Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова»

Е.А. Пузанкова
Н.А. Квасова

ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ МЕТОДАМИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Утверждено Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия

Магнитогорск
2019

УДК 519.22 (075.8)
ББК 22.172

Рецензенты:

доктор физико-математических наук,
заведующая кафедрой теоретической и математической физики,
ФГАОУ ВО «Уральский федеральный университет
имени первого президента России Б.Н. Ельцина»
Е.А. Елфимова

кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры прикладной математики и информатики,
ФГБОУ ВО «Магнитогорский государственный технический
университет им. Г.И. Носова»
Л.В. Смирнова

Пузанкова Е.А., Квасова Н.А.
Обработка результатов измерений методами математической статистики [Электронный ресурс] :учебное пособие / Евгения Александровна Пузанкова, Нина Александровна Квасова ; ФГБОУ ВО «Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова». – Электрон. текстовые дан. (0,66 Мб). – Магнитогорск : ФГБОУ ВО «МГТУ им. Г.И. Носова», 2019. – 1 электрон. опт. диск (CD-R). – Систем. требования : IBM PC, любой, более l GHz ; 512 Мб RAM ; 10 Мб HDD ; MS Windows XP и выше ; Adobe Reader 8.0 и выше ; CD/DVD-ROM дисковод ; мышь. – Загл. с титул. экрана.
ISBN 978-5-9967-1526-8

В учебном пособии рассмотрены вопросы обработки результатов измерений, оценки точности результатов измерений методами математической статистики. Приведены примеры решения практических задач, предложены задания для организации индивидуальной самостоятельной работы студентов. При выполнении заданий предполагается использование средств вычислительной техники.

Пособие предназначено для организации самостоятельной работы студентов очной и заочной форм обучения технический направлений подготовки бакалавриата, изучающих дисциплины «Математика», «Теория вероятностей и математическая статистика».

УДК 519.22 (075.8)
ББК 22.172

ISBN 978-5-9967-1526-8

Содержание

1. ЗНАКОМСТВО С ПОГРЕШНОСТЯМИ ИЗМЕРЕНИЙ

Теория ошибок - изучение и оценка погрешности измерений. Опыт показывает, что ни одно измерение, как бы тщательно оно ни проводилось, не может быть совершенно свободно от ошибок. Поскольку в основе любой науки и ее применений лежат измерения, очень важно уметь рассчитывать эти ошибки и сводить их к минимуму. В науке слово «ошибка» не имеет обычного значения чего-то неправильного. «Ошибка» в научном измерении означает неизбежную погрешность, которая сопутствует всем измерениям. Ошибки как таковые нельзя отнести к промахам экспериментатора; вы не можете избежать их, стараясь быть очень внимательными. Лучшее, на что вы можете рассчитывать - это свести ошибки к возможному минимуму и надежно рассчитать их величины. Ни одну физическую величину (длину, время, температуру и т. д.) нельзя измерить с полной определенностью. Ценой особых усилий мы можем свести ошибки до очень малых значений, но исключить их полностью невозможно. Очевидно, если из измерений необходимо делать определенные выводы, то экспериментальные ошибки не должны быть слишком велики. Однако нет необходимости в том, чтобы ошибки были очень малы. Для многих научных измерений ошибки должны быть разумно малы (возможно, несколько процентов от измеряемой величины), но чрезмерная точность часто является излишней.

1.1. Оценка погрешностей при считывании со шкалы

Как фактически можно оценить величину ошибки? На практике такая оценка может быть довольно сложна. Первый пример - измерение с использованием маркированной шкалы, такой, как у линейки на рис. 1 или у вольтметра на рис. 2. Чтобы измерить длину карандаша на рис. 1.1, мы должны сначала совместить торец карандаша с нулем линейки и затем определить, где окажется его острие на шкале линейки. Чтобы измерить напряжение согласно рис. 1.2, мы должны определить то место на шкале вольтметра, куда указывает стрелка. Если допустить, что правильность показаний линейки и вольтметра гарантируется, то главная задача в каждом из этих двух случаев - определить, где располагается определенная точка по отношению к меткам шкалы.

Рис. 1 Измерение длины линейкой

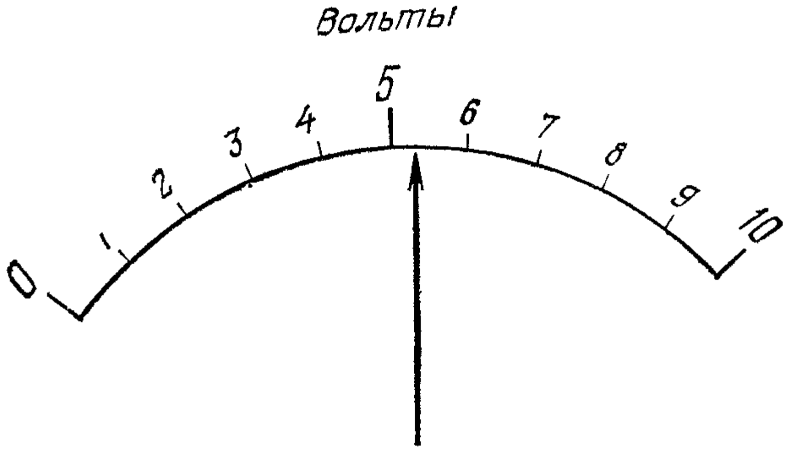

Рис.2 Считывание со шкалы вольтметра

Метки на линейке на рис. 1.1 довольно близки друг к другу (с интервалом в 1 мм). Экспериментатор вполне разумно мог бы решить, что искомая длина, без сомнения, ближе к 36 мм, чем к 35 или 37 мм, и что более точный отсчет невозможен. Следовательно, он мог бы сформулировать свой вывод как

$$\begin{gathered}\text{наилучшая оценка длины} = 36 \text{ мм},\\ \text{вероятный интервал 35,5-36,5 мм}\end{gathered} \tag{1}$$

и сказал бы, что он измерил длину до ближайшего миллиметрового деления. Такой тип заключения - что величина лежит ближе к данной метке, чем к любой из соседних, - является довольно общим. По этой причине многие ученые следуют соглашению, в соответствии с которым утверждение $l = 36$ мм без дополнительных пояснений означает, что l ближе к 36, чем к 35 или 37 мм, т. е.

$$l = 36 \text{ мм}$$

означает

$$35,5\text{мм} \leq l \leq 36,5 \text{ мм}$$

Подобным же образом запись типа $x = 1,27$ без указания какой-либо погрешности в соответствии с соглашением означает, что x лежит между 1,265 и 1,275. Важно понимать это соглашение и знать, что оно используется по отношению к любому числу, приведенному без погрешности. Особенно важно знать об этом соглашении в наш век карманных калькуляторов, которые часто показывают много цифр. Если студент слепо перепишет со своего калькулятора, скажем, число 123,456 без какого-либо объяснения, то человек, читающий это число, обязан принять, что число определенно верно до шести значащих цифр, а это представляется весьма невероятным.

Метки на шкале вольтметра, показанного на рис. 1.2, расположены гораздо реже, чем на линейке. В этом случае большинство наблюдателей согласились бы, что можно сделать больше, чем просто идентифицировать метку, к которой стрелка ближе всего. Поскольку промежутки между метками больше, можно уверенно оценить, в каком месте между метками находится стрелка. Таким образом, разумное заключение об измеренном напряжении может иметь вид:

$$\begin{aligned} \text{наилучшая оценка напряжения} &= 5{,}3\ \text{В}, \\ \text{вероятный интервал } &5{,}2\text{-}5{,}4\ \text{В}. \end{aligned} \tag{2}$$

Процесс определения положений между метками шкалы называется *интерполяцией*. Этот важный навык совершенствуется с практикой. Другие наблюдатели могли бы не согласиться с оценками точности, даваемыми соотношениями (1) и (2) . В частности, кто-то мог бы решить, что можно прибегнуть к интерполяции при измерении длины на рис. 1.1 и измерить ее с меньшей погрешностью, чем приведено в соотношении (1). Тем не менее лишь меньшинство стало бы отрицать, что соотношения (1) и (2) разумно оценивают соответствующие величины и их вероятные погрешности. Таким образом, мы видим, что приближенная оценка погрешностей представляет довольно легкую задачу в случае, когда единственной проблемой является определение положения точки на маркированной шкале [1].

