



Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова»

Н.И. Барышникова
Л.Г. Коляда
Е.В. Тарасюк

ПОЛНЫЙ ФАКТОРНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Задачник

Магнитогорск
2018

УДК 519.242(076.1)
ББК 30ц(я7)

Рецензенты:

директор ФБУ «Магнитогорский ЦСМ»
В.Н. Рылов

кандидат химических наук,
доцент кафедры физической химии и химической технологии,
ФГБОУ ВО «Магнитогорский государственный технический
университет им. Г.И. Носова
С.А. Крылова

Барышникова Н.И., Коляда Л.Г., Тарасюк Е.В.
Полный факторный эксперимент [Электронный ресурс] : задачник / Надежда Ивановна Барышникова, Людмила Григорьевна Коляда; Елена Владимировна Тарасюк ; ФГБОУ ВО «Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова». – Электрон. текстовые дан. (0,99 Мб). – Магнитогорск : ФГБОУ ВО «МГТУ им. Г.И. Носова», 2018. – 1 электрон. опт. диск (CD-R). – Систем. требования : IBM PC, любой, более 1 GHz ; 512 Мб RAM ; 10 Мб HDD ; MS Windows XP и выше ; Adobe Reader 8.0 и выше ; CD/DVD-ROM дисковод ; мышь. – Загл. с титул. экрана.

Задачник составлен в соответствии с рабочей программой дисциплины «Планирование и организация эксперимента».

Задачник включает краткий теоретический материал и многовариантные задачи. Описаны наиболее распространенные количественные и качественные методы обработки и интерпретации результатов. Подробно рассмотрен алгоритм решения задач оптимизации одним из методов теории планирования эксперимента.

Задачник предназначен для самостоятельной работы обучающихся по направлению подготовки 27.03.01 «Стандартизация и метрология».

УДК 519.242(076.1)
ББК 30ц(я7)

© Барышникова Н.И., Коляда Л.Г., Тарасюк Е.В., 2018
© ФГБОУ ВО «Магнитогорский государственный
технический университет им. Г.И. Носова», 2018

Содержание

ВВЕДЕНИЕ	4
1. ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА	6
1.2. Полный факторный эксперимент типа 2^2	8
1.3. Полный факторный эксперимент типа 2^3	11
1.4. Проверка коэффициентов уравнения регрессии на значимость	12
1.5. Проверка адекватности уравнения регрессии	14
2. ПРИМЕРЫ СОСТАВЛЕНИЯ ПФЭ	16
2.1. Пример 1	16
2.2. Пример 2	21
2.3. Пример 3	25
2.4. Пример 4	31
МНОВОВАРИАНТНЫЕ ЗАДАНИЯ	37
КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ	57
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	59
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	60
ПРИЛОЖЕНИЯ	62

ВВЕДЕНИЕ

Большинство научных исследований тесно связано с экспериментом. Эксперимент может быть физическим, психологическим или модельным. Он может непосредственно проводиться на объекте или его модели. Наряду с физическими моделями все большее распространение получают абстрактные математические модели.

«Планирование эксперимента – это процедура выбора числа и условий проведения опытов, необходимых и достаточных для решения поставленной задачи с требуемой точностью» (Адлер Ю.П.). При этом существенно следующее:

- стремление к минимизации общего числа опытов;
- одновременное варьирование всеми переменными, определяющими процесс, по специальным правилам – алгоритмам;
- использование математического аппарата.

Одной из наиболее распространенных научно-технических задач является поиск оптимальных условий реализации процесса. Непосредственно при планировании эксперимента важно определить параметр, который нужно оптимизировать. Для этого необходимо сформулировать цель исследования, которая допускает количественную оценку. Характеристика цели, заданная количественно, называется параметром оптимизации (y). Он является реакцией (откликом) на воздействие факторов (x), которые определяют поведение процесса. Параметры оптимизации бывают экономическими, технологическими, статистическими и т. д. В любом случае параметр оптимизации должны быть эффективным с точки зрения достижения цели, универсальным, количественным и выражаться одним числом, имеющим физический смысл и существующим для всех различных состояний объекта.

Фактором называется измеряемая переменная величина, соответствующая способу воздействия на объект. Каждый фактор может принимать в эксперименте одно из нескольких значений, которые называются уровнями. Основные требования к факторам: управляемость и однозначность.

Результаты эксперимента используются для получения математической модели объекта исследования, которая представляет собой уравнение, связывающее параметр оптимизации и факторы. В общем виде его можно записать так:

$$y = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_k).$$

Такое уравнение называется функцией отклика. Наиболее простой, удобной и математически разработанной моделью является алгебраический полином первой степени – линейная модель:

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2.$$

Эксперимент нужен для того, чтобы найти численные значения коэффициентов полинома.

Поэтому целью освоения дисциплины «Планирование и организация эксперимента» является теоретическое изучение и практическое применение основных современных методов планирования и организации экспериментов для эффективного использования полученных знаний и навыков в решении актуальных технических задач.

Чтобы правильно выбрать оптимальный вариант для решения конкретной задачи надо знать:

- преимущества и недостатки различных методов планирования и организации эксперимента;
- правильно спланировать эксперимент на основе выбранного метода;
- проводить эксперименты по заданной методике;
- произвести статистическую оценку полученных результатов и на ее основе выбрать математическую модель;
- произвести оценку значимости коэффициентов уравнения регрессии и проверку адекватности полученной математической модели;

Главное требование к модели - это способность предсказывать направление дальнейших опытов с требуемой точностью, то есть модель должна быть адекватной.

1. ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА

1.1. Теория эксперимента

Под планированием эксперимента понимают оптимальное управление ходом эксперимента с целью получения максимально возможной информации на основе минимально допустимого количества опытных данных. Весь эксперимент обычно разбивается на несколько этапов. Информация, полученная после каждого этапа, используется для планирования исследований на следующем этапе. Проанализируем сущность планирования эксперимента по этапам:

1. Выбор входных и выходных переменных. Входные переменные $x_i, i = 1, k$, которые определяют состояние объекта – влияющие факторы.

Выходная переменная y – это реакция объекта на входные воздействия; она носит название функции отклика. Выбор этой функции определяется целью исследования, которая может представлять собой оптимизацию экономической (стоимость, производительность), технологической (точность, качество) или другой характеристики объекта.

2. Выбор области экспериментирования, то есть области факторного пространства, изучение которой представляет интерес для исследования. Границы этой области по каждому фактору x_i обусловлены его минимальным и максимальным значениями, то есть $x_i^{\min} < x_i < x_i^{\max}$. Устанавливая область определения, необходимо выполнять условие совместимости факторов, чтобы эксперимент можно было реализовать.

3. Выбор математической модели объекта. Обычно используют степенной ряд:

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^k b_i x_i + \sum_{i < j} b_{ij} x_i x_j + \dots$$

Для определения коэффициентов полинома применяется наиболее универсальный метод наименьших квадратов. При этом необходимым условием получения статистических оценок является выполнение неравенства $N > s$, то есть количество опытов N должно быть больше, чем число коэффициентов полинома s .

Для обработки и анализа результатов эксперимента принято все факторы представить в безразмерной форме. Для этого проводят операцию кодирования переменных, сущность которой заключается в том, что начало координат факторного пространства переносится в точку с координатами $\bar{x}_i$, где $\bar{x}_i = 0,5(x_i^{\min} + x_i^{\max})$.

Кроме того, интервал варьирования факторов $I_i = 0,5(x_i^{\max} - x_i^{\min})$ разбивается на ряд уровней, симметричных относительно центра эксперимента. В случае двухуровневых планов все факторы изменяются на двух уровнях. При этом

значениям $x_i^{\max}$ отвечает кодированная переменная $x_i = +1$, а значениям $x_i^{\min}$ соответствует $x_i = -1$.

4. Составление плана эксперимента. После выбора математической модели объекта, определяют, какое значение должен принимать фактор в каждом из опытов. Таблица, составленная из значений факторов для каждого опыта, называется матрицей планирования.

Планирование эксперимента позволяет варьировать все факторы и получать одновременно количественные оценки всех эффектов. В общем случае эксперимент, в котором реализуются все возможные сочетания уровней факторов, называется полным факторным экспериментом (ПФЭ).

При полном факторном эксперименте число опытов равно числу всех возможных комбинаций уровней факторов. При одинаковом числе уровней для каждого фактора число опытов определяется формулой:

$$N = n^k, \quad (1)$$

где n – число уровней, k – число факторов ($i=1,2,\dots, k$).

Пример составления плана ПФЭ типа 2^2 представлен в таблице 1. Число опытов в этом случае $N = 2^2 = 4$.

Таблица 1

Матрица планирования ПФЭ типа 2^2

Номер опыта N	x_0	x_1	x_2	x_1x_2	y
1	+1	-1	-1	+1	Y_1
2	+1	+1	-1	-1	Y_2
3	+1	-1	+1	-1	Y_3
4	+1	+1	+1	+1	Y_4

После выполнения экспериментов получают значения исследуемой величины y для каждого опыта. Далее переходят к построению математической модели, которая связывает изучаемый параметр со значениями факторов, лежащих в интервале между верхним и нижним уровнями. Эту функцию называют уравнением регрессии. Данный в таблице 1 план соответствует математической модели следующего вида:

$$y = b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{12}x_1x_2,$$

где b_0, b_1, b_2, b_{12} – коэффициенты линейного уравнения регрессии.

Первый столбец матрицы занимает фиктивный фактор $x_0 = +1$ при коэффициенте полинома b_0 . Столбцы матрицы x_1 и x_2 задают планирование, т.е. по ним определяются условия опытов. Столбец x_1x_2 не является самостоятельным и заполняется по данным столбцов x_1 и x_2 . Он используется при расчетах.

По результатам эксперимента, проведенного в соответствии с представленным планом, можно определить все четыре коэффициента полинома. Однако в этом случае $N = s = 4$ и, следовательно, условие $N > s$ не выполняется, что не позволяет провести статистическую оценку уравнения регрессии. Для получения ее нужно ограничиться линейной зависимостью без учета взаимного влияния факторов (при этом $s = 3 < N = 4$) либо провести дополнительный опыт в нулевой точке $x_1 = x_2 = 0$ (тогда $N = 5 > s = 4$).

5. Обработка результатов эксперимента:

- на основании данных параллельных наблюдений оценивается дисперсия воспроизводимости $s^2_{\text{воспр}}$ для каждой строки плана, а затем осуществляется проверка однородности дисперсий, рассчитывается погрешность опыта;

- с помощью метода наименьших квадратов определяются коэффициенты полинома;

- производится проверка гипотезы об адекватности модели, исходя из критерия Фишера F ;

- проверяется значимость коэффициентов полинома, из рассмотрения исключаются незначимые коэффициенты, и осуществляется повторная проверка адекватности математической модели.

Анализ результатов эксперимента завершается интерпретацией модели в терминах объекта исследования. Прежде всего выясняется, в какой степени каждый из факторов влияет на функцию отклика. Значение коэффициентов полинома служит количественной мерой, оценивающей влияние факторов: чем больше коэффициент b_i , тем сильнее это влияние. Знак коэффициента позволяет судить о характере зависимости функции отклика от соответствующих факторов. Затем следует проанализировать эффект парных взаимодействий.

1.2. Полный факторный эксперимент типа 2^2

Рассмотрим влияние на некоторую величину – выхода продукта (y) двух факторов: температуры (z_1) в интервале 50-100 °С и давления (z_2) в диапазоне 1-2 атм. Для этого надо провести эксперименты по плану, который позволяет реализовать все возможные комбинации факторов. При этом каждый фактор рассматривается лишь на двух фиксированных уровнях: верхнем уровне ($z^{\max}$) и нижнем уровне ($z^{\min}$). Число всех экспериментов в этом случае будет равно:

$$N = 2^2 = 4.$$

Для обработки результатов проведенных экспериментов и дальнейшего определения коэффициентов уравнения регрессии факторы приводят к одному

масштабу. Это достигается путем кодирования переменных. При таком кодировании все новые переменные будут принимать значения от -1 до $+1$.

Обозначим нижний уровень фактора z_i через $z_i^{\min}$, а верхний уровень – через $z_i^{\max}$. Тогда новые кодированные переменные x_i будут определяться через z_i по формулам:

$$x_i = \frac{z_i - z_i^0}{\Delta z_i}, \quad (2)$$

$$z_i^0 = \frac{z_i^{\max} + z_i^{\min}}{2} \quad (3)$$

$$\Delta z_i = \frac{z_i^{\max} - z_i^{\min}}{2} \quad (4)$$

где $z_i^{\max}$ и $z_i^{\min}$ – верхняя и нижняя границы варьирования i – фактора,

z_i^0 – центр плана, или основной уровень,

Δz_i – интервал варьирования.

Кодирование переменных:

$$z_1^0 = \frac{100 + 50}{2} = 75^\circ \text{C}, \quad \Delta z_1 = \frac{100 - 50}{2} = 25^\circ \text{C},$$

$$x_1^{\max} = \frac{100 - 75}{25} = +1, \quad x_1^{\min} = \frac{50 - 75}{25} = -1,$$

$$z_2^0 = \frac{2 + 1}{2} = 1,5 \text{ атм}, \quad \Delta z_2 = \frac{2 - 1}{2} = 0,5 \text{ атм},$$

$$x_2^{\max} = \frac{2 - 1,5}{0,5} = +1, \quad x_2^{\min} = \frac{1 - 1,5}{0,5} = -1.$$

Как следует из представленных уравнений, для переменных x_1 и x_2 нижний уровень равен -1 , верхний $+1$, координаты центра плана равны нулю.

