



Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова»

**И.А. Вахрушева
И.А. Максименко**

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

*Утверждено Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия*

Магнитогорск
2018

Рецензенты:

кандидат педагогических наук,
доцент кафедры математики,
ФГБОУ ВО «Российский государственный геологоразведочный
университет им. С. Орджоникидзе»
Н.Г. Трушина

кандидат педагогических наук,
доцент кафедры прикладной математики и информатики,
ФГБОУ ВО «Магнитогорский государственный технический
университет им. Г.И. Носова»
Е.А. Москвина

Вахрушева И.А., Максименко И.А.

Дифференцирование и интегрирование функции нескольких переменных
[Электронный ресурс] : учебное пособие / Инна Алексеевна Вахрушева, Ирина Александровна Максименко ; ФГБОУ ВО «Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова». – Электрон. текстовые дан. (1,65 Мб). – Магнитогорск : ФГБОУ ВО «МГТУ им. Г.И. Носова», 2018. – 1 электрон. опт. диск (CD-R). – Систем. требования : IBM PC, любой, более 1 GHz ; 512 Мб RAM ; 10 Мб HDD ; MS Windows XP и выше ; Adobe Reader 8.0 и выше ; CD/DVD-ROM дисковод ; мышь. – Загл. с титул. экрана.

ISBN 978-5-9967-1396-7

Пособие включает в себя теоретический материал по темам «Функции нескольких переменных» и «Кратные интегралы», доступно изложенный и в достаточном объеме, который сопровождается большим количеством задач с подробным решением.

Данное пособие рекомендовано студентам для самостоятельного изучения указанных тем, помогая при выполнении типовых расчетов, индивидуальных домашних заданий, а также при подготовке к контрольным работам, зачету, экзамену.

УДК 516,517

ISBN 978-5-9967-1396-7

© Вахрушева И.А., Максименко И.А., 2018

© ФГБОУ ВО «Магнитогорский государственный
технический университет им. Г.И. Носова», 2018

Содержание

Функции нескольких переменных: основные понятия. Область определения функции двух переменных	4
Частные производные первого порядка функции нескольких переменных	8
Полный дифференциал функции нескольких переменных, его приложения.....	12
Дифференцирование сложной функции	15
Дифференцирование неявно заданной функции.....	19
Частные производные высших порядков.....	20
Дифференциалы высших порядков	22
Касательная плоскость и нормаль к поверхности.....	24
Экстремум функции двух переменных	27
Наибольшее и наименьшее значение функции в замкнутой области.....	31
Производная по направлению. Градиент.....	35
Двойной интеграл. Основные понятия, свойства	38
Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах	44
Вычисление двойного интеграла в полярных координатах	58
Приложения двойного интеграла	65
Тройной интеграл. Основные понятия, свойства.....	68
Вычисление тройного интеграла в декартовых координатах.....	69
Вычисление тройного интеграла в цилиндрических координатах	72
Приложения тройного интеграла.....	75
Приложение 1 Важнейшие кривые в полярной системе координат	81
Приложение 2 Поверхности второго порядка.....	82
Приложение 3 Таблица производных	84
Приложение 4 Таблица интегралов.....	85
Библиографический список.....	86

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ: ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ. ОБЛАСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Пусть задано множество D упорядоченных пар чисел $(x; y)$. Соответствие f , которое каждой паре действительных чисел $(x; y) \in D$ по определенному правилу сопоставляет одно и только одно число $z \in R$, называется **функцией двух переменных**, определенной на множестве D со значениями в R . Пишут $f: D \rightarrow R$ или $z = f(x; y)$, при этом x и y называются *независимыми переменными (аргументами)*, а z – *зависимой переменной (функцией)*.

Множество $D = D(f)$ называется **областью определения** функции. Множество значений, принимаемых z в области определения, называется **областью изменения** этой функции, обозначается $E(f)$. Линию, ограничивающую область, называют **границей области**. Точки области, не лежащие на границе, называются **внутренними**. Область, состоящая из одних внутренних точек, называется **открытой**. Область с присоединенной к ней границей, называется **замкнутой**.

Аналогично определяется функция любого конечного числа независимых переменных $u = f(x, y, z, \dots, t)$.

Значение функции $z = f(x; y)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$ называют частным значением функции и обозначают $z_0 = f(x_0; y_0)$ или $f(M_0)$. Геометрическим изображением функции $z = f(x; y)$ в прямоугольной системе координат $Oxyz$ (графиком функции) является некоторая поверхность.

Задание 1. Найти и изобразить область определения функции $z = \frac{x^2 + 4xy - 3}{x + y - 5}$.

Решение

Так как знаменатель не может обращаться в ноль, то:

$$x + y - 5 \neq 0, y \neq 5 - x.$$

Таким образом, областью определения данной функции является вся координатная плоскость XOY , кроме точек, принадлежащих прямой $y = 5 - x$.

Изобразим область определения на плоскости XOY (рис. 2):

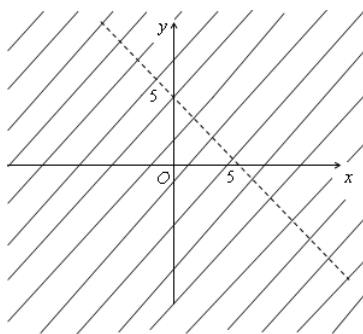


Рис.1

Задание 2. Найти и изобразить область определения функции $z = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2-5}}$.

Решение

Подкоренное выражение должно быть неотрицательно: $x^2 + y^2 - 5 \geq 0$ и, учитывая, что знаменатель не может обращаться в нуль, неравенство становится строгим:

$$x^2 + y^2 - 5 > 0, \quad x^2 + y^2 > 5.$$

Чтобы изобразить область определения, найдем сначала её границу: $x^2 + y^2 = 5$. Полученное уравнение определяет окружность, центр которой расположен в точке $O(0; 0)$, а радиус равен $\sqrt{5}$. (Рис. 2)

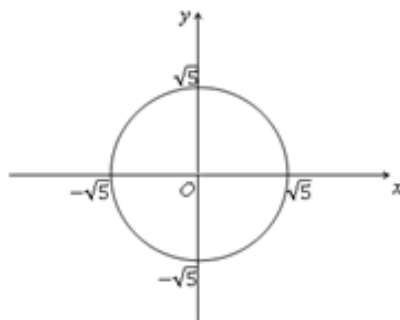


Рис. 2

Эта окружность делит координатную плоскость на две части – “внутренность” и “внешность” круга. Так как неравенство у нас строгое, то сама окружность не войдет в область определения и поэтому её нужно провести пунктиром. Чтобы установить, какая из двух частей является областью определения данной функции (т.е. удовлетворяет условию $x^2 + y^2 > 5$), достаточно проверить это условие для какой-нибудь одной точки, не лежащей на окружности. Например, начало координат $O(0; 0)$ лежит внутри окружности, подставим в неравенство: $0^2 + 0^2 > 5$, $0 > 5$. Получено неверное неравенство, таким образом, точка $O(0; 0)$ не удовлетворяет неравенству $x^2 + y^2 > 5$.

Следовательно, рассматриваемая область определения состоит из внешней части круга. Штрихуем её (Рис.3).

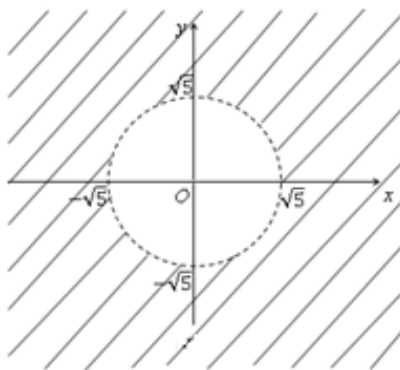


Рис. 3

Задание 3. Найти и изобразить область определения функции $z = y^2 \cdot \sqrt{x^2 - y^2}$.

Решение

Область определения функции $z = y^2 \cdot \sqrt{x^2 - y^2}$ состоит из всех точек плоскости XOY , для которых подкоренное выражение неотрицательно, т.е. $x^2 - y^2 \geq 0$, или $x^2 \geq y^2$.

Если оставить здесь только знак равенства, то получится уравнение границы области определения: $x^2 = y^2$, или $x = \pm y$.

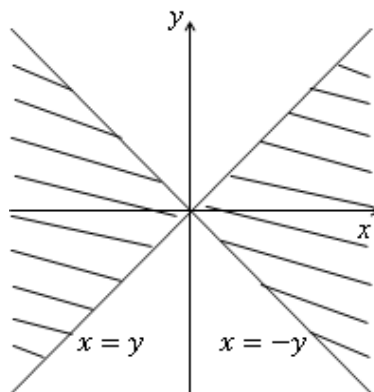


Рис. 4

Эта граница состоит из двух биссектрис $x = y$ и $x = -y$ координатных углов. Для внутренних точек области определения должно соблюдаться неравенство $x^2 > y^2$, или $|x| > |y|$.

Следовательно, эти точки расположены между биссектрисами ближе к оси Ox , так как $|y|$ есть расстояние точки $P(x, y)$ до оси Ox и оно меньше расстояния $|x|$ точки $P(x, y)$ до оси Oy .

Таким образом, область определения состоит из всех точек двух углов между биссектрисами $x = \pm y$, заключающими внутри себя ось Ox (Рис. 4). Область замкнутая, так как включает в себя обе свои границы.

Задание 4. Найти и изобразить область определения функции $z = \frac{\ln(y^2 - 4x + 8)}{3y}$.

Решение

Логарифм определен только при положительном значении его аргумента, поэтому $y^2 - 4x + 8 > 0$, или $4x - 8 < y^2$.

А знаменатель не может обращаться в нуль, поэтому $y \neq 0$.

Таким образом, область определения равна: $\begin{cases} 4x - 8 < y^2, \\ y \neq 0. \end{cases}$

Чтобы изобразить область определения найдем сначала её границы: $4x - 8 = y^2$ или $y^2 = 4(x - 2)$.

Полученное уравнение определяет параболу, вершина которой расположена в точке $O'(2; 0)$, а ось направлена в положительную сторону оси Ox . Парабола делит всю плоскость на две части – внутреннюю и внешнюю по отношению к параболу. Определим какая из этих частей удовлетворяет неравенству $4x - 8 < y^2$. Возьмем точку $O(0,0)$ и подставим в неравенство: $4 \cdot 0 - 8 < 0^2$, $-8 < 0$. Точка $O(0,0)$ удовлетворяет нужному условию.

Следовательно, область определения состоит из внешних точек параболы. Сама парабола не входит в область определения, так как для параболы $4x - 8 = y^2$ логарифм не определен. Условие $y \neq 0$ исключает из области определения ось абсцисс (Рис. 5).

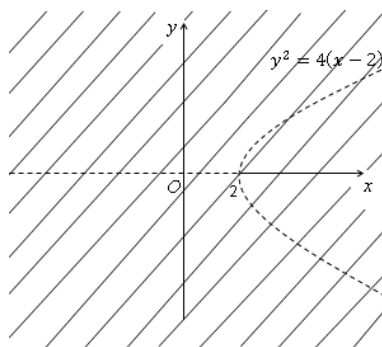


Рис. 5

Задание 5. Найти и изобразить область определения функции $z = \arcsin(2x - y)$

Решение

Аргумент арксинуса находится в пределах: $-1 \leq 2x - y \leq 1$.

Запишем равносильную систему неравенств:

$$\begin{cases} -1 \leq 2x - y, \\ 2x - y \leq 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y \geq -1, \\ 2x - y \leq 1. \end{cases}$$

Границы области: $2x - y = -1$ и $2x - y = 1$, т.е. $y = 2x + 1$ и $y = 2x - 1$. Таким образом, граница области определения состоит из двух прямых. Эти прямые делят область определения на три части (Рис. 6). При этом для внутренних точек области определения должны одновременно соблюдаться неравенства: $2x - y \geq -1$ и $2x - y \leq 1$.

Возьмем три точки $A(-1; 0)$, $O(0,0)$ и $B(1; 0)$, лежащие в разных частях плоскости, и проверим, соблюдаются ли для них неравенства.

Точка $A(-1; 0)$: $2 \cdot (-1) - 0 \geq -1$, $-2 \geq -1$ - не удовлетворяет;
 $2 \cdot 1 - 0 \leq 1$, $-2 \leq 1$.

Точка $O(0,0)$: $2 \cdot 0 - 0 \geq -1$, $0 \geq -1$,
 $2 \cdot 0 - 0 \leq 1$, $0 \leq 1$ - удовлетворяет неравенствам.

Следовательно, искомая область определения расположена между двумя данными прямыми (Рис. 6).

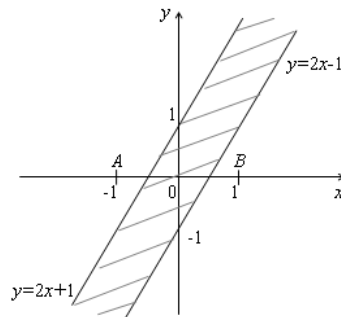


Рис. 6

ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ПЕРВОГО ПОРЯДКА ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Пусть задана функция $z = f(x; y)$, которая определена в некоторой области D на плоскости XOY . Так как x и y – независимые переменные, то одна из них может изменяться, а другая сохранять свое значение. Возьмем внутреннюю точку $(x; y)$ из области D и дадим переменной x приращение Δx такое, чтобы точка $(x + \Delta x; y) \in D$, сохраняя значение y неизменным (рис.7).

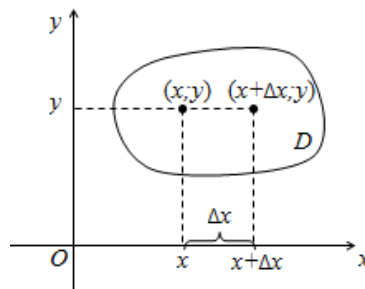


Рис. 7

Тогда z получит приращение, которое называется частным приращением z по x и обозначается $\Delta_x z = f(x + \Delta x; y) - f(x; y)$.

Аналогично получим частное приращение z по y (рис.8) $\Delta_y z = f(x; y + \Delta y) - f(x; y)$.

Полное приращение Δz функции z определяется равенством

$$\Delta z = f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y).$$

Составим отношение $\frac{\Delta_x z}{\Delta x}$, для данной точки $(x; y)$ это отношение является функцией от Δx .

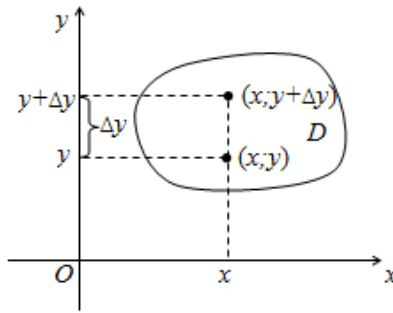


Рис.8

Если существует предел $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x; y) - f(x; y)}{\Delta x}$, то он называется частной производной функции $z = f(x; y)$ в точке $M(x; y)$ по переменной x и обозначается $\frac{\partial z}{\partial x}$ или z'_x или $f'_x(x; y)$.

Аналогично определяется и обозначается частная производная от функции $z = f(x; y)$ в точке $M(x; y)$ по переменной y :

$$z'_y = f'_y(x; y) = \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x; y + \Delta y) - f(x; y)}{\Delta y}.$$

Таким образом, частная производная функции нескольких (двух, трех и более) переменных определяется как производная функции одной из этих переменных при условии постоянства значений остальных независимых переменных. Поэтому частные производные функции нескольких переменных находят по формулам и правилам вычисления производных функции одной переменной.

Задание 6. Найти частные производные функции $z = x^2 + 4xy - 2y^2$.

Решение

Имеем функцию двух независимых переменных x и y .

Найдем частную производную функции z по переменной x , тогда переменную y считаем постоянной (то есть числом). (Напомним, что $(x^2)' = 2x$, $(x)' = 1$, $(C)' = 0$).

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x}_{(y=const)} &= (x^2 + 4xy - 2y^2)'_x = (x^2)'_x + (4xy)'_x - \underbrace{(2y^2)'_x}_{\text{число}} = \\ &= 2x + 4y(x)'_x - 0 = 2x + 4y \cdot 1 - 0 = 2x + 4y. \end{aligned}$$

Получили, что $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 4y$.

Найдем частную производную функции z по переменной y , тогда переменную x считаем постоянной (то есть числом). (Напомним, что $(y^2)' = 2y$, $(y)' = 1$, $(C)' = 0$).

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial y}_{(x=const)} &= (x^2 + 4xy - 2y^2)'_y = \underbrace{(x^2)'_y}_{\text{число}} + (4xy)'_y - (2y^2)'_y = \\ &= 0 + 4x(y)'_y - 2(y^2)'_y = 0 + 4x \cdot 1 - 2 \cdot 2y = 4x - 4y. \end{aligned}$$

Получили, что $\frac{\partial z}{\partial y} = 4x - 4y$.

Задание 7. Найти частные производные функции $z = \frac{x}{y^2} + y \cdot \cos x$.

Решение

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}_{(y=\text{const})} &= \left(\frac{x}{y^2} + y \cdot \cos x \right)'_x = \left(\frac{x}{y^2} \right)'_x + (y \cdot \cos x)'_x = \\ &= \frac{1}{y^2} \cdot (x)'_x + y \cdot (\cos x)'_x = \frac{1}{y^2} \cdot 1 + y \cdot (-\sin x) = \frac{1}{y^2} - \sin x; \\ \frac{\partial z}{\partial y}_{(x=\text{const})} &= \left(\frac{x}{y^2} + y \cdot \cos x \right)'_y = \left(\frac{x}{y^2} \right)'_y + (y \cdot \cos x)'_y = \\ &= x \cdot \left(\frac{1}{y^2} \right)'_y + \cos x \cdot (y)'_y = x \cdot \left(-\frac{1}{y} \right) + \cos x \cdot 1 = -\frac{x}{y} + \cos x.\end{aligned}$$

Задание 8. Найти частные производные функции $z = (5x^2y + y^3 + 7)^3$.

Решение

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}_{(y=\text{const})} &= ((5x^2y + y^3 + 7)^3)'_x = 3 \cdot (5x^2y + y^3 + 7)^2 \cdot (5x^2y + y^3 + 7)'_x = \\ &= 3 \cdot (5x^2y + y^3 + 7)^2 \cdot ((5x^2y)'_x + (y^3)'_x + (7)'_x) = \\ &= 3 \cdot (5x^2y + y^3 + 7)^2 \cdot (5y(x^2)'_x + 0 + 0) = \\ &= 3 \cdot (5x^2y + y^3 + 7)^2 \cdot (10xy) = 30xy(5x^2y + y^3 + 7)^2. \\ \frac{\partial z}{\partial y}_{(x=\text{const})} &= ((5x^2y + y^3 + 7)^3)'_y = 3 \cdot (5x^2y + y^3 + 7)^2 \cdot (5x^2y + y^3 + 7)'_y = \\ &= 3 \cdot (5x^2y + y^3 + 7)^2 \cdot ((5x^2y)'_y + (y^3)'_y + (7)'_y) = \\ &= 3 \cdot (5x^2y + y^3 + 7)^2 \cdot (x^2(5y)'_y + 3y^2 + 0) = \\ &= 3 \cdot (5x^2y + y^3 + 7)^2 \cdot (5x^2 \cdot 1 + 3y^2) = 3(5x^2y + y^3 + 7)^2 \cdot (5x^2 + 3y^2).\end{aligned}$$

Задание 9. Найти частные производные функции $z = xy \cdot \ln(x + y)$.

Решение

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}_{(y=\text{const})} &= (xy \cdot \ln(x + y))'_x = (xy)'_x \cdot \ln(x + y) + xy \cdot (\ln(x + y))'_x = \\ &= y \cdot \ln(x + y) + xy \cdot \frac{1}{x + y} \cdot (x + y)'_x = y \cdot \ln(x + y) + xy \cdot \frac{1}{x + y} \cdot (1 + 0) = \\ &= y \cdot \ln(x + y) + \frac{xy}{x + y}. \\ \frac{\partial z}{\partial y}_{(x=\text{const})} &= (xy \cdot \ln(x + y))'_y = (xy)'_y \cdot \ln(x + y) + xy \cdot (\ln(x + y))'_y = \\ &= x \cdot \ln(x + y) + xy \cdot \frac{1}{x + y} \cdot (x + y)'_y = x \cdot \ln(x + y) + xy \cdot \frac{1}{x + y} \cdot (0 + 1) = \\ &= x \cdot \ln(x + y) + \frac{xy}{x + y}.\end{aligned}$$

Задание 10. Найти частные производные функции $u = e^{x \cdot (x^2 - y^2 + z^2)}$.

Решение

Функция $u = e^{x \cdot (x^2 - y^2 + z^2)}$ - функция трех независимых переменных: x , y и z . При определении частной производной по каждой из этих переменных две другие следует считать величинами постоянными. Поэтому,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}_{(y,z=const)} &= (e^{x \cdot (x^2 - y^2 + z^2)})'_x = e^{x \cdot (x^2 - y^2 + z^2)} (x(x^2 - y^2 + z^2))'_x = \\ &= e^{x \cdot (x^2 - y^2 + z^2)} (x^3 - y^2 x + z^2 x)'_x = e^{x \cdot (x^2 - y^2 + z^2)} ((x^3)'_x - (y^2 x)'_x + (z^2 x)'_x) = \\ &= e^{x \cdot (x^2 - y^2 + z^2)} (3x^2 - y^2 + z^2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y}_{(x,z=const)} &= (e^{x \cdot (x^2 - y^2 + z^2)})'_y = e^{x \cdot (x^2 - y^2 + z^2)} (x(x^2 - y^2 + z^2))'_y = \\ &= e^{x \cdot (x^2 - y^2 + z^2)} (x^3 - y^2 x + z^2 x)'_y = e^{x \cdot (x^2 - y^2 + z^2)} ((x^3)'_y - (y^2 x)'_y + (z^2 x)'_y) = \\ &= e^{x \cdot (x^2 - y^2 + z^2)} (0 - 2yx + 0) = -2xy e^{x \cdot (x^2 - y^2 + z^2)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial z}_{(x,y=const)} &= (e^{x \cdot (x^2 - y^2 + z^2)})'_z = e^{x \cdot (x^2 - y^2 + z^2)} (x(x^2 - y^2 + z^2))'_z = \\ &= e^{x \cdot (x^2 - y^2 + z^2)} (x^3 - y^2 x + z^2 x)'_z = e^{x \cdot (x^2 - y^2 + z^2)} ((x^3)'_z - (y^2 x)'_z + (z^2 x)'_z) = \\ &= e^{x \cdot (x^2 - y^2 + z^2)} (0 - 0 + 2zx) = 2xz e^{x \cdot (x^2 - y^2 + z^2)}. \end{aligned}$$

Задание 11. Найти значения частных производных в точке $P_0(0; 1)$ функции $z = e^{-xy}$.

Решение

Находим сначала частные производные, используя формулу дифференцирования сложной функции $(e^u)' = e^u \cdot u'$:

$$\frac{\partial z}{\partial x}_{(y=const)} = (e^{-xy})'_x = e^{-xy} \cdot (-xy)'_x = e^{-xy} \cdot (-y) = -ye^{-xy};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}_{(x=const)} = (e^{-xy})'_y = e^{-xy} \cdot (-xy)'_y = e^{-xy} \cdot (-x) = -xe^{-xy}.$$

Подставим в найденные частные производные координаты точки $P_0(0; 1)$, получим:

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{P_0(0; 1)} = (-ye^{-xy}) \Big|_{P_0(0; 1)} = -1 \cdot e^{-0 \cdot 1} = -1e^0 = -1;$$

$$\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{P_0(0; 1)} = (-xe^{-xy}) \Big|_{P_0(0; 1)} = -0 \cdot e^{-1 \cdot 0} = -0e^0 = 0.$$

Задание 12. Доказать, что функция $z = y^2 \cdot \sin(x^2 - y^2)$ удовлетворяет уравнению $y^2 \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} = 2xz$.

Решение

Находим частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x}_{(y=const)} = (y^2 \cdot \sin(x^2 - y^2))'_x = y^2 (\sin(x^2 - y^2))'_x =$$

$$\begin{aligned}
&= y^2 \cos(x^2 - y^2)(x^2 - y^2)'_x = y^2 \cos(x^2 - y^2)(2x - 0) = 2xy^2 \cos(x^2 - y^2); \\
\frac{\partial z}{\partial y}_{(x=\text{const})} &= (y^2 \cdot \sin(x^2 - y^2))'_y = (y^2)'_y \sin(x^2 - y^2) + y^2 (\sin(x^2 - y^2))'_y = \\
&= 2y \sin(x^2 - y^2) + y^2 \cos(x^2 - y^2)(x^2 - y^2)'_y = \\
&= 2y \sin(x^2 - y^2) + y^2 \cos(x^2 - y^2)(0 - 2y) = \\
&= 2y \sin(x^2 - y^2) - 2y^3 \cos(x^2 - y^2).
\end{aligned}$$

Подставляем $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ и z в данное уравнение:

$$\begin{aligned}
&y^2 \cdot 2xy^2 \cos(x^2 - y^2) + xy \cdot (2y \sin(x^2 - y^2) - 2y^3 \cos(x^2 - y^2)) = \\
&= 2xy^2 \cdot \sin(x^2 - y^2); \\
&2xy^4 \cdot \cos(x^2 - y^2) + 2xy^2 \cdot \sin(x^2 - y^2) - 2xy^4 \cdot \cos(x^2 - y^2) = \\
&= 2xy^2 \cdot \sin(x^2 - y^2); \\
&2xy^2 \cdot \sin(x^2 - y^2) = 2xy^2 \cdot \sin(x^2 - y^2).
\end{aligned}$$

Полученное тождество показывает, что функция действительно удовлетворяет данному уравнению.

ПОЛНЫЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ, ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

Пусть функция $z = f(x; y)$ определена в некоторой окрестности точки $M(x; y)$. Составим полное приращение функции в точке M :

$$\Delta z = f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y).$$

Функция $z = f(x; y)$ называется дифференцируемой в точке $M(x; y)$, если ее полное приращение в этой точке можно представить в виде

$$\Delta z = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y, \quad (1)$$

где $\alpha = \alpha(\Delta x; \Delta y) \rightarrow 0$ и $\beta = \beta(\Delta x; \Delta y) \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$ и $\Delta y \rightarrow 0$.

Сумма первых двух слагаемых в равенстве (4) представляет собой **главную часть приращения функции**.

Главная часть приращения функции $z = f(x; y)$, линейная относительно Δx и Δy , называется **полным дифференциалом** этой функции:

$$dz = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y \quad (2)$$

Выражения $A \cdot \Delta x$ и $B \cdot \Delta y$ называются **частными дифференциалами**. Для независимых переменных x и y полагают $\Delta x = dx$ и $\Delta y = dy$. Поэтому равенство (2) можно записать в виде

$$dz = A \cdot dx + B \cdot dy \quad (3)$$

Теорема 1 (необходимое условие дифференцируемости функции)

Если функция $z = f(x; y)$ дифференцируема в точке $M(x; y)$, то она непрерывна в этой точке и имеет в ней частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, причем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = A, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = B.$$

Отметим, что обратное утверждение не верно, т.е. из непрерывности функции или существования частных производных не следует дифференцируемость функции.

Как следствие теоремы получаем формулу для вычисления полного дифференциала функции двух переменных

$$\boxed{dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy} \quad (4)$$

Полный дифференциал функции трех переменных $u = f(x; y; z)$ вычисляется по формуле

$$\boxed{du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz} \quad (5)$$

Теорема 2 (достаточное условие дифференцируемости функции)

Если функция $z = f(x; y)$ имеет непрерывные частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ в точке $M(x; y)$, то она дифференцируема в этой точке и ее полный дифференциал выражается формулой (4).

Отметим, что для функции одной переменной $y = f(x)$ существование производной $f'(x)$ в точке является необходимым и достаточным условием ее дифференцируемости в этой точке.

Чтобы функция $z = f(x; y)$ была дифференцируема в точке, необходимо, чтобы она имела в ней частные производные, и достаточно, чтобы она имела в точке непрерывные частные производные.

Задание 13. Найти полный дифференциал функции $z = x^2y - y^2x$.

Решение

Найдем частные производные данной функции:

$$\frac{\partial z}{\partial x(y=\text{const})} = (x^2y - y^2x)'_x = 2xy - y^2;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y(x=\text{const})} = (x^2y - y^2x)'_y = x^2 - 2xy.$$

По формуле (4) $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$ полный дифференциал данной функции равен

$$dz = (2xy - y^2)dx + (x^2 - 2xy)dy.$$

Задание 14. Найти частные производные и полный дифференциал функции $u = x^{yz}$.

Решение

Найдем частные производные данной функции:

$$\frac{\partial u}{\partial x(y,z=\text{const})} = (x^{yz})'_x = yzx^{yz-1};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y(x,z=\text{const})} = (x^{yz})'_y = x^{yz} \cdot \ln x \cdot (yz)'_y = x^{yz} \cdot \ln x \cdot z = zx^{yz} \ln x;$$

$$\frac{\partial u}{\partial z(x,y=\text{const})} = (x^{yz})'_z = x^{yz} \cdot \ln x \cdot (yz)'_z = x^{yz} \cdot \ln x \cdot y = yx^{yz} \ln x.$$

По формулам $d_x u = \frac{\partial u}{\partial x} dx$, $d_y u = \frac{\partial u}{\partial y} dy$, $d_z u = \frac{\partial u}{\partial z} dz$ частные дифференциалы данной функции равны
 $d_x u = yzx^{yz-1} dx$; $d_y u = yx^{yz} \ln x dy$; $d_z u = yx^{yz} \ln x dz$.

Полный дифференциал функции найдем, используя формулу (5)

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz,$$

получим

$$du = yzx^{yz-1} dx + yx^{yz} \ln x dy + yx^{yz} \ln x dz.$$

Применение полного дифференциала к приближенным вычислениям

Из определения дифференциала функции $z = f(x; y)$ следует, что при достаточно малых $|\Delta x|$ и $|\Delta y|$ имеет место приближенное равенство

$$\Delta z \approx dz \quad (6)$$

Так как полное приращение $\Delta z = f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y)$, равенство (6) можно записать в следующем виде:

$$\boxed{f(x + \Delta x; y + \Delta y) \approx f(x; y) + f'_x(x; y)\Delta x + f'_y(x; y)\Delta y} \quad (7)$$

Задание 15. Вычислить приближенно $\ln(\sqrt[3]{1,03} + \sqrt[4]{0,98} - 1)$.

Решение

Число $\ln(\sqrt[3]{1,03} + \sqrt[4]{0,98} - 1)$ есть частное значение функции $f(x; y) = \ln(\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{y} - 1)$, при $x = 1,03$, $y = 0,98$.

Пусть $x_0 = 1$, $y_0 = 1$ (ближайшие целые к $x = 1,03$ и $y = 0,98$), тогда $\Delta x = x - x_0 = 1,03 - 1 = 0,03$, $\Delta y = y - y_0 = 0,98 - 1 = -0,02$.

Вычислим приближенное значение функции $f(x; y)$ при $x = 1,03$ и $y = 0,98$, используя формулу (7):

$$f(x; y) \approx f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) \approx f(x_0; y_0) + f'_x(x_0; y_0) \cdot \Delta x + f'_y(x_0; y_0) \cdot \Delta y$$

Найдем $f(x_0; y_0)$, $f'_x(x_0; y_0)$, $f'_y(x_0; y_0)$:

$$f(x_0; y_0) = f(1; 1) = \ln(\sqrt[3]{1} + \sqrt[4]{1} - 1) = \ln 1 = 0;$$

$$f'_x = \left(\ln(\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{y} - 1) \right)'_x = \frac{1}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{y} - 1} \cdot \frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}};$$

$$f'_x(x_0; y_0) = f'_x(1; 1) = \frac{1}{\sqrt[3]{1} + \sqrt[4]{1} - 1} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3};$$

$$f'_y = \left(\ln(\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{y} - 1) \right)'_y = \frac{1}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{y} - 1} \cdot \frac{1}{4} \cdot x^{-\frac{3}{4}};$$

$$f'_y(x_0; y_0) = f'_y(1; 1) = \frac{1}{\sqrt[3]{1} + \sqrt[4]{1} - 1} \cdot \frac{1}{4} \cdot 1^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{4}.$$

Подставим найденные значения в (10), получим:

$$f(x; y) \approx 0 + \frac{1}{3} \cdot 0,03 + \frac{1}{4} \cdot (-0,02) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{100} - \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{100} = \frac{1}{100} - \frac{1}{200} = \frac{1}{200} = 0,005.$$

Следовательно, $\ln(\sqrt[3]{1,03} + \sqrt[4]{0,98} - 1) \approx 0,005$.

Задание 16. Вычислить приближенно $\cos 18^\circ \cdot \operatorname{tg} 43^\circ$.

Решение

Число $\cos 18^\circ \cdot \operatorname{tg} 43^\circ$ есть частное значение функции $f(x; y) \approx \cos x \cdot \operatorname{tg} y$, при $x = 61^\circ$ и $y = 43^\circ$.

Выразим градусы в радианах ($1^\circ = \frac{\pi}{180^\circ}$), а x_0 и y_0 подберем так, чтобы значения $\cos x_0$ и $\operatorname{tg} y_0$ были табличные, получим:

$$x = 61^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{61\pi}{180} = \frac{60\pi}{180} + \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{180};$$

$$y = 43^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{43\pi}{180} = \frac{45\pi}{180} - \frac{2\pi}{180} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{90}.$$

Пусть $x_0 = \frac{\pi}{3}$, $y_0 = \frac{\pi}{4}$, а так как $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$, то $\Delta x = \frac{\pi}{180} = \frac{3,14}{180} = 0,017$, $\Delta y = -\frac{\pi}{90} = -\frac{3,14}{90} = -0,034$.

Найдем $f(x_0; y_0)$, $f'_x(x_0; y_0)$ и $f'_y(x_0; y_0)$, получим:

$$f(x_0; y_0) = f\left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{3} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} = 0,5;$$

$$f'_x(x; y) = (\cos x \cdot \operatorname{tg} y)'_x = -\sin x \cdot \operatorname{tg} y;$$

$$f'_x(x_0; y_0) = f'_x\left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4}\right) = -\sin \frac{\pi}{3} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1 \approx -\frac{1,7}{2} = -0,85;$$

$$f'_y(x; y) = (\cos x \cdot \operatorname{tg} y)'_y = \cos x \cdot \frac{1}{\cos^2 y};$$

$$f'_y(x_0; y_0) = f'_y\left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{2} = 1.$$

Подставим найденные значения в формулу

$f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) \approx f(x_0; y_0) + f'_x(x_0; y_0) \cdot \Delta x + f'_y(x_0; y_0) \cdot \Delta y$, получим

$$f(x; y) = f\left(\frac{\pi}{3} + 0,017; \frac{\pi}{4} - 0,034\right) \approx 0,5 + (-0,85) \cdot 0,017 + 1 \cdot (-0,034) = 0,4515 \approx 0,452.$$

Получили, что $\cos 18^\circ \cdot \operatorname{tg} 43^\circ \approx 0,452$.

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

Пусть $z = f(x; y)$ – функция двух переменных x и y , каждая из которых является функцией независимой переменной t : $x = x(t)$, $y = y(t)$. В этом случае функция $z = f(x(t); y(t))$ является сложной функцией одной независимой переменной t ; переменные x и y – промежуточные переменные.

Теорема 3. Если $z = f(x; y)$ – дифференцируемая в точке $M(x; y) \in D$ функция и $x(t)$ и $y(t)$ – дифференцируемые функции независимой переменной t , то производная сложной функции $z(t) = f(x(t); y(t))$ вычисляется по формуле

$$\boxed{\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}} \quad (8)$$

Формулу дифференцирования сложной функции можно построить, используя схематическую запись сложной функции (рис.9)

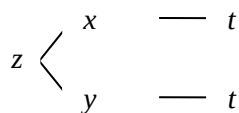


Рис. 9

Частный случай: $z = f(x; y)$, где $y = y(x)$, т.е. $z = f(x; y(x))$ – сложная функция одной независимой переменной x . Этот случай сводится к предыдущему, причем роль переменной t играет x . Схематическая запись сложной функции $z = f(x; y(x))$ представлена на рис. 10 и полная производная вычисляется по формуле (9).

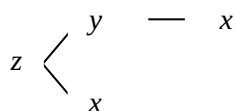


Рис.10

$$\boxed{\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}} \quad (9)$$

Общий случай: $z = f(x; y)$, где $x(u; v), y(u; v)$. Тогда $z = f(x(u; v); y(u; v))$ – сложная функция независимых переменных u и v , схема которой представлена на рис. 11. Ее частные производные $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$ находим по формулам (10).

Обратите внимание на то, когда пишется « ∂ » в обозначениях производных и когда « d ».

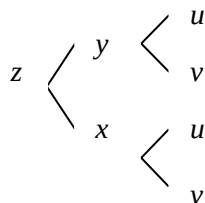


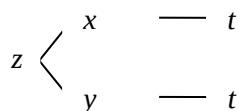
Рис. 11

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} \end{aligned}} \quad (10)$$

Задание 17. Найти $\frac{dz}{dt}$, если $z = x^2 + xy + y^2$, где $x = t^2$, $y = t^3 + 4$.

Решение

Составим схему зависимости:



Запишем формулу для вычисления полной производной $\frac{dz}{dt}$:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

Найдем частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{dx}{dt}$ и $\frac{dy}{dt}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x(y=\text{const})} = (x^2 + xy + y^2)'_x = 2x + y;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y(x=\text{const})} = (x^2 + xy + y^2)'_y = x + 2y;$$

$$\frac{dx}{dt} = (t^2)' = 2t; \quad \frac{dy}{dt} = (t^3 + 4)' = 3t^2.$$

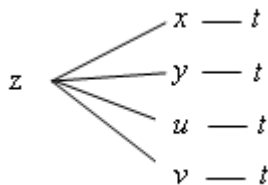
Подставим в формулу, получим:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = (2x + y) \cdot 2t + (x + 2y) \cdot 3t^2.$$

Задание 18. Найти $\frac{dz}{dt}$, если $z = xy + xuv + yuv$, где $x = \sin t$, $y = \ln t$, $u = e^t$, $v = \arctg t$.

Решение

Составим схему зависимости:



Запишем формулу для вычисления $\frac{dz}{dt}$:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{du}{dt} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dt}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (xy + xuv + yuv)'_x = y + uv;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (xy + xuv + yuv)'_y = x + xv + uv;$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = (xy + xuv + yuv)'_u = yv;$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = (xy + xuv + yuv)'_v = xy + yu;$$

$$\frac{dx}{dt} = (\sin t)' = \cos t;$$

$$\frac{dy}{dt} = (\ln t)' = \frac{1}{t};$$

$$\frac{du}{dt} = (e^t)' = e^t;$$

$$\frac{dv}{dt} = (\arctg t)' = \frac{1}{1+t^2}.$$

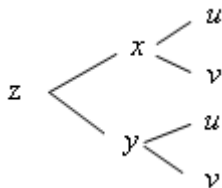
Подставим в формулу, получим:

$$\frac{dz}{dt} = (y + uv) \cdot \cos t + (x + xv + uv) \cdot \frac{1}{t} + yv \cdot e^t + (xy + yu) \cdot \frac{1}{1+t^2}.$$

Задание 19. Найти $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$, если $z = x^2 \cdot y^2$, где $x = u + v$, $y = \frac{u}{v}$.

Решение

Составим схему зависимости:



Запишем формулы для вычисления $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}; \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}.$$

Вычислим необходимые частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (x^2 \cdot y^2)'_x = 2xy^2; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = (x^2 \cdot y^2)'_y = 2yx^2;$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = (u + v)'_u = 1; \quad \frac{\partial x}{\partial v} = (u + v)'_v = 1;$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \left(\frac{u}{v}\right)'_u = \frac{1}{v}; \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \left(\frac{u}{v}\right)'_v = -\frac{u}{v^2}.$$

Подставим найденные частные производные в составленные по схеме формулы, получим:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = 2xy^2 \cdot 1 + 2yx^2 \cdot \frac{1}{v} = 2xy^2 + \frac{2yx^2}{v};$$

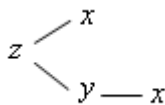
$$\frac{\partial z}{\partial v} = 2xy^2 \cdot 1 + 2yx^2 \cdot \left(-\frac{u}{v^2}\right) = 2xy^2 - \frac{2yx^2u}{v^2}.$$

Задание 20. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{dz}{dx}$, если $z = \ln(x^2 - y^2)$, где $y = e^x$.

Решение

$$\text{Имеем: } \frac{\partial z}{\partial x} = (\ln(x^2 - y^2))'_x = \frac{2x}{x^2 - y^2}.$$

Для нахождения полной производной $\frac{dz}{dx}$, составим схему зависимости:



По схеме, получим формулу для вычисления: $\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}$.

Найдем частные производные $\frac{\partial z}{\partial y}$ и $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (\ln(x^2 - y^2))'_y = \frac{-2y}{x^2 - y^2}; \quad \frac{dy}{dx} = (e^x)' = e^x.$$

Получаем:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{2x}{x^2 - y^2} + \frac{(-2y)}{x^2 - y^2} \cdot e^x = \frac{2x - 2ye^x}{x^2 - y^2}.$$

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ НЕЯВНО ЗАДАННОЙ ФУНКЦИИ

Функция $z = f(x; y)$ называется *неявной*, если она задается уравнением $F(x; y; z) = 0$, неразрешенным относительно z .

Теорема 4 (существования неявной функции двух переменных). Если функция $F(x; y; z)$ и ее производные $F'_x(x; y; z)$, $F'_y(x; y; z)$, $F'_z(x; y; z)$ определены и непрерывны в некоторой окрестности точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$, причем $F(x_0; y_0; z_0) = 0$, $F'_z(x; y; z) \neq 0$, то существует окрестность точки M_0 , в которой уравнение $F(x; y; z) = 0$ определяет единственную функцию $z = f(x; y)$, непрерывную и дифференцируемую в окрестности точки $(x_0; y_0)$ и такую, что $f(x_0; y_0) = z_0$.

Частные производные неявной функции двух переменных вычисляются по формулам:

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{F'_x}{F'_z} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{F'_y}{F'_z}\end{aligned}} \quad (11)$$

Неявная функция $y = f(x)$ одной переменной задается уравнением $F(x; y) = 0$. Теорема существования неявной функции одной переменной аналогична теореме сформулированной выше. Производная неявной функции одной переменной находится по формуле $\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y} (F'_y \neq 0)$.

Задание 21. Найти $\frac{dy}{dx}$, если функция задана уравнением $1 + xy - \ln(e^{xy} + e^{-xy}) = 0$.

Решение

Функция $1 + xy - \ln(e^{xy} + e^{-xy}) = 0$ является неявной функцией одной переменной $y = f(x)$, поэтому

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}.$$

$F(x, y) = 1 + xy - \ln(e^{xy} + e^{-xy})$. Найдём F'_x и F'_y :

$$\begin{aligned}F'_x &= (1 + xy - \ln(e^{xy} + e^{-xy}))'_x = \\ &= y - \frac{1}{e^{xy} + e^{-xy}} \cdot (e^{xy} \cdot y - e^{-xy} \cdot y) = \frac{y(e^{xy} + e^{-xy}) - (e^{xy} \cdot y - e^{-xy} \cdot y)}{e^{xy} + e^{-xy}} = \\ &= \frac{ye^{xy} + ye^{-xy} - ye^{xy} + ye^{-xy}}{e^{xy} + e^{-xy}} = \frac{2ye^{-xy}}{e^{xy} + e^{-xy}};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F'_y &= (1 + xy - \ln(e^{xy} + e^{-xy}))'_y = \\ &= x - \frac{1}{e^{xy} + e^{-xy}} \cdot (xe^{xy} - xe^{-xy}) = \frac{x(e^{xy} + e^{-xy}) - (xe^{xy} - xe^{-xy})}{e^{xy} + e^{-xy}} = \\ &= \frac{xe^{xy} + xe^{-xy} - xe^{xy} + xe^{-xy}}{e^{xy} + e^{-xy}} = \frac{2xe^{-xy}}{e^{xy} + e^{-xy}}.\end{aligned}$$

Следовательно, $\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)} = -\frac{\frac{2ye^{-xy}}{e^{xy}+e^{-xy}}}{\frac{2xe^{-xy}}{e^{xy}+e^{-xy}}} = -\frac{y}{x}$.

Задание 22. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z + 2 = 0$.

Решение

$x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z + 2 = 0$ – неявная функция двух переменных $z = f(x; y)$, поэтому частные производные находим по формулам (11).

$$F(x, y, z) = x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z + 2.$$

Найдем F'_x , F'_y и F'_z :

$$F'_x = (x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z + 2)'_x = 2x - 4;$$

$$F'_y = (x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z + 2)'_y = -4y;$$

$$F'_z = (x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z + 2)'_z = 2z + 2.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)} = -\frac{2x-4}{2z+2} = -\frac{2(x-2)}{2(z+1)} = \frac{2-x}{z+1},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)} = -\frac{-4y}{2z+2} = \frac{4y}{2(z+1)} = \frac{2y}{z+1}.$$

ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Частные производные функции $z = f(x; y)$ $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ называют частными производными первого порядка. Их можно рассматривать как функции от $(x; y) \in D$. Эти функции могут иметь частные производные, которые называются частными производными второго порядка. Они определяются и обозначаются следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{xx};$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z''_{xy};$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z''_{yx};$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z''_{yy}.$$

Аналогично определяются частные производные 3-го, 4-го и т.д. порядков. Например,

$$z'''_{xxy} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right); \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} \right) = \frac{\partial^4 z}{\partial x \partial y \partial x^2} = (z'''_{xxy})'_x = z^{(4)}_{xyx^2} \text{ и т.д.}$$

Частная производная второго или более высокого порядка, взятая по различным переменным, называется **смешанной частной производной**.

Например, z''_{xy} , z'''_{xyx} , $\frac{\partial^4 z}{\partial x \partial y \partial x^2}$.

Теорема 5 (Шварца). Если частные производные высшего порядка непрерывны, то смешанные производные одного порядка, отличающиеся лишь порядком дифференцирования, равны между собой.

В частности, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

Задание 23. Найти вторые частные производные функции

$$z = \ln(x^2 + y^2). \text{ Убедиться, что } \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

Решение

Найдем частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x (y=\text{const})} = (\ln(x^2 + y^2))'_x = \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot (x^2 + y^2)'_x = \frac{2x}{x^2 + y^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y (x=\text{const})} = (\ln(x^2 + y^2))'_y = \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot (x^2 + y^2)'_y = \frac{2y}{x^2 + y^2}.$$

Дифференцируя каждую из полученных производных по x и по y , получим частные производные второго порядка:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2} \right)'_x = 2 \cdot \frac{1 \cdot (x^2 + y^2) - x \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = 2 \cdot \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \\ &= 2 \cdot \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \left(\frac{2y}{x^2 + y^2} \right)'_y = 2 \cdot \frac{1 \cdot (x^2 + y^2) - y \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = 2 \cdot \frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \\ &= 2 \cdot \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{2(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}; \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \left(\frac{2y}{x^2 + y^2} \right)'_x = -\frac{2y}{(x^2 + y^2)^2} \cdot 2x = -\frac{4xy}{(x^2 + y^2)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2} \right)'_y = -\frac{2x}{(x^2 + y^2)^2} \cdot 2y = -\frac{4xy}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Отсюда видно, что смешанные частные производные равны, то есть $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

Интересно отметить, что для данной функции производные $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ отличаются только знаком, то есть

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

Это уравнение называется *уравнением Лапласа*.

Мы доказали, что $z = \ln(x^2 + y^2)$ есть одно из решений уравнения Лапласа.

Задание 24. Показать, что функция $z = \ln(e^x + e^y)$ удовлетворяет уравнению $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 = 0$.

Решение

Найдем частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x (y=\text{const})} = (\ln(e^x + e^y))'_x = \frac{1}{e^x + e^y} \cdot (e^x + e^y)'_x = \frac{e^x}{e^x + e^y};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}_{(x=\text{const})} = (\ln(e^x + e^y))'_y = \frac{1}{e^x + e^y} \cdot (e^x + e^y)'_y = \frac{e^y}{e^x + e^y}.$$

Найдем частные производные второго порядка $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \left(\frac{e^x}{e^x + e^y} \right)'_x = \frac{(e^x)'_x (e^x + e^y) - e^x (e^x + e^y)'_x}{(e^x + e^y)^2} = \\ &= \frac{e^x (e^x + e^y) - e^x e^x}{(e^x + e^y)^2} = \frac{e^{2x} + e^x e^y - e^{2x}}{(e^x + e^y)^2} = \frac{e^x e^y}{(e^x + e^y)^2} = \frac{e^{x+y}}{(e^x + e^y)^2}; \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \left(\frac{e^y}{e^x + e^y} \right)'_y = \frac{(e^y)'_y (e^x + e^y) - e^y (e^x + e^y)'_y}{(e^x + e^y)^2} = \\ &= \frac{e^y (e^x + e^y) - e^y e^y}{(e^x + e^y)^2} = \frac{e^x e^y + e^{2y} - e^{2y}}{(e^x + e^y)^2} = \frac{e^x e^y}{(e^x + e^y)^2} = \frac{e^{x+y}}{(e^x + e^y)^2}; \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \left(\frac{e^y}{e^x + e^y} \right)'_x = e^y \cdot \left(\frac{1}{e^x + e^y} \right)'_x = e^y \cdot \left(-\frac{(e^x + e^y)'_x}{(e^x + e^y)^2} \right) = \\ &= e^y \cdot \left(-\frac{e^x}{(e^x + e^y)^2} \right) = -\frac{e^{x+y}}{(e^x + e^y)^2}.\end{aligned}$$

Подставим найденные частные производные второго порядка в уравнение $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 = 0$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 &= 0: \\ \frac{e^{x+y}}{(e^x + e^y)^2} - \left(-\frac{e^{x+y}}{(e^x + e^y)^2} \right)^2 &= 0, \\ \frac{e^{2(x+y)}}{(e^x + e^y)^4} - \frac{e^{2(x+y)}}{(e^x + e^y)^4} &= 0, \\ 0 &= 0.\end{aligned}$$

Получили верное тождество. Следовательно, функция

$$z = \ln(e^x + e^y) \text{ удовлетворяет уравнению } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 = 0.$$

Задание 25. Найти $\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}$, если $z = e^{xy^3}$.

