$$

Задание 6. Найти область сходимости данного степенного ряда:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{2n}}{8^n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^{n-1}}{n^2+4}$.

Задание 7.

а) Разложить в ряд Тейлора по степеням $(x-1)$.

б) Разложить в ряд Маклорена, используя известные разложения функций в ряды.

а) $f(x)=x^3+2x^2+x-3$; б) $f(x)=x\left(1-\sqrt{1-x}\right)$.

Задание 8.

а) Найти приближенное значение функции с точностью до 0,001.

б) Найти приближенное значение интегралов с точностью до 0,001.

а) $\ln 10$; б) $\int_0^1 x^2\sin x^2\,dx$.

Задание 9. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего данным начальным условиям:

$$y''+x^2y=0,\qquad y(0)=1, y'(0)=0.$$

Задание 10.

а) Разложить функцию в ряд Фурье.

б) Разложить функцию в неполный ряд Фурье в указанном интервале.

а) $f(x)=\begin{cases}-2, -2<x\le 0;\\ 2, 0<x\le 2;\end{cases}$ б) $f(x)=x^2, (0;\pi)$ по косинусам.

Вариант 15

Задание 1. Исследовать ряд на сходимость по определению сходящегося ряда:

$$\frac{1}{5\cdot 8}+\frac{1}{8\cdot 11}+\frac{1}{11\cdot 14}+\cdots.$$

Задание 2. Исследовать ряд на сходимость, применяя необходимый признак:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n-3}{6n+1}.$$

Задание 3. Исследовать ряд на сходимость, применяя достаточные признаки сходимости рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}.$$

Задание 4. Исследовать ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}}{n^2-n+1}.$$

Задание 5. Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимости:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{n+1}{n(2n+1)}.$$

Задание 6. Найти область сходимости данного степенного ряда:

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)x^n}{4n-3}$; 2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n-1}}{3^n}$.

Задание 7.

а) Разложить в ряд Тейлора по степеням $(x-1)$.

б) Разложить в ряд Маклорена, используя известные разложения функций в ряды.

а) $f(x)=(x^2+1)^2$; б) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Задание 8.

а) Найти приближенное значение функции с точностью до $0{,}001$.

б) Найти приближенное значение интегралов с точностью до $0{,}001$.

а) $\sin 15°$; б) $\displaystyle\int_0^{0,25}\sqrt{x}\sin^2 x\,dx$.

Задание 9. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего данным начальным условиям:

$$y''+0{,}8x^2y=x,\qquad y(0)=0, y'(0)=0.$$

Задание 10.

а) Разложить функцию в ряд Фурье.

б) Разложить функцию в неполный ряд Фурье в указанном интервале.

а) $f(x)=2x-1, (-2;2)$; б) $f(x)=x+1, (0;\pi)$ по косинусам.

Вариант 16

Задание 1. Исследовать ряд на сходимость по определению сходящегося ряда:

$$\frac{2}{3}+\frac{2}{9}+\frac{2}{27}+\frac{2}{81}+\cdots.$$

Задание 2. Исследовать ряд на сходимость, применяя необходимый признак:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n+2}{2n+1}}.$$

Задание 3. Исследовать ряд на сходимость, применяя достаточные признаки сходимости рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n-1}\right)^{2n}.$$

Задание 4. Исследовать ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{(n+2)^3}}.$$

Задание 5. Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимости:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{3n-2}{n^3}.$$

Задание 6. Найти область сходимости данного степенного ряда:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^n}{(n+1)!}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^{2n-1}}{n}$.

Задание 7.

а) Разложить в ряд Тейлора по степеням $(x-1)$.

б) Разложить в ряд Маклорена, используя известные разложения функций в ряды.

а) $f(x) = 5(x^2-1)^3$; б) $f(x) = \frac{1}{1+0{,}5x^2}$.

Задание 8.

а) Найти приближенное значение функции с точностью до 0,001.