План проведения экспериментов записывается в виде матрицы планирования, в которой в определенном порядке перечисляются различные комбинации факторов на двух уровнях (табл. 2).

Таблица 2

Полный факторный эксперимент типа 2^2

№ опыта	Факторы в натуральном масштабе		Факторы в безразмерном масштабе		Выход продукта y
	z_1 (°C)	z_2 (атм)	x_1	x_2	
1	50	1	-1	-1	y_1
2	50	2	-1	+1	y_2
3	100	1	+1	-1	y_3
4	100	2	+1	+1	y_4

Линейное уравнение регрессии относительно новых переменных имеет вид:

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 ,$$

где b_0, b_1, b_2 – коэффициенты линейного уравнения регрессии.

Для нахождения b_0 в план ПФЭ вводят столбец фиктивной переменной $x_0 = +1$. Если необходимо изучить влияние парных взаимодействий различных факторов на исследуемый параметр, то уравнение регрессии записывают в виде:

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_{12} x_1 x_2. \quad (5)$$

Для нахождения коэффициента b_{12} необходимо расширить матрицу планирования, добавив в нее столбец $x_1 x_2$, характеризующий эффект парного взаимодействия (табл. 3).

Таблица 3

Расширенная матрица планирования ПФЭ типа 2^2

№ опыта	x_0	x_1	x_2	$x_1 x_2$	y
1	+1	-1	-1	+1	y_1
2	+1	+1	-1	-1	y_2
3	+1	-1	+1	-1	y_3
4	+1	+1	+1	+1	y_4

Значения фактора взаимодействия в безразмерном масштабе определяются произведением соответствующих значений факторов x_1 и x_2 :

$$(x_1 x_2)_i = x_{1i} \cdot x_{2i}$$

Обозначим знак «+» или «-» в матрице планирования за x_{ji} , который соответствует j -ому опыту ($j=1, \dots, N$) для i -го фактора ($i=1, \dots, k$). При этом знак «+» показывает, что кодированная переменная принимает значение +1, а знак «-» соответствует значению -1. Тогда знаки (или уровни варьирования) для взаимодействия факторов x_r и x_p вычисляются простым перемножением: $x_{jr} \cdot x_{jp}$, $j=1, \dots, n$.

Например, в таблице 3 знаки для взаимодействия $x_1 x_2$ получены таким образом:

для первого опыта ($j=1$) $x_{11} x_{12} = (-1)(-1) = +1$,

для второго опыта ($j=2$) $x_{21} x_{22} = (+1)(-1) = -1$, и т.д.

Коэффициенты уравнения регрессии находят с помощью метода наименьших квадратов: любой коэффициент определяется скалярным произведением столбца y на соответствующий столбец факторов x_j в безразмерном масштабе, деленным на число опытов в матрице планирования:

$$b_j = \frac{\sum_{i=1}^N x_{ji} y_i}{N}. \quad (6)$$

Так, коэффициент b_0 находится как среднее арифметическое значение параметра y . Значение коэффициента b_1 определяется выражением:

$$b_1 = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 x_{1i} y_i = \frac{[-y_1 + y_2 - y_3 + y_4]}{4}.$$

Коэффициент b_{12} определяется так же, как и линейные эффекты.

1.3. Полный факторный эксперимент типа 2^3

В ПФЭ типа 2^3 исследуется влияние на результат опыта уже трех факторов. При реализации этого ПФЭ требуется провести $N=2^3=8$ опытов. Осуществим кодирование факторов по уравнениям 1-3. План проведения опытов представлен в таблице 4.

Таблица 4

Полный факторный эксперимент типа 2^3

№ опыта	Факторы в безразмерном масштабе			Выход продукта, y
	X_1	X_2	X_3	
1	-1	-1	-1	y_1
2	+1	-1	-1	y_2
3	-1	+1	-1	y_3
4	+1	+1	-1	y_4
5	-1	-1	+1	y_5
6	+1	-1	+1	y_6
7	-1	+1	+1	y_7
8	+1	+1	+1	y_8

Уравнение регрессии с учетом эффектов взаимодействия факторов запишется в следующем виде:

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_{12} x_1 x_2 + b_{13} x_1 x_3 + b_{23} x_2 x_3 + b_{123} x_1 x_2 x_3, \quad (7)$$

где b_{12} , b_{13} , b_{23} - коэффициенты характеризуют эффекты парного взаимодействия,

b_{123} – эффект тройного взаимодействия.

Для определения коэффициентов уравнения регрессии необходимо составить расширенную матрицу планирования ПФЭ (табл. 5).

Таблица 5

Расширенная матрица планирования ПФЭ типа 2^3

№	x_0	x_1	x_2	x_3	x_1x_2	x_1x_3	x_2x_3	$x_1x_2x_3$	y
1	+1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	-1	y_1
2	+1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	+1	y_2
3	+1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	+1	y_3
4	+1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	-1	y_4
5	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	y_5
6	+1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	-1	y_6
7	+1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	-1	y_7
8	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	y_8

Как и при ПФЭ типа 2^2 , коэффициенты уравнения регрессии определяются скалярным произведением столбца y на соответствующий столбец факторов или их взаимодействий в безразмерном масштабе, деленным на число опытов в матрице планирования.

Так, например, коэффициент b_{123} рассчитывается по следующему выражению:

$$b_{123} = \frac{1}{8}[-y_1 + y_2 + y_3 - y_4 + y_5 - y_6 - y_7 + y_8].$$

1.4. Проверка коэффициентов уравнения регрессии на значимость

Для проверки коэффициентов на значимость надо провести серию параллельных опытов, выполненных при каком-то одном сочетании факторов.

Пусть в центре плана (в точках (z_1^0, z_2^0) и (z_1^0, z_2^0, z_3^0) для ПФЭ типа 2^2 и 2^3 соответственно) проведена серия из m опытов. Тогда выборочная дисперсия воспроизводимости, характеризующая влияние случайных факторов, равна:

$$s_{воспр}^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{u=1}^m (y_u^0 - \bar{y}^0)^2. \quad (8)$$

где y_u^0 - результат u -го опыта ($u = 1, 2, \dots, m$),

$\bar{y}^0$ - среднее значение серии опытов, которое рассчитывается по формуле:

$$\bar{y}_i = \frac{1}{m} \sum_{u=1}^m y_{iu}. \quad (9)$$

В математической статистике доказывается, что для спланированных экспериментов все коэффициенты уравнения регрессии определяются с одинаковой точностью. Среднее квадратичное отклонение коэффициентов $s(b_i)$ зависит от дисперсии воспроизводимости результатов по всем проведенным опытам и вычисляется по формуле:

$$s(b_j) = \sqrt{\frac{s_{\text{воспр}}^2}{N}} \quad (10)$$

Значимость коэффициентов определяется по t -критерию Стьюдента. Для каждого коэффициента определяется t – отношение:

$$t_j = \frac{|b_j|}{s(b_j)}, \quad (11)$$

которое сравнивается с табличным значением критерия Стьюдента $t_p(f)$ для выбранного уровня значимости p (обычно 0,05) и числа степеней свободы $f = m - 1$ (Приложение 1). Если для рассматриваемого коэффициента $t_j > t_p(f)$, то он значимо отличается от нуля. Выборочные коэффициенты, для которых $t_j \leq t_p(f)$, незначимы, и их следует исключить из уравнения регрессии.

Рассмотрим схему проведения регрессионного анализа для спланированного эксперимента в случае, когда каждый опыт в матрице планирования повторялся m раз. В качестве примера используем ПФЭ типа 2^3 . При получении уравнения регрессии используем линейное приближение (уравнение 6). Матрица планирования эксперимента представлена в таблице 5.

Таблица 5

Матрица планирования ПФЭ типа 2^3 в условиях линейной модели с одинаковым числом параллельных опытов при каждом сочетании уровней факторов

№	y	$\bar{y}_i$	s_i^2
1	$y_{11}, y_{12}, \dots, y_{1m}$	$\bar{y}_1$	s_1^2
2	$y_{21}, y_{22}, \dots, y_{2m}$	$\bar{y}_2$	s_2^2
3	$y_{31}, y_{32}, \dots, y_{3m}$	$\bar{y}_3$	s_3^2
4	$y_{41}, y_{42}, \dots, y_{4m}$	$\bar{y}_4$	s_4^2
5	$y_{51}, y_{52}, \dots, y_{5m}$	$\bar{y}_5$	s_5^2
6	$y_{61}, y_{62}, \dots, y_{6m}$	$\bar{y}_6$	s_6^2
7	$y_{71}, y_{72}, \dots, y_{7m}$	$\bar{y}_7$	s_7^2
8	$y_{81}, y_{82}, \dots, y_{8m}$	$\bar{y}_8$	s_8^2

Для каждого сочетания уровней факторов определяется среднее значение измеряемой величины и выборочная дисперсия по формулам (8) и (7), соответственно.

Среднее квадратичное отклонение коэффициентов $s_{(b)}$ зависит от дисперсии воспроизводимости результатов по всем проведенным опытам $s^2_{\text{воспр}}$ и вычисляется по формуле:

$$s(b_j) = \sqrt{\frac{s^2_{\text{воспр}}}{Nm}}. \quad (12)$$

Дисперсия воспроизводимости $s^2_{\text{воспр}}$ характеризует ошибку всего эксперимента. При одинаковом числе наблюдений в каждом эксперименте для расчета $s^2_{\text{воспр}}$ используют формулу:

$$s^2_{\text{воспр}} = \frac{1}{N \cdot (m-1)} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^m (y_{ji} - \bar{y}_j)^2, \quad (13)$$

где N – число экспериментов (число строк в матрице ПФЭ);

m – число опытов в каждом эксперименте;

y_{ji} – результат отдельного i -го наблюдения в j -ом эксперименте;

$\bar{y}_j$ – среднее выборочное значение наблюдений для j -ого эксперимента.

1.5. Проверка адекватности уравнения регрессии

Адекватность уравнения регрессии эксперименту проверяется по критерию Фишера:

$$F = \frac{s^2_{ad}}{s^2_{\text{воспр}}}, \quad (14)$$

где $s^2_{\text{воспр}}$ – дисперсия воспроизводимости, найденная по формуле (12);

s^2_{ad} – дисперсия адекватности или остаточная дисперсия.

Дисперсия адекватности s^2_{ad} вычисляется следующим образом:

$$s^2_{ad} = \frac{m}{N-l} \sum_{j=1}^N (\hat{y}_j - \bar{y}_j)^2 \quad (15)$$

где N – число экспериментов; m – число опытов в каждом эксперименте;

l – число значимых коэффициентов в уравнении регрессии;

$\bar{y}_j$ – среднее выборочное значение наблюдений для j -ого эксперимента;

$\hat{y}_j$ - значение изучаемого параметра, вычисленное по уравнению регрессии со значимыми коэффициентами для j – ого эксперимента.

Уравнение адекватно эксперименту, если:

$$F = \frac{s_{ad}^2}{s_{воспр}^2} \leq F_{1-p}(f_{ad}, f_{воспр}),$$

где $F_{1-p}(f_{ad}, f_{воспр})$ - табличное значение критерия Фишера для $p=0.05$ (Приложение 2) и чисел степеней свободы $f_{ad} = N - l$ и $f_{воспр} = N(m-1)$.

Интерпретацию полученной модели можно производить, когда она записана в кодированных переменных. По величине коэффициентов можно судить о степени влияния того или иного фактора: чем больше абсолютная величина коэффициента, тем больше фактор влияет на рассматриваемый параметр.

Характер влияния определяется знаком коэффициента. Знак «плюс» у коэффициента показывает, что с увеличением значения фактора растет величина определяемого параметра, а при знаке «минус» – убывает.

2. ПРИМЕРЫ СОСТАВЛЕНИЯ ПФЭ

2.1. Пример 1

Условие задачи. Для исследования влияния технологических факторов на прочность полимерно-бумажных композитов были проведены эксперименты по плану ПФЭ типа 2^2 .

В качестве факторов, влияющих на прочность y (МПа), были выбраны следующие:

z_1 – количество клея ПВА (%): $z_1^{\min} = 3$, $z_1^{\max} = 6$;

z_2 – время горячего прессования (сек): $z_2^{\min} = 20$, $z_2^{\max} = 40$.

Построить математическую модель, учитывая взаимодействия факторов. Проверить полученную модель на адекватность и произвести ее интерпретацию.

Таблица 1

Исходная матрица планирования ПФЭ типа 2^2

№ опыта	Изучаемые факторы		Результаты опытов Y
	z_1	z_2	
1	-1	-1	1,11
2	+1	-1	2,52
3	-1	+1	1,98
4	+1	+1	1,47

Алгоритм решения:

- 1) проводим кодирование переменных;
- 2) строим матрицу планирования в кодированных переменных с учетом всех взаимодействий;
- 3) рассчитываем коэффициенты уравнения регрессии;
- 4) вычисляем дисперсию воспроизводимости;
- 5) проверяем рассчитанные коэффициенты на значимость;
- 6) записываем уравнение регрессии в кодированных переменных;
- 7) проверяем уравнение регрессии на адекватность с помощью критерия Фишера;
- 8) проводим интерпретацию полученной математической модели.

Решение. 1. Для каждого фактора определяем центр плана, интервал варьирования, зависимость кодированной переменной x_i от натуральной z_i по формулам (3,4). Результаты заносим в таблицу 2.