Решение

Дифференцируем данную функцию дважды по x и затем ещё раз по y :

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}_{(y=\text{const})} &= (e^{xy^3})'_x = e^{xy^3} \cdot (xy^3)'_x = y^3 e^{xy^3}; \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = (y^3 e^{xy^3})'_x = y^3 e^{xy^3} (xy^3)'_x = y^3 e^{xy^3} y^3 = y^6 e^{xy^3}; \\ \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right) = (y^6 e^{xy^3})'_y = (y^6)'_y \cdot e^{xy^3} + y^6 (e^{xy^3})'_y = \\ &= 6y^5 e^{xy^3} + y^6 e^{xy^3} \cdot (xy^3)'_y = 6y^5 e^{xy^3} + y^6 e^{xy^3} \cdot x \cdot 3y^2 = \\ &= 6y^5 e^{xy^3} + 3xy^8 e^{xy^3}.\end{aligned}$$

$$\text{Получили, что } \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2} = 6y^5 e^{xy^3} + 3xy^8 e^{xy^3}.$$

ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Пусть функция $z = f(x; y)$ имеет непрерывные частные производные второго порядка. *Дифференциал второго порядка* определяется по формуле $d^2 z = d(dz)$. Найдем его:

$$d^2z = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right) = \left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)'_x \cdot dx + \left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)'_y \cdot dy$$

$$= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}dy\right) \cdot dx + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy\right) \cdot dy.$$

Отсюда:

$$\boxed{d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2} \quad (12)$$

Аналогично можно получить формулу для дифференциала третьего порядка

$$\boxed{d^3z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial z}{\partial y}dy + 3\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}dy^3} \quad (13)$$

Задание 26. Найти дифференциал второго порядка функции $z = 3x^2y - 2xy + y^2 - 1$.

Решение

Найдем первые и вторые частные производные данной функции:

$$\frac{\partial z}{\partial x}_{y-\text{число}} = (3x^2y - 2xy + y^2 - 1)'_x = 6xy - 2y;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}_{x-\text{число}} = (3x^2y - 2xy + y^2 - 1)'_y = 3x^2 - 2x + 2y;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = (6xy - 2y)'_x = 6y;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = (3x^2 - 2x + 2y)'_x = 6x - 2;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = (3x^2 - 2x + 2y)'_y = 2.$$

Найдем дифференциал второго порядка, подставив найденные производные в формулу (12), получим:

$$d^2z = 6ydx^2 + 2(6x - 2)dxdy + 2dy^2.$$

Задание 27. Найти d^3z , если $z = x^3 + y^3 + 3xy$.

Решение

Найдем частные производные третьего порядка $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}$ для данной функции:

$$\frac{\partial z}{\partial x}_{y-\text{число}} = (x^3 + y^3 + 3xy)'_x = 3x^2 + 3y;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}_{x-\text{число}} = (x^3 + y^3 + 3xy)'_y = 3y^2 + 3x;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (3x^2 + 3y)'_x = 6x; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = (6x)'_x = 6;$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = (6x)'_y = 0;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (3x^2 + 3y)'_y = 3; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = (3)'_y = 0;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (3y^2 + 3x)'_y = 6y; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = (6y)'_y = 6.$$

Найдем дифференциал третьего порядка, подставив найденные производные в формулу (13):

$$d^3 z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} dx^3 + 3 \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3 \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} dx dy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} dy^3,$$

получим,

$$d^3 z = 6dx^3 + 3 \cdot 0 \cdot dx^2 dy + 3 \cdot 0 \cdot dx dy^2 + 6dy^3;$$

$$d^3 z = 6dx^3 + 6dy^3.$$

КАСАТЕЛЬНАЯ ПЛОСКОСТЬ И НОРМАЛЬ К ПОВЕРХНОСТИ

Рассмотрим одно из геометрических приложений частных производных функции двух переменных. Пусть функция $z = f(x; y)$ дифференцируема в точке $(x_0; y_0) \in D$. Рассечем поверхность S , изображающую функцию z , плоскостями $x = x_0$ и $y = y_0$ (рис.12). Плоскость $x = x_0$ пересекает поверхность S по некоторой линии $z_0(y)$, уравнение которой получается подстановкой в выражение исходной функции $z = f(x; y)$ вместо x числа x_0 . Точка $M_0(x_0; y_0; f(x_0; y_0))$ принадлежит кривой $z_0(y)$. В силу дифференцируемости функции z в точке M_0 функция $z_0(y)$ также является дифференцируемой в точке $y = y_0$. Следовательно, в этой точке в плоскости $x = x_0$ к кривой $z_0(y)$ может быть проведена касательная l_1 .

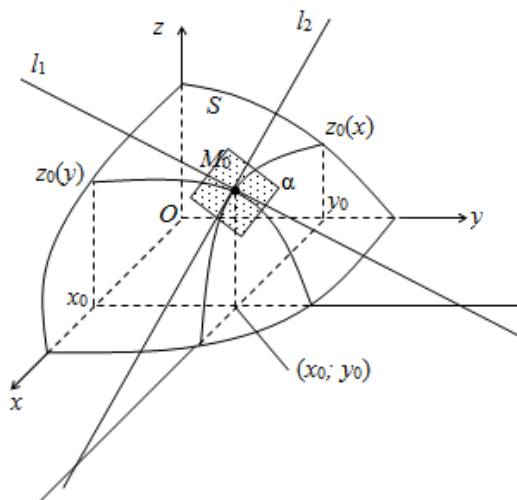


Рис. 12

Проводя аналогичные рассуждения для сечения $y = y_0$, построим касательную l_2 к кривой $z_0(x)$ в точке $x = x_0$. Прямые l_1 и l_2 определяют плоскость α , которая называется **касательной плоскостью** к поверхности S в точке M_0 .

Уравнение касательной плоскости имеет вид

$$\boxed{z - z_0 = f'_x(x_0; y_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(x_0; y_0) \cdot (y - y_0)} \quad (14)$$

Прямая, проходящая через точку M_0 перпендикулярно касательной плоскости, построенной в этой точке поверхности, называется ее **нормалью**.

Канонические уравнения нормали имеют вид

$$\boxed{\frac{x-x_0}{f'_x(x_0; y_0)} = \frac{y-y_0}{f'_y(x_0; y_0)} = \frac{z-z_0}{-1}} \quad (15)$$

Если поверхность S задана уравнением $F(x; y; z) = 0$, то уравнения (14) и (15), с учетом того, что частные производные могут быть найдены как производные неявной функции, примут соответственно вид (16) и (18):

$$\boxed{F'_x(x_0; y_0) \cdot (x - x_0) + F'_y(x_0; y_0) \cdot (y - y_0) + F'_z(x_0; y_0)(z - z_0) = 0} \quad (16)$$

$$\boxed{\frac{x-x_0}{F'_x(x_0; y_0)} = \frac{y-y_0}{F'_y(x_0; y_0)} = \frac{z-z_0}{F'_z(x_0; y_0)}} \quad (18)$$

Замечание. Формулы касательной плоскости и нормали к поверхности имеют место для обыкновенных, т.е. не особых, точек поверхности. Точка M_0 поверхности называется **особой**, если в этой точке все частные производные равны нулю или хотя бы одна из них не существует. Такие точки мы не рассматриваем.

Задание 28. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к эллиптическому параболоиду $z = x^2 + \frac{y^2}{2}$ в точке $M_0(1, -2, 3)$.

Решение

Поверхность задана явно: $f(x; y) = x^2 + \frac{y^2}{2}$. Составим уравнения касательной плоскости и нормали, используя формулы (14) и (15) соответственно.

Найдем частные производные f'_x , f'_y и их значения в точке $M_0(1, -2, 3)$.

$$f'_x = \left(x^2 + \frac{y^2}{2}\right)'_x = 2x, \quad f'_x(x_0, y_0) = f'_x(1, -2) = 2 \cdot 1 = 2;$$

$$f'_y = \left(x^2 + \frac{y^2}{2}\right)'_y = y, \quad f'_y(x_0, y_0) = f'_y(1, -2) = -2.$$

По формуле (17) запишем уравнение касательной плоскости:

$$z - 3 = 2 \cdot (x - 1) + (-2) \cdot (y - (-2)),$$

$$z - 3 = 2x - 2 - 2y - 2,$$

$$z - 3 = 2x - 2y - 4,$$

$$2x - 2y - 4 - z + 3 = 0,$$

$$2x - 2y - z - 1 = 0 \text{ — уравнение касательной плоскости;}$$

По формуле (15) запишем уравнение нормали:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-(-2)}{-2} = \frac{z-3}{-1},$$

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-3}{-1} \text{ — уравнение нормали.}$$

Задание 29. Составить уравнение касательной плоскости и уравнение нормали к однополостному гиперболоиду $x^2 + 2y^2 - z^2 - 5 = 0$ в точке $M_0(2, -1, 1)$.

Решение

Функция задана неявно, где $F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - z^2 - 5$, тогда уравнение касательной плоскости и уравнение нормали запишем по формулам (16) и (18).

Найдем F'_x , F'_y , F'_z и их значения в точке $M_0(2, -1, 1)$.

$$F'_x = (x^2 + 2y^2 - z^2 - 5)'_x = 2x, \quad F'_x(M_0) = F'_x(2, -1, 1) = 2 \cdot 2 = 4;$$

$$F'_y = (x^2 + 2y^2 - z^2 - 5)'_y = 4y, \quad F'_y(M_0) = F'_y(2, -1, 1) = -4;$$

$$F'_z = (x^2 + 2y^2 - z^2 - 5)'_z = -2z, \quad F'_z(M_0) = F'_z(2, -1, 1) = -2.$$

Подставим найденные значения в уравнение касательной плоскости и уравнение нормали, получим:

$$4(x - 2) + (-4)(y - (-1)) + (-2)(z - 1) = 0,$$

$$4x - 8 - 4y - 4 - 2z + 2 = 0, \quad 4x - 4y - 2z - 6 = 0 \mid \div 2,$$

$$2x - 2y - z - 3 = 0 \text{ — уравнение касательной плоскости;}$$

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y-(-1)}{-4} = \frac{z-1}{-2} \text{ или } \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-1}{-1} \text{ — уравнение нормали.}$$

Задание 30. К поверхности $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ провести касательные плоскости, параллельные плоскости $x + 4y + 6z = 0$.

Решение

$$F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 21$$

$$F'_x = 2x, \quad F'_y = 4y, \quad F'_z = 6z.$$

Пусть $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — точка, в которой касательная плоскость параллельна данной плоскости $x + 4y + 6z = 0$. В этом случае вектор нормали $(\vec{N})$ к поверхности имеет координаты

$$A = 2x_0, \quad B = 4y_0, \quad C = 6z_0.$$

По условию он ортогонален и заданной плоскости. Это означает, что его координаты пропорциональны коэффициентам $(1; 4; 6)$ уравнения данной плоскости, т.е.

$$\frac{2x_0}{1} = \frac{4y_0}{4} = \frac{6z_0}{6} \text{ или } y_0 = z_0 = 2x_0.$$

Кроме того, точка M_0 лежит на заданной поверхности, т.е.

$$x_0^2 + 2y_0^2 + 3z_0^2 = 21.$$

Подставляя сюда значения y_0 и z_0 , выраженные через x_0 , получим:

$$x_0^2 + 2 \cdot (2x_0)^2 + 3 \cdot (2x_0)^2 = 21, \quad x_0^2 + 8x_0^2 + 12x_0^2 = 21,$$

т.е. $21x_0^2 = 21$, $x_0^2 = 1$, $x_0 = \pm 1$.

Следовательно, условию задачи удовлетворяют две точки $M'_0(1,2,2)$ и $M''_0(-1,-2,-2)$.

Для точки $M'_0(1,2,2)$:

$A = 2x_0 = 2$, $B = 4y_0 = 8$, $C = 6z_0 = 12$, тогда уравнение касательной плоскости $2(x-1) + 8(y-2) + 12(z-2) = 0$ или $x + 4y + 6z - 21 = 0$.

Аналогично, искомая касательная плоскость, проходящая через точку $M''_0(-1,-2,-2)$, имеет уравнение $x + 4y + 6z + 21 = 0$.

ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Понятия максимума, минимума, экстремума функции двух переменных аналогичны соответствующим понятиям функции одной независимой переменной.

Пусть функция $z = f(x; y)$ определена в некоторой области D , точка $N(x_0; y_0) \in D$.

Точка $(x_0; y_0)$ называется **точкой максимума** функции $z = f(x; y)$, если существует такая - окрестность точки $(x_0; y_0)$, что для каждой точки $(x; y)$, отличной от $(x_0; y_0)$, из этой окрестности выполняется неравенство $f(x; y) < f(x_0; y_0)$.

Аналогично определяется **точка минимума** функции: для всех точек $(x; y)$, отличных от $(x_0; y_0)$, из -окрестности точки $(x_0; y_0)$ выполняется неравенство $f(x; y) > f(x_0; y_0)$.

На рисунке 13 N_1 - точка максимума, на рисунке 14 N_2 - точка минимума функции $z = f(x; y)$.

Максимум и минимум функции называют ее **экстремумами**.

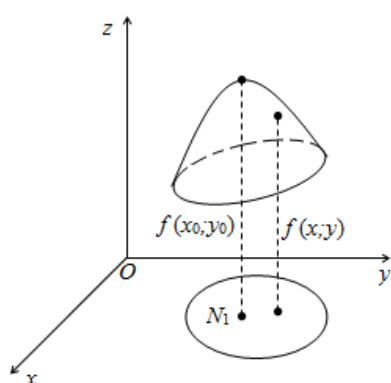


Рис. 13

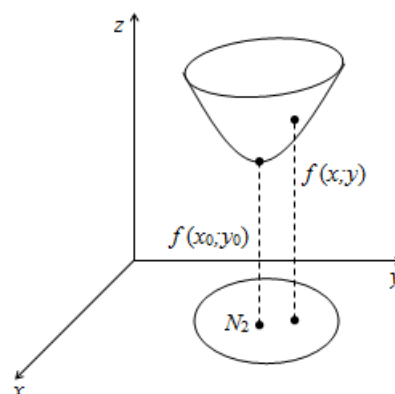


Рис. 14

Теорема 6 (необходимые условия существования экстремума). Если в точке $N(x_0; y_0)$ дифференцируемая функция $z = f(x; y)$ имеет экстремум, то

ее частные производные в этой точке равны нулю: $f'_x(x_0; y_0) = 0$ и $f'_y(x_0; y_0) = 0$.

Геометрически равенства $f'_x(x_0; y_0) = 0$ и $f'_y(x_0; y_0) = 0$ означают, что в точке экстремума функции $z = f(x; y)$ касательная плоскость к поверхности, изображающей функцию $f(x; y)$, параллельна плоскости Oxy , т.к. уравнение касательной плоскости $z = z_0$ (см. формулу 14).

Замечание. Функция может иметь экстремум в точках, где хотя бы одна из частных производных не существует. Например, функция $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ имеет максимум в точке $O(0; 0)$ (рис.15), но не имеет в этой точке частных производных.

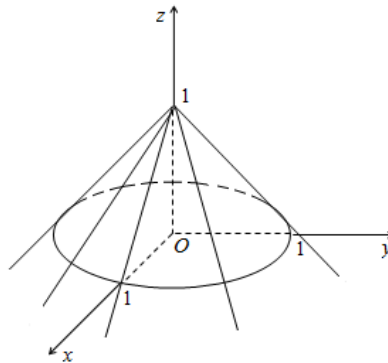


Рис. 15

Точка, в которой частные производные первого порядка функции $z = f(x; y)$ равны нулю, т.е. $f'_x = 0$ и $f'_y = 0$, называется стационарной точкой функции z .

Стационарные точки и точки, в которых хотя бы одна частная производная не существует, называются **критическими точками**.

В критических точках функция может иметь экстремум, а может и не иметь. Равенство нулю частных производных является необходимым, но не достаточным условием существования экстремума. Для нахождения экстремумов функции в данной области необходимо каждую критическую точку функции подвергнуть дополнительному исследованию.

Теорема 7 (достаточное условие существования экстремума).

Пусть в стационарной точке $(x_0; y_0)$ и некоторой ее окрестности функция $f(x; y)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Вычислим в точке $(x_0; y_0)$ определитель $\Delta =$

$$\begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0; y_0) & f''_{xy}(x_0; y_0) \\ f''_{yx}(x_0; y_0) & f''_{yy}(x_0; y_0) \end{vmatrix}.$$

Тогда:

1) если $\Delta > 0$, то функция $f(x; y)$ в точке $(x_0; y_0)$ имеет экстремум: максимум при $f''_{xx}(x_0; y_0) < 0$; минимум при $f''_{xx}(x_0; y_0) > 0$.

2) если $\Delta < 0$, то функция $f(x; y)$ в точке $(x_0; y_0)$ экстремума не имеет.

3) если $\Delta = 0$, то функция $f(x; y)$ в точке $(x_0; y_0)$ экстремум может иметь, может и не иметь. Необходимы дополнительные исследования.

Задание 31. Найти экстремумы функции $z = x^2 + 2y^2 - 2x + 4y - 6$.

Решение

1. ОДЗ: $-\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty$.

2. Найдем стационарные точки:

$$z'_x = (x^2 + 2y^2 - 2x + 4y - 6)'_x = 2x - 2,$$

$$z'_y = (x^2 + 2y^2 - 2x + 4y - 6)'_y = 4y + 4.$$

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 2 = 0, \\ 4y + 4 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = -1, \end{cases} \Rightarrow M(1; -1) - \text{стационарная точка.}$$

3. Вычислим $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$, где

$$A = f''_{xx}(x_0; y_0), B = f''_{xy}(x_0; y_0), C = f''_{yy}(x_0; y_0).$$

Найдем A, B, C :

$$A = f''_{xx} = (2x - 2)'_x = 2, B = f''_{xy} = (2x - 2)'_y = 0,$$

$$C = f''_{yy} = (4y + 4)'_y = 4.$$

$$\text{Тогда } \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 = 8 > 0 \Rightarrow \text{ в точке } M(1; -1) \text{ экстремум}$$

существует.

А так как $A = f''_{xx} = 2 > 0 \Rightarrow M(1; -1)$ - точка минимума.

$$z_{\min} = z(1; -1) = 1^2 + 2 \cdot (-1)^2 - 2 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) - 6 = -9.$$

Задание 32. Найти экстремумы функции $z = x^3 + y^3 - 8xy + 1$.

Решение

1. ОДЗ: $-\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty$.

2. Найдем стационарные точки:

$$z'_x = (x^3 + y^3 - 8xy + 1)'_x = 3x^2 - 8y,$$

$$z'_y = (x^3 + y^3 - 8xy + 1)'_y = 3y^2 - 8x.$$

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 - 8y = 0, \\ 3y^2 - 8x = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{8}x^2, \\ \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = \frac{8}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} y_1 = 0, \\ y_2 = \frac{8}{3} \end{cases} \end{cases}$$

Получили две стационарные точки: $M_1(0; 0)$, $M_2\left(\frac{8}{3}; \frac{8}{3}\right)$.

3. Вычислим $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$, где

$$A = f''_{xx}(x_0; y_0), B = f''_{xy}(x_0; y_0), C = f''_{yy}(x_0; y_0).$$

Найдем A, B, C :

$$A = f''_{xx} = (3x^2 - 8y)'_x = 6x, B = f''_{xy} = (3x^2 - 8y)'_y = -8,$$

$$C = f''_{yy} = (3y^2 - 8x)'_y = 6y.$$

$$\text{Тогда } \Delta = \begin{vmatrix} 6x & -8 \\ -8 & 6y \end{vmatrix} = 6x \cdot 6y - (-8) \cdot (-8) = 36xy - 64.$$

4. а) Исследуем точку $M_1(0; 0)$.

$$\Delta(M_1) = (36xy - 64) \Big|_{(0,0)} = -64 < 0 \Rightarrow \text{в точке } M_1(0; 0) \text{ экстремума не существует.}$$

б) Исследуем точку $M_2\left(\frac{8}{3}; \frac{8}{3}\right)$.

$$\Delta(M_2) = (36xy - 64) \Big|_{\left(\frac{8}{3}; \frac{8}{3}\right)} = 36 \cdot \frac{8}{3} \cdot \frac{8}{3} - 64 = 192 > 0 \Rightarrow$$

в точке $M_2\left(\frac{8}{3}; \frac{8}{3}\right)$ экстремум существует.

А так как $A(M_2) = f''_{xx}\left(\frac{8}{3}; \frac{8}{3}\right) = 6 \cdot \frac{8}{3} = 16 > 0 \Rightarrow M_2\left(\frac{8}{3}; \frac{8}{3}\right)$ — точка минимума функции.

$$z_{\min} = z\left(\frac{8}{3}; \frac{8}{3}\right) = \left(\frac{8}{3}\right)^3 + \left(\frac{8}{3}\right)^3 - 8 \cdot \frac{8}{3} \cdot \frac{8}{3} + 1 = -\frac{485}{27}.$$

Задание 33. Найти экстремумы функции $z = 2x^3 + 3y^4$.

Решение

1. ОДЗ: $-\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty$.

2. Найдем стационарные точки:

$$z'_x = (2x^3 + 3y^4)'_x = 6x^2, \quad z'_y = (2x^3 + 3y^4)'_y = 12y^3.$$

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x^2 = 0, \\ 12y^3 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

Получили одну стационарную точку $M(0; 0)$.

3. Вычислим $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$, где

$$A = f''_{xx}(x_0; y_0), B = f''_{xy}(x_0; y_0), C = f''_{yy}(x_0; y_0).$$

Найдем A, B, C :

$$A = f''_{xx} = (6x^2)'_x = 12x, B = f''_{xy} = (6x^2)'_y = 0,$$

$$C = f''_{yy} = (12y^3)'_y = 36y^2.$$

$$\text{Тогда } \Delta = \begin{vmatrix} 12x & 0 \\ 0 & 36y^2 \end{vmatrix} = 12x \cdot 36y^2 - 0 \cdot 0 = 432xy^2.$$

4. Исследуем точку $M(0; 0)$: $\Delta(M) = 432xy^2 \Big|_{(0,0)} = 0.$

Так как $\Delta(M) = 0$, то экстремум в этой точке может быть, а может не быть. В данном случае экстремум есть, т.к. $z(M) = 0$ и $z > 0$ во всех других точках. Тогда в точке $M(0; 0)$ функция имеет минимум.

НАИБОЛЬШЕЕ И НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЕ ФУНКЦИИ В ЗАМКНУТОЙ ОБЛАСТИ

Пусть функция $z = f(x; y)$ определена и непрерывна в ограниченной замкнутой области D . Тогда она достигает в некоторых точках области D своего наибольшего M и наименьшего m значений. Эти значения достигаются функцией в точках, расположенных внутри области D , или в точках, лежащих на границе области.

Правило нахождения наибольшего и наименьшего значений дифференцируемой в области D функции $z = f(x; y)$:

1. Найти все критические точки функции, принадлежащие области D , вычислить значения функции в этих точках.

2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = f(x; y)$ на границах области.

3. Сравнить все найденные значения функции и выбрать из них наибольшее M и наименьшее m .

Задание 34. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2y(2 - x - y)$ в треугольнике, ограниченном прямыми $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 6$.

Решение

Построим заданную область (рис.16).

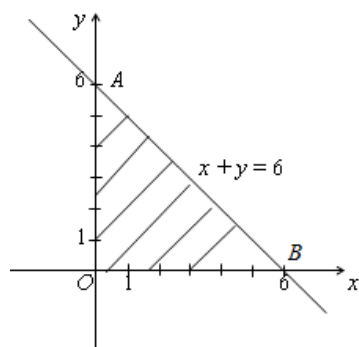


Рис. 16

Найдем стационарные точки, лежащие внутри данного треугольника:

$$\begin{aligned} z'_x &= (x^2y(2 - x - y))'_x = 2xy(2 - x - y) + x^2y \cdot (-1) = \\ &= xy(4 - 2x - 2y - x) = xy(4 - 3x - 2y); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z'_y &= (x^2y(2-x-y))'_y = x^2(2-x-y) + x^2y \cdot (-1) = \\
&= x^2(2-x-y-y) = x^2(2-x-2y). \\
\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0, \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} xy(4-3x-2y) = 0 \quad | \div (xy), \text{ (т.к. внутри треугольника } x > 0 \text{ и } y > 0) \\ x^2(2-x-2y) = 0 \quad | \div x, \end{cases} \Rightarrow \\
&\Rightarrow \begin{cases} 4-3x-2y = 0, \\ 2-x-2y = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4-3(2-2y)-2y = 0, \\ x = 2-2y, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2-4y = 0, \\ x = 2-2y, \end{cases} \\
&\Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2}, \\ x = 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

Получили одну стационарную точку $M\left(\frac{1}{2}; 1\right)$, лежащую внутри треугольника.