б) Найти приближенное значение интегралов с точностью до 0,001.

а) $\operatorname{arctg} 0{,}5$; б) $\int_0^1 \ln\left(1+\sqrt{x}\right) dx$.

Задание 9. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего данным начальным условиям:

$$y'' + 1{,}5x^2 y = x, \qquad y(0) = 0, y'(0) = 0.$$

Задание 10.

а) Разложить функцию в ряд Фурье.

б) Разложить функцию в неполный ряд Фурье в указанном интервале.

а) $f(x) = \begin{cases} 2-x, 0 < x \le 2; \\ 0, 2 < x < 4; \end{cases}$ б) $f(x) = -2, (0;\pi)$ по косинусам.

Вариант 17

Задание 1. Исследовать ряд на сходимость по определению сходящегося ряда:

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \cdots.$$

Задание 2. Исследовать ряд на сходимость, применяя необходимый признак:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n-4}{4n+1}.$$

Задание 3. Исследовать ряд на сходимость, применяя достаточные признаки сходимости рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{3n} \cdot \frac{1}{3^n}.$$

Задание 4. Исследовать ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2n}}{\sqrt{e^{2n}+1}}.$$

Задание 5. Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимости:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{\ln n}.$$

Задание 6. Найти область сходимости данного степенного ряда:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(x+2)^n}{3^n+1}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}36^n x^{2n-2}$.

Задание 7.

а) Разложить в ряд Тейлора по степеням $(x-1)$.

б) Разложить в ряд Маклорена, используя известные разложения функций в ряды.

а) $f(x)=(x^2+2)(x^2-5)$; б) $f(x)=\frac{x}{(1+x)^2}$.

Задание 8.

а) Найти приближенное значение функции с точностью до 0,001.

б) Найти приближенное значение интегралов с точностью до 0,001.

а) $\arcsin 0{,}5$; б) $\int_0^{0{,}1}\frac{e^x-1}{x}dx$.

Задание 9. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего данным начальным условиям:

$$y''+2x^2y=0,\qquad y(0)=0, y'(0)=1.$$

Задание 10.

а) Разложить функцию в ряд Фурье.

б) Разложить функцию в неполный ряд Фурье в указанном интервале.

а) $f(x)=4-x, (0;4)$; б) $f(x)=\frac{x}{2}, (0;\pi)$ по синусам.

Вариант 18

Задание 1. Исследовать ряд на сходимость по определению сходящегося ряда:

$$\frac{1}{5\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 13}+\frac{1}{13\cdot 17}+\frac{1}{17\cdot 21}+\cdots.$$

Задание 2. Исследовать ряд на сходимость, применяя необходимый признак:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2(n+2)}{n^3+1}.$$

Задание 3. Исследовать ряд на сходимость, применяя достаточные признаки сходимости рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}}{n!}.$$

Задание 4. Исследовать ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{4^n}.$$

Задание 5. Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимости:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (2n+1)}{3^n}.$$

Задание 6. Найти область сходимости данного степенного ряда:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5 x^n}{(n+1)^n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-2)^{2n}}{n}$.

Задание 7.

а) Разложить в ряд Тейлора по степеням $(x-1)$.

б) Разложить в ряд Маклорена, используя известные разложения функций в ряды.

а) $f(x) = 3x^3 + 2x - 4$; б) $f(x) = \frac{1}{1+\frac{\pi x}{4}}$.

Задание 8.

а) Найти приближенное значение функции с точностью до 0,001.

б) Найти приближенное значение интегралов с точностью до 0,001.

а) $\sqrt[3]{1{,}08}$; б) $\int_0^{0{,}5} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$.

Задание 9. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего данным начальным условиям:

$$y'' + 0{,}5x^2 y = 1, \qquad y(0) = 0, y'(0) = 0.$$

Задание 10.

а) Разложить функцию в ряд Фурье.

б) Разложить функцию в неполный ряд Фурье в указанном интервале.