Таблица 2

Кодирование факторов

Факторы	Верхний уровень z_i^{max}	Нижний уровень z_i^{min}	Центр z_i^0	Интервал варьирования Δz_i	Зависимость кодированной переменной от натуральной
z_1	6	3	4,5	1,5	$x_1 = \frac{z_1 - 4,5}{1,5}$
z_2	40	20	30	10	$x_2 = \frac{z_2 - 30}{10}$

Перейдем от размерных значений факторов к безразмерным с помощью формулы кодирования (2):

$$x_1^{max} = \frac{z_1^{max} - z_1^0}{\Delta z_1} = \frac{6 - 4,5}{1,5} = +1;$$

$$x_1^{min} = \frac{z_1^{min} - z_1^0}{\Delta z_1} = \frac{3 - 4,5}{1,5} = -1;$$

Аналогично проводим кодирование для фактора z_2 :

$$x_2^{max} = \frac{z_2^{max} - z_2^0}{\Delta z_2} = \frac{40 - 30}{10} = +1;$$

$$x_2^{min} = \frac{z_2^{min} - z_2^0}{\Delta z_2} = \frac{20 - 30}{10} = -1;$$

Определяем число опытов по формуле (1): $N = 2^k = 2^2 = 4$.

2. Строим матрицу планирования с учетом всех взаимодействий (табл. 3).

Таблица 3

Матрица планирования

№ опыта	Факторы				Результаты опытов, y
	x_0	x_1	x_2	$x_1 x_2$	
1	+1	-1	-1	+1	1,11
2	+1	+1	-1	-1	2,52
3	+1	-1	+1	-1	1,98
4	+1	+1	+1	+1	1,47

Согласно уравнению (5), уравнение регрессии будет иметь вид:

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_{12} x_1 x_2$$

3. Рассчитаем коэффициенты, входящие в уравнение регрессии, с помощью формулы (6):

$$b_0 = \frac{1}{4}(1,11 + 2,52 + 1,98 + 1,47) = 1,77;$$

$$b_1 = \frac{1}{4}(-1,11 + 2,52 - 1,98 + 1,47) = 0,225;$$

$$b_2 = \frac{1}{4}(-1,11 - 2,52 + 1,98 + 1,47) = -0,045$$

$$b_{12} = \frac{1}{4}(1,11 - 2,52 - 1,98 + 1,47) = -0,48$$

После подстановки рассчитанных коэффициентов уравнение регрессии:

$$y = 1,77 + 0,225x_1 - 0,045x_2 - 0,48x_1x_2$$

4. Далее необходимо определить значимость коэффициентов в уравнении регрессии. С этой целью необходимо найти дисперсию воспроизводимости по формуле (8).

В данном случае было проведено три параллельных опыта в центре плана, в которых получены следующие значения:

$$y_1^0 = 1,67; y_2^0 = 1,76; y_3^0 = 1,83.$$

По формуле (9) находим среднее значение $\bar{y}$:

$$\bar{y} = \frac{1}{3}(1,67 + 1,76 + 1,83) = 1,75.$$

Тогда дисперсия воспроизводимости составит:

$$S_{\text{воспр.}}^2 = \frac{1}{3-1}(1,75 - 1,67)^2 + (1,75 - 1,76)^2 + (1,75 - 1,83)^2 = 0,0064.$$

5. В связи с тем, что коэффициенты, входящие в уравнение регрессии, не коррелированы между собой, их действие можно проверять для каждого в отдельности. Исключение незначимого коэффициента из уравнения регрессии не отразится на остальных коэффициентах. Все коэффициенты определяются с одинаковой точностью по формуле (10).

$$S_{bj} = \sqrt{\frac{S_{\text{воспр.}}^2}{N}} = \sqrt{\frac{0,0064}{4}} = 0,04.$$

Найдем расчетные значения критерия Стьюдента по формуле (11):

$$t_0 = \frac{|1,77|}{0,04} = 44,25;$$

$$t_1 = \frac{|0,225|}{0,04} = 5,62;$$

$$t_2 = \frac{|-0,045|}{0,04} = 1,12;$$

$$t_{12} = \frac{|-0,48|}{0,04} = 12,0.$$

Для нахождения табличного значения критерия Стьюдента задаемся уровнем значимости $p=0,95$ и степенью свободы $f=m-1=3-1=2$. $t_{0,05}(f)=4,303$.

Если для коэффициента выполняется условие $t_{расч.} > t_a(f)$, то коэффициент считается значимым. Таким образом, коэффициент при x_2 является незначимым и в уравнение регрессии не входит.

6. После оценки значимости уравнение регрессии принимает вид:

$$y = 1,77 + 0,225 x_1 - 0,48 x_1 x_2$$

7. Проверим адекватность полученного уравнения по результатам экспериментальных исследований с помощью критерия Фишера. Для нахождения расчетного значения критерия Фишера необходимо найти остаточную дисперсию по формуле:

$$s^2_{ад} = \frac{m}{N-l} \sum_{j=1}^N (\hat{y}_j - y_j)^2.$$

Для этого найдем значения изучаемого параметра по полученному уравнению регрессии, подставляя +1 или -1 вместо x_i в соответствии с номером j эксперимента из таблицы 3:

$$\hat{y}_1 = 1,77 - 0,225 - 0,48 = 1,07;$$

$$\hat{y}_2 = 1,77 + 0,225 + 0,48 = 2,48;$$

$$\hat{y}_3 = 1,77 - 0,225 + 0,48 = 2,03;$$

$$\hat{y}_4 = 1,77 + 0,225 - 0,48 = 1,52.$$

Результаты расчета дисперсии адекватности представлены в таблице 4.

Дисперсия адекватности:

$$s^2_{ад} = \frac{1}{4-3_j} (0,0016 + 0,0016 + 0,0025 + 0,0025) = 0,0082.$$

Расчет дисперсии адекватности

№ опыта	$y_{эксп}$	$\hat{y}$	$(\hat{y} - y_{эксп})$	$(\hat{y} - y_{эксп})^2$
1	1,11	1,07	-0,04	0,0016
2	2,52	2,48	-0,04	0,0016
3	1,98	2,03	-0,05	0,0025
4		1,52	-0,05	0,0025

Найдем расчетное значение критерия Фишера с помощью формулы (14):

$$F_{расч.} = \frac{S_{ост.}^2}{S_{воспр.}^2} = \frac{0,0082}{0,0064} = 1,28.$$

Табличное значение критерия F_T (Приложение 2) находим при уровне значимости $p = 0,05$ по соответствующим степеням свободы, где $f_{ад} = N - l$ и $f_{воспр} = N(m - 1)$:

$$f_{ад} = N - l = 4 - 3 = 1 \text{ и } f_{воспр} = (m - 1) = (3 - 1) = 2:$$

$$F_{табл.} = 18,5.$$

Если выполняется условие $F_{расч.} < F_{табл.}$, то уравнение регрессии адекватно результатам экспериментальных исследований. В данном случае $1,28 < 5,32$. Следовательно, полученное уравнение регрессии адекватно результатам экспериментальных исследований.

8. Проведем интерпретацию полученной модели:

$$y = 1,77 + 0,225x_1 - 0,48x_1x_2.$$

Из уравнения следует, что наибольшее значение по абсолютной величине имеет коэффициент парного взаимодействия $x_1 x_2$ – сочетание добавленного клея ПВА и времени горячего прессования. Следовательно, он будет оказывать наибольшее влияние на прочность полимерно-бумажных композитов. Затем по силе влияния на отклик следует фактор x_1 – содержание клея ПВА в композите. Анализ знаков коэффициентов показал: т.к. коэффициент при x_1 положительный, то с увеличением этого фактора растет отклик, т.е. увеличивается прочность.

2.2. Пример 2

Условие задачи. Для исследования влияния технологических факторов на относительную величину чистоты металлической поверхности были проведены эксперименты по плану ПФЭ типа 2^2 .

В качестве факторов, влияющих на относительную площадь остаточных загрязнений поверхности y (%), были выбраны следующие:

z_1 – плотность мощности (Вт/см²): $z_1^{\min} = 70$, $z_1^{\max} = 100$;

z_2 – время обработки электроразрядной плазмой (сек): $z_2^{\min} = 180$, $z_2^{\max} = 420$.

Построить математическую модель, учитывая взаимодействия факторов. Проверить полученную модель на адекватность и произвести ее интерпретацию.

Таблица 1

Исходная матрица планирования ПФЭ типа 2^2

№ опыта	Изучаемые факторы		Результаты опытов
	z_1	z_2	Y
1	-1	-1	21,1
2	+1	-1	14,6
3	-1	+1	17,0
4	+1	+1	14,7

Алгоритм решения:

- 2) проводим кодирование переменных;
- 2) строим матрицу планирования в кодированных переменных с учетом всех взаимодействий;
- 3) рассчитываем коэффициенты уравнения регрессии;
- 4) вычисляем дисперсию воспроизводимости;
- 5) проверяем рассчитанные коэффициенты на значимость;
- 6) записываем уравнение регрессии в кодированных переменных;
- 7) проверяем уравнение регрессии на адекватность с помощью критерия Фишера;
- 8) проводим интерпретацию полученной математической модели.

Решение. 1. Для каждого фактора определяем центр плана, интервал варьирования, зависимость кодированной переменной x_i от натуральной z_i по формулам (3,4). Результаты заносим в таблицу 2.

Перейдем от размерных значений факторов к безразмерным с помощью формулы кодирования (2):

$$x_1^{\max} = \frac{z_1^{\max} - z_1^0}{\Delta z_1} = \frac{100 - 85}{15} = +1;$$

$$x_1^{\min} = \frac{z_1^{\min} - z_1^0}{\Delta z_1} = \frac{70 - 85}{15} = -1;$$

Таблица 2

Кодирование факторов

Факторы	Верхний уровень z_i^{max}	Нижний уровень z_i^{min}	Центр z_i^0	Интервал ва- рьи́рования Δz_i	Зависимость коди- рованной переменной от натуральной
z_1	100	70	85	15	$x_1 = \frac{z_1 - 85}{15}$
z_2	420	180	300	120	$x_2 = \frac{z_2 - 300}{120}$

Аналогично проводим кодирование для фактора z_2 :

$$x_2^{max} = \frac{z_2^{max} - z_2^0}{\Delta z_2} = \frac{420 - 300}{120} = +1;$$

$$x_2^{min} = \frac{z_2^{min} - z_2^0}{\Delta z_2} = \frac{180 - 300}{120} = -1;$$

Определяем число опытов по формуле (1): $N = 2^k = 2^2 = 4$.

2. Строим матрицу планирования с учетом всех взаимодействий (табл. 3).

Таблица 3

Матрица планирования

№ опыта	Факторы				Результаты опытов, y
	x_0	x_1	x_2	$x_1 x_2$	
1	+1	-1	-1	+1	21,1
2	+1	+1	-1	-1	14,6
3	+1	-1	+1	-1	17,0
4	+1	+1	+1	+1	14,7

Согласно уравнению (5), уравнение регрессии будет иметь вид:

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_{12} x_1 x_2$$

3. Рассчитаем коэффициенты, входящие в уравнение регрессии, с помощью формулы (6):

$$b_0 = \frac{1}{4}(21,1 + 14,6 + 17,0 + 14,7) = 16,85;$$

$$b_1 = \frac{1}{4}(-21,1 + 14,6 - 17,0 + 14,7) = -2,2;$$

$$b_2 = \frac{1}{4}(-21,1 - 14,6 + 17,0 + 14,7) = -1$$

$$b_{12} = \frac{1}{4}(21,1 - 14,6 - 17,0 + 14,7) = 1,05$$

После подстановки рассчитанных коэффициентов уравнение регрессии:

$$y = 16,85 - 2,2x_1 - x_2 + 1,05x_1x_2.$$

4. Необходимо определить значимость коэффициентов в уравнении регрессии. Для этого надо найти дисперсию воспроизводимости по формуле (8).

С этой целью было проведено три параллельных опыта в центре плана, в которых получены следующие значения:

$$y_1^0 = 14,0; y_2^0 = 15,0; y_3^0 = 16,0.$$

По формуле (9) находим среднее значение $\bar{y}$:

$$\bar{y} = \frac{1}{3}(14,0 + 15,0 + 16,0) = 15,0.$$

Тогда дисперсия воспроизводимости составит:

$$S_{\text{воспр.}}^2 = \frac{1}{3-1}(15,0 - 14,0)^2 + (15,0 - 15,0)^2 + (15,0 - 16,0)^2 = 1.$$

5. В связи с тем, что коэффициенты, входящие в уравнение регрессии, не коррелированы между собой, их действие можно проверять для каждого в отдельности. Исключение незначимого коэффициента из уравнения регрессии не отразится на остальных коэффициентах. Все коэффициенты определяются с одинаковой точностью по формуле (10).

$$S_{bj} = \sqrt{\frac{S_{\text{воспр.}}^2}{N}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = 0,5.$$

Найдем расчетные значения критерия Стьюдента по формуле (11):

$$t_0 = \frac{|16,85|}{0,5} = 33,7;$$

$$t_1 = \frac{|-2,2|}{0,5} = 4,4;$$

$$t_2 = \frac{|-1|}{0,5} = 2;$$

$$t_{12} = \frac{|1,05|}{0,5} = 2,1.$$

Для нахождения табличного значения критерия Стьюдента задаемся уровнем значимости $p=0,95$ и степенью свободы $f=m-1=3-1=2$.
 $t_{0,05}(f)=4,303$.

Если для коэффициента выполняется условие $t_{расч.} > t_a(f)$, то коэффициент считается значимым. Таким образом, коэффициент при x_2 и коэффициент парного взаимодействия являются незначимыми и в уравнение регрессии не входят.

