Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова»

Е.Н. Гусева

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИИ

Утверждено Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебно–методического пособия

Магнитогорск
2018

УДК 512
519.2
ББК У.в 6

Рецензенты:

учитель информатики и ИКТ,
завуч по учебно-воспитательной работе
МОУ «Средняя общеобразовательная школа №28»
г. Магнитогорска
Ю.Н. Кузнецова

кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры прикладной математики и информатики,
ФГБОУ ВО «Магнитогорский государственный технический
университет им. Г.И. Носова»
Е.Г. Трофимов

Гусева Е.Н.
Основы математической обработки информации [Электронный ресурс] : учебно-методическое пособие / Елена Николаевна Гусева ; ФГБОУ ВО «Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова». – Электрон. текстовые дан. (1,54 Мб). – Магнитогорск : ФГБОУ ВО «МГТУ им. Г.И. Носова», 2018. – 1 электрон. опт. диск (CD-R). – Систем. требования : IBM PC, любой, более l GHz ; 512 Мб RAM ; 10 Мб HDD ; MS Windows XP и выше ; Adobe Reader 8.0 и выше ; CD/DVD-ROM дисковод ; мышь. – Загл. с титул. экрана.
ISBN 978-5-9967-1166-6

Учебно-методическое пособие содержит основы теоретических знаний по дисциплине «Основы математической обработки информации», лабораторные работы, а также контрольную работу по курсу.

Издание адресовано студентам и бакалаврам заочной формы обучения высших учебных заведений, обучающимся по направлениям: 44.03.05 «Педагогическое образование» с профилями «Иностранный язык», «Информатика и экономика»; 44.03.01 «Педагогическое образование» с профилями «Начальное образование и информатика», «Химия», «Физическая культура»; 44.03.03 «Специальное дефектологическое образование» с профилями «Дошкольная дефектология», «Логопедия», «Начальное образование» и др.

УДК 512
519.2
ББК У.в 6

ISBN 978-5-9967-1166-3

Содержание

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

ОБРАБОТКА, КОДИРОВАНИЕ И ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ИНФОРМАЦИИ С ПОМОЩЬЮ КОМПЬЮТЕРА

1. Информация, данные, сигналы, носители информации
2. Кодирование информации
3. Эволюция ЭВМ и обработка данных
4. Представление информации в памяти компьютера
5. Математика как наука

1. Информация, данные, сигналы, носители информации

С давних времен люди стремились облегчить свой труд. С этой целью создавались орудия труда, машины и механизмы, усиливающие физические возможности человека. Компьютер был изобретен в середине XX века для усиления умственных возможностей человека, т. е. для работы с информацией.

Информация – сведения об объектах и явлениях окружающей среды, их параметрах, свойствах и состоянии.

Данные - это информация, представленная в формализованном виде и предназначенная для обработки ее техническими средствами, например ЭВМ.

Информация это обработанные данные, представленные в виде, пригодном для принятия решений получателем. Носителями информации могут являться любые объекты и системы материального мира. Материя проявляет себя нам либо в виде вещества, которое характеризуется массой, либо в виде поля, которое характеризуется энергией. Часто носителями информации являются электромагнитные волны, воспринимаемые человеческими органами чувств как свет и тепло.

Сигнал является материальным носителем информации, которая передается от источника к потребителю. Он может быть дискретным и непрерывным (аналоговым)**.**

Сигнал называется *непрерывным*, если его параметры могут принимать любые значения в пределах некоторого интервала: речь, музыка, изменение напряжения, температуры, давления, скорости.

Сигнал называется *дискретным*, если его параметры принимают конечное число значений в пределах некоторого интервала. Все модели реальных процессов в наших рассуждениях о них – дискретны. Мы наносим цифровую шкалу на столбик термометра, цифры на циферблат часов и т.д. Поэтому дискретные сигналы называют также цифровыми сигналами.

Непрерывный сигнал может принимать бесконечное множество значений, а количество значений дискретного сигнала ограничено. Разнообразие источников и потребителей информации привело к существованию различных форм ее представления: символьной, текстовой, графической, звуковой.

Символьная форма основана на использовании символов - букв, цифр, знаков и т.д. Эта форма является наиболее простой, но практически она применяется для передачи несложных сигналов о различных событиях. Примером может служить зеленый свет уличного светофора, который сообщает о возможности начала движения пешеходам или водителям автотранспорта.

2. Кодирование информации

Информация существует в виде: текстов, рисунков, чертежей, фотографий; световых или звуковых сигналов; радиоволн; электрических и нервных импульсов; магнитных записей; жестов и мимики; запахов и вкусовых ощущений; хромосом, посредством которых передаются по наследству признаки и свойства организмов и т.д.

Для работы с данными различных типов необходимо унифицировать их форму представления (привести к единой форме представления). Для этого используется прием кодирования – выражение данных одного типа через данные другого типа. Так, например, язык – система кодирования понятий для выражения мыслей посредством речи. Азбука – система кодирования компонентов языка с помощью графических символов. Примерами также могут служить запись математических выражений, телеграфная азбука, морская флажковая азбука.

Информация в ЭВМ кодируется в двоичной или в двоично-десятичной системе счисления. Двоичное кодирование основано на представлении данных последовательностью всего двух знаков – 0 и 1. Эти знаки называются двоичными цифрами, по-английски – binary digit или сокращенно bit (бит).

Бит – это наименьшая единица информации, которая выражает два понятия: 1 или 0 (да или нет).

В компьютерах используется двоичная система потому, что она имеет ряд преимуществ перед другими системами:

- для ее реализации нужны технические устройства с двумя устойчивыми состояниями а не 10 как в десятичной системе счисления;
- представление информации посредством только двух состояний надежно и помехоустойчиво;
- возможно применение аппарата алгебры логики для выполнения логических преобразований информации;
- двоичная арифметика намного проще десятичной.

Тремя битами можно закодировать восемь различных значений: 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111, четырьмя -16 символов, пятью – 32 символа.

Увеличивая на единицу количество разрядов в системе двоичного кодирования, увеличиваем в два раза количество значений, которое может быть выражено в данной системе, т.е. общая формула имеет вид:

$$\mathbf{N = 2^i},$$

где N – количество кодируемых значений,

i – разрядность двоичного кодирования или длина кода.

Информационная ёмкость одной ячейки памяти, способной находиться в двух различных состояниях. Наличие сигнала (1) и отсутствие сигнала (0), принято за единицу измерения количества информации - 1 бит.

1 бит - единица измерения информационной емкости и количества информации.

На физическом уровне бит является ячейкой памяти, которая в каждый момент времени находится в одном из двух состояний: «0» или «1». В технике под количеством информации понимают количество кодируемых, передаваемых или хранимых символов.

Бит – удобная единица для хранения информации в компьютере, но не очень удобная для обработки информации. Поэтому появилась новая единица измерения информации - байт.

Байт - это восьмиразрядный двоичный код, с помощью которого можно представить один символ. С помощью одного байта можно выразить 256 различных единиц информации:

Единицы измерения информации:

1 Кб (килобайт)= 2^{10} байт $\approx$1 000 байт
1 Мб (мегабайт)= 2^{20} байт $\approx$1 000 000 байт
1 Гб (гигабайт) = 2^{30} байт $\approx$1 000 000 000 байт
1 Тб (терабайт) = 2^{40} байт $\approx$1 000 000 000 000 байт

Кодирование - это процесс преобразования информации в иную форму, удобную для обработки, хранения или передачи.

Кодирование информации стало особенно актуальным в связи с появлением множества технических устройств для обработки и передачи информации. Например, с появлением телеграфа возникала азбука Морзе. Обычно для кодирования информации используется определенный алфавит (набор отличных друг от друга символов). В компьютерной технике чаще всего используется двоичный алфавит (0,1) с помощью которого можно закодировать текст на естественном человеческом языке, а затем хранить и обрабатывать с помощью компьютера. На физическом уровне бит является ячейкой памяти, которая в каждый момент времени находится в одном из двух состояний: «**0**» или «**1**». С помощью последовательности из нескольких двоичных цифр легко можно представить любые цифры и буквы, то есть закодировать эти символы.

Длина кода - это количество знаков, которое используется для представления кодируемого символа.

Кодируется информация любого вида – числовая, текстовая, графическая, звуковая. Кодирование информации может быть различным, в зависимости от используемой системы кодирования.

Цели кодирования информации: повышение скорости передачи и обработки данных, защита информации от искажений, надежное хранение информации, удобство физической реализации (двоичное кодирование в ЭВМ).

Представление информации в памяти компьютера

Представление информации в виде текста было одним из первых доступных для обработки на компьютере и до сих пор остается одним из наиболее универсальных.

Текстом в вычислительной технике понимают такое представление информации, в котором записаны слова некоторого языка, доступные для чтения человеком. Любой язык имеет свой алфавит - допустимый набор символов. Для хранения двоичного кода одного символа обычно выделяется

1 байт = 8 бит, иногда 2 байта или 16 бит. Каждый бит принимает значение 0 или 1, количество их возможных сочетаний в байте равно $2^8 = 256$. Значит, с помощью 1 байта можно получить 256 разных двоичных кодовых комбинаций и отобразить с их помощью 256 различных символов. С помощью 2 байт можно получить 65536 разных двоичных кодов и отобразить с их помощью 65536 различных символов.

Такое количество символов вполне достаточно для представления текстовой информации, включая прописные и заглавные буквы русского и латинского алфавита, цифры, знаки, символы и т.д. Поскольку компьютер работает только с двоичным кодом для записи и обработки текста требуется взаимно-однозначно сопоставить символы и двоичные коды.

Для определения длины кода символа при использовании одного естественного алфавита достаточно подсчитать наиболее короткую длину двоичной комбинации, например английского текста. Мощность алфавита 26 букв следует умножить на 2 (прописные и строчные) – итого 52; 10 цифр, считать, 10 знаков препинания; 10 разделительных знаков (три вида скобок, пробел и др.), знаки математических действий, несколько специальных символов (типа #, $, & и др.) – итого примерно 100. Точный подсчет здесь не нужен, поскольку нам предстоит решить простейшую задачу: имея, скажем, равномерный код из групп по N двоичных знаков, сколько можно образовать разных кодовых комбинаций. Ответ очевиден $N = 2^i$. Итак, при $i = 6$ $N = 64$ – явно мало, при $i = 7$, $N = 128$ – вполне достаточно.

Однако, для кодирования нескольких естественных алфавитов (плюс все отмеченные выше знаки) и этого недостаточно. Минимально достаточное значение N в этом случае 8; имея 256 комбинаций двоичных символов, вполне можно решить указанную задачу. Поскольку 8 двоичных символов составляют 1 байт, то говорят о системах “байтового” кодирования.

В качестве международного стандарта для кодирования символов принята кодовая таблица ASCII (American Standard Code for Information Interchange), которая кодирует первую половину символов с числовыми кодами от 0 до 127 (коды от 0 до 32 отведены не символам, а функциональным клавишам).

Национальные стандарты кодировочных таблиц включают международную часть кодовой таблицы без изменений, а во второй половине содержат коды национальных алфавитов, символы псевдографики и некоторые математические знаки. К сожалению, в настоящее время существуют пять различных кодировок кириллицы (КОИ8-Р, Windows. MS-DOS, Macintosh и ISO), что вызывает дополнительные трудности при работе с русскоязычными документами.

Представление чисел в памяти ЭВМ

Числа в памяти компьютера хранятся также с помощью двоичного кода. Для представления десятичных чисел в ЭВМ их необходимо переводить в двоичную систему счисления.

Система счисления - способ кодирования числовой информации, т.е. способ записи чисел с помощью некоторого алфавита, символы которого называют цифрами.

Различают позиционные и непозиционные системы счисления. В любой системе счисления для представления чисел выбираются некоторые символы (их называют цифрами), а остальные числа получаются в результате каких-либо операций над цифрами данной системы счисления.

Позиционная система счисления - это система, в которой величина числа зависит от положения каждой цифры в этом числе.

Примеры позиционных систем счисления: вавилонская, система счисления индейцев Майя, десятичная, двоичная, восьмеричная, шестнадцатеричная. В любой системе счисления для представления чисел выбираются некоторые символы, называемые *базисными числами*, а все остальные числа получаются в результате каких-либо операций из базисных чисел данной системы счисления. Двоичная, восьмеричная, десятеричная системы счисления являются позиционными.

Основание позиционной системы счисления — количество различных цифр, используемых для изображения чисел в данной системе счисления. Современные системы счисления, десятичная, восьмеричная и шестнадцатеричная являются позиционными. Например, десятичное число 555. В нем первая цифра 5 означает пять сотен, вторая – пять десятков, третья – пять единиц. Такие системы имеют более частое применение на практике.

Десятичная система счисления имеет основание равное 10, а ее алфавит составляют десять цифр: 0, 1, 2, …., 9. Ниже приведены примеры алфавитов некоторых позиционных систем (таблица 1). Для записи чисел в позиционной системе счисления с основанием p нужно иметь алфавит из p цифр. Обычно для этого при $p<10$ используют p первых арабских цифр, при $p>10$ к десяти арабским цифрам добавляют латинские буквы.

Таблица 1

Примеры алфавитов нескольких систем счисления

Основание	Название	Алфавит
q=2	двоичная	0 1
q=8	восьмеричная	0 1 2 3 4 5 6 7
q=16	шестнадцатеричная	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 A B C D E F

Для иллюстрации позиционного характера системы числа удобно представлять в развернутой поразрядно форме. Номер позиции (разряд) растет влево от десятичной точки и уменьшается вправо, принимая отрицательное значение.

В непозиционных системах счисления значение числа не зависит от положения цифры в числе. Примерами непозиционных систем являются: унарная, греческая, римская, индейцев Майя.

В вычислительной технике широко применяют двоичную, восьмеричную и шестнадцатеричную систему счисления. Так, в десятичной системе счисления, основание которой равно 10, а базисными являются десять арабских цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Двоичная система счисления имеет основание 2, и, следовательно, ее алфавит состоит из двух цифр - 0 и 1; алфавит восьмеричной системы счисления составляют цифры 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7; шестнадцатеричной - десять арабских цифр от 0 до 9 и еще шесть символов - A (10), B (11), C (12), D (13), E (14), F (15).

Перевод чисел из позиционных систем счисления в десятичную систему

Пусть **N** – это какое-то число в позиционной системе счисления, а буквами $\mathbf{a_m}$**-** $\mathbf{a_s}$ обозначим цифры этой системы счисления. Тогда запись числа **N** будет выглядеть так:

$$\mathbf{N = a_m a_{m-1} a_{m-2} \ldots a_1 \; a_0 \; a_{-1} \; a_{-2} \ldots a_s},$$

Формула (1), по которой можно определить значение числа в позиционной системе будет выглядеть так:

$$\mathbf{N = a_m * q^m + a_{m-1} * q^{m-1} + a_{m-2} * q^{m-2} + \ldots + a_1 * q^1 + a_0 * q^0 + a_{-1} * q^{-1} + a_{-2} * q^{-2} + \ldots + a_s * q^{-s}} \qquad (1).$$

В формуле **q** – это основание системы счисления.

Максимальное целое число, которое может быть представлено в m разрядах:

$$\mathbf{N_{max} = q^m - 1.}$$

Минимальное число, которое можно записать в S разрядах дробной части

$$\mathbf{N_{min} = q^{-s}}.$$

Десятичное число 385,65 в развернутой форме будет выглядеть следующим образом:

$$3^2 8^1 5^0,6^{-1} 5^{-2}_{10} = 3*10^2 + 8*10^1 + 5*10^0 + 6*10^{-1} + 5*10^{-2}$$

Для чисел в двоичной, восьмеричной и шестнадцатеричной системе счисления по формуле (1) можно выполнить перевод этих чисел в десятичную систему.

Двоичное число:

$$\mathbf{1011_2=1*2^3+0*2^2+1*2^1+1*2^0=11_{10}.}$$

Восьмеричное число:

$$\mathbf{724{,}3_8}=7*\mathbf{8^2+2*8^1+4*8^0+3*8^{-1}=468{,}375_{10}}.$$

Шестнадцатеричное число:

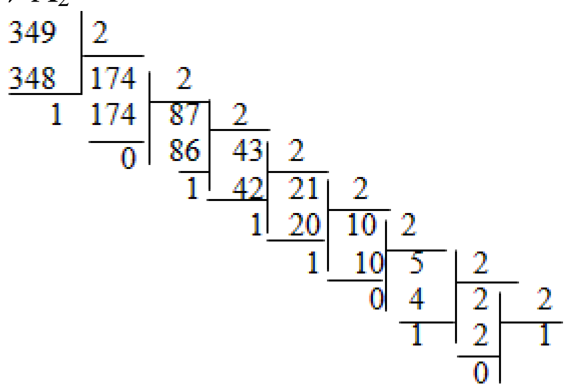
$$\mathbf{5D01_{16}=5*16^3+D*16^2+0*16^1+1*16^0=23809_{10}}.$$

Перевод чисел из десятичной системы счисления в 2-ую, 8-ую и 16-ую системы счисления

Правило перевода чисел: для перевода числа из одной позиционной системы в другую нужно делить число на основание новой системы счисления, затем частное от деления тоже делить на основание новой системы до тех пор, пока оно не станет меньше основания новой системы счисления.

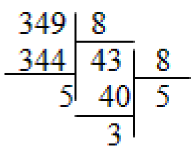
Например, нужно число $A=349_{10}$ перевести в двоичную, восьмеричную и шестнадцатеричную системы счисления.

1. $A=349_{10} \rightarrow A_2$



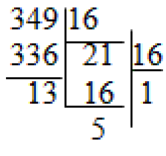
Ответ: $A_2=101011101$.

2. $A=349_{10} \rightarrow A_8$



Ответ: $A_8=535$.

3. $A=349_{10} \rightarrow A_{16}$



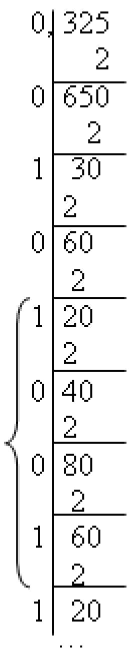
Ответ: $A_{16}=15D$.

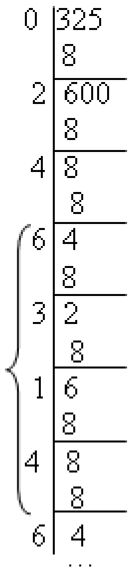
Перевод дробных чисел из десятичной системы счисления в двоичную, восьмеричную, шестнадцатеричную системы счисления

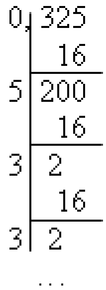
Перевод десятичных дробей в другие позиционные системы счисления можно выполнять по следующему правилу: дробную часть числа нужно умножать на основание новой системы счисления и выписывать целую часть произведения, само же произведение опять умножать на новое основание до тех пор, пока дробная часть не превратится в ноль или не обнаружится период.

Примеры

Нужно перевести в 2-ую, 8-ую и 16-ую системы счисления десятичную дробь $0{,}325_{10}$

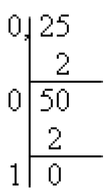


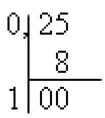


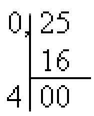


$0{,}325_{10}=0{,}010(1001)_2$ $0{,}325_{10}=0{,}24(6314)_8$ $0{,}325_{10}=0{,}5(3)_{16}$

Переведем дробь 0,25 в двоичную, восьмеричную и шестнадцатеричную системы счисления:







$0{,}25_{10}=0{,}01_2$ $0{,}25_{10}=0{,}1_8$ $0{,}25_{10}=0{,}4_{16}$

Обыкновенные правильные дроби переводятся иначе. Числитель правильной дроби нужно разложить на слагаемые, которые являются степенями основания новой системы счисления, представить дробь в виде суммы дробей, затем сократить эти слагаемые и записать числители слагаемых дробей в позицию числа, соответствующую степени знаменателя.

Примеры

Дана правильная дробь 29/32 . Представьте ее в двоичной системе счисления.

$$\frac{29}{32}=\frac{16+8+4+1}{2^5}=\frac{16}{32}+\frac{8}{32}+\frac{4}{32}+\frac{1}{32}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}=0{,}11101_2$$

Дана дробь 60/64. Перевести ее в восьмеричную и шестнадцатеричную системы счисления:

$$\frac{60}{64}=\frac{32+16+8+4}{2^6}=\frac{32}{64}+\frac{16}{64}+\frac{8}{64}+\frac{4}{64}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=0{,}1111_2$$

Представление действительных чисел с плавающей точкой

При представлении в памяти компьютера чисел в естественной форме устанавливается фиксированная длина разрядной сетки. Количество разрядов, отводимое на число, зависит от величины числа, а также от наличия у него знака. Точку можно зафиксировать в начале, середине или конце разрядной сетки. При этом распределение разрядов между целой и дробной частями остается неизменным для любых чисел. В связи с этим существует другое название естественной формы представления чисел — *с фиксированной точкой*. В современных компьютерах эта форма используется для представления целых чисел.