а) $f(x) = \begin{cases} 2x, -\pi < x \leq 0; \\ x, 0 < x < \pi; \end{cases}$ б) $f(x) = 4 - x, (0; 4)$ по косинусам.

Вариант 19

Задание 1. Исследовать ряд на сходимость по определению сходящегося ряда:

$$\frac{1}{5\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 9} + \frac{1}{9\cdot 11} + \cdots.$$

Задание 2. Исследовать ряд на сходимость, применяя необходимый признак:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^2+1}.$$

Задание 3. Исследовать ряд на сходимость, применяя достаточные признаки сходимости рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)^2}{2^{2n-1}}.$$

Задание 4. Исследовать ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n-3}{n(n^2+1)}.$$

Задание 5. Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимости:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot(n+5)}{n^2+1}.$$

Задание 6. Найти область сходимости данного степенного ряда:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{n}\cdot x^n}{n!}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)(x\mp 1)^{2n}}{2^n}$.

Задание 7.

а) Разложить в ряд Тейлора по степеням $(x-1)$.

б) Разложить в ряд Маклорена, используя известные разложения функций в ряды.

а) $f(x)=(2-x^2)(1+x)$;

б) $f(x)=\frac{1-\cos x}{x^2}$.

Задание 8.

а) Найти приближенное значение функции с точностью до $0{,}001$.

б) Найти приближенное значение интегралов с точностью до $0{,}001$.

а) $\sin 1$;

б) $\int_0^2 e^{-0{,}25x^2}\,dx$.

Задание 9. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего данным начальным условиям:

$$y''+0{,}5x^2y=x,\qquad y(0)=0, y'(0)=0.$$

Задание 10.

а) Разложить функцию в ряд Фурье.

б) Разложить функцию в неполный ряд Фурье в указанном интервале.

а) $f(x)=|x|-1, (-2;2)$;

б) $f(x)=x-1, (0;\pi)$ по синусам.

Вариант 20

Задание 1. Исследовать ряд на сходимость по определению сходящегося ряда:

$$\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 8}+\cdots.$$

Задание 2. Исследовать ряд на сходимость, применяя необходимый признак:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{2n+1}{n+1}}.$$

Задание 3. Исследовать ряд на сходимость, применяя достаточные признаки сходимости рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{\left(\sqrt{3}\right)^n}.$$

Задание 4. Исследовать ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}+n-2}.$$

Задание 5. Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимости:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot(n+1)!}{10^n}.$$

Задание 6. Найти область сходимости данного степенного ряда:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3x)^n}{(2n-1)!}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n}}{n\sqrt{n^2+4n-1}}$.

Задание 7.

а) Разложить в ряд Тейлора по степеням $(x-1)$.

б) Разложить в ряд Маклорена, используя известные разложения функций в ряды.

а) $f(x)=(1+2x)^3$; б) $f(x)=\ln\left(1-\frac{\pi x}{4}\right)$.

Задание 8.

а) Найти приближенное значение функции с точностью до $0{,}001$.

б) Найти приближенное значение интегралов с точностью до $0{,}001$.

а) $\sqrt{1{,}02}$; б) $\int_0^{1{,}2}\frac{1-\cos 2{,}5x}{x^2}dx$.

Задание 9. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего данным начальным условиям:

$$y''+2{,}5x^2y=x,\qquad y(0)=0, y'(0)=0.$$

Задание 10.

а) Разложить функцию в ряд Фурье.

б) Разложить функцию в неполный ряд Фурье в указанном интервале.

а) $f(x)=\begin{cases}x, -\pi<x\le 0;\\ 2, 0<x<\pi;\end{cases}$ б) $f(x)=2-|x|, (0;\pi)$ по косинусам.