Не определяя вида экстремума, найдем значение аппликаты z .

$$z_1 = z(M) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 1 \cdot \left(2 - \frac{1}{2} - 1\right) = \frac{1}{8}.$$

Исследуем границу OA : $x = 0 \Rightarrow z = 0, 0 \leq y \leq 6$.

$$z_2 = z(O) = z(0; 0) = 0^2 \cdot 0 \cdot (2 - 0 - 0) = 0;$$

$$z_3 = z(A) = z(0; 6) = 0^2 \cdot 6 \cdot (2 - 0 - 6) = 0.$$

Исследуем границу OB : $y = 0 \Rightarrow z = 0, 0 \leq x \leq 6$.

$$z_4 = z(B) = z(6; 0) = 6^2 \cdot 0 \cdot (2 - 6 - 0) = 0.$$

Исследуем границу AB : $x + y = 6, y = 6 - x \Rightarrow$

$$z = x^2(6-x)(2-x-(6-x)) = -4x^2(6-x) = 4x^3 - 24x^2, 0 \leq x \leq 6.$$

$$z' = (4x^3 - 24x^2)' = 12x^2 - 48x.$$

$$z' = 0: 12x^2 - 48x = 0, 12x(x - 4) = 0,$$

$$x_1 = 0 \in [0; 6] \text{ или } x_2 = 4 \in [0; 6], \text{ тогда } y_1 = 0 \text{ и } y_2 = 2.$$

$$z_5 = z(4; 2) = 6^2 \cdot 0 \cdot (2 - 6 - 0) = 4 \cdot 4^3 - 24 \cdot 4^2 = -128.$$

Из всех найденных значений выбираем наибольшее и наименьшее:

$$z_{\text{наиб.}} = z\left(\frac{1}{2}; 1\right) = \frac{1}{8}; \quad z_{\text{наим.}} = z(4; 2) = -128.$$

Задание 35. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2y + xy^2 + xy$ в замкнутой области, ограниченной линиями:

$$x = 1, x = 2, y = -1,5, y = \frac{1}{x}.$$

Решение

Построим заданную область (рис.17)

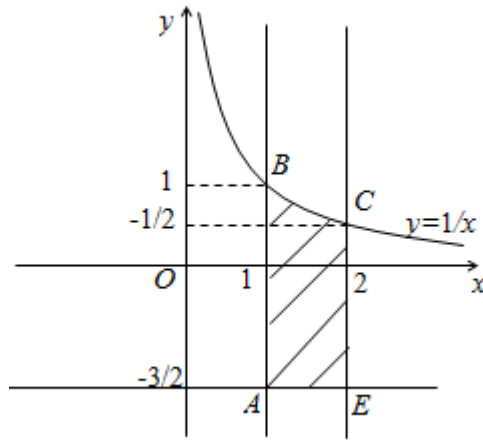


Рис. 17

1. Найдем стационарные точки, лежащие внутри области:

$$z'_x = (x^2y + xy^2 + xy)'_x = 2xy + y^2 + y,$$

$$z'_y = (x^2y + xy^2 + xy)'_y = x^2 + 2xy + x.$$

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2xy + y^2 + y = 0, \\ x^2 + 2xy + x = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(2x + y + 1) = 0, \\ x(x + 2y + 1) = 0. \end{cases}$$

Решением системы являются точки $M_1(0; 0)$, $M_2(-1; 0)$, $M_3(0; -1)$, $M_4(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{3})$. Ни одна из найденных точек не принадлежит области D .

2. Исследуем границу AB :

$$x = 1 \Rightarrow z = y^2 + 2y, \text{ где } -\frac{3}{2} \leq y \leq 1, \quad z' = 2y + 2.$$

$$z' = 0: 2y + 2 = 0 \Rightarrow y = -1 \in \left[-\frac{3}{2}; 1\right].$$

$$z_1 = z(-1) = (-1)^2 + 2 \cdot (-1) = -1,$$

$$z_2 = z\left(-\frac{3}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{4},$$

$$z_3 = z(1) = 1^2 + 2 \cdot 1 = 3.$$

3. Исследуем границу BC :

$$y = \frac{1}{x} \Rightarrow z = x + \frac{1}{x} + 1, \text{ где } 1 \leq x \leq 2, \quad z' = 1 - \frac{1}{x^2}.$$

$$z' = 0: 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow x_1 = 1 \in [1; 2], \quad x_2 = -1 \notin [1; 2].$$

$$z_4 = z(1) = 1 + \frac{1}{1} + 1 = 3;$$

$$z_5 = z(2) = 2 + \frac{1}{2} + 1 = 3,5.$$

4. Исследуем границу CE :

$$x = 2 \Rightarrow z = 2y^2 + 6y, \text{ где } -\frac{3}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}, \quad z' = 4y + 6.$$

$$z' = 0: 4y + 6 = 0 \Rightarrow y = -\frac{3}{2} \in \left[-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right].$$

$$z_6 = z\left(-\frac{3}{2}\right) = 2\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 6 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = -4,5,$$

$$z_7 = z\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = 3,5.$$

5. Исследуем границу AE :

$$y = -\frac{3}{2} \Rightarrow z = -\frac{3x^2}{2} + \frac{3x}{4}, \text{ где } 1 \leq x \leq 2, \quad z' = -3x + \frac{3}{4}.$$

$$z' = 0: -3x + \frac{3}{4} = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{4} \notin [1; 2].$$

$$z_8 = z(-1) = -\frac{3 \cdot (-1)^2}{2} + \frac{3 \cdot (-1)}{4} = -\frac{3}{4},$$

$$z_9 = z(2) = -\frac{3 \cdot 2^2}{2} + \frac{3 \cdot 2}{4} = -4,5.$$

6. Из всех найденных значений выбираем наибольшее и наименьшее:

$$z_{\text{наиб.}} = z\left(2; \frac{1}{2}\right) = 3,5, \quad z_{\text{наим.}} = z\left(2; -\frac{3}{2}\right) = -4,5.$$

Задание 36. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$z = x + y$ в круге $x^2 + y^2 \leq 1$.

Решение

Стационарных точек функция не имеет, так как $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = 1 \neq 0$, поэтому наибольшее и наименьшее значения она может принимать только на границе области, т.е. на окружности $x^2 + y^2 = 1$.

Параметрическое уравнение этой окружности:

$$x = \cos t, \quad y = \sin t \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

На окружности z становится функцией от t :

$$z = \cos t + \sin t.$$

Ищем стационарные точки этой функции:

$$z'(t) = -\sin t + \cos t = 0, \text{ т.е. } \sin t = \cos t,$$

отсюда

$$t_1 = \frac{\pi}{4}, \quad t_2 = \frac{5\pi}{4};$$

в этих точках

$$z_1 = z\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}, \quad x_1 = y_1 = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$z_2 = z\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \cos \frac{5\pi}{4} + \sin \frac{5\pi}{4} = -\sqrt{2}, \quad x_2 = y_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Таким образом, получили:

$$z_{\text{наиб.}} = z\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}, \quad z_{\text{наим.}} = z\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2}.$$

ПРОИЗВОДНАЯ ПО НАПРАВЛЕНИЮ. ГРАДИЕНТ

Рассмотрим функцию $z = f(x; y)$, определенную в некоторой окрестности точки $M(x; y)$ и вектор $\vec{l} = \overrightarrow{MM_1}$. Для характеристики скорости изменения функции $z = f(x; y)$ в направлении вектора $\vec{l}$ введем понятие производной по направлению. Для этого через точку $M(x; y)$ проведем прямую l так, чтобы ее направление совпало с направлением вектора $\vec{l}$ и выберем на этой прямой точку $M_1(x + \Delta x; y + \Delta y)$. Если $\Delta l = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ – длина вектора $\overrightarrow{MM_1}$, при этом функция получает приращение $\Delta z = f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y)$.

Предел отношения $\frac{\Delta z}{\Delta l}$ при $\Delta l \rightarrow 0$ ($M \rightarrow M_1$), если он существует, называется производной функции $z = f(x; y)$ в точке $M(x; y)$ по направлению вектора $\vec{l}$ и обозначается $\frac{\partial z}{\partial l} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta l}$.

Если функция $z = f(x; y)$ дифференцируема, то производная в данном направлении вычисляется по формуле

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial \vec{l}} = \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_M \cdot \cos \alpha + \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_M \cdot \cos \beta} \quad (19)$$

где $\cos \alpha$, $\cos \beta$ – направляющие косинусы, α , β – углы, образованные вектором $\vec{l}$ и положительными направлениями осей Ox и Oy соответственно (рис.18).

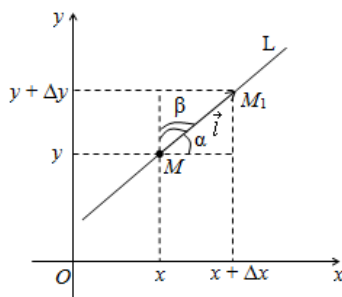


Рис. 18

В случае функции трех переменных $u = f(x; y; z)$ производная по направлению вектора $\vec{l}$ определяется аналогично. Соответствующая формула имеет вид

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial \vec{l}} = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_M \cdot \cos \alpha + \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_M \cdot \cos \beta + \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_M \cdot \cos \gamma} \quad (20)$$

где $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ – направляющие косинусы, α , β , γ – углы, образованные вектором $\vec{l}$ и положительными направлениями осей Ox , Oy и Oz соответственно.

Градиентом функции $z = f(x; y)$ в точке $M(x; y)$ называется вектор, координаты которого равны соответствующим частным производным и обозначается

$$\overrightarrow{\text{grad } z} \left(\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_M; \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_M \right) \quad (21)$$

Для функции трех переменных $u = f(x; y; z)$:

$$\overrightarrow{\text{grad } u} \left(\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_M; \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_M; \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_M \right) \quad (22)$$

Вектор $\overrightarrow{\text{grad } z}$ показывает направление максимального изменения функции, а его длина $|\overrightarrow{\text{grad } z}|$ равна скорости максимального изменения функции.

Задание 37. Найти производную функции $z = x^2 + y^2x$ в точке $M(1; 2)$ по направлению вектора $\overrightarrow{MM_1}$, где M_1 – точка с координатами $(3; 0)$.

Решение

Производная функции $z = f(x; y)$ в точке $M(x_0; y_0)$ по направлению вектора $\vec{l} = (x_l; y_l)$ вычисляется по формуле (20):

$$\left(\frac{\partial z}{\partial \vec{l}} \right) \Big|_M = f'_x(x_0; y_0) \cdot \cos \alpha + f'_y(x_0; y_0) \cdot \cos \beta, \text{ где}$$

$$\cos \alpha = \frac{x_l}{|\vec{l}|}, \cos \beta = \frac{y_l}{|\vec{l}|} - \text{направляющие косинусы вектора } \vec{l}.$$

Найдем вектор $\vec{l}$ и его направляющие косинусы:

$$\vec{l} = \overrightarrow{MM_1} = (3 - 1; 0 - 2) = (2; -2);$$

$$|\vec{l}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

$$\cos \alpha = \frac{x_l}{|\vec{l}|} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \cos \beta = \frac{y_l}{|\vec{l}|} = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Найдем частные производные функции $z = x^2 + y^2x$ и вычислим значения частных производных в точке $M(1; 2)$:

$$f'_x = \frac{\partial z}{\partial x_{y-\text{число}}} = (x^2 + y^2x)'_x = 2x + y^2;$$

$$f'_y = \frac{\partial z}{\partial y_{x-\text{число}}} = (x^2 + y^2x)'_y = 2yx.$$

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_M = (2x + y^2) \Big|_{(1; 2)} = 2 \cdot 1 + 2^2 = 6;$$

$$\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_M = (2yx) \Big|_{(1; 2)} = 2 \cdot 1 \cdot 2 = 4.$$

По формуле (20), получим:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial \vec{l}} \right) \Big|_M = 6 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 4 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{6}{\sqrt{2}} - \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$

Задание 38. Найти производную функции $f(x; y) = x^3 - y^3$ в точке $M(1; 1)$ в направлении вектора $\vec{l}$, составляющим угол $\alpha = 60^\circ$ с положительным направлением оси Ox .

Решение

Найдем значения частных производных данной функции в точке M :

$$f'_x = (x^3 - y^3)'_x = 3x^2; \quad f'_x(M) = f'_x(1; 1) = 3 \cdot 1^2 = 3;$$

$$f'_y = (x^3 - y^3)'_y = -3y^2; \quad f'_x(M) = f'_x(1; 1) = -3 \cdot 1^2 = -3.$$

Найдем направляющие косинусы:

$$\cos \alpha = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}; \quad \cos \beta = \cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

По формуле (20) получим:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial l}\right)\Big|_M = 3 \cdot \frac{1}{2} + (-3) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}(1 - \sqrt{3}).$$

Задание 39. Найти градиент и модуль градиента функции $z = 3x^4 - xy + y^3$ в точке $M(1; 2)$.

Решение

$$\overrightarrow{\text{grad} z}(M) = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_M; \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_M\right)$$

Найдем частные производные данной функции:

$$f'_x = (3x^4 - xy + y^3)'_x = 12x^3 - y;$$

$$f'_y = (3x^4 - xy + y^3)'_y = -x + 3y^2.$$

Найдем значение частных производных в точке $M(1; 2)$:

$$f'_x(1; 2) = (12x^3 - y)\Big|_{(1; 2)} = 12 \cdot 1^3 - 2 = 10;$$

$$f'_y(1; 2) = (-x + 3y^2)\Big|_{(1; 2)} = -1 + 3 \cdot 2^2 = -1 + 12 = 11.$$

Следовательно, $\overrightarrow{\text{grad} z}(M) = (10; 11)$.

$$\text{Найдем } |\overrightarrow{\text{grad} z}(M)| = \sqrt{(f'_x(M))^2 + (f'_y(M))^2} = \sqrt{10^2 + 11^2} = \sqrt{221}.$$

Задание 40. Для функции $u = x^2y + y^2 + xz$ найти угол между её градиентами в точках $P_1(1; 0; 1)$ и $P_2(2; 1; 0)$.

Решение

Найдем частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x}_{y,z-\text{числа}} = (x^2y + y^2 + xz)'_x = 2xy + z;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}_{x,z-\text{числа}} = (x^2y + y^2 + xz)'_y = x^2 + 2y;$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}_{x,y-\text{числа}} = (x^2y + y^2 + xz)'_z = x.$$

И их значения в точках P_1 и P_2 :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(P_1) = 2 \cdot 1 \cdot 0 + 1 = 1; \quad \frac{\partial u}{\partial y}(P_1) = 1^2 + 2 \cdot 0 = 1; \quad \frac{\partial u}{\partial z}(P_1) = 1;$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(P_2) = 2 \cdot 2 \cdot 1 + 0 = 4; \quad \frac{\partial u}{\partial y}(P_2) = 2^2 + 2 \cdot 1 = 6; \quad \frac{\partial u}{\partial z}(P_2) = 2.$$

Тогда градиент данной функции в точках P_1 и P_2 равен:

$$\overrightarrow{\text{grad} u}(P_1) = (1; 1; 1) \text{ и } \overrightarrow{\text{grad} u}(P_2) = (4; 6; 2).$$

Обозначим через φ угол между найденными градиентами и вычислим его по формуле:

$$\begin{aligned}\cos\varphi &= \frac{\overrightarrow{\text{gradu}}(P_1) \cdot \overrightarrow{\text{gradu}}(P_2)}{|\overrightarrow{\text{gradu}}(P_1)| \cdot |\overrightarrow{\text{gradu}}(P_2)|} = \frac{1 \cdot 4 + 1 \cdot 6 + 1 \cdot 2}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{4^2 + 6^2 + 2^2}} = \\ &= \frac{12}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{4 \cdot 14}} = \frac{12}{2 \cdot \sqrt{3 \cdot 14}} = \frac{6}{\sqrt{42}}, \quad \text{откуда } \varphi = \arccos \frac{6}{\sqrt{42}} \approx 22,2^\circ.\end{aligned}$$

Задание 41. Найти наибольшую скорость возрастания функции $z = x^2y - 5y^3$ в точке $M(2; 1)$.

Решение

Наибольшая скорость возрастания функции равна модулю градиента этой функции.

Находим

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}_{y-\text{число}} &= (x^2y - 5y^3)'_x = 2xy; \\ \frac{\partial z}{\partial y}_{x-\text{число}} &= (x^2y - 5y^3)'_y = x^2 - 15y^2; \\ \frac{\partial z}{\partial x}(M) &= 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4; \\ \frac{\partial z}{\partial y}(M) &= 2^2 - 15 \cdot 1^2 = -11.\end{aligned}$$

Получили, что $\overrightarrow{\text{grad}z}(M) = (4; -11)$.

Следовательно, наибольшая скорость возрастания функции в данной точке равна $|\overrightarrow{\text{grad}z}(M)| = \sqrt{4^2 + 11^2} = \sqrt{137}$.

ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ, СВОЙСТВА

Обобщением определенного интеграла на случай функции двух переменных является двойной интеграл.

Пусть в замкнутой области D плоскости Oxy задана непрерывная функция $z = f(x, y)$. Разобьем область D на n «элементарных плоскостей» D_i , ($i = \overline{1, n}$), площади которых обозначим через ΔS_i , а диаметры (наибольшее расстояние между точками области) – через d_i (рис.19).

В каждой области D_i выберем произвольную точку $M_i(x_i; y_i)$, умножим значение $f(x_i; y_i)$ функции в этой точке на ΔS_i и составим сумму всех таких произведений:

$$f(x_1; y_1)\Delta S_1 + f(x_2; y_2)\Delta S_2 + \dots + f(x_n; y_n)\Delta S_n = \sum_{i=1}^n f(x_i; y_i)\Delta S_i \quad (23)$$

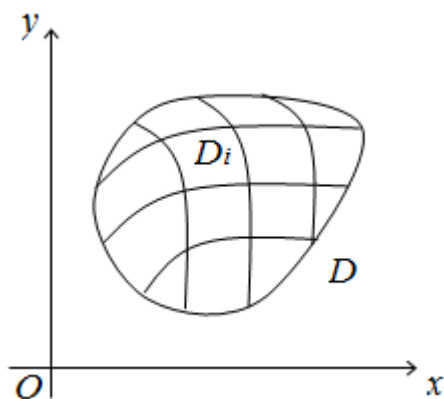


Рис. 19

Эта сумма называется интегральной суммой функции $f(x, y)$ в области D .

Рассмотрим предел интегральной суммы (23), когда n стремится к бесконечности таким образом, что $\max d_i \rightarrow 0$. Если этот предел существует и не зависит ни от способа разбиения области D на части, ни от выбора точек в них, то он называется двойным интегралом от функции $f(x, y)$ по области D и обозначается $\iint_D f(x, y) dx dy$ или $\iint_D f(x, y) dS$.

Таким образом, двойной интеграл определяется равенством

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ (\max d_i \rightarrow 0)}} \sum_{i=1}^n f(x_i; y_i) \Delta S_i \quad (24)$$

В этом случае функция $f(x, y)$ называется **интегрируемой в области D** ; D - **область интегрирования**; x и y – **переменные интегрирования**; $dx dy$ (или dS) – **элемент площади**.

Для всякой ли функции $f(x, y)$ существует двойной интеграл? На этот вопрос отвечает следующая теорема.

Теорема 8 (достаточное условие интегрируемости функции). Если функция $z = f(x; y)$ непрерывна в замкнутой области D , то она интегрируема в этой области.

Замечания.

1. Далее будем рассматривать только функции, непрерывные в области интегрирования, хотя двойной интеграл может существовать не только для непрерывных функций.

2. Из определения двойного интеграла следует, что для интегрируемой в области D функции предел интегральных сумм существует и не зависит от способа разбиения области. Таким образом, мы можем разбивать область D на площадки прямыми, параллельными координатным осям (рис. 20). При этом $\Delta S_i = \Delta x_i \cdot \Delta y_i$, равенство (24) можно записать в виде

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ (\max \Delta x_i \rightarrow 0)}} \sum_{i=1}^n f(x_i; y_i) \cdot \Delta x_i \cdot \Delta y_i \quad (25)$$

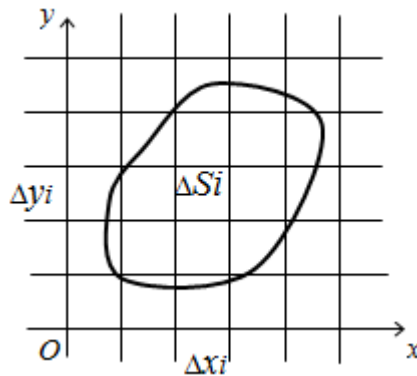


Рис.20

Геометрический и физический смысл двойного интеграла

Рассмотрим две задачи, приводящие к двойному интегралу.

Объем цилиндрического тела

Рассмотрим тело, ограниченное сверху поверхностью $z = f(x; y) \geq 0$, снизу – замкнутой областью D плоскости Oxy , с боков – цилиндрической поверхностью, образующая которой параллельна оси Oz , а направляющей служит граница области D (рис.21). Такое тело называется **цилиндрическим**. Найдём его объём. Для этого разобьём область D (проекция поверхности $z = f(x; y)$ на плоскость Oxy) произвольным образом на n областей D_i , площади которых равны ΔS_i ($i = \overline{1, n}$).

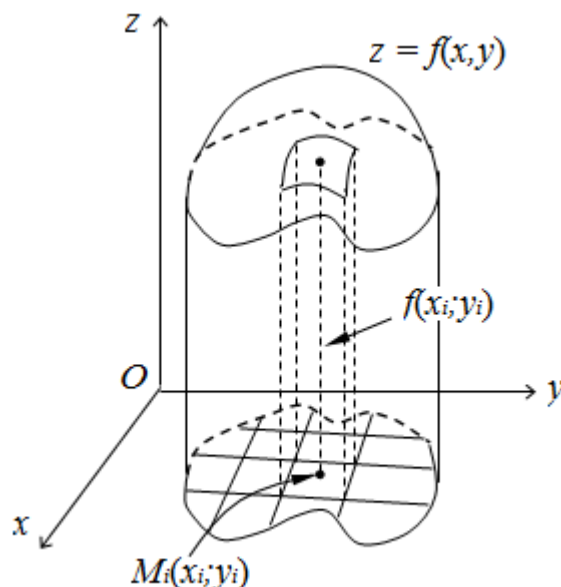


Рис. 21

Рассмотрим цилиндрические столбики с основаниями D_i , ограниченные сверху кусками поверхности $z = f(x; y)$. В своей совокупности они составляют тело V . Обозначив объем столбика с основанием D_i через ΔV_i , получим $V = \sum_{i=1}^n \Delta V_i$. Возьмем на каждой площадке D_i произвольную точку $M_i(x_i; y_i)$ и заменим каждый столбик прямым цилиндром с тем же основанием D_i и высотой $z_i = f(x_i; y_i)$. Объем этого цилиндра приближенно равен объему ΔV_i цилиндрического столбика, т.е. $\Delta V_i \approx f(x_i; y_i) \cdot \Delta S_i$. Тогда получаем:

$$V = \sum_{i=1}^n \Delta V_i \approx \sum_{i=1}^n f(x_i; y_i) \cdot \Delta S_i \quad (26)$$

Это равенство тем точнее, чем больше число n и чем меньше размеры «элементарных частей» D_i . Естественно принять предел суммы (26) при условии, что число площадок D_i неограниченно увеличивается ($n \rightarrow \infty$), а каждая площадка стягивается в точку ($\max d_i \rightarrow 0$), за объем V цилиндрического тела, т.е.

$$V = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ (\max d_i \rightarrow 0)}} \sum_{i=1}^n f(x_i; y_i) \cdot \Delta S_i$$

или, согласно равенству (24)

$$V = \iint_D f(x, y) dx dy \quad (27)$$

Итак, *величина двойного интеграла от неотрицательной функции равна объему цилиндрического тела*. В этом состоит геометрический смысл двойного интеграла.

Масса плоской пластинки

Требуется найти массу m плоской пластинки D , зная, что ее поверхностная плотность $\gamma = \gamma(x; y)$ есть непрерывная функция координат точки $(x; y)$. Разобьем пластинку D на n элементарных частей D_i ($i = \overline{1, n}$), площади которых обозначим через ΔS_i . В каждой области D_i возьмем произвольную точку $M_i(x_i; y_i)$ и вычислим плотность в ней: $\gamma(x_i; y_i)$.

Если области D_i достаточно малы, то плотность в каждой точке $(x; y) \in D_i$ мало отличается от значения $\gamma(x_i; y_i)$. Считая приближенно плотность в каждой точке области D_i постоянной, равной $\gamma(x_i; y_i)$, можно найти ее массу m_i : $m_i \approx \gamma(x_i; y_i) \cdot \Delta S_i$. Так как масса m всей пластинки D равна $m = \sum_{i=1}^n m_i$, то для ее вычисления имеем приближенное равенство

$$m \approx \sum_{i=1}^n \gamma(x_i; y_i) \cdot \Delta S_i \quad (28)$$

Точное значение массы получим как предел суммы (5) при условии $n \rightarrow \infty$ и $\max d_i \rightarrow 0$:

$$m = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ (\max d_i \rightarrow 0)}} \sum_{i=1}^n \gamma(x_i; y_i) \cdot \Delta S_i$$

или, согласно равенству (24),

$$m = \iint_D \gamma(x; y) dx dy \quad (29)$$

Итак, двойной интеграл от функции $\gamma(x; y)$ численно равен массе пластинки, если подынтегральную функцию $\gamma(x; y)$ считать плотностью этой

пластинки в точке $(x; y)$. В этом состоит физический смысл двойного интеграла.