1.2. Оценка погрешностей в случае многократных измерений

Многие измерения содержат погрешности, которые значительно труднее оценить, чем ошибки, связанные с определением положения точки на шкале. Например, когда мы измеряем временной интервал с помощью секундомера, главным источником погрешностей является не считывание с циферблата, а наше собственное неизвестное время реакции при запуске и остановке секундомера. Такого рода погрешности иногда можно надежно оценить, если повторить измерение несколько раз. Предположим, например, что мы измеряем период колебаний математического маятника один раз и получаем в результате 2,3 с. Из одного измерения нельзя много сказать об экспериментальной погрешности. Но если мы повторим измерение и получим 2,4 с, то можно немедленно сказать, что погрешность, вероятно, порядка 0,1 с. Если последовательность четырех измерений дает результаты (в секундах)

$$2,3;\ 2,4;\ 2,5;\ 2,4 \tag{3}$$

то мы можем сделать довольно правдоподобные оценки. Во-первых, естественно предположить, что наилучшей оценкой периода будет среднее значение 2,4 с. Во-вторых, представляется довольно разумным предположение, что правильное значение для периода лежит где-то между наименьшей величиной 2,3 и наибольшей 2,5. Таким образом, мы могли бы вполне резонно заключить, что

$$\begin{aligned} &\text{наилучшая оценка} = \text{среднее} = 2{,}4\ \text{с},\\ &\qquad\qquad \text{вероятный интервал } 2{,}3\text{-}2{,}6\ \text{с}. \end{aligned} \tag{4}$$

В случаях, когда мы можем повторить одно и то же измерение несколько раз, разброс в измеренных значениях дает ценное указание о погрешности в наших измерениях. В дальнейшем мы обсудим статистические методы обработки результатов таких многократных измерений. При соответствующих условиях эти статистические методы дают более правильную оценку погрешности, чем соотношение (4), полученное только на основе здравого смысла. Правильная статистическая обработка обладает также тем преимуществом, что дает объективную величину для погрешности, не зависящую от мнения индивидуального наблюдателя. Тем не менее оценка (4) дает простое и реалистическое заключение, полученное на основании четырех измерений (3). На результаты многократных измерений, такие, как (3), не всегда можно опираться для обнаружения погрешности. Во-первых, мы должны быть уверены, что измеряемая величина действительно есть та же самая величина в каждом случае. Предположим, например, что мы измеряем разрывное усилие для двух предположительно идентичных проволок, подвергая их разрыву (процедуре, которую мы не можем выполнить более чем один раз для каждой проволоки). В случае получения двух различных ответов эта разница может указывать на то, что наши измерения выполнены с погрешностью или что две проволоки в действительности не идентичны. Сама по себе разница между двумя ответами ничего не говорит о надежности наших измерений.

Даже в случае, когда мы можем быть уверены, что измеряем каждый раз одну и ту же величину, многократные измерения не всегда укажут на погрешность. Например, предположим, что секундомер, используемый при получении результатов (3), имел ход на 5% быстрее правильного. В этом случае все времена, получаемые с его помощью, будут на 5% больше, и никакое количество повторений (с тем же секундомером) не обнаружит этого дефекта. Погрешности такого рода, которые оказывают одно и то же влияние на все измерения, называются систематическими ошибками. Эти ошибки трудно обнаружить. В нашем примере выходом из положения могла быть поверка данного секундомера относительно более надежного. В общем случае должно быть ясно, что если у кого-то имеются основания сомневаться в правильности показаний какого-либо измерительного прибора (секундомера, рулетки, вольтметра), он должен попытаться проверить его относительно прибора, о котором известно, что его показания более надежны.

1.3. Правила записи погрешностей

В общем случае результат любого измерения величины x приводится как

$$\boxed{(\text{измеренная величина } x) = x_{наил} \pm \delta x} \tag{5}$$

Это утверждение означает, что, во-первых, наилучшая оценка экспериментатора для измеряемой величины есть число $x_{наил}$ и, во-вторых, он до определенной степени уверен, что эта величина лежит где-то между $x_{наил} + \delta x$ и $x_{наил} - \delta x$. Число δx называется *погрешностью* или *ошибкой в измерении* x. Погрешность δx принято считать положительной величиной, так что $x_{наил} + \delta x$ есть всегда наибольшее вероятное значение измеряемой величины и $x_{наил} - \delta x$ - наименьшее.

Следует отметить несколько основных правил записи погрешностей. Во-первых, поскольку величина δx служит оценкой погрешности, ее, очевидно, нельзя приводить с очень большой точностью. Если мы измеряем ускорение силы тяжести g, было бы абсурдом представлять результат, подобно следующему:

$$(\text{измеренное значение } \; g) = 9,82 \pm 0,02385 \text{ м/с}^2. \tag{6}$$

Невероятно, чтобы погрешность в измерении могла быть известна до четырех значащих цифр.

$$\boxed{\begin{array}{c}\textbf{Правило приведения погрешностей}\\ \text{Экспериментальные погрешности обычно должны}\\ \text{округляться до одной значащей цифры}\end{array}} \tag{7}$$

Таким образом, если некоторый расчет дает для погрешности $\delta g = 0,02385$м/с^2, то это значение должно быть округлено до $\delta g = 0,02$м/с^2, и вывод (6) следует переписать как

$$(\text{измеренное значение } \ g) = 9,82 \pm 0,02 \text{ м/с}^2. \tag{8}$$

Есть только одно важное *исключение из правила* (7). Если первая цифра в погрешности δx есть 1, то, возможно, лучше сохранить две значащие цифры в δx. Например, предположим, что некоторый расчет дал для погрешности $\delta x = 0,14$. Округлить это значение до $\delta x = 0,1$ -значит на 40 % уменьшить ошибку; так что более правильным было бы сохранить две цифры и привести $\delta x = 0,14$. Тот же аргумент, вероятно, можно было бы использовать, если первая цифра есть 2.

Когда погрешность в измерении рассчитана, необходимо проанализировать, какие цифры в измеренной величине являются значащими. Утверждение типа

$$(\text{измеренная скорость }) = 6051,78 \pm 30 \text{ м/с}. \tag{9}$$

очевидно, нелепо. Погрешность 30 означает, что цифра 5 на третьем месте от начала числа 6051,78 могла быть в действительности равна 2 или 8. Ясно, что последующие цифры 1, 7 и 8 вовсе не имеют значения и должны быть округлены. Таким образом, корректная запись (9) есть

$$(\text{измеренная скорость }) = 6050 \pm 30 \text{ м/с}. \tag{10}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\textbf{Правило приведения результатов}\\ \text{Последняя значащая цифра в любом приводимом результате}\\ \text{обычно должна быть того же порядка величины}\\ \text{(находиться в той же десятичной позиции), что и погрешность.}\end{array}} \tag{11}$$

Например, результат 92,81 с погрешностью 0,3 должен быть округлен до

$$92,8 \pm 0,3.$$

Если же ошибка равна 3, то тот же результат следует представить как

$$93 \pm 3,$$

а если ошибка равна 30, то как

$$90 \pm 30.$$

Однако используемые в расчетах числа должны, как правило, содержать на одну значащую цифру больше, чем это оправдано. Это уменьшит неточности, возникающие при округлении чисел. В конце расчета окончательный ответ следует округлить и избавиться от этой добавочной (и незначащей) цифры.

1.4. Относительные погрешности

Погрешность δx в измерении

$$(\text{измеренная величина } x) = x_{наил} \pm \delta x$$

показывает надежность или точность измерения. Однако погрешность сама по себе не раскрывает всей картины. Погрешность в 1 см для расстояния 1 км означала бы необычайно точное измерение, в то время как погрешность в 1 см для расстояния в 3 см означала бы лишь грубую оценку. Очевидно, что качество измерения характеризуется не только самой погрешностью δx , но также и отношением δx к $x_{наил}$, и это обстоятельство заставляет нас рассматривать *относительную погрешность*

$$\boxed{\text{относительная погрешность} = \frac{\delta x}{|x_{наил}|}} \qquad (12)$$

(Относительная погрешность также называется *точностью.*) В этом определении символ $|x_{наил}|$ обозначает абсолютную величину $x_{наил}$.

Чтобы избежать недоразумений с относительной погрешностью, саму погрешность δx иногда называют *абсолютной погрешностью.*

В большинстве серьезных измерений погрешность δx намного меньше измеряемой величины $x_{наил}$. Поскольку при этом относительная погрешность

δx представляет собой обычно малое число, часто удобно умножать ее на 100 и приводить как *погрешность в процентах*. Например, результат измерения

$$\text{Длина } l = 50 \pm 1\text{см} \tag{13}$$

имеет относительную погрешность

$$\frac{\delta l}{|l_{наил}|} = \frac{1}{50} = 0,02$$

и погрешность, выраженную в процентах, 2 %. Таким образом, результат (13) мог быть представлен как

$$\text{Длина } l = 50 \text{ см} \pm 2 \text{ \%}. \tag{14}$$

Следует обратить внимание на то, что, в то время как абсолютная погрешность δl измеряется в тех же единицах, что и l, относительная погрешность $\delta l/|l_{наил}|$ является безразмерной величиной. Учет этого различия поможет избежать обычных ошибок, когда путают абсолютную погрешность с относительной.

Относительная погрешность приближенно характеризует качество измерений независимо от значения измеряемой величины. Относительная погрешность в 10 % или около того - это обычно характеристика довольно грубых измерений. (Грубое измерение 10 см могло бы иметь погрешность в 1 см; грубое измерение 10 км могло бы иметь погрешность в 1 км.) Относительная погрешность в 1 или 2 % характеризует уже довольно точные измерения.

2. ПОГРЕШНОСТИ В КОСВЕННЫХ ИЗМЕРЕНИЯХ

Большинство физических величин обычно невозможно измерить непосредственно, и их определение включает два различных этапа. Сначала измеряют одну или более величин $x, y, ...$, которые могут быть непосредственно измерены и с помощью которых можно вычислить интересующую нас величину. Затем, используя измеренные значения $x, y, ...$ вычисляют саму искомую величину. Например, чтобы найти площадь прямоугольника, обычно измеряют его длину l и высоту h и затем рассчитывают его площадь S по формуле $S = l \cdot h$. Аналогично наиболее очевидный способ определения скорости v некоторого тела состоит в том, чтобы измерить путь d, прой- пройденный телом, и затраченное на это время t, а затем вычислить v по формуле $v = d/t$.