Вариант 21

Задание 1. Исследовать ряд на сходимость по определению сходящегося ряда:

$$\frac{1}{3\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 12}+\cdots.$$

Задание 2. Исследовать ряд на сходимость, применяя необходимый признак:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{3n-2}{n+3}}.$$

Задание 3. Исследовать ряд на сходимость, применяя достаточные признаки сходимости рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10n+1}{3^n}.$$

Задание 4. Исследовать ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n}{n^5+1}}.$$

Задание 5. Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимости:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n(n+1)}{3^n}.$$

Задание 6. Найти область сходимости данного степенного ряда:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{2^n \ln(n+1)}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(x+2)^{2n}}{2^n(n^2+1)}$.

Задание 7.

а) Разложить в ряд Тейлора по степеням $(x-1)$.

б) Разложить в ряд Маклорена, используя известные разложения функций в ряды.

а) $f(x) = (3x-1)^2(5x^2+1)$; б) $f(x) = x\cos\sqrt{x}$.

Задание 8.

а) Найти приближенное значение функции с точностью до 0,001.

б) Найти приближенное значение интегралов с точностью до 0,001.

а) $\ln 1{,}04$; б) $\int_0^{1/3} x\cos\sqrt{x}\,dx$.

Задание 9. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего данным начальным условиям:

$$y'' + 1{,}8x^2y = 1, \qquad y(0) = 0, y'(0) = 1.$$

Задание 10.

а) Разложить функцию в ряд Фурье.

б) Разложить функцию в неполный ряд Фурье в указанном интервале.

а) $f(x) = \begin{cases} 1, -\pi < x \le 0; \\ -x, 0 < x < \pi; \end{cases}$ б) $f(x) = 2 - 3x, (0; 1)$ по синусам.

Вариант 22

Задание 1. Исследовать ряд на сходимость по определению сходящегося ряда:

$$\frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{4\cdot 6} + \cdots.$$

Задание 2. Исследовать ряд на сходимость, применяя необходимый признак:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n^3}{2n^3+1}}.$$

Задание 3. Исследовать ряд на сходимость, применяя достаточные признаки сходимости рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{(2n)!}.$$

Задание 4. Исследовать ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2-1}{3n^3+1}.$$

Задание 5. Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимости:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n^3}{(2n-1)!}.$$

Задание 6. Найти область сходимости данного степенного ряда:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n x^{n-1}}{\sqrt{2n+1}}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^{2n-1}}{2^n\sqrt[3]{3n+1}}$.

Задание 7.

а) Разложить в ряд Тейлора по степеням $(x-1)$.

б) Разложить в ряд Маклорена, используя известные разложения функций в ряды.

а) $f(x)=2x^4-x^3+2x+3$; б) $f(x)=e^{1-x^2}$.

Задание 8.

а) Найти приближенное значение функции с точностью до 0,001.

б) Найти приближенное значение интегралов с точностью до 0,001.

а) $\operatorname{arctg}\frac{1}{4}$; б) $\int_0^1 x^3\sin x\,dx$.

Задание 9. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего данным начальным условиям:

$$y''+2x^2y=x^2,\qquad y(0)=0, y'(0)=0.$$

Задание 10.

а) Разложить функцию в ряд Фурье.

б) Разложить функцию в неполный ряд Фурье в указанном интервале.

а) $f(x)=\begin{cases}2, -\pi<x\le 0;\\ 1, 0<x<\pi;\end{cases}$ б) $f(x)=1-2x, \left(0;\frac{1}{2}\right)$ по синусам.

Вариант 23

Задание 1. Исследовать ряд на сходимость по определению сходящегося ряда:

$$1-\frac{1}{5}+\frac{1}{25}-\frac{1}{125}+\cdots.$$

Задание 2. Исследовать ряд на сходимость, применяя необходимый признак:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n-3}{5n+1}.$$

Задание 3. Исследовать ряд на сходимость, применяя достаточные признаки сходимости рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}.$$

Задание 4. Исследовать ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+2)}}.$$

Задание 5. Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимости:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\sin\frac{2\pi}{3^n}.$$

Задание 6. Найти область сходимости данного степенного ряда:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n-1}}{\sqrt[3]{n+1}}$; 2) $\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n(x+1)^{2n}$.

