

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова»

**Г.Н. Шагивалиева**  
**С.М. Головизнин**

**ОСНОВЫ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ  
ПРИ ОБРАБОТКЕ МЕТАЛЛОВ ДАВЛЕНИЕМ**

*Утверждено Редакционно-издательским советом университета  
в качестве учебного пособия*

Магнитогорск  
2018

УДК 531.01 (075)  
ББК 30.12.7

**Рецензенты:**

кандидат технических наук  
руководитель научно-исследовательской лаборатории  
ООО «Уральский Пружинный Завод»  
**А.Б. Иванцов**

кандидат технических наук,  
заместитель директора по производственному обучению,  
ГБПОУ «Белорецкий металлургический колледж»  
**М.Г. Кузнецов**

**Шагивалиева Г.Н., Головизнин С.М.**

**Основы пластической деформации при обработке металлов давлением**  
[Электронный ресурс] : учебное пособие / Гульфия Назыргалеевна Шагивалиева, Сергей Михайлович Головизнин ; ФГБОУ ВО «Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова». – Электрон. текстовые дан. (1,14 Мб). – Магнитогорск : ФГБОУ ВО «МГТУ им. Г.И. Носова», 2018. – 1 электрон. опт. диск (CD-R). – Систем. требования : IBM PC, любой, более 1 GHz ; 512 Мб RAM ; 10 Мб HDD ; MS Windows XP и выше ; AdobeReader 8.0 и выше ; CD/DVD-ROM дисковод ; мышь. – Загл. с титул. экрана.

ISBN 978-5-9967-1194-9

Пособие составлено в соответствии с типовой программой дисциплины «Теория обработки металлов давлением».

В данном учебном пособии изложены физические основы и математическая теория пластической деформации. Описаны особенности различных механизмов пластической деформации моно- и поликристаллических тел. Рассмотрены основы механики сплошных сред и пластической деформации металлов и сплавов, а также элементы волновой теории пластичности.

Пособие предназначено для студентов направлений подготовки 22.03.02 «Металлургия» и 15.03.01 «Машиностроение».

УДК 531.01 (075)  
ББК 30.12.7

ISBN 978-5-9967-1194-9 © Шагивалиева Г.Н., Головизнин С.М., 2018  
© ФГБОУ ВО «Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова», 2018

## Содержание

Введение .....	4
ОСНОВНЫЕ УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ .....	5
1. КРИСТАЛЛИЧЕСКОЕ СТРОЕНИЕ МЕТАЛЛОВ И СПЛАВОВ .....	7
1.1. Кристаллическое строение металлов .....	7
1.2. Дефекты строения кристаллических тел .....	13
2. ФИЗИЧЕСКАЯ ПРИРОДА ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ .....	19
2.1. Физическая природа деформации металлов .....	19
2.2. Дислокационный механизм пластической деформации .....	25
3. ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ .....	31
3.1. Влияние температуры на упрочнение .....	31
3.2. Виды деформации при обработке металлов давлением .....	33
4. ТЕОРИЯ НАПРЯЖЕНИЙ И ДЕФОРМАЦИЙ В ОБРАБОТКЕ МЕТАЛЛОВ ДАВЛЕНИЕМ .....	36
4.1. Основные положения теории напряжений и деформаций .....	36
4.2. Основы тензорного исчисления .....	42
4.3. Напряженное состояние тела .....	45
4.4. Деформированное состояние тела .....	56
5. ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И ПЛАСТИЧНОСТИ .....	69
5.1. Теория упругости .....	69
5.3. Теория пластичности .....	89
6. ЭЛЕМЕНТЫ ВОЛНОВОЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ .....	94
6.1. Область применимости традиционной математической теории пластичности .....	94
6.2. Волновой характер распространения пластической деформации .....	95
6.3. Условия деформации при высокоскоростном волочении .....	97
6.4. Локализация деформации в процессах обработки металлов давлением ..	98
6.5. Скоростная неоднородность напряжённого состояния .....	99
7. ОЦЕНКА СКОРОСТНОЙ НЕОДНОРОДНОСТИ ДЕФОРМАЦИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ АНАЛОГИИ .....	101
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	105
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК .....	106

## ВВЕДЕНИЕ

Металлы и сплавы являются основным конструкционным материалом в промышленности. Их исследования остаются актуальными на сегодняшний день.

Основной частью механики теории пластичности, а также механики деформируемых сред является изучение напряженно-деформированного состояния твердых тел под действием приложенных сил.

В данном пособии рассматриваются математическая теория пластичности и физика процесса пластического деформирования, что служат основой для формирования основной дисциплины – теории обработки металлов давлением.

Данная теория объясняет не только механизм пластического деформирования, но и ряд явлений, ему сопутствующих, и развивается в направлении создания методик количественной оценки напряжений, необходимых для пластического деформирования, и их изменения в процессе деформирования.

## ОСНОВНЫЕ УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

$x, y, z$  - прямоугольные декартовы координаты;  
 $\rho, \theta, z$  - цилиндрические координаты;  
 $\vec{f}$  - вектор напряжения;  
 $\sigma$  - напряжение;  
 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  - нормальные напряжения;  
 $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$  - касательные напряжения;  
 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  - главные нормальные напряжения;  
 $\tau_{12}, \tau_{23}, \tau_{31}$  - главные касательные напряжения;  
 $\sigma_n, \tau_n, S_n$  - нормальное, касательное и полное напряжения по площадке с нормалью  $n$  ;  
 $\sigma_i$  - интенсивность напряжений;  
 $T$  - интенсивность касательных напряжений;  
 $\nu_\sigma$  - показатель вида напряженного состояния;  
 $\tau_{окт}$  - октаэдрическое напряжение;  
 $T_\sigma$  - тензор напряжений;  
 $T_\sigma^0$  - шаровой тензор напряжений;  
 $D_\sigma$  - девиатор напряжений;  
 $D\sigma$  - направляющий тензор напряжений;  
 $I_1(T_\sigma), I_2(T_\sigma), I_3(T_\sigma)$  - инварианты тензора напряжений;  
 $I_1(D_\sigma), I_2(D_\sigma), I_3(D_\sigma)$  - инварианты девиатора напряжений;  
 $S$  - компоненты девиатора напряжений;  
 $\sigma_{cp}$  - среднее напряжение;  
 $n_x, n_y, n_z$  - направляющие косинусы;  
 $\gamma$  - плотность материала сплошной среды;  
 $U_x, U_y, U_z$  - проекции вектора перемещения на координатные оси  $x, y, z$  ;  
 $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$  - линейные деформации;  
 $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$  - угловые деформации;  
 $T_\varepsilon$  - тензор деформаций;  
 $D_\varepsilon$  - девиатор деформаций;  
 $D\varepsilon$  - направляющий тензор деформаций;  
 $T_\varepsilon^0$  - шаровой тензор деформаций;  
 $\varepsilon_{cp}$  - средняя деформация;  
 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  - главные линейные деформации;  
 $\gamma_{12}, \gamma_{23}, \gamma_{31}$  - главные сдвиговые деформации;  
 $I_2(T_\varepsilon), I_3(T_\varepsilon)$  - инварианты тензора деформаций;

$I_2 ( D_\varepsilon ), I_3 ( D_\varepsilon )$  - инварианты девиатора деформаций;  
 $\theta$  - объемная деформация;  
 $\Gamma$  - интенсивность деформаций сдвига;  
 $\varepsilon_i$  - интенсивность деформаций;  
 $\gamma_{окт}$  - октаэдрическая деформация;  
 $v_\varepsilon$  - показатель вида деформированного состояния;  
 $\varepsilon$  - деформация;  
 $e_x, e_y, e_z$  - логарифмические деформации;  
 $v_x, v_y, v_z$  - проекции вектора скорости на координатные оси  $x, y, z$  ;  
 $\xi_x, \xi_y, \xi_z$  - скорости линейных деформаций;  
 $\eta_{xy}, \eta_{yz}, \eta_{zx}$  - скорости угловых деформаций;  
 $T_\xi$  - тензор скоростей деформаций;  
 $D_\xi$  - девиатор скоростей деформаций;  
 $T_\xi^0$  - шаровой тензор скоростей деформации;  
 $H$  - интенсивность скоростей деформаций сдвига;  
 $\xi_{cp}$  - средняя скорость деформаций;  
 $G$  - модуль сдвига;  
 $E$  - модуль упругости при растяжении (сжатии);  
 $\mu$  - коэффициент Пуассона;  
 $W$  - полная упругая потенциальная энергия;  
 $W_0, W_\phi$  - упругая потенциальная энергия изменения объема и формы тела;  
 $K$  - объемный модуль упругости;  
 $\nabla^2$  - оператор Лапласа;  
 $\lambda$  - коэффициент Ламе;  
 $\varphi(x, y)$  - функция напряжений Эри;  
 $\sigma_T$  - предел текучести при растяжении (сжатии);  
 $\tau_T$  - предел текучести при сдвиге;  
 $\mu_{ij}$  - коэффициент анизотропии;  
 $\sigma_{ij}^{ост}$  - остаточные напряжения;  
 $\varepsilon_{ij}^{ост}$  - остаточные деформации;  
 $Q$  - усилие.

# 1. КРИСТАЛЛИЧЕСКОЕ СТРОЕНИЕ МЕТАЛЛОВ И СПЛАВОВ

## 1.1. Кристаллическое строение металлов

Рассмотрим особенности кристаллического строения металлов и сплавов. Эти материалы используются для изготовления конструкций различных машин, оборудования и т.д. Хотя на сегодняшний день имеются огромное количество искусственно созданных материалов, металлы служат основным конструкционным материалов и, в будущем, по-прежнему будут доминировать. Это связано с тем, что металлы обладают особыми свойствами, которые выгодно отличают металлов от других материалов и делают их во многих случаях незаменимыми.

*Металлы* – один из классов конструкционных материалов, характеризующийся определенным набором свойств:

- «металлический блеск» (хорошая отражательная способность);
- пластичность;
- высокая теплопроводность;
- высокая электропроводность.

Выше перечисленные свойства связаны особенностями строения металлов. Согласно теории металлического состояния, металл представляет собой вещество, состоящее из положительных ядер, вокруг которых по орбитальям вращаются электроны. На валентном уровне число электронов невелико и эти электроны слабо связаны с ядром. Это дает возможность электронам возможность перемещаться по всему объему металла, т.е. имеет место обобществление электронов.

Такие свойства металла как пластичность, теплопроводность и электропроводность обеспечиваются наличием «электронного газа».

Общим свойством, что объединяет металлы и сплавы, является их кристаллическое строение, характеризующееся определенным закономерным расположением атомов в пространстве. В нормальных условиях все металлы представляют собой кристаллические вещества, то есть укладка атомов в них характеризуется определенным порядком – периодичностью, как по различным направлениям, так и по различным плоскостям. Этот порядок определяется понятием *кристаллическая решетка*.

Иными словами, кристаллическая решетка - это воображаемая пространственная решетка, в узлах которой располагаются частицы, образующие твердое тело.

Атомно-кристаллическая структура может быть представлена не рядом повторяющихся объемов, а одной элементарной ячейкой. *Элементарная ячейка* – элемент объема из минимального числа атомов, многократным переносом которого в пространстве можно построить весь кристалл.

В кристалле элементарные частицы (атомы, ионы) сближены до соприкосновения. Частицы кристалла не могут свободно перемещаться по кристаллу, они сосредоточены около положения их равновесия. При попытке

удаления от этих положений энергия частиц увеличивается и появляются силы, стремящиеся вернуть их в положения равновесия. Поэтому частицы как бы закреплены в положения равновесия. Единственной доступной формой для частиц является колебательное беспорядочное движение около положения равновесия.

Для упрощения пространственное изображение принято заменять схемами, где центры тяжести частиц представлены точками (рис.1.1.). В точках пересечения прямых линий располагаются атомы; они называются узлами решетки. Расстояния  $a$ ,  $b$ ,  $c$  между центрами атомов, находящихся в узлах решетки, называются параметрами или периодами решетки. Величина их в металлах порядка 0,1-0,7 нм, размеры элементарных ячеек – 0,2-0,3 нм.

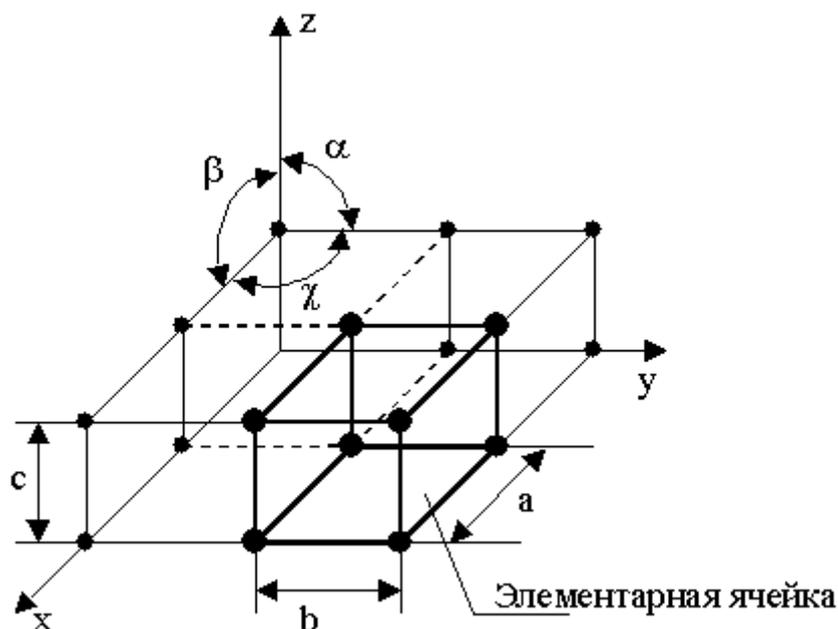


Рис.1.1. Схема кристаллической решетки

Таким образом, элементарная ячейка характеризует особенности строения кристалла. Основными параметрами кристалла являются:

- размеры ребер элементарной ячейки.  $a$ ,  $b$ ,  $c$  – периоды решетки – расстояния между центрами ближайших атомов. Решетка, построенная путем параллельного переноса какого-либо узла по трем направлениям, называется решеткой Бравэ. Наименьший параллелепипед, построенный на векторах  $a$ ,  $b$ ,  $c$  называется элементарной ячейкой кристалла. При этом в одном направлении выдерживаются строго определенными следующие параметры:

- углы между осями ( $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ).
- координационное число ( $K$ ), которое указывает на число атомов, расположенных на ближайшем одинаковом расстоянии от любого атома в решетке.
- базис решетки (кратность), т.е. количество атомов, приходящихся на одну элементарную ячейку решетки.

- плотность упаковки атомов в кристаллической решетке – объем, занятый атомами, которые условно рассматриваются как жесткие шары. Ее определяют как отношение объема, занятого атомами к объему ячейки (для объемно-центрированной кубической решетки – 0,68, для гранецентрированной кубической решетки – 0,74)

Для однозначного описания элементарной ячейки кристаллической решетки необходимо знание параметров  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и углов между ними.

Классификация возможных видов кристаллических решеток была проведена французским ученым О. Браве, соответственно они получили название «решетки Браве». Всего для кристаллических тел существует четырнадцать видов решеток, разбитых на четыре типа;

- примитивный – узлы решетки совпадают с вершинами элементарных ячеек;
- базоцентрированный – атомы занимают вершины ячеек и два места в противоположных гранях;
- объемно-центрированный – атомы занимают вершины ячеек и ее центр;
- гранецентрированный – атомы занимают вершины ячейки и центры всех шести граней.

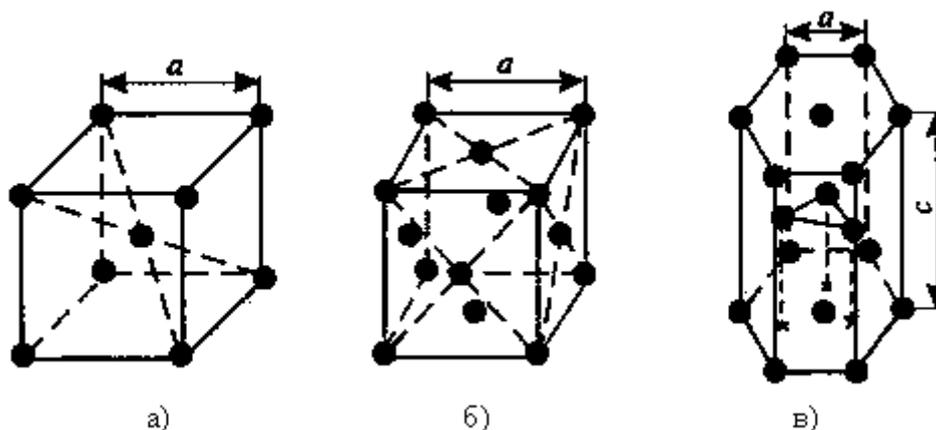


Рис. 1.2. Основные типы кристаллических решеток: а – объемно-центрированная кубическая; б– гранецентрированная кубическая; в – гексагональная плотноупакованная

Основными типами кристаллических решеток являются:

1. Объемно - центрированная кубическая (ОЦК) (см. рис.1.2а), атомы располагаются в вершинах куба и в его центре ( $V$ ,  $W$ ,  $Ti$ ,  $Fe_{\alpha}$ )
2. Гранецентрированная кубическая (ГЦК) (см. рис. 1.2б), атомы располагаются в вершинах куба и по центру каждой из 6 граней ( $Ag$ ,  $Au$ ,  $Fe_{\gamma}$ )
3. Гексагональная, в основании которой лежит шестиугольник:
  - простая – атомы располагаются в вершинах ячейки и по центру 2 оснований (углерод в виде графита);
  - плотноупакованная (ГПУ) – имеется 3 дополнительных атома в средней плоскости (цинк).

Характер кристаллической структуры металлов и сплавов определяется в основном характером сил связи, которые действуют между атомами, ионами,

молекулами, образующих эту структуру. Свойства самого тела зависят от природы атомов, из которых оно состоит, и от силы взаимодействия между этими атомами, которые в значительной степени определяются расстояниями между ними. По отношению аморфных тел наблюдается хаотическое расположение атомов в пространстве и в них расстояния между атомами в различных направлениях равны, следовательно, свойства этих тел будут одинаковыми, то есть аморфные тела являются *изотропными*.

В кристаллических телах атомы правильно располагаются в пространстве, при этом по разным направлениям расстояния между атомами неодинаковы, что предопределяет существенные различия в силах взаимодействия между ними и, в конечном результате, разные свойства. Зависимость свойств от направления называется *анизотропией*. Разница в физико-химических и механических свойствах в разных направлениях может быть весьма существенной. При измерении в двух взаимно-перпендикулярных направлениях цинка значения температурного коэффициента линейного расширения различаются в 3-4 раза, а прочности кристалла железа – более чем в два раза.

Чтобы понять явление анизотропии необходимо рассмотреть понятия кристаллографической плоскости и кристаллографического направления в кристалле.

Плоскость, проходящая через узлы кристаллической решетки, называется *кристаллографической плоскостью*.

Прямая, проходящая через узлы кристаллической решетки, называется *кристаллографическим направлением*.

Для обозначения кристаллографических плоскостей и направлений пользуются *индексами Миллера*. Чтобы установить индексы Миллера, элементарную ячейку вписывают в пространственную систему координат (оси X, Y, Z – кристаллографические оси). За единицу измерения принимается период решетки.

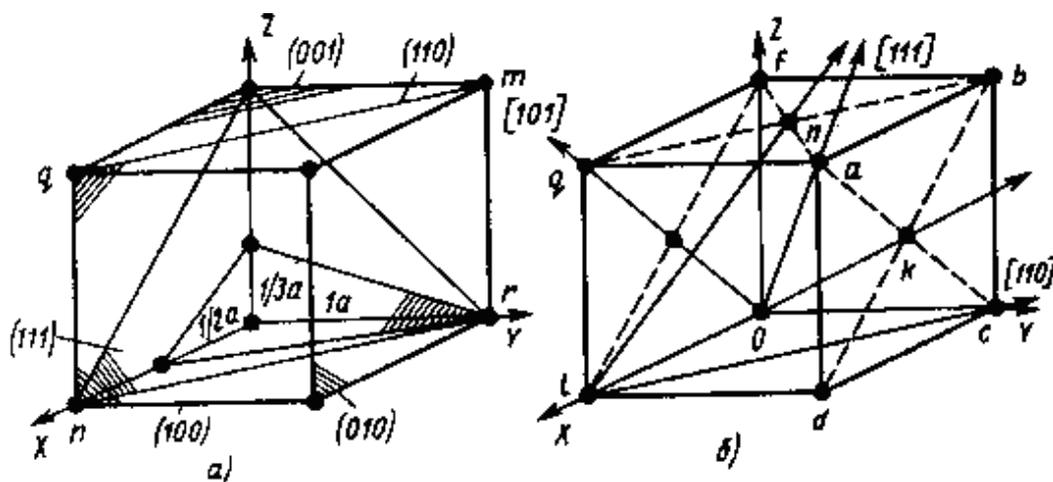


Рис.1.3. Примеры обозначения кристаллографических плоскостей (а) и кристаллографических направлений (б)

Для определения индексов кристаллографической плоскости необходимо:

- установить координаты точек пересечения плоскости с осями координат в единицах периода решетки;
- взять обратные значения этих величин;
- привести их к наименьшему целому кратному, каждому из полученных чисел.

Полученные значения простых целых чисел, не имеющие общего множителя, являются индексами Миллера для плоскости, указываются в круглых скобках. Примеры обозначения кристаллографических плоскостей на рис. 1.3 а.

Другими словами, индекс по оси показывает на сколько частей плоскость делит осевую единицу по данной оси. Плоскости, параллельные оси, имеют по ней индекс 0.

Ориентация прямой определяется координатами двух точек. Для определения индексов кристаллографического направления необходимо:

- одну точку направления совместить с началом координат;
- установить координаты любой другой точки, лежащей на прямой, в единицах периода решетки;
- привести отношение этих координат к отношению трех наименьших целых чисел.

Индексы кристаллографических направлений указываются в квадратных скобках [111]

В кубической решетке индексы направления, перпендикулярного плоскости (hkl) имеют тоже индексы [hkl].

При разных температурах металлы могут кристаллизоваться в различную кристаллическую решетку. Способность металла существовать в различных кристаллических формах в зависимости от внешних условий (давление, температура) носит название *полиморфизма или аллотропии*. Принято обозначать полиморфную модификацию, устойчивую при более низкой температуре, индексом  $\alpha$ , при более высокой - индексом  $\beta$ , затем  $\gamma$  и т.д.

Каждый вид решетки представляет собой *аллотропическое видоизменение* или *модификацию*.

Примером аллотропического видоизменения в зависимости от температуры является железо (Fe).

Fe:

$t < 911^{\circ}\text{C}$  – ОЦК -  $Fe_{\alpha}$ ;

$911 < t < 1392^{\circ}\text{C}$  – ГЦК -  $Fe_{\beta}$ ;

$1392 < t < 1539^{\circ}\text{C}$  – ОЦК -  $Fe_{\gamma}$ ; (высокотемпературное  $Fe_{\alpha}$ ).

Превращение одной модификации в другую протекает при постоянной температуре и сопровождается тепловым эффектом, т.е. сопровождается выделением или поглощением скрытой теплоты поглощения. Имеет место фазовый переход 1-го рода. Наблюдается перестройка решетки, но при этом подвижность атомов достаточно низкая. Следовательно, в данных условиях модификация термодинамически не устойчива и может существовать при этих

условиях практически неограниченное время. Видоизменения самого элемента обозначается буквами греческого алфавита в виде индекса у основного обозначения металла.

Примером аллотропического видоизменения, обусловленного изменением давления, является углерод: при низких давлениях образуется графит, а при высоких – алмаз.

Полиморфизм имеет важное практическое значение. Например, используя явление полиморфизма, можно упрочнять и разупрочнять сплавы при помощи термической обработки. Придание сталям различных свойств при их термической обработке, сообщение разнообразным сплавам необходимых свойств в значительной мере связаны также с явлением полиморфизма.

Некоторые металлы намагничиваются под действием магнитного поля. После удаления магнитного поля они обладают остаточным магнетизмом. Это явление впервые обнаружено на железе и получило название ферромагнетизма. К ферромагнетикам относятся железо, кобальт, никель и некоторые другие металлы.

При нагреве ферромагнитные свойства металла уменьшаются постепенно: вначале слабо, затем резко, и при определенной температуре (точка Кюри) исчезают (точка Кюри для железа –  $768^{\circ}\text{C}$ ). Выше этой температуры металлы становятся парамагнетиками. Магнитные превращения не связаны с изменением кристаллической решетки или микроструктуры, они обусловлены изменениями в характере межэлектронного взаимодействия.

Из жидкого расплава можно вырастить монокристалл. Их обычно используют в лабораториях для изучения свойств того или иного вещества.

Металлы и сплавы, полученные в обычных условиях, состоят из большого количества кристаллов, то есть, имеют поликристаллическое строение. Эти кристаллы называются зернами. Они имеют неправильную форму и различно ориентированы в пространстве. Каждое зерно имеет свою ориентировку кристаллической решетки, отличную от ориентировки соседних зерен, вследствие чего свойства реальных металлов усредняются, и явления анизотропии не наблюдается.

Поликристаллическое тело характеризуется квазиизотропностью – кажущейся независимостью свойств от направления испытания. Квазиизотропность сохраняется в литом состоянии, а при обработке давлением (прокатке, ковке), особенно, если она ведется без нагрева, большинство зерен металла приобретают примерно одинаковую ориентировку – так называемую текстуру, после чего металл становится анизотропным. Свойства деформированного металла вдоль и поперек направления главной деформации могут существенно отличаться. Анизотропия может приводить к дефектам металла (расслою, волнистости листа). Анизотропию необходимо учитывать при конструировании и разработке технологии получения деталей.

## 1.2. Дефекты строения кристаллических тел

Идеальную кристаллическую решетку можно представить как многократное повторение элементарных кристаллических ячеек. Однако для реального металла характерно наличие большого количества дефектов строения, которые нарушают периодичность расположения атомов в кристаллической решетке. В кристаллической решетке реальных металлов наблюдаются различные дефекты (несовершенства), которые разрушают связи между атомами и оказывают влияние на свойства металлов. Можно различить следующие структурные несовершенства:

- точечные – малые во всех трех измерениях;
- линейные – малые в двух измерениях и сколь угодно протяженные в третьем;
- поверхностные – малые в одном измерении.

Наиболее распространенным видам несовершенств кристаллического строения относятся следующие точечные дефекты: вакансий, дислоцированных атомов и примесей (рис.1.2.1.).

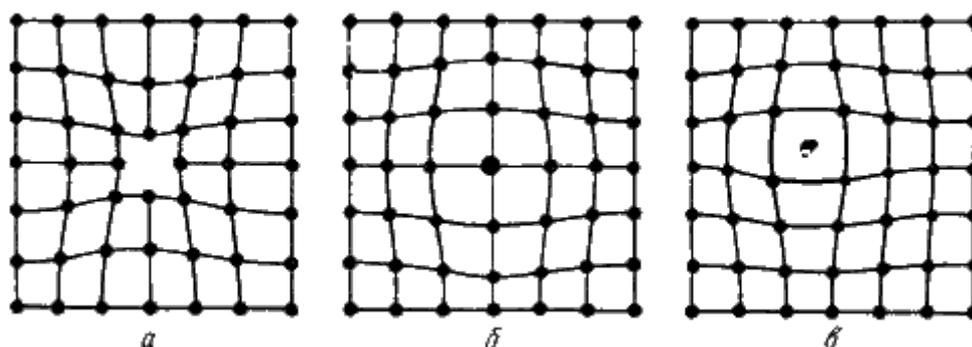


Рис.1.2.1. Точечные дефекты

Вакансия – это отсутствие атомов в узлах кристаллической решетки, которые называются «дырками». Эти «дырки» образуются в результате различных причин. Например, образуется при переходе атомов с поверхности в окружающую среду или из узлов решетки на поверхность (границы зерен, пустоты, трещины и т. д.), в результате пластической деформации, при бомбардировке тела атомами или частицами высоких энергий (облучение в циклотроне или нейтронной облучение в ядерном реакторе). Распределение энергии между атомами не равномерно. При любой температуре в твердом теле имеются атомы, энергии которых превышают среднее значение энергии, отвечающей закону равномерного распределения ее по степеням свободы, во много раз. Поэтому атомы, обладающие в данный момент достаточно высокой энергией, могут не только удалиться от положения равновесия, но и уйти в новое окружение (в новую ячейку), преодолевая потенциальный барьер, созданный соседними атомами. Чем больше температура, соответственно тем больше вероятности для данных переходов и создания таких вакансий. Их концентрация в значительной степени определяется температурой тела.

Таким образом, в кристалле имеет место «испарение» атомов из своих узлов решетки. Отметим, что перемещаясь по кристаллу, одиночные вакансии могут встречаться и объединяться в дивакансии. Такое скопление большого количества вакансий может привести к образованию пор и пустот.

Одновременно с образованием вакансий имеет место переход атома в междоузлии, т.е. возникновение другого дефекта - дислоцированного атома.

Дислоцированный атом – это атом, вышедший из узла решетки и занявший место в междоузлии. Их концентрация значительно меньше, чем вакансий, так как для их образования требуются существенные затраты энергии. При этом на месте переместившегося атома образуется вакансия. Такого рода дефекты называются дефектами по Френкелю.

В реальности практически невозможно выплавить химически чистый металл, так как примесные атомы всегда присутствуют в металле. Они могут иметь размеры больше или меньше размеров основных атомов и располагаются в узлах решетки или междоузлиях. Примеси являются одним из важных и распространенных дефектов в реальной кристаллической структуре.

Таким образом, все точечные дефекты приводят к искажению кристаллической решетки. Взаимодействие точечных дефектов понижают энергию искажений решетки и поэтому такие конфигурации дефектов не устойчивы. Отметим, что их присутствие приводит к изменениям свойств самого кристалла.

Точечные дефекты характеризуются малыми размерами во всех трех измерениях. Величина их не превышает нескольких атомных диаметров. Точечные дефекты вызывают незначительные искажения решетки, что может привести к изменению свойств тела, например, как электропроводность, магнитные свойства и т.д. Их наличие способствует процессам диффузии и протеканию фазовых превращений в твердом состоянии. При перемещении по материалу дефекты могут взаимодействовать. Примеси являются эффективными центрами рассеяния носителей тока и обуславливают электрическое сопротивление, которое не исчезает даже при абсолютном нуле.

Линейные дефекты характеризуются малыми размерами в двух измерениях, но имеют значительную протяженность в третьем измерении. Основными линейными дефектами относятся дислокации. Априорное представление о дислокациях впервые использовано в 1934 году Орованам и Тейлером при исследовании пластической деформации кристаллических материалов, для объяснения большой разницы между практической и теоретической прочностью металла.

*Дислокацией* называют дефекты кристаллического строения, представляющие собой линии, вдоль и вблизи которых нарушено характерное для кристалла правильное расположение атомных плоскостей.

*Краевая дислокация* представляет собой линию, вдоль которой обрывается внутри кристалла край “лишней“ полуплоскости (рис.1. 2.2).

Неполная плоскость называется *экстраплоскостью*.