Основные свойства двойного интеграла

Можно заметить, что процесс построения интеграла по области D дословно повторяет уже знакомую нам процедуру определения интеграла функции одной переменной на отрезке. Аналогичны и свойства этих интегралов и их доказательства. Поэтому перечислим основные свойства двойного интеграла, считая подынтегральные функции интегрируемыми.

$$1. \iint_D c \cdot f(x; y) dx dy = c \cdot \iint_D f(x; y) dx dy, c - const.$$

$$2. \iint_D (f_1(x; y) \pm f_2(x; y)) dx dy = \iint_D f_1(x; y) dx dy \pm \iint_D f_2(x; y) dx dy.$$

3. Если область D разбить линией на две области D_1 и D_2 такие, что $D_1 \cup D_2 = D$, а пересечение D_1 и D_2 состоит лишь из линии, их разделяющей (рис.22), то

$$\iint_D f(x; y) dx dy = \iint_{D_1} f(x; y) dx dy + \iint_{D_2} f(x; y) dx dy.$$

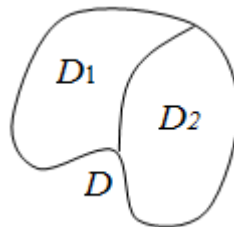


Рис.22

4. Если в области D имеет место неравенство $f(x; y) \geq 0$, то $\iint_D f(x; y) dx dy \geq 0$. Если в области D функции $f(x; y)$ и $\varphi(x; y)$ удовлетворяют неравенству $f(x; y) \geq \varphi(x; y)$, то и

$$\iint_D f(x; y) dx dy \geq \iint_D \varphi(x; y) dx dy.$$

$$5. \iint_D dS = S, \text{ так как } \sum_{i=1}^n \Delta S_i = S.$$

6. Если функция $f(x; y)$ непрерывна в замкнутой области D , площадь которой S , то $mS \leq \iint_D f(x; y) dx dy \leq MS$, где m и M – соответственно наименьшее и наибольшее значения подынтегральной функции в области D .

7. Если функция $f(x; y)$ непрерывна в замкнутой области D , площадь которой S , то в этой области существует такая точка $(x_0; y_0)$, что $\iint_D f(x; y) dx dy = f(x_0; y_0) \cdot S$.

Величину $f(x_0; y_0) = \frac{1}{S} \cdot \iint_D f(x; y) dx dy$ называют средним значением функции $f(x; y)$ в области D .

ВЫЧИСЛЕНИЕ ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА В ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТАХ

Покажем, что вычисление двойного интеграла сводится к последовательному вычислению двух определенных интегралов.

Пусть требуется вычислить двойной интеграл $\iint_D f(x; y) dx dy$, где функция $f(x; y) \geq 0$ непрерывна в области D . Тогда, как это было показано в пункте 12, двойной интеграл выражает объем цилиндрического тела, ограниченного сверху поверхностью $z = f(x; y)$. Найдем этот объем, используя метод параллельных сечений. Известно, что $V = \int_a^b S(x) dx$, где $S(x)$ – площадь сечения плоскостью, перпендикулярной оси Ox , а $x = a$, $x = b$ – уравнения плоскостей, ограничивающих данное тело.

Положим сначала, что область D представляет собой криволинейную трапецию, ограниченную прямыми $x = a$ и $x = b$ и кривыми $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$, причем функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ непрерывны и таковы, что $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$ для всех $x \in [a; b]$ (рис.23). Такая область называется правильной в направлении оси Oy : любая прямая, параллельная оси Oy , пересекает границу области не более чем в двух точках.

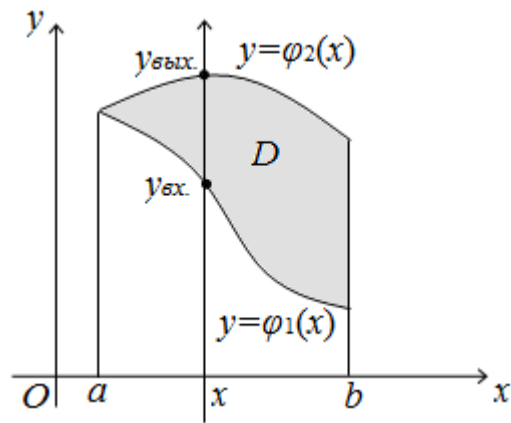


Рис. 23

Построим сечение цилиндрического тела плоскостью, перпендикулярной оси Ox : $x = const$, где $x \in [a; b]$.

В сечении получим криволинейную трапецию $ABCD$, ограниченную линиями $z = f(x; y)$, где $x = const$, $z = 0$, $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$ (рис. 24).

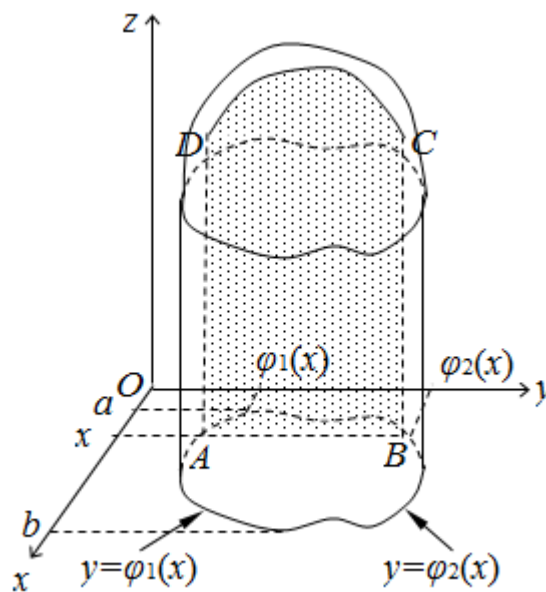


Рис. 24

Площадь $S(x)$ этой трапеции находим с помощью определенного интеграла

$$S(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x; y) dy$$

Теперь, согласно методу параллельных сечений, искомый объем цилиндрического тела может быть найден так:

$$V = \int_a^b S(x)dx = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x; y)dy \right) dx$$

С другой стороны, в пункте 12, было показано, что объем цилиндрического тела определяется как двойной интеграл от функции $f(x; y) \geq 0$ по области D . Следовательно,

$$V = \iint_D f(x; y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x; y)dy \right) dx$$

Это равенство обычно записывается в виде

$$\iint_D f(x; y)dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x; y)dy \quad (30)$$

Формула (7) представляет собой способ вычисления двойного интеграла в декартовых координатах. Правую часть формулы (30) называют *двукратным* (или *повторным*) интегралом от функции $f(x; y)$ по области D . Интеграл $\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x; y)dy$ называется *внутренним* интегралом.

Для вычисления двукратного интеграла сначала берем внутренний интеграл, считая x постоянным, затем берем внешний интеграл, т.е. результат первого интегрирования интегрируем по x в пределах от a до b .

Если же область D ограничена прямыми $y = c$ и $y = d$ ($c < d$), кривыми $x = \psi_1(y)$ и $x = \psi_2(y)$, причем $\psi_1(y) \leq \psi_2(y)$ для всех $y \in [c; d]$, т.е. область D – правильная в направлении оси Ox , то, рассекая тело плоскостью $y = const$, аналогично получим:

$$\iint_D f(x; y)dxdy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x; y)dx \quad (31)$$

Здесь, при вычислении внутреннего интеграла, считаем y постоянным.

Замечания.

1. Формулы (30) и (31) справедливы и в случае, когда $f(x; y) < 0$, $(x; y) \in D$.

2. Если область D правильная в обоих направлениях, то двойной интеграл можно вычислять как по формуле (30), так и по формуле (31).

3. Если область D не является правильной ни «по x », ни «по y », то для сведения двойного интеграла к повторному область D следует разбить на части, правильные в направлении оси Ox или оси Oy .

4. Полезно помнить, что внешние пределы в двукратном интеграле всегда постоянны, а внутренние, как правило, переменные.

Задание 42. Расставить пределы интегрирования в том и в другом порядке в $\iint_D f(x, y) dx dy$, если область D ограничена линиями: $x = 1$, $y = 1$, $y + x = 4$.

Решение

Построим область D (рис. 1). Эта область ограничена прямыми:

- 1) $x = 1$ – прямая параллельная оси Oy и пересекающая ось Ox в единице;
- 2) $y = 1$ – прямая параллельная оси Ox и пересекающая ось Oy в единице;
- 3) $y + x = 4$ – прямая отсекающая на осях координат по 4 единицы, также можно построить по двум точкам.

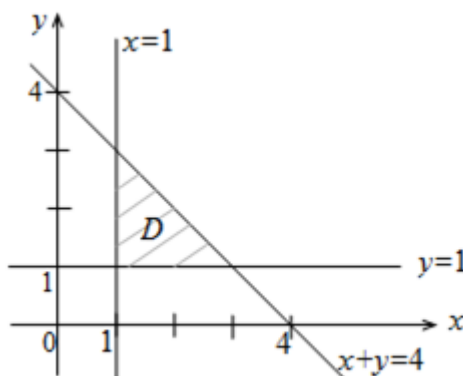


Рис. 25

Расставим пределы интегрирования в $\iint_D f(x, y) dx dy$, в направлении оси Ox . Для этого проведем прямую параллельную оси Ox , слева на право, так чтобы эта прямая пересекла область D (Рис. 25а).

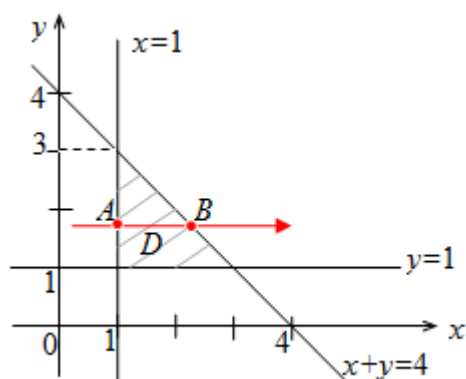


Рис.25а

Из рисунка 25а видно, что область D является правильной в направлении оси Ox . В этом случае в двукратном интеграле внутреннее интегрирование производится по переменной x , а внешнее по переменной y . Точка “входа” (на рисунке 1а – это точка A) лежит на прямой $x = 1$, а точка “выхода” (на рисунке 1а – это точка B) лежит на прямой $y + x = 4$. Из уравнения прямой $y + x = 4$ выразим x , получим $x = 4 - y$. Значит, для внутреннего интеграла нижний предел интегрирования $x = 1$, а верхний – $x = 4 - y$. Для нахождения пределов интегрирования внутреннего интеграла спроецируем область D на ось Oy , получим отрезок $[1,3]$. Получили, что нижний предел интегрирования $y = 1$, верхний – $y = 3$.

$$\text{Поэтому, } \iint_D f(x,y) dx dy = \int_1^3 dy \int_1^{4-y} f(x,y) dx.$$

Изменим порядок интегрирования. Расставим пределы интегрирования в $\iint_D f(x,y) dx dy$, в направлении оси Oy . Для этого проведем прямую параллельную оси Oy , снизу вверх, так чтобы эта прямая пересекла область D (Рис. 25б).

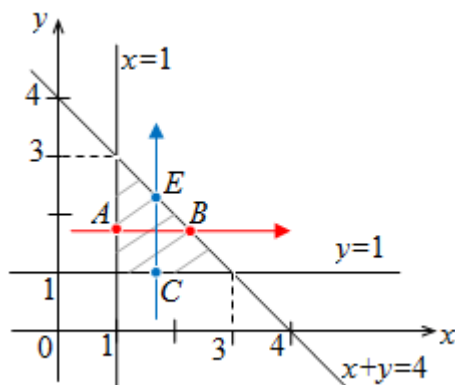


Рис. 25б

Из рисунка 25б видно, что область D является правильной в направлении оси Oy . В этом случае в двукратном интеграле внутреннее

интегрирование производится по переменной y , а внешнее по переменной x . Точка “входа” (на рисунке 1б – это точка C) лежит на прямой $y = 1$, а точка “выхода” (на рисунке 1б – это точка E) лежит на прямой $y + x = 4$. Из уравнения прямой $y + x = 4$ выразим y , получим $y = 4 - x$. Значит, для внутреннего интеграла нижний предел интегрирования $y = 1$, а верхний – $y = 4 - x$. Для нахождения пределов интегрирования внутреннего интеграла спроецируем область D на ось Ox , получим отрезок $[1, 3]$. Получили, что нижний предел интегрирования $x = 1$, верхний – $x = 3$.

$$\text{Поэтому, } \iint_D f(x, y) dx dy = \int_1^3 dx \int_1^{4-x} f(x, y) dy.$$

Итак, получили

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_1^3 dy \int_1^{4-y} f(x, y) dx = \int_1^3 dx \int_1^{4-x} f(x, y) dy.$$

Задание 43. Расставить пределы интегрирования в том и в другом порядке в $\iint_D f(x, y) dx dy$, если область D ограничена линиями: $x = 4$, $y = \frac{x}{2}$, $y = x$.

Решение

Построим область D (рис. 26).

Эта область ограничена прямыми:

1) $x = 4$ – прямая параллельная оси Oy и пересекающая ось Ox в точке $(0; 4)$.

2) $y = \frac{x}{2}$ – прямая. Построим её по двум точкам, для этого воспользуемся таблицей

3) $y = x$ – прямая, являющаяся биссектрисой I и III четверти. Её также можно построить по двум точкам.

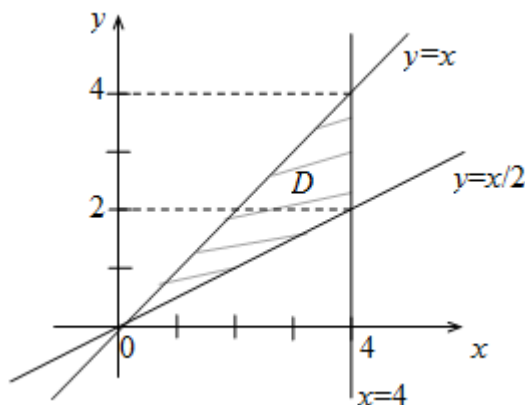


Рис. 26

Расставим пределы интегрирования в $\iint_D f(x, y) dx dy$, в направлении оси Oy . Для этого проведем прямую параллельную оси Oy , снизу вверх, так чтобы эта прямая пересекла область D (Рис. 26а).

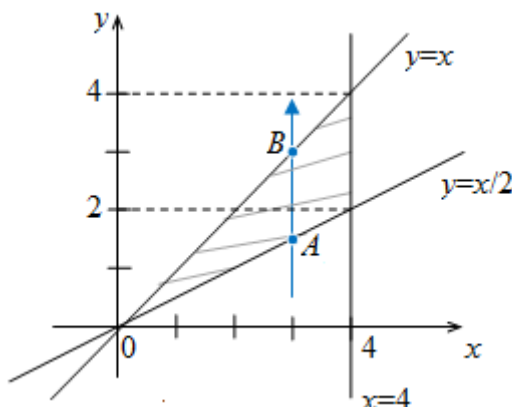


Рис. 26а

Из рисунка 26а видно, что область D является правильной в направлении оси Oy . Точка “входа” (точка A) лежит на прямой $y = \frac{x}{2}$, а точка “выхода” (точка B) лежит на прямой $y = x$. Значит, для внутреннего интеграла нижний предел интегрирования $y = \frac{x}{2}$, а верхний $y = x$. Для нахождения пределов интегрирования внутреннего интеграла спроецируем область D на ось Ox , получим отрезок $[0, 4]$. Получили, что нижний предел интегрирования $x = 0$, верхний $x = 4$.

$$\text{Поэтому, } \iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^4 dx \int_{x/2}^x f(x, y) dy.$$

Изменим порядок интегрирования. Расставим пределы интегрирования в $\iint_D f(x, y) dx dy$, в направлении оси Ox . Для этого проведем прямую параллельную оси Ox , слева на права, так чтобы эта прямая пересекла область D (Рис. 26б). Из рисунка 26б видно, что эта прямая при выходе из области D пересекает разные линии: точка B_1 пересекает прямую $y = \frac{x}{2}$, а точка B_2 — прямую $x = 4$. В этом случае область D необходимо разбить на две области D_1 и D_2 , по прямой $y = 2$ (Рис. 26в). И, следовательно, двойной интеграл будет равен сумме двух повторных: $\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy$. Так как теперь внутренний интеграл будет вычисляться по переменной x , то уравнение линий, ограничивающих каждую из областей слева и справа, должны быть выражены относительно переменной x . Для области D_1 : точка “входа” A_1 лежит на прямой $y = x \Rightarrow x = y$, а точка

“выхода” B_1 – на прямой $y = \frac{x}{2} \Rightarrow x = 2y$. Спроецировав область D_1 на ось Oy , получим отрезок $[0, 2]$.

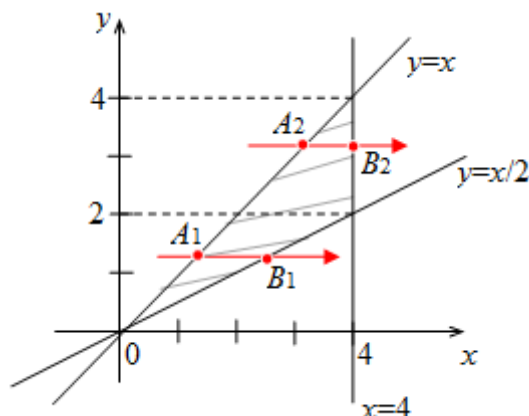


Рис. 26б

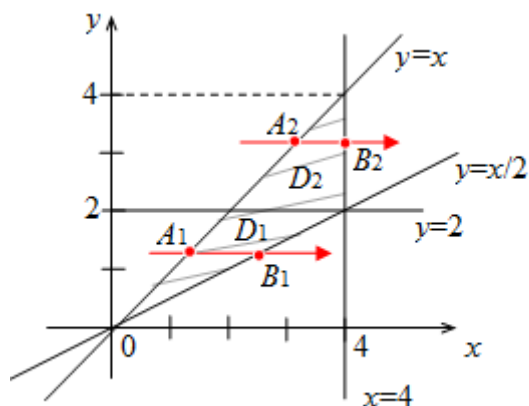


Рис.26в

Для области D_2 : точка “входа” A_2 лежит на прямой $y = x \Rightarrow x = y$, а точка “выхода” B_2 – на прямой $x = 4$. Спроецировав область D_2 на ось Oy , получим отрезок $[2, 4]$.

$$\text{Поэтому, } \iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^2 dy \int_y^{2y} f(x, y) dx + \int_2^4 dy \int_y^4 f(x, y) dx.$$

Итак, получили

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy \\ = \int_0^4 dx \int_{x/2}^x f(x, y) dy = \int_0^2 dy \int_y^{2y} f(x, y) dx + \int_2^4 dy \int_y^4 f(x, y) dx. \end{aligned}$$

Задание 44. Изменить порядок интегрирования $\int_0^1 dx \int_{x^2}^x f(x, y) dy$.

Решение

Восстановим область интегрирования D , пользуясь пределами интегрирования. Область ограничена прямыми: $x = 0$, $x = 1$, $y = x^2$, $y = x$. Построим её (Рис. 27).

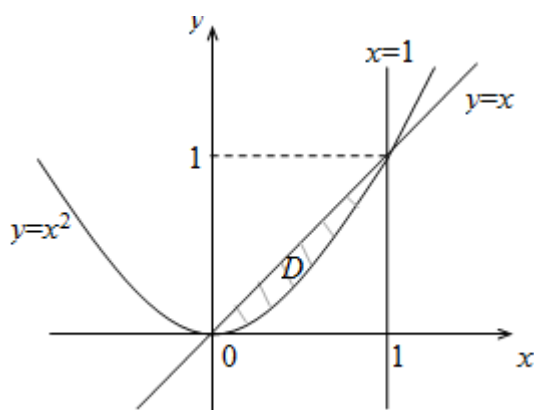


Рис. 27

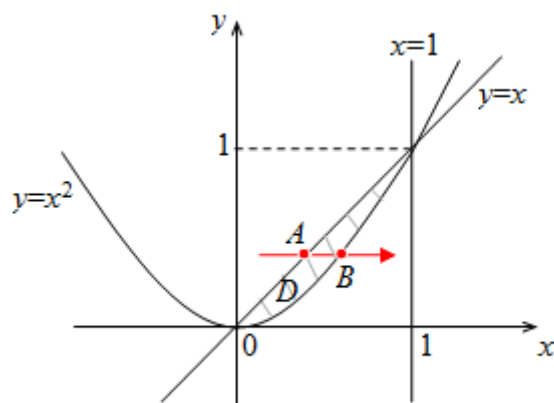


Рис. 27а

Расставим пределы интегрирования в направлении оси Ox . Проведем прямую параллельную оси Ox , так чтобы она пересекла область D (Рис. 27а). Точка “входа” A лежит на прямой $y = x \Rightarrow x = y$. Точка “выхода” B – на прямой $y = x^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{y}$, берём $x = \sqrt{y}$, так как $x \in [0,1]$. Область D проектируется на ось Oy в отрезок $[0,1]$.

Следовательно, $\int_0^1 dx \int_{x^2}^x f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x, y) dx$.

Задание 45. Изменить порядок интегрирования $\int_1^2 dy \int_{1/y}^y f(x, y) dx$

Решение

Восстановим область интегрирования D , пользуясь пределами интегрирования. Область ограничена линиями: $y = 1$, $y = 2$, $x = \frac{1}{y}$, $x = y$. Построим её (рис. 28).

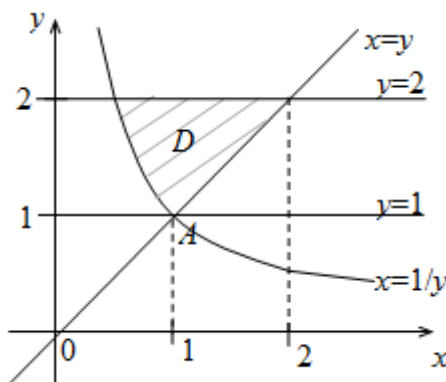


Рис. 28

Найдем точку A пересечения линий: $x = \frac{1}{y}$, $x = y$. Для этого составим и решим систему:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{y}, \\ x = y, \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{y} = y \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1.$$

Подставив $y = 1$ ($y = -1$ не принадлежит области D) в любое уравнение системы получим точку A : $A(1,1)$.

Поменяем порядок интегрирования, то есть интегрировать будем вдоль оси Oy . Прямая $x = 1$ разобьет область D на две правильные области D_1 и D_2 (рис. 28а). Внутренние интегралы будут вычисляться по переменной y , уравнения линий, ограничивающие их, должны быть разрешены относительно y . Спроецировав каждую из областей на ось Ox , получим пределы внешних интегралов.

Рассмотрим область D_1 . Проведем прямую параллельную оси Oy , снизу вверх (рис. 28б). Точка “входа” B лежит на линии $x = \frac{1}{y}$, выразим y : $y = \frac{1}{x}$ (верхний предел интегрирования). Точка “выхода” C лежит на прямой $y = 2$ (нижний предел интегрирования). Проекцией на ось Ox является отрезок $[\frac{1}{2}, 1]$.

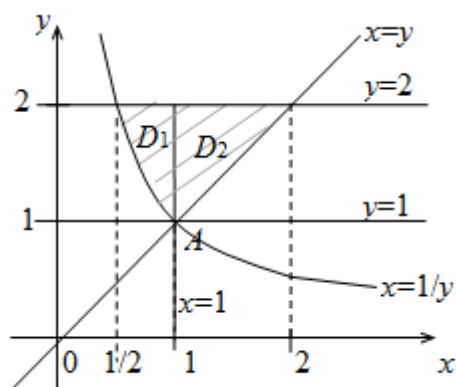


Рис. 28а

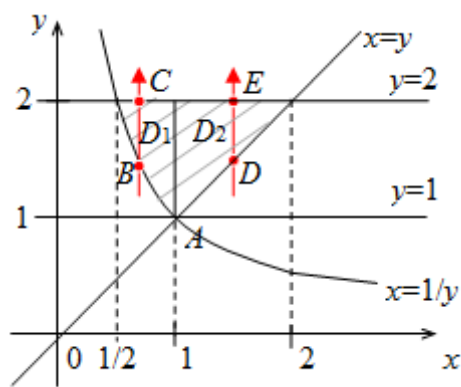


Рис.28б

Рассмотрим область D_2 . Проведем прямую параллельную оси Oy , снизу вверх (Рис. 28б). Точка “входа” D лежит на линии $x = y$, выразим y : $y = x$ (верхний предел интегрирования). Точка “выхода” E лежит на прямой $y = 2$ (нижний предел интегрирования). Проекцией на ось Ox является отрезок $[1, 2]$.