Задание 7.

а) Разложить в ряд Тейлора по степеням $(x-1)$.

б) Разложить в ряд Маклорена, используя известные разложения функций в ряды.

а) $f(x)=x^4+x^2-x+1$; б) $f(x)=\frac{e^{x^2}-1}{x^2}$.

Задание 8.

а) Найти приближенное значение функции с точностью до 0,001.

б) Найти приближенное значение интегралов с точностью до 0,001.

а) $\sqrt{(0,8)^5}$; б) $\int_0^{0,25}\sqrt{1+x^3}\,dx$.

Задание 9. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего данным начальным условиям:

$$y''+\frac{2}{3}x^2y=x,\qquad y(0)=0, y'(0)=0.$$

Задание 10.

а) Разложить функцию в ряд Фурье.

б) Разложить функцию в неполный ряд Фурье в указанном интервале.

а) $f(x)=\pi-|x|, (-\pi;\pi)$; б) $f(x)=2x+3, (0;1)$ по синусам.

Вариант 24

Задание 1. Исследовать ряд на сходимость по определению сходящегося ряда:

$$\frac{3}{2}+\frac{5}{4}+\frac{7}{8}+\cdots.$$

Задание 2. Исследовать ряд на сходимость, применяя необходимый признак:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+1}{2n^3+1}.$$

Задание 3. Исследовать ряд на сходимость, применяя достаточные признаки сходимости рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot2n}.$$

Задание 4. Исследовать ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{n^2+1}.$$

Задание 5. Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимости:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \sqrt{2n-1}}{(2n+1)!}.$$

Задание 6. Найти область сходимости данного степенного ряда:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-5)^n}{n\left(\sqrt{n}+1\right)}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n-2)x^{2n}}{(n+1)^2}$.

Задание 7.

а) Разложить в ряд Тейлора по степеням $(x-1)$.

б) Разложить в ряд Маклорена, используя известные разложения функций в ряды.

а) $f(x) = (x^2+1)(x+2)$; б) $f(x) = e^{2x} - \sin 2x$.

Задание 8.

а) Найти приближенное значение функции с точностью до 0,001.

б) Найти приближенное значение интегралов с точностью до 0,001.

а) $\ln 1{,}2$; б) $\int_0^1 x^3 \cos\sqrt{x}\, dx$.

Задание 9. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего данным начальным условиям:

$$y'' + 0{,}8x^2 y = 1, \qquad y(0) = 0, y'(0) = 0.$$

Задание 10.

а) Разложить функцию в ряд Фурье.

б) Разложить функцию в неполный ряд Фурье в указанном интервале.

а) $f(x) = \begin{cases} 2, 0 < x \le 3; \\ 1, 3 < x < 6; \end{cases}$ б) $f(x) = 2(\pi - x), (0; \pi)$ по косинусам.

Вариант 25

Задание 1. Исследовать ряд на сходимость по определению сходящегося ряда:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots.$$

Задание 2. Исследовать ряд на сходимость, применяя необходимый признак:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2-3}{n(n+1)}.$$

Задание 3. Исследовать ряд на сходимость, применяя достаточные признаки сходимости рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{\frac{n}{2}}.$$

Задание 4. Исследовать ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\sqrt{1+n^6}}.$$

Задание 5. Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимости:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\left(\frac{n}{2n-1}\right)^3.$$

Задание 6. Найти область сходимости данного степенного ряда:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{2^{n-1}}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x+1)^n}{n^2+1}$.

Задание 7.

а) Разложить в ряд Тейлора по степеням $(x-1)$.

б) Разложить в ряд Маклорена, используя известные разложения функций в ряды.

а) $f(x)=(x^2+2)^2$; б) $f(x)=\frac{x+\ln(1-x)}{x^2}$.