Большинство дислокаций образуются путем сдвигового механизма. Ее образование можно описать при помощи следующей операции. Надрезать кристалл по плоскости ABCD, сдвинуть нижнюю часть относительно верхней на один период решетки в направлении, перпендикулярном АВ, а затем вновь сблизить атомы на краях разреза внизу.

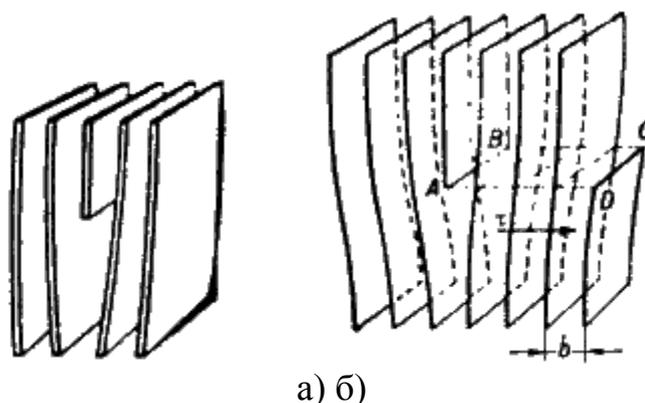


Рис. 1.2.2. Краевая дислокация (а) и механизм ее образования (б)

Наибольшие искажения в расположении атомов в кристалле имеют место вблизи нижнего края экстраплоскости. Вправо и влево от края экстраплоскости эти искажения малы (несколько периодов решетки), а вдоль края экстраплоскости искажения простираются через весь кристалл и могут быть очень велики (тысячи периодов решетки) (рис.1. 2.3).

Если экстраплоскость находится в верхней части кристалла, то краевая дислокация – положительная ( $\perp$ ), если в нижней, то – отрицательная ( $\Uparrow$ ). Дислокации одного знака отталкиваются, а противоположные притягиваются.

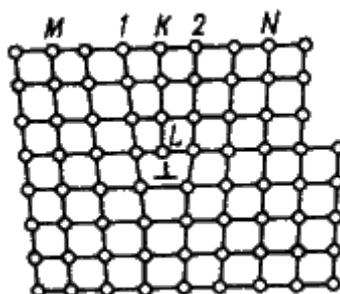


Рис.1. 2.3. Искажения в кристаллической решетке при наличии краевой дислокации

Другой тип дислокаций был описан Бюргерсом, и получил название *винтовая дислокация*.

*Винтовая дислокация* получена при помощи частичного сдвига по плоскости Q вокруг линии EF (рис. 1.2.4) На поверхности кристалла образуется ступенька, проходящая от точки E до края кристалла. Такой частичный сдвиг нарушает параллельность атомных слоев, кристалл превращается в одну атомную плоскость, закрученную по винту в виде полого геликоида вокруг

линии EF, которая представляет границу, отделяющую часть плоскости скольжения, где сдвиг уже произошел, от части, где сдвиг не начинался. Вдоль линии EF наблюдается макроскопический характер области несовершенства, в других направлениях ее размеры составляют несколько периодов.

Если переход от верхних горизонтов к нижним осуществляется поворотом по часовой стрелке, то дислокация *правая*, а если поворотом против часовой стрелки – *левая*.

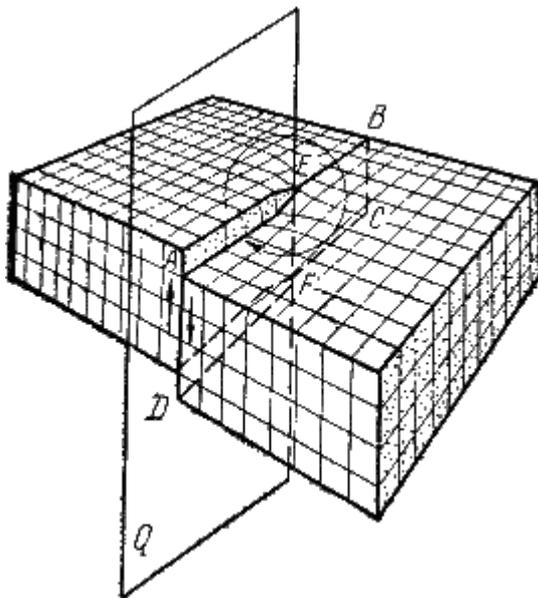


Рис.1. 2.4. Механизм образования винтовой дислокации

Отметим, что винтовая дислокация не связана с какой-либо плоскостью скольжения. Эта дислокация может перемещаться по любой плоскости, проходящей через линию дислокации. Вакансии и дислоцированные атомы к винтовой дислокации не стекают.

В процессе кристаллизации атомы вещества, выпадающие из пара или раствора, легко присоединяются к ступеньке, что приводит к спиральному механизму роста кристалла.

Линии дислокаций не могут обрываться внутри кристалла, они должны либо быть замкнутыми, образуя петлю, либо разветвляться на несколько дислокаций, либо выходить на поверхность кристалла.

Важной характеристикой дислокационной структуры является плотность дислокаций.

*Плотность дислокаций* в кристалле определяется как среднее число линий дислокаций, пересекающих внутри тела площадку площадью  $1 \text{ м}^2$ , или как суммарная длина линий дислокаций в объеме  $1 \text{ м}^3$

$$\rho = \frac{\sum l}{V} (\text{см}^{-2}; \text{м}^{-2})$$

Плотность дислокаций изменяется в широких пределах и зависит от состояния материала. После тщательного отжига плотность дислокаций составляет  $10^5 \dots 10^7 \text{ м}^{-2}$ , в кристаллах с сильно деформированной кристаллической решеткой плотность дислокаций достигает  $10^{15} \dots 10^{16} \text{ м}^{-2}$ .

Плотность дислокации в значительной мере определяет пластичность и прочность материала (рис.1. 2.5)

Минимальная прочность определяется критической плотностью дислокаций  $\rho = 10^5 \dots 10^7 \text{ м}^{-2}$ .

Использование теории дислокаций позволило объяснить большое расхождение между теоретической и фактической прочностью металла. Теоретическая прочность должна быть пропорциональна произведению сил межатомной связи на число атомов в сечении кристалла.

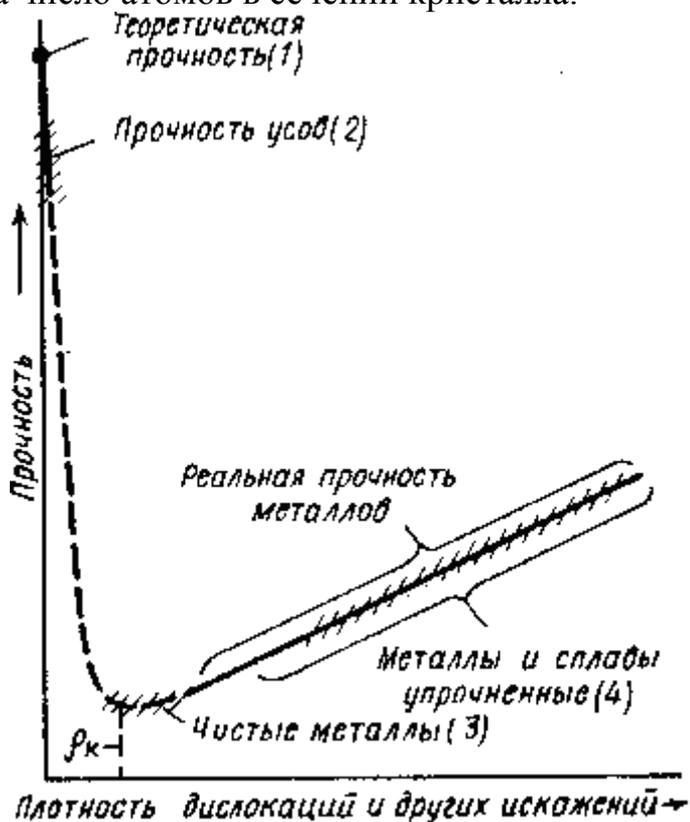


Рис.1. 2.5. Влияние плотности дислокаций на прочность

Расчетное усилие для смещения одной части кристалла относительно другой оказалось на 2-3 порядка выше фактически затрачиваемого при пластической деформации металла. Например, теоретическая прочность железа составляет около 13000 МПа, а фактическая - всего 250 МПа.

Как видим, наблюдается большое расхождение теоретической и фактической прочности. Это объясняется тем, что деформация происходит не путем одновременного смещения целых атомных плоскостей, а путем постепенного перемещения дислокаций. Пластический сдвиг является следствием постепенного перемещения дислокаций в плоскости сдвига. Распространение скольжения по плоскости скольжения происходит последовательно. Каждый элементарный акт перемещения дислокации из одного положения в другое совершается путем разрыва лишь одной вертикальной атомной плоскости. Для перемещения дислокаций требуется значительно меньшее усилие, чем для жесткого смещения одной части кристалла отно-

сительно другой в плоскости сдвига. При движении дислокации вдоль направления сдвига через весь кристалл происходит смещение верхней и нижней его частей лишь на одно межатомное расстояние. В результате перемещения дислокация выходит на поверхность кристалла и исчезает. На поверхности остается ступенька скольжения.

Если плотность меньше значения  $a$ , то сопротивление деформированию резко возрастает, а прочность приближается к теоретической. Повышение прочности достигается созданием металла с бездефектной структурой, а также повышением плотности дислокаций, затрудняющим их движение. В настоящее время созданы кристаллы без дефектов – нитевидные кристаллы длиной до 2 мм, толщиной 0,5...20 мкм - “усы” с прочностью, близкой к теоретической: для железа  $\sigma_{\text{з}} = 13000$  МПа, для меди  $\sigma_{\text{з}} = 30000$  МПа. При упрочнении металлов увеличением плотности дислокаций, она не должна превышать значений  $10^{15} \dots 10^{16} \text{ м}^{-2}$ . В противном случае образуются трещины.

Дислокации влияют не только на прочность и пластичность, но и на другие свойства кристаллов. С увеличением плотности дислокаций изменяются оптические свойства, повышается электросопротивление металла. Дислокации увеличивают среднюю скорость диффузии в кристалле, ускоряют старение и другие процессы, уменьшают химическую стойкость, поэтому в результате обработки поверхности кристалла специальными веществами в местах выхода дислокаций образуются ямки.

Дислокации образуются при образовании кристаллов из расплава или газообразной фазы, при срастании блоков с малыми углами разориентировки. При перемещении вакансий внутри кристалла, они концентрируются, образуя полости в виде дисков. Если такие диски велики, то энергетически выгодно “захлопывание” их с образованием по краю диска краевой дислокации. Образуются дислокации при деформации, в процессе кристаллизации, при термической обработке.

Поверхностные дефекты имеют малую толщину и значительные размеры в двух других измерениях.

К *поверхностным дефектам* относятся границы зерен, фрагментов и блоков (рис. 1.2.6).

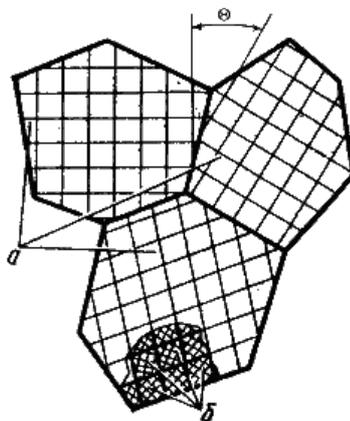


Рис. 1.2.6. Разориентация зерен и блоков в металле

Размеры зерен составляют до 1000 мкм. Углы разориентации составляют до нескольких десятков градусов ( $\theta$ ).

Граница между зернами представляет собой тонкую в 5 – 10 атомных диаметров поверхностную зону с максимальным нарушением порядка в расположении атомов.

Строение переходного слоя способствует скоплению в нем дислокаций. На границах зерен повышена концентрация примесей, которые понижают поверхностную энергию. Однако и внутри зерна никогда не наблюдается идеального строения кристаллической решетки. Имеются участки, разориентированные один относительно другого на несколько градусов ( $\theta_1$ ). Эти участки называются *фрагментами*. Процесс деления зерен на фрагменты называется *фрагментацией* или *полигонизацией*.

В свою очередь каждый фрагмент состоит из блоков, размерами менее 10 мкм, разориентированных на угол менее одного градуса ( $\theta_2$ ). Такую структуру называют *блочной или мозаичной*.

## 2. ФИЗИЧЕСКАЯ ПРИРОДА ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

### 2.1. Физическая природа деформации металлов

В твердых телах существуют достаточно большие силы взаимосвязи атомов, чтобы противостоять действию силы тяжести, и без воздействия внешних сил твердые тела сохраняют свою форму и размеры. Если приложить внешние силы к твердому телу, то под действием приложенного напряжения происходит изменение его формы и размеров. Это сопровождается изменением расстояния между отдельными материальными точками, составляющими данное тело, или же изменением размеров и формы элементарных объемов, на которые можно разделить рассматриваемое твердое тело. Под действием внешней растягивающей нагрузки расстояние между атомами увеличивается и их равновесное положение в твердом теле нарушается. Это приводит к нарушению равенства сил притяжения и отталкивания, что характерно для равновесного состояния. При этом возникают внутренние силы, которые стремятся вернуть атомы в первоначальное положение. Ниже рассмотрим характеристики этих формоизменений под действием внешней нагрузки.

Для характеристики величины изменения размеров и формы тела вводят понятие деформации.

*Деформацией* называется изменение формы и размеров тела под действием напряжений.

*Напряжение* – сила, действующая на единицу площади сечения детали.

Напряжения и вызываемые ими деформации могут возникать при действии на тело внешних сил растяжения, сжатия и т.д., а также в результате фазовых (структурных) превращений, усадки и других физико-химических процессов, протекающих в металлах, и связанных с изменением объема.

Металл, находящийся в напряженном состоянии, при любом виде нагружения всегда испытывает напряжения нормальные и касательные (рис. 2.1.1.).

Рост нормальных и касательных напряжений приводит к разным последствиям. Рост нормальных напряжений приводит к хрупкому разрушению. Пластическую деформацию вызывают касательные напряжения.

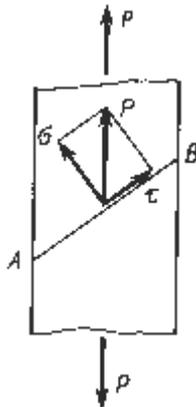


Рис.2.1.1. Схема возникновения нормальных и касательных напряжений в металле при его нагружении

Под действием напряжений происходит деформация металла, различают два вида деформации: упругая и пластическая.

Упругая - это деформация, полностью исчезающая после снятия вызывающих ее напряжений. При упругой деформации не происходят заметные остаточные изменения в структуре и свойствах металла. Под действием приложенной нагрузки происходит только незначительное относительное и обратимое смещение атомов. При растяжении монокристалла возрастают расстояния между атомами, а при сжатии атомы сближаются. При таком смещении атомов из положения равновесия нарушается баланс сил притяжения и электростатического отталкивания, поэтому после снятия нагрузки смещенные атомы вследствие действия сил притяжения или отталкивания возвращаются в исходное равновесное состояние, и кристаллы приобретают свою первоначальную форму и размеры.

При упругом деформировании изменяются расстояния между атомами металла в кристаллической решетке. Снятие нагрузки устраняет причину, вызвавшую изменение межатомного расстояния, атомы становятся на прежние места, и деформация исчезает.

Упругая деформация на диаграмме деформации характеризуется линией ОА (рис.2.1.2.).

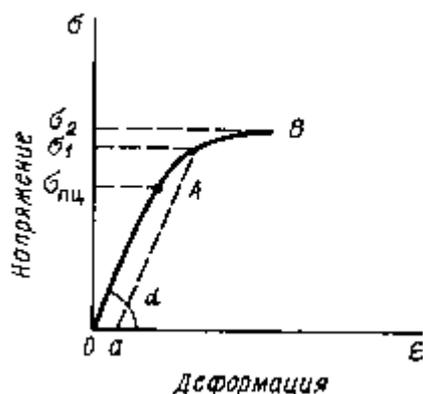


Рис.2.1.2. Диаграмма зависимости деформации металла  $\varepsilon$  от действующих напряжений  $\sigma$

Если нормальные напряжения достигают значения сил межатомных связей, то наблюдается хрупкое разрушение путем отрыва (рис.2.1.3.).

Связь между упругой деформацией  $\varepsilon$  и напряжением  $\sigma$  выражается законом Гука

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

где: E - модуль упругости.

Модуль упругости является важнейшей характеристикой упругих свойств металла. По физической природе величина модуля упругости рассматривается как мера прочности связей между атомами в твердом теле.

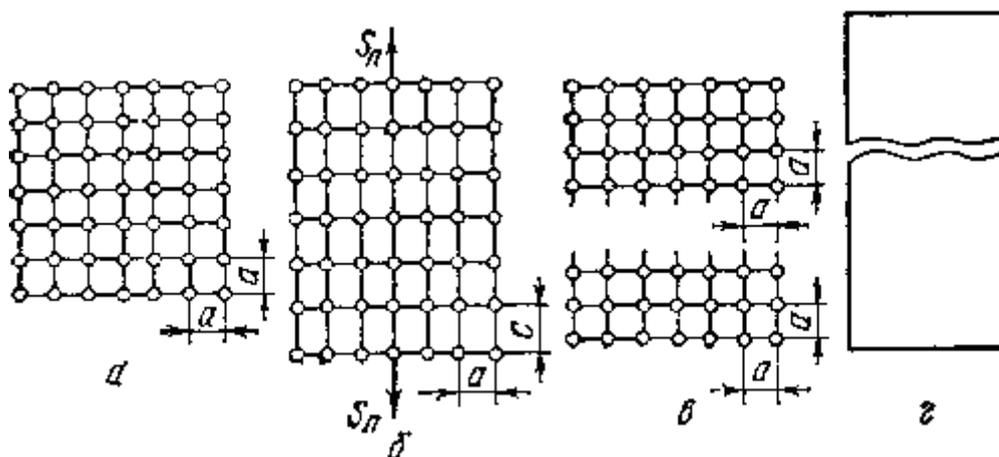


Рис.2.1.3. Схема упругой деформации и хрупкого разрушения под действием упругих напряжений  $\sigma$  – ненапряженная решетка металла; б – упругая деформация; в, г – хрупкое разрушение в результате отрыва

Эта механическая характеристика – модуль упругости - структурно нечувствительна, т. е. термическая обработка или другие способы изменения структуры не изменяют модуля упругости, а повышение температуры, изменяющее межатомные расстояния, снижает модуль упругости.

В хрупких материалах предел упругости обычно совпадает с пределом прочности. Это приводит к разрушению материала без видимой пластической деформации. В металлах, как правило, предел прочности и текучести

значительно меньше предела прочности и поэтому разрушение их происходит после значительной пластической деформации.

Пластической или остаточной называется деформация после прекращения действия вызвавших ее напряжений. Остаточная деформация возникает тогда, когда напряжение в твердом теле превысит предел текучести. Однако причиной ее возникновения не могут служить ни растяжение, ни сжатие. Увеличение степени растяжения может лишь привести к изменению расстояния между атомными плоскостями, перпендикулярными действующей силе. Под действием внешней нагрузки возможны значительные удаления атомных плоскостей, что приведет к разрушению тела. При сжатии произойдет сближение атомных плоскостей тесно друг к другу до тех пор, пока силы отталкивания между атомами не уравновесят внешнюю нагрузку. В данном случае деформация является идеально упругой и не может вызвать необратимые изменения в твердом теле.

При пластическом деформировании одна часть кристалла перемещается по отношению к другой под действием касательных напряжений. При снятии нагрузок сдвиг остается, т.е. происходит пластическая деформация (рис.2.1.4)

В результате развития пластической деформации может произойти вязкое разрушение путем сдвига. Способность кристалла к пластической деформации определяется характером сил связи между его структурными элементами.

Металлы и сплавы в твердом состоянии имеют кристаллическое строение, и характер их деформации зависит от типа кристаллической структуры и от наличия несовершенств в этой структуре.

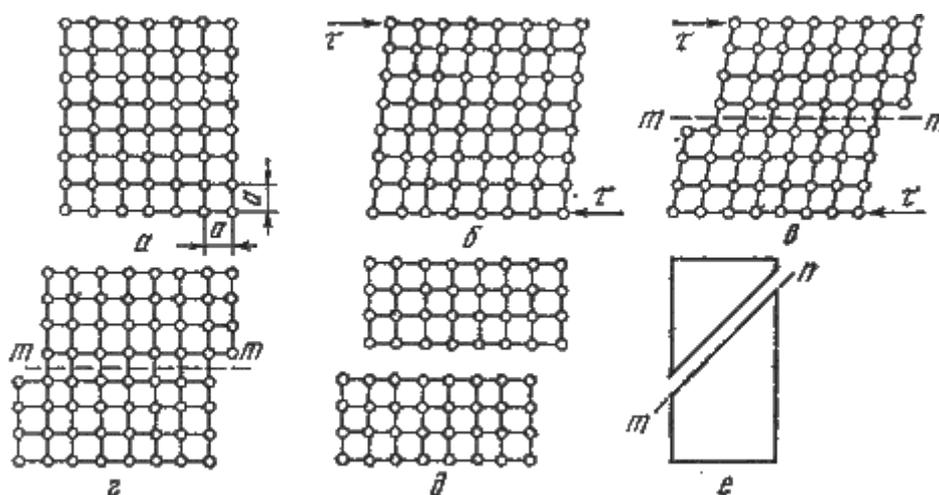


Рис.2.1.4. Схема пластической деформации и вязкого разрушения под действием касательных напряжений  $a$  – ненапряженная решетка;  $b$  – упругая деформация;  $c$  – упругая и пластическая деформация;  $d$  – пластическая деформация;  $e$  – пластичное (вязкое) разрушение в результате сдвига

Рассмотрим пластическую деформацию в монокристалле.

Пластическая деформация может протекать под действием касательных напряжений и может осуществляться двумя способами.

1. Трансляционное скольжение по плоскостям (рис. 2.1.5 а). Одни слои атомов кристалла скользят по другим слоям, причем они перемещаются на дискретную величину, равную целому числу межатомных расстояний.

В промежутках между полосами скольжения деформация не происходит. Во время пластической деформации тело не изменяет своего кристаллического строения и, соответственно, расположение атомов в элементарных ячейках сохраняется.

Это наиболее характерный вид деформации при обработке давлением.

Экспериментально установлено, что полосы скольжения отстоят одна от другой в среднем на расстоянии около 1 мкм, в то время как расстояния между соседними атомными плоскостями выражаются цифрами порядка  $1 \cdot 10^{-4}$  мкм.

Скольжение в монокристаллах происходит по определенным кристаллографическим плоскостям, которые называются плоскостями скольжения. Плоскостями скольжения являются кристаллографические плоскости с наиболее плотной упаковкой атомов. Совокупность плоскости скольжения и направления скольжения составляют систему скольжения. Количество плоскостей и направлений в значительной мере определяет пластичность металлов. Чем больше в монокристалле плоскостей скольжения, тем пластичнее металл. Для металлов с гранецентрированной кубической решеткой плоскостями скольжения являются плоскости октаэдра (111), а направлениями скольжения – направление по диагонали грани [101]. В металлах с объемноцентрированной кубической решеткой плоскостями скольжения (110), (112), (111), а преобладающими направлениями скольжения - направление по диагонали куба [111]. В металлах с гексагональной решеткой плоскостью скольжения является плоскость базиса (основания), а направления скольжения – направления, совпадающие с диагональю шестиугольника.

Таким образом, в объемноцентрированной кубической решетке плоскостей скольжения 14, в гранецентрированной 4, а в гексагональной 2. Поэтому металлы кристаллизуются в объемноцентрированную (Fe- $\alpha$ , Cr, W, Mo, V) и гранецентрированную решетку (Cu, Ni, Al) и обладают большей пластичностью, чем металлы с гексагональной решеткой (Mg, Zn, Cd). В металлах с гексагональной решеткой при повышении температуры появляются дополнительные плоскости скольжения. В связи с этим металлы с гексагональной решеткой могут обрабатываться давлением только в горячем состоянии, а металлы с кубической, объемноцентрированной и гранецентрированной решеткой могут подвергаться как холодной, так и горячей обработке давлением. Скольжение начинается тогда, когда действия максимального движущего направления, превосходящего предел текучести, совпадут с плоскостями скольжения. Максимально движущее напряжение действует в плоскостях, расположенных в отношении усилия, действующего под углом  $45^\circ$ . Критическое значение величины напряжения сильно зависит от степени предварительной деформации тела и растет с ростом деформации.

2. Пластическая деформация может протекать также путем двойникования. Двойникование – поворот одной части кристалла в положение симметричное

другой его части. Плоскостью симметрии является плоскость двойникования (рис. 2.1.5 б). Иными словами, каждая атомная плоскость, параллельная плоскости двойникования, смещается вдоль самой себя на расстояние, пропорциональное расстоянию ее от плоскости двойникования. В результате этих действий в двойниковой области атомы занимают положения, соответствующие зеркальному отображению структуры недеформированной части тела относительно плоскости двойникования.

. Двойникование чаще наблюдается при пластической деформации кристаллов с объемно-центрированной и гексагональной решеткой. С повышением скорости деформации и понижением температуры склонность тела к двойникованию возрастает.

Причиной возникновения двойникования может быть не только действия внешних сил, но и отжиг пластически деформированного тела. Это характерно для металлов с гранецентрированной кубической решеткой (медь, латунь). Двойникованием можно достичь незначительной степени деформации.



Рис.2.1.5. Схемы пластической деформации различными способами: а – скольжением; б – двойникованием

Двойникование чаще наблюдается в случае деформации при пониженных температурах, а также при динамической деформации. Однако пластическая деформация металлов в основном протекает за счет скольжения.

Двойникование, как и скольжение, развивается только по определенным кристаллографическим плоскостям. Плоскости двойникования обычно совпадают с плоскостями скольжения. Для металлов с кубической решеткой плоскостью двойникования обычно является плоскость (111), для металлов с объемно-центрированной кубической решеткой – плоскость (112) и для металлов с гексагональной плотноупакованной решеткой – плоскость – (10 $\bar{1}$ 2).

Необходимым условием возникновения двойникования является достижение критического значения величины касательных напряжений.

При двойниковании происходят лишь незначительные смещения атомных плоскостей относительно друг друга, поэтому это не приводит к большой остаточной деформации.

## 2.2. Дислокационный механизм пластической деформации

Дислокации образуются уже при кристаллизации металлов, а также в ходе пластической деформации и фазовых превращений.

Образование дислокаций может быть обусловлено различными причинами. Можно рассмотреть пять способов образования дислокации:

1. при кристаллизации металлов;
2. при срастании зерен (кристаллов) и блоков;
3. перерождение колоний вакансий в дислокации;
4. в районе высоких напряжений;
5. из источника Франка – Рида.

Если в кристалле уже в момент зарождения формируется винтовая дислокация, то это значительно облегчает рост образовавшегося монокристаллического образца путем присоединения к поверхности двумерных зародышей.

Вероятность роста зародыша, имеющего совершенную структуру, мала, по сравнению зародышем, содержащим винтовую дислокацию. Присоединенные к гладкой поверхности зародыша атомы легко смываются тепловым движением. При наличии винтовой дислокации на поверхности кристалла постоянно находится неисчезающая ступенька, пристраиваясь к которой, атомы прочнее связываются с кристаллом. При закручивании ступеньки образуются спирали роста с высотой от одного до нескольких тысяч атомов. Поэтому даже самые совершенные кристаллы, которые удается выращивать, могут содержать, по крайней мере, одну винтовую дислокацию роста. В процессе кристаллизации при затвердевании отдельные ветви срастиваются со смещением кристаллографических осей. Такое смещение может вызываться движением кристаллизующейся жидкости. На границе могут образоваться дислокации.

Довольно типичным примером возникновения дислокации является также процесс перерождения скопления вакансий в дислокационную петлю при захлопывании диска вакансий, когда диаметр диска превышает некоторую критическую величину, и под действием сил межатомного притяжения его стороны сближаются, и диск сплющивается с образованием дислокации

Наиболее важным процессом размножения дислокаций является механизм Франка-Рида. Он связан с поведением дислокационной линии, закрепленной на обоих концах. Закрепление дислокации в этих концах может быть вызвано разными причинами: они могут оказаться узловыми точками, где встречаются три дислокации в трехмерной дислокационной сетке; может быть вызвано атомами примеси или частицами выделений.

Под воздействием напряжения линия краевой дислокации начинает изгибаться в плоскости скольжения. Увеличение длины дислокации компенсируется работой внешних сил. Приложенное напряжение оказывается максимальным для линии в форме полуокружности, но после прохождения этой стадии дислокационная линия становится неустойчивой и непрерывно расширяется. У точек закрепления образуются спиральные участки

дислокации. На завершающем этапе два дислокационных участка с противоположными знаками будут перемещаться навстречу друг другу и при соприкосновении исчезнут. Одновременно восстанавливается первоначальный дислокационный отрезок, который может полностью повторить описанный процесс.

Таким путем порождается бесконечная серия петель, пока обратные напряжения, возникающие при дислокационном взаимодействии и противодействующие приложенным напряжениям, не прекратят работу источника. Плоскость скольжения становится заблокированной; чтобы возобновить работу источника, а, следовательно, и процесс пластической деформации, нужно приложить теперь большее по величине напряжение. Для поддержания непрерывного процесса деформирования к металлу нужно прикладывать возрастающее по величине напряжение, так как сопротивление сдвигу непрерывно увеличивается. Металл, следовательно, упрочняется.

Появление дислокаций может быть связано с наличием температурного градиента и, следовательно, с появлением термических напряжений. Релаксация таких напряжений может осуществляться путем возникновения дислокаций. При этом повышение энергии из-за образования дислокаций компенсируется снижением энергии упругой деформации кристалла.

Аналогичный эффект дает концентрационный градиент, который может возникать в твердом растворе внедрения или замещения. Различие в составе отдельных локальных участков твердого раствора подобно вызвать разницу в параметре ячейки. Возникающие при этом упругие напряжения могут стимулировать процесс появления дислокаций.

Размножение дислокаций при пластической деформации может происходить и путем множественного поперечного скольжения винтовых компонент.

В результате действия различных источников в металле возникают разнообразные дислокационные структуры.

Механизм пластической деформации поликристалла значительно сложнее, чем монокристалла. Это объясняется тем, что в них зерна отличаются между собой по форме и размерам, обладающих различными физико-химическими свойствами и ориентированные в отношении деформирующей нагрузки.

Особую роль в поликристаллах играют границы зерен, по которым в процессе затвердевания образуются так называемые межкристаллитные прослойки, толщина которых не превышает 1-2 мкм. Границы зерен отличаются как по составу, так и по структуре, и как правило, обогащенные примесями. На границах зерен накапливаются дефекты решетки, в которых атомы обладают высшей потенциальной энергией. В результате подвижность атомов по границам зерен может быть больше, чем во внутренних слоях зерен, и их относительное перемещение может происходить при сравнительно меньшем касательном напряжении.

Однако деформации пограничных слоев зерен все же сложные из-за наличия в них нерастворимых примесей и неправильной формы поверхности

самих зерен. В связи с этим различают два вида деформации поликристалла: внутренне кристаллическую (по зерну) и межкристаллической (по границам зерен). Первая также протекает путем скольжения и двойникования, вторая путем поворота и перемещением только зерен относительно друг друга.