То есть один интеграл заменяется двумя двукратными:

$$\int_1^2 dy \int_{1/y}^y f(x, y) dx = \int_{1/2}^1 dx \int_{1/x}^2 f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_x^2 f(x, y) dy.$$

Задание 46. Изменить порядок интегрирования

$$\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x, y) dy$$

Решение

Востановим область интегрирования D , на которой задана сумма двух двукратных интегралов (Рис. 5). Каждый из этих интегралов задан соответственно на областях D_1 и D_2 , так как $D = D_1 + D_2$. Область D_1 ограничена линиями: $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = x^2$. Область D_2 ограничена

линиями: $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$, $y = 2 - x$. Найдем точку A пересечения линий $y = x^2$ и $y = 2 - x$, для этого составим и решим систему:

$$\begin{cases} y = x^2, \\ y = 2 - x, \end{cases} \Rightarrow x^2 = 2 - x \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0,$$

$$D = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 9, \text{ тогда}$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 1, \\ -2, \end{cases} \quad x = -2 - \text{лишний корень} \Rightarrow x = 1,$$

подставив в первое уравнение системы, получим $y = 1^2 = 1$. Значит, $A(1,1)$.

Из рисунка 29 видно, что в точке A пересекаются три линии: $x = 1$, $y = x^2$, $y = 2 - x$. То есть прямая $x = 1$ является общей границей областей D_1 и D_2 (Рис. 29).

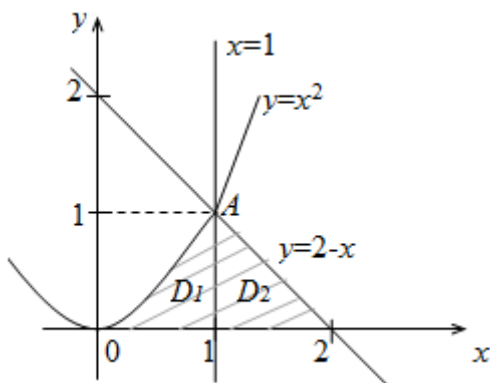


Рис. 29

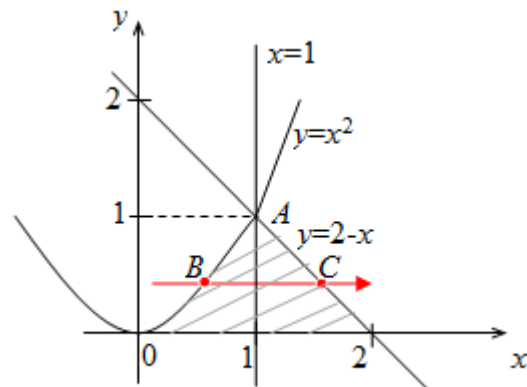


Рис. 29а

Область D правильная в направлении оси Ox . Она проектируется на ось Oy в отрезок $[0,1]$. Значит, внешние пределы интегрирования $y = 0$ и $y = 1$. Проведем прямую, параллельную оси Ox (Рис. 29а). Точка “входа” B лежит на параболе $y = x^2$. Точка “выхода” C лежит на прямой $y = 2 - x$. Внешний предел вычисляется по переменной x и уравнения линий, ограничивающие область D , должны быть разрешены относительно переменной x . Тогда нижний предел внутреннего интеграла $x = \sqrt{y}$ (из уравнения $y = x^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{y}$, нас интересует только $x = \sqrt{y}$, так как в область D входит только правая ветвь параболы). Верхний $x = 2 - y$.

Получили, что

$$\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{2-y} f(x, y) dx.$$

Задание 47. Вычислить двойной интеграл $\iint_D (x^2 - y) dx dy$, если область D ограничена линиями: $x = 0$, $x = 2$, $y = x^2$, $x^2 = y - 3$.

Решение

Построим область D . Линия $x = 0$ – это прямая, совпадающая с осью Oy ; $x = 2$ – прямая, параллельная оси Oy ; $y = x^2$ – парабола, верши вверху, вершина в точке $(0,0)$;

$x^2 = y - 3$ – парабола, верши вверху, вершина в точке $(0,3)$ (Рис. 30).

Расставим пределы интегрирования в заданном двойном интеграле. Область D правильная в направлении оси Oy . Проведем прямую параллельную оси Oy , снизу вверх (Рис. 30а). Точка “входа” A лежит на параболе $y = x^2$ (нижний предел интегрирования). Точка “выхода” B лежит на параболе $x^2 = y - 3$, выразим y : $y = x^2 + 3$ (верхний предел интегрирования). Проекцией на ось Ox является отрезок $[0,2]$.

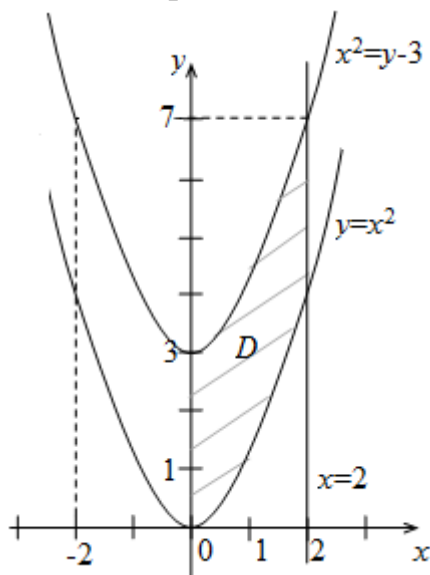


Рис. 30

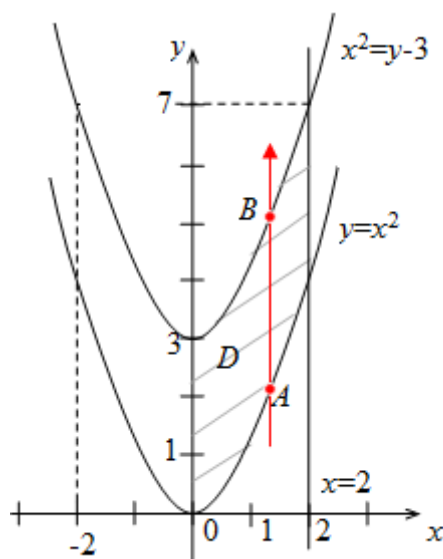


Рис.30а

Заменяем двойной интеграл повторным интегралом. Вычислим сначала внутренний интеграл, затем внешний.

$$\begin{aligned} \iint_D (x^2 - y) dx dy &= \int_0^2 dx \int_{x^2}^{x^2+3} (x^2 - y) dy = \int_0^2 dx \left(x^2 y - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{x^2}^{x^2+3} = \\ &= \int_0^2 dx \left(\left(x^2(x^2 + 3) - \frac{(x^2+3)^2}{2} \right) - \left(x^2 \cdot x^2 - \frac{(x^2)^2}{2} \right) \right) = \\ &= \int_0^2 \left(x^4 - 3x^2 - \frac{1}{2}(x^4 - 6x^2 + 9) - x^4 + \frac{x^4}{2} \right) dx = \end{aligned}$$

$$= \int_0^2 \left(x^4 - -3x^2 - \frac{x^4}{2} + 3x^2 - \frac{9}{2} - x^4 + \frac{x^4}{2} \right) dx = \int_0^2 \left(-\frac{9}{2} \right) dx = \left(-\frac{9}{2}x \right) \Big|_0^2 = -\frac{9}{2}(2 - 0) = -9.$$

Задание 48. Вычислить двойной интеграл $\iint_D (x + y) dx dy$, если область D ограничена линиями: $y = 3$, $y = x$, $y = 2x + 1$.

Решение

Построим область D . Линия $y = 3$ – это прямая, параллельная оси Ox ; $y = x$ – прямая, являющаяся биссектрисой I и III четвертей; $y = 2x + 1$ – прямая, построим её по двум точкам, для этого воспользуемся таблицей.

x	0	1
y	1	3

Найдем точку пересечения прямых $y = x$ и $y = 2x + 1$, для этого составим и решим систему: $\begin{cases} y = x, \\ y = 2x + 1, \end{cases} \Rightarrow x = 2x + 1 \Rightarrow x - 2x = 1 \Rightarrow -x = 1 \Rightarrow x = -1$. Подставим $x = -1$ в первое уравнение системы, получим: $y = -1$. Значит точка пересечения $A(-1, -1)$ (Рис. 31).

Расставим пределы интегрирования в заданном двойном интеграле. Область D правильная в направлении оси Ox . Проведем прямую параллельную оси Ox , слева на право (Рис. 31а). Точка “входа” B лежит на прямой $y = 2x + 1$, выразим x : $x = \frac{y-1}{2}$ (нижний предел интегрирования). Точка “выхода” C лежит на прямой $y = x$ или $x = y$ (верхний предел интегрирования).

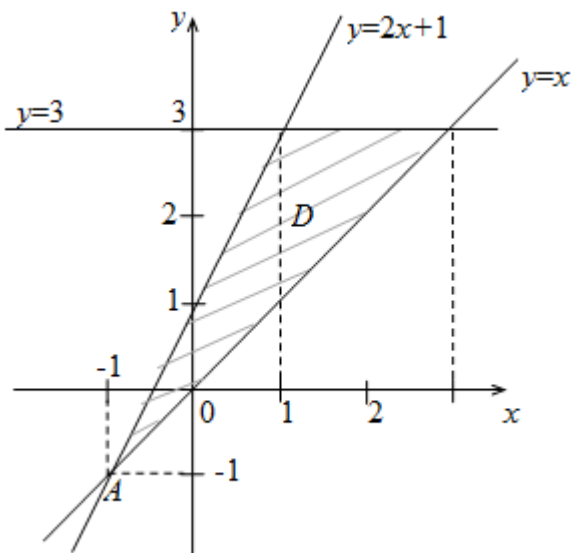


Рис. 31

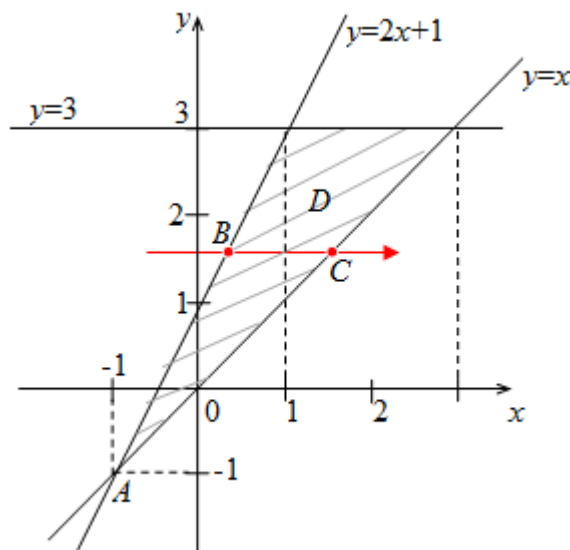


Рис.31а

Проекцией на ось Oy является отрезок $[-1, 3]$.

Заменяем двойной интеграл повторным интегралом. Вычислим сначала внутренний интеграл, затем внешний.

$$\begin{aligned}
\iint_D (x+y) dx dy &= \int_{-1}^3 dy \int_{\frac{y-1}{2}}^{\frac{y-1}{2}} (x+y) dx = \int_{-1}^3 dy \left(\frac{x^2}{2} + yx \right) \Big|_{\frac{y-1}{2}}^{\frac{y-1}{2}} = \\
&= \int_{-1}^3 dy \left(\left(\frac{y^2}{2} + y \cdot y \right) - \left(\frac{\left(\frac{y-1}{2}\right)^2}{2} + y \left(\frac{y-1}{2} \right) \right) \right) = \\
&= \int_{-1}^3 dy \left(\frac{y^2}{2} + y^2 - \frac{(y-1)^2}{8} - \frac{y^2}{2} + \frac{y}{2} \right) = \\
&= \int_{-1}^3 \left(y^2 - \frac{(y-1)^2}{8} + \frac{y}{2} \right) dy = \left(\frac{y^3}{3} - \frac{(y-1)^3}{3 \cdot 8} + \frac{y^2}{2 \cdot 2} \right) \Big|_{-1}^3 = \left(\frac{3^3}{3} - \frac{(3-1)^3}{24} + \frac{3^2}{4} \right) - \\
&\left(\frac{(-1)^3}{3} - \frac{(-1-1)^3}{24} + \frac{(-1)^2}{4} \right) = \left(9 - \frac{2^3}{24} + \frac{9}{4} \right) - \left(-\frac{1}{3} - \frac{(-2)^3}{24} + \frac{1}{4} \right) = \left(9 - \frac{8}{24} + \frac{9}{4} \right) - \\
&\left(-\frac{1}{3} + \frac{8}{24} + \frac{1}{4} \right) = 9 - \frac{1}{3} + \frac{9}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3} + 9 + 2 = \frac{-1+11 \cdot 3}{3} = \frac{32}{3}.
\end{aligned}$$

Итак, $\iint_D (x+y) dx dy = \frac{32}{3}$.

Задание 49. Вычислить площадь фигуры D , ограниченной линиями $x + y = 2$, $y = \frac{x^2}{4} - 1$.

Решение

Площадь фигуры, вычисляется по формуле: $S = \iint_D dx dy$.

Для вычисления двойного интеграла построим область D (Рис. 32).

Расставим пределы интегрирования в двойном интеграле.

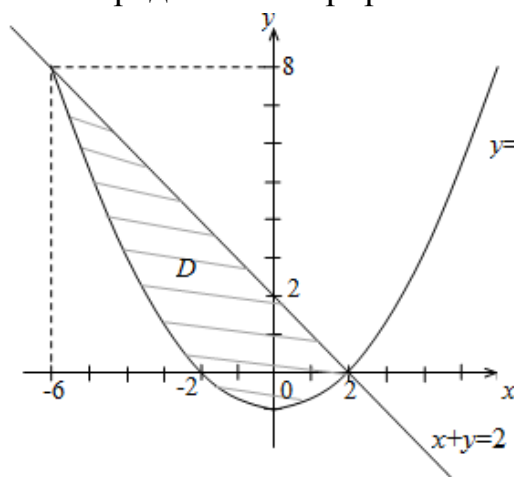


Рис. 32

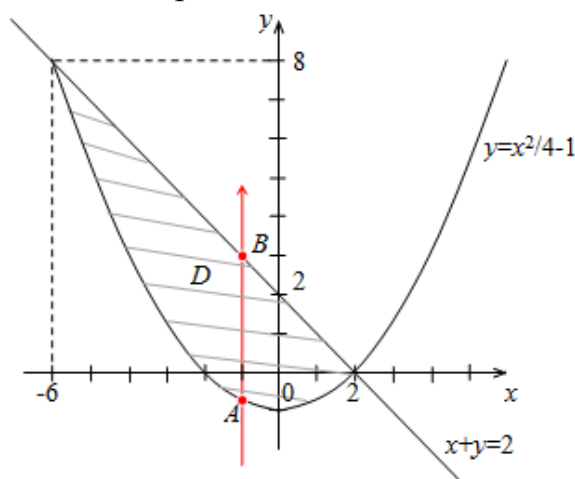


Рис.32а

Область D правильная в направлении оси Oy . Проведем прямую параллельную оси Oy , снизу вверх (Рис. 32а). Точка “входа” A лежит на параболе $y = \frac{x^2}{4} - 1$ (нижний предел интегрирования). Точка “выхода” B лежит на прямой $x + y = 2$, выразим y : $y = 2 - x$ (верхний предел интегрирования).

Найдем проекцию на ось Ox , для этого вычислим точки пересечения прямой $x + y = 2$ и параболы $y = \frac{x^2}{4} - 1$: $\begin{cases} x + y = 2, \\ y = \frac{x^2}{4} - 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 - x, \\ y = \frac{x^2}{4} - 1, \end{cases} \Rightarrow 2 - x = \frac{x^2}{4} - 1, \frac{x^2}{4} + x - 3 = 0 | \cdot 4, \Rightarrow$

$$\Rightarrow x^2 + 4x - 12 = 0, D = 4^2 - 4 \cdot (-12) = 16 + 48 = 64,$$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{-4 \pm 8}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{-4 - 8}{2} = -6, \quad x_2 = \frac{-4 + 8}{2} = 2.$$

Подставим x_1 и x_2 в первое уравнение системы, получим: $y_1 = 2 - x_1 = 2 - (-6) = 8$, $y_2 = 2 - x_2 = 2 - 2 = 0$. Получили две точки пересечения: $(-6; 8)$ и $(2; 0)$.

Значит, проекцией на ось Ox является отрезок $[-6; 2]$.

Итак,

$$\begin{aligned} S &= \iint_D dx dy = \int_{-6}^2 dx \int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} dy = \int_{-6}^2 dx \cdot \left(y \Big|_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} \right) = \int_{-6}^2 dx \cdot \left(2 - x - \left(\frac{x^2}{4} - 1 \right) \right) \\ &= \\ &= \int_{-6}^2 \left(2 - x - \frac{x^2}{4} + 1 \right) dx = \int_{-6}^2 \left(3 - x - \frac{x^2}{4} \right) dx = \left(3x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{12} \right) \Big|_{-6}^2 = \\ &= \left(3 \cdot 2 - \frac{2^2}{2} - \frac{2^3}{12} \right) - \left(3 \cdot (-6) - \frac{(-6)^2}{2} - \frac{(-6)^3}{12} \right) \\ &= \left(6 - 2 - \frac{8}{12} \right) - (-18 - 18 + 18) = \\ &= 4 - \frac{2}{3} + 18 = \frac{4 \cdot 3 - 2 + 18 \cdot 3}{3} = \frac{12 - 2 + 54}{3} = \frac{64}{3}. \end{aligned}$$

Получили, что $S = \frac{64}{3}$.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ

Для упрощения вычисления двойного интеграла часто применяют метод подстановки (как это делалось и при вычислении определенного интеграла), т.е. вводят новые переменные под знаком двойного интеграла.

Определим преобразование независимых переменных x и y (замену переменных) как

$$x = \varphi(x; y) \text{ и } y = \psi(x; y) \quad (32)$$

Если функции (32) имеют в некоторой области D^* плоскости Ouv непрерывные частные производные первого порядка и отличный от нуля определитель

$$I(u; v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad (33)$$

а функция $f(x; y)$ непрерывна в области D , то справедлива формула замены переменных в двойном интеграле:

$$\iint_D f(x; y) dx dy = \iint_{D^*} f(\varphi(u, v); \psi(u, v)) \cdot |I(u; v)| du dv \quad (34)$$

Функциональный определитель (33) называется определителем Якоби или *якобианом* (Г.Якоби – немецкий математик).

Рассмотрим частный случай замены переменных, часто используемый при вычислении двойного интеграла, а именно замену декартовых координат x и y полярными координатами ρ и φ .

В качестве u и v возьмем полярные координаты ρ и φ . Они связаны с декартовыми координатами формулами $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$.

Правые части в этих равенствах - непрерывно дифференцируемые функции. Якобиан преобразования определяется по формуле (33) как

$$I(\rho; \varphi) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{vmatrix} = \rho$$

Формула замены переменных (34) принимает вид:

$$\iint_D f(x; y) dx dy = \iint_{D^*} f(\rho \cos \varphi; \rho \sin \varphi) \cdot \rho d\rho d\varphi \quad (35)$$

где D^* - область в полярной системе координат, соответствующая области D в декартовой системе координат.

Для вычисления двойного интеграла в полярных координатах применяют то же правило сведения его к двукратному интегралу. Так, если область D^* имеет вид, изображенный на рисунке 33, ограничена лучами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$, где $\alpha < \beta$, и кривыми $\rho = \rho_1(\varphi)$ и $\rho = \rho_2(\varphi)$, где $\rho_1(\varphi) \leq \rho_2(\varphi)$, т. е. область D^* правильная: луч, выходящий из полюса, пересекает ее границу не более чем в двух точках, то правую часть формулы (35) можно записать в виде

$$\iint_{D^*} \rho \cdot f(\rho \cos \varphi; \rho \sin \varphi) d\rho d\varphi = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} \rho \cdot f(\rho \cos \varphi; \rho \sin \varphi) d\rho \quad (36)$$

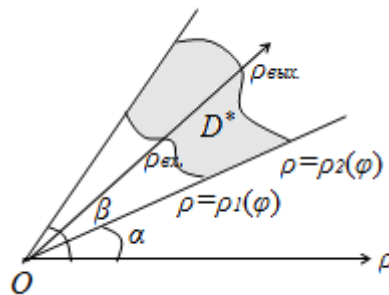


Рис. 33

Внутренний интеграл берется при постоянном φ .

Замечания.

1. Переход к полярным координатам удобен, когда подынтегральная функция имеет вид $f(x^2 + y^2)$ или область D представляет собой круг (часть круга) или кольцо (часть кольца).

2. На практике переход к полярным координатам осуществляется путем замены $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, $dxdy = \rho d\rho d\varphi$, уравнения линий, ограничивающих область D , также преобразуется к полярным координатам.

Задание 50. Вычислить двойной интеграл $\iint_D \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi$, где область D ограничена окружностями $\rho = 2$ и $\rho = 4 \sin \varphi$ (вне окружности $\rho = 2$).

Решение

Построим область D .

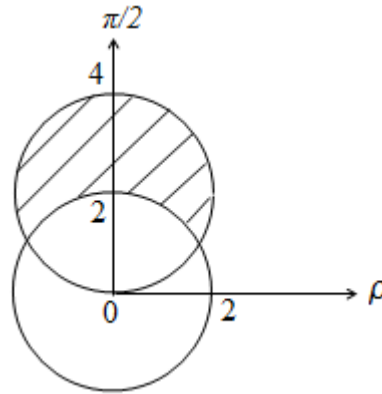


Рис. 34

Определим как изменяется полярный угол φ в области D , для этого проведем из полюса прямые проходящие через точки пересечения заданных окружностей (точки A и B , см. рис. 34 а). Решая совместно уравнения $\rho = 2$ и $\rho = 4\sin\varphi$, найдем значения угла φ , соответствующие лучам OA и OB :

$$\begin{cases} \rho = 2, \\ \rho = 4\sin\varphi, \end{cases} \Rightarrow 4\sin\varphi = 2 \Rightarrow \sin\varphi = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi_1 = \frac{\pi}{6}, \varphi_2 = \frac{5\pi}{6}.$$

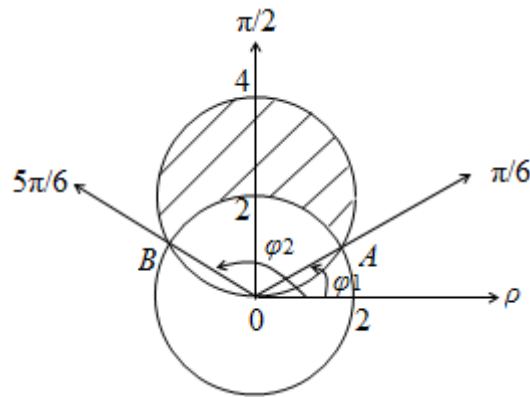


Рис. 34 а

Для определения пределов интегрирования полярного радиуса в области D , проведем из полюса луч OD под произвольным углом φ , где $\frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{6}$ (рис. 34б). Луч пересекает контур области в точке C , лежащей на окружности $\rho = 2$, и в точке D , лежащей на окружности $\rho = 4\sin\varphi$.

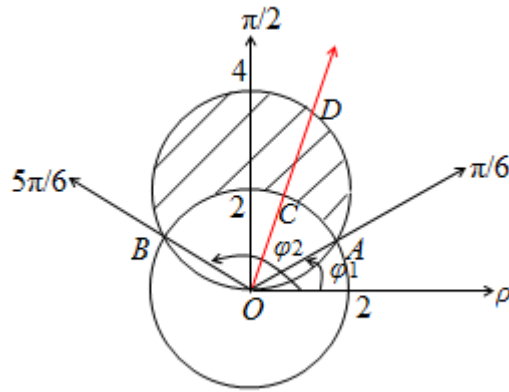


Рис. 346

Запишем двойной интеграл повторным:

$$\begin{aligned}
 \iint_D \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \sin \varphi d\varphi \int_2^{4 \sin \varphi} \rho^2 d\rho = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \sin \varphi d\varphi \left(\frac{\rho^3}{3} \Big|_2^{4 \sin \varphi} \right) = \\
 &= \frac{1}{3} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \sin \varphi (64 \sin^3 \varphi - 8) d\varphi = \frac{64}{3} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \sin^4 \varphi d\varphi - \frac{8}{3} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \sin \varphi d\varphi = \\
 &= \frac{64}{3} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} (\sin^2 \varphi)^2 d\varphi - \frac{8}{3} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \sin \varphi d\varphi = \frac{64}{3} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \left(\frac{1 - \cos 2\varphi}{2} \right)^2 d\varphi - \frac{8}{3} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \sin \varphi d\varphi = \\
 &= \frac{64}{3 \cdot 4} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} (1 - \cos 2\varphi)^2 d\varphi - \frac{8}{3} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \sin \varphi d\varphi = \frac{16}{3} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} (1 - 2\cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi) d\varphi + \\
 &+ \frac{8}{3} \cos \varphi \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} = \frac{16}{3} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \left(1 - 2\cos 2\varphi + \frac{1 + \cos 4\varphi}{2} \right) d\varphi + \frac{8}{3} \cos \varphi \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{8}{3} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} (3 - 4\cos 2\varphi + \cos 4\varphi) d\varphi + \frac{8}{3} \cos \varphi \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} = \\
&= \frac{8}{3} \left(3\varphi - 2\sin 2\varphi + \frac{\sin 4\varphi}{4} + \cos \varphi \right) \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} = \frac{8}{12} (\pi + 3\sqrt{3}).
\end{aligned}$$

Задание 51. Вычислить двойной интеграл $\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy$, если область D ограничена неравенствами $x^2 + y^2 \leq 1$, $y \geq \frac{\sqrt{3}}{3}x$, $y \leq \sqrt{3}x$, $x \geq 0$.