Обычно целые числа занимают в памяти компьютеров один, два или четыре байта. Один, как правило, старший бит отводится под знак числа. Знак положительного числа "+" кодируется нулем, а знак отрицательного числа "-" — единицей. Целые числа без знака в двухбайтовом формате могут принимать значения от 0 до 2^{16}-1 (до 65535), а со знаком — от -2^{15} до +2^{15}-1, т.е. от -32768 до 32767.

Память	*1 байт*	*2 байта*	*4 байта*
Без знака	0..256	0..65535	0..4 миллиардов
Со знаком	-128..127	-32768.. 32768	-2 147 483 648.. 2 147 483 647

Например, целое десятичное число 19 (10011_2) в 16-тиразрядной представлении в памяти компьютера записывается так:

15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1

Достоинствами естественной формы являются простота и наглядность представления чисел, простота алгоритмов реализации операций, а, следовательно, простота устройств и высокая скорость выполнения операций; недостатком — конечный диапазон представления величин. Неудобство представления чисел в форме с фиксированной точкой проявляется при решении задач, в которых фигурируют как очень малые, так и очень большие числа.

Запись чисел с плавающей точкой. Обработка очень больших и очень маленьких чисел производится в экспоненциальной форме. В этом случае положение запятой в записи числа может изменяться. Поэтому представление в памяти чисел в экспоненциальной форме называется ***представлением*** с плавающей точкой. Любое число А в экспоненциальной форме представляется в виде:

$$\mathbf{A = m_A \times q^p,}$$

Например, $15000_{10}=1{,}5*10^4=1{,}5E+04$

$0{,}0012345_{10}=0{,}12354*10^{-2}=0{,}12354E-02$

где m_A — мантисса числа,

q — основание системы счисления,

P — порядок числа.

Порядок и мантисса — целые числа, которые вместе со знаком дают представление числа с плавающей точкой. Для однозначности представления чисел с плавающей точкой используется нормализованная справа форма, при которой мантисса отвечает условию (то есть мантисса числа должна быть меньше 1):

$$\mathbf{q^{-1} \le |m_A| < 1.}$$

Это означает, что мантисса должна быть правильной дробью и иметь после запятой цифру, отличную от нуля. Например:

$$\mathbf{0{,}76*10^{-3}, \qquad 0{,}11*2^{-9}.}$$

Число в форме с плавающей точкой занимает в памяти компьютера от четырех до дести байт. При записи числа с плавающей точкой выделяются разряды для хранения знака мантиссы, знака порядка, порядка и мантиссы. Любое вещественное число в современных компьютерах представляется в экспоненциальной форме с нормализованной мантиссой. При этом мантисса является правильной двоичной дробью, а порядок — целым числом.

Пример числа с плавающей запятой из 16 двоичных разрядов. Старший бит № 15 отведен под знак, пять битов с 14 по 9 отведены под порядок, остальные биты занимает мантисса.

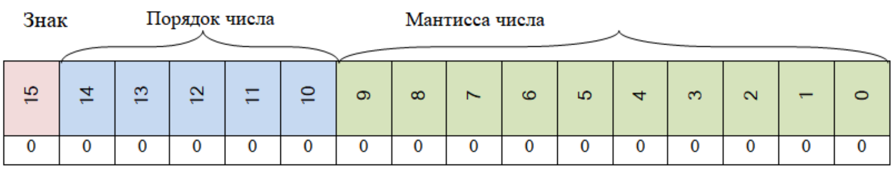


Рис. 1 - Число с плавающей запятой из 16 двоичных разрядов

В зависимости от точности числа (половинная, одинарная, двойная или четверная) на мантиссу и порядок может отводиться различное число бит. Например, для числа двойной точности и 32-битного ПК отводятся два машинных слова в сумме 64 бита из них 11 бит занимает порядок и 52 бита мантисса. Для упрощения вычислений и сравнения действительных чисел значение порядка в ЭВМ хранится в виде **смещенного числа**, т.е. к настоящему значению порядка перед записью его в память прибавляется смещение. Смещение выбирается так, чтобы минимальному значению порядка соответствовал нуль. Например, для типа Double порядок занимает 11 бит и имеет диапазон от 2^{-1023} до 2^{+1023}, поэтому смещение равно 1023_{10} или 1111111111_2. Наконец, бит с номером 63 указывает на знак числа.

Для получения представления действительного числа в памяти ЭВМ используют алгоритм:

1) переводят модуль десятичного числа в двоичную систему счисления;
2) нормализуют число, то есть, перемещают запятую в числе так, что целая часть равна единице в двоичной системе и записывают его в виде $M \times 2^P$, где M –мантисса и p -порядок, записанный в десятичной системе счисления;
3) прибавить к порядку смещение и перевести смещенный порядок в двоичную систему счисления;
4) учитывая знак заданного числа (0 - положительное; 1 - отрицательное), выписать его представление в памяти ЭВМ.

Например, переведем число $-278{,}125_{10}$ в машинный код.

1) Двоичная запись модуля этого числа имеет вид $100010110{,}001_2$.

2) Нормализуем число $100010110{,}001_2$=1,00010110001*2^8.
3) Получаем смещенный порядок 8+1023=1031 и переводим его в двоичную систему 1031_{10}=100 0000 0111_2
4) Поскольку число отрицательное, записываем в 63-ий бит значение 1.

Получаем представление этого числа в памяти ЭВМ

	Знак	Порядок	**Мантисса**
	1	10000000111	**0001011000**1000000000000000000000000000000000000000000
№ бита	63	62..52	51..0

3. Эволюция ЭВМ и обработка данных

Потребность в автоматизации обработки данных, в том числе вычислений, возникла очень давно. А по мере роста потребностей и задач, которые ставило перед собой человечество, росло значение и необходимость вычислений. Эта необходимость и заставила искать пути механизации счета.

Как известно, первая ЭВМ была изобретена в 1945 году, она называлась ЭНИАК (17000 электронных ламп, занимаемая площадь – 300 м^2).

В 50-60-е годы первые ЭВМ могли только вычислять. Процесс обработки информации состоял в операциях над числовыми данными.

В 70-е годы компьютер «научился» работать с текстом. Пользователь получил возможность редактировать и форматировать текстовые документы.

В 80-е годы появились компьютеры, способные работать с графикой. Сейчас компьютерная графика широко используется в бизнесе (построение диаграмм, графиков и так далее), в компьютерном моделировании, при подготовке презентаций, при создании Web-сайтов, в рекламе на телевидении, в анимационном кино и так далее.

В 90-е годы компьютеры начали обрабатывать звук. Любой пользователь современного ПК может воспользоваться стандартными приложениями Windows для прослушивания, записи и редактирования звуковых файлов.

По своему назначению компьютер - универсальное техническое средство для работы человека с информацией. По принципам устройства компьютер - это модель человека, работающего с информацией.

4. Представление информации в памяти компьютера

Для того чтобы числовая, текстовая, графическая и звуковая информация могли обрабатываться на компьютере, они должны быть представлены в форме данных. Данные хранятся и обрабатываются в компьютере на машинном языке, то есть в виде последовательностей нулей и единиц.

Информация, представленная в компьютерной форме (на машинном языке) и обрабатываемая на компьютере, называется данными.

Таблица 2

Представление информации человеком и компьютером

Тип информации	Человек	Компьютер
Числовая	Числа в 10-ой системе 1673	11010001001
Текстовая	Последовательность букв М – русская буква	11101101
Графическая	Цветные точки	00000000 – код черной точки
Звуковая	Звук max громкости	11111111

Под обработкой информации на компьютере понимают любые действия, которые преобразуют информацию из одного состояния в другое. Компьютер имеет специальное устройство, называемое процессором, которое предназначено для быстрой обработки данных, со скоростями, доходящими до миллиардов операций в секунду. Данные для обработки процессор получает из оперативной памяти – от устройства, для временного хранения как входных, так и выходных данных. Процессор получает данные из оперативной памяти и записывает результаты в нее.

Основы математической обработки информации – это дисциплина, которая базируется на областях:

- дискретная математика;
- линейная алгебра;
- логика;
- теория вероятностей;
- комбинаторика;
- статистика;
- информационные технологии.

5. Математика как наука

Математика – наука о количественных отношениях и пространственных формах действительного мира (Фридрих Энгельс).

Математика - наука о структурах, порядке и отношениях, сложившаяся на основе подсчёта, измерения и описания формы объектов. Математические объекты создаются путём идеализации свойств реальных или других математических объектов и записи этих свойств на формальном языке.

Периоды развития математики:

- Зарождение математики – появление счета и математических операций: сложения, вычитания, умножения, деления (VI-V вв. До н.э. Древний Египет, Вавилон);
- Элементарная математика (5 в. До н.э. До 17 в. Н.э.), Древняя Греция: Пифагор, Аристотель, Евклид, Архимед, Фалес, Демокрит, Птолемей и др., Индия, Китай, Древний Восток;
- Математика переменных величин (XVII – начало XIX в.), Р.Декарт, И.Ньютон, Г.Лейбниц: функции, производные, дифференцирование, интегрирование, уравнения с неизвестными;
- Современная математика (вторая половина XIX в. По наше время) – мат. Логика, теория множеств, геометрия пространств.

В современной науке разработана база математических методов решения задач в различных областях и существуют программные и аппаратные средства, позволяющие упростить процесс решения различных задач.

Рис. 2.-Классификация математических методов

Математические методы обработки информации позволяют решать сложнейшие задачи человечества в различных областях знаний, в науке, технике, в экономике и на производстве.

АКСИОМАТИЧЕСКИЙ ПОДХОД

1. Понятие, аксиома, теорема
2. Требования к аксиомам
3. Математические суждения и умозаключения

1.Понятие, аксиома, теорема

В основе построения математической теории лежит аксиоматический метод. Базой научной теории являются некоторые исходные положения, называемые аксиомами, а все остальные положения теории получаются, как логические следствия аксиом.

Составляющие аксиоматического метода:

- основные понятия;
- определения;
- аксиомы;
- теоремы и их доказательство.

Понятие - это отражение в сознании человека отличительных особенностей предметов и явлений, их общих и специфических признаков, выраженное словом или группой слов. Понятие представляет собой высший уровень обобщения, присущий только словесно-логическому виду мышления. Понятия бывают конкретные и абстрактные.

Конкретные понятия отражают предметы, явления, события окружающего мира, абстрактные отражают отвлеченные идеи. Например, «человек», «осень», «праздник» – конкретные понятия; «истина», «красота», «добро» – понятия абстрактные. Содержание понятий раскрывается в суждениях, которые также всегда имеют словесную форму.

Аксиома – утверждение, принимаемое без доказательств.

Примеры аксиом:

- Какова бы не была прямая, существуют точки, принадлежащие этой прямой, и точки, не принадлежащие ей.
- Через любые две точки можно провести прямую, и только одну.
- Из трех точек на прямой одна и только одна лежит между двумя другими.
- Каждый отрезок имеет определенную длину, большую нуля.

Аксиоматический метод в математике применял Евклид, хотя термин «аксиома» часто встречается и у Аристотеля: «… ибо невозможны доказательства для всего: ведь доказательство должно даваться исходя из чего-то относительно чего-то и для обоснования чего-то. Таким образом, выходит, что все, что доказывается, должно принадлежать к одному роду, ибо все доказывающие науки одинаково пользуются аксиомами.

«… Аксиома обладает наивысшей степенью общности и суть начала всего. «Началами доказательства я называю общепринятые положения, на основании которых все строят свои доказательства.

«…О началах знания не нужно спрашивать «почему», а каждое из этих начал само по себе должно быть достоверным. Правдоподобно то, что кажется правильным всем или большинству людей или мудрым – всем или большинству из них или самым известным и славным». (Аристотель).

Таким образом, аксиоматический метод сводится к следующему:

1)выбирается множество принимаемых без доказательств аксиом, причем входящие в аксиомы понятия явно не определяются в теории;

2) фиксируются правила определения и правила вывода данной теории, позволяющие логически выводить одни предположения из других;

3) все теоремы выводятся из аксиом на основе этих правил.

Таким методом в настоящее время построены различные разделы математики (геометрия, теория вероятностей, алгебра и др.), физики (механика, термодинамика); делаются попытки аксиоматизации химии и биологии.

2.Требования к аксиомам

Требования к аксиомам сформулировал Карл Раймунд Поппер – философ и социолог 1902 -1994:

«Теоретическую систему можно назвать аксиоматизированной, если сформулировано множество аксиом, удовлетворяющее следующим четырем фундаментальным требованиям:

1) система аксиом должна быть непротиворечивой (то есть в ней не должно быть ни самопротиворечивых аксиом, ни противоречий между аксиомами). Набор аксиом называется непротиворечивым, если нельзя доказать одновременно и некое утверждение, и его отрицание.

2) аксиомы данной системы должны быть независимыми, то есть система не должна содержать аксиом, выводимых из остальных аксиом.

Эти два условия относятся к самой системе аксиом.

Что же касается отношения системы аксиом к основной части теории, то аксиомы должны быть:

3) достаточными для дедукции всех высказываний, принадлежащих к аксиоматизируемой теории, и

4) необходимыми в том смысле, что система не должна содержать излишних предположений. <…> Я считаю допустимыми две различные интепретации любой системы аксиом. Аксиомы можно рассматривать либо (1) как конвенции, либо (2) как эмпирические, или научные гипотезы»

Куртом Гёделем доказана невозможность полной аксиоматизации достаточно развитых научных теорий (например, арифметики натуральных чисел), откуда следует невозможность полной формализации научного знания. При исследовании естественнонаучного знания аксиоматический метод выступает в форме гипотетико-дедуктивного метода.

Гедель К.Ф. - австрийский логик, математик и философ математики, наиболее известный сформулированной и доказанной им теоремой о неполноте.

Неполнота означает наличие высказываний, которые нельзя ни доказать, ни опровергнуть, исходя из аксиом этой теории.

Противоречивость — возможность доказать любое высказывание: как истинное, так и ложное.

Теорема – утверждение, нуждающееся в доказательстве. Примеры теорем:

О параллельных прямых: если накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны. И наоборот, если прямые параллельны, то накрест лежащие углы равны.

Теорема Пифагора: В прямоугольном треугольнике квадрат длины гипотенузы равен сумме квадратов длин катетов $c^2=a^2+b^2$

Теорема Виета: для приведенного квадратного уравнения

$x^2 + px + q = 0$ сумма корней равна коэффициенту p, взятому с обратным знаком, произведение корней равно свободному члену q: $x_1 + x_2 = -p$; $x_1 \cdot x_2 = q$.

Доказательство – это рассуждение, которое показывает, что истинность утверждения логически вытекает из истинности предыдущих теорем или аксиом.

3. Математические суждения и умозаключения

Каждая наука по существу представляет собой определенную систему суждений об объектах, являющихся предметом ее изучения. Каждое из суждений оформляется в виде некоторого предложения, выраженного в терминах и символах, присущих этой науке.

Математика также представляет собой определенную систему суждений, выраженных в математических предложениях посредством математических или логических терминов или соответствующих им символов. Математические термины обозначают те понятия, которые составляют содержание математической теории, логические термины обозначают логические операции, с помощью которых из одних математических предложений строятся другие математические предложения, из одних суждений образуются другие суждения, вся совокупность которых и составляет математику как науку.

В мышлении понятия не выступают разрозненно, они определенным способом связываются между собой. Формой связи понятий друг с другом является суждение.

Суждение – форма мышления, в которой что-либо утверждается или отрицается о предмете, его свойствах или отношениях между предметами.

Если суждения правильно отображают эти объективно существующие зависимости между предметами, то мы такие суждения считаются истинными, в противном случае суждения являются ложными. Так, например, суждение «всякий ромб является параллелограммом» - истинное суждение; а суждение «всякий параллелограмм является ромбом» - ложное суждение. Суждение имеет свою языковую оболочку – предложение, однако не всякое предложение является суждением.

Умозаключением называется процесс получения нового суждения вывода из одного или нескольких данных суждений. Например:

1) Диагональ параллелограмма делит его на два равных треугольника.

2)Сумма внутренних углов треугольника равна 180°.

Вывод или умозаключение: Сумма внутренних углов параллелограмма 360°.

Познавательное значение математических умозаключений чрезвычайно велико. Они «расширяют» границы наших знаний об объектах и явлениях реального мира в силу того, что большая часть математических предложений является выводом из сравнительно небольшого числа основных суждений, которые получены, как правило, путем непосредственного опыта и в которых отражены наши наиболее простые и общие знания об его объектах.

Любая научная область основывается на логических положениях, которые в свою очередь обязательно содержит: понятия, суждения и умозаключения (рис.3).

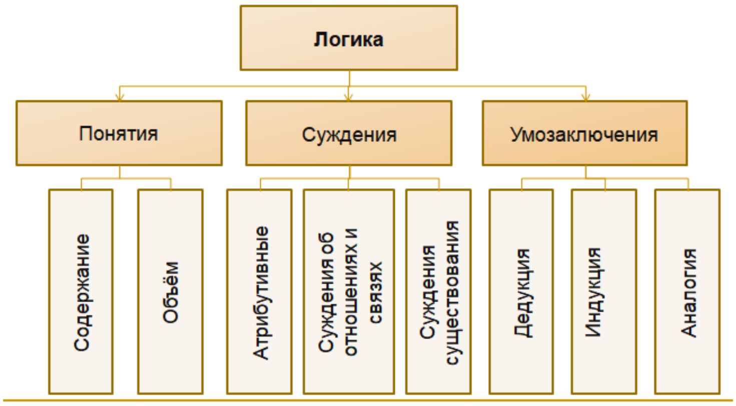


Рис. 3.- Элементы логической теории

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

1.Понятие множества
2.Операции над множествами
3.Законы алгебры множеств

1.Понятие множества

Множество – это некоторая совокупность элементов, класс отличающихся друг от друга объектов, объединенных каким-либо общим свойством.

Элементы множества – это объекты, которые образуют данное множество, могут обладать некоторыми свойствами и находиться в некоторых отношениях между собой или с элементами других множеств. Множества обозначают заглавными, а элементы множеств – строчными латинскими буквами или строчными латинскими буквами с индексами.

Запись $A=\{a,b,d,h\}$ означает, что множество A состоит из четырех элементов a, b, d, h.

Утверждение, что конечное множество A состоит из n элементов, записывается так: $A=\{a_1,a_2,...,a_n\}$.

Существует два основных способа задания неупорядоченных множеств:

а) перечисление всех его элементов;

б) описание характеристического (общего) свойства его элементов

Принадлежность элемента множеству обозначается символом принадлежности: $a \in A$ (читают: элемент a принадлежит множеству A). В противном случае обозначают $a \notin A$ (читают: элемент a не принадлежит множеству A).

Элементами множеств могут быть другие множества, тогда эти элементы могут обозначаться заглавными буквами.

Пример

$A = \{D,C\}$,

$D=\{a, b\}$,

$C=\{c, d, e\}$.

При этом $D\in A$, $C\in A$, но $a\notin C$ и $c\notin D$.

$A = \{\{x,y\},z\}$ Эта запись означает, что множество A содержит два элемента: множество $\{x,y\}$ и элемент z.

Конечные и бесконечные множества

Множество называется конечным, если оно содержит конечное число элементов и бесконечным, если оно содержит неограниченное число элементов.

Например, множество $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0\}$ цифр в десятичной системе счисления конечно; множество точек окружности бесконечно.

Упорядоченным считается такое множество, в котором важен порядок следования элементов. Например, упорядоченным является множество, в котором каждый элемент имеет свой порядковый номер. Обозначают упорядоченное множество, как правило, либо круглыми, либо треугольными скобками.

$A=<1,2,3>$, в общем случае: $A=<a_1,a_2,..,a_n>$, $n\in N$; $B=(a,b,c)$.

Описание множества с помощью определяющего свойства:

Множество $X = \{x \mid P(x)\}$, где $P(x)$ означает, что элемент x обладает свойством $P(x)$.

Множество N_{10} всех натуральных чисел, меньших 10 можно задать так:

$$N_{10}=\{x \mid x\in N, x<10\}.$$

Множество A, все элементы которого принадлежат множеству B, называется подмножеством множества B. Обозначение: $A\subset B$; $A\subseteq B$.

Например:

A – множество действительных чисел;

B – множество натуральных чисел.

Множество B является подмножеством множества A.

Неупорядоченные множества равны, если они содержат одинаковый набор элементов. Равные множества — это множества, которые включают в себя одни и те же элементы, то есть являются эквивалентными по отношению друг к другу.