Задание 8.

а) Найти приближенное значение функции с точностью до 0,001.

б) Найти приближенное значение интегралов с точностью до 0,001.

а) $e^{-\frac{1}{6}}$; б) $\int_0^1\sqrt{x}e^{-x}\,dx$.

Задание 9. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего данным начальным условиям:

$$y''+2{,}3x^2y=0,\qquad y(0)=0,y'(0)=1.$$

Задание 10.

а) Разложить функцию в ряд Фурье.

б) Разложить функцию в неполный ряд Фурье в указанном интервале.

а) $f(x)=\begin{cases}-2,-3<x\le 0;\\ 3,0<x<3;\end{cases}$ б) $f(x)=|\sin x|,(0;\pi)$ по косинусам.

Вариант 26

Задание 1. Исследовать ряд на сходимость по определению сходящегося ряда:

$$\frac{2}{3}+\frac{2}{1\cdot 3}+\frac{2}{2\cdot 4}+\frac{2}{3\cdot 5}+\cdots.$$

Задание 2. Исследовать ряд на сходимость, применяя необходимый признак:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{2n-1}{2n+1}}.$$

Задание 3. Исследовать ряд на сходимость, применяя достаточные признаки сходимости рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{10^n}.$$

Задание 4. Исследовать ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^2}.$$

Задание 5. Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимости:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}.$$

Задание 6. Найти область сходимости данного степенного ряда:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(2n+1)^2x^n$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2(x-2)^{2n}}{2^n}$.

Задание 7.

а) Разложить в ряд Тейлора по степеням $(x-1)$.

б) Разложить в ряд Маклорена, используя известные разложения функций в ряды.

а) $f(x)=(x^2+4)^3$; б) $f(x)=\frac{\sin x^3}{x}$.

Задание 8.

а) Найти приближенное значение функции с точностью до 0,001.

б) Найти приближенное значение интегралов с точностью до 0,001.

а) $\sqrt[5]{250}$; б) $\int_0^{1/3}\frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^2}}$.

Задание 9. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего данным начальным условиям:

$$y''+1{,}5x^2y=1, \qquad y(0)=0, y'(0)=0.$$

Задание 10.

а) Разложить функцию в ряд Фурье.

б) Разложить функцию в неполный ряд Фурье в указанном интервале.

а) $f(x)=\begin{cases}0, -1<x\le 0;\\ \frac{1}{3}x, 0<x<1;\end{cases}$ б) $f(x)=|x|, (0;\pi)$ по синусам.

Вариант 27

Задание 1. Исследовать ряд на сходимость по определению сходящегося ряда:

$$-1+\frac{2}{3}-\frac{4}{9}+\frac{8}{27}-\cdots.$$

Задание 2. Исследовать ряд на сходимость, применяя необходимый признак:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2}{n(n+1)}.$$

Задание 3. Исследовать ряд на сходимость, применяя достаточные признаки сходимости рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot(2n+1)}{2\cdot 5\cdot 8\cdot \ldots\cdot(3n+2)}.$$

Задание 4. Исследовать ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n-1}.$$

Задание 5. Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимости:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot\ln n}{\sqrt{n}+2}.$$

Задание 6. Найти область сходимости данного степенного ряда:

1) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{6^n\sqrt{n+1}}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x-1)^{2n}}{n!}$.

Задание 7.

а) Разложить в ряд Тейлора по степеням $(x-1)$.

б) Разложить в ряд Маклорена, используя известные разложения функций в ряды.

а) $f(x)=2x^3+x^2-1$; б) $f(x)=1-\cos\sqrt{x}$.

Задание 8.

а) Найти приближенное значение функции с точностью до 0,001.

б) Найти приближенное значение интегралов с точностью до 0,001.

а) $\sin\frac{5}{3}$; б) $\int_0^{1/2}\ln\left(1+\sqrt{x}\right)dx$.