Если измерение включает эти два этапа, то и оценка погрешностей также включает их. Сначала надо оценить погрешности в величинах, которые измеряются непосредственно, а затем определить, как эти погрешности «распространяются» в расчетах и приводят к погрешности в конечном результате.

2.1. Погрешность суммы и разности

Допустим, что измеряются две величины x и y и вычисляется их сумма $x + y$ или их разность $x - y$. Чтобы оценить погрешность как в сумме, так и в разности, мы должны определить их наибольшие и наименьшие вероятные значения. Наибольшее и наименьшее вероятные значения равны $x_{наил} \pm \delta x$, а аналогичные величины для равны $y_{наил} \pm \delta y$. Следовательно, наибольшее вероятное значение $x \pm y$ есть

$$x_{наил} + y_{наил} + \delta x + \delta y$$

и наименьшее вероятное значение

$$x_{наил} + y_{наил} - (\delta x + \delta y).$$

Таким образом, наилучшая оценка для $q = x + y$ есть

$$q_{наил} = x_{наил} + y_{наил}$$

и ее погрешность

$$\delta q \approx \delta x + \delta y \tag{15}$$

Аналогичные аргументы приводят к тому, что погрешность в разности $x - y$ дается той же самой формулой (15). Таким образом, погрешность как в сумме $x + y$, так и в разности $x - y$ представляет собой сумму $\delta x + \delta y$ погрешностей величин x и y. В случае нескольких чисел $x, \cdots w$, которые надо складывать или вычитать, повторные применения (15) приводят к следующему правилу.

Погрешность суммы и разности

Если несколько величин $x, \cdots, w$ измерены с погрешностями $\delta x, \cdots, \delta w$ и используются для вычисления величины

$$q = x + \cdots + z - (u + \cdots + w),$$

то погрешность величины q есть сумма

$$\delta q \approx \delta x + \cdots + \delta z + \delta u + \cdots + \delta w$$

всех исходных погрешностей.

(16)

Другими словами, когда складывают или вычитают любое число измеренных величин, то погрешности этих величин *всегда складываются*.

Пример В качестве простого примера применения правила (16) предположим, что экспериментатор смешивает жидкости из двух фляг, предварительно измерив по отдельности - массы этих наполненных и затем пустых фляг и получив в результате

$$M1 = \text{ масса первой фляги и ее содержимого} = 540 \pm 10 \text{ г};$$

$$T1 = \text{ масса первой пустой фляги} = 72 \pm 1 \text{ г};$$

$$M2 = \text{ масса второй фляги и ее содержимого} = 940 \pm 20 \text{ г};$$

$$T2 = \text{ масса второй пустой фляги} = 97 \pm 1 \text{ г}.$$

Затем он рассчитывает полную массу жидкости как

$$M = M1 - T2 + M2 - T2 = 540 - 72 + 940 - 97 \text{ г} = 1311 \text{ г}.$$

В соответствии с правилом (16) погрешность в его результате есть сумма всех четырех погрешностей:

$$\delta M \approx \delta M1 + \delta T1 + \delta M2 + \delta T2 = 10 + 1 + 20 + 1 \text{ г} = 32 \text{ г}.$$

Таким образом, его конечный результат (надлежащим образом округленный) имеет вид

$$\text{полная масса жидкости} = 1310 \pm 30 \text{ г}.$$

Заметьте, что существенно меньшие погрешности в массах пустых фляг вносят ничтожную добавку в конечную погрешность. Это очень важный эффект, который мы обсудим позднее. С опытом студент сможет научиться заранее выявлять те погрешности, которые пренебрежимо малы и поэтому могут быть исключены из рассмотрения. Часто это может очень существенно упростить расчет погрешностей.

2.2. Погрешность произведения и частного

Рассмотрим погрешности в произведении $q =$ двух измеренных величин. Во-первых, для удобства запишем число в стандартном виде

$$(\text{измеренное значение } x) = x_{наил} \pm \delta x$$

$$(\text{измеренное значение } y) = y_{наил} \pm \delta y$$

и, используя понятие относительной погрешности,

$$(\text{измеренное значение } x) = x_{наил}\left(1 \pm \frac{\delta x}{|x_{наил}|}\right), \tag{17}$$

$$(\text{измеренное значение } y) = y_{наил}\left(1 \pm \frac{\delta y}{|y_{наил}|}\right). \tag{18}$$

Поскольку $x_{наил}$ и $y_{наил}$ - наши наилучшие оценки для x и y, то наилучшая оценка для $q = xy$ есть $q_{наил} = x_{наил} \cdot y_{наил}$. Наибольшие вероятные значения x и y даются выражениями (17) и (18) со знаком плюс. Таким образом, наибольшее вероятное значение для $q = xy$ есть

$$(\text{наибольшее значение } q) = x_{наил} \cdot y_{наил}\left(1 + \frac{\delta x}{|x_{наил}|}\right)\left(1 + \frac{\delta y}{|y_{наил}|}\right). \tag{19}$$

Наименьшее вероятное значение для q дается аналогичным выражением с двумя знаками минус. Теперь результат произведения скобок в (19) может быть представлен как

$$\left(1 + \frac{\delta x}{|x_{наил}|}\right)\left(1 + \frac{\delta y}{|y_{наил}|}\right) = \left(1 + \frac{\delta x}{|x_{наил}|} + \frac{\delta y}{|y_{наил}|} + \frac{\delta x}{|x_{наил}|} \cdot \frac{\delta y}{|y_{наил}|}\right) \tag{20}$$

Поскольку две относительные погрешности $\dfrac{\delta x}{|x_{наил}|}$ и $\dfrac{\delta x}{|x_{наил}|}$ - малые числа (возможно, порядка нескольких процентов), то их произведение очень мало. Следовательно, последним членом в (20) можно пренебречь. Возвращаясь к (19) мы получаем

$$(\text{наибольшее значение } q) = x_{наил} \cdot y_{наил}\left(1 + \frac{\delta x}{|x_{наил}|} + \frac{\delta y}{|y_{наил}|}\right).$$

Наименьшее вероятное значение дается аналогичным выражением с двумя знаками минус. Наши измерения x и y приводят, следовательно, к значению $q = x \cdot y$, определяемому выра- жением

$$(\text{значение } q) = x_{наил} \cdot y_{наил}\left(1 \pm \left[\frac{\delta x}{|x_{наил}|} + \frac{\delta y}{|y_{наил}|}\right]\right).$$

Сравним полученное выражение с общей формой записи числа

$$(\text{значение } q) = q_{наил}\left(1 \pm \frac{\delta q}{|q_{наил}|}\right).$$

Видим, что *относительная погрешность значения* $q = x \cdot y$ *равна сумме относительных погрешностей* x и y:

$$\frac{\delta q}{|q_{наил}|} = \frac{\delta x}{|x_{наил}|} + \frac{\delta y}{|y_{наил}|}.$$

Аналогичные рассуждения приводят к выводу, что погрешность в частном олпределяется тем же самым правилом, что и для произведения, т. е. *относительная погрешность в* $q = x/y$ *равна сумме относительных погрешностей в* x и y.

Погрешность произведения и частного
Если несколько величин $x, \cdots, w$
измерены с малыми погрешностями $\delta x, \cdots, \delta w$
и используются для вычисления величины
$$q = \frac{x \times \cdots \times z}{u \times \cdots \times w}, \qquad (21)$$
то относительная погрешность величины q есть сумма
$$\frac{\delta q}{\lvert q_{наил} \rvert} \approx \frac{\delta x}{\lvert x_{наил} \rvert} + \cdots + \frac{\delta z}{\lvert z_{наил} \rvert} + \frac{\delta u}{\lvert u_{наил} \rvert} + \cdots + \frac{\delta w}{\lvert w_{наил} \rvert}$$
относительных погрешностей $x, \cdots, w$.

Пример. При съемке местности иногда приходится определять недоступную непосредственному измерению длину l (например, высота большого дерева) при помощи измерений трех других длин $l_1,\ l_2,\ l_3$, которые дают

$$l = \frac{l_1 l_2}{l_3}$$

Предположим, что мы выполняем такой эксперимент и получаем результаты (в метрах)

$$l_1 = 50 \pm 0,5;\ l_2 = 1,5 \pm 0,03;\ l_3 = 5,0 \pm 0,2.$$

Наша наилучшая оценка для l равна

$$l_{наил} = \frac{50 \cdot 1,5}{5} = 15 \text{ м}.$$

В соответствии с (21) относительная погрешность этого результата равна сумме относительных погрешностей в $l_1,\ l_2,\ l_3$, которые равны соответственно:

$$\frac{\delta l_1}{l_{1наил}} = \frac{0,5}{50} = 0,01 = 1\%;\ \frac{\delta l_2}{l_{2наил}} = \frac{0,03}{1,5} = 0,02 = 2\%;\ \frac{\delta l_3}{l_{3наил}} = \frac{0,2}{5} = 0,04 = 4\%;$$

Таким образом,

$$\frac{\delta l}{l_{наил}} \approx \frac{\delta l_1}{l_{1наил}} + \frac{\delta l_2}{l_{2наил}} + \frac{\delta l_3}{l_{3наил}} = (1 + 2 + 4)\% = 7\%$$

Чтобы найти абсолютную погрешность, умножим найденную относительную погрешность на $l_{наил}$:

$$\delta l \approx 15 \cdot 0,07 = 1,05$$

и наш окончательный результат имеет вид

$$l = 15 \pm 1 \text{ м}.$$

3. СЛУЧАЙНЫЕ И СИСТЕМАТИЧЕСКИЕ ОШИБКИ

Мы уже видели, что один из лучших способов оценить достоверность измерений состоит в том, чтобы повторить их несколько раз и затем сравнить между собой различные полученные значения. Однако не все виды экспериментальной погрешности можно выявить на основе статистической обработки многократных измерений. По этой причине погрешности разделяются на две группы: случайные погрешности, которые можно обрабатывать статистическими методами, и систематические погрешности, к которым эти методы неприменимы.