Оба вида деформации протекают в поликристаллах одновременно. Преобладание того или иного вида деформации определяется соотношением прочности отдельных зерен и их границ при данных условиях деформации. На прочность зерен и их границ влияет химический состав, размер зерен, температура и скорость деформации. При нормальной температуре прочность границ зерен, как правило, больше прочности зерен. Поэтому при холодной обработке металлов давлением внутрикристаллитная деформация является основным процессом, обуславливающим изменение формы поликристалла. При высоких температурах прочность зерен больше прочности их границ из-за наличия на границах более легкоплавких примесей и меньшей термодинамической устойчивости пограничных зон самого металла, вследствие чего при горячей обработке давлением преобладает межкристаллитная деформация.

Рассмотрим механизм деформации монокристалла. Пастическая деформация происходит в результате скольжения или двойникования. Ранее предполагали, что при скольжении одна часть кристалла сдвигается относительно другой части на целое число периодов как единое целое. Необходимое для этого напряжение получается на несколько порядков выше действительного сдвигового напряжения.

Для железа теоретическое значение сдвигового напряжения  $\tau_{теор} = 13300$  МПа,  $\tau_{реал} = 20$ .

*В основу современной теории пластической деформации взяты следующие положения:*

- *скольжение распространяется по плоскости сдвига последовательно, а не одновременно;*
- *скольжение начинается от мест нарушений кристаллической решетки, которые возникают в кристалле при его нагружении.*

Схема механизма деформации представлена на рис.6.6 а.

В равновесном состоянии дислокация неподвижна. Под действием напряжения экстраплоскость смещается справа налево при незначительном перемещении атомов. Нижняя часть плоскости P'S (SR) сместится вправо и совместится с нижним краем экстра- плоскости PQ.

QR- остаточная деформация.

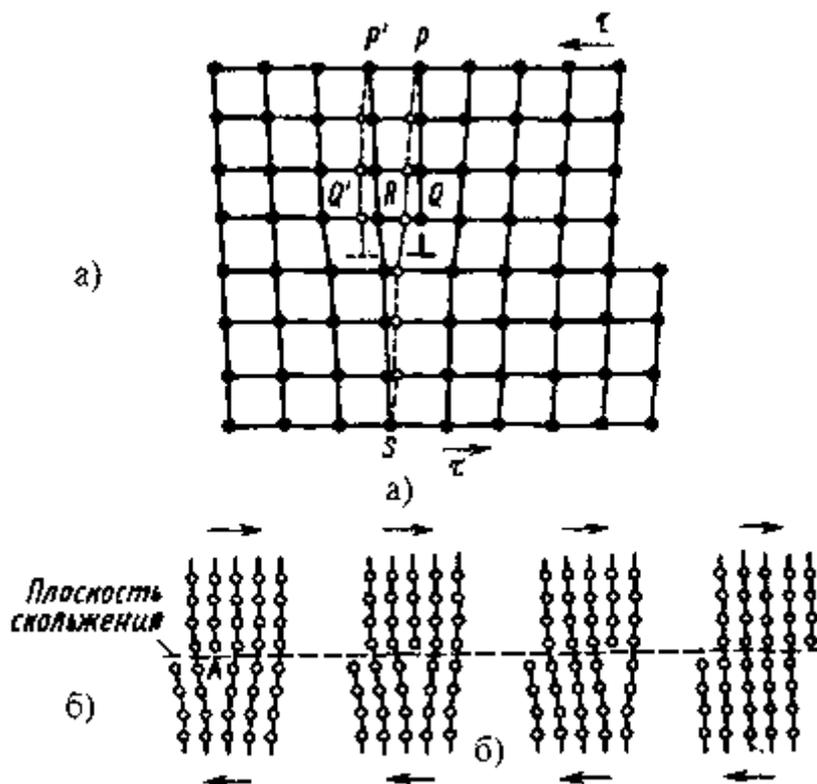


Рис. 2.2.1. Схема дислокационного механизма пластической деформации *a* – перемещение атомов при движении краевой дислокации на одно межатомное расстояние; *б* – перемещение дислокации через весь кристалл

При дальнейшем движении дислокация пройдет всю плоскость скольжения и выйдет на поверхность зерна. При этом верхняя часть зерна сдвинута относительно нижней на один межатомный период решетки (рис. 2.2.1 б).

При каждом перемещении дислокации на один шаг необходимо разорвать связь только между двумя рядами атомов в плоскости P'S, а не между всеми атомами, расположенными выше и ниже плоскости скольжения. Необходимое сдвиговое напряжение при этом мало, равно практически действительному.

Процесс деформации при достижении высоких напряжений завершается разрушением. Тела разрушаются по сечению не одновременно, а вследствие развития трещин. Разрушение включает три стадии: зарождение трещины, ее распространение через сечение, окончательное разрушение.

Различают хрупкое разрушение – отрыв одних слоев атомов от других под действием нормальных растягивающих напряжений. Отрыв не сопровождается предварительной деформацией. Механизм зарождения трещины одинаков – благодаря скоплению движущихся дислокаций перед препятствием (границы субзерен, фазовые границы), что приводит к концентрации напряжений, достаточной для образования трещины. Когда напряжения достигают определенного значения, размер трещины становится критическим и дальнейший рост осуществляется произвольно.

Для хрупкого разрушения характерна острая, часто ветвящаяся трещина. Величина зоны пластической деформации в устье трещины мала. Скорость

распространения хрупкой трещины велика - близка к скорости звука (внезапное, катастрофическое разрушение). Энергоемкость хрупкого разрушения мала, а работа распространения трещины близка к нулю.

Различают транскристаллитное разрушение – трещина распространяется по телу зерна, интеркристаллитное – по границам зерен (всегда хрупкое).

Результатом хрупкого разрушения является блестящий светлый кристаллический излом с ручьистым строением. Хрупкая трещина распространяется по нескольким параллельным плоскостям. Плоскость излома перпендикулярна нормальным напряжениям.

Вязкое разрушение – путем среза под действием касательных напряжений. Ему всегда предшествует значительная пластическая деформация.

Трещина тупая раскрывающаяся. Величина пластической зоны впереди трещины велика. Малая скорость распространения трещины. Энергоемкость значительная, энергия расходуется на образование поверхностей раздела и на пластическую деформацию. Большая работа затрачивается на распространение трещины. Поверхность излома негладкая, рассеивает световые лучи, матовая (волоконистый) излом. Плоскость излома располагается под углом.

По излому можно определить характер разрушения.

Подводя итог дислокационным представлениям об упрочнении можно отметить следующее. В общем, под упрочнением можно понимать повышение уровня напряжения с увеличением величины пластической деформации. С ростом степени пластической деформации плотность дислокаций в кристалле возрастает, уменьшается длина пробега дислокаций, обусловленного их взаимодействием друг с другом и с другими барьерами в виде границ зерен, блоков, включениями других фаз и других подобных препятствий. К ним можно отнести атомы растворенных примесей и легирующих элементов. Кроме взаимодействия дислокаций различного рода препятствиями, их количество может возрасти за счет действия источников размножения дислокаций Франка-Рида. С повышением плотности дислокаций скорости их движения уменьшаются и для ее поддержания требуется увеличение прилагаемой нагрузки. На практике препятствия движению дислокаций, т.е. упрочнения создаются введением в кристаллическую решетку основного материала других элементов (легирование), поверхностным деформационным упрочнением (наклепом), различными видами термической и термомеханической обработки и другими методами. Таким образом, повышение прочности кристаллических материалов может быть достигнуто двумя путями:

- получением практически бездефектных материалов или с небольшим (от единиц до десятков) числом дислокаций;

-либо повышением плотности дефектов, в том числе дислокаций, и других структурных препятствий, закономерно расположенных в объеме кристаллов, затрудняющих перемещение дислокаций.

В первом случае можно достичь теоретической прочности материалов, во втором, получить материалы с заранее заданными механическими характеристиками. На этой закономерности основаны практически все

применяемые в настоящее время методы упрочнения металлических материалов и сплавов.

В результате испытаний получают характеристики:

- силовые (предел пропорциональности, предел упругости, предел текучести, предел прочности, предел выносливости);
- деформационные (относительное удлинение, относительное сужение);
- энергетические (ударная вязкость).

Все они характеризуют общую прочность материала независимо от назначения, конструкции и условий эксплуатации. Высокое качество детали может быть достигнуто только при учете всех особенностей, которые имеют место в процессе работы детали, и которые определяют ее *конструкционную прочность*.

*Конструкционная прочность* – комплекс прочностных свойств, которые находятся в наибольшей корреляции со служебными свойствами данного изделия, обеспечивают длительную и надежную работу материала в условиях эксплуатации.

На конструкционную прочность влияют следующие факторы:

- конструкционные особенности детали (форма и размеры);
- механизмы различных видов разрушения детали;
- состояние материала в поверхностном слое детали;
- процессы, происходящие в поверхностном слое детали, приводящие к отказам при работе.

Необходимым условием создания качественных конструкций при экономном использовании материала является учет дополнительных критериев, влияющих на конструкционную прочность. Этими критериями являются *надежность* и *долговечность*.

*Надежность* – свойство изделий, выполнять заданные функции, сохраняя эксплуатационные показатели в заданных пределах в течение требуемого времени или сопротивление материала хрупкому разрушению.

Развитие хрупкого разрушения происходит при низких температурах, при наличии трещин, при повышенных остаточных напряжениях, а также при развитии усталостных процессов и коррозии.

Критериями, определяющими надежность, являются температурные пороги хладоломкости, сопротивление распространению трещин, ударная вязкость, характеристики пластичности, живучесть.

*Долговечность* – способность детали сохранять работоспособность до определенного состояния.

Долговечность определяется усталостью металла, процессами износа, коррозии и другими, которые вызывают постепенное разрушение и не влекут аварийных последствий, то есть условиями работы.

Критериями, определяющими долговечность, являются усталостная прочность, износостойкость, сопротивление коррозии, контактная прочность.

Общими принципами выбора критериев для оценки конструкционной прочности являются:

- аналогия вида напряженного состояния в испытываемых образцах и изделиях;
- аналогия условий испытания образцов и условий эксплуатации (температура, среда, порядок нагружения);
- аналогия характера разрушения и вида излома в образце и изделии.

### 3. ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

#### 3.1. Влияние температуры на упрочнение

Температура рекристаллизации подавляющего большинства металлов и сплавов существенно превышает 293 К. Исключение составляет свинец и его сплавы, температура рекристаллизации которого  $T_{\text{рекр}}=270$  К. Поэтому при пластической деформации металлов и сплавов при температуре 293 К имеет место явление упрочнения. Оно заключается в повышении таких металлических характеристик, как предел прочности и предел текучести. Одновременно снижается пластичность металла, о чем свидетельствует уменьшение, например, относительного сужения площади сечения образца при испытании на растяжение.

Физическая природа упрочнения до настоящего времени полностью не выяснена. Объяснение этого явления в основном сводится к следующему. С началом пластического деформирования происходит значительное искажение кристаллической атомной решетки, сопровождающееся превращением плоскостей скольжения в поверхности сложной формы, измельчением зерен и образованием как бы новых границ со сложной неправильной формой и наличием обломков зерен. Все это приводит к увеличению плотности дислокаций и дальнейшему росту напряжений. Кроме того, в процессе пластической деформации могут иметь место другие явления, повышающие сопротивление деформированию. Известно, что пластическая деформация сопровождается значительным повышением температуры деформируемого тела, которая может достигать нескольких десятков, а иногда сотен градусов.

Упрочнение обуславливает повышение напряжения текучести с увеличением степени деформации. Причиной упрочнения в настоящее время считают совокупность следующих факторов: возникновение и накопление дислокаций на плоскостях скольжения при пластическом деформировании; их блокирование; превращение плоскостей скольжения в поверхности скольжения; дробление кристаллитов на блоки с уже не параллельными осями и концентрация мелких обломков на поверхностях скольжения.

Упрочнение металла происходит особенно интенсивно при малых степенях холодной деформации; с ростом степени деформации эта интенсивность постепенно уменьшается. Степень деформации, при которой интенсивность ослабевает, носит название порога деформации. Для низкоуглеродистых и среднеуглеродистых сталей порог деформации

наблюдает при относительном сужении  $\psi=20-30\%$ . Для сталей аустенитного класса порог упрочнения значительно выше.

Температура пластически деформируемого металла является основным фактором, от которого зависят вид деформации (холодная или горячая), прочностные и пластические характеристики, а также однородность деформации.

С повышением температуры деформации изменяется не только напряжение текучести, но и сам характер кривых упрочнения.

Кривые упрочнения дают зависимость величины напряжения, действующего в пластически деформируемом теле при линейном напряженном состоянии, от величины деформации.

Так как напряжения, вызывающие пластическую деформацию, зависят от многих факторов, в том числе от температурно-скоростных условий деформирования, то кривые упрочнения для каждого металла и сплава следует устанавливать применительно к конкретным температурно-скоростным условиям деформирования.

Меняющиеся в зависимости от величины и скорости деформации напряжения, вызывающие пластическую деформацию при линейном напряженном состоянии при данных температурно-скоростных условиях деформирования, называют *напряжением текучести*.

Для экспериментального определения напряжения текучести необходимо создать такие условия деформирования, при которых деформации равномерно распределены по деформируемой части заготовки, а напряженное состояние линейное. Наиболее подходящими для построения кривых упрочнения являются данные, получаемые при испытании на растяжение или сжатие (осадку). Если в этих испытаниях имеет место линейное напряженное состояние, то напряжение текучести определяется как частное от деления усилия деформирования на истинную площадь поперечного сечения образца в данный момент деформирования (поэтому напряжение текучести называют также истинным напряжением).

Чем выше температура, тем ниже располагаются кривые. При температуре рекристаллизации и выше в средней части они становятся параллельными оси интенсивности деформации, что свидетельствует об отсутствии упрочнения. Если нагреть предварительно холоднодеформированный металл до некоторой для каждого металла температуры, то происходят явления, связанные с изменением скорости диффузии атомов.

При испытании на растяжение линейное напряженное состояние существует лишь до момента начала образования шейки, в которой нарушается равномерность распределения деформаций, а напряженное состояние становится объемным. Поэтому построение кривой упрочнения для деформаций больших, чем деформация, соответствующая началу образования шейки, затрудняется и возможно лишь с известным приближением на основании разработанных методов.

При испытании на осадку в пределах пластических деформаций нет ограничения по величинам деформаций, при которых могут быть определены значения напряжения текучести, однако необходимо исключить влияние контактного трения, что представляет довольно сложную задачу.

### 3.2. Виды деформации при обработке металлов давлением

Основным признаком, по которому в теории обработки металлов давлением производится деление пластической деформации на виды, является температура. Она определяет соотношение процессов упрочнения и разупрочнения, происходящих параллельно в деформируемом теле.

Совокупность явлений, связанных с повышением прочностных свойств металлов в процессе пластической деформации, называется деформационным упрочнением или наклепом.

Если в ходе пластической деформации прочностные характеристики металла понижаются, то речь идет о так называемом разупрочнении металла.

Упрочняющие и разупрочняющие процессы протекают во времени с определенными скоростями, обусловленными условиями деформации и природой деформируемого металла. В зависимости от того, какой из процессов является преобладающим, результаты деформации будут различны.

Существует несколько вариантов разделения пластической деформации на виды, из которых на практике наибольшее распространение получил тот, по которому различают только горячую и холодную деформации.

Пластическую деформацию металлов называют горячей, если она осуществляется при температуре, равной или выше температуры начала рекристаллизации ( $T \geq T_{\text{рекр}}$ ). Температура  $T$  берется в Кельвинах. Рекристаллизация ( $T_{\text{рекр}} = 0,4 * T_{\text{пл}}$ ), т.е. процесс роста новых недеформированных зерен, вызывающий восстановление всех первоначальных физико-механических характеристик металла, успевает пройти полностью, искажения кристаллической решетки отсутствуют. В результате горячей деформации металл получает полностью рекристаллизованную равноосную микроструктуру при отсутствии каких-либо следов упрочнения.

При холодной деформации рекристаллизация и возврат полностью отсутствуют и деформированный металл имеет все признаки упрочнения. Температурный интервал холодной деформации расположен ниже температур начала рекристаллизации ( $T < T_{\text{рекр}}$ ). В результате холодной деформации сопротивление металла деформации увеличивается, пластичность уменьшается. Используется она обычно на конечных стадиях получения изделий для обеспечения точности размеров, требуемого уровня свойств и высокого качества поверхности. При холодной деформации рекристаллизация и возврат полностью отсутствуют и деформированный металл имеет все признаки упрочнения. Холодная деформация при температурах, меньших температуры начала возврата.

Согласно приведенной классификации холодная и горячая деформации не связаны с конкретными температурами нагрева, а зависят только от протекания процессов упрочнения и разупрочнения. Определить вид деформации можно по заданной температуре обработки металла (таблица 3.2.1).

Таблица 3.2.1

Установление вида деформации по заданной температуре обработки

Металл	$\Theta_{обр}, ^\circ\text{C}$	$\Theta_{пл}, ^\circ\text{C}$	$T_{пл}, \text{K}$	$T_{рекр}, \text{K}$	$\Theta_{рекр}, ^\circ\text{C}$	Вид деформации
Pb	20	327	600	240	-33	Горячая
	-					-
Al	90	660	933	373	100	Холодная
	250					Горячая
Cu	250	1083	1356	542	269	Холодная
	400					Горячая

Холодной деформации присущ в основном механизм пластической деформации, относящийся к внутризеренным. Межзеренное скольжение выражено значительно слабее вследствие того, что границы зерен, имеющие неправильную форму, менее благоприятны для сдвиговой деформации, чем плоскости скольжения внутри зерен. Остальные виды пластической деформации – диффузия, раствороно-осадочный – практически не происходят.

Холодной деформации подвергают металл, предварительно прошедший пластическую обработку (прокаткой или прессованием), а также во многих случаях подвергнутый термической обработке. Металл в исходном (литом) состоянии в условиях холодной деформации, как правило, не деформируют. Один и тот же металл может быть подвергнут холодной деформации неоднократно.

Наряду с отмеченными явлениями при пластической деформации в некоторых случаях возможны фазовые превращения. Например, при холодной деформации коррозионно-стойкой стали аустенитного класса, представляющей собой после закалки однородный твердый раствор с кристаллической решеткой гранецентрированного куба ( $\gamma$ -железо), происходит выделение фазы с решеткой объемноцентрированного куба ( $\alpha$ -железо). Аналогичные явления обнаружены при при пластическом деформировании закаленной мартенсит стали и закаленных сплавов типа дюралюминия. Фазовые превращения при пластической деформации можно объяснить повышением температуры деформируемого тела, а также аллотропическими изменениями под действием напряжений. Например, установлено, что при охлаждении стали с содержанием углерода 0,9% под давлением 4700 кг/см<sup>2</sup> критическая температура равна 833 К, а под давлением 1 кг/см<sup>2</sup> – 963 К.

Холодная пластическая деформация характеризуется тем, что все изменения строения тела, вызываемые ее деформированием (за исключением упругой составляющей общей деформации), остаются в теле и после деформации. Следовательно, строение холоднодеформированного металла существенно отличается от его строения до деформации. Изменение строения металла, вызванное пластической деформацией, приводит к значительным изменениям его свойств: механических, физических и химических, которые тем больше, чем выше деформация.

Таким образом, температурно-скоростные условия оказывают существенное влияние на строение деформированного металла.

Повышение температуры металла оказывает существенное влияние и на его механические характеристики. В отношении показателей пластичности характерно их некоторое уменьшение в области температур фазовых превращений. Снижение пластичности в области фазовых превращений объясняется наличием в деформируемом теле одновременно двух фаз различными свойствами, что приводит к увеличению неравномерности напряженного и деформированного состояний.

При температурах несколько меньших температуры плавления наблюдается резкое снижение пластичности, являющееся результатом значительного роста зерна и последующего пережога металла (окисление границ зерен).

Общим положением для всех металлов и сплавов является то, что наибольшую пластичность они имеют при температурах рекристаллизации, т.е. в условиях горячего деформирования, которым одновременно соответствуют и малые значения показателей прочности, а следовательно, и сопротивления деформированию.

Увеличение пластичности при нагреве до температур горячей деформации является следствием увеличения подвижности атомов, но, кроме того, увеличению пластичности способствуют еще некоторые явления. Так, например, в условиях горячего деформирования обычно значительно возрастает пластичность межкристаллических прослоек, содержащих повышенное количество примесей. Это объясняется тем, что пограничные слои с повышенным содержанием примесей обладают меньшей термодинамической устойчивостью и имеют температуру плавления меньшую, чем температуру плавления зерен основного металла. С нагревом до температур горячего деформирования прочность межзеренных прослоек уменьшается более интенсивно, чем прочность зерен, и доля межкристаллитной деформации в общей деформации металла увеличивается. Одновременно хрупкость этих прослоек уменьшается, а, следовательно, уменьшается и образование в них микротрещин.

Уменьшение опасности микротрещин объясняется также возможностью их «залечивания» в процессе деформирования. Так как подвижность атомов увеличивается с ростом температуры, то и «залечивание» микротрещин легче осуществляется при температурах горячей деформации.

Таким образом, обработка давлением в условиях горячей деформации требует наименьших усилий деформирования и позволяет получать максимальное формоизменение заготовки.

Однако для заготовок малых размеров трудно выдержать заданный температурный режим деформирования (учитывая охлаждение при соприкосновении с холодным инструментом и потери теплоты в окружающую среду, возрастающие с ростом отношения площади поверхности заготовки к ее объему), поэтому горячую обработку давлением обычно применяют для крупных и средних заготовок (листовых заготовок с толщиной примерно более 10 мм и заготовок из сортового металла массой более 0,1 кг). Заготовки малых размеров и тонколистовые заготовки обычно обрабатывают в условиях холодной деформации.

## 4. ТЕОРИЯ НАПРЯЖЕНИЙ И ДЕФОРМАЦИЙ В ОБРАБОТКЕ МЕТАЛЛОВ ДАВЛЕНИЕМ

### 4.1. Основные положения теории напряжений и деформаций

*Материальный континуум* (сплошная среда) есть состоящая из большого числа малых частиц фиктивная субстанция, которая непрерывно, сплошным образом заполняет область пространства  $D$ , отведенную данному телу, независимо от его агрегатного состояния. Следует отметить, что под частицей, составляющей материальный континуум, понимается часть тела, малая по отношению к геометрическим размерам тела, но большая по сравнению с размерами молекул. Таким образом, в рамках феноменологического подхода имеет место абстрагирование от реального атомно-молекулярного строения тел и переход к идеализированному представлению вещества в виде материального континуума. Такая идеализация реального дискретного вещества позволяет использовать при исследовании движения деформируемых тел аппарат дифференциального и интегрального исчисления непрерывных функций.

Теория напряжений и деформаций строится в рамках феноменологического подхода при ограничениях и упрощениях, определяемых *гипотезами механики сплошных сред*.

*Первая гипотеза - гипотеза сплошности* – связана с понятием материального континуума. Все тела состоят из отдельных частиц, но их много в любом существенном для нас объеме, поэтому тело можно приближенно рассматривать как среду, заполняющую пространство сплошным образом. Воду, воздух, железо и т.д. будем рассматривать как тела, целиком заполняющие некоторую часть пространства. Непрерывным континуумом можно считать не только обычные материальные тела, но и различные поля, например электромагнитное поле. Эта идеализация, в частности, необходима потому, что мы хотим при исследовании движения деформируемых тел

использовать аппарат непрерывных функций, дифференциальное и интегральное исчисления.

*Вторая гипотеза* связана с понятием пространства. Под *пространством* понимается бесконечно большая совокупность точек, однозначно задаваемых с помощью чисел, называемых координатами, которые определяют положение точки относительно начала координат. *Мерность пространства* обусловлена числом координат, которыми определяется положение точек в пространстве. Например, бесконечно большая совокупность точек в обычном физическом пространстве составляет трехмерное пространство, так как положение произвольной точки в декартовой прямоугольной системе координат задается тремя координатами  $x_1, y_1, z_1$ .

Предполагается, что пространство, в котором рассматривается движение деформируемых сред, является *евклидовым*.

*Третья гипотеза – гипотеза абсолютного времени*. Согласно этой гипотезе, время течет одинаково вне зависимости от выбора системы отсчета, в которой рассматривается движение деформируемой среды. Данная гипотеза является хорошей идеализацией при решении большинства практических задач, в условиях которых скорости движения тел не достигают таких значений, чтобы возникла необходимость учета релятивистских эффектов.

Итак, будем рассматривать движение сплошной среды – континуума в евклидовом пространстве и будем пользоваться абсолютным временем. Таким образом, выше приведенные три фундаментальные гипотезы, с использованием которых будет строиться теория движения деформируемых тел. Выводы из теории, основанной на этих гипотезах, часто, но не всегда, согласуются с опытом. В нужных случаях принятую модель пространства и времени можно уточнять и обобщать. Однако все дальнейшие обобщения строятся с учетом и на основе механики Ньютона, базирующейся на описанных выше фундаментальных гипотезах.

Движение всегда рассматривается по отношению к некоторой системе отчета – системе координат. С помощью системы координат устанавливается соответствие между числами и точками пространства. Для трехмерного пространства точкам ставятся в соответствие три числа  $x^1, x^2, x^3$ , которые называются координатами точки. Линии, на которых какие-либо две координаты сохраняют постоянные значения, называются координатными линиями. Через каждую точку пространства можно провести три координатные линии. Касательные к координатным линиям в каждой точке не лежат в одной плоскости и образуют неортогональный триэдр. Если координатные линии  $x_1, x_2, x_3$  прямые, то это прямолинейная система координат, если нет, то – криволинейная. Криволинейная система координат, по существу, необходимы в механике сплошной среды.

Условимся через  $x^1, x^2, x^3$  обозначать координаты относительно любой, в том числе иногда и декартовой, системы координат, а через  $x, y, z$  координаты только относительно ортогональной декартовой системы координат, через  $t$  – время.

Точка движется относительно системы координат  $x^1, x^2, x^3$ , если ее координаты меняются в зависимости от времени:

$$x^i = f^i(t) \quad (i=1,2,3) \quad (4.1.1)$$

Движущаяся точка в разные моменты времени отождествляется с разными точками пространства. Движение точки известно, если известны функции (4.1.1), называемые законом движения точки.

Сплошная среда представляет собой непрерывную совокупность точек. По определению знать движение сплошной среды – это значит знать движение всех ее точек. Для этого необходимы правила индивидуализации отдельных, совершенно одинаковых с геометрической точки зрения точек континуума. Для любой точки континуума можно записать закон движения.

Поскольку сплошная среда (материальный континуум) есть некоторая виртуальная субстанция, непрерывным, сплошным образом заполняющая часть пространства, описание ее движения связано с заданием характеризующих движение величин в каждой точке какой-либо области пространства. Иными словами, при описании движения сплошных сред приходится иметь дело с полями скалярных и векторных величин.

*Поле – скалярное или векторное* – это совокупность значений той или иной величины, заданных в каждой точке рассматриваемой области пространства. В качестве примера можно назвать скалярное поле давлений или температуры в атмосфере, векторное поле скорости течения воды в реке и т. д.

Описание поля связано с установлением зависимостей величин от координат, однозначно определяющих положение точек в пространстве:  $p = p(x, y, z)$ ,  $T = T(x, y, z)$ ,  $v = v(x, y, z)$ . Поскольку координаты точки в пространстве  $x, y, z$  задают радиус-вектор  $\vec{r}$ , характеризующий положение этой точки относительно начала координат, задать скалярное или векторное поле означает задать скалярную или векторную функцию векторного аргумента  $\vec{r}$ , то есть поставить в соответствие каждому радиусу-вектору  $\vec{r}$  значение соответствующей физической величины:  $p = p(\vec{r})$ ,  $T = T(\vec{r})$ ,  $v = v(\vec{r})$ .

Графическое изображение полей удобно с помощью поверхностей уровня и векторных линий. *Поверхность уровня (изоповерхности)* используются для графического изображения скалярных полей. Это геометрическое место точек в пространстве, соответствующих одному и тому же значению скалярной величины  $p(x, y, z) = const$ ,  $T(x, y, z) = const$  и т.д.

*Векторные линии* используются для графического изображения векторных полей. Это такие линии в пространстве, касательные к которым в каждой точке совпадают по направлению с направлением вектора в данной точке. Векторные линии, используемые для графического изображения поля вектора скорости  $v$ , называются также линиями тока.

*Индивидуальный объем* – часть среды, состоящая (в процессе движения) из одного и того же материала, включающая одни и те же частицы, а с учетом реального молекулярного строения деформируемых сред – состоящая из одних и тех же молекул. Значение индивидуального объема  $V$  может изменяться в процессе движения под действием внешних сил.

Бесконечно малый индивидуальный объем ( $V \rightarrow 0$ ) в механике сплошных сред называется *индивидуальной частицей*. Наконец, предельным случаем индивидуального объема является *индивидуальная точка* - объект, не имеющий размеров, объем которого  $V = 0$ .

С учетом реального строения тел понятие индивидуальной частицы можно определить как индивидуальный объем, малый по сравнению с размерами тела, но достаточно большой по сравнению с размерами молекул среды.

Для количественного описания механического движения сплошной среды необходимо ввести *систему отсчета*, представляющую собой совокупность тела или точки отсчета, связанной с ними системы координат и указаний о моменте начала отсчета времени. В механике сплошных сред вводятся два типа системы отсчета: система отсчета наблюдателя (СОН) и сопутствующая система отсчета (ССО).

*Система отсчета наблюдателя (эйлерова) – это система отсчета, по отношению к которой определяется движение материального континуума.*

Положение точек трехмерного пространства относительно СОН однозначно определяется тремя значениями координат:  $x^1, x^2, x^3$ .

Определить движение материального континуума – значит установить параметры движения всех его индивидуальных точек. Но, с одной стороны, любой индивидуальный объем сплошной среды в силу гипотезы непрерывности (сплошности) состоит из бесконечно большого числа индивидуальных точек. С другой стороны, индивидуальные точки континуума на первый взгляд совершенно равноправны и неотличимы друг от друга. Поэтому, для того чтобы описать движение сплошной среды и знать движение всех ее индивидуальных точек, необходимо ввести правило индивидуализации точек континуума, позволяющее различать индивидуальные точки континуума друг от друга и получать закон движения для всех этих точек.

Рассмотрим два близких по своей сущности способа индивидуализации.

Индивидуализация точек сплошной среды может производиться путем задания значений их начальных координат относительно СОН.

При таком способе индивидуализации точек материального континуума определить его движение означает найти зависимости текущих координат индивидуальных точек  $x^i$  от их начальных координат  $x_0^i$  и времени  $t$ :  $x^1 = x^1(x_0^1, x_0^2, x_0^3, t)$ ,  $x^2 = x^2(x_0^1, x_0^2, x_0^3, t)$ ,  $x^3 = x^3(x_0^1, x_0^2, x_0^3, t)$  или в сокращенной записи с использованием свободного индекса

$$x^i = x^i(x_0^1, x_0^2, x_0^3, t) \quad (4.1.2)$$

Зависимости (4.1.2) носят название *закона движения материального континуума*. Этот закон в принципе действительно определяет движение сплошной среды, так как дает возможность знать движение каждой из бесконечно большого числа ее индивидуальных точек, различаемых с помощью их начальных координат относительно СОН.