Задание 9. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего данным начальным условиям:

$$y''+3x^2y=x,\qquad y(0)=0, y'(0)=0.$$

Задание 10.

а) Разложить функцию в ряд Фурье.

б) Разложить функцию в неполный ряд Фурье в указанном интервале.

а) $f(x)=\pi-\frac{x}{2}, (-\pi;\pi)$; б) $f(x)=\frac{1+x}{2}, (0;5)$ по косинусам.

Вариант 28

Задание 1. Исследовать ряд на сходимость по определению сходящегося ряда:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{2\cdot5}+\frac{1}{3\cdot6}+\cdots.$$

Задание 2. Исследовать ряд на сходимость, применяя необходимый признак:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{3n^2}{3n^2-2}}.$$

Задание 3. Исследовать ряд на сходимость, применяя достаточные признаки сходимости рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{n+1}\right)^{2n}.$$

Задание 4. Исследовать ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3+1}}.$$

Задание 5. Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимости:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 3n}{(n+1)^2}.$$

Задание 6. Найти область сходимости данного степенного ряда:

1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2x)^n}{n!}$; 2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^{2n}}{2n+1}$.

Задание 7.

а) Разложить в ряд Тейлора по степеням $(x-1)$.

б) Разложить в ряд Маклорена, используя известные разложения функций в ряды.

а) $f(x)=2x^3-x^2+x+1$; б) $f(x)=x\ln(1-x^2)$.

Задание 8.

а) Найти приближенное значение функции с точностью до 0,001.

б) Найти приближенное значение интегралов с точностью до 0,001.

а) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{e}}$; б) $\displaystyle\int_0^{0,2}\ln(1+x^2)\,dx$.

Задание 9. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего данным начальным условиям:

$$y''+\frac{2}{3}x^2y=0,\qquad y(0)=1, y'(0)=0.$$

Задание 10.

а) Разложить функцию в ряд Фурье.

б) Разложить функцию в неполный ряд Фурье в указанном интервале.

а) $f(x)=\begin{cases}4, -\dfrac{1}{2}<x\le 0;\\ 1, 0<x<\dfrac{1}{2};\end{cases}$ б) $f(x)=2x+\pi, (0;\pi)$ по синусам.

Вариант 29

Задание 1. Исследовать ряд на сходимость по определению сходящегося ряда:

$$-\frac{4}{9}+\frac{4}{81}-\frac{4}{729}+\cdots.$$

Задание 2. Исследовать ряд на сходимость, применяя необходимый признак:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)}.$$

Задание 3. Исследовать ряд на сходимость, применяя достаточные признаки сходимости рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{2n-1}}{8^n}.$$

Задание 4. Исследовать ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-1}{2n+3}\right)^n.$$

Задание 5. Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимости:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{3n-2}{n^3}.$$

Задание 6. Найти область сходимости данного степенного ряда:

1) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-6)^n(x+5)^n}{n+2}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2x)^{2n-1}}{(2n-1)!}$.

Задание 7.

а) Разложить в ряд Тейлора по степеням $(x-1)$.

б) Разложить в ряд Маклорена, используя известные разложения функций в ряды.

а) $f(x)=(x^2+1)(x+2)$; б) $f(x)=\frac{\sin\sqrt{x^3}}{\sqrt{x}}$.

Задание 8.

а) Найти приближенное значение функции с точностью до 0,001.

б) Найти приближенное значение интегралов с точностью до 0,001.

а) $\ln 1{,}05$; б) $\int_0^{0{,}5}\frac{\arcsin x}{x}dx$.

Задание 9. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего данным начальным условиям:

$$y''+3x^2y=x^2, \qquad y(0)=0, y'(0)=0.$$

Задание 10.

а) Разложить функцию в ряд Фурье.

б) Разложить функцию в неполный ряд Фурье в указанном интервале.

а) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, -2<x\le 0;\\ 2x, 0<x<2;\end{cases}$ б) $f(x)=\frac{\pi-x}{2}, (0;\pi)$ по синусам.