Обозначается $A=B$. Если множества не равны, это обозначается $A\neq B$.

$A=B$ тогда и только тогда, когда из условия $x\in A$ следует $x\in B$ и из условия $y\in B$ следует $y\in A$.

Пусть заданы множества:

$A = \{1,2,3,4,5\}$;

B – множество натуральных чисел от 1 до 5;

$C = \{c \mid 1\leq c \leq 5, c\in N\}$;

$D = \{4,1,5,2,3\}$.

Эти множества содержат один набор элементов, поэтому

$$A=B=C=D$$

Пусть A - множество остатков, получаемых при последовательном делении натуральных чисел $\{3, 4, 5, 6,\ldots\}$ на 3:

$$A=\{0, 1, 2, 0, 1, 2, 0, 1, 2, 0, \ldots\}.$$

Это множество содержит всего три элемента:

$$0, 1, 2.$$

Поэтому его можно записать в виде

$$A=\{0, 1, 2\}.$$

Мощность множества

Число элементов в конечном множестве M называется мощностью M и обозначается $|M|$. Например, мощность множества цифр десятичной системы счисления равна 10.

Пусть задано множество $A=\{x| 5\leq x\leq 10, x\in N\}$, тогда $|A|=6$

Универсальным называется множество, содержащее все возможные элементы, встречающиеся в данной задаче. Универсальное множество обозначается символом U. Универсальное множество U может отличаться для каждой отдельной задачи и определяется условием задачи.

Пустым называется такое множество, которое не содержит никаких элементов. Пустое множество обозначается специальным символом $\varnothing$. Пустое множество $\varnothing$ является подмножеством любого множества, т.е. $\varnothing \subseteq A$, где A – любое множество.

Пустое множество – это множество, поэтому, если некоторое множество A не содержит ни одного элемента, то $A=\varnothing$; $|A|=0$. Запись $A=\{\varnothing\}$ означает, что A содержит один элемент – $\varnothing$, $|A|=1$.

Множество-степень (булеан) – это множество всех подмножеств множества X назовем множеством-степенью X или булеаном и обозначим P

(X). Для произвольного множества X из n элементов его множество-степень P (X) содержит 2^n элементов:

$$|P(X)| = |2^X| = 2^{|X|} = 2^n$$

$$A=\{a, b, c\}.$$

$$2^A=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{b,c\},\{a,c\},\{a,b,c\}\}$$

Пустое множество имеет только одно подмножество – само пустое множество, поэтому $P(\varnothing)=\{\varnothing\}$.

Геометрическая интерпретация множеств

Диаграммы Венна - общее название целого ряда методов визуализации и способов графической иллюстрации, широко используемых в различных областях науки и математики: теория множеств, теория вероятностей.

При решении целого ряда задач Леонард Эйлер использовал идею изображения множеств с помощью кругов. Позднее они встречаются в сочинениях английского логика Джона Венна (1834—1923) в книге «Символическая логика», изданной в Лондоне в 1881 году

Построение диаграммы Венна заключается в разбиении плоскости на 2^n ячеек с помощью n замкнутых фигур (где n – число изображаемых множеств). Каждая фигура на диаграмме представляет отдельное из 2^n подмножеств множество. Индивидуальные отношения между заданными множествами изображают с помощью кругов Эйлера-Венна.

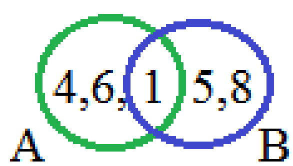
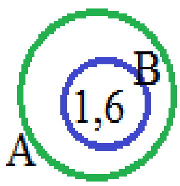
		
$A=\{1,4,6\}$ $B=\{1,5,8\}$ $A\cap B=\{1\}$ Множества A и B пересекаются и имеют общий элемент {1}	$A=\{1,4,6\}$ $B=\{1,6\}$ $B\subset A$ Множество B входит в множество A или является его подмножеством	$A=\{1,4,6\}$ $B=\{3,5,8\}$ $A\neq B=\{1\}$ Множество B и множество A не пересекаются и не содержат общих элементов

Рис.1. Отношения между заданными множествами

Множество 2^U всех подмножеств универсального множества U, с заданными на нем четырьмя операциями, составляют алгебру множеств.

Объединение множеств

Объединение (сумма) $A \cup B$ есть множество, которое содержит все элементы, входящие либо в A, либо в B, либо в A и B одновременно. $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$.

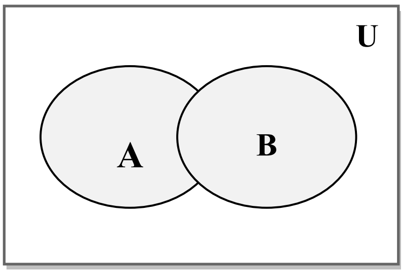


Рис. 4 - Объединение множеств A и B

Пример объединения), m}; B={m, n, c, p}. Определить результат их ооъединения:

$A \cup B = \{a, b, m, n, c, p\}$.

Пересечение множеств

Пересечение (произведение) множеств A и B есть множество $A \cap B$, содержащее только такие элементы, которые входят в A и B одновременно. $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$.

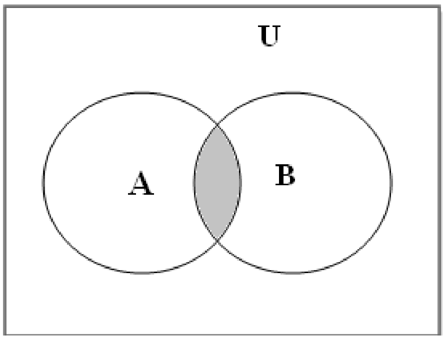


Рис. 5. - Пересечение множеств A и B

Пример пересечения множеств A и B. Пусть даны множества:

$A = \{a, b, m\}$; $B = \{m, n, c, p\}$.

Найти их пересечение $A \cap B$?

$A \cap B = \{m\}$

Дополнение (отрицание) $\bar{A}$ есть множество U\A

Дополнением множества A является такое множество, элементы которого не принадлежат множеству A, но принадлежат универсальному множеству этой задачи.

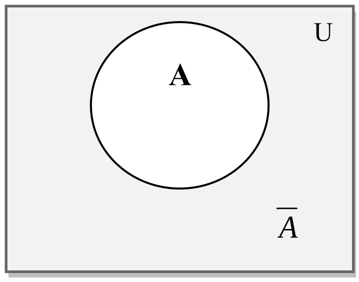


Рис. 6 - Отрицание множества А

В задаче универсальное множество U=Z. К нему относятся все целые числа и положительные и отрицательные:

Z = {…,-2,-1,0,2,…}.

Выделим множество отрицательных чисел и 0 - Z_-

Z_- = {-∞… -2, -1, 0}.

Определить дополнение к множеству Z_-

Дополнением к множеству Z_- будет множество натуральных чисел

N={1,2,…}.

Разность множеств

Разность A\B есть множество, содержащее все элементы A, не входящие в B.

A\B≠B\A

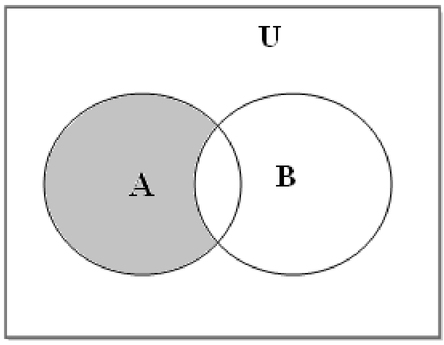


Рис. 7- Разность множеств А и В

Пусть даны множества: A={a, b, m}; B={m, n, c, p}.

Найти разность этих множеств.

A \ B ={a, b}.

Приоритет операций в алгебре множеств:

1) $\overline{A}$ - отрицание
2) A∩B - пересечение
3) A∪B - объединение
4) A\B - разность

Таблица 3

Законы алгебры множеств

Коммутативный закон	$A\cup B=B\cup A$ $A\cap B=B\cap A$
Ассоциативный закон	$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$ $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$
Дистрибутивный закон	$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C$ $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap)$
Свойства пустого и универсального множеств	$A\cup\varnothing=A$ $A\cup U=U$ $A\cap U=A$ $A\cap\varnothing=\varnothing$
Закон идемпотентности	$A\cup A=A$ $A\cap A=A$
Закон инволюции (двойного отрицания)	$\overline{\overline{A}}=A$
Закон противоречия	$A\cap\overline{A}=\varnothing$
Закон исключенного третьего	$A\cup\overline{A}=U$
Закон элиминации (поглощения)	$A\cap(A\cup B)=A$ $A\cup(A\cap B)=A$
Законы де Моргана	$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$ $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

Использование теории множеств для решения задач

Задача 1. В классе 35 учеников. Двенадцать ребят этого класса занимаются туризмом, десять танцами, в волейбол ходят восемь человек. Танцами и туризмом занимаются 5 человек, туризмом и волейболом 6 человек, посещают волейбол и танцы 4 человека. Только три человека в классе посещают все секции одновременно. Сколько учеников класса вообще не посещают секции?

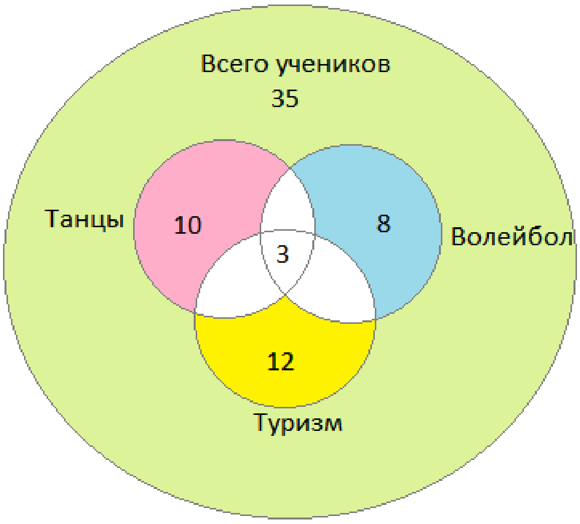


Рис. 8. Диаграмма Эйлера-Венна для задачи об учениках

Решение:

1) определим количество учеников, которые занимаются только танцами и волейболом 4-3=1– человек;

2) определим количество учеников, которые занимаются только волейболом и туризмом 6-3=3 – человек;

3)определим количество учеников, которые занимаются только танцами и туризмом 5-3=2 – человека;

4) Обозначим на диаграмме Эйлера-Венна эти значения.

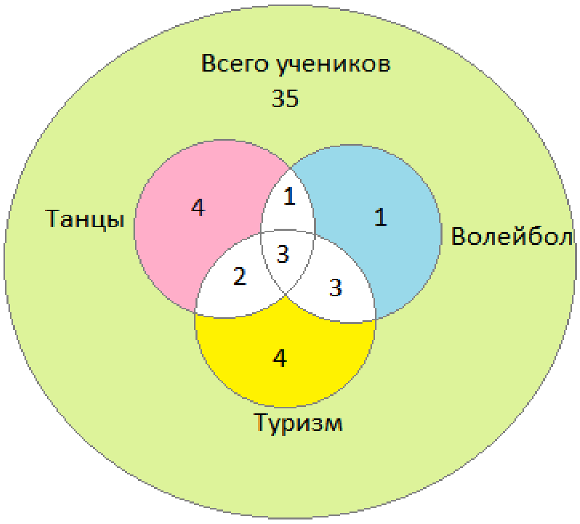


Рис. 9. Решение задачи об учениках

4) определим сколько детей занимаются только танцами, только волейболом и только туризмом. Только танцы: 10-(1+2+3)=4 человека; только волейбол 8-(3+1+3)=1 человек и только туризмом 12-(3+2+3)=4 человека.

5) теперь можно подсчитать сколько учеников, которые не ходят ни в одну из секций: 35 -(4+1+4+3+2+1+3)=17 – человек.

Ответ: 17 учеников не посещают никакие секции.

Задача 2. В группе из 100 туристов 70 человек знают английский язык, 45 знают французский язык и 23 человека знают оба языка. Сколько туристов в группе не знают ни английского, ни французского языка?

Решение задачи:

Обозначим: U – универсальное множество, т.е. множество всех туристов,

A – множество туристов, знающих английский язык,

B – множество туристов, знающих французский язык.

Необходимо найти количество туристов, не знающих ни одного языка, т.е. количество элементов множества $D = U \setminus (A \cup B)$.

Дано: $m(U) = 100$ (чел.) где U - универсальное множество

$m(A) = 70$ (чел.)

$m(B) = 45$ (чел.)

$m(A \cap B) = 23$ (чел.)

Найти: $m(D) = m(U) - m(A \cup B)$ - ?

Используя формулу, находим количество туристов, знающих хотя бы один язык:

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B) = 70 + 45 - 23 = 92, \quad \Rightarrow$$

количество туристов, не знающих ни одного языка:

$$m(D) = m(U) - m(A \cup B) = 100 - 92 = 8 \text{ (чел.)}$$

Ответ: 8 человек.

АЛГЕБРА ЛОГИКИ

1. Логические высказывания и умозаключения
2. Логические операции
3. Логические парадоксы и силлогизмы
4. Логика предикатов

1.Логические высказывания и умозаключения

Алгебра логики - это раздел математики, изучающий логические переменные, рассматриваемые со стороны их логических значений (истинности или ложности) и логических операций над ними.

Математический аппарат алгебры логики очень удобен для описания того, как функционируют аппаратные средства компьютера, поскольку основной системой счисления в компьютере является двоичная, в которой используются цифры 1 и 0, а значений логических переменных тоже два: «1» - истина, а «0» - ложь. Из этого следует два вывода: одни и те же устройства компьютера могут применяться для обработки и хранения как числовой информации, представленной в двоичной системе счисления, так и логических переменных; на этапе конструирования аппаратных средств алгебра логики позволяет упростить логические функции, описывающие работу схем компьютера, и уменьшить число логических элементов, из десятков тысяч которых состоят основные узлы компьютера.

Алгебра в широком смысле этого слова наука об общих операциях, аналогичных сложению и умножению, которые могут выполняться не только над числами, но и над другими математическими объектами.

Высказывание — это любое предложение какого-либо языка (утверждение), содержание которого можно определить как истинное или ложное.

Всякое высказывание или истинно, или ложно; быть одновременно и тем и другим оно не может. В естественном языке высказывания выражаются повествовательными предложениями. Восклицательные и вопросительные предложения высказываниями не являются.

Высказывания могут выражаться с помощью математических, физических, химических и прочих знаков. Из двух числовых выражений можно составить высказывания, соединив их знаками равенства или неравенства. Высказывание называется *простым* (элементарным), если никакая его часть сама не является высказыванием. Высказывание, состоящее из простых высказываний, называются *составным* (сложным). Простые высказывания в алгебре логики обозначаются заглавными латинскими буквами:

A = {Аристотель - основоположник логики}

B = {На яблонях растут бананы}.

Обоснование истинности или ложности простых высказываний решается вне алгебры логики. Например, истинность или ложность высказывания: «Сумма углов треугольника равна 180 градусов» устанавливается геометрией, причем — в геометрии Евклида это высказывание является истинным, а в геометрии Лобачевского — ложным. Истинному высказыванию ставится в соответствие 1, ложному — 0. Таким образом, $A = 1$, $B = 0$.

Алгебра логики отвлекается от смысловой содержательности высказываний. Ее интересует только один факт — истинно или ложно данное высказывание, что дает возможность определять истинность или ложность составных высказываний алгебраическими методами.

Умозаключение **-** это форма мышления, с помощью которой из одного или нескольких суждений может быть получено новое суждение. Умозаключения позволяют на основе известных фактов, выраженных в форме суждений, получать заключение, то есть новое знание, например, в результате доказательств геометрических теорем мы получаем новые знания. В отличие от обычной алгебры, изучающей математические функции, алгебра логики изучает логические функции или высказывания.

Функция – это закон соответствия между переменными. Следовательно, логическая функция – это закон соответствия между логическими переменными. Логическая переменная – это такая переменная, которая может принимать одно из двух возможных значений: 0 («ложь») и 1 («истина»).

Таким образом, логические переменные и функции определены на множестве двух значений – $\{0,1\}$.

Логические функции задаются таблицами истинности, или соответствия. Таблица истинности – это таблица, устанавливающая соответствие между возможными наборами значений логических переменных и значениями функций.

2.Логические операции

Логическое сложение (дизъюнкция) A V B

Логическое сложение дает ложный результат только в том случае, если оба операнда ложные, если хотя бы один операнд истинный, то результат будет истинным. B OR C ложно, если C - FALSE и B – FALSE.

Таблица 4

Таблица истинности для логического сложения

x_1	x_2	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Дизъюнкция на числовых множествах (операция объединения): {a,b,c}V{b,c,d,e}={a,b,c,d,e}.

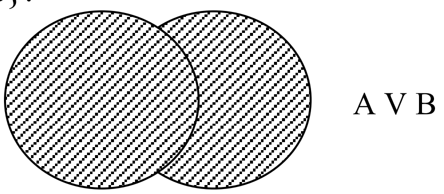


Рис. 10- Графическое представление дизъюнкции на множествах

Логическое умножение (конъюнкция) A Λ B

Логическое умножение дает истинный результат только в том случае, когда оба операнда истинные. Если же хотя бы один операнд ложный, то результат тоже будет ложным. Например, результат операции

(A > 5) AND (C=3) -истинный: при A=10, C=3,

B AND C истинно, если B - TRUE и C – TRUE

Конъюнкция характеризуется таблицей истинности, представленной в таблице 3.

Таблица 5

Таблица истинности конъюнкции

x_1	x_2	F
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Графическое представление конъюнкции на множествах:

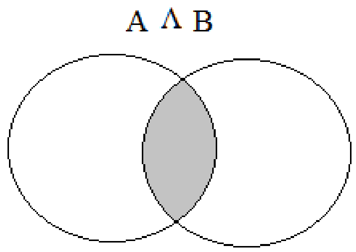


Рис. 11**.** **-** Конъюнкция множеств А и В

Конъюнкция на числовых множествах (операция пересечения): {a,b,c} Λ {b,c,d,e}={b,c}.

Операция отрицания (инверсия) $\bar{A}$

Операция отрицания дает ложный результат, если операнд истинный и наоборот - истинный результат, если операнд ложный.

Например NOT (A=10) истинно при A=2, ложно при A=10.

Графическое представление инверсии (отрицания) приведено на рис. 1. Единичный сигнал на выходе элемента НЕ появляется при нулевом сигнале на входе (x=0, F=1) и, наоборот, нулевой сигнал на выходе появляется при единичном сигнале на входе (x=1, F=0). Элемент НЕ реализует функция отрицания.

x	F
0	1
1	0

Графическое представление отрицания на множестве:

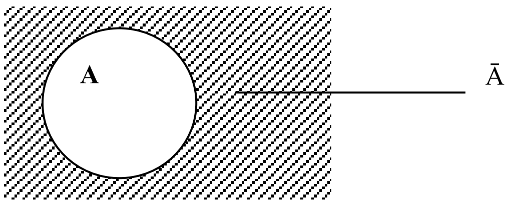


Рис. 12 Логическое отрицание или инверсия

Эквивалентность

Эквивалентность – это логическая функция от двух переменных, которая принимает единичное значение при одинаковых значениях переменных. Одинаковые по значению переменные называются равнозначными, поэтому функция носит название «равнозначность».

$$F = x_1 \Leftrightarrow x_2 = x_1 x_2 + \overline{x_1}\,\overline{x_2}.$$

Таблица истинности функции равнозначности представлена в таблице. Эквивалентность может быть обозначена следующими символами: ~, ↔. Элемент используется для сравнения двоичных сигналов.

Таблица 6

Таблица истинности эквиваленции

x_1	x_2	F
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Логическое следование (импликация) A→B

Обозначение логической функции следования: F=A→B. Импликация встречается в логических задачах в виде связки «если А, то В» и описывает причинно-следственные связи между событиями. Высказывание $A \to B$ будем считать истинным во всех случаях, кроме случая, когда А истинно, а В ложно. Замена импликации дизъюнкцией**:** $A \to B = \overline{A} \vee B$ **.**

Таблица 7

Таблица истинности для импликации

x_1	x_2	$x_1 \to x_2 = \overline{x_1} \vee x_2$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Неравнозначность X⊕Y или логическое неравенство

Логическая неравнозначность — это функция, которая дает истину тогда и только тогда, когда обе части логического выражения имеют разные значения.

$$F = X \oplus Y = \overline{X} \cdot Y \vee X \cdot \overline{Y}$$

Таблица 8

Таблица истинности для неравнозначности

X	Y	$X \oplus Y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Решение логических задач табличным методом

1) Дочерей Василия Лоханкина зовут Даша, Анфиса и Лариса. У них разные профессии и они живут в разных городах: одна в Ростове, вторая – в Париже и третья – в Москве. Известно, что Даша живет не в Париже, а Лариса – не в Ростове, парижанка – не актриса, в Ростове живет певица, Лариса – не балерина. Нужно определить кто где живет и профессии девушек.