Второй возможный способ индивидуализации заключается в задании координат индивидуальных точек в системе отсчета, связанной с частицами

среды, т.е. в ССО. Действительно, так как выбор тела или точки отсчета достаточно произволен, в качестве последней может быть взята вполне конкретная индивидуальная точка континуума. Являясь индивидуальной точкой сплошной среды, она движется вместе со средой, занимая в произвольный момент времени положение  $O_1'$  чем и объясняется название системы отсчета. В начальный момент времени через точку  $O_1$  могут быть проведены координатные оси. Положение любой индивидуальной точки материального континуума относительно начала координат  $O_1$  определяется тремя значениями:  $\xi^1, \xi^2, \xi^3$ . При таком способе индивидуализации точек среды закон движения принимает вид

$$x^i = x^i(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t) \quad (4.1.3)$$

который также содержит информацию о движении всех ее индивидуальных точек. При этом, задавая конкретные значения  $\xi^1, \xi^2, \xi^3$  указывают на одну (и только одну!) индивидуальную точку среды, для которой закон движения позволяет определить ее текущие координаты относительно СОН в зависимости от времени  $t$ .

Специфика ССО не исчерпывается тем, что в качестве точки отсчета принимается одна из индивидуальных точек материального континуума. ССО присуще также то, что координатные линии (в частности, координатные оси, проходящие через точку отсчета) всегда проходят через одни и те же индивидуальные точки среды. Таким образом, вводимая при описании движения ССО – подвижная, деформируемая, криволинейная в общем случае система координат, координатные линии которой всегда проходят через одни и те же индивидуальные точки сплошной среды. Введенная указанным образом ССО имеет следующие особенности. В начальный момент времени  $t = t_0$  выбор системы координат зависит от желания исследователя.

Однако в дальнейшем, при движении сплошной среды, сопутствующая система координат выходит из под власти исследователя. По определению, ее координатные линии, проходя всегда через одни и те же индивидуальные точки, являются как бы замороженными в среду, движутся и деформируются вместе с ней.

Сопутствующая система координат рассматривается в основном для того, чтобы по деформациям ее координатных линий ввести величины, количественно характеризующие деформацию материального континуума – компоненты тензора деформаций и тензор деформаций в целом.

Вторая важная особенность сопутствующей системы координат состоит в том, что все индивидуальные точки сплошной среды имеют не изменяющиеся во времени координаты  $\xi^1, \xi^2, \xi^3$  относительно данной системы отсчета. Это следует из самого способа определения значений координат  $\xi^1, \xi^2, \xi^3$ , индивидуализирующих точки континуума.

Действительно, три значения  $\xi^1, \xi^2, \xi^3$  координат точек относительно ССО определяются для фиксированного начального момента времени  $t = t_0$ , раз и

навсегда закрепляются за каждой индивидуальной точкой и уже по этой причине не могут изменяться в зависимости от времени.

Существуют две точки зрения на изучение движения сплошной среды.

*Точка зрения Лагранжа* на изучение движения сплошной среды (лагранжев подход) заключается в исследовании изменения величин, описывающих движение и состояние сплошной среды (например, скорости  $v$ , температуры  $T$ ) для каждой из ее индивидуальных точек. В качестве независимых переменных при математическом описании движения с позиций Лагранжа используются координаты  $\xi^1, \xi^2, \xi^3$  (или  $x_0^1, x_0^2, x_0^3$ ), индивидуализирующие точки сплошной среды и называемые *лагранжевыми координатами*, и время  $t$ . Лагранжевы координаты  $\xi^1, \xi^2, \xi^3$  и время  $t$  носят название *лагранжевых переменных*. Формально при использовании лагранжева подхода находят зависимости величин, описывающих поведение сплошной среды, от лагранжевых переменных  $\xi^1, \xi^2, \xi^3, t$ , например:  $x^i = x^i(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t); v = v(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t); T = T(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t)$ . Точка зрения Лагранжа существенно опирается на описание истории движения каждой точки сплошной среды в отдельности. Такое описание на практике оказывается часто слишком подробным и сложным, однако оно всегда подразумевается при формулировке физических законов. Во многих случаях исследования движений сплошной среды основная задача об отыскании законов движения я может заменяться задачей определения функциональных зависимостей компонент скорости или ускорения от  $\xi^1, \xi^2, \xi^3$  и  $t$ . Следует отметить, что точка зрения Лагранжа на изучение движения лежит в основе физических законов, так как они связаны с движением индивидуальных материальных частиц.

Предположим теперь, что нас интересует не история движения индивидуальных точек сплошной среды, а то, что происходит в разные моменты времени в данной геометрической точке пространства, связанного с системой отчета наблюдателя. Пусть наше внимание концентрируется на данной точке пространства, в которую приходят разные частицы сплошной среды. Это и составляет сущность точки зрения Эйлера на изучение движения сплошной среды.

*Точка зрения Эйлера* на изучение движения сплошной среды (эйлеров подход) заключается в исследовании изменения величин, описывающих движение и состояние среды для каждой из точек пространства, в которые с течением времени могут приходиться различные индивидуальные точки. В качестве независимых переменных при описании движения среды по Эйлеру используются координаты  $x^1, x^2, x^3$ , определяющие положение точек пространства относительно СОН и называемые *эйлеровыми координатами*, и время  $t$ . В целом эйлеровы координаты  $x^1, x^2, x^3$  и время  $t$  называются *эйлеровыми переменными*.

Эйлеров подход предполагает поиск зависимостей всех величин, описывающих поведение деформируемой среды, от эйлеровых переменных  $x^1, x^2, x^3, t$ , например:  $v = v(x^1, x^2, x^3, t); T = T(x^1, x^2, x^3, t)$  и т.д.

Итак, различие подходов Лагранжа и Эйлера заключается в том, что в первом случае следят за каждой индивидуальной точкой (или индивидуальной частицей) движущейся сплошной среды, а во втором – за каждой точкой пространства, в котором движется сплошная среда. С точки зрения Лагранжа, мы интересуемся законами изменения скорости, ускорения, температуры и других величин для данной индивидуальной точки сплошной среды, а с точки зрения Эйлера – скоростью, ускорением, температурой и т.д. в данном месте. С точки зрения Эйлера, а мы выделяем некоторую область пространства и хотим знать все данные о частицах, которые в нее приходят.

*Подходы к описанию движения сплошной среды с позиций Эйлера и Лагранжа с точки зрения механики эквивалентны.* Имея описание движения среды по Лагранжу, можно перейти к описанию по Эйлеру, и наоборот.

Использование того или другого подхода определяется спецификой решаемой задачи механики сплошных сред.

## 4.2. Основы тензорного исчисления

Изучая механику движения материальной точки, а затем твердого тела, можно заметить, какое важное место в этой науке занимает векторное исчисление. Обобщение механики на сплошную среду потребовало в свое время обобщить понятие вектора и действия над ним. Так родилось тензорное исчисление. Тензор явился обобщением понятия «вектор».

В тензорном исчислении широко пользуются специальными обозначениями (индексами), которые делают рассуждения и доказательства компактными, такими, что в выкладках не теряется физический смысл описываемого объекта или явления.

Величины, значения которых могут быть выражены только действительными числами, называются скалярными (масса, плотность, температура и т.д.). Величины, значения которых определяются как размерами, так и направлением в пространстве, называются векторами (скорость, ускорение, сила и т.д.).

Одним из основных понятий механики является понятие вектора. Определяя вектор, часто говорят, что это – три числа, называемые компонентами вектора, преобразующиеся при переходе от одной системы координат к другой определенным образом.

Обобщение механики на движение сплошных сред привело к необходимости обобщить понятие вектора и действий над ним. В результате возник раздел высшей математики, названный тензорным исчислением. Основопологающим понятием тензорного исчисления является «тензор», которое является обобщением понятия «вектор». Для получения более компактных записей в тензорном исчислении широко пользуются специальными обозначениями – переменными с индексами – и определенными правилами тензорных обозначений.

Числа (или функции), которые полностью определяют величину в какой-либо системе координат, называются компонентами этой величины. С этой точки зрения удобно рассматривать величины как тензоры различных рангов: скаляр - тензор нулевого ранга ( $3^0=1$  компонента), вектор – тензор первого ранга ( $3^1=3$  компоненты), величина, имеющая  $3^2=9$  компонент – тензор второго ранга и т.д. Тензоры могут быть самого различного ранга, тензор ранга  $n$  имеет  $3^n$  компонент.

Многие характеристики движения сплошной среды имеют тензорную природу, поэтому рассмотрим основы тензорного исчисления. Заметим, что скаляр и вектор тоже являются тензорами, но наиболее простыми. Одних векторных и скалярных величин для описания движения сплошной среды недостаточно.

Тензорные обозначения широко используют в механике сплошных сред. Они позволяют упростить запись величин и выражений и сделать их более ясными.

Система координат устанавливает соответствие между числами и точками пространства. В каждой точке пространства есть три координатные линии. Это могут быть координатные линии сопутствующей системы координат, или системы наблюдателя, или еще какой-нибудь системы координат. Система координат вводится в рассмотрение исследователем, и ее выбор зависит от исследователя, а не от изучаемого явления.

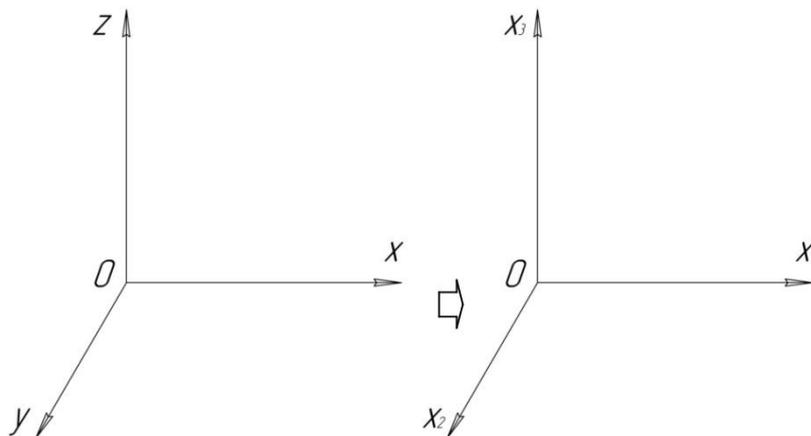


Рис. 4.2.1. Декартовы координаты

Законы движения могут содержать координаты, но не должны зависеть от выбора систем координат. Они должны быть инвариантны относительно выбора системы координат, что накладывает известные ограничения на вид математической записи этих законов.

Декартовы координаты прямоугольной системы координат  $x, y, z$  обозначают через  $x_1, x_2, x_3$  и записывают их как  $x_i$ , где индекс  $i$  принимает значения 1, 2, 3. Тогда  $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$  (рис.4.2.1). Вместо индекса  $j$  можно взять другую латинскую букву, например  $j = 1, 2, 3$ . Тогда имеем  $x_j$ .

Широкое распространение получило правило суммирования, введенное А. Эйнштейном. Согласно этому правилу по всякому дважды повторяющемуся в одночлене латинскому индексу проводится суммирование по значениям 1, 2, 3, а знак суммы опускается, т.е.

$$A = \frac{1}{3} \sigma_{ii} = \frac{1}{3} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}). \quad (4.2.1)$$

Эта запись является равносильной записи:

$$A = \frac{1}{3} \sum_1^3 \sigma_{ii}. \quad (4.2.2)$$

Повторяющийся индекс называется немой. В каждом одночлене он не должен встречаться более двух раз. Если немой индекс заменить другой буквой, то сумма не меняет своего значения:

$$a_i b_i = a_k b_k = a_n b_n. \quad (4.2.3)$$

Неповторяющиеся индексы называются свободными. В одночлене  $\sigma_{ij} E_j$  ин-декс  $i$  - свободный,  $j$  - немой.

В тензорных обозначениях широко используют символ Кронекера (единичный тензор):

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{при } i = j \\ 0, & \text{при } i \neq j \end{cases}. \quad (4.2.4)$$

Вектор  $\bar{a}$  в трехмерном пространстве характеризуется тремя компонентами  $a_1, a_2, a_3$  и описывается тензором первого ранга. При изменении системы координат компоненты преобразуются по формуле:

$$a_{i'} = a_{i'} a_i. \quad (4.2.5)$$

где  $a_{i'}$  - компоненты вектора в новой системе,

$a_j$  - компоненты вектора в старой системе,

$a_{i'i}$  - косинусы углов между старой и новой системами координат.

Компоненты тензора второго ранга можно обозначить через  $a_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ :

$$a_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}. \quad (4.2.6)$$

Соотношения между тензорными обозначениями и использованными выше обозначениями координат через  $x, y, z$  очевидны:

$$a_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{xx} & a_{xy} & a_{xz} \\ a_{yx} & a_{yy} & a_{yz} \\ a_{zx} & a_{zy} & a_{zz} \end{pmatrix}. \quad (4.2.7)$$

Компоненты тензора второго ранга преобразуются по следующему закону:

$$a_{i'j'} = a_{i'} a_{j'} a_{ij}, \quad (4.2.8)$$

где  $a_{i'j'}$  - компоненты тензора в новой системе,

$a_{ij}$  - компоненты тензора в старой системе,

$a_{ii}$ ,  $a_{jj}$  - косинусы углов между старой и новой системами координат.

В индексных обозначениях ранг тензора определяется только свободными индексами, например  $F_{ikk}$  - тензор первого ранга,  $T_{ij}$  - тензор второго ранга,  $S_{ijlm}$  - тензор четвертого ранга. Отметим, что рангом или валентностью тензора называется число индексов его компонент.

В общем случае все компоненты тензора разные. Если же при перестановке какой-либо пары индексов значение компонент тензора сохраняется, то тензор называется симметричным по этим индексам. Свойство симметрии тензора инвариантно относительно преобразований координат. Если при перестановке какой-нибудь пары индексов компоненты тензора меняют знак, то тензор называется антисимметричным по этим индексам. Свойство антисимметрии также инвариантно относительно преобразований координат.

Над тензорами можно проводить ряд операций:

1. Два тензора одинакового ранга равны, если равны их соответствующие компоненты  $A_{ij} = A_{ij}$ .

2. Умножение тензора на скаляр дает новый тензор того же ранга.

3. Тензоры одинакового ранга можно складывать или вычитать покомпонентно  $A_{ij} \pm B_{ij} = C_{ij}$ .

4. Операцию свертывания (свертку) тензора (ранга не менее двух) производят приравниванием друг к другу индексов и суммированием по повторяющемуся индексу, в результате получается новый тензор, рангом на две единицы меньше.

Заметим, что складывать и вычитать можно только компоненты тензоров с одинаковыми строениями индексов. Свойства симметрии и антисимметрии тензоров также определяются относительно одинаково расположенных индексов.

Число компонент тензора подчиняется выражению  $N = 3^p$ , где  $N$  – число компонент, а  $p$  – ранг тензора.

### 4.3. Напряженное состояние тела

Расчет напряжений, возникающих в деформируемом теле – необходимая предпосылка для ответа на целый ряд вопросов, с которыми сталкивается инженер: какие силы необходимы для обработки давлением, не приведет ли пластическая деформация по избранному режиму к разрушению металла или возникновению дефектов из-за неблагоприятного напряженного состояния, и т. п. В связи с этим важнейшим разделом механики сплошных сред является теория напряженного состояния.

Для определения вектора напряжения в некоторой материальной точке  $M$  деформируемого тела объемом  $V$  в момент времени  $t$  тело мысленно разделяется сечением, проходящим через точку  $M$ , на две части, одна из частей мысленно отбрасывается и ее действие на оставшуюся часть заменяется силой (рис.4.3.1.).

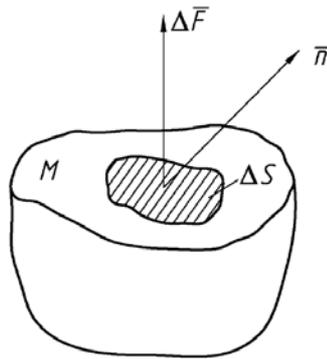


Рис.4.3.1. Положение произвольной площадки с указанием направления действия сил.

Вектором напряжения, действующего в точке М некоторого сечения, проведенного через деформируемое тело, называют величину:

$$\vec{f} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta S} \quad (4.3.1)$$

где  $\Delta \vec{F}$  - вектор силы, действующей от отброшенной части тела на элемент поверхности сечения  $\Delta S$ , внешняя единичная нормаль к которому  $\vec{n}$ .

Выделим в окрестности точки М деформируемого тела бесконечно малый тетраэдр (рис.4.3.2.).

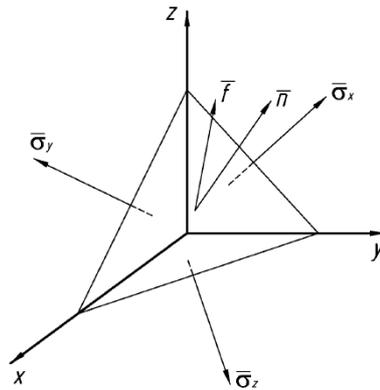


Рис.4.3.2. Равновесие элементарного тетраэдра.

На каждой грани выделенного из тела тетраэдра действуют свои векторы напряжения  $\vec{f}$ ,  $\vec{\sigma}_x$ ,  $\vec{\sigma}_y$ ,  $\vec{\sigma}_z$ . Подстрочный индекс у  $\vec{\sigma}_x$ ,  $\vec{\sigma}_y$ ,  $\vec{\sigma}_z$  показывает ориентацию и имеет нормаль к площадке, на которой действует напряжение. Каждый из векторов напряжения  $\vec{f}$ ,  $\vec{\sigma}_i$  можно задать его проекциями на координатные оси (рис.4.3.3.).

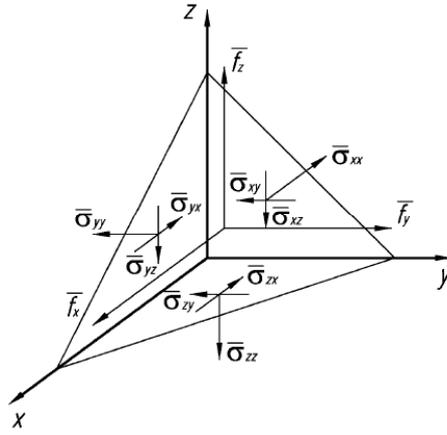


Рис.4.3.3. Проекции векторов напряжений, действующих на различных гранях тетраэдра.

Проекции векторов  $\vec{\sigma}_i$  будут проекциями векторов  $\sigma_{ij}$ , следовательно:

$$\begin{aligned}\vec{\sigma}_x &= \sigma_{xx}\vec{e}_x + \sigma_{xy}\vec{e}_y + \sigma_{xz}\vec{e}_z \\ \vec{\sigma}_y &= \sigma_{yx}\vec{e}_x + \sigma_{yy}\vec{e}_y + \sigma_{yz}\vec{e}_z \\ \vec{\sigma}_z &= \sigma_{zx}\vec{e}_x + \sigma_{zy}\vec{e}_y + \sigma_{zz}\vec{e}_z\end{aligned}\quad (4.3.2.)$$

Первый подстрочный индекс у проекции  $\sigma_{ij}$  указывает координатную ось, совпадающую с направлением внешней нормали к плоскости; второй подстрочный индекс указывает координатную ось, на которую проецируется напряжение  $\sigma_{ij}$ .

Величины  $\sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}, \sigma_{yx}, \sigma_{zx}, \sigma_{zy}$  (компоненты вектора напряжений, лежащие в плоскостях сечений) называются касательными напряжениями. Далее обозначим через  $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}, \tau_{yx}, \tau_{zx}, \tau_{zy}$ . Величины  $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$  (компоненты, перпендикулярные сечениям) называют нормальными напряжениями.

Напряжение на наклонной площадке  $\vec{f}$  (рис.4.3.2.), положение которой относительно осей координат определяется направляющими косинусами  $n_x = \cos(\vec{n}, \vec{e}_x)$ ;  $n_y = \cos(\vec{n}, \vec{e}_y)$ ;  $n_z = \cos(\vec{n}, \vec{e}_z)$ , характеризуются составляющими  $\vec{f}_i$ :

$$\begin{aligned}f_x &= \sigma_{xx}n_x + \sigma_{xy}n_y + \sigma_{xz}n_z; \\ f_y &= \sigma_{yx}n_x + \sigma_{yy}n_y + \sigma_{yz}n_z; \\ f_z &= \sigma_{zx}n_x + \sigma_{zy}n_y + \sigma_{zz}n_z.\end{aligned}\quad (4.3.3)$$

В краткой записи:

$$f_i = \sigma_{ij}n_j. \quad (4.3.4)$$

Напряженное состояние в точке деформируемого твердого тела характеризуется шестью числами и может быть описано симметричным тензором второго ранга – тензором напряжений:

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}. \quad (4.3.5)$$

где  $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$  – нормальные напряжения,

$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}, \tau_{zx} = \tau_{xz}$  – касательные напряжения.

Первый индекс соответствует координатной оси, перпендикулярной к площадке, на которой действует данное напряжение, а второй – оси, вдоль которой оно направлено. Поскольку у нормальных напряжений оба индекса одинаковы, то для них применяют и одномерную индексацию:

$$\sigma_{xx} = \sigma_x, \sigma_{yy} = \sigma_y, \sigma_{zz} = \sigma_z.$$

Из уравнения (4.3.5) вытекает важное заключение: если задан тензор напряжений (т.е. компоненты напряжений по трем взаимно перпендикулярным площадкам, проходящим через данную точку деформируемого тела), то можно подчитать напряжения на любой площадке, наклонной к координатным плоскостям и заданной направляющими косинусами  $n_i$ .

Для напряжений  $\sigma_{ij}$  ( $i, j = x, y, z$ ) принято следующее правило знаков: если внешняя нормаль к площадке совпадает с положительным направлением координатной оси, то за положительное направление напряжений, действующих на этой площадке, принимают положительное направление соответствующих осей. Если внешняя нормаль к площадке направлена в отрицательную сторону некоторой оси, то в качестве положительных направлений напряжений выбирают отрицательные направления координатных осей.

Положительные нормальные напряжения называют растягивающими, а отрицательные – сжимающими.

Полное напряжение на произвольной наклонной площадке:

$$S_n^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2, \quad (4.3.6)$$

где  $S_x, S_y, S_z$  – проекции полного вектора напряжений на оси  $x, y, z$  соответственно.

Нормальное напряжение на произвольной наклонной площадке:

$$\sigma_n = S_x n_x + S_y n_y + S_z n_z, \quad (4.3.7)$$

где  $n_x, n_y, n_z$  – направляющие косинусы, определяющие ориентацию площадки в пространстве.

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1. \quad (4.3.8)$$

Полное касательное напряжение на произвольной наклонной площадке находится по правилу параллелограмма:

$$\tau_n^2 = S_n^2 - \sigma_n^2. \quad (4.3.9)$$

Уравнения, связывающие проекции на оси координат вектора полного напряжения, и напряжения, действующие на трех взаимно перпендикулярных площадках:

$$\begin{aligned} S_x &= \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z, \\ S_y &= \tau_{yx} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{yz} n_z, \\ S_z &= \tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y + \sigma_z n_z. \end{aligned} \quad (4.3.10)$$

Компоненты напряжений связаны между собой дифференциальными уравнениями равновесия, которые в декартовой системе координат имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_x}{dx} + \frac{d\tau_{xy}}{dy} + \frac{d\tau_{xz}}{dz} + \gamma X &= 0 \\ \frac{d\tau_{xy}}{dx} + \frac{d\sigma_y}{dy} + \frac{d\tau_{yz}}{dz} + \gamma Y &= 0 \\ \frac{d\tau_{xz}}{dx} + \frac{d\tau_{zy}}{dy} + \frac{d\sigma_z}{dz} + \gamma Z &= 0 \end{aligned} \quad (4.3.11)$$

где  $X, Y, Z$  – проекции объемных сил на оси координат;  $\gamma$  – плотность металла.

В трехмерном пространстве можно подобрать три взаимно перпендикулярных направления, при которых на гранях выделенного элементарного параллелепипеда будут действовать только нормальные напряжения.

Площадки, на которых действуют только нормальные напряжения, называются главными площадками; напряжения, обозначаемые  $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$  – главными напряжениями.

Индексы при главных напряжениях назначают по правилу:

$$\sigma_{11} \geq \sigma_{22} \geq \sigma_{33},$$

т.е. индекс «1» присваивают большему в алгебраическом смысле из собственных значений, а «3» – меньшему.

Главные нормальные напряжения выделяют из условия равенства определителя нулю:

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix}$$

$$\text{Отсюда } \sigma^3 - \sigma^2 I_1(T_\sigma) + \sigma I_2(T_\sigma) - I_3(T_\sigma) = 0 \quad (4.3.12)$$

где  $I_1(T_\sigma) = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$ ,

$$I_2(T_\sigma) = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2,$$

$$I_3(T_\sigma) = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} = \sigma_x \sigma_y \sigma_z - \sigma_z \tau_{xy}^2 - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx}.$$

Решая кубическое уравнение (4.3.12), получаем три главных напряжений  $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$ .

Коэффициенты  $I_1(T_\sigma), I_2(T_\sigma), I_3(T_\sigma)$  называются инвариантами тензора напряжений и их значения не зависят от выбранной системы координат.

Инварианты дают полную характеристику напряженного состояния материальной частицы.

При решении методом Кардано подстановкой

$$\sigma = x + \frac{1}{3} I_1 \quad (4.3.13)$$

кубичное уравнение (4.3.12) приводится к виду

$$x^3 + px + q = 0, \quad (4.3.14)$$

где  $p = I_2 - \frac{1}{3}I_1^2$ ,

$$q = -\frac{2}{27}I_1^3 + \frac{1}{3}I_1I_2 - I_3.$$

Если дискриминант приведенного уравнения (4.3.14) отрицателен, то все корни вещественные

$$\Delta = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 < 0$$

$$x_1 = 2\sqrt{\left|\frac{p}{3}\right|} \cos \frac{\varphi}{3}, \quad x_2 = 2\sqrt{\left|\frac{p}{3}\right|} \cos\left(\frac{\varphi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right), \quad x_3 = 2\sqrt{\left|\frac{p}{3}\right|} \cos\left(\frac{\varphi}{3} + \frac{4\pi}{3}\right),$$

где  $\cos \varphi = -\frac{q}{2\sqrt{\left|\frac{p^3}{27}\right|}}$ .

Если кубическое уравнение можно разложить на линейное и квадратное уравнения, то задача определения главных нормальных напряжений упрощается:

$$(\sigma + k)(a\sigma^2 + b\sigma + c) = 0; \quad (4.3.15)$$

$$\sigma + k = 0, \quad \sigma = -k;$$

$$a\sigma^2 + b\sigma + c = 0,$$

$$\sigma = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Каждому главному нормальному напряжению будет соответствовать главная ось, для которой направляющие косинусы находятся из решения системы уравнений:

$$(\sigma_x - \sigma)n_x + \tau_{xy}n_y + \tau_{xz}n_z = 0$$

$$\{\tau_{yx}n_x + (\sigma_y - \sigma)n_y + \tau_{yz}n_z = 0 \quad (4.3.16)$$

$$\tau_{zx}n_x + \tau_{zy}n_y + (\sigma_z - \sigma)n_z = 0$$

Сюда добавляется условие:

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1 \quad (4.3.17)$$

Для определения положения главных осей в два из трех уравнений системы (4.3.16) подставляются значения главных напряжений ( $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ), а в качестве третьего используется (4.3.17).

Максимальные касательные напряжения подсчитываются по формулам:

$$\tau_{12} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}, \quad \tau_{23} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}, \quad \sigma_{13} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad (4.3.18)$$

При  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$  наибольшим из них будет  $\tau_{13}$ .

Схемы главных нормальных напряжений, исходя из количества возможных векторов, бывают линейные (один вектор) – линейное напряженное состояние, плоские (два вектора) – плоское напряженное состояние и объемные (три вектора) – объемное напряженное состояние. При этом линейных схем будет две – с положительным (растягивающим) или отрицательным (сжимающим) напряжением. Плоские и объемные схемы, кроме того, могут

быть одноименные и разноименные. В одноименных схемах все напряжения одного знака. Следовательно, может быть два вида плоских одноименных схем (с двумя сжимающими или двумя растягивающими напряжениями и два вида одноименных объемных схем (с тремя растягивающими напряжениями – всестороннее растяжение или с тремя сжимающими напряжениями – всестороннее сжатие).

Напомним, что при пластическом формоизменении не может быть равенства трех напряжений, т.е. равномерного всестороннее растяжение или равномерного всестороннее сжатие.

Разноименные схемы бывают: плоские – только одного вида, а объемные – двух (с двумя положительными напряжениями и одним отрицательным или наоборот). Таким образом, существуют всего девять возможных схем главных напряжений (рис.4.3.4): две линейных, три плоских и четыре объемных. Отметим, что в плоских и объемных схемах соотношения между величинами напряжений могут быть различны.

При рассмотрении схем напряженного состояния необходимо учитывать условие  $\sigma_{11} \geq \sigma_{22} \geq \sigma_{33}$  и условие присвоения знаков: растягивающим напряжения – положительный знак, а сжимающим – отрицательный.

Рассмотрим в некоторой точке площадку, одинаково наклоненную к направления 1,2,3 главных нормальных напряжений (рис.4.3.5).

Такие площадки можно провести в каждой октанте на одинаковом расстоянии от точки М, они образуют правильный восьмигранник – октаэдр. Грань октаэдра называется октаэдрической площадкой. Таким образом, октаэдрической является площадка, которая равно наклонена к главным направлениям напряжений.

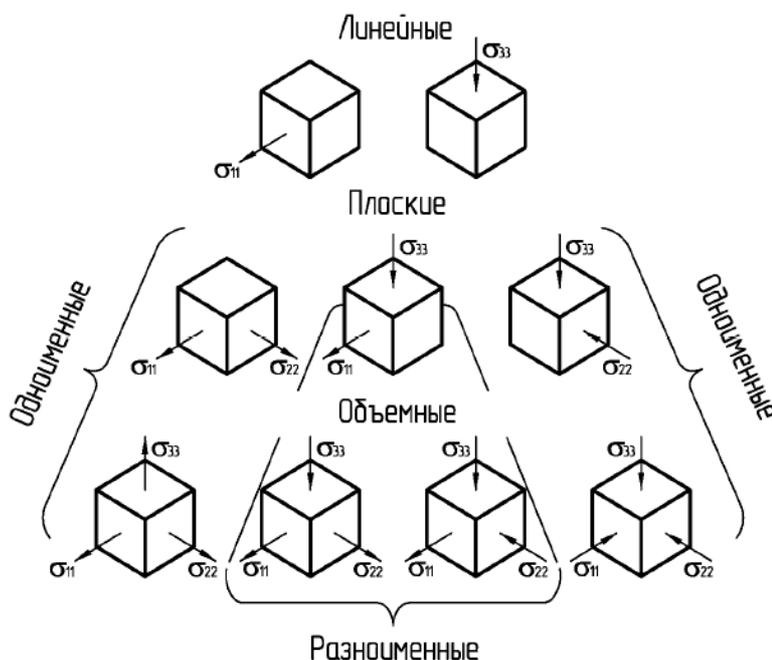


Рис.4.3.4. Возможные схемы напряженного состояния

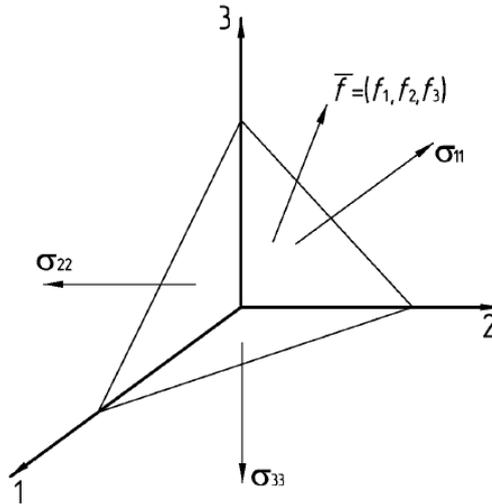


Рис.4.3.5. Главные напряжения, действующие на гранях тетраэдра

Направляющие косинусы единичной нормали  $\vec{n}$  к указанной на рисунке октаэдрической площадке связаны с условием:

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \quad (4.3.19)$$

А так как  $n_1 = n_2 = n_3$ , то

$$n_i = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (4.3.20)$$

где  $i=1,2,3$ .