Решение

Построим область D .

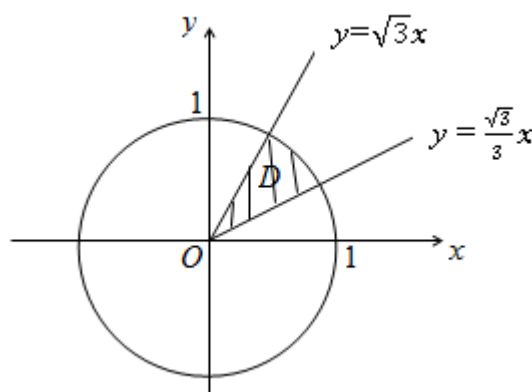


Рис. 35

Так как область D представляет собой часть окружности, то для вычисления двойного интеграла удобнее перейти в полярную систему координат, используя формулы:

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos \varphi, \\ y = \rho \cdot \sin \varphi, \\ dx dy = \rho d\rho d\varphi. \end{cases}$$

Переведем все линии, которыми ограничена область D , в полярную систему координат:

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x \Rightarrow \rho \sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{3} \rho \cos \varphi | : \cos \varphi : \rho \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6};$$

$$y = \sqrt{3}x \Rightarrow \rho \sin \varphi = \sqrt{3} \rho \cos \varphi | : \cos \varphi : \rho \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi = \sqrt{3} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3};$$

$$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow \rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi = 1 \Rightarrow \rho^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho^2 = 1 \Rightarrow \rho = 1, \text{ т.к. } \rho \geq 0.$$

Итак, получили, что $\frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$. Для получения пределов интегрирования полярного радиуса в области D , проведем из полюса луч OD под произвольным углом φ , где $\frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$ (рис. 35а). Луч пересекает контур области в точке C , лежащей на окружности $\rho = 1$.

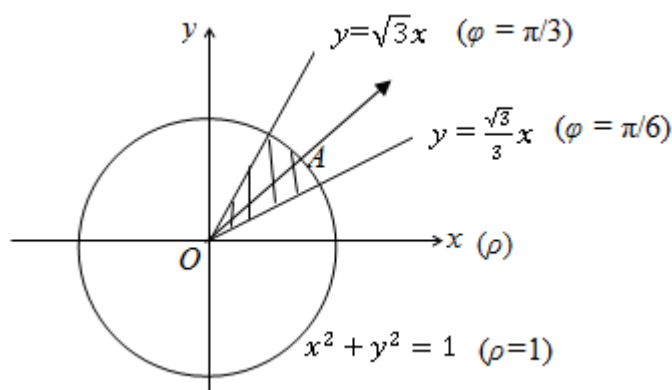


Рис. 35а

Запишем двойной интеграл повторным:

$$\iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2} dx dy = \iint_D \sqrt{1 - \rho^2} \rho d\rho d\varphi = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1 - \rho^2} \rho d\rho =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{Замена} \\ 1 - \rho^2 = t \Rightarrow dt = -2\rho d\rho \Rightarrow \rho d\rho = -\frac{1}{2} dt \\ \rho_1 = 0 \Rightarrow t_1 = 1, \\ \rho_2 = 1 \Rightarrow t_2 = 0. \end{array} \right| = -\frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_1^0 \sqrt{t} dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_0^1 \sqrt{t} dt = \frac{1}{2} \cdot \varphi \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cdot \frac{2t^{\frac{3}{2}}}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\pi}{18}.$$

ПРИЛОЖЕНИЯ ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА

1) Объем цилиндрического тела

$$V = \iint_D f(x, y) dx dy$$

где $z = f(x, y)$ – уравнение поверхности, ограничивающей тело сверху.

2) Площадь плоской фигуры в декартовых координатах

$$S = \iint_D dx dy$$

Площадь плоской фигуры в полярных координатах

$$S = \iint_D \rho d\rho d\varphi$$

3) Масса плоской фигуры

$$m = \iint_D \gamma(x, y) dx dy$$

где $\gamma = \gamma(x, y)$ – плотность пластинки D

4) Статические моменты плоской фигуры D и относительно осей Ox и Oy

$$S_x = \iint_D y \cdot \gamma(x, y) dx dy \quad S_y = \iint_D x \cdot \gamma(x, y) dx dy$$

и координаты центра тяжести плоской фигуры D

$$x_c = \frac{S_y}{m} \quad y_c = \frac{S_x}{m}$$

5) Моменты инерции плоской фигуры

Моментом инерции материальной точки массы m относительно оси l называется произведение массы m на квадрат расстояния d точки до оси, т.е. $M_l = m \cdot d^2$. Моменты инерции плоской фигуры относительно осей Ox и Oy могут быть вычислены по формулам

$$M_x = \iint_D y^2 \cdot \gamma(x, y) dx dy \quad M_y = \iint_D x^2 \cdot \gamma(x, y) dx dy$$

Момент инерции фигуры относительно начала координат: $M_O = M_x + M_y$

6) Площадь поверхности

Если поверхность S задана уравнением $z = z(x, y)$, а ее проекция на плоскость Oxy есть область D , в которой $z(x, y)$, $z'_x(x, y)$, $z'_y(x, y)$ – непрерывные функции, то ее площадь S вычисляется по формуле

$$S = \iint_S ds = \iint_D \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy$$

Задание 52. Найти координаты центра тяжести области D , ограниченной линиями $y = x^2 + 2$, $y = x$, $x = 0$, $x = 2$. Плотность в каждой точке равна абсциссе точки.

Решение

Координаты центра тяжести плоской фигуры D находим по формулам

$$x_c = \frac{S_y}{m} \quad y_c = \frac{S_x}{m}$$

где S_x , S_y – статические моменты плоской фигуры D относительно осей Ox и Oy .

$$S_x = \iint_D y \cdot \gamma(x, y) dx dy \quad S_y = \iint_D x \cdot \gamma(x, y) dx dy$$

m – масса этой области

$$m = \iint_D \gamma(x, y) dx dy$$

$\gamma(x, y)$ – плотность, в нашем случае, плотность в каждой точке равна абсциссе точки, т.е. $\gamma(x, y) = x$.

Построим область D (рис.36)

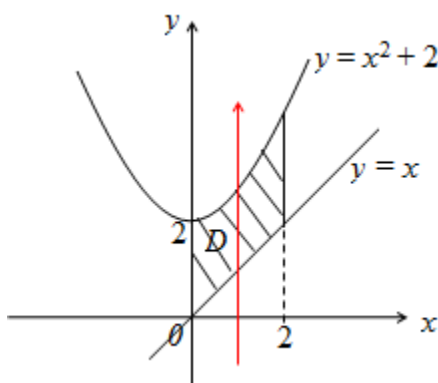


Рис. 36

Найдем массу области D

$$\begin{aligned}
m &= \iint_D \gamma(x, y) dx dy = \iint_D x dx dy = \int_0^2 dx \int_x^{x^2+2} x dy = \int_0^2 dx (xy)|_x^{x^2+2} = \\
&= \int_0^2 (x(x^2 + 2) - x \cdot x) dx = \int_0^2 (x^3 + 2x - x^2) dx = \left(\frac{x^4}{4} + 2 \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^2 = \\
&= 4 + 4 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3}
\end{aligned}$$

Найдем статические моменты

$$\begin{aligned}
S_y &= \iint_D x \cdot \gamma(x, y) dx dy = \iint_D x \cdot x dx dy = \int_0^2 dx \int_x^{x^2+2} x^2 dy = \\
&= \int_0^2 dx (x^2 y)|_x^{x^2+2} = \int_0^2 (x^2(x^2 + 2) - x^2 \cdot x) dx = \int_0^2 (x^4 + 2x^2 - x^3) dx = \\
&= \left(\frac{x^5}{5} + 2 \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^2 = \frac{32}{5} + \frac{16}{3} - 4 = \frac{116}{15}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_x &= \iint_D y \cdot \gamma(x, y) dx dy = \iint_D y \cdot x dx dy = \int_0^2 dx \int_x^{x^2+2} xy dy = \\
&= \int_0^2 dx \left(x \cdot \frac{y^2}{2} \right) \Big|_x^{x^2+2} = \int_0^2 \left(x \frac{(x^2 + 2)^2}{2} - x \cdot \frac{x^2}{2} \right) dx = \\
&= \frac{1}{2} \int_0^2 (x^5 + 4x^3 + 4x - x^3) dx = \frac{1}{2} \left(\frac{x^6}{6} + 3 \cdot \frac{x^4}{4} + 4 \cdot \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^2 = \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{64}{6} + \frac{48}{3} + 8 \right) = \frac{208}{12} = \frac{52}{3}
\end{aligned}$$

Координаты центра тяжести плоской фигуры D находим по формулам

$$x_c = \frac{S_y}{m} = \frac{116}{15} \cdot \frac{3}{16} = 1,45 \quad y_c = \frac{S_x}{m} = \frac{52}{3} \cdot \frac{3}{16} = 3,25$$

ТРОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ, СВОЙСТВА

Обобщением определенного интеграла на случай функции трех переменных является так называемый «тройной интеграл».

Теория тройного интеграла аналогична теории двойного интеграла, поэтому изложим ее в несколько сокращенном виде.

Пусть в замкнутой области V пространства $Oxyz$ задана непрерывная функция $u = f(x, y, z)$. Разбив область V сеткой поверхностей на n частей V_i ($i = \overline{1, n}$) и выбрав в каждой из них произвольную точку $M_i(x_i; y_i; z_i)$, составим интегральную сумму $\sum_{i=1}^n f(x_i; y_i; z_i) \Delta V_i$ для функции $f(x, y, z)$ по области V (ΔV_i - объем элементарной области V_i).

Если предел интегральной суммы существует при неограниченном увеличении числа n таким образом, что каждая «элементарная область» V_i стягивается в точку (т.е. диаметр области d_i стремится к нулю, $d_i \rightarrow 0$), то его называют тройным интегралом от функции $u = f(x, y, z)$ по области V и обозначают

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ (\max d_i \rightarrow 0)}} \sum_{i=1}^n f(x_i; y_i; z_i) \Delta V_i \quad (37)$$

$dx dy dz = dv$ – элемент объема.

Теорема 9 (существования). Если функция $u = f(x, y, z)$ непрерывна в ограниченной замкнутой области V , то предел интегральной суммы (37) при $n \rightarrow \infty$ ($\max d_i \rightarrow 0$) существует и не зависит ни от способа разбиения области V на части, ни от выбора точек $M_i(x_i; y_i; z_i)$ в них.

Тройной интеграл обладает теми же свойствами, что и двойной интеграл.

1) $\iiint_V c \cdot f(x, y, z) dv = c \cdot \iiint_V f(x, y, z) dv$, $c = \text{const}$.

2) $\iiint_V (f(x, y, z) \pm g(x, y, z)) dv = \iiint_V f(x, y, z) dv \pm \iiint_V g(x, y, z) dv$

3) $\iiint_V f(x, y, z) dv = \iiint_{V_1} f(x, y, z) dv + \iiint_{V_2} f(x, y, z) dv$, если

$V = V_1 \cup V_2$, а пересечение V_1 и V_2 состоит из границы, их разделяющей.

4) Если в области V функция $f(x, y, z) \geq 0$, то и $\iiint_V f(x, y, z) dv \geq 0$.

Если в области интегрирования $f(x, y, z) \geq \varphi(x, y, z)$, то и $\iiint_V f(x, y, z) dv \geq \iiint_V \varphi(x, y, z) dv$.

5) Объем тела $V = \iiint_V dv$

ВЫЧИСЛЕНИЕ ТРОЙНОГО ИНТЕГРАЛА В ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТАХ

В декартовых координатах вычисление тройного интеграла сводится к последовательному вычислению трех определенных интегралов.

Пусть областью интегрирования V является тело, ограниченное сверху поверхностью $z = z_1(x; y)$, сверху – поверхностью $z = z_2(x; y)$, причем $z_1(x; y)$ и $z_2(x; y)$ ($z_1(x; y) \leq z_2(x; y)$) непрерывные функции в замкнутой области D , являющейся проекцией тела на плоскость Oxy (рис.34). Будем считать область V правильной в направлении оси Oz : любая прямая, параллельная оси Oz , пересекает границу области не более чем в двух точках. Тогда для любой непрерывной в области V функции $f(x, y, z)$ имеет место формула (38), сводящая вычисление тройного интеграла к вычислению двойного интеграла от однократного. При этом сначала вычисляется внутренний интеграл по переменной z при постоянных x и y в пределах изменения z .

$$\iiint_V f(x, y, z) dv = \iint_D \left(\int_{z_1(x; y)}^{z_2(x; y)} f(x, y, z) dz \right) \quad (38)$$

Нижней границей интеграла является аппликата точки A – точки входа прямой, параллельной оси Oz в область V , т.е. $z = z_1(x; y)$; верхней границей – аппликата точки B – точки выхода прямой из области V , т.е. $z = z_2(x; y)$ (рис.37). Результат вычисления этого интеграла есть функция двух переменных x и y .

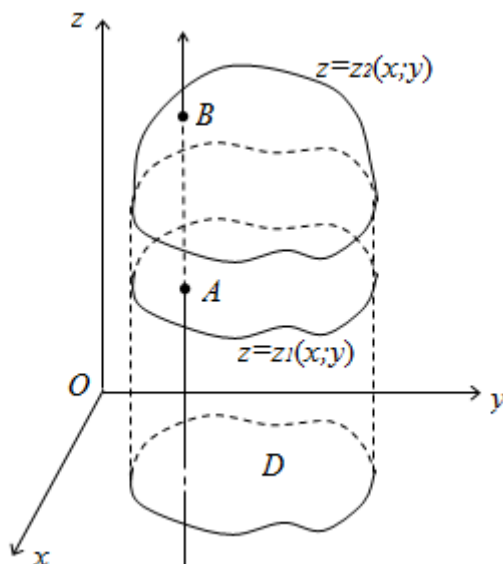


Рис. 37

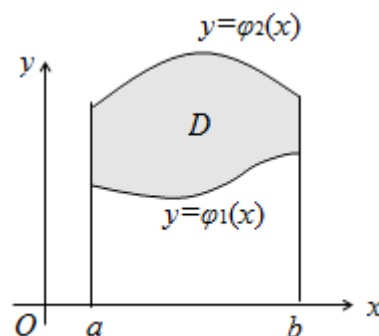


Рис.38

Если область D ограничена линиями $x = a$, $x = b$ ($a < b$), $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$, где $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ – непрерывные на отрезке $[a; b]$ функции, причем $\varphi_1(x) < \varphi_2(x)$ (рис. 38), то, переходя от двойного интеграла по области D к

повторному, получаем формулу, по которой вычисляется тройной интеграл в декартовых координатах.

$$\iiint_V f(x, y, z) dv = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int_{z_1(x; y)}^{z_2(x; y)} f(x, y, z) dz \quad (39)$$

Замечания.

1) Если область V более сложная, чем рассмотренная, то ее следует разбить на конечное число таких областей (правильных), к которым можно применить формулу (39).

2) Порядок интегрирования формуле (39), при определенных условиях, может быть иным.

Задание 53. Вычислить тройной интеграл $\iiint_R x dv$, где тело R ограничено плоскостями: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $y = 3$, $x + z = 2$.

Решение

Тело R , ограниченное данными плоскостями, является призмой и изображено на рис. 39а. Прямая, параллельная оси Oz , пересекает тело в двух точках. Точка «входа» лежит на плоскости $z = 0$, а точка «выхода» - на плоскости $z = 2 - x$. Проекцией этого тела на плоскость XOY является область D - прямоугольник (рис. 39б). Прямая, параллельная оси Oy , пересекает область D в двух точках, точка «входа» лежит на прямой $y = 0$, точка «выхода» - на прямой $y = 3$. Проекцией области D на ось Ox является отрезок $[0; 2]$.

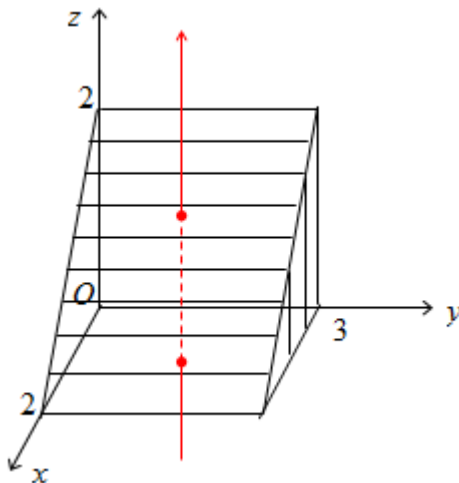


Рис.39а

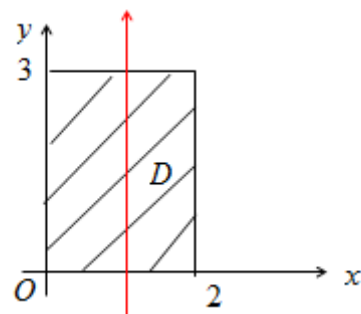


Рис.39б

Запишем тройной интеграл в виде повторного, вычисления начинаем с внутреннего интеграла.

$$\begin{aligned}\iiint_R x dv &= \int_0^2 dx \int_0^3 dy \int_0^{2-x} x dz = \int_0^2 x dx \int_0^3 dy (z|_0^{2-x}) = \int_0^2 x dx \int_0^3 (2-x) dy = \\ &= \int_0^2 x(2-x) dx \int_0^3 dy = \int_0^2 (2x - x^2) dx \cdot (y|_0^3) = 3 \left(\frac{2x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^2 = 4.\end{aligned}$$

Задание 54. Вычислить тройной интеграл $\iiint_R y dx dy dz$, где тело R ограничено плоскостями $x + y + z = 4$, $x = 2$, $y = 2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Решение

Тело R , ограниченное данными плоскостями, изображено на рис. 40а. Прямая, параллельная оси Oz , пересекает тело в двух точках. Точка «входа» лежит на плоскости $z = 0$, а точка «выхода» - на плоскости $z = 4 - x - y$. Проекцией этого тела на плоскость XOY является область D - квадрат (рис. 40б). Прямая, параллельная оси Oy , пересекает область D в двух точках, точка «входа» лежит на прямой $y = 0$, точка «выхода» - на прямой $y = 2$. Проекцией области D на ось Ox является отрезок $[0; 2]$.

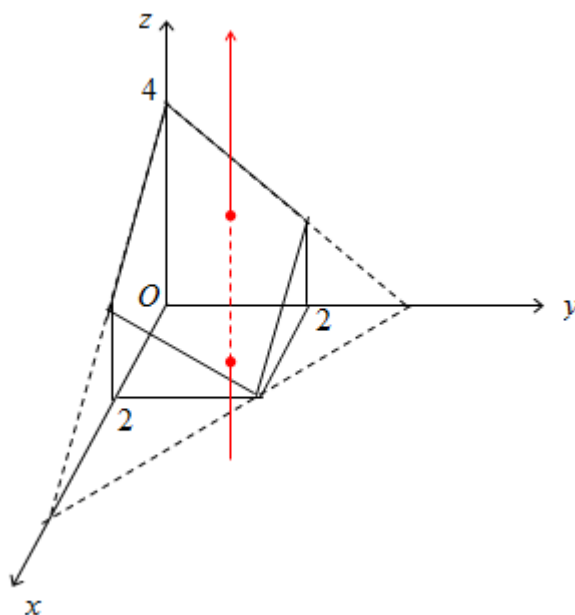


Рис.40а

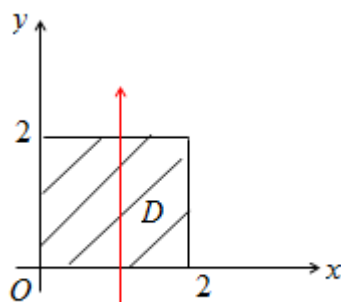


Рис. 40б

Запишем тройной интеграл в виде повторного, вычисления начинаем с внутреннего интеграла.

$$\begin{aligned}
 \iiint_R y dv &= \int_0^2 dx \int_0^2 y dy \int_0^{4-x-y} dz = \\
 &= \int_0^2 dx \int_0^2 y dy (z|_0^{4-x-y}) = \int_0^2 dx \int_0^2 y(4-x-y) dy = \int_0^2 dx \int_0^2 ((4-x)y - y^2) dy \\
 &= \int_0^2 \left((4-x) \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^2 dx = \int_0^2 \left(2(4-x) - \frac{8}{3} \right) dx = 2 \left(4x - \frac{x^2}{2} \right) - \frac{8}{3} x \Big|_0^2 = \frac{20}{3}
 \end{aligned}$$

ВЫЧИСЛЕНИЕ ТРОЙНОГО ИНТЕГРАЛА В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

В тех случаях, когда область D – круг или его часть, тройной интеграл удобнее вычислять в цилиндрических координатах.

Цилиндрическая система координат в пространстве представляет собой объединение полярных координат на плоскости и аппликаты z (рис.42): (ρ, φ, z) , где $0 \leq \rho \leq +\infty$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $-\infty < z < +\infty$.

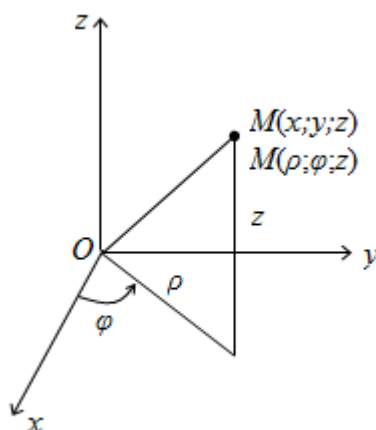


Рис.42

Декартовы и цилиндрические координаты связаны следующими формулами:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = z \end{cases} \quad (40)$$

Элемент объема

$$dv = \rho d\rho d\varphi dz \quad (41)$$

При вычислении в цилиндрических координатах, тройной интеграл заменяется трехкратным интегралом по формуле

$$\iiint_V f(\rho, \varphi, z) \rho d\rho d\varphi dz = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} \rho d\rho \int_{z_1(\rho, \varphi)}^{z_2(\rho, \varphi)} f(\rho, \varphi, z) dz \quad (42)$$

Здесь $z = z_1(\rho, \varphi)$ и $z = z_2(\rho, \varphi)$ – уравнения нижней и верхней поверхностей, ограничивающих тело V , а $\rho = \rho_1(\varphi)$, $\rho = \rho_2(\varphi)$, $\varphi = \varphi_1$, $\varphi = \varphi_2$ – уравнения границ области D , являющейся проекцией тела V на плоскость $O\rho\varphi$ (или на координатную плоскость Oxy).

Если интеграл первоначально задан в декартовых координатах, то переход к интегралу в цилиндрических координатах проводится по формуле

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_V f(\rho \cos \varphi; \rho \sin \varphi; z) \rho d\rho d\varphi dz \quad (43)$$

Задание 55. Вычислить тройной интеграл $\iiint_R \frac{y dv}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, где тело R ограничено поверхностями $x^2 + y^2 = 4$, $y + z = 2$, $y = x$, $x = 0$, $z = 0$.

Решение

Тело R , ограниченное цилиндром $x^2 + y^2 = 4$ и плоскостями $y + z = 2$, $y = x$, $x = 0$, $z = 0$, изображено на рис. 41а. Прямая, параллельная оси Oz , пересекает тело в двух точках. Точка «входа» лежит на плоскости $z = 0$, а точка «выхода» – на плоскости $z = 2 - y$. Проекцией этого тела на плоскость HOY является область D – сектор (рис. 41б). Поэтому удобнее данный тройной интеграл вычислять в цилиндрических координатах. Прямая, выходящая из полюса O , пересекает область D в двух точках $\rho = 0$ и $\rho = 1$. Угол φ изменяется от $\frac{\pi}{4}$ до $\frac{\pi}{2}$ (рис. 41б).