6. После оценки значимости уравнение регрессии принимает вид:

$$y = 16,85 - 2,2x_1.$$

7. Проверим адекватность полученного уравнения по результатам экспериментальных исследований с помощью критерия Фишера. Для нахождения расчетного значения критерия Фишера необходимо найти остаточную дисперсию по формуле:

$$s^2_{ад} = \frac{m}{N-l} \sum_{j=1}^N (\hat{y}_j - y_j)^2.$$

Для этого найдем значения изучаемого параметра по полученному уравнению регрессии, подставляя +1 или -1 вместо x_i в соответствии с номером j эксперимента из таблицы 3:

$$\hat{y}_1 = 16,85 + 2,2 = 19,05$$

$$\hat{y}_2 = 16,85 - 2,2 = 13,65;$$

$$\hat{y}_3 = 16,85 + 2,2 = 19,05;$$

$$\hat{y}_4 = 16,85 - 2,2 = 13,65.$$

Результаты расчета дисперсии адекватности представлены в таблице 4.

Дисперсия адекватности:

$$s^2_{ад} = \frac{1}{4-2} (4,20 + 0,90 + 4,20 + 1,10) = 5,2$$

Таблица 4

Расчет дисперсии адекватности

№ опыта	$y_{эксп}$	$\hat{y}$	$(\hat{y} - y_{эксп})$	$(\hat{y} - y_{эксп})^2$
1	21,1	19,05	-2,05	4,20
2	14,6	13,65	-0,95	0,90
3	17,0	19,05	-2,05	4,20
4	14,7	13,65	-1,05	1,10

Найдем расчетное значение критерия Фишера с помощью формулы (14):

$$F_{расч.} = \frac{S_{ост.}^2}{S_{воспр.}^2} = \frac{5,2}{1} = 5,2.$$

Табличное значение критерия F_T (Приложение 2) находим при уровне значимости $p = 0,05$ по соответствующим степеням свободы, где $f_{ад} = N - l$ и $f_{воспр} = N(m - 1)$:

$$f_{ад} = N - l = 4 - 2 = 2 \text{ и } f_{воспр} = (m - 1) = (3 - 1) = 2:$$

$$F_{табл.} = 19,2$$

Если выполняется условие $F_{расч.} < F_{табл.}$, то уравнение регрессии адекватно результатам экспериментальных исследований. В данном случае $5,2 < 19,2$. Следовательно, полученное уравнение регрессии адекватно результатам экспериментальных исследований.

8. Проведем интерпретацию полученной модели:

$$y = 16,85 - 2,2x_1.$$

Из уравнения следует, что на относительную площадь остаточных загрязнений металлической поверхности наибольшее влияние оказывает коэффициент при факторе x_1 — плотность мощности. Анализ знака коэффициента показал, что коэффициент при x_1 отрицательный. Значит с увеличением этого фактора уменьшается отклик, т.е. увеличивается прочность.

2.3. Пример 3

Условие задачи. Для исследования влияния технологических факторов на пористость пшеничного хлеба были проведены эксперименты по плану ПФЭ типа 2^3 .

В качестве факторов, влияющих на пористость хлеба y (%), были выбраны следующие:

z_1 – количество молотого ядра кедрового ореха (%): $z_1^{\min} = 0,27$, $z_1^{\max} = 0,33$;

z_2 – количество ржаной муки (%): $z_2^{\min} = 4$, $z_2^{\max} = 16$;

z_3 – длительность расстойки теста (кгс/см²): $z_3^{\min} = 2$, $z_3^{\max} = 8$.

Построить математическую модель, учитывая все взаимодействия факторов. Проверить полученную модель на адекватность и произвести ее интерпретацию.

Таблица 1

Исходная матрица планирования ПФЭ типа 2^3

№ опыта	Изучаемые факторы			Результаты опытов, y
	z_1	z_2	z_3	
1	-1	-1	-1	54
2	-1	-1	+1	64
3	-1	+1	-1	50
4	-1	+1	+1	54
5	+1	-1	-1	64
6	+1	-1	+1	70
7	+1	+1	-1	64
8	+1	+1	+1	68

Решение. 1. Для каждого фактора определяем центр плана, интервал варьирования, зависимость кодированной переменной x_i от натуральной z_i по формулам (3,4). Результаты заносим в таблицу 2.

Таблица 2

Кодирование факторов

Факторы	Верхний уровень $z_i^{\max}$	Нижний уровень $z_i^{\min}$	Центр z_i^0	Интервал варьирования Δz_i	Зависимость кодированной переменной от натуральной
z_1	0,33	0,27	0,3	0,03	$x_1 = \frac{z_1 - 0,3}{0,03}$
z_2	16	4	10	6	$x_2 = \frac{z_2 - 10}{6}$
z_3	3	2	2,5	0,5	$x_3 = \frac{z_3 - 2,5}{0,5}$

Перейдем от размерных значений факторов к безразмерным с помощью формулы кодирования (2):

$$x_1^{\max} = \frac{z_1^{\max} - z_1^0}{\Delta z_1} = \frac{0,33 - 0,3}{0,03} = +1;$$

$$x_1^{\min} = \frac{z_1^{\min} - z_1^0}{\Delta z_1} = \frac{0,27 - 0,35}{0,03} = -1;$$

$$x_2^{\max} = \frac{z_2^{\max} - z_2^0}{\Delta z_2} = \frac{16 - 10}{6} = +1;$$

$$x_2^{\min} = \frac{z_2^{\min} - z_2^0}{\Delta z_2} = \frac{4 - 10}{6} = -1;$$

$$x_3^{\max} = \frac{z_3^{\max} - z_3^0}{\Delta z_3} = \frac{3 - 2,5}{0,5} = +1;$$

$$x_3^{\min} = \frac{z_3^{\min} - z_3^0}{\Delta z_3} = \frac{2 - 2,5}{0,5} = -1;$$

Определяем число опытов по формуле (1): $N = 2^k = 2^3 = 8$.

2. Строим матрицу планирования с учетом всех взаимодействий (табл. 3).

Таблица 3

Матрица планирования

№ опыта	Факторы								Результат опыта $y_{\text{экс}}$
	x_0	x_1	x_2	x_3	x_1x_2	x_1x_3	x_2x_3	$x_1x_2x_3$	
1	+1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	-1	54
2	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	64
3	+1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	+1	50
4	+1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	-1	54
5	+1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	+1	64
6	+1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	-1	70
7	+1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	-1	64
8	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	68

Согласно уравнению (7), уравнение регрессии будет иметь вид:

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_1x_3 + b_{23}x_2x_3 + b_{123}x_1x_2x_3,$$

3. Рассчитаем коэффициенты, входящие в уравнение регрессии, с помощью формулы (6):

$$b_0 = \frac{1}{8}(54 + 64 + 50 + 54 + 64 + 70 + 64 + 68) = 61$$

$$b_1 = \frac{1}{8}(-54 - 64 - 50 - 54 + 64 + 70 + 64 + 68) = 5,5$$

$$b_2 = \frac{1}{8}(-54 - 64 + 50 + 54 - 64 - 70 + 64 + 68) = -2$$

$$b_3 = \frac{1}{8}(-54 + 64 - 50 + 54 - 64 + 70 - 64 + 68) = 3$$

$$b_{12} = \frac{1}{8}(+54 + 64 - 50 - 54 - 64 - 70 + 64 + 68) = 1,5$$

$$b_{13} = \frac{1}{8}(+54 - 64 + 50 - 54 - 64 + 70 - 64 + 68) = -0,5$$

$$b_{23} = \frac{1}{8}(+54 - 64 - 50 + 54 + 64 - 70 - 64 + 68) = -1$$

$$b_{123} = \frac{1}{8}(-54 + 64 + 50 - 54 + 64 - 70 - 64 + 68) = 0,5$$

После подстановки рассчитанных коэффициентов уравнение регрессии:

$$y = 61 + 5,5x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 1,5x_1x_2 - 0,5x_1x_3 - 1x_2x_3 + 0,5x_1x_2x_3.$$

4. Далее необходимо определить значимость коэффициентов в уравнении регрессии. С этой целью необходимо найти дисперсию воспроизводимости по формуле (8).

В данном случае было проведено четыре параллельных опыта в центре плана, в которых получены следующие значения:

$$y_1^0 = 67\%; y_2^0 = 65\%; y_3^0 = 62\%; y_4^0 = 64\%.$$

По формуле (9) находим среднее значение $\bar{y}$:

$$\bar{y} = \frac{1}{4}(67 + 65 + 62 + 64) = 64,5.$$

Тогда дисперсия воспроизводимости вычисляется по формуле:

$$S_{\text{воспр.}}^2 = \frac{1}{4-1}(64,5 - 67)^2 + (64,5 - 65)^2 + (64,5 - 62)^2 + (64,5 - 64)^2 = 4,33.$$

5. Все коэффициенты определяются на значимость с одинаковой точностью по формуле (10).

$$S_{bj} = \sqrt{\frac{S_{\text{воспр.}}^2}{N}} = \sqrt{\frac{4,33}{8}} = 0,74.$$

Найдем расчетные значения критерия Стьюдента по формуле (11):

$$\begin{aligned} t_0 &= \frac{|61|}{0,74} = 82,43 & t_{12} &= \frac{|1,5|}{0,74} = 2,02; \\ t_1 &= \frac{|5,5|}{0,74} = 20,25; & t_{13} &= \frac{|-0,5|}{0,74} = 0,68; \\ t_2 &= \frac{|-2|}{0,74} = 2,70 & t_{23} &= \frac{|-1|}{0,74} = 1,35; \\ t_3 &= \frac{|3|}{0,74} = 4,05 & t_{123} &= \frac{|0,5|}{0,74} = 0,68 \end{aligned}$$

Для нахождения табличного значения критерия Стьюдента задаемся уровнем значимости $p=0,95$ и степенью свободы $f=m-1=4-1=3$. $t_{0,05}(f)=3,18$.

Значимость коэффициентов уравнения регрессии определяется путем сравнения полученных значений критерия Стьюдента с табличным. Если для коэффициента выполняется условие $t_{расч.} > t_a(f)$, то коэффициент считается значимым. Таким образом, коэффициенты при x_2 , x_{12} , x_{13} , x_{23} , и x_{123} являются незначимыми и в уравнение регрессии не входят.

6. После оценки значимости уравнение регрессии принимает вид:

$$y = 61 + 5,5x_1 + 3x_3$$

7. Проверим адекватность полученного уравнения по результатам экспериментальных исследований с помощью критерия Фишера. Для нахождения расчетного значения критерия Фишера необходимо найти остаточную дисперсию по формуле:

$$s^2_{ад} = \frac{m}{N-l} \sum_{j=1}^N (\hat{y}_j - y_j)^2.$$

Для этого найдем значения изучаемого параметра по полученному уравнению регрессии, подставляя +1 или -1 вместо x_i в соответствии с номером j эксперимента из таблицы 3:

$$\begin{aligned} \hat{y}_1 &= 61 - 5,5 - 3 = 52,5; \\ \hat{y}_2 &= 61 - 5,5 + 3 = 58,5; \\ \hat{y}_3 &= 61 - 5,5 - 3 = 52,5; \\ \hat{y}_4 &= 61 - 5,5 + 3 = 58,5; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{y}_5 &= 61 - 5,5 - 3 = 63,5; \\ \hat{y}_6 &= 61 + 5,5 + 33 = 69,5; \\ \hat{y}_7 &= 61 + 5,5 - 3 = 63,5; \\ \hat{y}_8 &= 61 + 5,5 + 3 = 69,5.\end{aligned}$$

Результаты расчета дисперсии адекватности представлены в таблице 4.

Таблица 4

Расчет дисперсии адекватности

№ опыта	$y_{\text{эксп}}$	$\hat{y}$	$(\hat{y} - y_{\text{эксп}})$	$(\hat{y} - y_{\text{эксп}})^2$
1	54	52,5	-1,5	2,25
2	64	58,5	-5,5	30,25
3	50	52,5	2,5	6,25
4	54	58,5	4,5	20,25
5	64	63,5	-1,5	2,25
6	70	69,5	-0,5	0,25
7	64	63,6	-0,5	0,25
8	68	69,5	1,5	2,25

Дисперсия адекватности модели равна:

$$s^2_{\text{ад}} = \frac{1}{8-3} (2,25 + 30,25 + 6,25 + 20,25 + 2,25 + 0,25 + 0,25 + 2,25) = 12,4.$$

Найдем расчетное значение критерия Фишера с помощью формулы (14):

$$F_{\text{расч.}} = \frac{S^2_{\text{ост.}}}{S^2_{\text{воспр.}}} = \frac{12,4}{4,33} = 2,86.$$

Табличное значение критерия F_T (Приложение 2) находим при уровне значимости $p = 0,05$ по соответствующим степеням свободы, где $f_{\text{ад}} = N - l$ и $f_{\text{воспр}} = N(m - 1)$:

$$f_{\text{ад}} = N - l = 8 - 3 = 5 \text{ и } f_{\text{воспр}} = (m - 1) = (4 - 1) = 3:$$

$$F_{\text{табл.}} = 9,0.$$

Если выполняется условие $F_{\text{расч.}} < F_{\text{табл.}}$, то уравнение регрессии адекватно результатам экспериментальных исследований. В данном случае $1,28 < 5,32$. Следовательно, полученное уравнение регрессии адекватно результатам экспериментальных исследований.

8. Проведем интерпретацию полученной модели:

$$y = 61 + 5,5x_1 + 3x_3.$$

Из уравнения следует, что наибольшее значение по абсолютной величине имеет коэффициент x_1 – количество молотого ядра кедрового ореха. Следовательно, он будет оказывать наибольшее влияние на пористость хлеба. Затем по силе влияния на отклик следует фактор x_3 – время расслойки теста. Анализ знаков коэффициентов показал, что коэффициенты при x_1 и x_3 положительные, значит с увеличением этих факторов растет отклик, т.е. увеличивается пористость хлеба.