Проекция вектора напряжения  $\vec{f}$ , действующего на этой площадке (рис.4.3.5), имеет вид:

$$f_1 = \sigma_{11}n_1, \quad f_2 = \sigma_{22}n_2, \quad f_3 = \sigma_{33}n_3. \quad (4.3.21)$$

Для того чтобы найти нормальные напряжения на октаэдрической площадке, достаточно спроецировать  $f_1, f_2, f_3$  на нормаль и результаты сложить.

Октаэдрическое нормальное напряжение:

$$\sigma_{окт} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \sigma_{ср} \quad (4.3.22)$$

Следовательно, нормальное напряжение на октаэдрической площадке равно среднему нормальному напряжению.

Октаэдрическое касательное напряжение в главных осях:

$$\tau_{окт} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad (4.3.23)$$

или в произвольных осях:

$$\tau_{окт} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}. \quad (4.3.24)$$

Тензор напряжений может быть разложен на два тензора – шаровой  $T_\sigma^0$  и девиатор  $D_\sigma$ , т.е.  $T_\sigma = T_\sigma^0 + D_\sigma$ . Их компоненты связаны зависимостью

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{cp} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{cp} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{cp} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_x - \sigma_{cp} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_{cp} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_{cp} \end{pmatrix} \quad (4.3.25)$$

где  $\sigma_{cp} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$ .

Напряженное состояние, определяемое  $T_\sigma^0$ , ответственно за изменение объема тела в процессе деформации. Напряженное состояние, характеризуемое  $D_\sigma$ , ответственно за изменение формы тела.

Тензор, определенной матрицей:

$$T_\sigma^0 = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix} = \sigma \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.3.26)$$

называется шаровым.

Главные значения девиатора напряжений определяются из решения кубического уравнения, полученного при раскрытии определителя:

$$\begin{vmatrix} S_{11} - S & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} - S & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} - S \end{vmatrix} = 0 \quad (4.3.27)$$

$$S^3 + I_2(D_\sigma) \cdot S - I_3(D_\sigma) = 0 \quad (4.3.28)$$

где  $I_1(D_\sigma) = 0$ ;

$$I_2(D_\sigma) = -\frac{1}{6} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_x)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)];$$

$$I_3(D_\sigma) = \begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_{cp} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_{cp} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_{cp} \end{vmatrix}.$$

При изучении сплошного напряженного состояния важное значение имеет октаэдрическое касательное напряжение  $\tau_{окт}$ , интенсивность нормальных  $\sigma_i$  и касательных  $T$  напряжений, которые определяются по выражениям в главных осях:

$$\tau_{окт} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}, \quad (4.3.29)$$

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}, \quad (4.3.30)$$

$$T = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}. \quad (4.3.31)$$

Наглядное представление об области возможных значений нормальных и касательных напряжений ( $s_n$  и  $t_n$ ) на различных площадках, проходящих через некоторую точку деформируемого тела, дает диаграмма Мора.

Исходным моментом для ее построения являются сведенные в систему рассмотренные выше три уравнения:

$$\sigma_{11}n_1^2 + \sigma_{22}n_2^2 + \sigma_{33}n_3^2 = \sigma_n$$

$$\sigma_{11}^2 n_1^2 + \sigma_{22}^2 n_2^2 + \sigma_{33}^2 n_3^2 = \sigma_n^2 + \tau_n^2 \quad (4.3.32)$$

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$$

Используя известные математические приемы (в частности, формулы Крамера), после ряда расчетов получим:

$$\begin{aligned} n_1^2 &= \frac{(\sigma_n - \sigma_{22})(\sigma_n - \sigma_{33}) + \tau_n^2}{(\sigma_{11} - \sigma_{22})(\sigma_{11} - \sigma_{33})}, \\ n_2^2 &= \frac{(\sigma_n - \sigma_{33})(\sigma_n - \sigma_{11}) + \tau_n^2}{(\sigma_{22} - \sigma_{33})(\sigma_{22} - \sigma_{11})} \\ n_3^2 &= \frac{(\sigma_n - \sigma_{11})(\sigma_n - \sigma_{22}) + \tau_n^2}{(\sigma_{33} - \sigma_{11})(\sigma_{33} - \sigma_{22})}. \end{aligned} \quad (4.3.33)$$

Так как  $\sigma_{11} \geq \sigma_{22} \geq \sigma_{33}$ , то, анализируя (4.3.33), можно сделать вывод:

$$\begin{aligned} (\sigma_n - \sigma_{22})(\sigma_n - \sigma_{11}) + \tau_n^2 &\geq 0 \\ (\sigma_n - \sigma_{33})(\sigma_n - \sigma_{11}) + \tau_n^2 &\leq 0 \\ (\sigma_n - \sigma_{11})(\sigma_n - \sigma_{22}) + \tau_n^2 &\geq 0. \end{aligned} \quad (4.3.34)$$

Преобразуем эти неравенства и получим:

$$\begin{aligned} \sigma_n - \frac{\sigma_{22} + \sigma_{33}}{2} + \tau_n^2 &\geq \left(\frac{\sigma_{22} - \sigma_{33}}{2}\right)^2 \\ \sigma_n - \frac{\sigma_{11} - \sigma_{33}}{2} + \tau_n^2 &\leq \left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{33}}{2}\right)^2 \\ \sigma_n - \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} + \tau_n^2 &\geq \left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 \end{aligned} \quad (4.3.35)$$

Неравенства (4.3.35) ограничивают область значений  $s_n$  и  $t_n$ , действующих на всевозможных площадках, проходящих через некоторую точку тела.

Если знаки неравенства заменить равенством и сопоставить полученные выражения с уравнением окружности,  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ , то нетрудно убедиться, что уравнения (4.3.35) являются уравнениями окружности.

Радиусы окружностей:

$$\begin{aligned} R_1 &= \sqrt{\left(\frac{\sigma_{22} - \sigma_{33}}{2}\right)^2 + n_1^2(\sigma_{11} - \sigma_{22})(\sigma_{11} - \sigma_{33})}, \\ R_2 &= \sqrt{\left(\frac{\sigma_{33} - \sigma_{11}}{2}\right)^2 + n_2^2(\sigma_{22} - \sigma_{33})(\sigma_{22} - \sigma_{11})}, \\ R_3 &= \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + n_3^2(\sigma_{33} - \sigma_{11})(\sigma_{33} - \sigma_{22})}. \end{aligned} \quad (4.3.36)$$

Построим область возможных значений  $s_n$  и  $t_n$ .

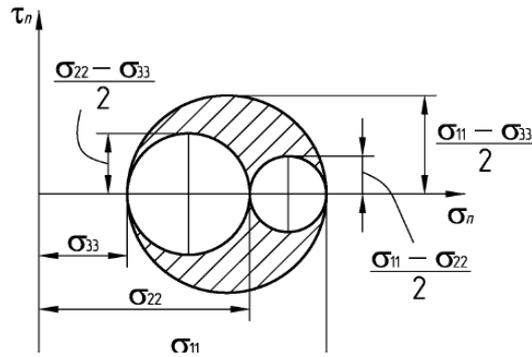


Рис.4.3.6. Область возможных значений нормальных и касательных напряжений, действующих в некоторой точке тела

Возможные значения нормальных  $\sigma_n$  и касательных  $\tau_n$  напряжений лежат внутри области, ограниченной тремя окружностями (на рис. 4.3.6 заштрихованная часть), которые называют кругами Мора.

Касательные напряжения  $\tau_n$ , имеют три экстремальных значения:  $\sigma_{23} = \frac{\sigma_{22} - \sigma_{33}}{2}$ ,  $\sigma_{13} = \frac{\sigma_{11} - \sigma_{33}}{2}$ ,  $\sigma_{12} = \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}$ , которые называют главными касательными напряжениями. Наибольшее из них является максимальным касательным напряжением:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_{11} - \sigma_{33}}{2}. \quad (4.3.37)$$

Главные касательные напряжения действуют на площадках, наклоненных под углом  $45^\circ$  к соответствующим главным направлениям. Так, например, напряжения  $\sigma_{13}$  действуют на площадках, наклоненных под углом  $45^\circ$  к 1 и 3 главным направлениям (рис. 4.3.7).

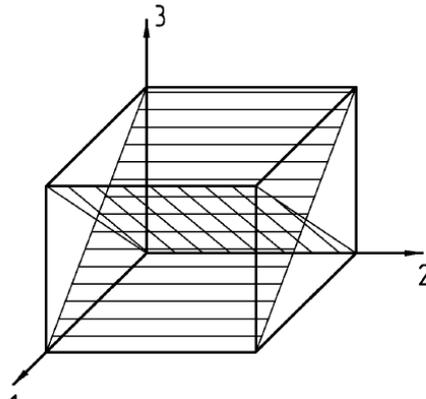


Рис.4.3.7. Некоторые из площадок, где действуют главные касательные напряжения

Форму диаграммы Мора (рис. 4.3.7) можно охарактеризовать одним числом, составленным как отношение разности диаметров малых кругов Мора  $(\sigma_{22} - \sigma_{33}) - (\sigma_{11} - \sigma_{22})$  к диаметру большого круга  $(\sigma_{11} - \sigma_{33})$ , которое называют

коэффициентом Лоде. Математическое выражение для него после ряда преобразований можно записать в виде:

$$\mu_{\sigma} = 2 \frac{\sigma_{22} - \sigma_{33}}{\sigma_{11} - \sigma_{33}} - 1. \quad (4.3.38)$$

Этот коэффициент показывает относительное положение точки диаграммы Мора с координатами  $\sigma_n = \sigma_{22}, \tau_n = 0$ . При наложении на тело дополнительного всестороннего растяжения или сжатия радиусы окружностей, очевидно, не меняются, а все фигуры смещаются вдоль горизонтальной оси на величину  $\Delta\sigma$ . Все полученные таким образом диаграммы Мора имеют одинаковые значения коэффициента Лоде. Заметим, что при наложении на тело дополнительного всестороннего растяжения или сжатия  $\Delta\sigma$  девиатор не меняется. Поэтому считают, что  $\mu_{\sigma}$  характеризует форму девиатора напряжений.

#### 4.4. Деформированное состояние тела

С каждой точкой деформируемого тела можно связать сопутствующую систему координат. При движении деформируемого тела расстояния между его точками меняются, координатные линии сопутствующей системы координат деформируются. Эффект изменения расстояния между точками сплошной среды во время движения очень важен. Отметим, что силы взаимодействия между частицами также зависят от изменения расстояния между ними.

В интересующий момент времени величины деформации зависят не только от рассматриваемого состояния тела, но и от того, по отношению к какому состоянию эти деформации вычисляются. Такое деформированное состояние не может быть совершенно произвольным, а должно быть определено из конкретных физических соображений. Отметим, что его можно определять по-разному, и в теории деформаций мы не будем фиксировать этот способ определения, а назовем каким-либо образом выбираемое для сравнения с данным состоянием сплошной среды состояние начальным и укажем только на могущее встретиться при этом следующее обстоятельство. Реальное движение сплошной среды происходит в евклидовом пространстве и, следовательно, в общем случае может не существовать реального перехода сплошной среды из начального состояния среды в начальное. Идеальное примысленное «начальное состояние» можно использовать для анализа деформированного состояния.

С каждой точкой деформируемой среды можно связать ортогональный триэдр главных осей, который при данном перемещении ведет себя как абсолютно твердое тело, т.е. может смещаться поступательно и поворачиваться. С каждой точкой движущейся среды можно связать обычную ортогональную декартову систему координат, направленную вдоль главных осей тензора деформаций.

При фиксированном моменте деформации  $t$  перемещение частиц тела определяется полем вектора скорости перемещения материальных частиц  $\vec{v}$ .

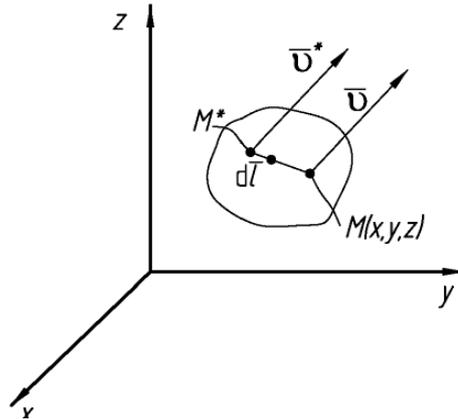


Рис.4.4.1. Схема перемещения некоторой материальной частицы деформируемого тела

Рассмотрим точку  $M$  деформируемого тела, положение которой можно задать координатами  $x, y, z$  (рис. 4.4.1).

Бесконечно малая окрестность окружает точку  $M$ . Положение произвольной точки  $M^*$  в этой окрестности можно задать дополнительным вектором  $d\vec{l}$  с координатами  $dx, dy, dz$ . Пусть в точке  $M$  скорость перемещения частиц  $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ . Скорости в точке  $M^*$  будут отличаться от скоростей в точке  $M$  на величину  $d\vec{v} = \vec{v}^* - \vec{v}$ , которая и определяет деформированное состояние в окрестности точки  $M$   $d\vec{v} = (v_x^* - v_x, v_y^* - v_y, v_z^* - v_z)$ .

При переходе от точки  $M$  к точке  $M^*$  эти величины будут изменяться в соответствии с формулами:

$$dv_i = \frac{\partial v_i}{\partial x} dx + \frac{\partial v_i}{\partial y} dy + \frac{\partial v_i}{\partial z} dz \quad (4.4.1)$$

В краткой записи:

$$dv_i = v_{i,j} dj \quad (4.4.2)$$

где  $dv_i$  - абсолютный дифференциал векторного поля  $\vec{v}$ ;

$v_{i,j}$  - абсолютная производная векторного поля скорости перемещения.

Матрица коэффициентов  $(v_{i,j})$  в выражении (4.4.2) представляет тензор второго ранга – тензор абсолютной производной векторного поля скорости перемещения и имеет вид:

$$v_{i,j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix}. \quad (4.4.3)$$

Тензор абсолютной производной, как любой тензор, можно представить в виде суммы симметричной (с матрицей  $T_\varepsilon$ ) и кососимметричной (с матрицей  $T_\omega$ ) частей. В символической записи они будут иметь вид:

$$T_{\xi} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}); T_{\omega} = \frac{1}{2}(v_{i,j} - v_{j,i}) \quad (4.4.4)$$

В развернутом виде тензор  $T_{\xi}$  записывают в виде матрицы:

$$T_{\xi} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (4.4.5)$$

и называют тензором деформации.

Тензор  $T_{\omega}$ , характеризуемый матрицей:

$$T_{\omega} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial y}\right) & 0 \end{pmatrix} \quad (4.4.6)$$

называется тензором вращения (поворота).

Рассмотрим подробнее тензор скорости деформации. Его компоненты обозначим  $\xi_{ij}$  и представим в виде матрицы:

$$T_{\xi} = \begin{pmatrix} \xi_{xx} & \xi_{xy} & \xi_{xz} \\ \xi_{yx} & \xi_{yy} & \xi_{yz} \\ \xi_{zx} & \xi_{zy} & \xi_{zz} \end{pmatrix}, \quad (4.4.7)$$

А также в развернутой форме (с учетом, что  $\xi_{ij} = \xi_{ji}$ ):

$$\xi_{xx} = \frac{\partial v_x}{\partial x}; \xi_{yy} = \frac{\partial v_y}{\partial y}; \xi_{zz} = \frac{\partial v_z}{\partial z}; \xi_{xy} = \xi_{yx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right); \xi_{xz} = \xi_{zx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right);$$

$$\xi_{yz} = \xi_{zy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right). \quad (4.4.8)$$

Уравнения (4.4.8) получили название кинематических.

Компоненты тензора скорости деформации, стоящие на главной диагонали матрицы (4.4.7)  $\xi_{xx}, \xi_{yy}, \xi_{zz}$ , называют скоростями относительного удлинения в направлении осей соответственно  $x, y, z$ , а компоненты  $\xi_{xy}, \xi_{yz}, \xi_{xz}$  на остальных местах матрицы – половинными значениями скоростей сдвига в плоскостях соответственно  $xOy, yOz, xOz$ .

Тензор скорости деформации, как любой симметричный тензор второго ранга, имеет три взаимно-перпендикулярных собственных вектора и три собственных значения, которые называют соответственно направлениями главных скоростей относительных удлинений и главными скоростями относительных удлинений  $\xi_{11}, \xi_{22}, \xi_{33}$ .

Движение твердого недеформируемого тела можно представить суммой поступательного и вращательного движений. Если же тело деформируется, то движение будет сложным.

Деформированное состояние тела в точке тела описывается симметричным тензором деформаций:

$$T_{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix}, \quad (4.4.9)$$

где  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$  - линейные и угловые деформации соответственно. Компоненты малых деформаций вычисляются через перемещения  $U_x, U_y$  и  $U_z$  в декартовой системе координат по формулам:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{du_x}{dx}; \gamma_{xy} = \frac{du_x}{dy} + \frac{du_y}{dx}; \\ \varepsilon_y &= \frac{du_y}{dy}; \gamma_{yz} = \frac{du_y}{dz} + \frac{du_z}{dy}; \\ \varepsilon_z &= \frac{du_z}{dz}; \gamma_{zx} = \frac{du_z}{dx} + \frac{du_x}{dz}. \end{aligned} \quad (4.4.10)$$

и удовлетворяют условиям неразрывности деформаций:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \varepsilon_x}{dy^2} + \frac{d^2 \varepsilon_y}{dx^2} &= \frac{d^2 \gamma_{xz}}{dx dz}; \\ \frac{d^2 \varepsilon_y}{dz^2} + \frac{d^2 \varepsilon_z}{dy^2} &= \frac{d^2 \gamma_{yz}}{dy dz}; \\ \frac{d^2 \varepsilon_z}{dx^2} + \frac{d^2 \varepsilon_x}{dz^2} &= \frac{d^2 \gamma_{zx}}{dz dx}; \\ \frac{d}{dz} \left( \frac{d\gamma_{yz}}{dx} + \frac{d\gamma_{zx}}{dz} + \frac{d\gamma_{xy}}{dz} \right) &= 2 \frac{d^2 \varepsilon_z}{dx dy}; \\ \frac{d}{dz} \left( \frac{d\gamma_{zx}}{dy} + \frac{d\gamma_{xy}}{dz} + \frac{d\gamma_{yz}}{dx} \right) &= 2 \frac{d^2 \varepsilon_x}{dy dz}; \\ \frac{d}{dz} \left( \frac{d\gamma_{xy}}{dz} + \frac{d\gamma_{yz}}{dx} + \frac{d\gamma_{zx}}{dy} \right) &= 2 \frac{d^2 \varepsilon_y}{dz dx}; \end{aligned} \quad (4.4.11)$$

С геометрической точки зрения эти соотношения являются условиями, определяющими деформацию, при которой тело остается сплошным. Отметим, что тензоры деформаций являются основными характеристиками возникающих в телах деформаций, и их компоненты входят в основные уравнения описывающие движение сплошной среды.

Во всех точках деформационного тела существуют взаимно перпендикулярные оси, для которых компоненты угловой деформации равны нулю. Эти оси называются главными осями деформации. Материальные

волокна, выбранные вдоль них, после деформации остаются взаимно перпендикулярными и имеют экстремальные удлинения.

Величины главных линейных деформаций  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  определяются из решения кубического уравнения

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y - \varepsilon & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z - \varepsilon \end{vmatrix} = 0. \quad (4.4.12)$$

или

$$\varepsilon^3 - I_1(T_\varepsilon)\varepsilon^2 + I_2(T_\varepsilon)\varepsilon - I_3(T_\varepsilon) = 0,$$

где  $I_1(T_\varepsilon), I_2(T_\varepsilon), I_3(T_\varepsilon)$  - инварианты тензора малых деформаций. В произвольной системе координат они имеют следующие значения:

$$I_1(T_\varepsilon) = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 3\varepsilon_{cp} = \theta,$$

$$I_2(T_\varepsilon) = \varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_y\varepsilon_z + \varepsilon_z\varepsilon_x - \frac{1}{4}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2),$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{vmatrix},$$

где  $\varepsilon_{cp}$  - средняя деформация,  $\theta$  - объемная деформация,

$$\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z.$$

В главных осях тензор деформаций имеет вид:

$$T_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}. \quad (4.4.13)$$

При разложении тензора деформаций на шаровой и девиатор их компоненты связаны следующим образом:

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{cp} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{cp} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{cp} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_{cp} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y - \varepsilon_{cp} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z - \varepsilon_{cp} \end{pmatrix}. \quad (4.4.14)$$

Ориентация главных осей деформаций относительно системы координат  $x, y, z$  определяется направляющими косинусами, величины которые рассчитываются из следующей системы уравнений:

$$(\varepsilon_x - \varepsilon)n_x + \frac{1}{2}\gamma_{xy}n_y + \frac{1}{2}\gamma_{xz}n_z = 0,$$

$$\frac{1}{2}\gamma_{yx}n_x + (\varepsilon_y - \varepsilon)n_y + \frac{1}{2}\gamma_{yz}n_z = 0, \quad (4.4.15)$$

$$\frac{1}{2}\gamma_{zx}n_x + \frac{1}{2}\gamma_{zy}n_y + (\varepsilon_y - \varepsilon_x)n_z = 0,$$

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1.$$

Важную роль в теории деформаций играют:

- интенсивность деформаций сдвига

$$\Gamma = \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)}}; \quad (4.4.16)$$

- интенсивность деформаций

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)}; \quad (4.4.17)$$

- октаэдрические деформации

$$\gamma_{\text{окт}} = \frac{2}{3} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)}. \quad (4.4.18)$$

В технологических расчетах логарифмические деформации подсчитываются по формулам:

$$e_x = \ln \frac{x}{x_0}; e_y = \ln \frac{y}{y_0}; e_z = \ln \frac{z}{z_0} \quad (4.4.19)$$

где  $x_0, y_0, z_0$  и  $x, y, z$  - начальные и текущие размеры тела в направлении главных осей.

### *Геометрическая сторона задачи*

Выделим из пластинки толщиной 1 элементарный параллелепипед  $Oabc$ . После деформации параллелепипед перейдет в новое положение и изменит свою форму, стороны его удлинятся и получают некоторый поворот (рис.4.4.2).

Перемещения точки  $O$  вдоль осей  $X$  и  $Y$  обозначим через  $u, v$ .

Рассмотрим абсолютное удлинение  $Oc$

$$\Delta dx = \left( u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) - u = \frac{\partial u}{\partial x} dx. \quad (4.4.20)$$

Относительная деформация

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (4.4.21)$$

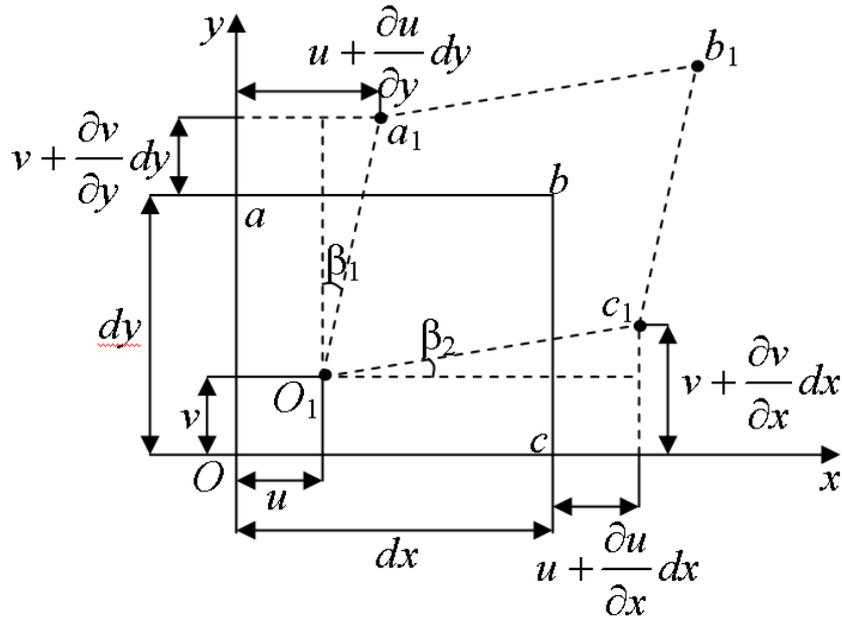


Рис. 4.4.2. Деформации элементарного параллелепипеда

Аналогично получаем выражение относительной линейной деформации вдоль оси  $y$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (4.4.22)$$

Рассмотрим угловые деформации, характеризующие изменение формы прямоугольника.

Угол поворота стороны  $Oc$

$$\operatorname{tg} \beta_1 \cong \beta_1 = \frac{\left(v + \frac{\partial v}{\partial x} dx\right) - v}{dx} = \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (4.4.23)$$

Угол поворота вертикальной стороны  $Oa$

$$\operatorname{tg} \beta_2 \cong \beta_2 = \frac{\left(u + \frac{\partial u}{\partial y} dy\right) - u}{dy} = \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (4.4.24)$$

Угол сдвига будет суммой углов  $\beta_1$  и  $\beta_2$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (4.4.25)$$

Заметим, что положительный угол сдвига соответствует уменьшению прямого угла  $aOc$ .

Таким образом, получены уравнения, связывающие деформации и перемещения, названные уравнениями Коши.

Поскольку три компоненты тензора деформаций  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$ ,  $\varepsilon_z$  выражаются через две функции перемещений  $u$ ,  $v$ , данные деформации не могут быть произвольными, а должны быть связанными некоторыми зависимостями.

### Обобщение уравнений Коши на трехмерную задачу

Из рассмотрения изменений геометрии параллелепипеда размерами  $dx dy dz$  в пространстве можно вывести следующие соотношения между деформациями и перемещениями:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}, \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}. \end{aligned} \quad (4.4.26)$$

Система дифференциальных соотношений между деформациями и перемещениями (4.4.26) носит название системы Коши.

### Условия сплошности (или неразрывности деформаций)

Пусть сплошное тело представляет собой набор разрезанных элементарных кубиков. Каждый из кубиков подвержен деформации. Если сложить деформированные кубики, то между ними могут быть разрывы, пустоты.

Чтобы деформированные кубики составили деформированное сплошное тело, необходимо выполнение некоторых условий, называемых условиями сплошности или неразрывности деформаций.

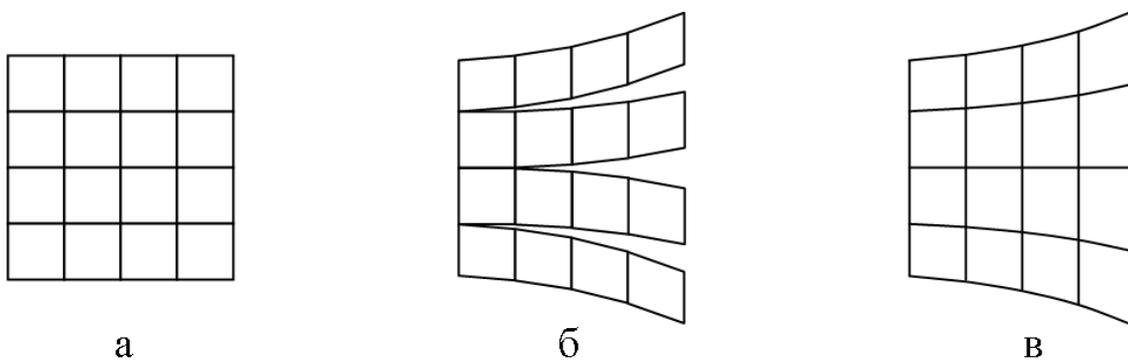


Рис. 4.4.3. Неразрывные (v) и разрывные (б) деформации тела

С точки зрения принципа минимального действия состояние (б) требует больших затрат потенциальной энергии по сравнению с расходом энергии на деформацию, которая приводит в состояние (v) (в состоянии (б) в деформируемом теле образуются трещины и пустоты, на возникновение которых и расходуется дополнительная энергия). Значит, возникновение состояния (б) противоречит принципу наименьшего действия.

С математической точки зрения, если тело остается сплошным, то деформации есть следствие перемещений всех точек тела. Необходимое

условие – однозначность определения шести компонент тензора деформации по трем компонентам вектора перемещений.

Найдем соотношения между деформациями, которые выражают однозначность их определения по перемещениям.

*Задача определения перемещений по известным деформациям  
(или по напряжениям)*

Пусть найдены все компоненты тензора напряжений. Тогда, пользуясь законом Гука, легко определить деформации.

Для определения перемещений  $u, v, w$  воспользуемся уравнениями Коши

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}. \end{aligned} \quad (4.4.27)$$

Из данных соотношений следует, что только  $\frac{\partial u}{\partial x}$  определена через  $\varepsilon_x$ , а остальные производные от  $u$  пока не выражены через деформации.

Если бы были найдены выражения  $\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$  через деформации, то перемещение  $u$  могло быть рассчитано по формуле

$$u = \int_A^B \left( \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \right). \quad (4.4.28)$$

Интеграл (7.28) не зависит от пути интегрирования, а только от положения точек А и В (так как выражение под интегралом есть полный дифференциал).

Поставим целью найти  $\frac{\partial u}{\partial y}$ .

Для этой цели найдем производные

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right), \\ &\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y}, \\ &\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \gamma_{xy} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x}, \\ &\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left( \gamma_{xy} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left( \gamma_{zx} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right]. \end{aligned} \quad (4.4.29)$$

В итоге все производные от  $\frac{\partial u}{\partial y}$  найдены, и мы можем рассчитать саму

функцию  $\frac{\partial u}{\partial y}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} &= \int_A^B \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) dy + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) dz \right] = \\ &= \int_A^B \left[ \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x} dx + \left( \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x} \right) dy + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) dz \right]. \end{aligned} \quad (4.4.30)$$

Аналогично можно определить  $\frac{\partial u}{\partial z}$ .