Экспериментальные погрешности, которые можно обнаружить с помощью многократных измерений, называются *случайными ошибками*, а те, которые нельзя обнаружить таким способом, называются *систематическими ошибками*.

Случайные ошибки неизвестны для конкретного результата измерения, зависят от точности прибора, квалификации опретора, неучтенного влияния внешней среды. Случайные ошибки не могут быть устранены из результата конкретного измерения, их влияние можно только ослабить путем повышения количества и качества измерений и соответствующей математической обработкой результатов измерений.

Возможно, наиболее очевидная причина **систематической ошибки**-это раскалибровка приборов (подобно отстающему секундомеру, вытянутой линейке или стрелочному прибору, у которого стрелка до начала измерений не была установлена на нуль).

Грубые ошибки возникают в результате неисправности прибора, небрежности наблюдателя или аномального влияния внешней среды. Контроль работ позволяет выявить и устранить грубые ошибки из результатов измерений.

Учет случайных ошибок совершенно отличен от учета систематических ошибок. Статистические методы, описанные в следующем разделе, дают достоверную оценку случайных погрешностей и указывают на точно определенный способ их уменьшения. С другой стороны, систематические ошибки трудно оценить и даже обнаружить. Пока будем рассматривать эксперименты, в которых все источники систематических ошибок выявлены.

Предположим, что нам надо измерить некоторую величину и что мы выявили все источники систематической ошибки и уменьшили их влияние до пренебрежимо малого уровня. Поскольку все оставшиеся источники ошибок случайны, мы будем в состоянии обнаружить их, многократно повторяя измерения. Предположим, что мы производим N измерений величины (используя одну и ту же аппаратуру и метод измерения) и получаем N значений:

$$x_1,\ x_2,\ \cdots x_N \tag{22}$$

Наилучшей оценкой величины будет **среднее значение** от $x_1,\ x_2,\ \cdots x_N$:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_N}{N} = \frac{\sum x_i}{N} \tag{23}$$

Если принять, что среднее $\overline{x}$ - это наилучшая оценка величины x, то естественно рассмотреть разность

$$\Delta_i = x_i - \overline{x}.$$

Эта разность, часто называемая **отклонением (или остатком)** от x , показывает, *насколько результат i-го измерения x_i отличается от среднего значения* $\overline{x}$. Если отклонения очень малы, то результаты наших измерений близки друг к другу и, вероятно, очень точны. Чтобы оценить достоверность результатов измерений в среднем, мы могли бы, естественно, попытаться усреднить отклонения Δ_i. К сожалению, среднее значение отклонений равно нулю. На самом деле так будет в случае любого набора результатов измерений, поскольку уже само определение среднего значения ведет к тому, что Δ_i иногда положительны, а иногда отрицательны таким образом, чтобы было равно нулю. Поэтому очевидно, что среднее отклонений - это не лучшая характеристика достоверности результатов измерений . Лучший способ обойти эту неприятность - возвести в квадрат все отклонения, которые в этом случае будут образовывать набор положительных чисел, а затем усреднить эти числа.

Случайные ошибки обладают следующими свойствами [2]:

1. По абсолютной величине они не превосходят определенного предела.

2. Положительные и отрицательные их значения равновозможны.

3. Малые по абсолютной величине случайные ошибки встречаются чаще, чем большие.

4. Среднее арифметическое значение случайных ошибок при неограниченном увеличении числа измерений стремится к нулю, т.е.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\Delta_1+\Delta_2+\cdots+\Delta_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{[\Delta]}{n}=0.$$

Эти свойства случайных ошибок возникают из принятых в теории ошибок постулатов:

- ошибки Δ_i подчиняются нормальному закону распределения;

- математическое ожидание ошибок равно 0, что возможно при отсутствии систематических ошибок.

4. ВЫРАВНИВАНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ РЯДОВ

Производство измерений является частным случаем выборочного метода, когда в качестве генеральной совокупности рассматриваются все возможные значения измеренного объекта, а в качестве выборки - n выполненных измерений этого объекта. **Задача выравнивания** заключается в том, чтобы подобрать теоретическую кривую распределения $f(x)$, наилучшим образом описывающую данное статистическое распределение. Как правило, вид теоретической кривой выбирается заранее из существа задачи, а также по виду эмпирической кривой распределения (гистограммы, полигона). Поэтому задача переходит в задачу выбора параметров распределения. Для ряда случайных ошибок измерений в качестве теоретического берут нормальный закон распределения

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}. \tag{24}$$

Тогда задача сводится к рациональному выбору параметров a и σ. Один из методов (метод моментов) заключается в подборе параметров таким образом, что несколько важнейших числовых характеристик были равны соответствующим статистическим характеристикам

$$a = M^*(X) \qquad \sigma = \sqrt{D^*(X)}.$$

4.1. Группирование данных

Если объем выборки достаточно велик, выполняют **группирование данных**. При этом весь диапазон значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ делят на интервалы и подсчитывают, сколько x_i попадает в каждый интервал. Способы задания интервалов различны. Возможен подход, при котором устанавливают интервалы равной длины в количестве от 8 до 20 в зависимости от объема выборки. Для определения числа равных интервалов, на которые следует разбить весь диапазон значений x_i можно воспользоваться формулой $k = log_2 n + 1$.

Для определения величины интервала нужно найти x_{max} и x_{min}, затем вычислить длину интервала по формуле

$$h = \frac{x_{max} - x_{min}}{k}, \tag{25}$$

где k - число интервалов.

Границы интервалов определяют по формулам:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_{min}, \\ x_{i+1} &= x_i + h, \qquad (i = 1, 2, \ldots, k) \\ x_{k+1} &= x_{max}. \end{aligned} \tag{26}$$

Последняя формула используется для контроля вычислений с учетом округления.

Далее подсчитывают сколько значений x_i попадает в каждый интервал. **Абсолютные частоты** n_i показывают, как часто при наблюдении встречались значения, сведенные в данные интервалы. Малочисленные интервалы (там, где $n_i < 5$) объединяют. В качестве контроля правильности определения абсолютных частот используют равенство:

$$\sum_{i=1}^{k} n_i = n.$$

Затем определяют середины интервалов x_i^{cp} по формулам

$$\begin{aligned} x_1^{cp} &= x_{min} + h/2, \\ x_{i+1}^{cp} &= x_i^{cp} + h \qquad (i = 1, 2, \ldots, k-1) \\ x_k^{cp} + h/2 &= x_{max} \qquad \text{- контроль вычислений.} \end{aligned} \tag{27}$$

По сгруппированным данным вычисляем оценки параметров.
Оценка математического ожидания (среднее арифметическое):

$$M^*(X) = \overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} n_i x_i^{cp}. \tag{28}$$

Оценка среднего квадратического отклонения:

$$\sigma^* = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{k} n_i (x_i^{cp} - \overline{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{k} n_i v_i^2}, \tag{29}$$

где $v_i = x_i^{cp} - \overline{x}$.

4.2. Статистическая проверка гипотез

Рассмотрим вопрос, связанный с проверкой правдоподобия гипотез, а именно о согласованности теоретического и статистического распределения. Чтобы сделать надежный вывод о том, существенно или случайно отклонение эмпирической кривой от нормальной, используют метод исследования, называемый статистической проверкой гипотез. Для проверки выдвинутой гипотезы вычисляют числовую характеристику, называемую **критерием проверки**. Если вычисленному значению критерия соответствует достаточно высокая вероятность, гипотеза принимается. Вероятность, которой решено пренебрегать в данной области исследования, называется **уровнем значимости** α. В технических исследованиях принимают $\alpha = 0,10; 0,05; 0,01$.

При исследовании выборки на нормальный закон распределения существует ряд приближенных критериев.

1) В случае нормального закона распределения между вероятным отклонением r и с.к.о. σ существует зависимость

$$r = 0,675\sigma. \tag{30}$$

По результатам выборки величина r оценивается **вероятной ошибкой** r^*. Если расположить все значения x_i в порядке возрастания или убывания абсолютных величин, тогда r^* будет находиться в середине такого ряда. Например, если x_i - ошибки измерений Δ_i, то

$$r^* = |\Delta_i|, \qquad i = (n+1)/2 \qquad \text{при нечетном } n$$

или

$$r^* = (|\Delta_i| + |\Delta_{i+1}|)/2, \qquad i = n/2 \qquad \text{при четном } n.$$

При нормальном законе распределения между средним отклонением ϑ и σ существует зависимость

$$\sigma = 1,253\vartheta \tag{31}$$

Оценку для ϑ вычисляют по формуле

$$\vartheta^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i - \overline{x}|$$

или, если Δ_i - ошибки измерений,

$$\vartheta^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|\Delta_i|.$$

Заменим с.к.о. σ его оценкой

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n}} \quad \text{где} \quad v_i = x_i - \overline{x}. \tag{32}$$

Будем иметь вместо (30) и (31) приближенные зависимости

$$r^* \approx 0,67m, \tag{33}$$

$$m \approx 1,25\vartheta^*, \tag{34}$$

которые будут тем точнее, чем ближе закон распределения к нормальному.