Таблица 9

Решение задачи № 1 с помощью таблицы истинности

Париж	Ростов	Москва		Певица	Балерина	Актриса
0	1	0	Даша	1	0	0
1	0	0	Анфиса	0	1	0
0	0	1	Лариса	0	0	1

2) Столяр живет правее охотника. Врач живет левее охотника. Скрипач живет с краю. Скрипач живет рядом с врачом. Семен не скрипач и не живет рядом со скрипачом. Иван живет рядом с охотником. Василий живет правее врача. Василий живет через дом от Ивана. Определить кто в каком доме живет и какую профессию имеет.

Решение: составим таблицу и на основе высказываний задачи заполним ее

Таблица 10

Решение задачи № 2 с помощью таблицы истинности

Скрипач	Столяр	Врач	Охотник	Дома	1	2	3	4
0	1	0	0	*Василий*	0	0	0	1
0	0	0	1	*Семен*	0	0	1	0
1	0	0	0	*Геннадий*	1	0	0	0
0	0	1	0	*Иван*	0	1	0	0

3.Логические парадоксы и силлогизмы

Парадокс - ситуация (высказывание, утверждение, суждение), которая может существовать в реальности, но не имеет логического объяснения.

Примеры парадоксов:

Гегель: «История учит человека тому, что человек ничему не учится из истории».

Парадокс крокодила: Крокодил украл ребёнка и обещал матери отдать его, если она верно ответит, отдаст ли крокодил ей ребёнка.

Парадокс Петрония: «Ограничивайте себя во всех вещах, даже в ограничении».

Парадокс дней рождения: какая вероятность того, что у двух учеников из одного класса день рождения совпадает? Оказывается более 50 %, если учеников больше 23.

Квадратура круга: Возможно ли разрезать круг на конечное количество частей и собрать из них квадрат такой же площади?

Парадокс Абилина: бывает, что люди принимают решения, основанные не на том, что они сами хотят, но на том, что они думают, что другие хотят. В результате получается, что каждый делает что-то, что никому на самом деле не нужно.

Буриданов осёл: как можно совершить рациональный выбор между двумя вещами, имеющими одинаковую ценность?

Парадокс контроля: человек не может быть свободен от контроля, ибо чтобы быть свободным от контроля, нужно контролировать себя.

Вилка Мортона: выбор из двух плохих альтернатив «выбор из двух зол».

Дилемма заключённого: при некоторых условиях оптимальная стратегия поведения каждого игрока, если каждый игрок исходит из эгоистичных соображений, оказывается проигрышной для группы в целом и для каждого игрока в отдельности.

Особое место среди парадоксов занимает парадокс лжеца.

Человек произносит фразу: «Высказывание, которое я сейчас говорю, ложно» или «Я лгу».

Если его высказывание – истинно, то есть он лжет, то на самом деле он говорит правду. А если его высказывание – ложно, то значит, он должен говорить правду и не говорить ложь.

В средние века была распространена такая формулировка: *«Сказанное Платоном – ложно, говорит Сократ. – То, что сказал Сократ, – истина, говорит Платон».*

При этом выяснить, кто из них лжет, а кто говорит правду в рамках логики высказываний невозможно. Парадокс лжеца, открытый еще в IV в. до нашей эры, остается притягательным для изучения до сих пор. Ему посвящены множество трудов. Нередко он называется «королем логических парадоксов».

Тавтология — термин античной стилистики, обозначающий повторение однозначных или тех же слов.

Силлогизм-это умозаключение, в
котором из двух ранее установленных суждений, называемых посылками, полу
чается третье суждение, называемое выводом.

Термин «силлогизм» происходит от греческого **syllogismos** (выведение следствия).

Категорический силлогизм - это вид дедуктивного умозаключения, построенного из двух истинных категорических суждений, в которых S и P связаны средним термином.

В составе категорического силлогизма имеются две посылки и заключение. Пример:

1) Все кенгуру (М) есть сумчатые млекопитающие (Р) - большая посылка.
2) Это животное (S) есть кенгуру (М) - меньшая посылка.

Вывод: Это животное (S) есть сумчатое млекопитающее – заключение.

Логика высказываний оперирует простейшими высказываниями, которые могут быть или истинными, или ложными.

В разговорном языке встречаются более сложные повествовательные предложения, истинность которых может меняться при изменении объектов, о которых идет речь.

4.Логика предикатов

В логике такие предложения, истинность которых зависит от параметров, обозначают с помощью предикатов. Предикат с английского переводится как сказуемое.

Логика высказываний оперирует простейшими высказываниями, которые могут быть или истинными, или ложными. В разговорном языке встречаются более сложные повествовательные предложения, истинность которых может меняться при изменении объектов, о которых идет речь.

В логике такие предложения, истинность которых зависит от параметров, обозначают с помощью предикатов. Предикат с английского переводится как сказуемое.

Предикат - это функция, аргументами которой могут быть произвольные объекты из некоторого множества, а значения функции «истина» или «ложь». Предикат можно рассматривать как расширение понятия высказывания.

Структура суждения состоит из: субъекта, предиката, связки и квантора.

Субъект – то, о чем идет речь в суждении (человек, вещь и др.)

Предикат – то, что говорится о субъекте (сказуемое)

Связка– то, что соединяет субъект и объект (есть, является, это)

Квантор – указатель на объем субъекта (все, некоторые, один)

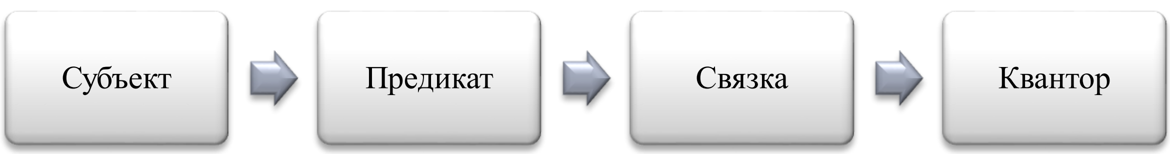


Рис. 2. Структура высказывания

Между субъектом и предикатом могут быть различные отношения: равнозначность, пересечение, подчинение, несовместимость. Эти отношения имеют такой же смысл, как и в логике. Рассмотрим их подробнее (табл.9). Существует 4 вида суждений: утвердительные – A,I; отрицательные – E,O.

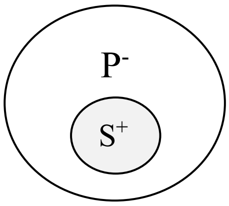
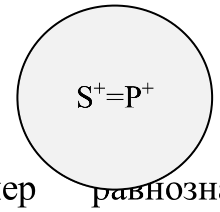
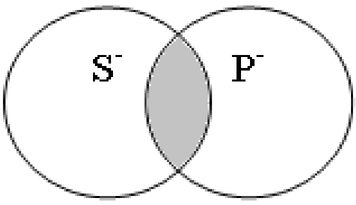
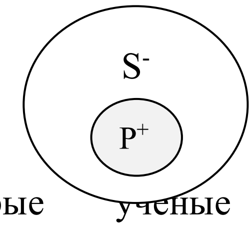
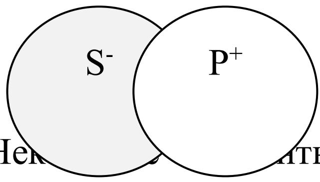
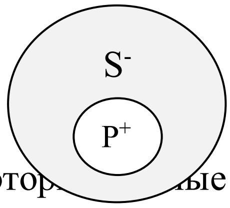
Таблица 11

Распределённость терминов в суждениях

Термины	Субъект распределен в общих суждениях		Субъект нераспределен в частных суждениях	
	A	E	I	O
S	+	+	-	-
P	±	+	±	+

Таблица 12

Виды суждений и их представление

<table>
<tr><td>Вид суждения</td><td colspan="2">Графическое представление</td></tr>
<tr><td>A
утвердительное</td><td>
Пример: все процессоры (S^+) обрабатывают информацию (P^-).</td><td>
Пример равнозначности: все материалисты (и только они) (S^+) признают первичность материи (P^+).</td></tr>
<tr><td>E
отрицательное</td><td colspan="2">
Пример: ни один н вный не должен сиде орьме</td></tr>
<tr><td>I
утвердительное</td><td>
Пример пересечения: некоторые студенты (S) являются первокурсниками (P).</td><td>
Некоторые ученые S являются докторами нфаук P.</td></tr>
<tr><td>O
отрицательное</td><td>
Не нты S^- не сдали экзамен по математике P^+.</td><td>
Некотор ые дни S^- не являются солнечными P^+.</td></tr>
</table>

Примером предиката может быть: «Река X впадает в море Y».

Здесь вместо неизвестного **X** может быть любая река, а вместо **Y** любое море. Подстановка вместо **X** названия конкретной реки, а вместо **Y** названия моря превращает предикат в обычное высказывание.

Одноместный предикат P(x) -произвольная функция переменного x, определенная на множестве M и принимающая значение из множества {1; 0}.

«X <5» - одноместный предикат.

Высказывания – это нуль-местный предикат. Логическая функция – n-местный предикат.

Двухместный предикат P(x,y) - функция двух переменных x и y, определенная на множестве M=M1xM2 и принимающая значения из множества {1;0}.

Например, «Хребет X является частью горной системы Y» или

Q(x, y) – «x=y» - двухместный предикат равенства на множестве $RxR=R^2$.

N-местный предикат - это функция определенная на наборах длины n элементов некоторого множества M, принимающая значения в области True, False.

Множество **M** называется предметной областью предиката, а $\mathbf{x_1, x_2, ..x_n}$ –предметными переменными $P(x_{1,} x_{2,} ..x_n) \to \{и, л\}$.

Зададим алфавит символов, их которых будем составлять предикатные формулы:

- предметные переменные: *x, y, z, xi, yi,zi* (*i* – натуральное число)
- имена предикатов: P, Q, R, …;
- символы операций – отрицания, конъюнкции, дизъюнкции, импликации, эквиваленции, суммы по модулю два;
- кванторы общности ∀ и существования ∃;
- вспомогательные символы – скобки, запятая.

Предикаты при подстановке переменных становятся высказываниями, поэтому с предикатами можно производить все логические операции. Для предикатов справедливы логические операции и две новые операции, специфические: операции навешивания кванторов. В логике предикатов определены квантор общности и квантор существования. Эти операции соответствуют фразам:

∀ «для всех» - **квантор общности** и «некоторые» - **квантор существования ∃.**

Выражение «существует точно одно X такое, что...» - квантор существования и единственности.

Формулы логики предикатов

1. Каждое высказывание является формулой.
2. Если $F(x_1, x_2,..., x_n)$ – n-местная предикатная переменная или постоянный предикат, а $x_1, x_2, …, x_n$ - предметные переменные, то $F(x_1, x_2, …, x_n)$ есть формула. Такая формула называется элементарной, в ней предметные

переменные являются свободными, не связанными кванторами. Всякий n–местный предикатный символ – формула

3. Если *A* и *B* — формулы, причем такие, что одна и та же предметная переменная не является в одной из них связанной, а в другой - свободной, то слова *A*v*B* , *A&B, A→B* есть формулы. В этих формулах те переменные, которые в исходных формулах были свободными, являются свободными, а те, которые были связанными, являются связанными.

3. Если F – формула, то и не F - формула.

4. Если F(x) – формула, в которую предметная переменная x входит свободно, то слова ∀xF(x) **и** ∃xF(x) – формулы, причем предметная переменная x входит в них связанно.

5. Никаких других формул в логике предикатов нет.

Формулы, не являющиеся элементарными, называют составными.

Например, P; Q(x, y, z); R(x1, x2) – элементарные формулы.

∀x (P(x, y, z); ∀x (∃y (P(x, y, z))); - составные формулы.

Формула F в формулах вида ∀x(F) и ∃x(F) называется соответственно **областью действия квантора** ∀x или ∃x.

Вхождение переменной в формулу называется **связанным**, если оно находится в области действия квантора по этой переменной или является вхождением в этот квантор; вхождение, не являющееся связанным, называется **свободным** (область действия квантора всегда однозначно определяется по виду формулы).

Предикат называется *тождественно истинным*, если на всех наборах своих переменных принимает значение 1, *выполнимым,* если на некотором наборе своих переменных принимает значение 1

P(X)=x≤7	ЛОЖЬ	**P(X)=x≤7**	ИСТИНА
∀x x≤7		**∃x x≤7**	

Пример описание текстовой фразы с помощью предикатной формулы: «*Ты любишь потому, что ты любишь. Не существует причин, чтобы любить» С. Экзюпери.*

P(X)=A⇒A	Ты любишь потому, что ты любишь
¬∃ B	Не существует причин, чтобы любить

Присоединение квантора с переменной к предикатной формуле называется *навешивание* квантора на переменную x. Переменная при этом называется *связанной* и вместо нее подставлять константы уже нельзя. Если квантор навешивается на формулу с несколькими переменными, то он уменьшает число несвязанных переменных в этой формуле.

Например: **∀x P(x).**

Переменную x в предикате P(x) называют **свободной** (ей можно придавать различные значения из M), в высказывании же ∀x называют **связанной** квантором всеобщности. Переменная, на которую навешивается квантор называется связанной.

Выражение, на которое навешивается квантор, называется областью действия квантора

∀x P(x)	«Из всякого положения есть выход»
$\exists x\overline{P(x)}$	«Существуют безвыходные положения»

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Событие – возможный исход испытания, опыта, наблюдения.

Все наблюдаемые нами явления можно условно разделить на три вида: *достоверные, невозможные и случайные.*

Достоверным называется событие, которое обязательно произойдет, если будут выполнены определенные условия. Например, если в сосуде находится вода, давление атмосферы нормальное, а температура воздуха 30°С, то событие «вода в сосуде находится в жидком состоянии».

Невозможным называется событие, которое заведомо не произойдет, если будет выполнена совокупность условий S. Например, при нагревании олова и меди вы не сможете получить золото.

Случайным называют событие, которое при осуществлении условий S может произойти, а может и не произойти. Например, при бросании монеты выпадение герба – является случайным событием, потому что оно может произойти, а может и не произойти.

Каждое случайное событие есть следствие действия очень многих сил и случайных причин, которые учесть просто невозможно. В нашем случае это сила броска, вес и размер монеты, ее симметричность, состояние здоровья человека, бросившего монету и т.д. Поэтому теория вероятностей не ставит себе задачу предсказать, произойдет или нет единичное случайное событие - она просто не в силах это сделать. Однако, когда речь идет о случайных событиях, которые многократно наблюдаются при осуществлении одних и тех же условий S, то есть происходят массовые однородные случайные события, то оказывается что они подчиняются определенным закономерностям. Эти закономерности называются вероятностными.

Например, выпадение снега в Москве 10 октября является случайным событием. Ежедневный восход Солнца можно считать достоверным событием, а выпадение снега на экваторе – невозможным событием.

Предметом теории вероятностей является изучение вероятностных закономерностей массовых однородных случайных событий.

Знание закономерностей, которым подчиняются массовые события позволяет предвидеть, как эти события будут протекать. Например, нельзя заранее определить результат одного бросания монеты, но можно предсказать, причем с небольшой погрешностью, число выпадений «орла» или «решки», если монета будет брошена большое число раз в одних и тех же условиях.

Прежде чем мы введем основные понятия, теоремы, следствия теории вероятностей, попробуем рассмотреть общие принципы построения математических дисциплин. Теория вероятностей - математическая дисциплина, родственная таким дисциплинам, как, например, геометрия или теоретическая механика.

В каждой изучаемой дисциплине, как правило, существуют три аспекта:

а) формально-логическое содержание,

б) интуитивные представления,

в) приложения.

Характер дисциплины в целом и перспективы ее применения нельзя по-настоящему оценить, не рассматривая эти три аспекта в их взаимосвязи.

Формально-логическое содержание. Характерной особенностью математики является то, что она занимается исключительно соотношениями между неопределяемыми вещами. Невозможно “определить” шахматы иначе, как сформулировав систему правил игры. Аналогично этому геометрия не беспокоится о том, чем “на самом деле” являются точки и прямые. Они остаются неопределяемыми понятиями, и аксиомы геометрии лишь устанавливают связи между ними. Это правила игры, и в них нет ничего таинственного. Формально-логическое содержание статистики представляет собой совокупность понятий, общих представлений и закономерностей окружающего нас мира. В основе дисциплины лежат свои аксиомы и теоремы, которые являются фундаментом статистики.

Интуитивные представления. Каждый приобретает интуитивное представление о смысле самых разных понятий. Эта интуиция является достаточной предпосылкой для первых формальных правил теории вероятностей.

Приложения. Приложения теории вероятностей и математической статистики весьма обширны. Знания, полученные в результате статистического анализа явлений окружающего нас мира, применяются в экономике, политике, промышленности и других областях деятельности людей. Используются эти данные для изучения реальных процессов, а также эффективного управления ими и прогнозирования.

Основные определения вероятности

В отличие от математических дисциплин, изучающих “точные” закономерности, предметом теории вероятностей являются специфические закономерности, наблюдаемые при анализе случайных явлений. Эти закономерности проявляются в **массовых явлениях**, и позволяют предсказывать с той или иной вероятностью исход испытаний. Тогда как, в единичном случае можно только предположить исход события.

Мы можем наблюдать широкий круг явлений, когда при **многократном** осуществлении комплекса условий $\sum$ доля той части случаев, когда событие А происходит, лишь изредка уклоняется сколько-нибудь значительно от некоторой средней цифры, которая таким образом может служить характерным показателем *массовой операции* (многократного повторения комплекса $\sum$) по отношению к событию А. Закономерности этого рода называются вероятностными или стохастическими закономерностями.

Итак, имеется схема для различных событий, наступающих при неизменном комплексе условий: достоверное – случайное – невозможное. Ясно, что большая часть событий в мире находится между достоверностью и невозможностью (интуитивное понимание!).

По мере развития теории вероятностей, а также областей её приложения, развивались и представления об основном понятии этой теории – вероятности.

В настоящее время существует четыре подхода к определению вероятности:

1. Определение математической вероятности как количественной меры “степени уверенности” познающего объекта.
2. Определения, сводящие понятие вероятности к понятию “равновозможности” как к более примитивному понятию (так называемое “классическое” определение вероятности).
3. Определения, основанные на “частоте” появления события в большом количестве испытаний (“статистическое” определение).
4. Аксиоматический подход, на основе теории множеств, формализующий теорию вероятностей.

Вероятностью события P(A) называют отношение числа благоприятных исходов испытания m к общему числу всех равновозможных несовместных элементарных исходов n:

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Это определение вероятности базируется на классическом подходе и часто применяются для решения конкретных задач, поэтому мы часто будем обращаться к нему далее. Остановимся подробнее на аксиоматическом подходе к определению вероятности события.

Аксиоматическое определение вероятности

Прежде, чем рассмотреть вероятность с указанной позиции, вспомним, что аксиома – это исходное утверждение какой-либо научной теории, которое берется в качестве недоказуемого, и из которого выводятся все остальные предложения теории по принятым в ней правилам вывода.

Построение аксиом теории вероятностей А.Н.Колмогоровым означало переход от полуэмпирического, интуитивного понимания вероятности к строгому формализованному. Для введения аксиом нам необходимо принять следующие соглашения.

Зафиксируем комплекс условий $\sum$ и рассмотрим некоторую систему S событий A, B, C, ..., каждое из которых должно при каждом осуществлении комплекса $\sum$ *произойти* или *не произойти*. Далее введём соглашения, которые, как увидит внимательный читатель, являются соглашениями теории множеств и математической логики.

1) Событие, состоящее в наступлении обоих событий A и B, будем называть ***произведением*** событий A и B и обозначать **AB** (или **A∩B**).
2) Событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из событий A и B, будем называть ***суммой*** событий A и B и обозначать **A+B** (или **A∪B**).
3) Событие, состоящее в том, что событие A происходит, а событие B не происходит, будем называть ***разностью*** событий A и B и обозначать **A – B**.

4) Если при каждом осуществлении комплекса условий $\sum$, при котором происходит событие А, происходит и событие В, то мы будем говорить, ***что А влечет за собой В***, и обозначать это символом **$A \subset B$** или **$B \supset A$**.

5) Если А влечет за собой В и в то же время В влечет за собой А, то есть если при каждой реализации комплекса условий $\sum$ события А и В оба наступают или оба не наступают, то мы будем говорить, что события А и В ***равносильны***, и обозначим это **A=B**. Равносильные события могут заменять друг друга или, по-другому, они **тождественны**.

6) Два события А и $\overline{A}$ называются ***противоположными***, если для них одновременно выполняются два соотношения:

7) $A+\overline{A} = U$ (достоверное событие),

$A*\overline{A} = V$ (невозможное событие)

Пусть U - достоверное событие. Все достоверные события равносильны между собой.