*Схема расчетов и*

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \varepsilon_x \\ \left. \begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ &\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ &\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) \end{aligned} \right\} \frac{\partial u}{\partial y} \\ \left. \begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ &\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ &\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right) \end{aligned} \right\} \frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned} \quad (4.4.31)$$

*Схема расчетов v*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial x} &= \gamma_{xy} - \frac{\partial u}{\partial y} \\
\frac{\partial v}{\partial y} &= \varepsilon_y \\
\left. \begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\
\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\
\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)
\end{aligned} \right\} \frac{\partial v}{\partial z}
\end{aligned} \tag{4.4.32}$$

*Схема расчетов w*

$$\left. \begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial x} &= \gamma_{zx} - \frac{\partial u}{\partial z} \\
\frac{\partial w}{\partial y} &= \gamma_{yz} - \frac{\partial v}{\partial z} \\
\frac{\partial w}{\partial z} &= \varepsilon_z
\end{aligned} \right\} w \tag{4.4.33}$$

Найдем  $\frac{\partial u}{\partial z}$  с помощью  $\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)$ ,  $\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)$ ,  $\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial z}, \\
\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right], \\
\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \gamma_{zx} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial x}.
\end{aligned} \tag{4.4.34}$$

Найдем  $\frac{\partial v}{\partial z}$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \gamma_{yz} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left( \gamma_{xy} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \\
&= \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y}.
\end{aligned} \tag{4.4.35}$$

В случае плоской двумерной задачи имеем одно уравнение совместности (поскольку три компоненты деформации  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$ ,  $\gamma_{xy}$  выражаются через два перемещения  $u$ ,  $v$ ):

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}. \tag{4.4.36}$$

Определим перемещения при нулевых деформациях  $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$ .

Получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = C_1, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = C_2. \end{aligned} \quad (4.4.38)$$

Следовательно, определяя  $u$  по найденным  $\frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial z}$ , получим

$$u = C_1 y + C_2 z + u_0, \quad (4.4.39)$$

где  $C_1, C_2, u_0$  – постоянные интегрирования.

Далее находим производные  $v$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\partial u}{\partial y} = -C_1, \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \varepsilon_y = 0, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial z} = C_3. \end{aligned} \quad (4.4.40)$$

Следовательно,

$$v = -C_1 x + C_3 z + v_0. \quad (4.4.41)$$

Далее определяем  $w$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &= -\frac{\partial u}{\partial z} = -C_2, \\ \frac{\partial w}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial z} = -C_3, \\ \frac{\partial w}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \quad (4.4.42)$$

$$w = -C_2 x - C_3 y + w_0.$$

Введем обозначения  $C_1 = -\varphi_z$ ,  $C_2 = \varphi_y$ ,  $C_3 = -\varphi_x$ .

Тогда полученные выражения  $u, v, w$  будут

$$\begin{aligned} u &= \varphi_y z - \varphi_z y + u_0, \\ v &= \varphi_z x - \varphi_x z + v_0, \\ w &= \varphi_x y - \varphi_y x + w_0. \end{aligned} \quad (4.4.43)$$

Данные формулы есть перемещения абсолютно твердого тела как целого. Перемещения  $u_0, v_0, w_0$  – получаются вследствие поступательного движения, остальные слагаемые описывают вращения вокруг осей  $x, y, z$  на малые углы  $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ .

В общем случае по заданным деформациям, удовлетворяющим условиям сплошности, перемещения определяются не единственным образом. Различные выражения для перемещений, соответствующие одинаковым деформациям, могут отличаться друг от друга только на перемещения твердого тела, как целого.

При решении задач теории упругости подобные перемещения всегда исключаются: либо путем задания взаимоуравновешенной системы сил, либо закреплением тела по границе.

Исключим перемещения  $u$ ,  $v$ ,  $w$  из уравнений Коши.

Дифференцируя  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  и складывая, найдем

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial x} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (4.4.44)$$

Далее найдем  $\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y}$  из трех последних уравнений Коши:

$$\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} = 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}. \quad (4.4.45)$$

Дифференцируя последнее по  $x$ , получаем

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right] = 2 \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 2 \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \varepsilon_x. \quad (4.4.46)$$

Делая круговую подстановку индексов в (4.4.44), (4.4.46), запишем шесть уравнений совместности деформаций

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial x \partial z} &= 0, \end{aligned} \quad (4.4.47)$$

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right],$$

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right],$$

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right].$$

Уравнения (4.4.47) носят название уравнений совместности Сен-Венана.

## 5. ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И ПЛАСТИЧНОСТИ

### 5.1. Теория упругости

Рассмотрим теорию деформирования «твердых» тел. Тело будем представлять себе как материальный континуум.

Одной из важнейших характеристик деформированного твердого тела является тензор деформаций. Для твердых тел, в отличие от жидкостей, существенно не только изменение объема, но и изменение формы, т.е. существенен весь тензор деформаций. Тензор деформаций вводится путем сравнения длины любого элемента тела с его длиной в некотором идеальном состоянии, которое называют «начальным».

В частном случае начальное состояние может быть просто положение данного тела в некоторый начальный момент времени.

Если начальное состояние реально осуществимо, то можно ввести перемещения от начального состояния к актуальному. Компоненты тензора деформаций в этом случае выражаются через компоненты вектора перемещения и удовлетворяют уравнениям совместности. Если же начальное состояние не может быть осуществлено в реальном физическом пространстве, то компоненты тензора деформаций не удовлетворяют уравнениям совместности. В этом случае вводят некоторое промежуточное характерное состояние.

В теории деформирования твердых тел часто рассматривают случай, когда деформации и относительные смещения малы. Если при этом лагранжева система координат выбрана так, что в какой-нибудь момент времени (например, в начальный) она совпадает с системой отчета, то в дальнейшем она будет мало отличаться от системы отчета и, очевидно, компоненты любого тензора или вектора в лагранжевой системе координат и в системе отчета будут отличаться на малую величину.

Главным признаком, по которому теория упругости выделяется из других теорий деформируемых тел является то, что все процессы деформирования упругих тел по определению обратимы. Кроме того, обычно принимается, что локально для всех малых частиц упругого тела можно ввести температуру.

Второй основной посылкой классической теории упругости является допущение, что состояние малой частицы упругого тела полностью определяется тензором деформаций, температурой и некоторыми физически постоянными или переменными параметрами, характеризующие механические и физико-механические свойства среды, которые в общем случае могут изменяться.

Характерным свойством модели упругого тела является также предположение о независимости начального состояния от времени.

Основной закон упругости может быть записан в следующей форме:

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijlm} \sigma_{lm}, \quad (5.1.1)$$

где  $S_{ijlm}$  – упругие константы.

Применяется и следующий вид этого уравнения:

$$\sigma_{ij} = C_{ijlm} \varepsilon_{lm}. \quad (5.1.2)$$

В случае ортотропного тела закон Гука через технические константы выражается таким образом:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E_x} \sigma_x - \frac{\mu_{xy}}{E_y} \sigma_y - \frac{\mu_{xz}}{E_z} \sigma_z, \gamma_{xy} = \frac{1}{G_{xy}} \tau_{xy}; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E_y} \sigma_y - \frac{\mu_{yx}}{E_x} \sigma_x - \frac{\mu_{yz}}{E_z} \sigma_z, \gamma_{yz} = \frac{1}{G_{yz}} \tau_{yz}; \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E_z} \sigma_z - \frac{\mu_{zx}}{E_x} \sigma_x - \frac{\mu_{zy}}{E_y} \sigma_y, \gamma_{zx} = \frac{1}{G_{zx}} \tau_{zx}. \end{aligned} \quad (5.1.3)$$

Часто вместо индексов  $x$ ,  $y$ ,  $z$  принимают индексы 1, 2, 3. Например,  $\mu_{xy} = \mu_{12}$ .

### Закон Гука для изотропного тела

Рассмотрим параллелепипед, к граням которого приложены только нормальные напряжения.

Пользуясь законами Гука и Пуассона для одноосного напряженного состояния, найдем связь между деформациями и напряжениями в трехосном случае. Будем учитывать справедливость принципа суперпозиции.

Деформацию в направлении оси  $Ox$  разложим на три составляющие: первая обусловлена действием напряжения  $\sigma_x$ , вторая и третья –  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$ .

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^1 + \varepsilon_x^2 + \varepsilon_x^3. \quad (5.1.4)$$

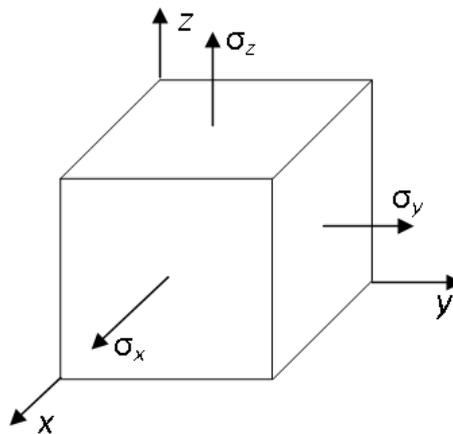


Рис. 5.1.1. Нормальные напряжения.

По закону Гука

$$\varepsilon_x^1 = \frac{\sigma_x}{E}, \quad (5.1.5)$$

где  $E$  – модуль Юнга, а по закону Пуассона

$$\varepsilon_x^2 = -\mu \frac{\sigma_y}{E},$$

$$\varepsilon_x^3 = -\mu \frac{\sigma_z}{E}, \quad (5.1.6)$$

где  $\mu$  – коэффициент Пуассона. Складывая, получаем

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)]. \quad (5.1.7)$$

Применяя круговую перестановку индексов, находим остальные компоненты линейной деформации

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)], \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)], \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)]. \end{aligned} \quad (5.1.9)$$

Касательные усилия вызывают перекашивание граней параллелепипеда, при этом линейные размеры элементов не изменяются. Например, касательное напряжение  $\tau_{xy}$  вызывает искажение грани, параллельной плоскости  $xOy$  и оставляет без искажения другие грани параллелепипеда. В силу всего сказанного, получаем закон Гука, связывающий сдвиговые деформации и касательные напряжения в виде:

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy}, \\ \gamma_{yz} &= \frac{1}{G} \tau_{yz}, \\ \gamma_{zx} &= \frac{1}{G} \tau_{zx}. \end{aligned} \quad (5.1.10)$$

Здесь  $G$  – модуль сдвига, который можно найти из опыта на кручение или опыта на сдвиг, или рассчитать через известные коэффициент Пуассона и модуль упругости  $E$

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}. \quad (5.1.11)$$

Уравнения закона Гука можно разрешить относительно напряжений

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \lambda\theta + 2G\varepsilon_x, \\ \sigma_y &= \lambda\theta + 2G\varepsilon_y, \\ \sigma_z &= \lambda\theta + 2G\varepsilon_z. \end{aligned} \quad (5.1.12)$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= G\gamma_{xy}, \\ \tau_{yz} &= G\gamma_{yz}, \\ \tau_{zx} &= G\gamma_{zx}. \end{aligned} \quad (5.1.13)$$

Здесь  $\lambda$  – постоянная Ляме

$$\lambda = \frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}, \quad (5.1.14)$$

$\theta$  – объемная деформация

$$\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z. \quad (5.1.15)$$

Таким образом, для изотропного упругого тела пара констант  $E$ ,  $\mu$  полностью определяют *физические уравнения, связывающие компоненты тензора напряжений и тензора деформаций*.

### *Закон Гука для шаровых тензоров*

Сумма трех уравнений (5.1.10) дает

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1}{E}(1 - 2\mu)(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad (5.1.16)$$

или

$$\theta = \frac{1 - 2\mu}{E}\sigma, \text{ где } \sigma = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z. \quad (5.1.17)$$

Если ввести обозначение

$$K = \frac{E}{1 - 2\mu}, \quad (5.1.18)$$

то  $\sigma = K\theta$ , где  $K$  – модуль объемной упругости.

При  $\mu \rightarrow 0.5$ ,  $K \rightarrow \infty$ . Следовательно,

$$\theta = \frac{\sigma}{K} \rightarrow 0. \quad (5.1.19)$$

В этом случае объем тела не изменяется (несжимаемое тело).

Если предположить, что  $\mu > 0.5$ , то  $K < 0$  и получилось бы, что при трехосном растяжении кубика, окружающего точку,  $\sigma = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z > 0$  и объем кубика уменьшился бы. Этого не может быть. Поэтому принимается  $0 \leq \mu \leq 0.5$ .

### *Плоское напряженное состояние*

Пусть тонкая пластинка нагружена усилиями на границе, параллельно ее плоскости и равномерно-распределенными по толщине, рис. 5.1.2, а, б.

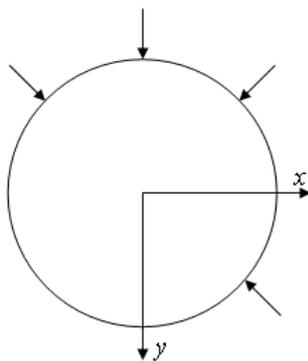


Рис.5.1.2а. Нагружение пластинки в плоскости  $x, y$ .

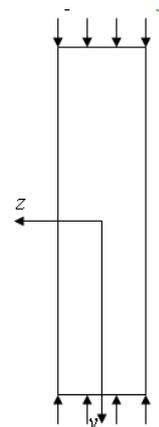


Рис.5.1.2б. Нагружение пластинки в плоскости  $y, z$ .

Компоненты напряжений  $\sigma_z, \tau_{xz}, \tau_{yz}$  на поверхностях пластинки равны 0. Можно принять их равенство нулю и внутри пластинки.

Напряженно-деформированное состояние будет определяться только напряжениями  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  и называться плоским. Напряжения будут зависеть только от координат  $x$ ,  $y$ .

### Плоская деформация

Пусть размер тела вдоль оси  $z$  очень велик. Если, например, цилиндрическое тело нагружено силами, действующими ортогонально его оси, и не меняющимися по длине, то можно считать, что все поперечные сечения находятся в одинаковых условиях, рис. 5.1.3.

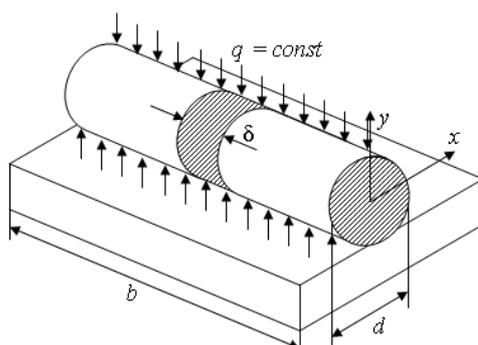


Рис. 5.1.3. Нагружение бесконечно длинного тела

Теоретически полагаем  $b \rightarrow \infty$ , практически  $b \gg d$ . Мысленно рассечем данное тело на отдельные слои толщиной  $\delta = 1$ .

Предположим, что концевые сечения ограничены абсолютно жесткими поверхностями, препятствующими продольным перемещениям. Тогда, поскольку осевые перемещения на концах отсутствуют, то их не будет и в среднем сечении.

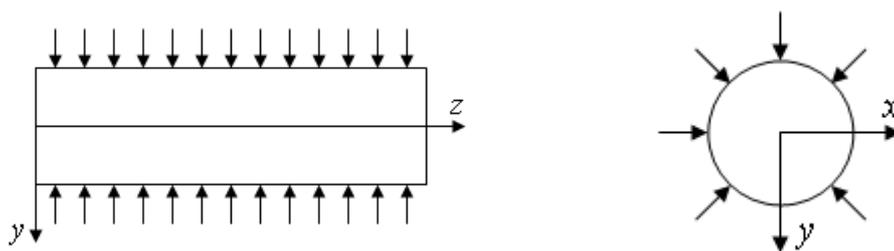


Рис.5.1.4. Цилиндрическая труба под действием давления

Так как в каждом поперечном сечении условия одинаковы, достаточно рассмотреть тонкий слой толщиной  $\delta = 1$ . Компоненты перемещений  $u$ ,  $v$  будут зависеть от  $x$ ,  $y$  и не зависеть от  $z$ .

Продольное перемещение  $w = 0$  и

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0,$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad (5.1.20)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

На основе закона Гука из условия равенства нулю продольной деформации

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] = 0 \quad (5.1.21)$$

получаем

$$\sigma_z = \mu(\sigma_x + \sigma_y). \quad (5.1.22)$$

Таким образом, задача о плоской деформации сводится к определению  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  как функций  $x$ ,  $y$ .

### *Основные уравнения для плоского напряженного состояния*

а) Компоненты напряжений и деформаций

$$\begin{aligned} \sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{xz} &= 0, \\ \gamma_{zy} = \gamma_{zx} &= 0, \\ \varepsilon_z &= -\frac{\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y). \end{aligned} \quad (5.1.23)$$

б) Уравнения равновесия в напряжениях в области:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y &= 0. \end{aligned} \quad (5.1.24)$$

на границе:

$$\begin{aligned} l\sigma_x + m\tau_{xy} &= X_n, \\ l\tau_{xy} + m\sigma_y &= Y_n. \end{aligned} \quad (5.1.25)$$

в) Геометрические уравнения

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (5.1.26)$$

г) Уравнения совместности деформаций

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (5.1.27)$$

д) Физические уравнения

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y), \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x), \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G}\tau_{xy}. \end{aligned} \quad (5.1.28)$$

Обратные соотношения

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y), \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x), \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy}.\end{aligned}\tag{5.1.29}$$

е) Уравнения совместности в напряжениях

$$\Delta(\sigma_x + \sigma_y) = -(1+\mu)\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right),\tag{5.1.30}$$

где  $\Delta$  – оператор Лапласа

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

### *Плоская деформация*

Компоненты напряжений и деформаций

$$\begin{aligned}\varepsilon_z = \gamma_{zx} = \gamma_{zy} &= 0, \\ \tau_{xz} = \tau_{zy} &= 0, \\ \sigma_z &= \mu(\sigma_x + \sigma_y).\end{aligned}\tag{5.1.31}$$

Для случая плоской деформации во всех уравнениях (5.1.29), (5.1.30) необходимо сделать замены  $\mu \rightarrow \mu_1 = \frac{\mu}{1-\mu}$ ,  $E \rightarrow E_1 = \frac{E}{1-\mu^2}$ .

### *Уравнения равновесия в перемещениях (Ляме)*

Выберем в качестве основных неизвестных перемещения  $u$ ,  $v$  в функциях  $x$ ,  $y$ . По закону Гука с использованием соотношений Коши получаем<sup>^</sup>

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \mu\frac{\partial v}{\partial y}\right), \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \mu\frac{\partial u}{\partial x}\right), \\ \tau_{xy} &= G\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right), \quad G = \frac{E}{2(1+\mu)}.\end{aligned}\tag{5.1.32}$$

Подставим в уравнения равновесия в напряжениях. Тогда получим:

$$\begin{aligned}G \frac{3\lambda + 2G}{\lambda + 2G} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \Delta u + X &= 0, \\ G \frac{3\lambda + 2G}{\lambda + 2G} \frac{\partial \theta}{\partial y} + \Delta v + Y &= 0,\end{aligned}\tag{5.1.33}$$

$$\text{где } \theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{3\lambda + 2G}{\lambda + 2G} = \frac{1+\mu}{1-\mu}.$$

К системе (9.14) следует присоединить еще граничные условия, выраженные через  $u$ ,  $v$  и их производные. После чего задача нахождения искомого перемещений становится замкнутой.

### Функция напряжений (Эри)

Решение плоской задачи можно существенно упростить, если перейти от трех искомого напряжений к одной функции  $\varphi$ , называемой функцией напряжений.

Пусть интенсивности объемных сил постоянны  $X = const$ ,  $Y = const$ .

Выразим напряжения через  $\varphi$

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - (Xy + Yx).\end{aligned}\tag{5.1.34}$$

Подставляя в уравнения равновесия

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y &= 0,\end{aligned}\tag{5.1.35}$$

получаем тождество для любой функции  $\varphi$ .

Таким образом, задавая всевозможные представления  $\varphi$ , будем получать равновесные поля напряжений. Но этого не достаточно для нахождения решения задачи теории упругости. Необходимо, чтобы функция  $\varphi$  удовлетворяла уравнению совместности:

$$\Delta(\sigma_x + \sigma_y) = 0.\tag{5.1.36}$$

Подставим сюда (а) и раскрывая скобки, получаем:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0.\tag{5.1.37}$$

Уравнение (9.18) называется бигармоническим. Оно представляет собой уравнение совместности, выраженное через функцию напряжений.

## Решения плоской задачи в полиномах

Функция напряжений может быть выбрана на основе выполнения двух условий:

а) удовлетворять уравнению совместности

$$\Delta^2 \varphi = 0; \quad (5.1.38)$$

б) напряжения, рассчитанные по  $\varphi$ , должны удовлетворять граничным условиям.

Обычно это сделать довольно трудно, однако существуют частные случаи.

Будем задавать  $\varphi$  в виде полинома по  $x$ ,  $y$  и исследовать, какому напряженному состоянию она будет соответствовать. В общем случае

$$\varphi = (a_2 x^2 + b_2 xy + c_2 y^2) + (a_3 x^3 + b_3 x^2 y + c_3 xy^2 + d_3 y^3) + \dots$$

Линейные слагаемые в выражении  $\varphi$ , как легко показать, дадут нулевые напряжения.

### 1. Полиномы второй и третьей степени

Полином

$$\varphi = (a_2 x^2 + b_2 xy + c_2 y^2) + (a_3 x^3 + b_3 x^2 y + c_3 xy^2 + d_3 y^3) + \dots$$

будет удовлетворять бигармоническому уравнению при любых коэффициентах, так как

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} = 0, \quad \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0.$$

а) Положим

$$\varphi = ax^2.$$

Напряжения будут

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 2a, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = 0.$$

Рассмотрим в качестве простого примера, какие напряжения будут на гранях прямоугольной полосы. В случае задания  $\varphi$  в виде (9.20) ненулевыми будут только вертикальные нормальные напряжения, равные постоянной для всех точек пластины. Напряжения на верхнем и нижнем контурах должны уравновешиваться.

Получаем случай простого растяжения по оси  $y$ .

б)  $\varphi = bxy$ .

Напряжения  $\sigma_x = 0$ ,  $\sigma_y = 0$ ,  $\tau_{xy} = -b$ . Это случай чистого сдвига. По контуру пластины приложены равномерно-распределенные сдвиговые напряжения.

в)  $\varphi = cy^2$ .

$$\sigma_x = 2c, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = 0.$$

Это случай растяжения вдоль  $x$ . Нормальные напряжения на боковых контурах уравновешены.

г)  $\varphi = ax^3$ .

Напряжения  $\sigma_x = 0$ ,  $\sigma_y = 6ax$ ,  $\tau_{xy} = 0$ . Вертикальная нагрузка распределена по треугольному закону.

Если взять начало координат в середине полосы, то получим случай чистого изгиба.

д)  $\varphi = bx^2y$ .

Напряжения  $\sigma_x = 0$ ,  $\sigma_y = 2by$ ,  $\tau_{xy} = -2bx$ . К полосе приложены нормальные и касательные силы.

$$y = \frac{h}{2}, \quad \sigma_y = 2b \frac{h}{2} = bh > 0;$$

$$y = -\frac{h}{2}, \quad \sigma_y = -bh < 0.$$

Касательные напряжения сверху и снизу распределены по линейному закону. Все силы, приложенные к полосе, уравновешены.

е)  $\varphi = cxy^2$ .

Напряжения  $\sigma_x = 2cx$ ,  $\sigma_y = 0$ ,  $\tau_{xy} = -2cy$ . Нормальное напряжение приложено к правому торцу. Касательные напряжения равномерны сверху и снизу, на торцах меняются по линейному закону.

ж)  $\varphi = dy^3$ .

Напряжения  $\sigma_x = 6dy$ ,  $\sigma_y = 0$ ,  $\tau_{xy} = 0$ . Здесь имеем случай изгиба моментами, приложенными к торцам.

### *Решение плоской задачи в тригонометрических рядах*

Зададим функцию напряжений в виде:

$$\varphi = \sin \frac{n\pi x}{l} F(y), \tag{5.1.39}$$

где  $n$  – целое число,  $n = 1, 2, \dots$ ,  $l$  – длина пластинки,  $F(y)$  – некоторая функция, которую можно найти из бигармонического уравнения. Обозначим

$$\alpha = \frac{n\pi}{l}.$$

Найдем производные от  $\varphi$  по  $x, y$ .

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} = \alpha^4 \sin \alpha x F(y),$$

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} = -\alpha^2 \sin \alpha x F''(y), \tag{5.1.40}$$

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = \sin \alpha x F^{IV}(y).$$

Подставим в бигармоническое уравнение

$$(\alpha^4 F - 2\alpha^2 F'' + F^{IV}) \sin \alpha x = 0. \tag{5.1.41}$$

Общий интеграл данного обыкновенного дифференциального уравнения имеет вид:

$$F(y) = c_1 \operatorname{sh} \alpha y + c_2 \operatorname{ch} \alpha y + c_3 y \operatorname{sh} \alpha y + c_4 y \operatorname{ch} \alpha y. \quad (5.1.42)$$

Здесь гиперболические синусы и косинусы записываются как

$$\operatorname{sh} \alpha y = \frac{1}{2}(e^{\alpha y} - e^{-\alpha y}), \quad \operatorname{ch} \alpha y = \frac{1}{2}(e^{\alpha y} + e^{-\alpha y}),$$

$$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x, \quad (\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x.$$

Более общее решение, найденное Рибьером и Файлоном, можно записать

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(y) \cos \alpha x + \sum_{n=1}^{\infty} F_n^*(y) \sin \alpha x, \quad (5.1.43)$$

где  $F_n(y)$  – функция, в котором константам  $c_i$  приданы индексы  $n$ :  $c_i \rightarrow c_i^n$ ; функция  $F_n^*(y)$  получается из  $F_n(y)$  заменой констант  $c_i^n$  на  $\tilde{c}_i^n$  (применение пример 9.3).

### Плоская задача в полярных координатах

Ряд задач теории упругости удобно решать в полярной системе координат, в которой положение точки  $M(x,y)$  определяется координатами  $r, \theta$ , рис.5.1.5.

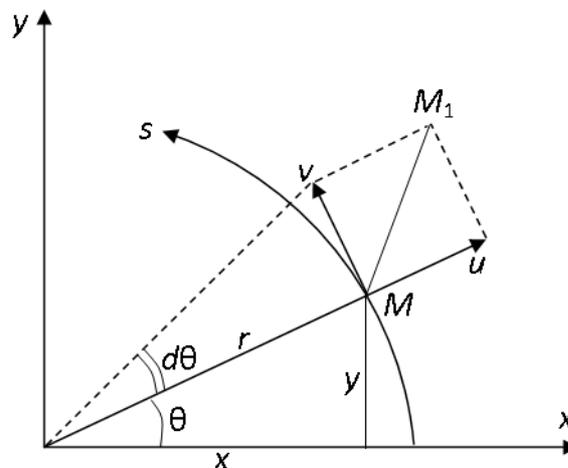


Рис. 5.1.5. Положение точки  $M$  в декартовых и полярных координатах.

Координаты дуги  $s$  и угол  $\theta$  связаны зависимостью

$$s = r \theta, \quad ds = r d\theta. \quad (5.1.44)$$

Полное перемещение точки  $MM_1$  зададим двумя компонентами перемещений:  $u$  – в радиальном направлении,  $v$  – в тангенциальном.

*Статические уравнения* выражают условия равновесия элемента  $dr, ds$ , 1 по радиальному и тангенциальному направлениям, рис. 5.1.6.

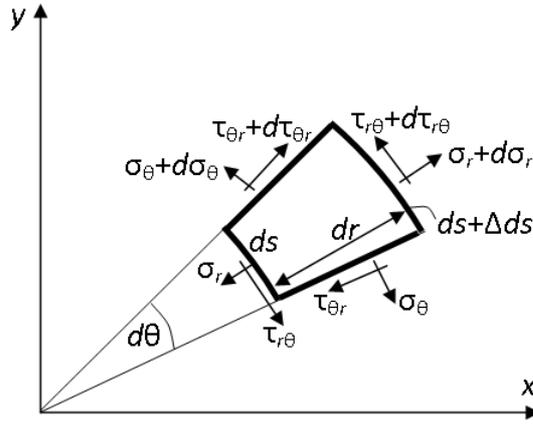


Рис. 5.1.6. Равновесие криволинейного элемента

Уравнения равновесия будут

$$\begin{aligned}
 & (\sigma_r + d\sigma_r)(ds + \Delta ds) - \sigma_r ds + -\sigma_\theta dr \sin \frac{d\theta}{2} - \\
 & -(\sigma_\theta + d\sigma_\theta) dr \sin \frac{d\theta}{2} + Rdrds = 0,
 \end{aligned} \tag{5.1.45}$$

$$\begin{aligned}
 & (\sigma_\theta + d\sigma_\theta) dr - \sigma_\theta dr - \tau_{r\theta} ds + (\tau_{r\theta} + d\tau_{r\theta})(ds + \Delta ds) + \\
 & + (\tau_{\theta r} + d\tau_{\theta r}) dr \sin \frac{d\theta}{2} + \tau_{\theta r} dr \sin \frac{d\theta}{2} + Tdrds = 0.
 \end{aligned}$$

Здесь  $R, T$  – интенсивности объемных нагрузок,

$$d\sigma_r = \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} dr, \quad d\tau_{\theta r} = \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} d\theta, \quad d\tau_{r\theta} = \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} dr, \quad d\sigma_\theta = \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} d\theta.$$

В уравнениях (5.1.45) учтены проекции сил, действующих на гранях  $dr$ , которые они дают вследствие наклона граней к направлениям  $R, T$  на углы  $\frac{d\theta}{2}$ .

Заменяем в (5.1.45)  $\sin \frac{d\theta}{2} \approx \frac{d\theta}{2}$ ,  $\Delta ds = (r + dr)d\theta - rd\theta = drd\theta$  и отбросим слагаемые третьего порядка малости. Тогда получим

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (\sigma_r - \sigma_\theta) + R = 0, \\
 & \frac{\partial \tau}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2}{r} \tau + T = 0.
 \end{aligned} \tag{5.1.46}$$

Здесь  $\tau = \tau_{r\theta} = \tau_{\theta r}$ . Равенства (5.1.46) есть аналог уравнений равновесия в напряжениях для полярных координат.

*Геометрические уравнения* в полярной системе координат принимают вид:

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r}, \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r}, \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{dv}{dr} - \frac{v}{r}.\end{aligned}\quad (5.1.47)$$

Соотношения (5.1.47) представляют собой уравнения Коши в полярных координатах.

*Физические уравнения* закона Гука остаются без изменений

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_r + \mu\varepsilon_\theta), \quad \sigma_\theta = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_\theta + \mu\varepsilon_r), \quad \tau_{r\theta} = \frac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{r\theta}. \quad (5.1.48)$$

Функция напряжений для случая отсутствия объемных сил позволяет выразить напряжения

$$\begin{aligned}\sigma_\theta &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}, \quad \sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}, \\ \tau &= \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right),\end{aligned}\quad (5.1.49)$$

удовлетворяющие системе уравнений равновесия (5.1.47).