2) Известно, что для нормального закона распределения асимметрия (скошенность) S и эксцесс E равны нулю. По определению

$$S = \frac{\mu_3}{\sigma^3}, \qquad E = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3, \tag{35}$$

где μ_s $(s = 2,3,4)$ - центральные моменты s-го порядка, которые по определению равны

$$\mu_s = M(X - M_X)^s. \tag{36}$$

Однако, эмпирические значения асимметрии S^* и эксцесса E^*, вообще говоря, не равны нулю. Для вычисления соответствующих эмпирических значений в формулах (35) заменяем с.к.о. σ его оценкой (32), а соответствующие центральные моменты заменяем их статистическими аналогами μ_s^*:

$$\mu_s^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^s \quad \text{- для несгруппированных данных} \tag{37}$$

или

$$\mu_s^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i(x_i^{cp} - \overline{x})^k \quad \text{- для сгруппированных данных.} \tag{38}$$

Тогда

$$S^* = \frac{\mu_3^*}{m^3}, \qquad E^* = \frac{\mu_4^*}{m^4} - 3 = \frac{\mu_4^*}{\mu_2^{*2}} - 3. \tag{39}$$

Считается, что отклонение от нуля этих величин не противоречит гипотезе нормальности кривой распределения, если выполняются неравенства

$$|S^*| \leq 3\sigma_{S^*}, \tag{40}$$

$$|E^*| \leq 5\sigma_{E^*}, \tag{41}$$

где стандартные отклонения асимметрии и эксцесса находим по формулам

$$\sigma_{S^*} = \sqrt{\frac{6(n-1)}{(n+1)(n+3)}}, \tag{42}$$

$$\sigma_{E^*} = \sqrt{\frac{24n(n-2)(n-3)}{(n+1^2(n+3)(n+5).}}, \tag{43}$$

Если объем выборки большой ($n > 50$) можно использовать приближенные равенства:

$$\sigma_{S^*} \approx \sqrt{\frac{6}{n}}, \quad \sigma_{E^*} \approx \sqrt{\frac{24}{n}}. \tag{44}$$

4.3. Критерий Пирсона χ^2

К. Пирсон предложил в качестве меры расхождения теоретического и эмпирического распределений вычислять следующую статистику:

$$\chi^2_H = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}, \tag{45}$$

где n_i' - теоретическая (нормальная частота). Методику вычисления теоретических частот рассмотрим чуть ниже.

Для распределения χ^2 составлены таблицы. По ним находят **критическую точку** $\chi^2_{kp}(\alpha, \nu)$. Аргументами являются заданный уровень значимости α и **число степеней свободы** $\nu = k - s - 1$, где s - число параметров теоретического распределения. Для нормального закона распределения $s = 2$, поэтому число степеней свободы $r = k - 3$. При работе в программе Excel удобно пользоваться встроенной функцией

$$\chi^2_{kp}(\alpha, \nu) = \text{ХИ2ОБР}(\alpha, \nu).$$

Если $\chi^2_H < \chi^2_{kp}(\alpha, \nu)$, то результаты наблюдений не противоречат выдвинутой гипотезе, то есть можно считать, что эмпирическое распределение несущественно отличается от нормального.

Если $\chi^2_H > \chi^2_{kp}(\alpha, \nu)$, то результаты наблюдений противоречат выдвинутой гипотезе и эмпирическое распределение существенно отличается от нормального.

4.4. Методика вычисления теоретических частот

1. Для границ интервалов проводим процедуру стандартизации:

$$t_i = \frac{x_i - \overline{x}}{\sigma^*}, \qquad (i = 0, 1, \ldots, k). \tag{46}$$

2. Вычисляем значения $F(t_i)$ функции стандартного нормального распределения в точках t_i. При работе в программе Excel для нахождения значений функции $F(t)$ используем встроенную функцию $F(t_i) = \text{НОРМСТРАСП}(t_i)$

3. Вычисляем **теоретическую вероятность** попадания случайной величины в заданный интервал:

$$P_i = P(x_{i-1} < X < x_i) = F(t_i) - F(t_{i-1}), \qquad (i = 1, 2, \ldots, k). \tag{47}$$

4. Затем вычисляем теоретические частоты:

$$n_i' = n \cdot P_i. \tag{48}$$

Контроль правильности вычислений проводим по формуле:

$$\sum_{i=1}^{k} n_i' \approx n.$$

5. ИНТЕРВАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

Недостаток точечных оценок состоит в том. что точечная оценка Θ^*, вообще говоря, не совпадает с величиной оцениваемого параметра Θ, особенно при малом n. При ограниченном числе измерений оценку точности целесообразно выполнять с помощью доверительных интервалов.

Доверительным интервалом называется интервал, которому истинное значение оцениваемого параметра принадлежит с некоторой **доверительной вероятностью** β. Пусть для параметра Θ имеется несмещенная оценка Θ^*. Тогда, если известен закон распределения Θ^*, интервал находится (строится) путем решения неравенства

$$P\left(|\Theta - \Theta^*| < \varepsilon\right) = \beta \tag{49}$$

с заданной доверительной вероятностью β. В технических исследованиях часто принимают значение доверительной вероятности равным 0,9; 0,95; 0,999.

1. **Доверительный интервал для математического ожидания** $a = M_X$ нормально распределенной случайной величины, если **известно с.к.о.** σ, определяют по формуле

   $$\overline{x} - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \overline{x} + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \tag{50}$$

   где $\overline{x}$ - выборочное среднее, а коэффициент t является таким, что

   $$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^t e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{\beta}{2},$$

   и его находят из таблиц функции Лапласа. При работе в программе Excel можно воспользоваться мастером функций: $t = \text{НОРМСТОБР}(\frac{\beta+1}{2})$.

2. **Доверительный интервал для** $a = M_X$ нормально распределенной случайной величины при условии, что **с.к.о. неизвестно**, находят по формуле

   $$\overline{x} - t_\beta\frac{m}{\sqrt{n}} < a < \overline{x} + t_\beta\frac{m}{\sqrt{n}}, \tag{51}$$

   где m - оценка с.к.о., найденная по формуле Бесселя, а t_β - коэффициент распределения Стьюдента, который находят из таблиц по вероятности β и числу степеней свободы $\nu = n-1$. При использовании программы Excel используем встроенную функцию $t_\beta = \text{СТЬЮДРАСПОБР}(1-\beta, \nu)$.

3. В случае отсутствия систематических ошибок математическое ожидание совпадает с истинным значением измеряемой величины. В этом случае формулу (51) можно использовать для нахождения **доверительного интервала истинного значения X измеряемой величины:**

$$\overline{x} - t_\beta \frac{m}{\sqrt{n}} < X < \overline{x} + t_\beta \frac{m}{\sqrt{n}}. \tag{52}$$

Заметим, что при достаточно большом n (порядка 25 и более) для нахождения коэффициента t_β можно пользоваться таблицами функции Лапласа.

4. **Доверительный интервал для с.к.о.** в случае нормальной выборки строится в виде

$$\gamma_1 m < \sigma < \gamma_2 m, \tag{53}$$

где

$$\gamma_1 = \sqrt{\frac{n-1}{\chi^2\left(\nu, (1-\beta)/2\right)}}; \qquad \gamma_2 = \sqrt{\frac{n-1}{\chi^2\left(\nu, (1+\beta)/2\right)}}, \qquad (\nu = n-1) \tag{54}$$

или

$$\gamma_1 = \sqrt{\frac{n}{\chi^2\left(\nu, (1-\beta)/2\right)}}; \qquad \gamma_2 = \sqrt{\frac{n}{\chi^2\left(\nu, (1+\beta)/2\right)}}. \quad (\nu = n) \tag{55}$$

Формулы (71) используем, если оценка среднего квадратического отклонения m получена по формуле Бесселя, а формулы (55) - в случае, когда m вычислена по формуле Гаусса. Следует заметить, что существуют таблицы, позволяющие сразу находить величины γ_1 и γ_2.

5. **Доверительный интервал для стандартного отклонения среднего** $\sigma_{\overline{x}}$. Его легко получить, разделив все члены неравенства (53) на $\sqrt{n}$. Учитывая, что $m/\sqrt{n} = m_{\overline{x}}$, получим

$$\gamma_1 m_{\overline{x}} < \sigma_{\overline{x}} < \gamma_2 m_{\overline{x}}. \tag{56}$$

Доверительные интервалы можно применять для проверки статистических гипотез. Например, если мы имеем ряд истинных ошибок Δ_i то для математического ожидания M_Δ можно построить доверительный интервал

$$\overline{\Delta} - t_\beta m_{\overline{\Delta}} < M_\Delta < \overline{\Delta} + t_\beta m_{\overline{\Delta}}, \tag{57}$$

где

$$\overline{\Delta} = \frac{[\Delta]}{n}, \qquad m_{\overline{\Delta}} = \frac{m}{\sqrt{n}}.$$

При справедливости гипотезы $M_\Delta = 0$ очевидно, с вероятностью β, должны выполняться неравенства:

$$\overline{\Delta} - t_\beta m_{\overline{\Delta}} < 0; \qquad \overline{\Delta} + t_\beta m_{\overline{\Delta}} > 0.$$

Объединяя их в одно неравенство, получаем **критерий обнаружения систематических ошибок**:

$$|\overline{\Delta}| < t_\beta m_{\overline{\Delta}}. \tag{58}$$

Если неравенство (58) выполняется, то гипотеза об отсутствии систематических ошибок принимается.