2.4. Пример 4

Условие задачи. Для исследования влияния некоторых технологических факторов на прочность склеивания двух поверхностей полиуретановым клеем были поставлены эксперименты по плану ПФЭ типа 2^3 , причем каждый эксперимент повторялся по три раза. В качестве факторов, влияющих на прочность y (кг/см^2), были выбраны следующие:

z_1 – количество наносимого клея (г/см^2): $z_1^{\min} = 0,02$, $z_1^{\max} = 0,06$;

z_2 – время активации клеевой пленки (сек): $z_2^{\min} = 60$, $z_2^{\max} = 300$;

z_3 – давление прессования при склеивании (кгс/см^2): $z_3^{\min} = 2$, $z_3^{\max} = 8$.

Построить математическую модель, учитывая все взаимодействия факторов. Проверить полученную модель на адекватность и произвести ее интерпретацию.

Таблица 1

Исходная матрица планирования ПФЭ типа 2^3

№ опыта	Изучаемые факторы			Результаты опытов		
	z_1	z_2	z_3	y_1	y_2	y_3
1	+1	+1	+1	7,4	8,4	6,4
2	–1	+1	+1	8,6	7,0	7,8
3	+1	–1	+1	12,3	9,0	9,3
4	–1	–1	+1	5,8	5,8	5,7
5	+1	+1	–1	18,8	17	15,2
6	–1	+1	–1	8,4	8,4	6,0
7	+1	–1	–1	11,8	7,0	9,4
8	–1	–1	–1	10,5	7,8	8,1

Алгоритм решения:

- 3) проводим кодирование переменных;
- 2) строим матрицу планирования в кодированных переменных с учетом всех взаимодействий и дополняем ее столбцом средних значений определяемого параметра;
- 3) рассчитываем коэффициенты уравнения регрессии;
- 4) вычисляем дисперсию воспроизводимости;

- 5) проверяем рассчитанные коэффициенты на значимость;
- 6) записываем уравнение регрессии в кодированных переменных;
- 7) проверяем уравнение регрессии на адекватность с помощью критерия Фишера;
- 8) проводим интерпретацию полученной математической модели.

Решение. 1. Для каждого фактора определяем центр плана, интервал варьирования, зависимость кодированной переменной x_i от натуральной z_i по формулам (1-3). Занести результаты в таблицу 2.

Таблица 2

Кодирование факторов

Факторы	Верхний уровень z_i^{max}	Нижний уровень z_i^{min}	Центр z_i^o	Интервал варьирования Δz_i	Зависимость кодированной переменной от натуральной
z_1	0,06	0,02	0,04	0,02	$x_1 = \frac{z_1 - 0,04}{0,02}$
z_2	300	60	180	120	$x_2 = \frac{z_2 - 180}{120}$
z_3	8	2	5	3	$x_3 = \frac{z_3 - 5}{3}$

2. По формуле (8) рассчитываем средние значения результатов для каждого эксперимента:

$$\bar{y}_1 = \frac{1}{3}(7,4 + 8,4 + 6,4) = 7,4$$

$$\bar{y}_5 = \frac{1}{3}(18,8 + 17,0 + 15,2) = 17,0$$

$$\bar{y}_2 = \frac{1}{3}(8,6 + 7,0 + 7,8) = 7,8$$

$$\bar{y}_6 = \frac{1}{3}(8,4 + 8,4 + 6,0) = 7,6$$

$$\bar{y}_3 = \frac{1}{3}(12,3 + 9,0 + 9,3) = 10,2$$

$$\bar{y}_7 = \frac{1}{3}(11,8 + 7,0 + 9,4) = 9,4$$

$$\bar{y}_4 = \frac{1}{3}(5,8 + 5,8 + 5,7) = 5,77$$

$$\bar{y}_8 = \frac{1}{3}(10,5 + 7,8 + 8,1) = 8,8$$

Строим матрицу планирования с учетом всех взаимодействий и средних значений определяемого параметра (табл. 3).

Таблица 3

Матрица планирования для обработки результатов

№	Факторы			Взаимодействия				Результаты опытов			$\bar{y}$
	x_1	x_2	x_3	x_1x_2	x_1x_3	x_2x_3	$x_1x_2x_3$	y_1	y_2	y_3	
1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	7,4	8,4	6,4	7,4
2	-1	+1	+1	-1	-1	+1	-1	8,6	7,0	7,8	7,8
3	+1	-1	+1	-1	+1	-1	-1	12,3	9,0	9,3	10,2
4	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	5,8	5,8	5,7	5,77
5	+1	+1	-1	+1	-1	-1	-1	15,2	18,8	17,0	17,0
6	-1	+1	-1	-1	+1	-1	+1	8,4	8,4	6,0	7,6
7	+1	-1	-1	-1	-1	+1	+1	11,8	7,0	9,4	9,4
8	-1	-1	-1	+1	+1	+1	-1	10,5	7,8	8,1	8,8

3. Вычисляем коэффициенты уравнения регрессии по формуле (5):

$$b_0 = \frac{1}{8} \sum_{j=1}^8 \bar{y}_j = \frac{1}{8} (7,4 + 7,8 + 10,2 + 5,77 + 17,0 + 7,6 + 9,4 + 8,8) = 9,25;$$

$$b_1 = \frac{1}{8} \sum_{j=1}^8 x_{j1} \bar{y}_j = \frac{1}{8} (7,4 - 7,8 + 10,2 - 5,77 + 17,0 - 7,6 + 9,4 - 8,8) = 1,75$$

$$b_2 = \frac{1}{8} \sum_{j=1}^8 x_{j2} \bar{y}_j = \frac{1}{8} (7,4 + 7,8 - 10,2 - 5,77 + 17,0 + 7,6 - 9,4 - 8,8) = 0,7$$

$$b_3 = \frac{1}{8} \sum_{j=1}^8 x_{j3} \bar{y}_j = \frac{1}{8} (7,4 + 7,8 + 10,2 + 5,77 - 17,0 - 7,6 - 9,4 - 8,8) = -1,45$$

$$b_{12} = \frac{1}{8} \sum_{j=1}^8 x_{j1} x_{j2} \bar{y}_j = \frac{1}{8} (7,4 - 7,8 - 10,2 + 5,77 + 17,0 - 7,6 - 9,4 + 8,8) = 0,5$$

$$b_{13} = \frac{1}{8} \sum_{j=1}^8 x_{j1} x_{j3} \bar{y}_j = \frac{1}{8} (7,4 - 7,8 + 10,2 - 5,77 - 17,0 + 7,6 - 9,4 + 8,8) = -0,75$$

$$b_{23} = \frac{1}{8} \sum_{j=1}^8 x_{j2} x_{j3} \bar{y}_j = \frac{1}{8} (7,4 + 7,8 - 10,2 - 5,77 - 17,0 - 7,6 + 9,4 + 8,8) = -0,9$$

$$b_{123} = \frac{1}{8} \sum_{j=1}^8 x_{j1} x_{j2} x_{j3} \bar{y}_j = \frac{1}{8} (7,4 - 7,8 - 10,2 + 5,77 - 17,0 + 7,6 + 9,4 - 8,8) = -1,7$$

В таблицу 4 заносим найденные коэффициенты уравнения регрессии.

Таблица 4

Коэффициенты уравнения регрессии

b_0	b_1	b_2	b_3	b_{12}	b_{13}	b_{23}	b_{123}
9,25	1,75	0,7	-1,45	0,5	-0,75	-0,9	-1,7

Запишем уравнение регрессии по формуле (6):

$$y = 9,25 + 1,75x_1 + 0,7x_2 - 1,45x_3 + 0,5x_1x_2 - 0,75x_1x_3 - 0,9x_2x_3 - 1,7x_1x_2x_3 \quad (6)$$

4. Находим дисперсию воспроизводимости $s^2_{\text{воспр}}$. Предварительно вычисляем выборочные дисперсии результатов опытов по формуле (7). Результаты расчетов заносим в таблицу 5.

Суммируя элементы последнего столбца таблицы 5, получаем:

$$\sum_{j=1}^8 s_j^2 = 18,08.$$

Отсюда получаем дисперсию воспроизводимости:

$$s^2_{\text{воспр}} = \frac{1}{8} \sum_{j=1}^8 s_j^2 = \frac{1}{8} \cdot 18,08 = 2,26.$$

Таблица 5

Расчет выборочных дисперсий

j	y_1	y_2	y_3	$\bar{y}_j$	$(y_{j1} - \bar{y}_j)^2$	$(y_{j2} - \bar{y}_j)^2$	$(y_{j3} - \bar{y}_j)^2$	s_j^2
1	7,4	8,4	6,4	7,4	0	1	1	1
2	8,6	7,0	7,8	7,8	0,64	0,64	0	0,64
3	12,3	9,0	9,3	10,2	4,41	1,44	0,81	3,33
4	5,8	5,8	5,7	5,77	0,0009	0,0009	0,0049	0,00335
5	18,8	17,0	15,2	17,0	3,24	0	3,24	3,24
6	8,4	8,4	6,0	7,6	0,64	0,64	2,56	1,92
7	11,8	7,0	9,4	9,4	5,76	5,76	0	5,76
8	10,5	7,8	8,1	8,8	2,89	1	0,49	2,19

По формуле (11) определяем среднее квадратичное отклонение коэффициентов:

$$s(b_j) = \sqrt{\frac{s^2_{\text{воспр}}}{Nm}} = \sqrt{\frac{2,26}{8 \cdot 3}} = 0,31.$$

5. Значимость коэффициентов проверяем по критерию Стьюдента. Отношение абсолютной величины коэффициента к его ошибке имеет распреде-

ление Стьюдента. Для каждого коэффициента определяем t-отношение по формуле (10):

$$t_0 = \frac{|9,25|}{0,31} = 29,84 \quad t_1 = \frac{|1,75|}{0,31} = 5,66 \quad t_2 = \frac{|0,7|}{0,31} = 2,26 \quad t_3 = \frac{|-1,45|}{0,31} = 4,68,$$

$$t_{12} = \frac{|0,5|}{0,31} = 1,61 \quad t_{13} = \frac{|-0,75|}{0,31} = 2,42 \quad t_{23} = \frac{|-0,9|}{0,31} = 2,9 \quad t_{123} = \frac{|-1,7|}{0,31} = 5,48.$$

Сравним t-отношение с табличным значением критерия Стьюдента для уровня значимости $p=0,05$ и числа степеней свободы $f = N(m-1)=8 \cdot 2=16$. Находим, что $t_p(f)=2,12$. Выборочные коэффициенты, для которых $t_j \leq t_p(f)$, незначимы, и их следует исключить из уравнения регрессии. При проверке значимости коэффициентов установлено, что все коэффициенты кроме b_{12} значимы. Незначимый коэффициент b_{12} исключаем из уравнения регрессии.

6. Получено уравнение регрессии:

$$y = 9,25 + 1,75x_1 + 0,7x_2 - 1,45x_3 - 0,75x_1x_3 - 0,9x_2x_3 - 1,7x_1x_2x_3$$

7. Проверим полученное уравнение (7) на адекватность по критерию Фишера. Так как дисперсия воспроизводимости найдена в предыдущем пункте, то для определения расчетного значения критерия F необходимо вычислить остаточную дисперсию или дисперсию адекватности s_{ad}^2 .

Для этого найдем значения изучаемого параметра по полученному уравнению регрессии (7), подставляя +1 или -1 вместо x_i в соответствии с номером j эксперимента из таблицы 3:

$$\hat{y}_1 = 9,25 + 1,75 + 0,7 - 1,45 - 0,75 - 0,9 - 1,7 = 6,9;$$

$$\hat{y}_2 = 9,25 + 1,75 (-1) + 0,7 - 1,45 - 0,75 (-1) - 0,9 - 1,7 (-1) = 8,3;$$

$$\hat{y}_3 = 9,25 + 1,75 + 0,7 (-1) - 1,45 - 0,75 - 0,9 (-1) - 1,7 (-1) = 10,7;$$

$$\hat{y}_4 = 9,25 + 1,75 (-1) + 0,7 (-1) - 1,45 - 0,75(-1) - 0,9 (-1) - 1,7 = 5,3;$$

$$\hat{y}_5 = 9,25 + 1,75 + 0,7 - 1,45 (-1) - 0,75 (-1) - 0,9 (-1) - 1,7 (-1) = 16,5;$$

$$\hat{y}_6 = 9,25 + 1,75 (-1) + 0,7 - 1,45 (-1) - 0,75 - 0,9 (-1) - 1,7 = 8,1;$$

$$\hat{y}_7 = 9,25 + 1,75 + 0,7 (-1) - 1,45 (-1) - 0,75 (-1) - 0,9 - 1,7 = 9,85;$$

$$\hat{y}_8 = 9,25 + 1,75 (-1) + 0,7 (-1) - 1,45 (-1) - 0,75 - 0,9 - 1,7 (-1) = 8,3.$$

Дисперсию адекватности вычисляем по формуле (14):

$$s^2_{ад} = \frac{3}{8-7} \sum_{j=1}^8 (\hat{y}_j - \bar{y}_j)^2 = 3 \cdot [(6,9-7,4)^2 + (8,3-7,8)^2 + (10,7-10,2)^2 + (5,3-5,77)^2 + (16,5-17,0)^2 + (8,1-7,6)^2 + (9,85-9,4)^2 + (8,3-8,8)^2] = 5,91$$

Расчетное значение критерия Фишера $F_{1-p}(f_{ад}, f_{воспр})$ определяем по формуле (13):

$$F = \frac{s^2_{ад}}{s^2_{воспр}} = \frac{5,91}{2,26} = 2,62.$$

Табличное значение критерия F_T находим из таблиц критических точек распределения Фишера при уровне значимости $\alpha = 0,05$ по соответствующим степеням свободы, где $f_{ад} = N - l$ и $f_{воспр} = N(m - 1)$:

$$f_{ад} = N - l = 8 - 7 = 1 \text{ и } f_{воспр} = N(m - 1) = 8(3 - 1) = 16:$$

$$F_{табл.} = 4,49.$$

Так как расчетное значение критерия Фишера $F < F_{Тл.}$, то уравнение регрессии (7) адекватно.