V - невозможное событие. Все невозможные события тоже равносильны между собой.

8) Два события А и В называются ***несовместимыми***, если их совместное появление невозможно, то есть если **$A*B = V$**.

Если **$A=B_1+B_2+...+B_N$** и события **B_i** попарно несовместимы, то есть **$B_iB_j = V$** при $i \neq j$, то говорят, то событие А подразделяется на частные случаи B_1, B_2, ..., B_n. Например, при бросании игральной кости событие С, состоящее в выпадении *четного* числа очков, подразделяется на частные случаи E_2, E_4 и E_6, состоящие соответственно в выпадении 2, 4 и 6 очков.

События B_1, B_2, ..., B_N образуют ***полную группу событий***, если хотя бы одно из них непременно должно произойти (при каждом осуществлении комплекса $\sum$), то есть если **$B_1+B_2+...+B_N = U$**.

Пример. В порту имеется два причала для приема судов. Можно рассмотреть три события: B_1 – отсутствие судов у причалов, B_2 – присутствие одного судна у одного из причалов, B_3– присутствие двух судов у двух причалов. Эти три события образуют полную группу.

В каждой задаче теории вероятностей приходится иметь дело с каким-либо определенным комплексом условий $\sum$ и с какой-либо определенной системой S событий, наступающих или не наступающих после каждой реализации комплекса условий $\sum$. Относительно этой системы целесообразно сделать следующие допущения:

а) если системе S принадлежат события А и В, то ей принадлежат также события АВ, А+В, А-В (замкнутость относительно операций);

б) система S содержит достоверное и невозможное события (“единица” и “ноль” в замкнутой системе).

Система событий, удовлетворяющая этим допущениям (1-9), называется ***полем событий***.

Всегда можно выделить такие события, которые не могут быть разложены на более простые: выпадение определенной грани при бросании игральной кости, попадание в определенную точку квадрата при рассмотрении диаграммы Венна (рис.1).

Назовем такие неразложимые события - э**лементарными событиями**.

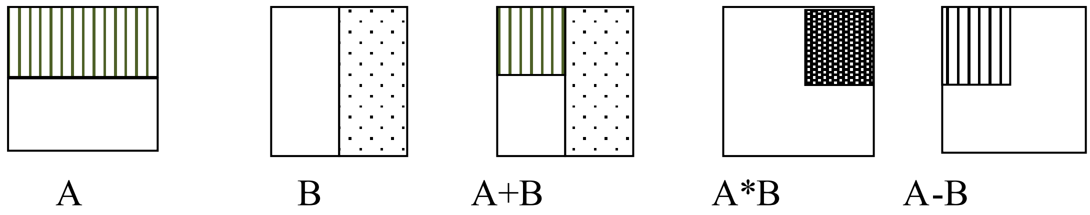


Рис. 3. Диаграммы Венна, описывающие события А и В, их сумму, произведение и разность

Для построения математической теории вероятностей требуется дополнительная формализация.

Введем понятие - ***пространство элементарных событий***, которое состоит из множества всех возможных элементарных событий. Элементами пространства могут быть точки евклидова пространства, функции одной или нескольких переменных и т. д. Множество точек пространства элементарных событий образуют случайные события. Имеется в виду любая доступная комбинация из элементарных событий, полученная в результате легальных операций. Событие, состоящее из всех точек пространства элементарных событий, называется ***достоверным событием***.

Для пространства элементарных событий, определенных выше указанным способом, имеют место следующие законы, пришедшие из алгебры (табл. 1).

Таблица 13

Законы пространства элементарных событий

коммутативный	A + B = B + A	AB = BA
ассоциативный	A+(B+C)=(A+B)+C	A(BC) = (AB)C
дистрибутивный	A(B + C) =AB + AC	A+(BC)=(A+B)(A+C)
тождества	A + A = A	A*A = A

Столь долгая процедура потребовалась, чтобы перейти на язык теории множеств и формальной алгебры. Следующим шагом будет выделение условий для ввода аксиом теории вероятностей.

Пусть задано некоторое множество Ω. Элементы этого множества называются элементарными событиями. Предположим, что фиксирована некоторая система подмножеств множества Ω; эти подмножества названы просто событиями. События обозначаются A, B, C и так далее. При этом потребуем, что:

I. Само множество Ω есть событие;

II. Если А - событие, то $\overline{A}$ - тоже событие; здесь символ $\overline{A}$ обозначает дополнение к подмножеству А в Ω;

III. Если A_1, A_2, ... события, то и $A_1+A_2+...$, а также $A_1A_2...$ - снова события. Под $A_1+A_2+...$ понимается объединение всех подмножеств A_1, A_2, ..., а под $A_1A_2...$ - их пересечение.

Таким образом, если строго следовать теоретико-множественному подходу, мы задаем алгебру событий σ на множестве Ω. σ-алгебра событий является системой подмножеств пространства элементарных исходов Ω, замкнутая относительно конечного числа теоретико-множественных операций.

Число подмножеств A_i может быть конечным и бесконечным.

Множество Ω называют пространством элементарных событий.

Два события А и В, не имеющие (как два подмножества) общих элементов, называются несовместными.

События А и $\overline{A}$ называются противоположными.

Событие Ω называется достоверным, событие $\overline{\Omega}$ (то есть пустое множество) - невозможным.

Аксиомы Колмогорова, задающие понятие вероятности:

Аксиома 1. Каждому событию А поставлено в соответствие неотрицательное число p(A), называемое вероятностью события А.

Аксиома 2. Если события A_1, A_2, ... попарно несовместны, то вероятность наступления хотя бы одного из них равна сумме вероятностей этих событий.

$$p(A_1+A_2+...+A_n)= p(A_1) + p(A_2) + ... p(A_n).$$

Для случая, когда пространство Ω конечно (аксиома 2), может быть заменено более слабым требованием:

$p(A+B) = p(A) + p(B)$, если А и В несовместны.

Аксиома 3. $P(\Omega) = 1$. Вероятность полной группы событий равна 1.

Примеры полной группы событий

Приобретены два билета денежно-вещевой лотереи. Обязательно произойдет одно и только одно из следующих событий: «выигрыш выпал на первый билет и не выпал на второй», «выигрыш не выпал на первый билет и выпал на второй», «выигрыш выпал на оба билета», «на оба билета выигрыш не выпал». Эти события образуют полную группу попарно несовместных событий.

Стрелок произвел выстрел по цели. Обязательно произойдет одно из следующих двух событий: попадание, промах. Эти два несовместных события образуют полную группу. Все теоремы теории вероятностей выводятся из аксиом 1-3.

Задача 1. Из колоды игральных карт, содержащей 36 листов, наугад выбирается одна карта. Найти вероятность того, что: а) карта окажется красной масти; б) карта окажется картинкой; в) карта окажется дамой; г) эта карта туз буби.

Решение.

а) $n = 36$, $m = 18$; $P(A) = 18/36=1/2$.

б) $n = 36$, $m = 16$; $P(A) = 16/36=4/9$.

в) $n = 36$, $m = 4$; $P(A) = 4/36=1/9$.

г) $n = 36$, $m = 1$; $P(A) = 1/36$.

Задача 2. Пусть вероятность того, что студент получит на экзамене по статистике «пятерку» равна 0,17, «четверку» - 0,38, «тройку» - 0,32, а «двойку» - 0,13. Найти вероятность того, что очередной студент получит оценку, не меньше тройки.

Решение. Искомое событие *D* произойдет, если будет получена оценка 5 (событие *A*), оценка 4 (событие *B*), или оценка 3 (событие *C*), то есть событие *D* есть сумма событий *A, B, C*. События *A*, *B* и *C* несовместимы. Поэтому, применяя теорему сложения вероятностей, получим:

$$P(D) = P(A+B+C) = P(A) + P(B)+ P(C) = 0{,}17 + 0{,}38 + 0{,}32= 0{,}87.$$

Задача 3. Испытатель проводит опыты с пирамидкой, подбрасывая ее и определяя какая грань выпадет при очередном испытании. В результате опытов были определены вероятности выпадения каждой из четырех граней: 1/3, 1/6, 1/3, 1/6. Определите вероятность полной группы событий.

Решение. Вероятность полной группы событий определяется как сумма вероятностей всех элементарных исходов данной группы:

$$P(\Omega) = P(A) + P(B)+ P(C)+ P(D)= 1/3+1/6+1/3+1/6=1.$$

Следствия из аксиом 1-3:

Следствие 1. Вероятность достоверного события равна единице. Действительно, если событие достоверно, то каждый исход испытания благоприятствует событию, то есть $m=n$, а значит и его вероятность $P(A)=m/n=1$.

Следствие 2. Вероятность невозможного события равна нулю. Раз ни один из исходов испытания не благоприятствует событию, то $m=0$, а тогда $P(A)=m/n=0$.

Следствие 3. Вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между 0 и единицей. Поскольку случайному событию благоприятствует лишь часть из общего числа элементарных исходов испытания. То есть $0<m<n$, а значит $0< m/n<1$.

$$\boldsymbol{0 \le P(A) \le 1}$$

Таким образом, введя аксиоматическое понятие вероятности, мы получили возможность использовать для доказательства теорем и следствий аппарат формальной логики.

Теоремы классической теории вероятностей

Для эффективного использования вычислений вероятности, основанной на классическом подходе было доказано несколько теорем и следствий из них. Как видно, эти теоремы перекликаются с теоремами аксиоматического подхода.

Теорема 1. Вероятность любого события не может быть отрицательной и больше единицы.

Теорема 2. Вероятность достоверного события равна единице.

Теорема 3. Вероятность невозможного события равна нулю.

Теорема 4. Теорема сложения вероятностей для несовместных событий.

Вероятность появления одного из нескольких *несовместных* событий равна сумме вероятностей этих событий.

$$\mathbf{P(A_1+A_2+...+A_n) = P(A_1) + P(A_2) +... +P(A_n).}$$

Теорема 5. Теорема сложения вероятностей для совместных событий. Вероятность появления одного из нескольких *совместных* событий равна сумме вероятностей этих событий минус вероятность произведения этих событий:

$$P(A_1 + A_2 + A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3).$$

Теорема 6. Теорема произведения вероятностей для независимых событий. Вероятность произведения независимых событий равна произведению вероятностей каждого события

$$\mathbf{P(A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot ... \cdot P(A_n).}$$

Вероятность произведения зависимых событий вычисляется по формуле условной вероятности.

Задача 1. В урне 30 шаров: 10 красных, 5 синих и 15 белых. Из урны наудачу вытащили один шар. Найти вероятность появления цветного шара.

Решение. Появление цветного шара обозначает появление или красного, или синего шара. Вероятность появления красного шара событие А: Р(А)=10/30=1/3.

Вероятность выпадения синего шара (событие В):

Р(В)=5/30=1/6.

События А и В несовместны, поэтому применима теорема сложения вероятностей 4.

Р(А+В) = Р(А) + Р(В) = 1/3 + 1/6 = 1/2.

Задача 2. Для отправки груза со склада может быть выделена только одна из двух машин различного вида. Известны вероятности выделения каждой машины: $P(A_1)$ = 0,2; $P(A_2)$ = 0,4. Определить вероятность того, что к складу будет подана хотя бы одна из этих машин.

Решение. Поскольку одновременное выделение двух машин для отправки груза – событие невозможное, а это значит, что события «выделение машины первого вида» и «выделение машины второго вида» являются несовместными. Тогда, вероятность того, что к складу будет подана хотя бы одна из этих машин будет: $P(A_1 + A_2) = 0{,}2 + 0{,}4 = 0{,}6$.

Задача 3. Бросают два кубика с нумерованными гранями. Определить вероятность того, что в очередном испытании хотя бы одна из выпавших граней будет четной.

Решение. На каждом кубике – шесть граней. Три из них являются четными, поэтому вероятность выпасть четной грани на первом кубике Р(А)=1/2 и на втором кубике Р(В)=1/2. Появление четного количества очков на первой и второй кости – события совместные, поэтому вероятность появления четной грани хотя бы на одной кости определяется по теореме сложения совместных событий:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$$

Вероятность одновременного появления четных граней на обоих костях:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Итак, вероятность появления четной грани хотя бы на одной кости равна

$$P(A+B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Задача 4. По мишени стреляют три стрелка. Вероятности попадания соответственно равны 0,7; 0,8 и 0,9. Найти вероятность того, что попадут все три.

Решение. Пусть событие A – «попадание в мишень первого стрелка», событие B – «попадание в мишень второго стрелка», а событие C - «попадание в мишень третьего стрелка». Поскольку эти события независимые, то применяя теорему произведения вероятностей, получим:

$$P(A \cdot B \cdot C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = 0{,}7 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}9 = 0{,}504.$$

Задача 5. Три стрелка производят по одному выстрелу. Вероятности попадания в цель каждого стрелка равны 0,9; 0,8; 0,85 соответственно. Найти вероятность того, что в цель попадут только два стрелка.

Решение. Искомое событие произойдет, если случатся такие события:

D - попадут первый и второй стрелки, третий промажет;

E - попадут первый и третий стрелки, второй промажет;

F - попадут второй и третий стрелки, первый промажет.

Попадания каждого стрелка в цель не зависят друг от друга, поэтому с помощью теоремы умножения вероятностей для независимых событий можно рассчитать все возможные исходы испытания A, B и C.

Вероятность события D:

$$P(D) = P(A \cdot B \cdot \overline{C}) = 0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}15 = 0{,}108;$$

вероятность события E:

$$P(E) = P(\overline{A} \cdot B \cdot C) = 0{,}1 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}85 = 0{,}068;$$

вероятность события F:

$$P(F) = P(A \cdot \overline{B} \cdot C) = 0{,}9 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}85 = 0{,}153.$$

События D, E и F несовместимы. Тогда, применяя теорему сложения вероятностей, получим, что вероятность того, что в цель попадут два стрелка

$$P(D+E+F) = P(D) + P(E) + P(F) = 0{,}108 + 0{,}068 + 0{,}153 = 0{,}329.$$

Полная вероятность. Формула Байеса

При совместном рассмотрении двух случайных событий A и B часто возникает вопрос: насколько связаны эти события друг с другом, в какой мере наступление одного из них влияет на возможность наступления другого?

Событие В называют *независимым от события* А, если появление события А не изменяет вероятности события В.

Произведением двух событий А и В называют событие АВ, состоящее в совместном появлении (совмещении) этих событий. Например, если А – деталь годная, В – деталь окрашенная, то АВ – деталь годна и окрашена.

Теорема произведения вероятностей. Вероятность совместного появления нескольких независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:

$$\mathbf{P\ (A \cdot B \cdot C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C).}$$

Пример 1. Три человека договорились о встрече в определенном месте, в определенный час. Известны вероятности прихода на встречу каждого человека: $P(A_1) = 0{,}2$; $P(A_2) = 0{,}4$; $P(A_3) = 0{,}5$. Определить вероятность того, что все три человека придут на встречу.

Решение:

Вероятность того, что все эти люди придут на встречу, будет определяться по формуле произведения вероятностей независимых событий:

$$P\ (A \cdot B \cdot C) = 0{,}2 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}5 = 0{,}04.$$

Случайное событие - это событие, которое при осуществлении совокупности условий S может произойти или не произойти. Если при вычислении вероятности события никаких других ограничений, кроме условий S, не налагается, то такую вероятность называют *безусловной*; если же налагаются и другие дополнительные условия, то вероятность события называют *условной*. Например, часто вычисляют вероятность события В при *дополнительном условии,* что произошло событие А. Заметим, что и безусловная вероятность, строго говоря, является условной, поскольку предполагается осуществление условий S.

Условной вероятностью P_A (B) называют вероятность события В, вычисленную в предположении, что событие А уже наступило.

Условная вероятность события В при условии, что событие А уже наступило, по определению, равна

$$P_A(B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(A)}, при$$

$$P(A) \neq 0.$$

Рассмотрим два события: А и В; пусть вероятности Р (А) и P_A (B) известны. Как найти вероятность совмещения этих событий, т. е. вероятность того, что появится и событие А и событие В? Ответ на этот вопрос дает теорема умножения зависимых друг от друга событий.

Теорема. Вероятность совместного появления двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило:

$$\mathbf{P\ (AB) = P\ (A)\ P_A\ (B)} \qquad (1)$$

Доказательство

Применив формулу (1) к событию ВА, получим

$$\mathbf{P\ (BA) = P\ (B)\ P_B\ (A),}$$

или, поскольку событие ВА не отличается от события АВ,

$$\mathbf{P\ (AB) = P\ (B)\ P_B\ (A)} \quad (2)$$

Сравнивая формулы (1) и (2), заключаем о справедливости равенства

$$\mathbf{P\ (A)\ P_A\ (B) = P\ (B)\ P_B\ (A)} \quad (3)$$

Пример 2. У продавца имеется 3 красных воздушных шарика и 7 синих шариков. Продавец взял наугад один шарик из мешка, а затем второй. Найти вероятность того, что первый из взятых шариков – красный, а второй – синий.

Решение. Вероятность того, что первый шарик окажется красным (событие А), Р (А) = 3/10.

Вероятность того, что второй шарик окажется синим (событие В), вычисленная в предположении, что первый шарик – красный, т. е. условная вероятность P_A (B) = 7 / 9.

По теореме умножения, искомая вероятность

Р (АВ) = Р (А) P_A (В) = (3 / 10) * (7 / 9) = 7 / 30.

Заметим, что сохранив обозначения, легко найдем:

Р (В) = 7/10,

P_B (A) = 3/9,

P(B)P_B(A)= 7/30,

что наглядно иллюстрирует справедливость равенства (3).

Пример 3. В урне 5 белых, 4 зеленых и 3 синих кубика. Каждое испытание состоит в том, что наудачу извлекают один кубик, не возвращая его обратно. Найти вероятность того, что при первом испытании появится белый кубик (событие А), при втором – зеленый (событие В) и при третьем – синий (событие С).

Решение. Вероятность появления белого кубика в первом испытании

Р (А) = 5/12.

Вероятность появления зеленого кубика во втором испытании, вычисленная в предположении, что в первом испытании появился белый кубик, т. е. условная вероятность

$$P_A(B) = 4 / 11.$$

Вероятность появления синего кубика в третьем испытании, вычисленная в предположении, что в первом испытании появился белый кубик, а во втором – зеленый, т. е. условная вероятность

P_{AB} (C) = 3 / 10.

Искомая вероятность:

P(ABC) = P (A) P_A (B) P_{AB} (C) = (5/12) * (4/11) * (3/10) = 1/22.

Формула полной вероятности

Предположим, что событие А может наступить только вместе с одним из нескольких попарно несовместных событий

$$H_1, H_2, ..., H_n.$$

Условимся называть эти события по отношению к А гипотезами.

Общая гипотеза - это научно обоснованное предположение о законах и закономерностях природных и общественных явлений, а также закономерностях психической деятельности человека. Приведем примеры некоторых гипотез.

- Гипотеза Демокрита: «Вещество состоит из атомов».
- Гипотеза биохимической эволюции**:** «Жизнь это результат длительной эволюции углеродных соединений» (Авторы биохимик А. И. Опарин в 1924 г. и Дж. Холдейном в 1929 г.).
- Гипотеза большого взрыва: «Наша вселенная произошла около 13 млрд лет назад в результате взрыва чрезвычайно плотного и горячего вещества – космологической сингулярности».

Для определения полной вероятности события используются вероятности гипотез и условные вероятности событий.

Формула полной вероятности:

$$p(A) = p(A/H_1)p(H_1) + p(A/H_2)p(H_2) + ... + p(A/H_n)p(H_n).$$

Вероятность события А равна сумме произведений условных вероятностей этого события по каждой из гипотез на вероятность самих гипотез.

Пример 4. Имеются три урны. В первой находятся 5 белых и 3 черных шара, во второй – 4 белых и 4 черных, в третьей – 8 белых. Наугад выбирается одна из урн и из нее вытаскивается один шар. Какова вероятность того, что он окажется черным (событие А)?

Решение.

Шар может быть вытащен из первой урны, либо из второй, либо из третьей; обозначим эти события H_1, H_2, H_3. Так как имеются одинаковые шансы выбрать любую из урн, то

$$p(H_1) = p(H_2) = p(H_3) = 1/3.$$

Далее находим вероятности события А при каждом из условий H_1, H_2, H_3:

$$p(A/H_1) = 3/8,\ p(A/H_2) = 4/8,\ p(A/H_3) = 0/8.$$

Отсюда: $p(A) = p(A/H_1)\ p(H_1) + p(A/H_2)\ p(H_2) + p(A/H_3)\ p(H_3) =$

$$(1/3)\cdot(3/8) + (1/3)\cdot(4/8) + (1/3)\cdot(0/8) = 7/24.$$

Во многих задачах на полную вероятность, рассматриваемый опыт можно представить происходящим в два этапа; гипотезы H_1, H_2, ..., H_n исчерпывают все возможные предположения относительно исхода первого этапа, событие же А есть один их возможных исходов второго этапа. В рассмотренном примере первый этап заключался в выборе урны, второй – в извлечении из нее шара.