Вариант 30

Задание 1. Исследовать ряд на сходимость по определению сходящегося ряда:

$$1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\cdots.$$

Задание 2. Исследовать ряд на сходимость, применяя необходимый признак:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n^3}{n^3+4}}.$$

Задание 3. Исследовать ряд на сходимость, применяя достаточные признаки сходимости рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{n+1}\right)^{3n}.$$

Задание 4. Исследовать ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}}{n^2-n+1}.$$

Задание 5. Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимости:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{n}{n^2+1}.$$

Задание 6. Найти область сходимости данного степенного ряда:

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(3x-1)^n}{\sqrt{2n+1}}$; 2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n\cdot 10^{n-1}}$.

Задание 7.

а) Разложить в ряд Тейлора по степеням $(x-1)$.

б) Разложить в ряд Маклорена, используя известные разложения функций в ряды.

а) $f(x)=3(x-3)(x+1)^2$; б) $f(x)=\dfrac{\sin 3x}{2x}$.

Задание 8.

а) Найти приближенное значение функции с точностью до $0{,}001$.

б) Найти приближенное значение интегралов с точностью до $0{,}001$.

а) $\cos\dfrac{1}{4}$; б) $\displaystyle\int_0^{0,5}\frac{dx}{1+x^4}$.

Задание 9. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего данным начальным условиям:

$$y''+2{,}5x^2y=0,\qquad y(0)=1, y'(0)=0.$$

Задание 10.

а) Разложить функцию в ряд Фурье.

б) Разложить функцию в неполный ряд Фурье в указанном интервале.

а) $f(x)=1+|x|, (-\pi;\pi)$; б) $f(x)=x+\frac{1}{2}, (0;1)$ по синусам.

Библиографический список

1. Булычева С.В. Математика дифференциальные уравнения. Практикум: Учебное пособие [Электронный ресурс] / С.В. Булычева. - М.: ФГУП НТЦ «Информрегистр», 2018.
2. Грачева Л.А., Гугина Е.М. Комплексные числа. Элементы теории функций комплексной переменной: учебное пособие и практикум с вариантами контрольных работ: Учебное пособие [Электронный ресурс] / Л.А. Грачева, Е.М. Гугина. - М.: ФГУП НТЦ «Информрегистр», 2017.
3. Грачева, Л.А. Ряды: курс лекций и практикум [Электронный ресурс] / Л.А. Грачева, Е.М. Гугина. - М.: ФГУП НТЦ «Информрегистр», 2015.
4. Коротецкая, В.А. Функции нескольких переменных: учебное пособие [Электронный ресурс] / В.А. Коротецкая, Ю.А. Извеков. - М.: ФГУП НТЦ «Информрегистр», 2015.
5. Пузанкова, Е.А. Дифференциальные уравнения: учебное пособие [Электронный ресурс] / Е.А. Пузанкова, А.Г.Терентьев. - М.: ФГУП НТЦ «Информрегистр», 2013.
6. Шипачев В.С. Задачник по высшей математике: Учебное пособие / В.С. Шипачев. - 10-е изд., стер. - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2016. - 304 с

Учебное текстовое электронное издание

Извеков Юрий Александрович
Шеметова Вероника Владимировна

СБОРНИК КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ
ПО МАТЕМАТИКЕ. ЧАСТЬ 2

Практикум

1,28 Мб
1 электрон. опт. диск

г. Магнитогорск, 2019 год
ФГБОУ ВО «МГТУ им. Г.И. Носова»
Адрес: 455000, Россия, Челябинская область, г. Магнитогорск,
пр. Ленина 38

ФГБОУ ВО «Магнитогорский государственный
технический университет им. Г.И. Носова»
Кафедра высшей математики
Центр электронных образовательных ресурсов и
дистанционных образовательных технологий
e-mail: ceor_dot@mail.ru