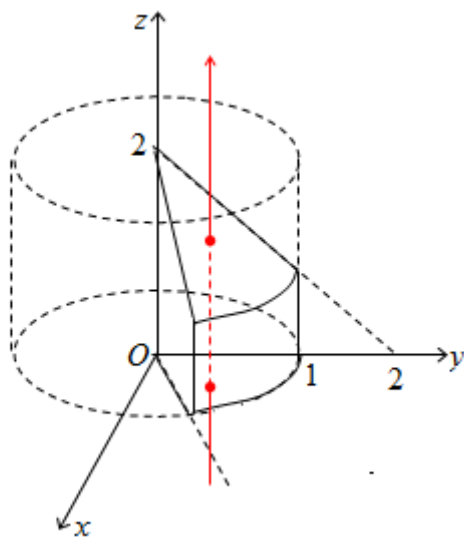


Рис.41а

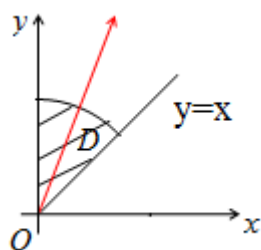


Рис.41б

Запишем тройной интеграл в виде повторного в цилиндрических координатах, вычисления начинаем с внутреннего интеграла.

$$\begin{aligned}
 & \iiint_R \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy dz = \\
 & = \iiint_R \frac{\rho \sin \varphi}{\sqrt{\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi}} \rho d\rho d\varphi dz = \iiint_R \rho \sin \varphi d\rho d\varphi dz = \\
 & = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin \varphi d\varphi \int_0^1 \rho d\rho \int_0^{2-\rho \sin \varphi} dz = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin \varphi d\varphi \int_0^1 \rho d\rho (z|_0^{2-\rho \sin \varphi}) = \\
 & = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin \varphi d\varphi \int_0^1 \rho (2 - \rho \sin \varphi) d\rho = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin \varphi d\varphi \int_0^1 (2\rho - \rho^2 \sin \varphi) d\rho =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin\varphi d\varphi \left(2\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^3}{3} \sin\varphi \right) \Big|_0^1 = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin\varphi \left(1 - \frac{1}{3} \sin\varphi \right) d\varphi = \\
&= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \left(\sin\varphi - \frac{1}{3} \sin^2\varphi \right) d\varphi = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \left(\sin\varphi - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} (1 - \cos 2\varphi) \right) d\varphi = \\
&= \left(-\cos\varphi - \frac{1}{6}\varphi + \frac{1}{12} \sin 2\varphi \right) \Big|_{\pi/4}^{\pi/2} = \\
&= \left(-\cos \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} + \frac{1}{12} \sin \pi \right) - \left(-\cos \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{24} + \frac{1}{12} \sin \frac{\pi}{2} \right) = \\
&= -\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{24} - \frac{1}{12} = -\frac{1}{12} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{24} \approx 0,493
\end{aligned}$$

ПРИЛОЖЕНИЯ ТРОЙНОГО ИНТЕГРАЛА

1) Объем тела

$$V = \iiint_V dv = \iiint_V dx dy dz = \iiint_V \rho d\rho d\varphi dz$$

2) Масса тела

$$m = \iiint_V \gamma(x, y, z) dx dy dz$$

где $\gamma(x, y, z)$ - объемная плотность распределения массы в точке $M(x, y, z)$

3) Статические моменты

Моменты S_{xy} , S_{yz} , S_{xz} относительно координатных плоскостей Oxy , Oyz , Oxz вычисляются по формулам

$$S_{xy} = \iiint_V z \cdot \gamma(x, y, z) dv$$

$$S_{yz} = \iiint_V x \cdot \gamma(x, y, z) dv$$

$$S_{xz} = \iiint_V y \cdot \gamma(x, y, z) dv$$

4) Центр тяжести

Координаты центра тяжести тела V находятся по формулам

$$x_c = \frac{S_{yz}}{m}, \quad y_c = \frac{S_{xz}}{m}, \quad z_c = \frac{S_{xy}}{m}$$

5) Момент инерции тела

Моменты инерции тела относительно координатных плоскостей вычисляются по формулам

$$I_{xy} = \iiint_V z^2 \cdot \gamma(x, y, z) dv$$

$$I_{yz} = \iiint_V x^2 \cdot \gamma(x, y, z) dv$$

$$I_{xz} = \iiint_V y^2 \cdot \gamma(x, y, z) dv$$

Моменты инерции относительно координатных осей:

$$I_x = \iiint_V (y^2 + z^2) \cdot \gamma(x, y, z) dv$$

$$I_y = \iiint_V (x^2 + z^2) \cdot \gamma(x, y, z) dv$$

$$I_z = \iiint_V (x^2 + y^2) \cdot \gamma(x, y, z) dv$$

Задание 56. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z = \frac{y^2}{2}$, $3x + 4y = 12$, $x = 0$, $z = 0$.

Решение

Объем тела вычисляется по формуле

$$V = \iiint_V dv = \iiint_V dx dy dz$$

Тело R , ограниченное параболическим цилиндром $z = \frac{y^2}{2}$ и плоскостями $3x + 4y = 12$, $x = 0$, $z = 0$, изображено на рис. 42а. Прямая, параллельная оси Oz , пересекает тело в двух точках. Точка «входа» лежит на плоскости $z = 0$, а точка «выхода» - на поверхности $z = \frac{y^2}{2}$. Проекцией этого тела на плоскость HOY является область D - треугольник (рис. 42б). Прямая, параллельная оси Oy , пересекает область D в двух точках, точка «входа» лежит на прямой $y = 0$, точка «выхода» - на прямой $y = 3 - \frac{3}{4}x$. Проекцией области D на ось Ox является отрезок $[0; 3]$.

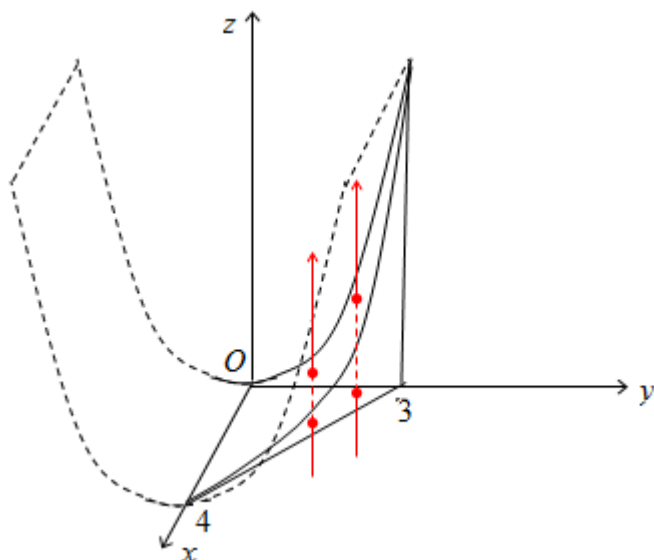


Рис.42а

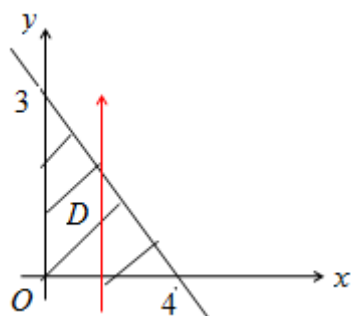


Рис.42б

$$\begin{aligned}
 V &= \iiint_R dx dy dz = \int_0^4 dx \int_0^{3-\frac{3}{4}x} dy \int_0^{\frac{y^2}{2}} dz = \int_0^4 dx \int_0^{3-\frac{3}{4}x} dy \left(z \Big|_0^{\frac{y^2}{2}} \right) = \\
 &= \int_0^4 dx \int_0^{3-\frac{3}{4}x} \frac{y^2}{2} dy = \int_0^4 dx \left(\frac{y^3}{6} \Big|_0^{3-\frac{3}{4}x} \right) = \frac{1}{6} \int_0^4 \left(3 - \frac{3}{4}x \right)^3 dx =
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) \frac{\left(3 - \frac{3}{4}x\right)^4}{4} \Big|_0^4 = -\frac{1}{18} \left(3 - \frac{3}{4} \cdot 4\right)^4 + \frac{1}{18} \left(3 - \frac{3}{4} \cdot 0\right)^4 = 0 + \frac{1}{18} \cdot 3^4 = \frac{9}{2}$$

Таким образом, объем равен 4,5 (куб.ед.)

Задание 57. Вычислить массу однородного тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 = 4$, $y + z = 2$, $y - z = 2$.

Решение

Масса тела вычисляется по формуле

$$m = \iiint_R \gamma(x, y, z) dx dy dz$$

Так как тело однородное, то плотность $\gamma(x, y, z) = 1$.

Тело R , ограниченное цилиндром $x^2 + y^2 = 4$ и плоскостями $y + z = 2$, $y - z = 2$, изображено на рис. 43а. Прямая, параллельная оси Oz , пересекает тело в двух точках. Точка «входа» лежит на плоскости $z = y - 2$, а точка «выхода» - на плоскости $z = 2 - y$. Проекцией этого тела на плоскость XOY является область D – окружность $x^2 + y^2 = 4$ (рис. 43б). Поэтому удобнее данный тройной интеграл вычислять в цилиндрических координатах.

Переведем уравнения линий, ограничивающих тело R и область D , в цилиндрические координаты

$$x^2 + y^2 = 4 \rightarrow \rho^2 = 4 \rightarrow \rho = 2$$

$$z = y - 2 \rightarrow z = \rho \sin \varphi - 2$$

$$z = 2 - y \rightarrow z = 2 - \rho \sin \varphi$$

По прямой, выходящей из полюса O , определяем, что ρ изменяется от 0 до 2. Угол φ изменяется от 0 до 2π (рис.43б).

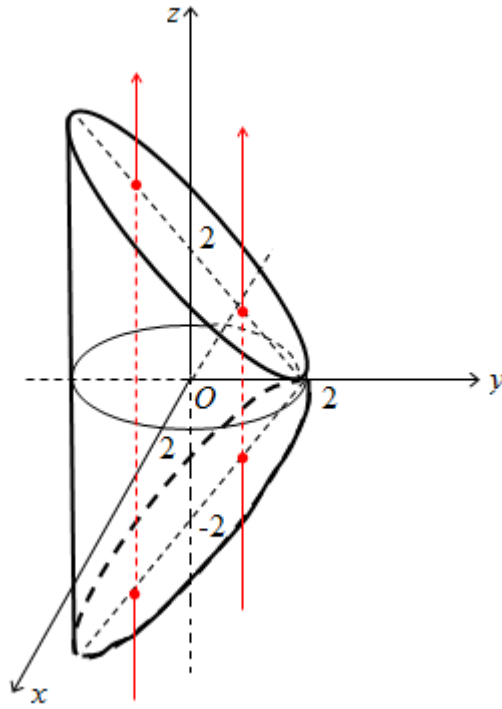


Рис.43а

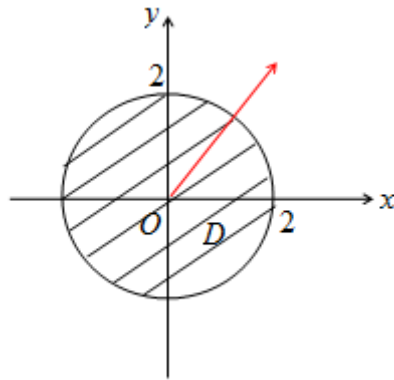
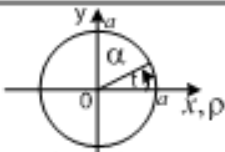
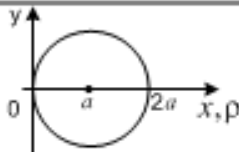
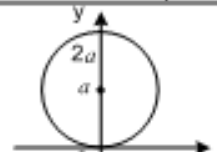
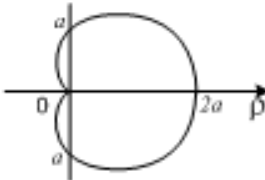
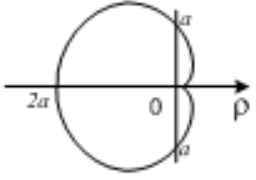
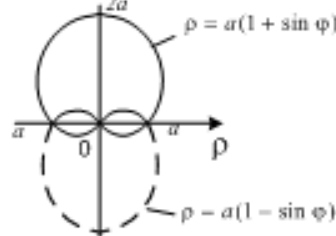
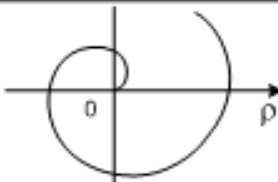
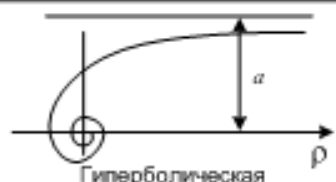
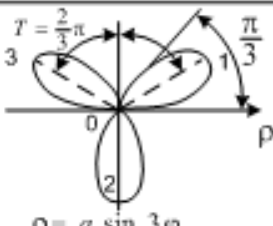
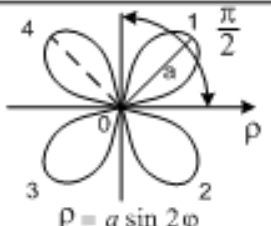
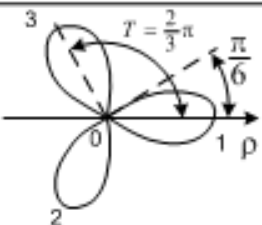
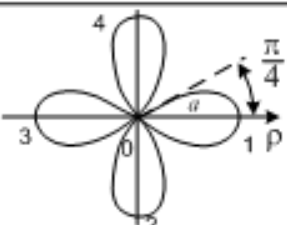
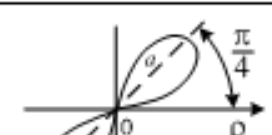


Рис. 43б

$$\begin{aligned}
 m &= \iiint_R \gamma(x, y, z) dx dy dz = \iiint_R 1 \cdot dx dy dz = \iiint_R \rho d\rho d\varphi dz = \\
 &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho d\rho \int_{\rho \sin \varphi - 2}^{2 - \rho \sin \varphi} dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho d\rho \cdot (z|_{\rho \sin \varphi - 2}^{2 - \rho \sin \varphi}) = \\
 &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho d\rho \cdot (2 - \rho \sin \varphi - \rho \sin \varphi + 2) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho \cdot (4 - 2\rho \sin \varphi) d\rho = \\
 &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 (4\rho - 2\rho^2 \sin \varphi) d\rho = \int_0^{2\pi} \left(\left(4 \frac{\rho^2}{2} - 2 \frac{\rho^3}{3} \sin \varphi \right) \Big|_0^2 \right) d\varphi =
 \end{aligned}$$

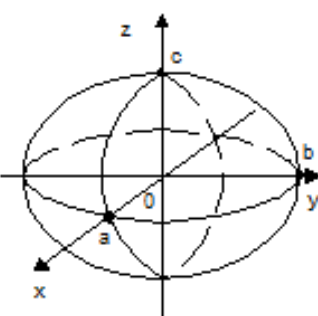
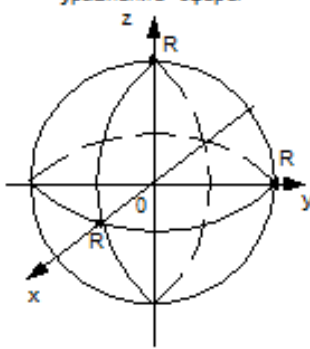
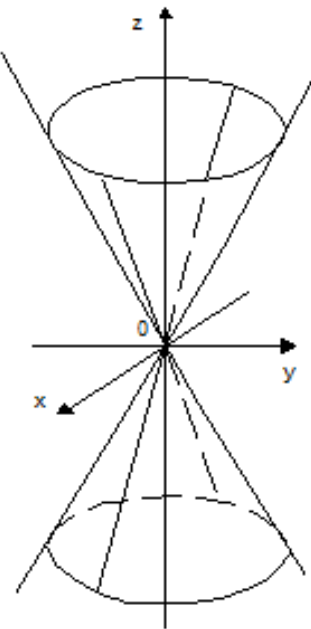
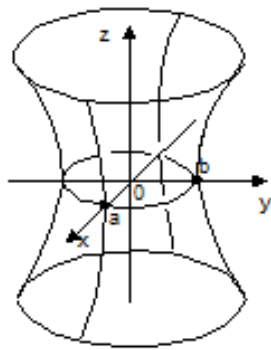
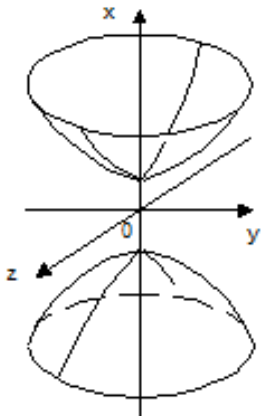
$$\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} \left(8 - \frac{16}{3} \sin \varphi\right) d\varphi = \left(8\varphi + \frac{16}{3} \cos \varphi\right) \Big|_0^{2\pi} = \\
&= \left(16\pi + \frac{16}{3} \cos 2\pi\right) - \left(0 - \frac{16}{3} \cos 0\right) = 16\pi - \frac{16}{3} + \frac{16}{3} = 16\pi
\end{aligned}$$

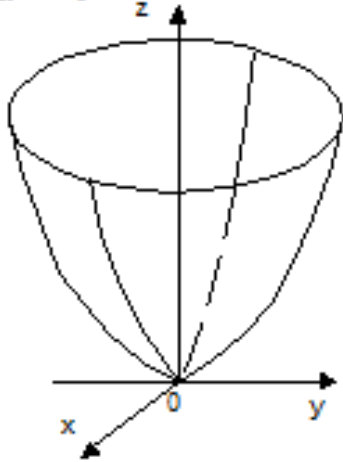
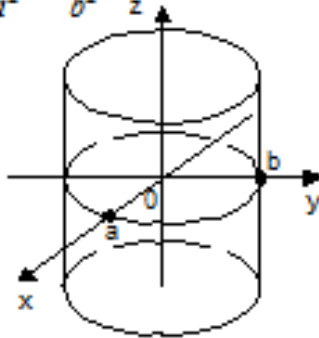
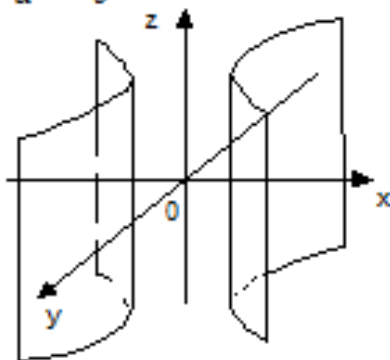
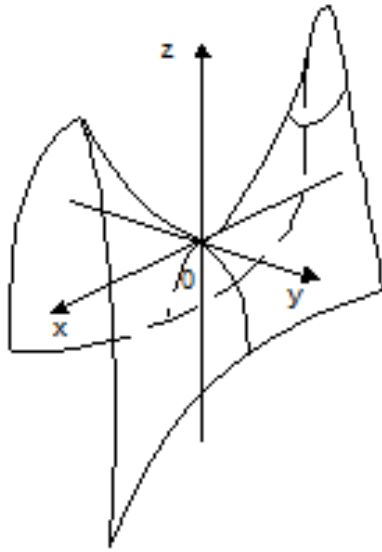
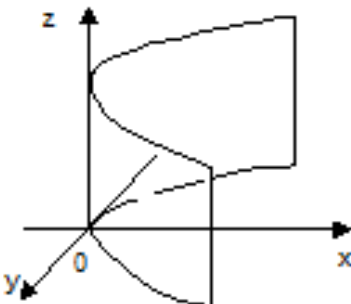
ПРИЛОЖЕНИЕ 1 **ВАЖНЕЙШИЕ КРИВЫЕ В ПОЛЯРНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ**

Кривые	Окружности	 1) $x^2 + y^2 = a^2$; 3) $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \end{cases}$ 2) $\rho = a$;	 1) $x^2 + y^2 = 2ax$; 2) $\rho = 2a \cos \varphi$	 1) $x^2 + y^2 = 2ay$; 2) $\rho = 2a \sin \varphi$
	Кордианды	 $\rho = a(1 + \cos \varphi)$	 $\rho = a(1 - \cos \varphi)$	 $\rho = a(1 + \sin \varphi)$
	Спирали	 Спираль Архимеда $\rho = a\varphi \ (\varphi > 0)$	 Логарифмическая спираль $\rho = e^{a\varphi} \ (a > 0, \varphi = 0)$	 Гиперболическая спираль $\rho = \frac{a}{\varphi} \ (\varphi > 0)$
	Розы	 $\rho = a \sin k\varphi, T = \frac{2\pi}{k}$ $\rho = a \sin 3\varphi$	 $\rho = a \sin 2\varphi$	Лемниската Бернулли
	 $\rho = a \cos k\varphi, T = \frac{2\pi}{k}$ $\rho = a \cos 3\varphi$	 $\rho = a \cos 2\varphi$	 $\rho^2 = a^2 \sin 2\varphi$	

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Эллипсоид	Конус	Гиперboloиды
Трёхосный $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ $a \neq b \neq c$ ($a, b, c > 0$)  В частности, если $a = b = c = R \Rightarrow$ $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ уравнение сферы 	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ 	Однополостный $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ ($a, b, c > 0$)  Двуполостный $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ ($a, b, c > 0$) 

Параболоиды	Цилиндры
Эллиптический $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z \quad (a, b > 0)$ 	Эллиптический $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a, b > 0)$  Гиперболический $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a, b > 0)$ 
Гиперболический $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z \quad (a, b > 0)$ 	Параболический $y^2 = 2px \quad (p > 0)$ 

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ

Элементарные функции	Сложные функции
$(a)' = 0$	
$(x^n)' = nx^{n-1}$ $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$ $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2} \cdot u'$ $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$
$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$ $(e^x)' = e^x$	$(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$ $(e^u)' = e^u \cdot u'$
$(\sin x)' = \cos x$ $(\cos x)' = -\sin x$ $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$ $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$ $(\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$ $(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$ $(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\log_a u)' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$ $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$
$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$ $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$	$(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$ $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$ $(\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$ $(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$
Правила дифференцирования	
$(c \cdot u)' = c \cdot u' \quad (u \pm v)' = u' \pm v' \quad (u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$	

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

ТАБЛИЦА ИНТЕГРАЛОВ

Элементарные функции	Сложные функции
1. $\int 0 dx = c$; 2. $\int dx = x + c$	
3. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, (\forall n \neq -1)$ 4. $\int \frac{dx}{x} = \ln x + c, (n = -1)$ 5. $\int \frac{dx}{x+a} = \ln x+a + c,$ 6. $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + c, 7. \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + c$	$\int u^n \cdot u' dx = \int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$ $\int \frac{u'}{u} dx = \ln u + c,$ $\int \frac{u'}{u} dx = -\frac{1}{u} + c,$ $\int \frac{u'}{\sqrt{u}} dx = 2\sqrt{u} + c$
8. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$; 9. $\int e^x dx = e^x + c$	$\int a^u \cdot u' dx = \frac{a^u}{\ln a} + c$; $\int e^u \cdot u' dx = e^u + c$
10. $\int \sin x dx = -\cos x + c$ 11. $\int \cos x dx = \sin x + c$ 12. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c$ 13. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + c$	$\int u' \cdot \sin u dx = -\cos u + c$ $\int u' \cdot \cos u dx = \sin u + c$ $\int \frac{u'}{\cos^2 u} dx = \operatorname{tg} u + c$ $\int \frac{u'}{\sin^2 u} dx = -\operatorname{ctg} u + c$
14. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + c$ 15. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c$ 16. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm k}} = \ln x + \sqrt{x^2 \pm k} + c$ 17. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{a+x}{a-x} \right + c$	$\int \frac{u'}{\sqrt{a^2 - u^2}} dx = \arcsin \frac{u}{a} + c$ $\int \frac{u'}{a^2 + u^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + c$ $\int \frac{u'}{\sqrt{u^2 \pm k}} dx = \ln u + \sqrt{u^2 \pm k} + c$ $\int \frac{u'}{a^2 - u^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{a+u}{a-u} \right + c$
18. $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln \cos x + c$	19. $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln \sin x + c$
Свойства интегралов	
$\int f(x) dx = F(x) + c, \text{ где } F'(x) = f(x); \quad \int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + c$	
$\int (\alpha \cdot f(x) \pm \beta \cdot g(x)) dx = \alpha \int f(x) dx \pm \beta \int g(x) dx$	

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Конспект лекций по высшей математике. 2 часть/ Письменный Д.Т. – М.: Айрис-пресс, 2015. – 256с.
2. Вахрушева, И.А. Сборник индивидуальных заданий по математике. Часть 2: учебное пособие [Электронный ресурс] / И.А. Вахрушева, Е.И. Захаркина, И.В.Максименко. - Магнитогорский гос. техн. ун-т им. Г.И.Носова. – Электрон. текстовые данные. - Магнитогорск: МГТУ им. Г.И.Носова, 2015. - Режим доступа: <http://catalog.inforeg.ru/Inet/GetEzineByID/308491>

Учебное текстовое электронное издание

Вахрушева Инна Алексеевна
Максименко Ирина Александровна

**ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ
ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ**

Учебное пособие

1,65 Мб

1 электрон. опт. диск

г. Магнитогорск, 2018 год
ФГБОУ ВО «МГТУ им. Г.И. Носова»
Адрес: 455000, Россия, Челябинская область, г. Магнитогорск,
пр. Ленина 38

ФГБОУ ВО «Магнитогорский государственный
технический университет им. Г.И. Носова»
Кафедра высшей математики
Центр электронных образовательных ресурсов и
дистанционных образовательных технологий
e-mail: ceor_dot@mail.ru