При большом n ($n > 30$), принимая $t_\beta = 2$, что соответствует вероятности $\beta = 0,95$, а также принимая $m_{\overline{\Delta}} = 1,25\Theta$, где $\Theta = \big[|\Delta|\big]/n$ - средняя ошибка, получаем критерий:

$$\big|[\Delta]\big| < \frac{2,5\big[|\Delta|\big]}{\sqrt{n}}. \tag{59}$$

6. ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ РАВНОТОЧНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ ОДНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Положим, что некоторая величина, истинное значение которой равно X, измерена n раз. В результате измерений получены значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$, свободные от систематических ошибок. Случайные ошибки результатов измерений

$$\Delta_i = x_i - X \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Суммируя, получим

$$[\Delta] = [x] - nX,$$

отсюда следует

$$X = \frac{[x]}{n} - \frac{[\Delta]}{n}.$$

Последнее слагаемое при большом числе измерений стремится к нулю на основании свойств случайных ошибок, поэтому

$$X \approx \overline{x} = \frac{[x]}{n} = \frac{x' + \varepsilon_1 + x' + \varepsilon_2 + \cdots + x' + \varepsilon_n}{n} = x' + \frac{[\varepsilon]}{n}, \qquad (60)$$

где x' - приближенное значение измеряемой величины (обычно это минимальное значение x_i); ε_i - уклонение x_i от x', т.е.

$$\varepsilon_i = x_i - x' \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \qquad (61)$$

Формула (60) показывает, что **наиболее надежным значением является среднее арифметическое $\overline{x}$ (арифметическая середина) из результатов равноточных измерений.**

Если при определении среднего арифметического имеется ошибка округления

$$\beta = \overline{x}_{\text{окр}} - \overline{x},$$

то, вычислив отклонения

$$v_i = x_i - \overline{x}_{\text{окр}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (62)$$

и просуммировав их, получим формулу для контроля:

$$[v] = -n\beta. \qquad (63)$$

Обычно $\overline{x}_{\text{окр}}$ вычисляют с числом десятичных знаков на один меньше, чем их имеется в x_i ($\overline{x}_{\text{окр}}$ получают округлением $\overline{x}$, т.е. $\overline{x}$ содержит на один знак больше, чем $\overline{x}_{\text{окр}}$). Кроме того, отклонения v_i обладают свойством:

$$[v] = 0. \qquad (64)$$

Средняя квадратическая ошибка одного измерения находится по формуле Бесселя:

$$m = \sqrt{[v^2]/(n-1)}. \tag{65}$$

Для контроля вычисления $[v^2]$ используют формулу

$$[v^2] = [\varepsilon^2] - \frac{[\varepsilon]^2}{n}. \tag{66}$$

Величина $\overline{x}$ имеет среднюю квадратическую ошибку (стандартное отклонение среднего), обозначаемую M

$$M = m_{\overline{x}} = m/\sqrt{n}. \tag{67}$$

Совместное влияние случайных ошибок и постоянной систематической ошибки может быть выражено формулой

$$M = \sqrt{\frac{m^2}{n} + c^2}, \tag{68}$$

где c - систематическая ошибка. Как видно из формул (67), (68), точность среднего арифметического возрастает с увеличением n, но при $n = 15 - 20$ преобладающее влияние на величину M будут оказывать остаточные системные ошибки, поэтому практически выполнять более 15-20 измерений нецелесообразно. Полагают, что должно выполняться неравенство $c < 1/5 \cdot m/\sqrt{n}$. Для существенного повышения точности результатов необходимо использовать более точные приборы, более совершенную методику измерений.

Средние квадратические ошибки величин m и M определяют по формулам

$$m_m = m/\sqrt{2(n-1)}, \qquad m_M = M/\sqrt{2n}. \tag{69}$$

далее строят доверительные интервалы для величин X, σ, $\sigma_{\overline{x}}$ по формулам, приведенным в предыдущем параграфе.

Задача 6.1. В таблице 1 приведены результаты десяти равноточных измерений линии. Выполнить обработку данного ряда измерений.

Решение. Вычисления проводим по приведенным выше формулам и оформляем в виде таблицы 1.

Доверительный интервал для истинного значения измеряемой величины имеет вид $\overline{x} - t_\beta M < X < \overline{x} + t_\beta M$.

Таблица 1: Обработка равноточных результатов многократных измерений

№	x_i, м	$\varepsilon_i = x_i -$, $-110,385$ мм	ε_i^2	v_i, мм	v_i^2	Контроль
1	110,388	$+3$	9	$+2$	4	1. $\beta = \overline{x}_{\text{окр}} - \overline{x} =$
2	381	-4	16	-5	25	$= 110386 - 110386,4 =$
3	394	$+9$	81	$+8$	64	$-0,4$ мм.
4	387	$+2$	4	$+1$	1	$-n\beta = +4$ мм.
5	385	0	0	-1	1	2. $[v] = -n\beta = 4$ мм
6	379	-6	36	-7	49	3. $[v^2] = [\varepsilon^2] - [\varepsilon]^2/n =$
7	393	$+8$	64	$+7$	49	$= 236 - 14^2/10 = 216,4$
8	386	$+1$	1	0	0	
9	382	-3	9	-4	16	
10	389	$+4$	16	$+3$	9	
$\sum$		14	236	$+4$	218	
$x' = 110,385$ м		$\sum \varepsilon/n =$	$m = \sqrt{218/9} = 4,9$ мм,			
$\overline{x} = 110385 + 1,4 =$		$= 14/10 =$	$M = 4,9/\sqrt{10} = 1,56$ мм,			
$= 110386,4$ мм		$= 1,4$ мм	$m_m = 4,9/\sqrt{18} = 1,2$ мм,			
$\overline{x}_{\text{окр}} = 110,386$ м			$m_M = 1,56/\sqrt{20} = 0,3$ мм.			

Приняв доверительную вероятность $\beta = 0,95$ по числу степеней свободы $n - 1 = 9$, используя программу Excel, находим коэффициент

$$t_\beta = \text{СТЬЮДРАСПОБР}(0,05; 9) = 2,26.$$

С учетом того, что $t_\beta M = 2,26 \cdot 1,56 \approx 3,5$ мм, Строим доверительный интервал:

$$110,386 - 2,26 \cdot 0,00156 < X < 110,386 + 2,26 \cdot 0,00156,$$

$$110,382 \text{ м} < X < 110,390 \text{ м}.$$

Доверительный интервал для с.к.о. σ строим согласно формуле

$$\gamma_1 m < \sigma < \gamma_2 m, \tag{70}$$

где

$$\gamma_1 = \sqrt{\frac{n-1}{\chi^2\left(\nu, (1-\beta)/2\right)}}; \qquad \gamma_2 = \sqrt{\frac{n-1}{\chi^2\left(\nu, (1+\beta)/2\right)}}, \qquad (\nu = n - 1). \tag{71}$$

По числу степеней свободы $\nu = n - 1 = 9$ и доверительной вероятности $\beta = 0,95$ вычисляем вероятности $p_1 = (1-\beta)/2 = 0,025$ и $p_2 = (1+\beta)/2 = 0,975$. Используя программу Excel, находим

$$\chi^2\left(\nu, (1-\beta)/2\right) = \text{ХИ2ОБР}(0,025; 9) = 19,0;$$

$$\chi^2\left(\nu, (1+\beta)/2\right) = \text{ХИ2ОБР}(0,975; 9) = 2,7.$$

Получаем

$$\sqrt{9/19,7}\cdot 4,9 < \sigma < \sqrt{9/2,7}\cdot 4,9 \quad \text{или} \quad 3,4\text{мм} < \sigma < 8,9\text{мм}.$$

Доверительный интервал для $\sigma_{\overline{x}}$ находим по формуле

$$\gamma_1 m/\sqrt{n} < \sigma_{\overline{x}} < \gamma_2 m/\sqrt{n}. \tag{72}$$

$$3,4/\sqrt{10} < \sigma_{\overline{x}} < 8,9/\sqrt{10} \quad \text{или} \quad 1,1 \text{ мм} < \sigma_{\overline{x}} < 2,8 \text{ мм}.$$

Иногда результат обработки измерений записывают в виде

$$\overline{x} \pm M, \quad m \pm m_m, \quad m_{\overline{x}} \pm m_M.$$

Заметим, что запись результата в таком виде соответствует доверительной вероятности $\beta \approx 0,7$.

Задача 6.2. Измерены три угла числом приемов $n_1 = 9$, $n_2 = 6$, $n_3 = 12$ и получены величины $[v^2]_1 = 42,3$, $[v^2]_2 = 20,0$, $[v^2]_3 = 35,6$. Найти среднюю квадратическую ошибку измерения угла одним приемом.