8. Проведем интерпретацию полученной модели (7):

$$y = 9,25 + 1,75x_1 + 0,7x_2 - 1,45x_3 - 0,75x_1x_3 - 0,9x_2x_3 - 1,7x_1x_2x_3.$$

Из уравнения следует, что наибольшее значение по абсолютной величине имеет коэффициент x_1 – количество наносимого клея, следовательно, он будет оказывать наибольшее влияние на прочность. Затем по силе влияния на отклик следуют: тройное взаимодействие всех факторов $x_1x_2x_3$; фактор x_3 – давление пресса при склеивании; парное взаимодействие x_2x_3 – сочетание времени активации клеевой пленки и уровня давления при склеивании; парное взаимодействие x_1x_3 – сочетание количества наносимого клея и уровня давления при склеивании; фактор x_2 – время активации клеевой пленки.

Характер коэффициентов показал, т.к. коэффициенты при x_1 и x_2 положительны, то с увеличением этих факторов растет отклик, т.е. увеличивается прочность. Коэффициенты при x_3 , x_1x_3 , x_2x_3 , $x_1x_2x_3$ отрицательные - это значит, что с уменьшением фактора x_3 и перечисленных взаимодействий значение отклика будет возрастать, а с увеличением – убывать.

МНОГОВАРИАНТНЫЕ ЗАДАНИЯ

Вариант № 1

Для изучения действия некоторых технологических факторов на прочность y (кг) сварки нетканых клееных материалов были поставлены эксперименты по плану ПФЭ 2^3 .

В качестве факторов, влияющих на эту величину, были взяты следующие:

z_1 – температура нагрева электрода (С): $z_1^{\min} = 180$, $z_1^{\max} = 220$;

z_2 – давление роликов (кг/см²): $z_2^{\min} = 25$, $z_2^{\max} = 35$;

z_3 – скорость продвижения материала (м/мин): $z_3^{\min} = 1,5$, $z_3^{\max} = 3$.

Построить математическую модель, учитывая все взаимодействия факторов. Проверить полученную модель на адекватность и произвести ее интерпретацию.

Исходная матрица планирования ПФЭ типа 2^3

№ опыта	Исследуемые факторы			Результаты опытов		
	z_1	z_2	z_3	y_1	y_2	y_3
1	+1	+1	+1	508	504	588
2	–1	+1	+1	212	254	226
3	+1	–1	+1	380	360	370
4	–1	–1	+1	280	260	290
5	+1	+1	–1	850	845	860
6	–1	+1	–1	638	656	640
7	+1	–1	–1	850	748	728
8	–1	–1	–1	652	642	598

Вариант № 2

Для изучения действия некоторых технологических факторов на прочность y (кг) сварки нетканых клееных материалов были поставлены эксперименты по плану ПФЭ 2^3 .

В качестве факторов, влияющих на эту величину, были взяты следующие:

z_1 – температура нагрева электрода (С): $z_1^{\min} = 180$, $z_1^{\max} = 220$;

z_2 – давление роликов (кг/см²): $z_2^{\min} = 25$, $z_2^{\max} = 35$;

z_3 – скорость продвижения материала (м/мин): $z_3^{\min} = 1,5$, $z_3^{\max} = 3$.

Построить математическую модель, учитывая все взаимодействия факторов. Проверить полученную модель на адекватность и произвести ее интерпретацию.

Исходная матрица планирования ПФЭ типа 2^3

№ опыта	Изучаемые факторы			Результаты опытов		
	z_1	z_2	z_3	y_1	y_2	y_3
1	+1	+1	+1	408	404	388
2	–1	+1	+1	312	304	306
3	+1	–1	+1	328	336	330
4	–1	–1	+1	281	265	274
5	+1	+1	–1	650	646	666
6	–1	+1	–1	538	556	540
7	+1	–1	–1	607	621	628
8	–1	–1	–1	552	542	528

Вариант № 3

Для исследования влияния некоторых технологических факторов на прочность склеивания двух поверхностей полиуретановым клеем (при фиксированном количестве наносимого клея $0,01 \text{ г/см}^2$) были поставлены эксперименты по плану ПФЭ 2^3 .

В качестве факторов, влияющих на прочность y (кг/2,5 см^2), были выбраны следующие:

z_1 – высота неровностей материала (мкм): $z_1^{\min} = 20$, $z_1^{\max} = 80$;

z_2 – время активации клеевой пленки (сек): $z_2^{\min} = 60$, $z_2^{\max} = 300$;

z_3 – давление прессования при склеивании (кгс/см^2): $z_3^{\min} = 2$, $z_3^{\max} = 8$.

Построить математическую модель, учитывая все взаимодействия факторов. Проверить полученную модель на адекватность и произвести ее интерпретацию.

Исходная матрица планирования ПФЭ типа 2^3

№ опыта	Изучаемые факторы			Результаты опытов		
	z_1	z_2	z_3	y_1	y_2	y_3
1	+1	+1	+1	8,0	7,6	7,8
2	−1	+1	+1	5,9	6,3	6,0
3	+1	−1	+1	5,8	6,0	5,7
4	−1	−1	+1	6,0	5,98	6,02
5	+1	+1	−1	7,5	7,6	7,7
6	−1	+1	−1	5,3	5,5	5,4
7	+1	−1	−1	8,7	8,9	8,8
8	−1	−1	−1	4.19	4.2	4,21

Вариант № 4

Для исследования влияния некоторых технологических факторов на прочность склеивания двух материалов полиуретановым клеем (при фиксированном количестве наносимого клея $0,06 \text{ г/см}^2$) были поставлены эксперименты по плану ПФЭ 2^3 .

В качестве факторов, влияющих на прочность y (кг/2,5 см^2), были выбраны следующие:

z_1 – высота неровностей материала (мкм): $z_1^{\min} = 20$, $z_1^{\max} = 80$;

z_2 – время активации клеевой пленки (сек): $z_2^{\min} = 60$, $z_2^{\max} = 300$;

z_3 – давление прессования при склеивании (кгс/см^2): $z_3^{\min} = 2$, $z_3^{\max} = 8$.

Построить математическую модель, учитывая все взаимодействия факторов. Проверить полученную модель на адекватность и произвести ее интерпретацию.

Исходная матрица планирования ПФЭ типа 2^3

№ опыта	Изучаемые факторы			Результаты опытов		
	z_1	z_2	z_3	y_1	y_2	y_3
1	+1	+1	+1	7,4	7,3	7,5
2	–1	+1	+1	10,4	10,6	10,8
3	+1	–1	+1	10,2	10,3	10,1
4	–1	–1	+1	7,4	7,5	7,6
5	+1	+1	–1	16,8	17	17,2
6	–1	+1	–1	10,8	11,2	11,0
7	+1	–1	–1	9,3	9,5	9,4
8	–1	–1	–1	10,2	10,3	10,1

Вариант № 5

Для изучения действия низких температур на прочность y (кг) хлопчатобумажных тканей были поставлены эксперименты по плану ПФЭ 2^3 .

В качестве факторов, влияющих на эту величину, были взяты следующие (при 25-ти циклах замораживание – оттаивание):

z_1 – температура замораживания ($^{\circ}\text{C}$): $z_1^{\min} = -5$, $z_1^{\max} = -70$;

z_2 – длительность замораживания (мин): $z_2^{\min} = 30$, $z_2^{\max} = 240$;

z_3 – температура оттаивания ($^{\circ}\text{C}$): $z_3^{\min} = 20$, $z_3^{\max} = 100$.

Построить математическую модель, учитывая все взаимодействия факторов. Проверить полученную модель на адекватность и произвести ее интерпретацию.

Исходная матрица планирования ПФЭ типа 2^3

№ опыта	Исследуемые факторы			Результаты опытов		
	z_1	z_2	z_3	y_1	y_2	y_3
1	+1	+1	+1	43,6	43,4	44,6
2	+1	–1	+1	49,4	49,0	48,5
3	–1	–1	+1	52,6	52,8	53,2
4	–1	+1	+1	53,8	53,0	54,8
5	+1	–1	–1	51,2	52,0	51,6
6	+1	+1	–1	50,5	51,7	49,8
7	–1	+1	–1	45,2	45,8	45,6
8	–1	–1	–1	52,7	52,3	51,8

Вариант № 6

Для изучения действия низких температур на прочность y (кг) хлопчатобумажных тканей были поставлены эксперименты по плану ПФЭ 2^3 .

В качестве факторов, влияющих на эту величину, были взяты следующие (при трех циклах замораживание – оттаивание):

z_1 – температура замораживания ($^{\circ}\text{C}$): $z_1^{\min} = -5$, $z_1^{\max} = -70$;

z_2 – длительность замораживания (мин): $z_2^{\min} = 30$, $z_2^{\max} = 240$;

z_3 – температура оттаивания ($^{\circ}\text{C}$): $z_3^{\min} = 20$, $z_3^{\max} = 100$.

Построить математическую модель, учитывая все взаимодействия факторов. Проверить полученную модель на адекватность и произвести ее интерпретацию.

Исходная матрица планирования ПФЭ типа 2^3

№ опыта	Исследуемые факторы			Результаты опытов		
	z_1	z_2	z_3	y_1	y_2	y_3
1	+1	−1	+1	53,6	53,4	55,1
2	+1	+1	+1	51,7	51,9	52,3
3	−1	+1	+1	47,5	47,9	46,3
4	−1	−1	+1	48,8	48,6	49,6
5	+1	+1	−1	48,2	48,6	47,0
6	+1	−1	−1	49,5	49,1	49,4
7	−1	−1	−1	49,2	48,8	50,1
8	−1	+1	−1	50,7	50,3	51,0

Вариант № 7

Для исследования влияния некоторых факторов вакуумной сушки на усадку материала по толщине y (% полученной толщины образца после сушки от первоначальной) были поставлены эксперименты по плану ПФЭ 2^3 .

В качестве факторов, влияющих на эту величину, были выбраны следующие:

z_1 – остаточное давление (кПа): $z_1^{\min} = 1,3$, $z_1^{\max} = 91,3$;

z_2 – сила механического прижатия материала к греющей поверхности (кПа): $z_2^{\min} = 0$, $z_2^{\max} = 98$;

z_3 – температура греющей поверхности (С): $z_3^{\min} = 30$, $z_3^{\max} = 90$.

Построить математическую модель, учитывая все взаимодействия факторов. Проверить полученную модель на адекватность и произвести ее интерпретацию.

Исходная матрица планирования ПФЭ типа 2^3

№ опыта	Изучаемые факторы			Результаты опытов		
	z_1	z_2	z_3	y_1	y_2	y_3
1	–1	+1	+1	73,0	74,0	75,0
2	–1	+1	–1	77,0	77,6	78,5
3	–1	–1	+1	83,5	83,8	82,0
4	–1	–1	–1	88,0	87,6	87,5
5	+1	+1	+1	65,5	66,0	66,5
6	+1	+1	–1	85,2	84,2	84,0
7	+1	–1	+1	80,0	80,2	81,2
8	+1	–1	–1	90,3	89,3	89,2

Вариант № 8

Для исследования влияния некоторых факторов вакуумной сушки на усадку материала по площади y (% полученной площади образца после сушки от первоначальной) были поставлены эксперименты по плану ПФЭ типа 2^3 .

В качестве факторов, влияющих на эту величину, были выбраны следующие:

z_1 – остаточное давление (кПа): $z_1^{\min} = 1,3$, $z_1^{\max} = 91,3$;

z_2 – сила механического прижатия материала к греющей поверхности (кПа): $z_2^{\min} = 0$, $z_2^{\max} = 98$;

z_3 – температура греющей поверхности (С): $z_3^{\min} = 30$, $z_3^{\max} = 90$.

Построить математическую модель, учитывая все взаимодействия факторов. Проверить полученную модель на адекватность и произвести ее интерпретацию.

Исходная матрица планирования ПФЭ типа 2^3

№ опыта	Изучаемые факторы			Результаты опытов		
	z_1	z_2	z_3	y_1	y_2	y_3
1	–1	+1	+1	93,0	94,0	95,0
2	–1	+1	–1	95,7	95,9	95,9
3	–1	–1	+1	78,5	79,3	79,5
4	–1	–1	–1	88,0	88,1	88,3
5	+1	+1	+1	95,4	95,6	95,5
6	+1	+1	–1	84,0	85,4	85,3
7	+1	–1	+1	97,0	97,0	97,0
8	+1	–1	–1	90,0	90,7	91,1

Вариант № 9

Для исследования влияния некоторых факторов на относительное удлинение при разрыве y (%) синтетического материала были поставлены эксперименты по плану ПФЭ типа 2^3 .

В качестве факторов, влияющих на эту величину, были выбраны следующие:

z_1 – величина деформации (%): $z_1^{\min} = 7$, $z_1^{\max} = 13$;

z_2 – температура термофиксации (С): $z_2^{\min} = 120$, $z_2^{\max} = 150$;

z_3 – продолжительность термофиксации (мин): $z_3^{\min} = 6$, $z_3^{\max} = 12$.