Формула Томаса Байеса

Формула священника и математика Т. Байеса была опубликована в 1764 г. Ученые и религиозные деятели того времени искали ответы на сложнейшие вопросы мироздания. Среди них: возникновение и устройство космоса, эволюция, появление человека – на многие трудные вопросы должен был быть найден математический ответ. Результатом таких исследований и стала формула Т. Байеса, которая используется в теории вероятностей до сих пор.

Формула Байеса относится к той же ситуации, что и формула полной вероятности, но определяет вероятность гипотезы, которая привела к наступлению события. Событие А может наступить только вместе с одним из попарно несовместных событий H_1, H_2, ... H_n. Пусть произведен опыт, в результате которого произошло событие А. Сам по себе этот факт еще не позволяет сказать, какое из событий H_1, H_2, ..., H_n имело место в проделанном опыте. Поставим задачу: найти вероятности $p(H_i/A)$ каждой из гипотез в предположении что событие А наступило. Эта задача решается при помощи формулы Байеса.

В примере из предыдущего раздела вероятность гипотезы H_3 – шар извлечен из третьей урны – до того, как произведен опыт, равнялась 1/3. Однако, если опыт произведен и наступило событие А – вытащенный шар оказался черным, то это снижает шансы гипотезы H_3 до нуля. Послеопытная, "апостериорная" вероятность гипотезы H_3 будет в данном случае ниже, чем доопытная, "априорная".

$$p(H_i/A)=\frac{p(H_i)p(A/H_i)}{\sum_{j=1}^{n}p(H_j)p(A/H_j)}$$ - формула Байеса.

Вывод формулы весьма прост - из формулы полной вероятности.

$$p(AH_i)=p(A/H_i)p(H_i),$$

$$p(H_iA)=p(H_i/A)p(A).$$

Приравнивая правые части, получим:

$$p(H_i/A)p(A)=p(A/H_i)p(H_i),$$

откуда следует:

$$p(H_i/A)=\frac{p(A/H_i)p(H_i)}{p(A)}$$

или, если воспользоваться формулой полной вероятности,

$$p(H_i/A)=\frac{p(A/H_i)}{p(A/H_1)p(H_1)+p(A/H_2)p(H_2)+\ldots+p(A/H_n)p(H_n)}.$$

Пример 5. В студенческом стройотряде 2 бригады первокурсников и одна – второкурсников. В каждой бригаде первокурсников 5 юношей и 3 девушки, а в бригаде второкурсников 4 юношей и 4 девушки. По жеребьевке из отряда выбрали одну из бригад и из нее одного человека для поездки в город. а) Какова вероятность того, что выбран юноша? б) Выбранный человек оказался юношей. Какова вероятность, что он первокурсник?

Решение

Обозначим через *A* событие – выбор группы студентов для поездки в город. Можно выдвинуть две гипотезы:

H1 – выбрана группа первокурсников, а поскольку первокурсников две группы, то P(H1) = 2/3;

H2 - выбрана группа второкурсников, причем P(H2) = 1/3.

Условная вероятность того, что выбранный человек является юношей первокурсником: P(A/H1) = 5/8. Условная вероятность того, что выбранный человек является юношей второкурсником: P(A/H2) = 1/2.

Вероятность того, что наудачу выбранный человек – юноша определяется по формуле полной вероятности:

$$P(A) = P(A/H1)P(H1) + P(A/H2)P(H2) = 5/8*2/3 + 1/2*1/3 = 7/12.$$

Искомая вероятность того, что выбранный человек - юноша с первого курса определяется по формуле Байеса:

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{8}}{\frac{7}{12}} = \frac{5}{7}.$$

Пример. Два автомата производят одинаковые детали, которые поступают на общий конвейер. Производительность первого автомата вдвое больше производительности второго. Первый автомат производит в среднем 60% деталей отличного качества, а второй — 84%. Наудачу взятая с конвейера деталь оказалась отличного качества. Найти вероятность того, что эта деталь произведена первым автоматом.

Решение

Обозначим через *A* событие — деталь отличного качества.

Можно сделать два предположения (гипотезы):

H_1 — деталь произведена первым автоматом, причем (поскольку первый автомат производит вдвое больше деталей, чем второй) $P(H_1) = 2/3$;

H_2 - деталь произведена вторым автоматом, причем $P(H_2) = 1/3$.

Условная вероятность того, что деталь будет отличного качества, если она произведена первым автоматом: $P(A/H_1) = 0.6$.

Условная вероятность того, что деталь будет отличного качества, если она произведена вторым автоматом: $P(A/H_2) = 0.84$.

Вероятность того, что наудачу взятая деталь окажется отличного качества, по формуле полной вероятности равна

$$\mathbf{P(A) = P(A/H_1)P(H_1) + P(A/H_2)P(H_2) = 0.68.}$$

Искомая вероятность того, что взятая качественная деталь произведена первым автоматом, по формуле Байеса равна:

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{10}}{0.68} = \frac{10}{17}.$$

ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ

Обработка и представление числовых данных в Microsoft Excel

Цель: *овладеть принципами создания и форматирования графиков и диаграмм, освоить элементы прогнозирования*

Задание 1. В таблице приведены данные о выработке предприятия по кварталам за год. Нужно представить их в виде графиков и гистограмм.

Квартал	I	II	III	IV
Выработка	11	13	15	9

Создайте: а) гистограмму, б) объемную гистограмму, в) круговую диаграмму, г) объемную диаграмму с областями.

Задание 2. Представить в виде точечного графика временную зависимость численности населения (в млн. чел.) США:

Год	1900	1910	1920	1930	1940	1950	1960	1970
Численность	75,99	91,97	105,71	123,2	131,67	150,7	179,32	203,21
Линейная зависимость								
Полиноминальная зависимость								
Логарифмическая зависимость								

а) Аппроксимировать эту зависимость линейным трендом; показать на графике уравнение линии тренда, рассчитать по этому уравнению численность в 1965 году и предполагаемую численность в 2020 и 2030 годах.

б) Не убирая линейный тренд аппроксимировать эту зависимость полиномиальным трендом (степени 2); показать на графике уравнение линии тренда, рассчитать по этому уравнению численность в 1965 году и предполагаемую численность в 2020 и 2030 годах.

в) Добавить третью линию тренда – логарифмическую зависимость; показать на графике уравнение линии тренда, рассчитать по этому уравнению численность в 1965 году и предполагаемую численность в 2020 и 2030 годах. Отформатируйте все три линии тренда так, чтобы они продолжались до 2030 года.

Сравните числа, полученные в пунктах «а», «б» и «в», какая из предполагаемых численностей лучше совпадает с реальной в 2017?

В 1990 году реальная численность населения США составляла около 249 млн., в 2000 году – 281 млн, а в 2015 году – 325,7 млн. Обратите внимание на возможности форматирования всех элементов диаграмм (области построения диаграммы, области диаграммы, осей и т.п.), построенных в этом и предыдущих заданиях. На диаграмме должны быть нанесены и отформатированы обозначения осей: год; численность населения.

Задание 3. Построить на одном графике три зависимости:

x	0	0,2	0,4	…				
sin(x)								
cos(x)								
ln(x)								

Аргумент функций X расположен на интервале (0..2π). Все элементы графиков должны быть в оттенках серого цвета.

Отформатируйте элементы построенного графика: выберите толщину координатных осей; толщину и тип линий, изображающих зависимости на графике; вид и размер значков, изображающих данные на графике; тип и размер шрифтов, используемых на графике.

Задание 4. Графически решить систему уравнений:

№	Варианты заданий
1	$\begin{cases}(x-1)^2+y^2=4\\ y=-3x^2+5x+7\end{cases}$
2	$\begin{cases}(x+5)^2+y^2=25\\ y=2x^2-3x+1\end{cases}$
3	$\begin{cases}(x-1)^2+y^2=16\\ y=-8x^2+9\end{cases}$
4	$\begin{cases}x^2+y^2=36\\ y=-x^2+7x+15\end{cases}$
5	$\begin{cases}(x+3)^2+y^2=9\\ y=8x^2-6x+2\end{cases}$
6	$\begin{cases}x^2+y^2=10\\ y=5x^2+12x-4\end{cases}$
7	$\begin{cases}(x+1)^2+y^2=16\\ y=-x^2+4x+9\end{cases}$
8	$\begin{cases}(x-3)^2+y^2=25\\ y=-2x^2-5x+4\end{cases}$
9	$\begin{cases}(x-3)^2+y^2=49\\ y=x^2-2x+6\end{cases}$
10	$\begin{cases}(x+5)^2+y^2=4\\ y=-6x^2+12x+1\end{cases}$

Пример графического решения системы уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ y = -\dfrac{20}{9}x^2 + \dfrac{20}{9}x + \dfrac{40}{9} \end{cases}$$

Для построения окружности нужно использовать два ряда значений Y_1 и Y_2. При построении параболы аргумент X должен принимать значения в диапазоне [-3;3], что соответствует третьему ряду значений Y_3.

Таблица 14

Расчетная таблица для построения окружности и параболы

X	-3,00	-2,80	-2,60	-2,40	-2,20	…	3,00
Y_1	0,00	1,08	1,50	1,80	2,04	…	
Y_2	0,00	-1,08	-1,50	-1,80	-2,04	…	
Y_3	-13,33	-10,76	-8,36	-6,13	-4,09	…	

Графическое решение данной системы должно выглядеть аналогично рис. 9.

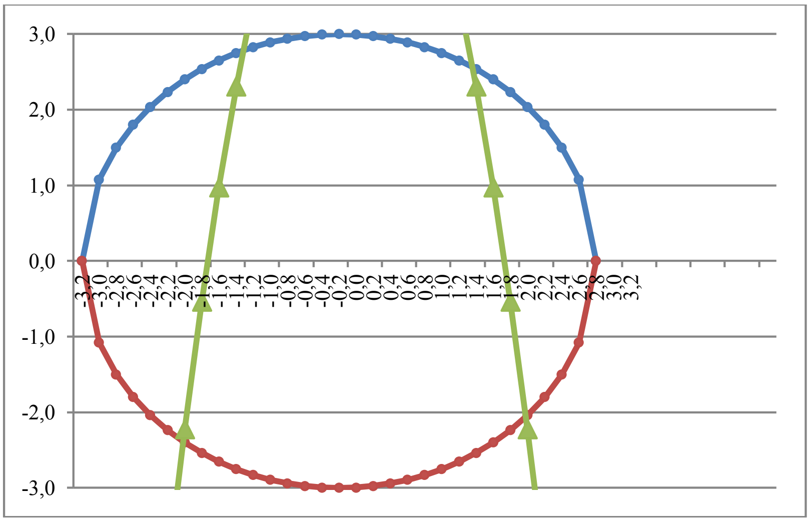


Рис. 4. Образец графического решения системы уравнений

Контрольные вопросы:

1. Как создаются графики и диаграммы в табличном процессоре Microsoft Excel?
2. Как можно добавить на готовую диаграмму дополнительный ряд данных?
3. Что представляет собой линия тренда и как ее разметить на диаграмме?
4. Каким образом можно выполнять прогнозирование данных на основе тренда?
5. Объясните принципы графического решения систем уравнений в Microsoft Excel.

Матричные вычисления

Цель: *Освоить основы матричных вычислений, способы решения систем линейных уравнений в среде табличного процессора Microsoft Ecxel*

Задание № 1. Выполните операции с матрицами

1. Задайте две матрицы A и B одинакового размера (4*4), содержащие различные элементы.
2. Найдите определители для этих матриц.
3. Найдите сумму этих двух матриц и поместите ее в матрицу S.
4. Задайте матрицу C, количество строк этой матрицы должно быть равно количеству столбцов A.
5. Найдите произведение матриц A и C и поместите результат в матрицу P.
6. Транспонируйте матрицу P.

Рекомендации к выполнению

Транспонирование матриц

Транспонировать матрицы можно произвольной размерности, так как при транспонировании строки и столбцы меняются местами. Чтобы выполнять транспонирование матрицы A:

1. Заполним ячейки таблицы значениями элементов матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 1 \\ 3 & -5 & 5 \\ 8 & 14 & 9 \end{pmatrix}$$

2. Выделяем мышкой при нажатой левой кнопке соответствующий диапазон ячеек (обратный исходной матрице).

3. Вызываем мастер функций и в категории «Полный алфавитный перечень находим функцию «ТРАНСП» и нажимаем ОК.

4. В появившемся окне вводим диапазон значений исходной матрицы.

5. Для получения результата зажимаем клавиши «Shift» + «Ctrl», и не отпуская их нажимаем клавишу «Enter».

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 8 \\ 7 & -5 & 14 \\ 1 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

2. Умножение матрицы на число

1. Берем прямоугольную матрицу $B = \begin{pmatrix} 7 & -6 & 9 & 7 \\ 9 & -7 & 7 & 9 \\ 2 & 2 & 9 & 3 \end{pmatrix}$

2. Записываем в ячейке B * 5.

3. Выделяем ячейку с первым значением матрицы

4. Пишем в строке формул умножение первого значения матрицы на 5 «=L3*5»

5. Растягиваем получившееся значение до конечного вида прямоугольной матрицы.

$$B*5=\begin{pmatrix}35 & -30 & 45 & 35\\ 45 & -35 & 35 & 45\\ 10 & 10 & 45 & 15\end{pmatrix}$$

2. **Сложение матриц**
1. Вводим значения двух прямоугольных матриц в Excel.

$$A=\begin{pmatrix}6 & -7 & 1 & 5\\ 3 & -5 & 5 & 8\\ 8 & 14 & 9 & 3\end{pmatrix}$$

2.Записываем в пустой ячейке «A+B=»

3.Выделяем ячейку с первым значением матрицы

4. Пишем в строке формул сложение двух матриц «=C3+K3».

5. Растягиваем получившееся значение до конечного вида прямоугольной матрицы.

$$A+B=\begin{pmatrix}13 & -13 & 10 & 12\\ 12 & -12 & 12 & 17\\ 10 & 16 & 18 & 6\end{pmatrix}$$

4.Умножение матриц

1. Вводим значения двух матриц А и В в Excelф

$$A=\begin{pmatrix}5 & 7 & 9\\ 1 & 2 & 3\\ 6 & 3 & 6\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}8 & 6\\ 2 & 9\\ 5 & 2\end{pmatrix}$$

2. Выделяем мышкой при нажатой левой кнопке соответствующий диапазон ячеек (обратный исходной матрице).

3. Вызываем мастер функций и в категории «Полный алфавитный перечень находим функцию «МУМНОЖ» и нажимаем ОК.

4. В появившемся окне вводим диапазон значений исходной матрицы.

5. Для получения результата зажимаем клавиши «Shift» + «Ctrl», и не отпуская их нажимаем клавишу «Enter».

$$A*B=\begin{pmatrix}99 & 111\\ 27 & 30\\ 84 & 75\end{pmatrix}$$

5. Обратная матрица

1. Заполним ячейки таблицы значениями элементов матрицы

$$A=\begin{pmatrix}6 & -7 & 1\\ 3 & -5 & 5\\ 8 & 14 & 9\end{pmatrix}$$

2. Выделяем мышкой при нажатой левой кнопке соответствующий диапазон ячеек (обратный исходной матрице).

3. Вызываем мастер функций и в категории «Полный алфавитный перечень находим функцию «МОБР» и нажимаем ОК.

4. В появившемся окне вводим диапазон значений исходной матрицы.

5.Для получения результата зажимаем клавиши «Shift» + «Ctrl», и не отпуская их нажимаем клавишу «Enter».

$$\text{Аобр}=\begin{vmatrix} 0{,}164520744 & -0{,}110157368 & 0{,}042918455 \\ -0{,}018597997 & -0{,}065808298 & 0{,}038626609 \\ -0{,}117310443 & 0{,}200286123 & 0{,}012875536 \end{vmatrix}$$

Задание № 2. Решить систему линейных уравнений

Найти решение системы линейных уравнений матричным способом. В этом случае для нахождения неизвестных переменных X находят обратную матрицу для исходной матрицы A и умножают ее на матрицу свободных членов B (AX=B, тогда $X=A^1B$).

Таблица 15

Варианты систем линейных уравнений

1.	$-2x_1+3x_2+6x_3=1200$ $4x_1-5x_2+7x_3=2600$ $x_1+2x_2-3x_3=3800$	6.	$7x_1+4x_2=4151$ $-2x_1+x_2+7x_3=3250$ $7x_1-3x_2+6x_3=2864$
2.	$-5x_1+x_2+2x_3=2639$ $3x_1+9x_3=2600$ $10x_1+2x_2-7x_3=3800$	7.	$5x_1+3x_3=4085$ $-2x_2+7x_3=2441$ $x_1+3x_2-x_3=2866$
3.	$2x_1+8x_2+5x_3=4707$ $6x_1+3x_2+10x_3=4483$ $7x_2+8x_3=3920$	8.	$8x_1+7x_2+5x_3=2064$ $6x_1+8x_2+x_3=1656$ $x_1+4x_2+7x_3=1665$
4.	$8x_1-2x_2+4x_3=3908$ $8x_1-2x_2+x_3=3777$ $-3x_1+2x_2-2x_3=3734$	9.	$8x_1+3x_2+9x_3=2631$ $10x_1+6x_2+2x_3=1996$ $-x_2+9x_3=1521$
5.	$7x_1-2x_3=2305$ $-3x_1+2x_2+5x_3=3997$ $8x_1-1x_2+5x_3=2201$	10.	$-2x_1+2x_2+7x_3=2642$ $6x_1-2x_2+3x_3=4013$ $3x_1+x_3=3803$

Матричный способ решения

1.Дана система линейных уравнений

$$5X_1+3X_2+4X_3=2700$$
$$2X_1+1X_2+1X_3=900$$
$$3X_1+2X_2+2X_3=1600$$

1. Заполним ячейки таблицы значениями элементов матрицы

$$A=\begin{pmatrix}5&3&4\\2&1&1\\3&2&2\end{pmatrix}$$

3. Находим главный определитель матрицы D=МОПРЕД($K$2:$M$4)

В появившемся окне вводим диапазон значений исходной матрицы, его значение $\Delta=1$

5. Находим обратную матрицу.

A_{-1}=МОБР(K2:M4)

6.Чтобы найти решение системы уравнений нам следует умножить обратную матрицу на столбик свободных членов исходной матрицы

X= МУМНОЖ(K8:M10;H2:H4)

7. В итоге получаем результат решения матрицы с помощью матричного способа.

$$x=\begin{pmatrix}200\\300\\200\end{pmatrix}$$

8. Нужно проверить правильно ли мы решили. Для этого нужно снова прибегнуть к помощи матричного умножения. Умножаем исходную матрицу А на значения переменных х.

Для проверки вычислений можно использовать функцию умножения матриц А*Х, в результате должна получиться матрица свободных членов. Проверка:

$$A * x = B = \begin{pmatrix} 2700 \\ 900 \\ 1600 \end{pmatrix}$$

10. В итоге получаем исходные значения свободных членов матрицы В.

Контрольные вопросы:

1) Что такое множество?
2) Какие существуют способы задания множества?
3) Какие множества называются равными?
4) Что такое пересечение множеств?
5) Что называется объединением множеств?
6) Что называется разностью множеств?
7) Что называется симметрической разностью множеств?
8) Что представляет собой матрица имеет порядок n*m ?
9) Какие матрицы называются равными?
10) Какая матрица называется квадратной?
11) Что представляет собой симметричная матрица?
12) Какая матрица называется единичной?
13) Какие матрицы можно складывать?
14) В каком случае можно умножить одну матицу на другую?
15) Пусть существуют произведения АВ И ВА. Всегда ли АВ = ВА?
16) Какая матрица называется транспонированной относительно данной?

Линейное программирование

Цель: *Освоить метод линейного программирования для решения экономических задач*

Решить задачу линейного программирования

На некотором предприятии производится три вида изделий. Для обработки каждого вида изделия A, B и C используются токарное, фрезерное, сварочное и шлифовальное оборудование. Затраты времени на обработку одного изделия на различных станках, фонд рабочего времени оборудования, а также прибыль от реализации изделий указаны в табл. 11.

Таблица 16

Условие задачи линейного программирования

Тип оборудования	Затраты времени (ст./ч) на обработку одного изделия			Общий фонд рабочего времени оборудования (ч)
	A	**B**	**C**	
Фрезерное	2	4	5	120
Токарное	1	8	6	280
Сварочное	7	4	5	240
Шлифовальное	4	6	7	360
Прибыль	10	14	12	
Количество				

Требуется определить, сколько изделий и какого вида следует изготовить предприятию, чтобы прибыль от их реализации была бы максимальной.