Решение. Заметим. что если выполняют s однородных величин n_i раз каждую, то среднюю квадратическую ошибку измерения можно вычислить по формуле

$$m^2 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{s}[v^2]_i}{\sum\limits_{i=1}^{s} n_i - s}. \tag{73}$$

Воспользуемся формулой 73и получим:

$$m = \sqrt{\frac{(42,3+20,0+35,6)}{(9+6+12)-3}} = \sqrt{\frac{97,9}{(27-3)}} = 2,0''.$$

Таблица 2: Варианты для самостоятельной работы

№	Варианты результатов измерений, м							
п/п	1	2	3	4	5	6	7	8
1	520,013	519,993	519,997	519,988	519,997	519,955	519,997	519,973
2	520,032	520,001	519,997	520,037	519,987	520,025	520,000	519,999
3	520,004	519,980	520,039	519,997	519,968	519,993	520,019	519,992
4	519,993	520,004	519,951	519,999	520,005	520,042	519,969	519,969
5	520,016	520,013	519,996	519,969	520,020	520,015	519,993	519,986
6	520,011	519,997	520,006	520,007	520,003	519,995	519,973	520,042
7	519,962	519,995	519,981	519,980	520,026	519,983	519,996	520,026
8	519,988	519,997	519,997	519,985	519,976	519,996	520,035	519,991
9	519,986	520,003	519,981	519,983	519,975	519,986	519,995	519,994
10	520,006	519,975	519,981	519,994	519,968	520,051	519,973	519,974
№	Варианты результатов измерений, м							
п/п	9	10	11	12	13	14	15	16
1	520,003	520,010	520,026	519,988	519,985	520,003	519,995	519,996
2	520,032	520,007	520,009	519,995	520,014	519,999	519,985	519,978
3	519,987	519,973	520,006	519,997	520,011	519,987	519,993	520,006
4	519,954	520,023	520,047	519,992	519,980	520,011	520,013	519,983
5	520,017	520,007	520,011	520,042	520,005	519,978	520,010	519,975
6	520,032	520,021	519,970	519,978	520,011	520,001	520,000	520,003
7	519,969	519,965	519,991	520,010	520,018	520,009	519,977	520,025
8	520,013	520,020	519,991	520,013	520,010	519,987	520,014	520,009
9	519,980	519,979	519,980	520,012	519,967	519,963	519,998	520,021
10	520,009	519,987	520,012	520,003	519,985	520,025	520,019	520,023

Задача 6.3. Задания для самостоятельного решения.

1. Длина стороны полигонометрического хода измерена светодальномером СТ-62М десятью приемами. Результаты измерений приведены в таблице 2. Выполнить полную математическую обработку полученных результатов измерений. (У каждого студента свой вариант, равный порядковому номеру по журналу.) Вычисления оформить также, как в в задаче 1.

2. Сделать то же самое, исказив измеренные значения систематической ошибкой $c = 0,01$ м. Сравнить результаты с полученными в предыдущем задании и сделать соответствующие выводы.

7. ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ПО РАЗНОСТЯМ ДВОЙНЫХ РАВНОТОЧНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Для контроля и повышения точности каждую величину измеряют несколько раз; часто ограничиваются двумя независимыми измерениями. В этом случае составляем разности по каждой паре измерений

$$d_1 = x_1 - x_1'$$

$$d_2 = x_2 - x_2'$$

$$\dots\dots\dots$$

$$d_n = x_n - x_n'.$$

При отсутствии систематических ошибок эти разности можно рассматривать, как ошибки величин, истинное значение которых равно 0. Поэтому, применяя формулу Гаусса, получаем

$$m_d = \sqrt{\frac{[d^2]}{n}}, \tag{74}$$

где n - число всех разностей.

Средняя квадратическая ошибка одного измерений

$$m_{x_i} = \frac{m_d}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{[d^2]}{2n}}. \tag{75}$$

За окончательное, более надежное принимают значение

$$\overline{x}_i = (x_i + x_i')/2.$$

При $m_{x_i} = m_{x_i'}$ имеем

$$m_{\overline{x}_i} = \frac{m_{x_i}}{\sqrt{2}} = \frac{m_d}{2} = 0,5\sqrt{\frac{[d^2]}{n}}. \tag{76}$$

Проверка гипотезы об отсутствии систематических ошибок.

Формулы (74) - (76) применяют при отсутствии систематических ошибок. Если результаты измерений содержат систематические ошибки, то в значениях разностей d_i они значительно ослабляются, и в d_i войдут остаточные систематические ошибки. Величину остаточной систематической ошибки определяют как среднее арифметическое по формуле

$$\Theta = [d]/n. \tag{77}$$

На основании формулы (59) напишем неравенство

$$\big|[d]\big| < \frac{2,5\big[|d|\big]}{\sqrt{n}}, \tag{78}$$

при выполнении которого можно принять гипотезу об отсутствии в разностях d_i постоянной систематической ошибки.

В ряде учебников по теории ошибок приведено более жесткое неравенство:

$$\big|[d]\big| < 0,25\big[|d|\big],$$

при соблюдении которого величина m_d не будет искажена систематическими ошибками в пределах точности вычислений.

При наличии систематической ошибки, рассматривая разности

$$d_i' = d_i - \Theta \tag{79}$$

как уклонения от арифметической середины, по формуле Бесселя, получим

$$m_d = \sqrt{\frac{[d'^2]}{n-1}}. \tag{80}$$

Формулы для средней квадратической ошибки m_{x_i} (одного измерения) и $m_{\overline{x_i}}$ (арифметической середины) остаются в силе и в этом случае:

$$m_{x_i} = \frac{m_d}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{[d'^2]}{2(n-1)}}; \quad m_{\overline{x}_i} = \frac{m_{x_i}}{\sqrt{2}} = \frac{m_d}{2} = 0,5\sqrt{\frac{[d'^2]}{n-1}}. \tag{81}$$

Контролем вычислений служит формула $[d'] = -n\beta$, где $\beta = \Theta_{\text{окр}} - \Theta$. Следует отметить, что средние квадратические ошибки, полученные по разностям двойных измерений, обычно дают приуменьшенные результаты.

Задача 7.1. Обработать результаты измерений углов полигонометрического хода двумя приемами, приведенных в таблице 3. Вычислить средние квадратические ошибки одного измерения и среднего из двойных измерений.

Решение. Все необходимые вычисления сведены в таблицу 2. Поскольку гипотеза об отсутствии систематических ошибок подтвердилась, то применяем для вычислений формулы (75), (76).

Задача 7.2. В таблице 5 даны результаты нивелирования между точками при двух положениях нивелира. Вычислить средние квадратические ошибки одного измерения и среднего из двойных измерений.

Таблица 3: Обработка результатов двойных измерений

№	Первый прием, β	Второй прием, β'	$d = \beta - \beta'$	d^2	Вычисления
1	$30°45'11''$	$30°45'08''$	$+3$	9	$\Theta = [d]/n = -6/12 = -0,5''$.
2	$42°18'48''$	$42°18'50''$	-2	4	проверим гипотезу об отсутствии
3	$70°38'40''$	$70°38'45''$	-5	25	систематических ошибок:
4	$200°45'04''$	$200°45'10''$	-6	36	$\lvert[d]\rvert = 6 < 0,25\big[\lvert d\rvert\big] = 9,5$
5	$87°27'11''$	$87°27'05''$	$+6$	36	следовательно, систематических
6	$90°56'15''$	$90°56'20''$	-5	25	ошибок нет.
7	$210°32'03''$	$210°32'05''$	-2	4	Средняя квадратическая ошибка
8	$42°17'22''$	$42°17'20''$	$+2$	4	одного измерения:
9	$62°14'26''$	$62°14'27''$	-1	1	$m_{x_i} = \sqrt{[d^2]/(2n)} =$
10	$92°13'45''$	$92°13'44''$	$+1$	1	$\sqrt{162/2 \cdot 12} = 2,6''$.
11	$263°48'04''$	$263°48'00''$	$+4$	4	Средняя квадратическая ошибка
12	$37°28'03''$	$37°28'04''$	-1	1	среднего из двойных измерений:
$\sum$			$-6''$	162	$m_{\overline{x}_i} = m_{x_i}/\sqrt{2} = 1,8''$

Таблица 4: Обработка результатов двойных измерений

№	Первое полож. x_i, м	Второе полож. x'_i, м	d мм	$d' = d - \Theta$ мм	d'^2	Вычисления
1	$+1,384$	$+1,382$	$+2$	$+3$	9	$\Theta = [d]/n = -13/9 = -1,44$ мм
2	$-0,817$	$-0,813$	-4	-3	9	Контроль:
3	$+0,373$	$+0,370$	$+3$	$+4$	16	$[d'] = -n\beta = -9(-1+1,44) = -4$ мм
4	$+0,448$	$+0,451$	-3	-2	4	Проверим гипотезу об отсутствии
5	$-1,755$	$+1,758$	-3	-2	4	систематических ошибок:
6	$+0,211$	$+0,215$	-4	-3	9	$\lvert[d]\rvert = 13 > 0,25\big[\lvert d\rvert\big] = 6,75,$
7	$+0,314$	$+0,317$	-3	-2	4	значит Θ является
8	$-2,227$	$-0,229$	$+2$	$+3$	9	является недопустимой и
9	$+0,972$	$+0,975$	-3	-2	4	ее нужно исключить.
$\sum$			-13	-4	68	$m_{x_i} = \sqrt{\frac{[d'^2]}{2(n-1)}} = \sqrt{\frac{68}{2(9-1)}} = 2,1$ мм
						$m_{\overline{x}_i} = m_{x_i}/\sqrt{2} = 1,5$ мм

Таблица 5:

№	Первый прием, β	№	Первый прием, β
1	$100°16'23,8''$	7	$180°18'21,4''$
2	$230°09'35,9''$	8	$210°22'29,7''$
3	$160°31'53,6''$	9	$240°30'39,3''$
4	$190°22'45,5''$	10	$270°14'47,2''$
5	$120°40'28,5''$	11	$300°26'22,6''$
6	$150°31'36,7''$	12	$330°44'48,8''$
		13	$270°28'10,8''$

Решение. Все необходимые вычисления сведены в таблицу 3. Заметим, что для вычислений применялись формулы (80),(81), поскольку гипотеза об отсутствии систематических ошибок не подтвердилась.