Построить математическую модель, учитывая все взаимодействия факторов. Проверить полученную модель на адекватность и произвести ее интерпретацию.

Исходная матрица планирования ПФЭ типа 2^3

№ опыта	Исследуемые факторы			Результаты опытов		
	z_1	z_2	z_3	y_1	y_2	y_3
1	+1	+1	+1	20,0	20,4	20,6
2	+1	+1	–1	23,9	23,4	23,5
3	+1	–1	+1	24,0	24,2	24,6
4	+1	–1	–1	25,2	24,1	24,8
5	–1	+1	+1	28,2	29,3	29,5
6	–1	+1	–1	30,1	31,4	30,3
7	–1	–1	+1	30,2	29,1	30,4
8	–1	–1	–1	31,0	30,5	30,0

Вариант № 10

Исследовался процесс получения комбинированных материалов. В качестве исследуемой величины была взята релаксация длины образца через сутки y (мм) и проведены эксперименты по плану ПФЭ типа 2^3 .

В качестве факторов, влияющих на релаксацию длины, были выбраны следующие:

z_1 – время прессования (сек): $z_1^{\min} = 12$, $z_1^{\max} = 20$;

z_2 – усилие прессования (Н/м²): $z_2^{\min} = 3 \cdot 10^4$, $z_2^{\max} = 5 \cdot 10^4$;

z_3 – температура прессования (С): $z_3^{\min} = 140$, $z_3^{\max} = 160$.

Построить математическую модель, учитывая все взаимодействия факторов. Проверить полученную модель на адекватность и произвести ее интерпретацию.

Исходная матрица планирования ПФЭ типа 2^3

№ опыта	Изучаемые факторы			Результаты опытов		
	z_1	z_2	z_3	y_1	y_2	y_3
1	+1	+1	+1	4,0	3,9	4,1
2	+1	+1	–1	4,6	4,4	4,5
3	+1	–1	+1	3,5	3,6	3,4
4	+1	–1	–1	3,3	3,7	3,5
5	–1	+1	+1	3,1	3,0	2,9
6	–1	+1	–1	4,7	4,5	4,3
7	–1	–1	+1	3,2	3,0	2,8
8	–1	–1	–1	3,8	4,2	4,0

Вариант № 11

Исследовался процесс получения комбинированных материалов. В качестве исследуемой величины была взята релаксация угла через сутки y (град) и проведены эксперименты по плану ПФЭ типа 2^3 .

В качестве факторов, влияющих на релаксацию угла, были выбраны следующие:

z_1 – время прессования (сек): $z_1^{\min} = 12$, $z_1^{\max} = 20$;

z_2 – усилие прессования (Н/м²): $z_2^{\min} = 3 \cdot 10^4$, $z_2^{\max} = 5 \cdot 10^4$;

z_3 – температура прессования (С): $z_3^{\min} = 140$, $z_3^{\max} = 160$.

Построить математическую модель, учитывая все взаимодействия факторов. Проверить полученную модель на адекватность и произвести ее интерпретацию.

Исходная матрица планирования ПФЭ типа 2^3

№ опыта	Исследуемые факторы			Результаты опытов		
	z_1	z_2	z_3	y_1	y_2	y_3
1	+1	+1	+1	1,2	1,15	1,25
2	+1	+1	–1	1,25	1,3	1,35
3	+1	–1	+1	1,15	1,05	1,1
4	+1	–1	–1	1,18	1,2	1,22
5	–1	+1	+1	0,87	0,93	0,9
6	–1	+1	–1	1,4	1,35	1,45
7	–1	–1	+1	0,9	0,95	0,85
8	–1	–1	–1	1,3	1,28	1,32

Вариант № 12

Для исследования влияния некоторых факторов на относительное удлинение при разрыве y (%) синтетического материала были поставлены эксперименты по плану ПФЭ типа 2^3 .

В качестве факторов, влияющих на эту величину, были выбраны следующие:

z_1 – величина деформации (%): $z_1^{\min} = 7$, $z_1^{\max} = 13$;

z_2 – температура термофиксации (С): $z_2^{\min} = 120$, $z_2^{\max} = 150$;

z_3 – продолжительность термофиксации (мин): $z_3^{\min} = 6$, $z_3^{\max} = 12$.

Построить математическую модель, учитывая все взаимодействия факторов. Проверить полученную модель на адекватность и произвести ее интерпретацию.

Исходная матрица планирования ПФЭ типа 2^3

№ опыта	Исследуемые факторы			Результаты опытов		
	z_1	z_2	z_3	y_1	y_2	y_3
1	+1	+1	+1	10,0	10,4	10,6
2	+1	+1	-1	13,9	13,4	13,5
3	+1	-1	+1	14,0	14,2	14,6
4	+1	-1	-1	15,2	14,1	14,8
5	-1	+1	+1	18,2	19,3	19,5
6	-1	+1	-1	20,1	21,4	20,3
7	-1	-1	+1	20,2	19,1	20,4
8	-1	-1	-1	21,0	20,5	20,0

Вариант № 13

Для изучения действия некоторых технологических факторов на прочность y (кг) сварки нетканых клееных материалов были поставлены эксперименты по плану ПФЭ 2^3 .

В качестве факторов, влияющих на эту величину, были взяты следующие:

z_1 – температура нагрева электрода (С): $z_1^{\min} = 180$, $z_1^{\max} = 220$;

z_2 – давление роликов (кг/см²): $z_2^{\min} = 25$, $z_2^{\max} = 35$;

z_3 – скорость продвижения материала (м/мин): $z_3^{\min} = 1,5$, $z_3^{\max} = 3$.

Построить математическую модель, учитывая все взаимодействия факторов. Проверить полученную модель на адекватность и произвести ее интерпретацию.

Исходная матрица планирования ПФЭ типа 2^3

№ опыта	Исследуемые факторы			Результаты опытов		
	z_1	z_2	z_3	y_1	y_2	y_3
1	+1	+1	+1	308	304	288
2	–1	+1	+1	212	204	206
3	+1	–1	+1	228	236	230
4	–1	–1	+1	181	165	174
5	+1	+1	–1	550	546	566
6	–1	+1	–1	438	456	440
7	+1	–1	–1	507	521	528
8	–1	–1	–1	452	442	428

Вариант № 14

Исследовался процесс получения комбинированных материалов. В качестве исследуемой величины была взята релаксация длины образца через сутки y (мм) и проведены эксперименты по плану ПФЭ типа 2^3 .

В качестве факторов, влияющих на релаксацию длины, были выбраны следующие:

z_1 – время прессования (сек): $z_1^{\min} = 10$, $z_1^{\max} = 28$;

z_2 – усилие прессования (Н/м²): $z_2^{\min} = 3 \cdot 10^4$, $z_2^{\max} = 5 \cdot 10^4$;

z_3 – температура прессования (С): $z_3^{\min} = 120$, $z_3^{\max} = 140$.

Построить математическую модель, учитывая все взаимодействия факторов. Проверить полученную модель на адекватность и произвести ее интерпретацию.

Исходная матрица планирования ПФЭ типа 2^3

№ опыта	Изучаемые факторы			Результаты опытов		
	z_1	z_2	z_3	y_1	y_2	y_3
1	+1	+1	+1	3,0	2,9	3,1
2	+1	+1	–1	3,6	3,4	3,5
3	+1	–1	+1	2,5	2,6	2,4
4	+1	–1	–1	2,3	2,7	2,5
5	–1	+1	+1	2,1	2,0	1,9
6	–1	+1	–1	3,7	3,5	3,3
7	–1	–1	+1	2,2	2,0	1,8
8	–1	–1	–1	2,8	3,2	3,0

Вариант № 15

Для исследования влияния некоторых факторов вакуумной сушки на усадку кожи по площади y (% полученной площади образца после сушки от первоначальной) были поставлены эксперименты по плану ПФЭ типа 2^3 .

В качестве факторов, влияющих на эту величину, были выбраны следующие:

z_1 – остаточное давление (кПа): $z_1^{\min} = 1,3$, $z_1^{\max} = 91,3$;

z_2 – сила механического прижатия полуфабриката кожи к греющей поверхности (кПа): $z_2^{\min} = 0$, $z_2^{\max} = 98$;

z_3 – температура греющей поверхности (С): $z_3^{\min} = 30$, $z_3^{\max} = 90$.

Построить математическую модель, учитывая все взаимодействия факторов. Проверить полученную модель на адекватность и произвести ее интерпретацию.

Исходная матрица планирования ПФЭ типа 2^3

№ опыта	Изучаемые факторы			Результаты опытов		
	z_1	z_2	z_3	y_1	y_2	y_3
1	–1	+1	+1	83,0	84,0	85,0
2	–1	+1	–1	85,7	85,9	85,9
3	–1	–1	+1	68,5	69,3	69,5
4	–1	–1	–1	78,0	78,1	78,3
5	+1	+1	+1	85,4	85,6	85,5
6	+1	+1	–1	74,0	75,4	75,3
7	+1	–1	+1	87,0	87,0	87,0
8	+1	–1	–1	80,0	80,7	81,1

Вариант № 16

Для исследования влияния некоторых факторов на относительное удлинение при разрыве y (%) синтетического материала были поставлены эксперименты по плану ПФЭ типа 2^3 .

В качестве факторов, влияющих на эту величину, были выбраны следующие:

z_1 – величина деформации (%): $z_1^{\min} = 8$, $z_1^{\max} = 14$;

z_2 – температура термофиксации (С): $z_2^{\min} = 140$, $z_2^{\max} = 170$;

z_3 – продолжительность термофиксации (мин): $z_3^{\min} = 7$, $z_3^{\max} = 13$.

Построить математическую модель, учитывая все взаимодействия факторов. Проверить полученную модель на адекватность и произвести ее интерпретацию.

Исходная матрица планирования ПФЭ типа 2^3

№ опыта	Исследуемые факторы			Результаты опытов		
	z_1	z_2	z_3	y_1	y_2	y_3
1	+1	+1	+1	10,0	10,4	10,6
2	+1	+1	–1	13,9	13,4	13,5
3	+1	–1	+1	14,0	14,2	14,6
4	+1	–1	–1	15,2	14,1	14,8
5	–1	+1	+1	18,2	19,3	19,5
6	–1	+1	–1	20,1	21,4	20,3
7	–1	–1	+1	20,2	19,1	20,4
8	–1	–1	–1	21,0	20,5	20,0

Вариант № 17

Исследовался процесс получения комбинированных материалов. В качестве исследуемой величины была взята релаксация длины образца через сутки y (мм) и проведены эксперименты по плану ПФЭ типа 2^3 .

В качестве факторов, влияющих на релаксацию длины, были выбраны следующие:

z_1 – время прессования (сек): $z_1^{\min} = 10$, $z_1^{\max} = 18$;

z_2 – усилие прессования (Н/м²): $z_2^{\min} = 3 \cdot 10^4$, $z_2^{\max} = 5 \cdot 10^4$;

z_3 – температура прессования (С): $z_3^{\min} = 120$, $z_3^{\max} = 140$.

Построить математическую модель, учитывая все взаимодействия факторов. Проверить полученную модель на адекватность и произвести ее интерпретацию.

Исходная матрица планирования ПФЭ типа 2^3

№ опыта	Изучаемые факторы			Результаты опытов		
	z_1	z_2	z_3	y_1	y_2	y_3
1	+1	+1	+1	4,0	3,9	4,1
2	+1	+1	–1	4,6	4,4	4,5
3	+1	–1	+1	3,5	3,6	3,4
4	+1	–1	–1	3,3	3,7	3,5
5	–1	+1	+1	3,1	3,0	2,9
6	–1	+1	–1	4,7	4,5	4,3
7	–1	–1	+1	3,2	3,0	2,8
8	–1	–1	–1	3,8	4,2	4,0

Вариант № 18

Для исследования влияния некоторых факторов вакуумной сушки на усадку материала по толщине y (% полученной толщины образца после сушки от первоначальной) были поставлены эксперименты по плану ПФЭ 2^3 .

В качестве факторов, влияющих на эту величину, были выбраны следующие:

z_1 – остаточное давление (кПа): $z_1^{\min} = 1,4$, $z_1^{\max} = 92,3$;

z_2 – сила механического прижатия материала к греющей поверхности (кПа): $z_2^{\min} = 0$, $z_2^{\max} = 96$;

z_3 – температура греющей поверхности (С): $z_3^{\min} = 40$, $z_3^{\max} = 100$.

Построить математическую модель, учитывая все взаимодействия факторов. Проверить полученную модель на адекватность и произвести ее интерпретацию.

Исходная матрица планирования ПФЭ типа 2^3

№ опыта	Изучаемые факторы			Результаты опытов		
	z_1	z_2	z_3	y_1	y_2	y_3
1	–1	+1	+1	73,0	74,0	75,0
2	–1	+1	–1	77,0	77,6	78,5
3	–1	–1	+1	83,5	83,8	82,0
4	–1	–1	–1	88,0	87,6	87,5
5	+1	+1	+1	65,5	66,0	66,5
6	+1	+1	–1	85,2	84,2	84,0
7	+1	–1	+1	80,0	80,2	81,2
8	+1	–1	–1	90,3	89,3	89,2

Вариант № 19

Для изучения действия некоторых технологических факторов на прочность y (кг) сварки нетканых клееных материалов были поставлены эксперименты по плану ПФЭ 2^3 .