*Условие совместности* деформаций, выраженное через напряжения, в случае прямоугольных координат записывается как

$$\Delta(\sigma_x + \sigma_y) = 0. \quad (5.1.50)$$

Поскольку из теории напряженного состояния известно, что *сумма нормальных напряжений на двух взаимно-ортогональных площадках постоянна*, то

$$\sigma_r + \sigma_\theta = \sigma_x + \sigma_y \quad (5.1.51)$$

и получаем уравнение совместности в полярной системе координат

$$\Delta(\sigma_r + \sigma_\theta) = 0. \quad (5.1.52)$$

Оператор Лапласа  $\Delta$  необходимо расписать для полярной системы координат. Поскольку в декартовой системе координат было справедливо

$$\sigma_x + \sigma_y = \Delta \varphi, \quad \Delta(\sigma_x + \sigma_y) = \Delta^2 \varphi, \quad (5.1.53)$$

то получаем

$$\sigma_r + \sigma_\theta = \Delta \varphi. \quad (5.1.54)$$

Найдем сумму нормальных напряжений в полярных координатах, используя соотношения (5.1.49).

$$\sigma_r + \sigma_\theta = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = \Delta \varphi. \quad (5.1.55)$$

Отсюда, в частности, следует выражение гармонического оператора  $\Delta$  в полярной системе координат

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}. \quad (5.1.56)$$

Бигармоническое уравнение совместности деформаций в полярной системе координат имеет вид:

$$\Delta(\sigma_r + \sigma_\theta) = \Delta^2 \varphi = \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \Delta \varphi = 0. \quad (5.1.57)$$

### *Пространственная задача теории упругости*

#### *Уравнения равновесия в напряжениях*

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0. \end{aligned} \quad (5.1.58)$$

#### *Граничные условия в напряжениях*

$$\begin{aligned} X_n &= l\sigma_x + m\tau_{xy} + n\tau_{xz}, \\ Y_n &= l\tau_{xy} + m\sigma_y + n\tau_{yz}, \\ Z_n &= l\tau_{xz} + m\tau_{yz} + n\sigma_z. \end{aligned} \quad (5.1.59)$$

#### *Связь перемещений и деформаций*

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}. \end{aligned} \quad (5.1.60)$$

#### *Уравнения совместности*

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z}, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{zy}}{\partial z \partial y}, \\ 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right), \\ 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} \right), \end{aligned} \quad (5.1.61)$$

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right).$$

*Физические уравнения*

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} \left[ \sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z) \right], & \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{xy}, \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} \left[ \sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z) \right], & \gamma_{xz} &= \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{xz}, \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} \left[ \sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y) \right], & \gamma_{yz} &= \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{yz}. \end{aligned} \quad (5.1.62)$$

В разрешенном относительно напряжений виде закон Гука имеет вид:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \lambda\theta + 2G\varepsilon_x, & \tau_{xy} &= G\gamma_{xy}, \\ \sigma_y &= \lambda\theta + 2G\varepsilon_y, & \tau_{xz} &= G\gamma_{xz}, \\ \sigma_z &= \lambda\theta + 2G\varepsilon_z, & \tau_{yz} &= G\gamma_{yz}. \end{aligned} \quad (5.1.63)$$

Здесь обозначено

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}, \\ \theta &= \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z, \\ \theta &= \frac{(1-2\mu)}{E} \sigma, \\ \sigma &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z. \end{aligned} \quad (5.1.64)$$

Здесь  $\sigma$  – среднее напряжение.

Кроме задач с граничными условиями в напряжениях (5.1.59) могут иметь место задачи с граничными условиями в перемещениях. В этом случае

$$\begin{aligned} u &= u_s, \\ v &= v_s, \\ w &= w_s. \end{aligned} \quad (5.1.65)$$

где  $u_s, v_s, w_s$  – некоторые заданные на границе функции.

Граничные условия могут иметь смешанный характер, когда на одной части границы заданы условия (5.1.59), на другой – (5.1.65).

### *Уравнения упругого равновесия в перемещениях*

Наиболее часто используемым в теории упругости является метод решения краевой задачи в перемещениях. Данный метод содержит минимальное число искомых функций –  $u, v, w$ . При решении задачи в перемещениях уравнения совместности Сен-Венана выполняются автоматически.

В уравнениях закона Гука выразим деформации через перемещения в помощью (5.1.60):

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \lambda\theta + 2G\frac{\partial u}{\partial x}, & \tau_{xy} &= G\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right), \\
\sigma_y &= \lambda\theta + 2G\frac{\partial v}{\partial y}, & \tau_{yz} &= G\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right), \\
\sigma_z &= \lambda\theta + 2G\frac{\partial w}{\partial z}, & \tau_{xz} &= G\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right).
\end{aligned} \tag{5.1.66}$$

Подставим в первое уравнение равновесия в напряжениях

$$2G\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda\frac{\partial\theta}{\partial x} + G\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right) + G\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}\right) + X = 0. \tag{5.1.67}$$

Замечая, что

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z} = \frac{\partial\theta}{\partial x}$$

и выделяя оператор Лапласа

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

получим

$$(\lambda + G)\frac{\partial\theta}{\partial x} + G\Delta u + X = 0. \tag{5.1.68}$$

Производя круговую подстановку ( $x \rightarrow y \rightarrow z$ ,  $u \rightarrow v \rightarrow w$ ,  $X \rightarrow Y \rightarrow Z$ ), получим остальные два уравнения

$$\begin{aligned}
(\lambda + G)\frac{\partial\theta}{\partial y} + G\Delta v + Y &= 0, \\
(\lambda + G)\frac{\partial\theta}{\partial z} + G\Delta w + Z &= 0.
\end{aligned} \tag{5.1.69}$$

Если на граничной поверхности заданы перемещения, то граничные условия для уравнений (5.1.66) выражаются достаточно просто. Если же на границе заданы нагрузки, то граничные условия получим, подставив напряжения, которые выражены через производные от перемещений по формулам Коши:

$$\begin{aligned}
(\lambda + 2G)\frac{\partial u}{\partial x}l + G\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)m + G\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)n &= X_n, \\
G\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)l + (\lambda + 2G)\frac{\partial v}{\partial x}m + G\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)n &= Y_n, \\
G\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)l + G\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)m + (\lambda + 2G)\frac{\partial w}{\partial z}n &= Z_n.
\end{aligned} \tag{5.1.70}$$

Система уравнений (5.1.70) была получена Ляме.

## Уравнения в напряжениях

При решении задач теории упругости, в которых граничные условия заданы в напряжениях, удобно пользоваться системой уравнений равновесия, в которую в качестве неизвестных входят напряжения.

Большая сложность системы дифференциальных уравнений компенсируется простотой граничных условий и простотой формул для напряжений.

Напряжения (а их шесть функций) должны удовлетворять трем уравнениям равновесия. Но этого недостаточно. Необходимо еще удовлетворить уравнениям совместности. Поскольку уравнения совместности Сен-Венана сформулированы в деформациях, сначала их нужно выразить через напряжения, используя закон Гука. После выполнения этих громоздких выкладок система уравнений совместности в напряжениях, называемая системой Бельтрами-Мичелла, принимает вид:

$$\Delta\sigma_x + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} = -2 \frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\mu}{1+\mu} \left( \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right),$$

...

$$\Delta\tau_{xy} + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial y} = - \left( \frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial x} \right),$$

...

В случае отсутствия объемных сил правые части уравнений равновесия обращаются в ноль.

Решение задач теории упругости в напряжениях сводится, таким образом, к нахождению шести неизвестных функций  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xz}$ , удовлетворяющих шести уравнениям совместности, трем уравнениям равновесия и трем граничным условиям.

Особенность постановки задачи в напряжениях в том, что дифференциальных уравнений (девять) больше, чем число неизвестных функций (шесть), но зато число граничных условий (три) меньше, чем число неизвестных функций. Тем не менее, из физического смысла задачи этих дифференциальных уравнений как раз достаточно для определения неизвестных напряжений.

### *Пространственная осесимметричная задача в цилиндрических координатах*

При решении задач удобно использовать цилиндрические координаты, рис. 5.1.7.

Положение точки определяется тремя координатами  $r, \theta, z$ . Будем рассматривать очень важный для практики случай, когда напряженно-деформированное состояние (НДС) зависит только от координат  $r$  и  $z$  – это осесимметричное НДС.

Выделим из упругого тела бесконечно малый элемент двумя радиальными плоскостями и двумя плоскостями, параллельными  $YOX$ , рис. 5.1.8, 5.1.9.

Обозначения для напряжений

$\sigma_r$  – нормальное напряжение, направленное вдоль  $r$ ;

$\sigma_\theta$  – нормальное тангенциальное напряжение;

$\sigma_z$  – нормальное осевое напряжение;

$\tau_{rz}$  – касательные напряжения, направленные вдоль радиуса  $r$  на площадках с нормалью, параллельной оси  $z$ , действующие по цилиндрическим поверхностям.

Других касательных напряжений быть не может, так как все производные по  $\theta$  равны 0.

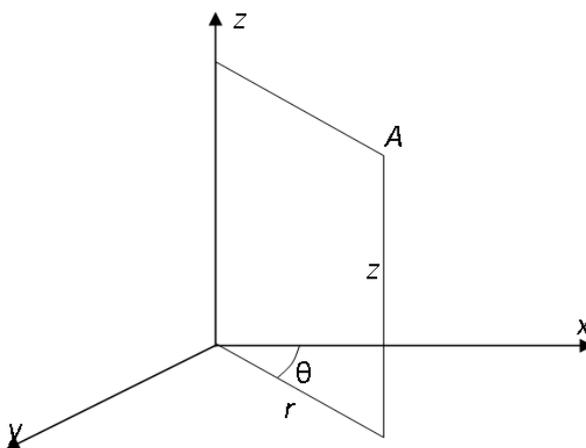


Рис. 5.1.7. Положение точки в цилиндрической системе координат

Напряжение  $\sigma_r$  изменяется по  $r$ , тангенциальное напряжение  $\sigma_\theta$  по граням элемента постоянно и меняется только от  $r$  и  $z$ .

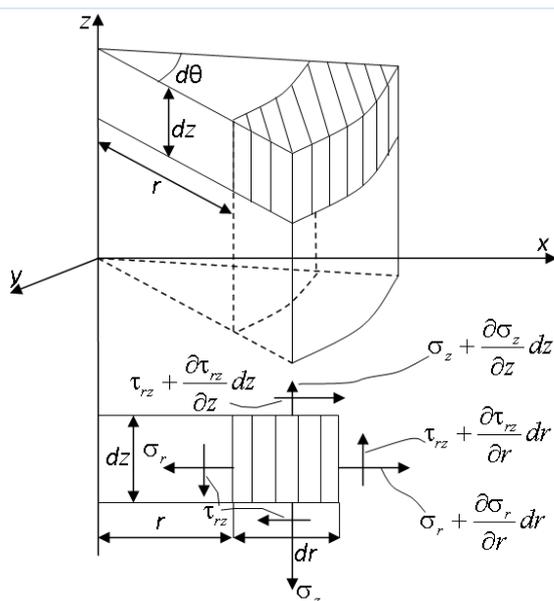


Рис. 5.1.8. Равновесие бесконечно малого элемента. Вертикальная проекция

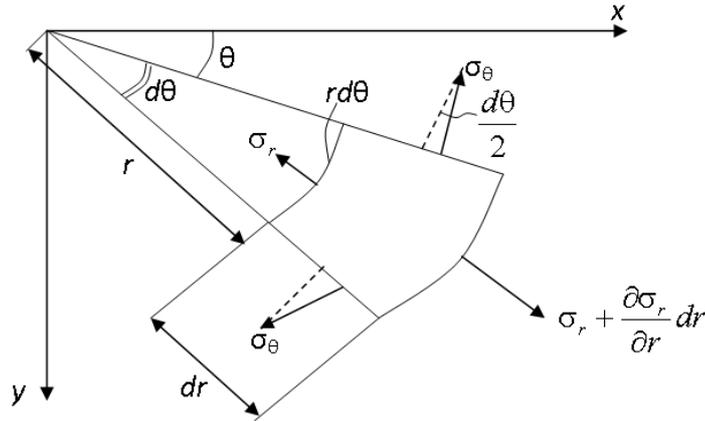


Рис. 5.1.9. Равновесие бесконечно малого элемента. Вид сверху

Сумма проекций всех сил на направления  $r$  и  $z$  дают два уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + R = 0, \quad (5.1.71)$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\tau_{rz}}{r} + Z = 0,$$

$R, Z$  – интенсивности объемных нагрузок.

*Деформации*

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r},$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r}, \quad (5.1.72)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\gamma_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}.$$

*Уравнения совместности*

$$\Delta \sigma_r - \frac{2}{r^2}(\sigma_r - \sigma_\theta) + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial r^2} = 0,$$

$$\Delta \sigma_\theta + \frac{2}{r^2}(\sigma_r - \sigma_\theta) + \frac{1}{1+\mu} \frac{1}{r} \frac{\partial \Sigma}{\partial r} = 0,$$

$$\Delta \sigma_z + \frac{1}{1+\mu} \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial r^2} = 0, \quad (5.1.73)$$

$$\Delta \tau_{rz} - \frac{\tau_{rz}}{r^2} + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial \Sigma}{\partial r \partial z} = 0.$$

Функция напряжений

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \Delta \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \right), \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \Delta \varphi - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right), \\ \sigma_z &= \frac{\partial}{\partial z} \left[ (2 - \mu) \Delta \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right], \\ \tau_{rz} &= \frac{\partial}{\partial r} \left[ (1 - \mu) \Delta \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right].\end{aligned}\tag{5.1.74}$$

Здесь оператор Лапласа

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}.$$

Функция  $\varphi$  удовлетворяет бигармоническому уравнению:

$$\Delta^2 \varphi = 0.$$

или

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) = 0,\tag{5.1.75}$$

Следовательно, при осесимметричном распределении напряжений достаточно найти  $\varphi$ , а затем по (5.1.74) рассчитать напряжения и удовлетворить граничным условиям.

Многие функции удовлетворяют (5.1.75). Например,

$$\varphi = C_1 \ln r + C_2 z \ln r + C_3 z^2 \ln r + C_4 z^3 \ln r,$$

$$\varphi = C_1 z + C_2 r^2 + C_3 z^2 + C_4 r^2 z + C_5 z^3,$$

$$\varphi = C (r^2 + z^2)^n z, \text{ где } n = -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 1,$$

$$\varphi = C (3r^4 - 8z^4),$$

$$\varphi = C (3r^2 - 2z^2) z^2,$$

$$\varphi = C (r^2 - 4z^2) r^2.$$

Здесь  $C_i, C$  – некоторые постоянные, которые необходимо определить, используя условия на границе.

Под действием внешних сил упругое тело испытывает деформацию, при которой эти силы совершают работу. На основании закона сохранения энергии эта работа превращается в потенциальную энергию, которая в последующем при удалении внешних сил расходуется на восстановление первоначальной (т. е. недеформированной) формы тела.

Энергию, накапливаемую при деформации упругого тела в единичном объеме материала, выделенном около данной точки, называют удельной потенциальной энергией деформации в окрестности рассматриваемой точки.

Для подсчёта удельной потенциальной энергии необходимо составить сумму произведений соответствующих компонент тензоров напряжений и деформаций. Половинное значение этой суммы и составит искомую удельную энергию деформации. Выражение потенциальной энергии упругой деформации, отнесенной к единице объема, можно представить в форме, которая одинакова для изотропной или анизотропной среды:

$$W = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}.$$

Через технические компоненты в случае изотропного материала уравнение потенциальной энергии можно представить следующим образом:

$$W = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)].$$

Половинное значение берётся потому, что напряжения, вследствие зависимости от деформаций, возникают не внезапно, а растут по мере их увеличения. Это положение характерно для статического процесса нагружения.

Потенциальную энергию изменения объема и формы тела для данного случая находят по формулам

$$W_0 = \frac{1+2\mu}{GE} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 = \frac{1+2\mu}{GE} [I_1(T_\sigma)]^2,$$

$$W_\phi = \frac{1+2\mu}{GE} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] = \frac{1+2\mu}{GE} [I_2(T_\sigma)]^2.$$

### 5.3. Теория пластичности

Пластичностью называется свойство твердого тела изменять под внешними воздействиями, не разрушаясь, свою форму и размеры и сохранять остаточные (пластические) деформации после устранения этих воздействий. Теория пластичности является разделом механики, который устанавливает общие законы образования в твердых телах любой конфигурации пластических деформаций и возникающих на всех стадиях пластического деформирования напряжений, вызываемых различными внешними причинами (нагрузками, температурными воздействиями и т.д.). Теория пластичности в отличие от теории упругости рассматривает тела, которые по своей природе не подчиняются свойствам упругости. Если тело не подчиняется свойствам упругости с самого начала приложения к нему внешних воздействий, то оно называется пластическим. Если же тело в начале погружения обладает упругими свойствами и лишь с некоторой стадии нагружения в нем появляются остаточные деформации, то оно называется упругопластичным.

В теории пластичности решаются две различные задачи: 1) изучение всего процесса деформирования тел (конструкций); 2) определение одной лишь несущей способности (фактической разрушающей нагрузки) конструкций.

В первой задаче рассматриваются определение напряжений, деформаций и перемещений от заданной нагрузки в любой момент деформирования, определение границы между упругой и пластической зонами, определение остаточных напряжений и деформаций при полном или частичном снятии

нагрузки. Во второй задаче исследуется лишь предельное состояние тела без изучения промежуточных этапов деформирования.

Законы пластического деформирования зависят от того, увеличивается или уменьшается нагрузка. В связи с этим различают три вида деформирования: активное, пассивное, нейтральное. При простом растяжении или чистом сдвиге эти понятия легко разграничиваются. Активным называется деформирование, при котором напряжение при котором напряжение по абсолютному значению растет, пассивным – при котором напряжение убывает. Очевидно, деформирование, при котором напряжение не меняется можно называть нейтральным.

При сложнопластическом состоянии пластическое деформирование может происходить при самых разнообразных соотношениях между напряжениями. По А.А. Ильюшину деформирование элемента тела в данный момент можно называть активным, если интенсивность напряжений  $\sigma_i$  имеет значение, превышающее по модулю все предыдущие ее значения; пассивным, если интенсивность напряжений меньше хотя бы одного из предыдущих значений. Нейтральное деформирование происходит при постоянном значении интенсивности напряжений  $\sigma_i$ .

На законы пластического деформирования существенное влияние оказывает также характер нагружения тела. В связи с этим различают два вида нагружения: простое и сложное. Простым называется такой процесс нагружения, при котором внешние силы с самого начала их приложения возрастают одновременно, сохраняя между собой постоянное соотношение, т.е. изменяются пропорционально общему параметру. Такое изменение нагрузок обеспечивает постоянство направляющих тензоров напряжений и деформаций в каждой точке тела произвольной формы при любом количестве и любых направлениях внешних сил. Нагружения является сложным, если, например, при возрастании хотя бы одного из внешних сил остальные возрастают не пропорционально ей или если силы действуют не одновременно и т.п.

Как и в теории упругости, математический аппарат теории пластичности состоит из трех групп уравнений. Эти уравнения теории напряжений, теории деформаций и физические уравнения. Уравнения первых двух групп совпадают с соответствующими уравнениями теории упругости.

Физические уравнения теории пластичности зависят от того, какая теория рассматривается. В настоящее время существует две основные теории пластичности.

К первому виду можно отнести теорию упругопластических деформаций (или деформационную теорию), в основе которой лежат уравнения, связывающие напряжения и деформации. Эта теория справедлива при малых деформациях, когда тело несжимаемо и подвергается простому нагружению. Теория этого вида получила распространение в области расчета строительных конструкций.

Ко второму виду относят теорию пластического течения, которая справедлива не только при простом нагружении, когда она совпадает с

деформационной теорией, но и в определенных рамках сложного нагружения, а также при конечных деформациях. Поэтому эта теория находит применение в технологической прокатке (прокатка, волочение и т.д.), где исследуются большие пластические деформации.

При решении задач теории пластичности во многих случаях необходимо знать, при каких условиях материал в рассматриваемой точке переходит из упругого состояния в пластическое. На начальном этапе нагружения в деформируемом теле возникают лишь упругие деформации. Однако по мере роста внешней нагрузки в некоторых точках тела могут появиться такие деформации, которые не исчезают после снятия нагрузки. Эти деформации называются пластическими, а момент их появления – началом перехода тела в пластическое состояние. Так, в случае простого растяжения пластические деформации появляются при  $\sigma_1 = \sigma_T$ . Возникает вопрос о возможной форме условия, характеризующего переход за пределы упругости при сложном напряжённом состоянии. Это условие называется условием начала пластичности (или текучести).

Поскольку в начальной стадии нагружения справедлив закон Гука, возникновение пластических деформаций однозначно определяется напряжениями. Следовательно, условие начала пластичности может быть представлено в виде:

$$f_T(\sigma_{ij}) = 0. \quad (5.2.1)$$

В это уравнение входят также механические характеристики материала, характеризующие возникновение пластических деформаций при простейших напряжённых состояниях, например, пределы текучести при одноосных растяжении и сжатии.

В шестимерном пространстве компонент напряжений  $\sigma_{ij}$  уравнение (5.2.1) описывает некоторую гиперповерхность начала пластичности, т.е. пластические деформации возникают в тот момент, когда вектор  $\vec{\sigma}_{ij}$ , составляющие которого равны компонентам тензора напряжений, достигает этой поверхности.

Для изотропного тела значения функции  $f_T(\sigma_{ij})$  не должны зависеть от выбора системы координат, т.е. условие начала пластичности может быть записано в виде функции инвариантов тензора напряжений.

При всесторонних равных растяжениях или сжатиях пластические деформации не возникают. Поэтому условие начала пластичности может быть представлено в виде функции второго и третьего инвариантов девиатора напряжений (так как его первый инвариант равен нулю).

В 1871 г. Сен-Венан, основываясь на опытах Треска (1868 г.) по истечению металлов через отверстие, высказал предположении, что тело переходит в пластическое состояние в тот момент, когда максимальное касательное напряжение  $\tau_{\max}$  достигает предела текучести материала при чистом сдвиге  $\tau_T$ .

Так как  $\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$ , данное условие начала пластичности может быть записано в виде:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2\tau_T. \quad (5.2.2)$$

Очевидно, что условие начала пластичности не должно зависеть от вида напряжённого состояния. Так, для одноосного растяжения ( $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ ) пластические деформации возникают при  $\sigma_1 = \sigma_T$ . Подставляя последнее равенство в (5.2.2), получаем:

$$\tau_T = \frac{\sigma_T}{2} \quad (5.2.3)$$

Данный результат позволяет переписать уравнение (5.2.2) в виде:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_T. \quad (5.2.4)$$

В курсе сопротивления материалов условие (5.2.4) является следствием теории прочности наибольших касательных напряжений. Его часто называют условием пластичности Треска–Сен-Венана.

Недостатком рассмотренного условия начала пластичности является то, что оно не учитывает влияния промежуточного главного напряжения  $\sigma_2$  на возникновение пластических деформаций.

Согласно Мизесу условие пластичности можно представить в виде:

$$\sigma_i = \sigma_T. \quad (5.2.5)$$

т.е. пластические деформации возникают тогда, когда интенсивность напряжений достигает величины предела текучести материала при растяжении. Это условие называют условием пластичности Мизеса (или Хубера–Мизеса).

При решении системы уравнений теории пластичности необходимо использовать формализованные физические условия, возникающие в процессе деформации на поверхности (границе) тела, выраженные в математическом виде и получившие название граничных условий. Для получения частного решения системы уравнений должны быть заданы, помимо граничных, еще начальные условия, т.е. значения искомым механических переменных в каждой точке деформируемого тела в начальный момент времени.

В связи с математическими трудностями решения краевой задачи теории пластичности оправданы поиски упрощающих допущений, которые бы не находились в большом противоречии с физикой конкретного изучаемого пластического течения, но в то же время облегчали бы вычисления. К числу таких допущений относятся предположение об идеальной пластичности, об изотермичности течения материала, о его несжимаемости, о достаточно медленном течении без массовых сил, о плоских деформированном и напряженном состоянии.

Энергетическое условие пластичности ортотропной среды можно представить следующим образом:

$$\sigma_{i1} = \sqrt{\mu_{21}} * \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + \left(\frac{1}{\mu_{12}} - 1\right)(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + \left(\frac{1}{\mu_{21}} - 1\right)(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + \left[\left(\frac{1}{\mu_{21}} - 1\right) + \left(\frac{1}{\mu_{12}} - 1\right)\right] \frac{1 + \mu_1}{1 - \mu_1} (\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2)}$$

Здесь  $\mu_{kl}$  – коэффициенты поперечной деформации, где первый индекс показывает направление поперечной деформации, а второй – действие силы;

$\mu_i$  – коэффициент поперечной деформации, когда сила действует под углом  $45^\circ$  к осям 1 и 2 и т.д.;

$\sigma_{i1}$  – интенсивность напряжений, отнесенная к оси 1.

Наблюдаются следующие зависимости:

$$\frac{1}{\mu_{12} + \mu_{21} - 2\mu_{12}\mu_{21}} \cdot \frac{1 - \mu_1}{1 + \mu_1} = \frac{1}{\mu_{12}} \frac{1 - \mu_2}{1 + \mu_2} = \frac{1}{\mu_{21}} \frac{1 - \mu_3}{1 + \mu_3},$$

$$\mu = 1 - \mu_{21}, \quad \mu_{23} = \frac{\mu_{21}(1 - \mu_{12})}{\mu_{12} + \mu_{21} - 2\mu_{12}\mu_{21}},$$

$$\frac{\frac{1}{\mu_{12}} + \frac{1}{\mu_{21}} - 2}{4\left(\frac{1}{\mu_{12}} + \frac{1}{\mu_{21}} - 1\right)} \cdot \frac{1 + \mu_1}{1 - \mu_1} + 3 \frac{\frac{1}{\mu_{12}\mu_{21}} - 1}{\left(\frac{1}{\mu_{12}} + \frac{1}{\mu_{21}} - 1\right)\left(\frac{1}{\mu_{12}} + \frac{1}{\mu_{21}} - 2\right)} \cdot \frac{1 - \mu_1}{1 + \mu_1} = 1.$$

При плоской деформации:

$$\varepsilon_2 = 0, \quad \sigma_2 = (1 - \mu_{12})\sigma_3 + \mu_{12}\sigma_1.$$

Для трансверсального изотропного тела (плоскость изотропии 1-2) условие пластичности можно записать в виде:

$$\sigma_{i1} = \sqrt{1 - \mu_{12}} * \sqrt{\frac{\mu_{12}}{1 - \mu_{12}} (\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + \frac{1 + \mu_{12}}{1 - \mu_{12}} (\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2)}.$$

Наконец, при изотропном материале:

$$\sigma_i = \sigma_{i1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}.$$

Условие пластичности Треска-Сен-Венана для изотропного материала:

$$2|\tau_{12}| = |\sigma_1 - \sigma_2| \leq \sigma_T,$$

$$2|\tau_{23}| = |\sigma_2 - \sigma_3| \leq \sigma_T,$$

$$2|\tau_{31}| = |\sigma_3 - \sigma_1| \leq \sigma_T.$$

Энергетическое условие пластичности может быть представлено в линейном виде:

а) тело изотропное

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \beta \sigma_i (\sigma_T),$$

где

$$\beta = \frac{2}{\sqrt{3 + \nu_\sigma^2}};$$

$\beta$  – коэффициент Лоде лежит в пределах от 1 до  $\frac{2}{\sqrt{3}}$ ;

б) тело ортотропное

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \beta_1 \sigma_{i1} (\sigma_{T1}),$$

где

$$\beta_1 = \frac{\sqrt{\mu_{12} / \mu_{21}}}{\sqrt{v_\sigma^2 - 2Dv_\sigma + C}};$$

$$C = 1 - 4\mu_{12} + 4 \frac{\mu_{12}}{\mu_{21}}; D = 2\mu_{12} - 1.$$

Интенсивность деформаций (при условии постоянства объема) в случае изотропного тела может быть получена по формуле:

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}$$

или

$$e_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(e_1 - e_2)^2 + (e_2 - e_3)^2 + (e_3 - e_1)^2},$$

где  $e_1 = \ln(1 + \varepsilon_1)$ ,  $e_2 = \ln(1 + \varepsilon_2)$ ,  $e_3 = \ln(1 + \varepsilon_3)$  – логарифмические деформации.

Если тело является ортотропным, то

$$e_{i1} = \sqrt{\frac{\mu_{12}}{1 - \mu_{12}\mu_{21}}} \sqrt{\frac{e_1^2}{\mu_{12}} + 2e_1e_2 + \frac{e_2^2}{\mu_{21}}}.$$

При плоском напряженном состоянии физические уравнения имеют вид:

а) тело изотропное

$$\sigma_1 = \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} (2e_1 + e_2),$$

$$\sigma_2 = \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} (2e_1 + e_2).$$

б) тело ортотропное

$$\sigma_1 = \frac{\mu_{12}}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} \frac{\sigma_{i1}}{\varepsilon_{i1}} \left( \frac{e_1}{\mu_{12}} + e_2 \right),$$

$$\sigma_2 = \frac{\mu_{12}}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} \frac{\sigma_{i1}}{\varepsilon_{i1}} \left( e_1 + \frac{e_2}{\mu_{21}} \right).$$

## 6. ЭЛЕМЕНТЫ ВОЛНОВОЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

### 6.1. Область применимости традиционной математической теории пластичности

В настоящее время накоплен достаточно обширный материал, указывающий на то, что традиционная математическая теория пластичности имеет ограниченную область применимости. Во многих случаях применение таких моделей деформации требует введения поправок, допущений, существенно осложняющих вычисления. Многие явления, связанные с

локализацией деформации, поликристаллической структурой металла, вращательным движением фрагментов металла, зёрен, в рамках модели сплошной среды не находят своего объяснения.

Условия деформирования металлов при обработке металлов давлением характеризуются весьма сложными температурно-скоростными режимами, высокими гидростатическими давлениями. В частности, высокоскоростное волочение сопровождается рядом эффектов, которые не находят адекватного описания в рамках традиционной теории пластичности. Скорости деформации при волочении на несколько порядков выше скоростей деформации, предусмотренных классической теорией пластичности.

При экспериментальном исследовании наблюдается большое количество макроэффектов деформации, которые, на первый взгляд, не могут рассматриваться с единых модельных позиций. В результате часто для отдельного эффекта деформации предлагают соответствующую модель.

В настоящее время теория пластичности представляет собой сложную, многоуровневую систему взаимодополняющих друг друга подходов. Подавляющее большинство расчётов в области волочения выполняются с применением одного известного подхода – классической математической теории пластичности или же с применением более простых инженерных методов. Такие расчёты не учитывают всего многообразия явлений, сопровождающих пластическую деформацию и часто приводят к неадекватным результатам.

Накопленный в настоящее время материал позволяет сделать вывод, что применение только классической математической теории пластичности, основанной на модели сплошной среды, не позволяет адекватно описать поведение деформируемого металла в процессах обработки металлов давлением, в частности, при высокоскоростном волочении. Одним из возможных подходов к описанию высокоскоростной деформации является использование волновой теории пластичности.

## **6.2. Волновой характер распространения пластической деформации**

Согласно современным представлениям, пластическая деформация представляет собой сильнонеравновесный, неоднородный процесс. В каждой точке деформируемого тела происходит последовательная, циклическая смена состояний – рост напряжения сменяется пластическим сдвигом. Пластическая деформация является аккомодационным, релаксационным процессом, снимающим напряжения в объёме деформируемого тела. Пластический сдвиг зарождается в зонах концентраторов напряжений, приводит к снижению напряжений в этих зонах и переносу сдвиговой деформации в соседние области деформируемого тела. В результате циклический волновой процесс напряжение-релаксация распространяется на всю пластическую область.