Образец решения задачи

Дано: для изготовления четырех видов продукции используется три вида сырья. Запасы сырья, нормы его расхода и прибыль от реализации каждого продукта представлены в табл.15.

Таблица 17

Информационная модель задачи

Тип сырья	Нормы расхода сырья не одно изделие				Запасы сырья
	А	Б	В	Г	
I	1	2	1	0	18
II	1	1	2	1	30
III	1	3	3	2	40
Цена изделия	12	7	18	10	

Найти: оптимальный производственный план, который максимизирует доход предприятия.

Математическая модель задачи

Задача принятия решения по оптимальному использованию ресурсов предприятия при производстве товаров постановке описывается следующим образом. Требуется определить такой план производства товаров, реализация которого обеспечит предприятию максимальный валовой доход.

Рассмотрим предприятие, выпускающее n видов товаров: $T_1, T_2, \ldots, T_n$. Для производства этих товаров имеется m видов сырья: $R_1, R_2, \ldots, R_m$.

При производстве товаров затрачивается: $b_1, b_2, \ldots b_m$ - единиц сырья, где $a_{ij} - i - \text{тый}$ ресурс, затрачиваемый на j-тый товар. Стоимости товаров равны соответственно $C_1, C_2, \ldots C_n$.

Найти оптимальный план по выпуску товаров, т.е. количество товаров, которое обеспечивает максимальный доход.

Обозначим количество выпускаемых товаров n-ого вида при оптимальном плане: $x_1, x_2, \ldots x_n$. Опишем целевую функцию:

$$C_1 x_1 + C_2 x_2 + \ldots + C_x n_x \to \max .$$

Данная целевая функция с учетом исходных данных перепишется:

$$12x_1 + 7x_2 + 18x_3 + 10x_4 \to \max .$$

Из-за ограниченности ресурсов в любой экономической системе, необходимо на целевую функцию наложить соответствующие ограничения. Количество ресурса первого вида, затрачиваемого на всю продукцию товаров, ограничивается фактическим количеством этого ресурса:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1$$

Аналогично, получим для всех видов ресурсов:

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m$$

Так как количество выпускаемого товара каждого вида не может быть меньше нуля, то наложим ещё одно условие:

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \ldots x_n \ge 0.$$

Сформулируем экономико-математическую модель:

Требуется определить такие показатели плана X_1, X_2, X_3, X_4, которые обеспечивают максимальный валовой доход:

$$12x_1 + 7x_2 + 18x_3 + 10x_4 \to \max .$$

При ограничениях на ресурсы:

$$X_1 + 2X_2 + X_3 \le 18,$$

$$X_1 + X_2 + 2X_3 + X_4 \le 30,$$

$$X_1 + 3X_2 + 3X_3 + 2X_4 \le 40,$$

Показатели не должны быть отрицательными $X_1 \ge 0$, $X_2 \ge 0$, $X_3 \ge 0$, $X_4 \ge 0$.

Сформулированная задача принятия решения относится к классу задач линейного программирования. Решение задач линейного программирования с помощью настройки **«Поиск решений»** в среде EXCEL

Создадим форму для ввода условий задачи и введем исходные данные в созданную форму. Получим результат, показанный ниже, который является комментарием к решению задачи.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1			Переменные						
2		**x1**	**x2**	**x3**	**x4**				
3	**Значение**	0	0	0	0	ЦФ			
4	**Цена изд**	12	7	18	10	0			
5			Ограничения						
6	**Тип сырья**					лев.часть	знак	правая часть	
7	**1**	1	2	1	0	0	<=	18	
8	**2**	1	1	2	1	0	<=	30	
9	**3**	1	3	3	2	0	<=	40	
10									

Рис. 5. Образец оформления таблицы для задачи

В ячейках B3:E3 - будет помещено оптимальное значение плана, F4 – оптимальное значение целевой функции. Введем целевую функцию дохода в ячейку F4. Для этого удобно использовать функцию *СУММПРОИЗВ()*. В качестве аргументов ввести массив 1 –количество произведенной продукции (*B$3:E$3), в* массив 2 ввести цены изделий (*B4:E4).* Затем ввести зависимость для левых частей ограничений. Использовать ту же функцию *СУММПРОИЗВ(),* а в качестве аргументов массив с количеством продукции и массив с затратами сырья каждого вида. После этого используйте «Поиск решения».

Контрольные вопросы:

1. Как строят математическую модель для задачи?
2. Что представляет собой целевая функция?
3. Для чего в задаче линейного программирования задают ограничения?
4. Как использовать инструмент «поиск решения» в электронных таблицах?
5. Какие формулы нужно вводить в таблицу перед применением «поиска решения»?
6. Что считается оптимальным планом производства?
7. Опишите целевую функцию дохода предприятия, производящего три вида изделия.

Основы статистической обработки данных

Цель: *научиться рассчитывать числовые характеристики выборки, строить полигон и гистограмму частот выборочного распределения, выполнять ранжирование данных, определять доверительный интервал*

Требуется выполнить обработку экспериментальных данных, полученных после медицинского обследования ста спортсменов (табл. 16). Необходимо оценить числовые характеристики выборки, проанализировать форму распределения частот.

Таблица 18

Результаты измерения веса спортсменов

60,4	58,3	60,3	70,8	54,3	48,3	65,7	62,4	73,7	64,4
55,2	53,0	60,0	53,5	57,5	69,7	63,7	66,4	69,7	65,3
63,3	52,2	69,1	64,9	53,9	55,2	57,0	66,6	68,9	63,1
68,8	56,8	61,5	66,8	60,1	58,5	60,7	58,6	62,6	56,6
68,4	57,9	61,0	72,2	61,8	66,0	62,7	57,1	62,0	68,6
71,2	50,8	59,3	61,6	62,1	64,5	65,0	67,9	64,4	60,4
50,4	59,0	72,5	59,2	60,3	66,6	62,7	55,6	61,9	57,5
60,8	59,9	66,6	65,6	73,6	65,2	57,2	53,7	56,4	57,6
67,8	62,7	74,6	60,0	52,8	54,7	72,0	65,8	52,6	59,7
56,2	60,1	58,5	66,0	58,1	56,1	64,6	65,4	66,4	59,6

1. Выполнить первичный статистический анализ выборочной совокупности.
2. Определить основные числовые характеристики экспериментальных данных с помощью статистических функций Excel: минимум, максимум среднее арифметическое, медиану; моду; дисперсию; стандартное квадратичное отклонение; эксцесс и ассиметрию. Для справки некоторые статистические функции приведены в табл. 17.
3. С помощью формул рассчитать следующие величины: размах варьирования признака:

- R = max - min;
- число интервалов: k ≈ 1+3,2· lg(n), где n – количество данных в выборке, то есть 100;
- цену деления c $= \frac{R}{K}$.

Таблица 19

Обозначения некоторых статистических функций в Excel

Минимум	Максимум	Медиана	Мода	Эксцесс
МИН(..)	МАКС(..)	МЕДИАНА(..)	МОДА(..)	Эксцесс(..)
Стандартное квадратичное отклонение	Среднее арифметическое	Дисперсия	Ассимметрия	
СТАНДОТКЛОН(..)	СРЗНАЧ(..)	ДИСП(..)	СКОС(..)	

Ниже в качестве образца приведены примеры расчетных таблиц для работы (табл. 18). Во второй части таблицы приведены признаки и частоты.

Таблица 20

Образец расчета числовых характеристик и построения интервалов

max	
min	
ср. арифм	
медиана	
мода	
дисперсия	
ср. кв. откл	
эксцесс	
ассиметрия	
R	
k	
c	

Признаки или интервалы	Частоты
Сумма	100

4. Создать массив признаков и посчитать для них частоту. Массив признаков разбивает всю выборку на равные отрезки-интервалы (количество интервалов - k было вами рассчитано и округлено до целого).

Первый интервал определяется как сумма минимального элемента выборки и цены деления c, последний элемент не должен существенно превышать максимального элемента выборки.

После вычисления интервалов рассчитываются частоты. Надо выделить ячейки под массив частот. Этих ячеек должно быть столько же, сколько ячеек отведено под массив интервалов.

Вызвать мастер функций и выбрать функцию ЧАСТОТА (*массив данных; массив интервалов*). У функции два параметра: массив данных – это исходная таблица со значениями веса спортсменов и массив из k интервалов, который был рассчитан. Надо выделить диапазоны этих массивов. После указания всех аргументов функции нажать комбинацию: Ctrl+Shift+Enter. После этого функция ЧАСТОТА заполнит весь выделенный массив. Результатом выполнения функции ЧАСТОТА является массив, содержащий частоты вариантов, попадающие в указанные интервалы. На основе этого результирующего массива и строятся гистограммы и полигоны. Полигон и гистограмма частот строятся по значениям частоты.

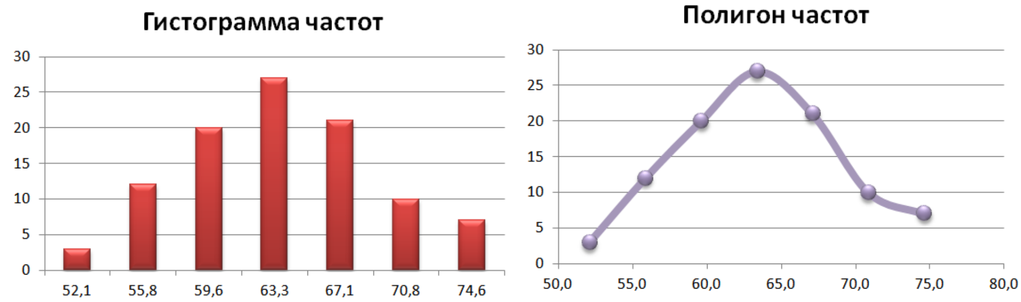


Рис. 6. Полигон и гистограмма частот выборочного распределения

Построить в табличном процессоре Excel гистограмму распределения признаков по частотам и полигон частот (рис. 19).

Задание для самостоятельного выполнения

Пусть дана последовательность значений некоторого признака: 14; 14; 25; 15; 12; 8; 18; 23; 14; 11; 18; 18; 12; 29; 16; 17; 13; 15; 20; 10; 17; 16; 18; 16; 14; 9; 15; 13; 20; 28; 9; 20.

Выполните статистическую обработку данных по следующей схеме:

1) выполнить ранжирование признака и составить безинтервальный вариационный ряд распределения;

2) составить равноинтервальный вариационный ряд, разбив всю вариацию на k интервалов. Число интервалов определяем по формуле Герберта Стёрджеса (*Herbert Arthur Sturges*): $k = 1+3{,}322\cdot \lg N$;

3) построить гистограмму распределения;

4) найти числовые характеристики выборочной совокупности: характеристики положения (выборочную среднюю, моду, медиану); характеристики рассеяния (выборочную дисперсию, среднеквадратическое отклонение);

5) найти доверительный интервал для генеральной средней $\overline{x_г}$. Принять уровень значимости α = 0,05.

Доверительный интервал генеральной средней рассчитывается по формуле:

$$\overline{x}_в - \Delta \le \overline{x_г} \le \overline{x}_в + \Delta,$$

$\overline{x}_в$ – *выборочная_средняя*

$\overline{x}_г$ – *генеральная_средняя*,

Δ – *предельная_*ошибка

Для небольшого объема выборки меньше 100 элементов используют формулу предельной ошибки:

$$\Delta = \overline{x} \pm \frac{s}{\sqrt{n}} \Phi^{-1}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)$$

где γ – доверительная вероятность (обычно равна 0,9, 0,95 или 0,99), $Ф^{-1}$ - обратное значение функции стандартного нормального распределения. Значения этой функции для трех вероятностей: 0,9; 0,95; 0,99 соответствуют: 1,64, 1,96 и 2,58.

Доверительный интервал в Excel можно рассчитать и с помощью функции: ДОВЕРИТ (альфа, стандартное отклонение, размер выборки), где альфа – уровень значимости или доверительный уровень, который в принятых выше обозначениях равен 1- γ, т.е. вероятность того, что математическое ожидание окажется за пределами доверительного интервала (при вероятности 0,95, альфа равно 0,05); стандартное отклонение – среднее квадратичное отклонение выборочных данных.

Контрольные вопросы:

1. Что называется генеральной совокупностью?
2. Приведите пример генеральной совокупности, исследуемого признака и варианта.
3. Дайте понятие частоты.
4. Что представляет собой полигон частот? Какую информацию можно получить, исследуя полигон частот?
5. Какие формы распределений существуют и чем они отличаются друг от друга? В чем разница между теоретическими и экспериментальными распределениями?
6. Что называется медианой и как ее определяют?
7. Что такое мода?
8. Как определить дисперсию экспериментального распределения?
9. Что характеризует асимметрия выборки?
10. Как рассчитывается эксцесс выборки?
11. При каком значении эксцесса полигон частот наиболее заострен?

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА ПО КУРСУ
«Основы математической обработки информации»

В контрольной работе пять заданий на темы: множества, алгебра логики, теория вероятности, математическая статистика. Требуется решить по одной задаче из каждого задания.

Правила оформления работы. Текст контрольной работы нужно оформить в текстовом процессоре Microsoft Word. На титульном листе указывается: институт, направление подготовки, группа, название дисциплины, фамилия, имя отчество студента. Основной текст контрольной набирается шрифтом – Times New Roman, размер шрифта – 14 пунктов. Межстрочный интервал во всём тексте – полуторный. Абзацы отформатировать так: выравнивание по ширине, абзацный отступ равен 1,25 см. Нумерация страниц внизу от центра. На титульной странице номер не ставится. Разметка страницы: с левой стороны страницы оставляется поле шириной не менее 25 мм, с правой стороны не менее 10 мм, вверху не менее 15 мм и внизу страницы не менее 20 мм. Схемы, таблицы и рисунки в тесте должны быть подписаны и пронумерованы. Название рисунка подписывается снизу изображения, и выравнивается по центру. Название таблицы располагается сверху и выравнивается по левому краю. Задания № 4 и 5 выполняются в Microsoft Excel. Скриншоты или копии этих заданий надо вставить в текст контрольной.

Задание № 1. В примере описаны множества A, B, C, D. Определите значение выражений X и Y после выполнения операций над множествами. Приведите графическое изображение множеств X и Y с помощью диаграмм Эйлера-Вена.

Таблица 21

Варианты для задачи № 1

1.1	A={b, e, f, k, t}; B={f, i, j, p, y}; C={j, k, l, y}; D={i, j, s, t, u, y, z}; $X = (A \cap C) \cup (B \cap C)$; $Y = (A \cap B) \cup (D \backslash C)$	1.6	A={c, m, n, o, q}; B={c, d, m, w}; C={m, n, q}; D={c, m, p}; $X = (A \vert D) \cup (C \cap D)$; $Y = (A \cap B) \cup (C \setminus D)$
1.2	A={a, h, m, o, r}; B={j, k, o, u, y}; C={g, h, j}; D={g, j, q}; $X = (A \cap C) \cup (D \cap B)$; $Y = (A \cap B) \cup (D \backslash C)$	1.7	A={b, d, l, p}; B={b, d, e, l, p, x} C={k, l, p, t}; D={d, k, o, p, q, u, v}; $X = (B \backslash A) \cup (C \cap D$; $Y = (A \cap \text{не}B) \cup (C \backslash D)$

1.3	A={c, e, h, n}; B={e, f, k, n, x}; C={b, c, h, p, r, s}; D={b, e, g}; $X = (A \backslash B) \cap (C \cup D)$; $Y = (A \cap B) \cup (D \backslash C)$	1.8	A={a, b, f, g, i}; B={c, f, g, i, s, v}; C={a, g, h, i}; D={f, w, x}; $X = (A \cap B) \cup (B \backslash C)$; $Y = (A \cap$ не$B) \cup (C \backslash D)$
1.4	A={b, f, g, m, o}; B={b, g, h, l, u}; C={e, f, m}; D={e, g, l, p, q, u, v}; $X = (A \cap C) \cup (D \backslash B)$; $Y = (A \cap B) \cup (C \backslash D)$	1.9	A={b, c, h, I, j}; B={e, h, I, s, w}; C={a, b, j, k, l, m}; D={a, h, I, w, x}; $X = (A \backslash C) \cup$(не $B \cap D)$ $Y = (A \cap B) \cup (C \backslash D)$
1.5	A={a, e, f, i}; B={a, b, k, n}; C={e,f,n,o,w,x}; D={a,d,e,o,p,t,u}; $X=(A \cup C) \cap (D \backslash B)$ $Y =$ (не$A \cap B)/(C \cup D)$	1.10	A={a, b, h, j, l}; B={b, c, h, l, r, v}; C={j, k, n, t, z}; D={b, i, k, v, w}; $X = (A \cup C) \cap (B \backslash D)$; $Y = (A \cap B) \backslash (C \cup D)$

Задание № 2. Решить логическую задачу

Задача 2.1. В авиационном подразделении служат Потапов, Щедрин, Семенов, Коновалов и Самойлов. Их специальности (они перечислены не в том же порядке, что и фамилии): пилот, штурман, бортмеханик, радист и синоптик. Об этих людях известно следующее:

- Щедрин и Коновалов не умеют управлять самолетом.
- Потапов и Коновалов готовятся стать штурманами.
- Щедрин и Самойлов живут в одном доме с радистом.
- Семенов был в доме отдыха вместе со Щедриным и сыном синоптика.
- Потапов и Щедрин в свободное время любят играть в шахматы с бортмехаником.
- Коновалов, Семенов и синоптик увлекаются боксом.
- Радист боксом не увлекается.

Задача 2.2. На одной улице стоят в ряд 4 дома, в каждом из них живет по одному человеку. Их зовут Василий, Семен, Геннадий и Иван. Известно, что все они имеют разные профессии: скрипач, столяр, охотник и врач. Известно, что

- Столяр живет правее охотника.
- Врач живет левее охотника.
- Скрипач живет с краю.
- Скрипач живет рядом с врачом.
- Семен не скрипач и не живет рядом со скрипачом.

•Иван живет рядом с охотником.

•Василий живет правее врача.

•Василий живет через дом от Ивана.

•Определите, кто, где живет.

Задача 2.3. В поезде Москва-Ярославль едут пассажиры Иванов, Петров, Сидоров. Такие же фамилии имеют машинист, электрик и кондуктор бригады поезда. Известно, что: 1) Пассажир Иванов живет в Москве. 2) Кондуктор живет на полпути от Москвы до Ярославля.; 3) Пассажир, однофамилец кондуктора, живет в Ярославле.; 4) Пассажир, живущий ближе к месту жительства кондуктора, чем другие пассажиры, точно втрое старше кондуктора. 5) Пассажиру Петрову в тот день исполнилось 20 лет. 6) Сидоров (из бригады) недавно выиграл у электрика партию на бильярде. Какая фамилия у машиниста?

Задача 2.4. В спортивном комплексе работают секции акробатики, волейбола, гимнастики, плавания, фигурного катания и хоккея. Каждую секцию посещает один из друзей: Борис, Володя и Сергей. Каждый из них занимается двумя видами спорта. Определите, какие секции посещает каждый из них, если известно, что:

•Сергей – самый высокий;

•Занимающийся плаваньем меньше ростом занимающегося фигурным катанием;

•Увлекающийся плаванием, фигурным катанием и Борис любят конфеты;

•Сергей хорошо знает информатику и помогает решать задачи акробату и волейболисту;

•Борис не волейболист и не гимнаст.

Задача 2.5. В симфонический оркестр приняли на работу трех музыкантов: Брауна, Смита и Вессона, умеющих играть на скрипке, флейте, альте, кларнете, гобое

и трубе. Известно, что:

•Смит – самый высокий;

•играющий на скрипке меньше ростом играющего на флейте;

•играющие на скрипке и флейте и Браун любят пиццу;

•когда между альтистом и трубачом возникает ссора, Смит мирит их

•Браун не умеет играть ни на трубе, ни на гобое.

На каких инструментах играет каждый из музыкантов, если каждый владеет двумя инструментами?

Задача 2.6. На зимние соревнования приехали Джессика, Ник и Линда из городов Лас-Вегаса, Монреаля, Денвера. Ребята занимаются разными видами спорта: фигурным катанием, хоккеем, горнолыжным спортом. Известно, что:

•Джессика не любит хоккей, но хотела бы съездить и посмотреть Монреаль и Денвер;

•Ник хотел бы поехать в Денвер;

•Линда плохо катается на коньках.

Кто в каком городе живет каким видом спорта занимается?