Задача 7.3. Задание для самостоятельного решения.

1. Измерения углов полигонометрического хода проводились двумя приемами. Результаты измерений первым приемом приведены в таблице 5. В таблице 6 даны результаты измерений вторым приемом (16 вариантов). Выполнить оценку точности результатов измерений (для своего варианта).

2. В условиях предыдущей задачи ввести во вторые измерения систематическую ошибку $\Theta = 1''$ и выполнить оценку точности измерений.

Таблица 6: Данные для самостоятельной работы

№	варианты результатов измерений вторым приемом, ″							
п/п	1	2	3	4	5	6	7	8
1	26,8"	28,2"	26,9"	24,7"	31,6"	23,0"	22,1"	29,6"
2	40,6	35,0	39,1	40,6	40,1	40,5	37,1	41,3
3	58,0	56,2	55,5	57,3	58,3	53,8	53,7	57,2
4	45,3	46,1	47,5	38,9	41,8	38,2	40,0	45,0
5	27,8	28,7	29,0	25,2	25,1	28,9	21,8	25,2
6	46,3	37,1	47,0	33,3	43,7	40,5	42,3	39,8
7	27,0	25,4	24,9	19,4	26,5	21,5	22,7	26,3
8	25,8	23,6	27,5	31,9	29,6	28,2	25,3	25,6
9	40,3	36,5	32,3	34,5	40,2	36,0	36,0	37,7
10	51,6	55,6	47,2	49,8	50,7	48,6	46,4	52,9
11	23,9	22,8	28,9	27,2	27,7	24,7	24,8	19,8
12	48,2	50,8	47,3	48,3	47,7	43,3	48,6	43,6
13	40,7	42,0	40,3	42,9	46,5	42,5	38,3	41,8

№	варианты результатов измерений вторым приемом, ″							
п/п	9	10	11	12	13	14	15	16
1	25,7"	22,8"	27,3"	30,4"	30,2"	31,8"	20,0"	25,9"
2	41,9	35,3	36,5	33,5	33,1	35,7	36,3	32,2
3	53,3	53,8	55,4	53,9	54,0	53,9	59,0	54,7
4	41,0	40,1	47,5	44,2	48,7	39,6	46,6	36,8
5	28,5	29,6	32,7	26,6	25,3	28,9	25,8	29,2
6	36,7	38,5	36,4	39,9	40,9	41,1	40,0	47,6
7	20,0	23,0	17,5	29,5	21,4	23,2	27,5	26,6
8	30,7	29,9	24,0	24,8	30,2	29,1	25,3	27,4
9	37,8	39,1	37,8	34,7	43,1	38,9	37,6	39,9
10	52,6	48,1	47,2	53,3	46,4	45,3	52,1	51,9
11	31,7	29,4	29,0	25,4	25,1	26,5	25,0	21,9
12	44,9	52,7	51,5	52,1	50,8	47,1	53,9	49,3
13	38,2	38,2	39,4	39,3	39,1	43,2	42,2	38,9

8. ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ФУНКЦИЙ ИЗМЕРЕННЫХ ВЕЛИЧИН

Нередко искомые величины непосредственно измерить нельзя. Тогда их определяют путем вычисления функций измеренных величин. Ошибка функции будет зависеть от ошибок входящих в нее аргументов. Рассмотрим функцию

$$u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{82}$$

Пусть аргументы функции получены со средними квадратическими ошибками m_{x_i}. Если аргументы попарно коррелированы и известны $r_{x_i x_j}$ - коэффициенты корреляции между аргументами x_i и x_j, то для нахождения средней квадратической ошибки функции применяют формулу:

$$m_u^2 = \Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}\Big)^2 m_{x_1}^2 + \Big(\frac{\partial f}{\partial x_2}\Big)^2 m_{x_2}^2 + \ldots + \Big(\frac{\partial f}{\partial x_n}\Big)^2 m_{x_n}^2 + \tag{83}$$
$$+ \ 2\Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}\Big)\Big(\frac{\partial f}{\partial x_2}\Big) r_{x_1 x_2} m_{x_1}^2 m_{x_2}^2 + \ldots + 2\Big(\frac{\partial f}{\partial x_{n-1}}\Big)\Big(\frac{\partial f}{\partial x_n}\Big) r_{x_{n-1} x_n} m_{x_{n-1}}^2 m_{x_n}^2.$$

В случае некоррелированных аргументов формула (83) примет вид:

$$m_u^2 = \Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}\Big)^2 m_{x_1}^2 + \Big(\frac{\partial f}{\partial x_2}\Big)^2 m_{x_2}^2 + \ldots + \Big(\frac{\partial f}{\partial x_n}\Big)^2 m_{x_n}^2. \tag{84}$$

Значения частных производных обычно определяют по приближенным значениям аргументов. Величина средней квадратической ошибки функции округляется до двух значащих цифр, либо до последнего десятичного знака самой функции.

Задача 8.1. В треугольнике измерены два угла со средними квадратическими ошибками $m_{\beta_1} = 5''$, $m_{\beta_2} = 3''$. Найти m_{β_3}.

Решение. Составляем функцию $u = \beta_3 = 180^\circ - \beta_1 - \beta_2$. Находим частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial \beta_1} = -1; \quad \frac{\partial u}{\partial \beta_2} = -1;$$

значит, используя формулу (84), получаем

$$m_u^2 = m_{\beta_1}^2 + m^2\beta_2 = 25 + 9 = 34; \quad m_{\beta_3} = \sqrt{34} = 5,8''.$$

Вообще, для линейной функции вида $u = x_1 \pm x_2 \pm \ldots \pm x_n$ частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_i} = \pm 1$, поэтому формула для средней квадратической ошибки примет вид

$$m_u^2 = m_{x_1}^2 + m_{x_2}^2 + \ldots + m_{x_n}^2 = \sum_{i=1}^{n} m_{x_i}^2, \tag{85}$$

а для функции вида $u = k_1x_1 \pm k_2x_2 \pm \ldots \pm k_nx_n$ частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_i} = \pm k_i$, поэтому

$$m_u^2 = \sum_{i=1}^{n} k_i^2 m_{x_i}^2. \tag{86}$$

Задача 8.2. Угол вычислен как среднее из n его значений. Найти среднюю квадратическую ошибку полученного значения угла, если ошибка одного измерения равна m.

Решение. Так как функция имеет вид $u = \sum_{i=1}^{n} x_i/n$, то

$$m_u^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^2} m^2 = \frac{m^2}{n}, \quad m_u = \frac{m}{\sqrt{n}}.$$

При решении задач хорошим контролем является проверка на размерность, поэтому для вычисленных значений частных производных необходимо указывать единицы измерения. Если аргументами функции являются смешанные величины -угловые и линейные, то с.к.о. измерения угловых величин следует делить на коэффициенты перевода в радианную меру (число градусов, минут или секунд в одном радиане):

$$\rho^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57,3^\circ,$$

$$\rho' = \frac{180 \cdot 60'}{\pi} \approx 3438',$$

$$\rho'' = \frac{180 \cdot 60 \cdot 60''}{\pi} \approx 206265''.$$

Список литературы

1. Тейлор Дж. Введение в теорию ошибок. Пер. с англ. – М.: Мир, 1985. – 272 с., ил.

2. Куштин И.Ф., Куштин В.И. Инженерная геодезия. Учебник. – Ростов-на-Дону: Издательство ФЕНИКС, 2002. - 416 с.

3. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. Учеб. пособие для вузов. – М.: Высш.шк., 1997. – 479 с.

Учебное текстовое электронное издание

Пузанкова Евгения Александровна
Квасова Нина Александровна

ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ МЕТОДАМИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Учебное пособие

0,66 Мб
1 электрон. опт. диск

г. Магнитогорск, 2019 год
ФГБОУ ВО «МГТУ им. Г.И. Носова»
Адрес: 455000, Россия, Челябинская область, г. Магнитогорск,
пр. Ленина 38

ФГБОУ ВО «Магнитогорский государственный
технический университет им. Г.И. Носова»
Кафедра высшей математики
Центр электронных образовательных ресурсов и
дистанционных образовательных технологий
e-mail: ceor_dot@mail.ru