В качестве факторов, влияющих на эту величину, были взяты следующие:

z_1 – температура нагрева электрода (С): $z_1^{\min} = 160$, $z_1^{\max} = 200$;

z_2 – давление роликов (кг/см²): $z_2^{\min} = 24$, $z_2^{\max} = 36$;

z_3 – скорость продвижения материала (м/мин): $z_3^{\min} = 1,5$, $z_3^{\max} = 3$.

Построить математическую модель, учитывая все взаимодействия факторов. Проверить полученную модель на адекватность и произвести ее интерпретацию.

Исходная матрица планирования ПФЭ типа 2^3

№ опыта	Исследуемые факторы			Результаты опытов		
	z_1	z_2	z_3	y_1	y_2	y_3
1	+1	+1	+1	508	504	588
2	–1	+1	+1	212	254	226
3	+1	–1	+1	380	360	370
4	–1	–1	+1	280	260	290
5	+1	+1	–1	850	845	860
6	–1	+1	–1	638	656	640
7	+1	–1	–1	850	748	728
8	–1	–1	–1	652	642	598

Вариант № 20

Для исследования влияния некоторых технологических факторов на прочность склеивания двух поверхностей полиуретановым клеем (при фиксированном количестве наносимого клея $0,01 \text{ г/см}^2$) были поставлены эксперименты по плану ПФЭ 2^3 .

В качестве факторов, влияющих на прочность y (кг/2,5 см^2), были выбраны следующие:

z_1 – высота неровностей материала (мкм): $z_1^{\min} = 30$, $z_1^{\max} = 90$;

z_2 – время активации клеевой пленки (сек): $z_2^{\min} = 50$, $z_2^{\max} = 250$;

z_3 – давление прессования при склеивании (кгс/см^2): $z_3^{\min} = 3$, $z_3^{\max} = 9$.

Построить математическую модель, учитывая все взаимодействия факторов. Проверить полученную модель на адекватность и произвести ее интерпретацию.

Исходная матрица планирования ПФЭ типа 2^3

№ опыта	Изучаемые факторы			Результаты опытов		
	z_1	z_2	z_3	y_1	y_2	y_3
1	+1	+1	+1	8,0	7,6	7,8
2	−1	+1	+1	5,9	6,3	6,0
3	+1	−1	+1	5,8	6,0	5,7
4	−1	−1	+1	6,0	5,98	6,02
5	+1	+1	−1	7,5	7,6	7,7
6	−1	+1	−1	5,3	5,5	5,4
7	+1	−1	−1	8,7	8,9	8,8
8	−1	−1	−1	4.19	4.2	4,21

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Определение понятия «наука», цели науки (описание, объяснение и предсказание процессов и явлений). Структура науки.
2. Фундаментальные и прикладные науки и их задачи, возможная классификация наук (естественные, общественные, технические и т.п.).
3. Научное исследование и его структура. Определение понятия научного исследования (НИ).
4. Характеристики НИ (объективность, воспроизводимость, доказательность, точность).
5. Уровни НИ (эмпирический, теоретический).
6. Методология НИ.
7. Компоненты НИ (постановка задачи, предварительный анализ имеющейся информации, формулировка исходных гипотез, теоретический анализ гипотез, планирование и организация эксперимента, анализ и обобщение полученных результатов, проверка исходных гипотез, окончательная формулировка новых фактов).
8. Исследования как систематический сбор, отображение и анализ данных по разным аспектам деятельности.
9. Эксперименты. Типы экспериментов (лабораторные, полевые).
10. Проектирование экспериментов.
11. Анализ задания исследования.
12. Подбор из старого или разработка нового.
13. Содержание, форма (конструкция), сроки, масштабы результатов исследования. Усовершенствование или упрощение.
14. Определение понятия «обзор литературы». Задача обзора литературы.
15. Уяснение необходимости, цели и метода исследования.
16. Понимание смысла и места собственных результатов. Критерии полноты анализа литературы. Затраты времени на обзор.
17. Поиск источников информации. Формы предъявления печатной информации (монографии, справочники, книги, брошюры, реферативные журналы, авторские и предметные указатели, периодика и т.п.).
18. Изучение теории. Проверка постановки задачи научных исследований, констатация допущений, определение количества параметров, проверка правильности окончательного результата (предельные случаи, области значений, параметров, порядок величины результата).
19. Методика инженерного эксперимента
20. Проект установки эксперимента. Определение понятий. Активный и пассивный эксперименты. Наблюдение.
21. Прямые и косвенные измерения. Операции измерения. Точность прибора. Точность измерений. Погрешность измерения.
22. Ошибки измерения: систематические, случайные, промахи.

23. Распределение результатов измерений. Функция нормального распределения.
24. Дисперсия, плотность распределения вероятностей, доверительный интервал. Распределение Стьюдента.
25. Обработка результатов при малом числе измерений. Среднее арифметическое, доверительный интервал и его назначение. Пример определения погрешности измерения.
26. Основы математического планирования эксперимента
27. Определения. Однофакторный и многофакторный эксперименты. Параметр оптимизации, функция отклика. Дробный факторный эксперимент.
28. Ортогональный центральный композиционный план. Рототабельный ортогональный центральный композиционный план.
29. Полный факторный эксперимент. Графическое представление двухфакторного эксперимента. Матрица планирования эксперимента.
30. Вычисление коэффициентов линейной модели. Оптимизация функции отклика. Варьирование факторов. Интервалы варьирования. Крутое восхождение.
31. Сбор данных. Организация и проведение сбора данных (самостоятельно, создание специальной группы, привлечение специализированной службы или организации).
32. Ошибки сбора данных и возможные меры по их предотвращению. Контроль качества собираемых данных.
33. Определение понятия «регрессия». Облако данных. Уравнение регрессии. Модель регрессии. d- полоска (графическое представление).
34. Метод наименьших квадратов. Оценки факторного эксперимента. Критерий правдоподобия. Минимизация суммы квадратов отклонений. Интерполяция и экстраполяция. Сущность корреляции.
35. Графики. Графики искомых первичных и промежуточных величин. Выбор масштаба, нанесение шкалы, размерностей и подпись.
36. Графическое представление экспериментальных точек и ошибок измерения. Крест ошибок.
37. Гистограммы. Диаграммы рассеивания (разброса), стратификации, причинно-следственных связей.
38. Количественный анализ экспериментальных зависимостей. Цели количественного анализа. Оптимальное число параметров. Последовательность действий (оценка рассеяния, формулировка гипотез, определение параметров модели).
39. Виды статистического анализа (дескриптивный, выводной, различий, связей, предсказательный) и их инструменты.
40. Интерпретация полученных результатов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Эксперименты являются многофакторными и связаны с оптимизацией качества материалов, отысканием оптимальных условий проведения технологических процессов, разработкой наиболее рациональных конструкций оборудования и т.д.

Системы, которые служат объектом таких исследований, очень часто являются такими сложными, что не поддаются теоретическому изучению в разумные сроки. Несмотря на значительный объем выполненных экспериментов, из-за отсутствия реальной возможности достаточно полно изучить значительное число объектов исследования, многие решения принимаются на основании информации, имеющей случайный характер, и поэтому далеки от оптимальных.

Поэтому возникает необходимость поиска пути, позволяющего вести исследовательскую работу ускоренными темпами и обеспечивающим принятие решений, близких к оптимальным. Этим путем и являются статистические методы планирования эксперимента, предложенные английским статистиком Рональдом Фишером.

Использование планирования эксперимента делает поведение экспериментатора целенаправленным и организованным, существенно способствует повышению производительности труда и надежности полученных результатов. Важным достоинством является его универсальность, пригодность в огромном большинстве областей исследований.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Адлер Ю.П. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий [Текст]:./Ю.П. Адлер, Е.В. Марков, Ю.В. Грановский. – М.: Наука, 1971.
2. Голубева, Н.В. Математическое моделирование систем и процессов [Текст]: учебное пособие [Электронный ресурс]/ Н.В. Голубева. - 1-е изд. – СПб.: Лань, 2013. - 192 с. – Режим доступа: http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=4862. – Загл. с экрана. - ISBN 978-5-8114-1424-6.
3. Власов К.П. Методы исследований и организация экспериментов [Текст]: /К.П. Власов, П.К. Власов, А.А. Киселева. – Х.: издательство «Гуманитарный Центр», 2002.- ISBN 966-95859-4-5.
4. Оншин, Н.В. Основы теории планирования инженерного эксперимента [Текст]: учебное пособие/ Н.В. Оншин. – Магнитогорск: МГТУ, 2009.
5. Зайдель, А.Н. Ошибки измерений физических величин [Текст]: учебное пособие [Электронный ресурс]/ А.Н. Зайдель. – 3-е изд. - СПб.: Лань, 2009. - 112 с. – Режим доступа: http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=146. – Загл. с экрана. - ISBN 978-5-8114-0643-2.
6. Лукьянов, С.И. Основы инженерного эксперимента [Текст]: учебное пособие/ С.И. Лукьянов, А.Н. Панов, А.Е. Васильев. – Магнитогорск: МГТУ, 2003. – 83 с.
7. Фаддеев М.А. Элементарная обработка результатов эксперимента [Текст]: учебное пособие/ М.А. Фаддеев. – СПб.: Лань, 2008. – (Учеб. для вузов. Спец. литература). - ISBN 978-5-8114-0817-7.
8. Черников, Ю.Г. Системный анализ и исследование операций [Текст]: учебное пособие [Электронный ресурс]/ Ю.Г. Черников. – М.: Горная книга, 2006. – 370 с. – Режим доступа: http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=3512. – Загл. с экрана. - ISBN 5-91003-007-8.
9. Шкуратник, В.Л. Измерения в физическом эксперименте [Текст]: учеб. для вузов [Электронный ресурс]/ В.Л. Шкуратник. - 2-е изд., доп. и испр. - М.: Горная книга, 2006. – 335 с. – Режим доступа: http://e.lanbook.com/books/element.php ?pl1_cid=25&pl1_id=3471. – Загл. с экрана. - ISBN 5-98672-032-6.
- 10.Ишбирдин А.Р., Барышникова Н.И., Ишмуратова М.М. Методы сбора, обработки и представления результатов научных исследований в пищевой промышленности: Учебное пособие. - Магнитогорск: ГОУ ВПО «МГТУ им. Г.И. Носова», 2012. - 70 с.
- 11.Мезин И.Ю., Е.С. Яковлева Корреляционный и регрессионный анализы при оценке качества металлопродукции: Методические указания по выполнению лабораторных работ по дисциплинам «Планирование и организация эксперимента», и «Корреляционно-регрессионный анализ» для студентов специальности 200500. – Магнитогорск: ГОУ ВПО «МГТУ», 2008. - 11с.

12.Соколовская И.Ю. Полный факторный эксперимент: методические указания к практическим занятиям / И.Ю. Соколовская // Методические указания для самостоятельной работы студентов. – Новосибирск: НГАВТ, 2010. – 36 с.

13.Бакаев Д.Р. Случайные ошибки и неопределенности: методические указания к практическим занятиям по дисциплине «Планирование и организация эксперимента» для студентов направления 200500. – Магнитогорск: ГОУ ВПО «МГТУ», 2011. – 13 с.

ПРИЛОЖЕНИЯ
Приложение 1
Квантили распределения Стьюдента

Число степеней свободы f	Уровень значимости						
	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
1	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	318,309	636,619
2	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	22,327	31,599
3	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	10,215	12,924
4	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173	8,610
5	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	5,893	6,869
6	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208	5,959
7	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785	5,408
8	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	4,501	5,041
9	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,297	4,781
10	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144	4,587
11	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025	4,437
12	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,930	4,318
13	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,852	4,221
14	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,787	4,140
15	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733	4,073
16	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,686	4,015
17	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,646	3,965
18	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,610	3,922
19	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579	3,883
20	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,552	3,850
21	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,527	3,819
22	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,505	3,792
23	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,485	3,768
24	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,467	3,745
25	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,450	3,725
26	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,435	3,707
27	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,421	3,690
28	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,408	3,674
29	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,396	3,659
30	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,385	3,646
31	1,309	1,696	2,040	2,453	2,744	3,375	3,633
32	1,309	1,694	2,037	2,449	2,738	3,365	3,622
33	1,308	1,692	2,035	2,445	2,733	3,356	3,611
34	1,307	1,691	2,032	2,441	2,728	3,348	3,601
35	1,306	1,690	2,030	2,438	2,724	3,340	3,591
Бесконечность	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,090	3,291

Приложение 2
Квантили распределения Фишера для $p=0,05$

f_2	f_1										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15
1	161.45	199.50	215.71	224.58	230.16	233.99	236.77	238.88	240.54	241.88	245.95
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.43
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.70
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.86
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.62
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	3.94
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.51
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.22
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.01
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.85
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.72
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.62
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.53
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.46
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.40
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.35
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.31
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.27
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.23
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.20

Примечание: f_1 - число степеней свободы большей дисперсии,
 f_2 - число степеней свободы меньшей дисперсии.

Учебное текстовое электронное издание

**Барышникова Надежда Ивановна
Коляда Людмила Григорьевна
Тарасюк Елена Владимировна**

ПОЛНЫЙ ФАКТОРНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Задачник

0,99 Мб

1 электрон. опт. диск

г. Магнитогорск, 2018 год
ФГБОУ ВО «МГТУ им. Г.И. Носова»
Адрес: 455000, Россия, Челябинская область, г. Магнитогорск,
пр. Ленина 38

ФГБОУ ВО «Магнитогорский государственный
технический университет им. Г.И. Носова»
Кафедра стандартизации, сертификации и технологии продуктов питания
Центр электронных образовательных ресурсов и
дистанционных образовательных технологий
e-mail: ceor_dot@mail.ru