Основные концентраторы напряжений связаны с границами раздела и различного рода зонами стеснённой деформации. Важную роль в

формировании пластической волны в металлах играет упрочнение. Упрочнение металла в зоне пластического сдвига приводит к увеличению сопротивления деформации и переносу пластических сдвигов в соседние области с меньшим сопротивлением деформации.

Представления о волновом характере пластической деформации получили убедительное теоретическое и экспериментальное подтверждение, и в настоящее время не вызывают сомнения.

Скорость пластических волн определяется уравнением:

$$V_{пл} = \sqrt{\frac{1}{\rho} \frac{d\sigma}{d\varepsilon}}, \quad (6.2.1)$$

где  $\frac{d\sigma}{d\varepsilon}$  - тангенс угла наклона касательной к кривой упрочнения,  $\rho$  - плотность металла.

В упругопластической среде в зависимости от её состояния (упругое, пластическое) могут иметь место четыре типа волн. Это упругие волны, пластические волны, волны (фронты) пластической нагрузки и волны (фронты) разгрузки. Кроме того, когда коэффициент упрочнения  $\frac{d\sigma}{d\varepsilon}$  монотонно возрастает, то есть  $\frac{d^2\sigma}{d^2\varepsilon} > 0$ , то могут возникать ударные волны.

Собственно пластические волны представляют собой волны, которые распространяются в среде, находящейся в пластическом состоянии. В этом случае перед и за волной находятся частицы в пластическом состоянии.

Упругие волны – это волны, которые распространяются в среде, находящейся в упругом состоянии, то есть перед и за волной находятся частицы в упругом состоянии.

Волна пластической нагрузки представляет собой фронт пластической волны, распространяющийся в упругой среде, то есть перед фронтом волны нагрузки находится упругая область, а за фронтом среда переходит в пластическое состояние.

Волна разгрузки возникает при снятии напряжения с тела, находящегося в пластическом состоянии. Фронт волны разгрузки представляет собой границу раздела между пластической и упругой областями. Перед фронтом волны разгрузки среда находится в пластическом состоянии, за фронтом – в упругом.

Пластические волны сопровождают все процессы пластического деформирования твёрдых тел – и медленные, и быстрые. Пластическая деформация твёрдых тел может протекать только в условиях неоднородного напряжённого состояния.

Волны нагрузки и волны разгрузки проявляются только в быстрых, высокоскоростных процессах пластической деформации, когда время нагружения/разгрузки твёрдого тела сравнимо с временем распространения пластических волн в границах твёрдого тела.

Пластические волны при волочении распространяются в движущейся среде. При высокоскоростном волочении с большими скоростями деформации происходит изменение механических свойств металла. Динамическая кривая

деформирования может значительно отличаться от статической. По данным экспериментальных работ, посвящённых исследованию влияния скорости деформации на механические свойства, за критическую скорость деформации, после которой начинается существенное изменение механических свойств, можно принять скорость деформации  $5 \cdot 10^2 \text{ с}^{-1}$ .

### **6.3. Условия деформации при высокоскоростном волочении**

С ростом скорости волочения растёт скорость деформации металла в очаге деформации и уменьшается время нахождения проволоки в очаге деформации. Например, для 20-ти кратного маршрута волочения стальной латунированной проволоки 0,955мм – 0,176мм со скоростью волочения 7,5м/с, скорость деформации изменяется в пределах от  $1,2 \cdot 10^2 \text{ с}^{-1}$  в начале маршрута до  $1,5 \cdot 10^4 \text{ с}^{-1}$  в конце, время нахождения в очаге деформации изменяется в пределах от  $10^{-3} \text{ с}$  до  $10^{-5} \text{ с}$ . Время деформации  $10^{-5} \text{ с}$  и скорость деформации  $10^4 \text{ с}^{-1}$  характерны для ударной деформации. Из приведённых выше данных видно, что уже на относительно небольшой для современных волочильных машин скорости волочения 7,5м/с, условия деформации приближаются к ударным.

При неизменной степени деформации средняя скорость деформации при волочении растёт с увеличением угла конусности волоки, увеличением скорости волочения и с уменьшением начального и конечного диаметров проволоки. Профилю с малым диаметром соответствует малая протяжённость зоны деформации. Для одной и той же скорости волочения время пребывания металла в зоне деформации меньше и, следовательно, скорость деформации малого профиля выше, чем большого. При одном и том же конечном диаметре с увеличением степени деформации снижается средняя скорость деформации при волочении. Скорость скольжения проволоки меняется вдоль контактной поверхности. Коэффициент трения скольжения зависит от скорости скольжения и ряда других факторов. Для волочения характерна большая неравномерность напряжённого состояния не только вдоль канала, но и в его радиальных направлениях. Неравномерность деформации по поперечным сечениям возрастает с увеличением рабочего угла канала и обжатия.

Повышение единичного обжатия приводит к снижению средней скорости деформации на участке рабочего конуса волоки. При повышении скорости волочения увеличивается средняя и фактическая скорости деформации.

Распространение пластической деформации при ударном нагружении имеет типично волновую картину и описывается уравнениями волновой теории пластичности.

#### 6.4. Локализация деформации в процессах обработки металлов давлением

Локализация деформации является типичным явлением для процессов обработки металлов давлением. Локализация деформации является волновым процессом. Характерным примером локализации деформации является образование шейки при испытании стержня на разрыв.

Ударные нагрузки и связанные с ними высокие скорости деформации сопровождаются повышением температуры в областях с максимальной скоростью деформации. Скорость отвода тепла недостаточна для выравнивания температуры по объёму деформируемого тела при высоких скоростях деформации. Повышение температуры сопровождается снижением сопротивления деформации и увеличением скорости деформации в локальных областях. В результате деформация локализуется в малых по объёму частях деформируемого тела, и возникают полосы адиабатического сдвига. Скорость деформации при высокоскоростном волочении достаточна для возникновения полос адиабатического сдвига.

При высоких скоростях деформации локализация сопровождается повышением температуры в области интенсивной сдвиговой деформации, что приводит к локальному разупрочнению и дальнейшему увеличению степени локализации. В случае ударной деформации возникают полосы адиабатического сдвига и практически вся деформация сосредоточена в узкой области максимальных сдвиговых напряжений.

Увеличение скорости волочения и прокатки в процессах обработки металлов давлением сопровождается развитием локализации пластической деформации. Локализация деформации в процессе обработки приводит к изменению характера течения металла и, как следствие, к неоднородности свойств по объёму готового изделия.

Экспериментальные исследования указывают на возможность образования значительной локализации деформации при прокатке прямоугольных образцов. Характерным случаем локализации является резкое увеличение степени деформации участков металла, расположенных на границе между объёмами с разными степенями обжатия. Полоски локализации деформации возникают под действием местного разогрева вследствие теплового эффекта деформации. Необходимым условием интенсивного разогрева является интенсивный сдвиг, происходящий на больших скоростях и при значительных напряжениях в слое. На величину напряжений, работу деформации и тепловой эффект влияют геометрия очага деформации и температурно-скоростные параметры прокатки. При скорости деформации до  $10^2 \text{с}^{-1}$  условия осуществления деформации изотермические, статические. Повышение скорости деформации выше  $10^2 \text{с}^{-1}$  сопровождается ростом сопротивления течения, возникновением упругопластических волн. В этом случае деформация характеризуется как нестатическая, происходящая в адиабатических условиях. Полосы деформации проявляются при уменьшении температуры прокатки и уменьшении отношения ширины образца к высоте.

При однородной деформации скорость пластической волны постоянна во всём объёме деформируемого тела. Увеличение скорости деформации в некотором локальном объёме деформируемого тела сопровождается уменьшением скорости пластической волны, вплоть до остановки волны [ $V_{nl} = 0$ ], с локализацией деформации в относительно небольшом объёме деформируемого тела.

Скорость распространения пластической волны, вычисляемую по уравнению (6.2.1), можно принять в качестве критерия, определяющего скорость деформации в выбранной точке очага деформации. Такой подход позволяет получить распределение скоростей деформации по объёму изделия и выявить области локализации деформации.

Для типичной параболической кривой деформирования коэффициент упрочнения  $\frac{d\sigma}{d\varepsilon}$  увеличивается с уменьшением напряжений в волне. Поэтому

скорость пластических волн  $V_{nl} = \sqrt{\frac{1}{\rho} \frac{d\sigma}{d\varepsilon}}$  увеличивается с уменьшением напряжений в волне. При уменьшении напряжений до предела текучести скорость пластической волны возрастает и при переходе пластической деформации в упругую достигает максимальной скорости – скорости звука.

Увеличение скорости пластических волн сопровождается уменьшением степени локализации деформации.

## 6.5. Скоростная неоднородность напряжённого состояния

Существенным для условий волочения и однородности свойств готовой проволоки является распределение деформации по диаметру проволоки. В связи с этим, представляет интерес задача оценки степени неоднородности деформации по сечению проволоки.

Пластическую деформацию рассматриваем как сильнонеравновесный, неоднородный процесс, сопровождающийся возникновением и распространением пластических волн. Пластические волны распространяются от контактной поверхности волочильного инструмента вглубь проволоки. При волочении проволоки пластические волны представляют собой концентрические, сходящиеся к оси проволоки волны. Возможная схема распределения сжимающих напряжений в волне около контактной поверхности проволоки представлена на рис.6.5.1. Схема на рис.6.5.1. получена из предположения, что каждый фрагмент контактной поверхности является источником пластической волны. Суммарная волна в каждой точке очага деформации представляет собой результат наложения волн от всех фрагментов контактной поверхности.

В жидкостях и газах движение сходящихся волн сопровождается неограниченным ростом амплитуды волн вследствие уменьшения площади поверхности фронта цилиндрической волны. В металлах при действии радиальных напряжений возникают компенсирующие окружные напряжения, в

результате чего, при состояниях, близких к стационарным, т.е. при малых скоростях деформации, рост амплитуды волн в центральной области проволоки незначителен. В этом случае при конической форме очага деформации для любого продольного сечения, проходящего через ось проволоки, распределение радиальных напряжений по радиусу проволоки можно приравнять к распределению поперечных напряжений при плоской деформации. Уменьшение напряжений при движении волн от контактной поверхности к оси проволоки вызвано продольным рассеянием волн, как для плоской, так и для осесимметричной деформации.

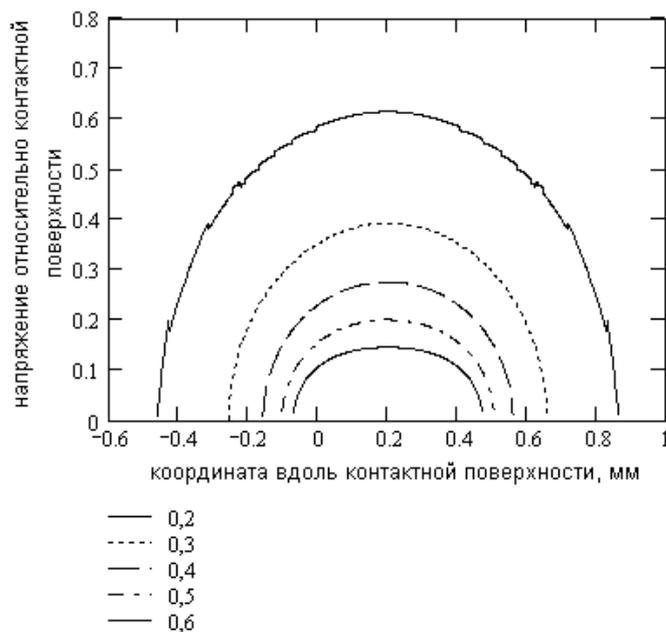


Рис.6.5.1. Схема распределения напряжений около контактной поверхности

Следовательно, задача о движении цилиндрических пластических волн от контактной поверхности инструмента при малых скоростях деформации может быть сведена к плоской задаче о движении пластических волн в клиновидном очаге. При приближении к условиям ударной деформации необходимо учитывать рост напряжения в центре проволоки.

Течение металла в очаге деформации сопровождается возникновением перепадов напряжений. Большей скорости течения металла соответствуют большие значения перепадов или градиентов напряжений. В свою очередь, увеличение градиента напряжений с увеличением скорости течения приводит к изменению напряжённого состояния, которое вызывает изменение деформированного состояния и перераспределение деформации в объёме очага деформации.

Процессы волочения проволоки многофакторные. Условия трения на поверхности могут значительно изменяться с увеличением скорости волочения проволоки. При мокром волочении условия трения на поверхности проволоки примерно одинаковы по маршруту волочения или даже могут несколько

ухудшаться из-за повышения температуры проволоки. В этих условиях увеличение градиента поперечных напряжений с увеличением скорости приводит к увеличению поперечных напряжений на поверхности контакта рабочего инструмента с проволокой, увеличению давления на рабочий инструмент и, следовательно, к повышенному износу рабочего инструмента. Эти выводы хорошо согласуются с результатами работы согласно которой стойкость волочильного инструмента падает с увеличением скорости волочения в условиях многократного мокрого волочения.

Увеличение сил трения на поверхности проволоки приводит к дополнительному разогреву поверхности и росту интенсивности сдвиговой деформации в приповерхностных областях. Эти факторы способствуют локализации деформации в приповерхностных слоях проволоки и снижению интенсивности деформации в центре проволоки, что может привести к непроработке сердцевины изделия.

## 7. ОЦЕНКА СКОРОСТНОЙ НЕОДНОРОДНОСТИ ДЕФОРМАЦИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ АНАЛОГИИ

В настоящее время в производстве проволоки прослеживается тенденция к увеличению скорости волочения и прокатки. За счёт скорости волочения достигается увеличение производительности волочильных машин, уменьшение затрат энергии на единицу продукции. При повышении скорости протяжки проволоки возможно появление нежелательных факторов, снижающих эффективность волочильных машин. Это повышенный износ волочильного инструмента и повышение степени неоднородности деформации, что сказывается на качестве конечной продукции. Эти факторы проявляются при волочении проволоки всех диаметров, но особенно ярко выражены при волочении микропроволоки, что связано с высокой скоростью на последних переходах при волочении тонкой проволоки.

Для решения этой задачи предлагается следующий подход. Считаем, что продольная скорость металла в очаге деформации одинакова во всём сечении проволоки. Пластическую деформацию рассматриваем как пластическую волну, распространяющуюся вглубь проволоки от границ контакта с волочильным инструментом. В данной работе исследуется возникновение дополнительных поперечных напряжений при увеличении скорости протяжки проволоки. Поэтому поперечная составляющая скорости пластических волн рассматривается отдельно от продольной. Скорость затухания пластической волны определяется скоростью течения металла в поперечном направлении. Чем выше скорость, тем больше градиент поперечных напряжений, и, следовательно, выше скорость затухания пластической волны. Металл в состоянии пластической деформации рассматриваем как вязкую жидкость, течение которой описывается уравнением Навье-Стокса.

Продольная скорость металла в очаге деформации определяется условием постоянства объёма:

$$V_H = \frac{S_n}{S_r} \cdot V_k$$

где  $V_H, S_H$  – продольная скорость и сечение проволоки перед волокой  
 $V_k, S_k$  – продольная скорость и сечение проволоки на выходе из волоки.

Градиент продольной скорости

$$\text{grad}V = \frac{\Delta V}{\Delta l} = \frac{V_k - V_H}{\Delta l} = \frac{V_k}{\Delta l} \cdot \left(1 - \frac{S_k}{S_H}\right) \quad (7.1)$$

где  $\Delta l$  – длина канала волоки.

Уравнение непрерывности в случае несжимаемого металла приобретает вид:

$$\text{div}V = 0$$

где  $V$  – скорость металла в очаге деформации.

Уравнение непрерывности можно переписать в следующем виде:

$$\frac{dV_y}{dy} = \frac{dV_x}{dx} \quad (7.2)$$

где  $V_y$  – поперечная составляющая скорости

$V_x$  – продольная составляющая скорости

В сделанных предположениях градиент продольной составляющей скорости величина постоянная вдоль канала волоки и определяется уравнением (7.1), следовательно,

$$\frac{dV_y}{dy} = \frac{dV_x}{dx} = \frac{\Delta V_x}{\Delta l} = \frac{V_k}{\Delta l} \cdot \left(1 - \frac{S_k}{S_H}\right) \quad (7.3)$$

Для оценки величины затухания пластической волны, распространяющейся в поперечном направлении от поверхности контакта с инструментом, используем аналогию с течением несжимаемой жидкости. Точность расчётов по гидродинамической аналогии около 20%. Мерой затухания в данном случае является градиент поперечных напряжений.

Уравнение Навье-Стокса для стационарного случая приобретает вид:

$$\rho \cdot \left[ \frac{\partial V}{\partial t} + (V \nabla) V \right] = -\nabla p + \eta \Delta V \quad (7.4)$$

где  $\rho$  – плотность среды,  $V$  – скорость течения среды,  $p$  – давление,  $\eta$  – вязкость.

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Согласно (7.3)  $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$ , откуда  $\Delta V = 0$

Следовательно, решение уравнения (7.4) сводится к решению уравнения Эйлера для стационарного течения несжимаемой жидкости:

$$V_y \cdot \frac{dV_y}{dy} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dy} \quad (7.5)$$

Интегрируя уравнение (7.3), получим:

$$V_y = \frac{V_K}{\Delta l} \cdot \left(1 - \frac{S_K}{S_H}\right) \cdot y + C$$

где  $C$  – произвольная константа.

Считая, что на оси волокна вследствие симметрии  $V_y=0$ , при  $y=0$ , получим  $C=0$

Откуда  $V_y = \frac{V_K}{\Delta l} \cdot \left(1 - \frac{S_K}{S_H}\right) \cdot y$ , где  $y$  – расстояние от центра волокна

Уравнение (7.5) с учётом (7.3) можно переписать в виде:

$$\frac{V_K}{\Delta l} \cdot \left(1 - \frac{S_K}{S_H}\right) \cdot y \cdot \frac{V_K}{\Delta l} \cdot \left(1 - \frac{S_K}{S_H}\right) = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dy}$$

$$dP = \rho \cdot \left(\frac{V_K}{\Delta l} \cdot \left(1 - \frac{S_K}{S_H}\right)\right)^2 \cdot y \cdot dy$$

$$P = \frac{\rho}{2} \cdot \left(\frac{V_K}{\Delta l} \cdot \left(1 - \frac{S_K}{S_H}\right)\right)^2 \cdot y^2 + C$$

Пусть  $p_0$  – поперечное давление в центре проволоки

$p(0) = p_0$ , откуда следует, что  $C = p_0$

Следовательно, дополнительное поперечное давление на поверхности

проволоки, возникающее при протяжке  $p = p_0 + \frac{\rho}{2} \cdot \left(\frac{V_K}{\Delta l} \cdot \left(1 - \frac{S_K}{S_H}\right)\right)^2 \cdot y^2$

Разность давлений в центре и на поверхности, возникающая при движении проволоки

$$\Delta p = p - p_0 = \frac{\rho}{2} \cdot \left(\frac{V_K}{\Delta l} \cdot \left(1 - \frac{S_K}{S_H}\right)\right)^2 \cdot y^2 \quad (7.6)$$

Следовательно, при волочении проволоки в очаге деформации возникают дополнительные поперечные напряжения, пропорциональные квадрату скорости и квадрату радиуса проволоки. Градиент поперечных напряжений увеличивается с увеличением скорости проволоки. Когда проволока неподвижна или при малых скоростях градиент напряжений равен нулю и поперечные напряжения по радиусу проволоки не меняются.

При многократном волочении вытяжка и длина канала волокна меняются незначительно вдоль маршрута волочения. Полагая в уравнении (7.6) коэффициент при  $V_K^2 \cdot y^2$  постоянным, для отношения давлений на двух переходах при многократном волочении получим:

$$\frac{\Delta P_2}{\Delta P_1} = \frac{V_2^2 \cdot r_2^2}{V_1^2 \cdot r_1^2}$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{S_1}{S_2} = \frac{\pi r_1^2}{\pi r_2^2} = \frac{r_1^2}{r_2^2}$$

$$\frac{\Delta P_2}{\Delta P_1} = \frac{r_1^4 \cdot r_2^2}{r_2^4 \cdot r_1^2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 = \mu$$

где  $V_1, V_2$  – скорость проволоки,  $r_1, r_2$  – радиус проволоки,  $S_1, S_2$  – площадь сечения проволоки,  $\mu$  – суммарная вытяжка между переходами,  $\Delta P_1, \Delta P_2$  – разность давлений в центре и на поверхности проволоки для двух различных переходов.

Следовательно, градиент поперечных напряжений увеличивается по маршруту волочения пропорционально вытяжке. Например, для типичного маршрута волочения диаметр проволоки меняется с 1мм до 0,2мм, суммарная вытяжка  $\mu=25$ , следовательно, разность давлений в центре и на поверхности проволоки увеличивается в 25 раз. При этом увеличивается неоднородность деформации в объёме проволоки и, при прочих равных условиях, поперечное давление на поверхности проволоки.

Процессы волочения и прокатки проволоки многофакторные. Условия трения на поверхности могут значительно изменяться с увеличением скорости протяжки проволоки. Можно выделить два предельных случая:

1. Многократное мокрое волочение – в этом случае условия трения на поверхности проволоки примерно одинаковы по маршруту волочения или даже могут несколько ухудшаться из-за повышения температуры проволоки. В этих условиях увеличение градиента поперечных напряжений с увеличением скорости приводит к увеличению поперечных напряжений на поверхности контакта рабочего инструмента с проволокой, увеличению давления на рабочий инструмент и, следовательно, к повышенному износу рабочего инструмента. Эти выводы хорошо согласуются с результатами работ согласно которым стойкость волочильного инструмента падает с увеличением скорости волочения в условиях многократного мокрого волочения.
2. Волочение с использованием вязких смазок с переходом в режим гидродинамического трения. В этом случае с ростом скорости давление на поверхности может уменьшаться или увеличение давления на поверхности будет отставать от увеличения градиента поперечных напряжений. Рост градиента поперечных напряжений может привести к уменьшению давления в центре проволоки и непроработке сердцевины изделия.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основной базой для теории обработки металлов давлением является наука о пластической деформации металлов. Эта наука развивается совокупно в трех взаимно связанных основных направлениях, имеющих одинаково важное значение для теории обработки металлов давлением.

1. Физика процесса пластической деформации металлов. Это направление изучает экспериментально и теоретически механизм пластического формоизменения металла, устанавливает влияние различных факторов на этот процесс, в основном температуры, степени и скорости деформации и вида напряженного состояния, а также устанавливает условия, при которых металл переходит из состояния упругого в состояние пластическое.

2. Физико-химия процесса деформации, рассматривающая связь пластической деформации с химическим составом и фазовым состоянием металла.

3. Механика пластической деформации, математически разрабатывающая вопросы напряженного и деформированного состояния, величины и распределения напряжений и деформаций в пластически деформируемом теле, анализирующая условия перехода тела в пластическое состояние.

В пятидесятых годах, когда началось исследование природы свойств металлических материалов, было показано, что большинство наиболее важных свойств, в том числе сопротивление пластической деформации и разрушению в различных условиях нагружения, зависит от особенностей тонкого кристаллического строения. Этот вывод способствовал привлечению физических теорий о строении реальных металлов для объяснения многих непонятных явлений и для конструирования сплавов с заданными механическими свойствами. Благодаря теории дислокаций, удалось получить достоверные сведения об изменениях в металлах при их пластической деформации.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Электронный аналог печатного издания: Иванов К.М. Прикладная теория пластичности: учебное пособие/ К.М. Иванов [и др.]; под ред. К.М. Иванова. – СПб.: Политехника, 2009. – 375с.: илл.
2. Сторожев М.В., Попов Е.А. Теория обработки металлов давлением. Учебник для вузов. Изд. 4-е, перераб. и доп. М., «Машиностроение», 1977
3. Кучеряев Б.В. Механика сплошных сред [Текст]. Учебник для ВУЗов. – М: МИСиС, 2000.- 320с.
4. Каргин В.Р. Задачник по механике сплошных сред: учеб. Пособие [Текст] /В.Р. Каргин, Б.В. Каргин. – Самара: Изд-во Самар. гос.аэрокосм. ун-та, 2013. –64с.
5. Элементы теории упругости: метод. указ. и индивид. задания для студентов, обучающихся по направлению 151000 «Технологические машины и оборудование» [Текст] / Сост. А. А. Светашков. Томский политехнический университет — Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2013. – 156 с.
6. Седов Л.И. Механика сплошной среды [Текст]. В 2 т. М.: Наука, 1973. Т.1. 535 с.
7. Основы теории упругости [Текст] : учебное пособие /В.Н. Барашков, И.Ю. Смолина, Л.Е. Путеева, Д.Н. Песцов. –Томск : Изд-во Том. гос. архит.-строит. ун-та, 2012. – 184 с.
8. Щербо, А. Г. Основы теории упругости и пластичности : учеб.-метод. комплекс для студентов спец. 1-70 02 01 «Промышленное и гражданское строительство» [Текст]. / А.Г. Щербо. – Новополюцк : ПГУ, 2008. – 240 с.
9. Самуль В.И. Основы теории упругости и пластичности: Учеб.пособие для вузов. [Текст]- 2 изд., перераб. – М.:Высш. Школа, 1982.- 264с., ил.
10. Безухов, Н.И. Примеры и задачи по теории упругости, пластичности и ползучести [Текст] / Н.И. Безухов. – М.: Высш. шк., 1965. – 320 с.
11. Томсен, Э. Механика пластических деформаций при обработке металлов [Текст] / Э. Томсен, Ч. Янг, Ш. Кобаяши. – М.: Машиностроение, 1969. – 504 с.
12. Смирнов, В.С. Сборник задач по обработке металлов давлением [Текст] / В.С. Смирнов. – М.: Металлургия, 1973. – 191 с.
13. Сборник задач с решениями по курсу "Теория обработки металлов давлением" [Текст] / С.П. Яковлев, И.А. Смаригов, В.Д. Кухарь [и др.]. – Тула: Тульский политехн. ин-т, 1978. – 48 с.
14. Мейз, Д. Теория и задачи механики сплошных сред [Текст] / Д. Мейз. – М.: Мир, 1974. – 318 с.
15. Мир, 1974. – 318 с.
16. Илюкович, Б.М. Введение в теорию пластичности [Текст] / Б.М. Илюкович. –Киев: Высш. шк., 1983. – 160 с.
17. Гун, Г.Я. Теоретические основы обработки металлов давлением [Текст] / Г.Я. Гун. – М.: Металлургия, 1980. – 456 с.

18. Бабкин А.В., Селиванов В.В. Прикладная механика сплошных сред. В 3 т. М.: МГТУ, 1998. Т.1. 367 с.
19. Башта Т.М., Руднев С.С. и др. Гидравлика, гидромашины и гидроприводы. М.; Машиностроение, 1982. 423 с.
20. Седов Л.И. Введение в механику сплошной среды. М.: Гос. изд. ф-н лит-ры, 1962, 284 с.
21. Новацкий В.К. Волновые задачи теории пластичности. - М.: Мир, 1978. - 320с.
22. Победря Б.Е. – Численные методы в теории упругости и пластичности. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1981. – 344с.
23. Кольский Г. Волны напряжения в твёрдых телах. – М.: Иностранная литература, 1955. – 194с.
24. Сагомоян А.Я. Волны напряжения в сплошных средах. – М., Изд-во Моск. ун-та, - 1985. – 416с.
25. Мейерс М.А. и Мур Л.Е. Ударные волны и явления высокоскоростной деформации металлов: Пер. с англ. - М.: Metallurgia, 1984. - 512с.
26. Панин В.Е. Волновая природа пластической деформации твёрдых тел. // Известия вузов. Физика. - 1990, №2, - с.4-18.
27. Беляев В.И., Ковалевский В.Н., Смирнов Г.В., Чекан В.А. – Высокоскоростная деформация металлов. - Минск:- Наука и техника, 1976, - 224с.
28. Лихачёв В.А., Малинин В.Г., Малинина Н.А. Теория разрушения, основанная на механизмах трансляционно-ротационного массопереноса вещества. // Пластическая деформация сплавов. — Томск: Издательство Томского ун-та. — 1986. — С.6-22.
29. Перлин И.Л., Ерманок М.З. Теория волочения. — М.: Metallurgia, 1971. — 448с.
30. Золкин В.Н. Термовязкоупругое восстановление формы и память металлов // Прогрессивные процессы производства проката из цветных металлов и сплавов. Тематический сборник научных трудов. Гипроцветметобработка. — М.: Metallurgia. — 1990. — С.19-29.
31. Попов В.Л. Неустойчивость одноосной пластической деформации // Пластическая деформация сплавов. — Томск. Издательство Томского ун-та. — 1986. — С.81-85.
32. Кобытев В.С., Колупаева С.Н., Попов Л.Е. Математическое моделирование сдвиговых процессов пластической деформации. Уравнение кинетики пластической деформации // Пластическая деформация сплавов. — Томск. Издательство Томского ун-та. — 1986. — С.23-36.
33. Колупаева С.Н., Матющенко А.В. Математическое моделирование сдвиговых процессов пластической деформации. Пластическая деформация при различных деформирующих воздействиях // Пластическая деформация сплавов. — Томск. Издательство Томского ун-та. — 1986. — С.37-50.
34. J. Camenchi, N. Cristescu, N. Sandru. Contributii privind trefilarea sirmei cu mare viteza // Cercetari metalurgice. — 1979. — V.20. — P.401-406.

35. Перлин И.Л., Ерманок М.З. Теория волочения. М.: Metallurgy, 1971.
36. Грудев А.П., Зильберг Ю.В., Тилик В.Т. Трение и смазки при обработке металлов давлением. М.: Metallurgy, 1982.
37. С.И. Платов, Д.В.Терентьев, Н.А.Клековкина, Б.М.Аитов, В.Ф. Лишевский “Использование волок из синтетических сверхтвёрдых материалов”. Сталь, №7, 2002г.
38. Enghag Per, Larsson Rune, Pettersson Kjell. “An investigation into the forces and friction in wire drawing”. Wire Ind. 2001 69, № 809, с. 272-273, 275-277.
39. В.Н. Золкин. “Общность явлений, возникающих при упругом и пластическом деформировании, при разрушении твёрдых тел, а также при течении жидкости и газа”. Прогрессивные процессы производства проката из цветных металлов и сплавов. Тематический сборник научных трудов. М., “Metallurgy”, 1990г.
40. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. “Теоретическая физика. Т4. Гидродинамика”, М., Наука, 1988г.

Учебное текстовое электронное издание

**Шагивалиева Гульфия Назыргалеевна  
Головизнин Сергей Михайлович**

**ОСНОВЫ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ  
ПРИ ОБРАБОТКЕ МЕТАЛЛОВ ДАВЛЕНИЕМ**

Учебное пособие

1,14 Мб

1 электрон. опт. диск

г. Магнитогорск, 2018 год  
ФГБОУ ВО «МГТУ им. Г.И. Носова»  
Адрес: 455000, Россия, Челябинская область, г. Магнитогорск,  
пр. Ленина 38

ФГБОУ ВО «Магнитогорский государственный  
технический университет им. Г.И. Носова»  
Кафедра металлургии и стандартизации  
Центр электронных образовательных ресурсов и  
дистанционных образовательных технологий  
e-mail: ceor\_dot@mail.ru