Задача 2.7. В купе одного из вагонов поезда Москва-Одесса ехали москвич, петербуржец, туляк, киевлянин, харьковчанин, одессит. Их фамилии начинались буквами А,Б,В,Г,Д,Е. В дороге выяснилось, что А и москвич – врачи, Д и петербуржец – учителя, а туляк и В – инженеры. Б и Е – участники войны, а туляк в армии совсем не служил. Харьковчанин старше А, одессит старше В. Б и москвич сошли в Киеве, а В и харьковчанин в Виннице. Определите профессию каждого из 6 пассажиров и место жительства каждого из них.

Задача 2.8. В велогонках приняли участие 5 школьников. После гонок 5 болельщиков заявили: 1) Коля занял 1-е место, а Ваня – 4; 2) Сережа занял 2-е место, а Ваня – 4; 3) Сережа занял 2-е место, а Коля – 3; 4) Толя занял 1-е место, а Надя – 4; 5) Надя заняла 3-е место, а Толя – 5. Зная, что одно из показаний каждого болельщика верное, а другое – ложное, найти правильное распределение мест.

Задача 2.9. Пятеро школьников из пяти различных городов приехали в Смоленск для участия в олимпиаде по математике. "Откуда вы, ребята?" – спросили их. Вот что они ответили: Андреев: "Я приехал из Ярославля, а Григорьев живет в Гагарине". Борисов: "В Гагарине живет Васильев, я прибыл из Вязьмы". Васильев: "Из Ярославля приехал я, а Борисов – из Ельни". Григорьев: Я приехал из Гагарина, а Данилов из Ярцева". Данилов: "Да, я действительно из Ярцева, Андреев живет в Вязьме". В каждом из высказываний одно утверждение правильное, а другое ложное. Откуда приехал каждый из школьников?

Задача 2.10. Четыре юных филателиста: Митя, Толя, Петя и Саша – купили почтовые марки. Каждый из них покупал марки только одной страны, причем двое из них купили российские марки, один – болгарские и один – чешские. Известно, что Митя и Толя купили марки двух разных стран. Марки разных стран купили Митя с Сашей, Петя с Сашей, Петя с Митей и Толя с Сашей. Кроме того, известно, что Митя купил не болгарские марки. Чешские марки купил: 1) Митя; 2) Толя; 3) Петя; 4) Саша; 5) Толя или Саша.

Задание № 3. Полная вероятность

Задача 3.1. Три экзаменатора принимают экзамен по некоторому предмету у группы в 30 человек, причем первый опрашивает 11 студентов, второй — 6 студентов, а третий — 13 студентов (выбор студентов производится случайным образом из списка). Отношение трех экзаменаторов к слабо подготовившимся различное: шансы таких студентов сдать экзамен у первого преподавателя равны 40%, у второго — только 10%, у третьего — 70%. Найти вероятность того, что слабо подготовившийся студент сдаст экзамен.

Задача 3.2. Фирма имеет три источника поставки комплектующих – фирмы A, B, C. На долю фирмы A приходится 50% общего объема поставок, B – 30% и C – 20%. Из практики известно, что среди поставляемых фирмой A деталей 10% бракованных, фирмой B – 5% и фирмой C – 6%. Какова вероятность, что взятая наугад деталь окажется годной?

Задача 3.3. На сборку попадают детали, изготовленные на трех различных автоматах. Известно, что первый автомат дает 3% брака, второй – 2% и третий – 1%. Найти вероятность того, что на сборку попадает бракованная деталь, если с первого автомата поступает 300 деталей, со второго – 400 и с третьего – 200 деталей.

Задача 3.4. Из 1000 ламп 370 принадлежат к 1 партии; 230 - ко второй партии; остальные к третьей. В первой партии 7% брака, во второй - 4%, в третьей - 6%. Наудачу выбирается одна лампа. Определить вероятность того, что выбранная лампа - бракованная.

Задача 3.5. В отделении 10 стрелков, из них 3 отличных, 5 хороших и 2 посредственных. Известно, что вероятность попадания в цель отличным стрелком - 0,9, хорошим - 0,8, и стреляющим удовлетворительно - 0,6. Из строя наугад вызывается один стрелок для производства выстрела по цели. Какова вероятность попадания в цель этим стрелком?

Задача 3.6. В магазин поступают однотипные изделия с трех заводов, причем i-й (i=1,2,3) завод поставляет t_i процентов изделий (30%, 30%, 40%). Среди изделий i-го завода n_i процентов первосортных (70%, 70%, 80%). Куплено одно изделие. Определить вероятность того, что оно оказалось первосортным.

Задача 3.7. Три завода выпускают один вид продукции. Объемы выпуска заводов относятся как 2:3:5. Доля некачественной продукции для заводов составляет, соответственно 21, 23, 38 процентов. Продукция поступает на общий склад, с которого произвольно распределяется по торговым точкам. Найти вероятность того, что купленная единица продукции окажется некачественной.

Задача 3.8. В офисе есть четыре ноутбука изготовленных компанией A, 6 компанией B, 8 компанией C и два, которые производит D. Гарантии, что ноутбуки этих компаний будут работать в течение гарантийного срока без ремонта составляют: 70%, 80%, 85%, и 55% для каждой из них. Нужно найти вероятность, что выбранный ноутбук будет работать без ремонта в течение гарантийного срока.

Задача 3.9. В магазине три холодильника, в которых хранится мороженое. В первом 6 клубничных и 8 шоколадных, во втором - 2 клубничных и 10 шоколадных, в третьем - 5 клубничных и 7 шоколадных. Наугад выбирают холодильник и вынимают из него мороженое. Определить вероятность того, что оно клубничное.

Задача 3.10. На склад поступают телефоны трех заводов, причем доля телефонов первого завода составляет 25%, второго - 60%, третьего - 15%. Известно также, что средний процент телефонов без брака для первой фабрики составляет 2%, второй - 3%, третьей - 4%. Найти вероятность того, что: наугад взят телефон окажется с браком.

Задание 4

Вариант 4.1. Пусть дана последовательность значений некоторого признака: 15; 20; 18; 20; 25; 11; 12; 13; 24; 23; 23; 24; 21; 22; 21; 23; 23; 22; 21; 14; 14; 22; 15; 16; 20; 20; 16; 16; 20; 17; 17; 17. Выполните статистическую обработку данных по следующей схеме:

1) выполнить ранжирование признака и составить безинтервальный вариационный ряд распределения;

2) составить равноинтервальный вариационный ряд, разбив всю выборку на k интервалов (k= 7);

3) построить гистограмму распределения;

4) найти числовые характеристики выборочной совокупности: характеристики положения (выборочную среднюю, моду, медиану); характеристики рассеяния (выборочную дисперсию, среднеквадратическое отклонение);

5) найти доверительный интервал для генеральной средней $\overline{x}$. Принять уровень значимости $\alpha = 0,05$.

Вариант 4.2. Пусть дана последовательность значений некоторого признака: 44; 78; 47; 79; 54; 52; 56; 50; 56; 55; 48; 51; 66; 74; 60; 42; 60; 76; 49; 45; 69; 51; 45; 46; 59; 61; 44; 62; 70; 45; 47; 80. Выполните статистическую обработку данных по следующей схеме:

1) выполнить ранжирование признака и составить безинтервальный вариационный ряд распределения;
2) составить равноинтервальный вариационный ряд, разбив всю вариацию на k интервалов (k= 8)
3) построить гистограмму распределения;
4) найти числовые характеристики выборочной совокупности: характеристики положения (выборочную среднюю, моду, медиану); характеристики рассеяния (выборочную дисперсию, среднеквадратическое отклонение);
5) найти доверительный интервал для генеральной средней $\overline{x}$. Принять уровень значимости $\alpha = 0,05$.

Вариант 4.3. Пусть дана последовательность значений некоторого признака: 15,4; 15,5; 16,2; 15,9; 13,6; 15,6; 13,7; 16; 16,2; 16,0; 14,2; 16,1; 15,8; 15,2; 16,2; 15,3; 14,5; 15,0; 15,0; 16,3; 15,8; 14,2; 15,3; 15,2; 16,0; 14,2; 14,5; 14,2;

15,6; 15,0; 16,8, 16,8. Выполните статистическую обработку данных по следующей схеме:

1) выполнить ранжирование признака и составить безинтервальный вариационный ряд распределения;

2) составить равноинтервальный вариационный ряд, разбив всю вариацию на k интервалов (k= 4);

3) построить гистограмму распределения;

4) найти числовые характеристики выборочной совокупности: характеристики положения (выборочную среднюю, моду, медиану); характеристики рассеяния (выборочную дисперсию, среднеквадратическое отклонение);

5) найти доверительный интервал для генеральной средней $\overline{x}$. Принять уровень значимости α = 0,05.

Вариант 4.4. Пусть дана последовательность значений некоторого признака: 14; 14; 25; 15; 12; 8; 18; 23; 14; 11; 18; 18; 12; 29; 16; 17; 13; 15; 20; 10; 17; 16; 18; 16; 14; 9; 15; 13; 20; 28; 9; 20. Выполните статистическую обработку данных по следующей схеме:

1) выполнить ранжирование признака и составить безинтервальный вариационный ряд распределения;

2) составить равноинтервальный вариационный ряд, разбив всю вариацию на k интервалов (k= 7);

3) построить гистограмму распределения;

4) найти числовые характеристики выборочной совокупности: характеристики положения (выборочную среднюю, моду, медиану); характеристики рассеяния (выборочную дисперсию, среднеквадратическое отклонение);

5) найти доверительный интервал для генеральной средней $\overline{x}$. Принять уровень значимости α = 0,05.

Вариант 4.5. Пусть дана последовательность значений некоторого признака: 35; 39; 24; 30; 47; 28; 31; 41; 36; 38; 40; 25; 31; 36; 38; 36; 27; 29; 30; 31; 35; 31; 35; 41; 36; 51; 36; 38; 33; 29; 32. Выполните статистическую обработку данных по следующей схеме:

1) выполнить ранжирование признака и составить безинтервальный вариационный ряд распределения;

2) составить равноинтервальный вариационный ряд, разбив всю вариацию на k интервалов (k = 9);

3) построить гистограмму распределения;

4) найти числовые характеристики выборочной совокупности: характеристики положения (выборочную среднюю, моду, медиану); характеристики рассеяния (выборочную дисперсию, среднеквадратическое отклонение);

5) найти доверительный интервал для генеральной средней $\overline{x}$. Принять уровень значимости α = 0,05.

Вариант 4.6.Пусть дана последовательность значений некоторого признака:182; 184; 176; 177; 180; 184; 186; 186; 179; 190; 170; 172; 185; 184; 182; 180; 177; 176;172; 189; 174; 176; 172; 174; 175; 182; 186; 186; 183; 165; 177; 172. Выполните статистическую обработку данных по следующей схеме:

1) выполнить ранжирование признака и составить безинтервальный вариационный ряд распределения;
2) составить равноинтервальный вариационный ряд, разбив всю вариацию на *k* интервалов (*k*= 5);
3) построить гистограмму распределения;
4) найти числовые характеристики выборочной совокупности: характеристики положения (выборочную среднюю, моду, медиану); характеристики рассеяния (выборочную дисперсию, среднеквадратическое отклонение);
5) найти доверительный интервал для генеральной средней $\overline{x}$. Принять уровень значимости α = 0,05.

Вариант 4.7. Пусть дана последовательность значений некоторого признака: 64; 60; 66; 62; 64; 68; 70; 66; 70; 68; 62; 68; 70; 72; 60; 76; 70; 74; 62; 70; 72; 72; 64; 70; 72; 66; 76; 68; 70; 58; 76; 74; 76; 82; 76; 72; 76; 74; 79; 78; 74; 78; 74; 74; 74; 78; 76; 78; 76; 80; 80; 80; 78; 78; 81. Выполните статистическую обработку данных по следующей схеме:

1) выполнить ранжирование признака и составить безинтервальный вариационный ряд распределения;
2) составить равноинтервальный вариационный ряд, разбив всю вариацию на *k* интервалов (*k*= 6);
3) построить гистограмму распределения;
4) найти числовые характеристики выборочной совокупности: характеристики положения (выборочную среднюю, моду, медиану); характеристики рассеяния (выборочную дисперсию, среднеквадратическое отклонение);
5) найти доверительный интервал для генеральной средней $\overline{x}$. Принять уровень значимости α = 0,05.

Вариант 4.8. Пусть дана последовательность значений некоторого признака: 24; 11; 12; 13; 24; 23; 23; 24; 21; 22; 21; 23; 22; 21; 14; 14; 22; 20; 20; 20; 15; 15; 16; 20; 20; 16; 16; 20; 17; 17; 19; 19; 19; 18; 18; 18; 18; 19; 19; 18; 18; 17; 17; 19; 26. Выполните статистическую обработку данных по следующей схеме:

1) выполнить ранжирование признака и составить безинтервальный вариационный ряд распределения;
2) составить равноинтервальный вариационный ряд, разбив всю вариацию на *k* интервалов (*k*= 5);
3) построить гистограмму распределения;
4) найти числовые характеристики выборочной совокупности: характеристики положения (выборочную среднюю, моду, медиану);

характеристики рассеяния (выборочную дисперсию, среднеквадратическое отклонение);

5) найти доверительный интервал для генеральной средней $\overline{x}$. Принять уровень значимости α = 0,05.

Вариант 4.9. Пусть дана последовательность значений некоторого признака: 12; 14; 13; 15; 16; 16; 16; 19; 19; 20; 20; 20; 19; 13; 15; 12; 15; 13; 14; 12; 17; 12; 17; 16; 17; 13; 16; 17; 18; 14; 15; 16; 18; 14; 15; 14; 17; 18; 14; 18; 20; 17; 18; 19; 20; 21; 22. Выполните статистическую обработку данных по следующей схеме:

1) выполнить ранжирование признака и составить безинтервальный вариационный ряд распределения;

2) составить равноинтервальный вариационный ряд, разбив всю вариацию на k интервалов (k= 5);

3) построить гистограмму распределения;

4) найти числовые характеристики выборочной совокупности: характеристики положения (выборочную среднюю, моду, медиану); характеристики рассеяния (выборочную дисперсию, среднеквадратическое отклонение);

5) найти доверительный интервал для генеральной средней $\overline{x}$. Принять уровень значимости α = 0,05.

Вариант 4.10. Пусть дана последовательность значений некоторого признака: 3; 8; 14; 14; 7; 6; 4; 12; 13; 3; 4; 5; 10; 11; 15; 10; 10; 11; 12; 8; 9; 7; 7; 8; 9; 9; 7; 8; 12; 6; 10; 9. Выполните статистическую обработку данных по следующей схеме:

1) выполнить ранжирование признака и составить безинтервальный вариационный ряд распределения;

2) составить равноинтервальный вариационный ряд, разбив всю вариацию на k интервалов (k= 4);

3) построить гистограмму распределения;

4) найти числовые характеристики выборочной совокупности: характеристики положения (выборочную среднюю, моду, медиану); характеристики рассеяния (выборочную дисперсию, среднеквадратическое отклонение);

5) найти доверительный интервал для генеральной средней $\overline{x}$. Принять уровень значимости α = 0,05.

Задание 5

Пяти учащимся предложены для решения три задачи различного уровня сложности по математике. Экспериментатор фиксирует время решения каждой задачи. Определите, будут ли найдены статистически значимые различия между временем решения каждой из трёх учебных задач?

Таблица 22

Варианты для задачи № 5

Вариант 1			
№	Время решения первой задачи	Время решения второй задачи	Время решения третьей задачи
1	24	18	22
2	16	14	15
3	12	10	16
4	5	4	12
5	6	16	8
Вариант 2			
№	Время решения первой задачи	Время решения второй задачи	Время решения третьей задачи
1	10	14	12
2	8	5	9
3	7	14	10
4	18	4	7
5	6	12	8
Вариант 3			
№	Время решения первой задачи	Время решения второй задачи	Время решения третьей задачи
1	16	9	14
2	10	8	16
3	20	9	12
4	25	7	16
5	24	5	15
Вариант 4			
№ испытуемых п/п	Время решения первого задания теста (в сек.).	Время решения второго задания теста (в сек.).	Время решения третьего задания теста (в сек.).

Вариант 4			
№ испытуемых п/п	Время решения первого задания теста (в сек.).	Время решения второго задания теста (в сек.).	Время решения третьего задания теста (в сек.).
1	12	10	20
2	16	8	26
3	15	7	28
4	17	5	24
5	14	9	27
Вариант 5			
№	Время решения первой задачи	Время решения второй задачи	Время решения третьей задачи
1	16	18	26
2	12	20	15
3	10	22	28
4	11	25	30
5	10	24	26
Вариант 6			
№	Время решения первой задачи	Время решения второй задачи	Время решения третьей задачи
1	9	4	12
2	11	6	18
3	10	5	24
4	12	6	20
5	9	5	23
Вариант 7			
№	Время решения первой задачи	Время решения второй задачи	Время решения третьей задачи
1	12	24	20
2	16	20	18

Вариант 7			
№	Время решения первой задачи	Время решения второй задачи	Время решения третьей задачи
1	12	24	20
2	16	20	18
3	14	34	14
4	15	26	20
5	13	28	19
Вариант 8			
№	Время решения первой задачи	Время решения второй задачи	Время решения третьей задачи
1	12	22	21
2	14	20	30
3	36	18	12
4	20	9	31
5	23	24	30
Вариант 9			
№	Время решения первой задачи	Время решения второй задачи	Время решения третьей задачи
1	25	15	16
2	14	24	34
3	30	12	16
4	20	9	31
5	13	24	30
Вариант 10			
№	Время решения первой задачи	Время решения второй задачи	Время решения третьей задачи
1	25	15	16
2	14	24	34

Вариант 10			
№	Время решения первой задачи	Время решения второй задачи	Время решения третьей задачи
1	25	15	16
2	14	24	34
3	30	12	16
4	20	17	32
5	16	18	12

Рекомендации к выполнению

Скопируйте экспериментальные данные в табличный процессор. Рассчитайте для каждого столбца таблицы: сумму, среднее арифметическое и стандартное квадратичное отклонение. Затем нужно найти стандартные ошибки разности двух средних (первой и второй, первой и третьей, второй и третьей).

$$\sigma_{12} = \sqrt{{\sigma_1}^2 - {\sigma_2}^2};$$

$$\sigma_{13} = \sqrt{{\sigma_1}^2 - {\sigma_3}^2};$$

$$\sigma_{23} = \sqrt{{\sigma_2}^2 - {\sigma_3}^2}.$$

Критическое отношение считается по формулам:

$$kr_{12} = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{\sigma_{12}};$$

$$kr_{13} = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_3}}{\sigma_{13}};$$

$$kr_{23} = \frac{\overline{x_2} - \overline{x_3}}{\sigma_{23}}.$$

Затем, нужно определить является ли значимым различие между разностями средних и критическим отношением. Если критическое отношение существенно больше разностей средних, то наблюдаемое различие статистически значимо на 5% уровне.

	A	B	C	D	E
1	№ испытуемых	Время решения первого задания теста (в сек.).	Время решения второго задания теста (в сек.).	Время решения третьего задания теста (в сек.).	
4	1	15	18	19	
5	2	15	16	18	
6	3	15	16	18	
7	4	17	18	19	
8	5	16	16	18	
9	Сумма	78	84	92	
10	Среднее	15,6	16,8	18,4	
11	Ср кв откл	0,80	0,98	0,49	
12	Стандартная ошибка разности 2х средних		Критическое отношение	Разности средних	Вывод
13	**σ 1-2**	1,26	0,95	1,20	Различие незначительное
14	**σ 1-3**	0,94	2,98	2,80	Различие значимо
15	**σ 2-3**	1,10	1,46	1,60	Различие незначительное

Рис. 13. Расчетная таблица для задания № 5

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Гусева Е.Н. Математические основы информатики/ Е.Н. Гусева, И.И. Боброва, И.Ю. Ефимова, И.Н. Мовчан, С.А. Повитухин, Л.А. Савельева. – Магнитогорск: Изд-во Магнитогорск. гос. техн. ун-та им. Г.И. Носова, 2016.- 234 с.
2. Гусева Е. Н. Математика и информатика: [электронный ресурс] учеб. пособие/ Е. Н. Гусева, И.Ю. Ефимова, И.Н. Мовчан, Л.А. Савельева. – 3-е изд., стереотип. –М.: Флинта, 2015– 400 с. –Режим доступа: lf5.com/Knigi/Nauka-Obrazovanie/Matematika/Matematika-i-informatika-148-103807
3. Гусева Е. Н. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие – 5-е изд., доп. и перераб.: [электронный ресурс]/ Е. Н. Гусева. –М.: Флинта, 2011.– 220 с. – Режим доступа: http://www.knigafund.ru/books/116083/read
4. Гусева Е. Н. Информатика: учеб. пособие / Е.Н.Гусева, И.Ю. Ефимова, Р.И. Коробков, К.В. Коробкова, Е.Н. Мовчан, Л.А Савельева. – Магнитогорск : МаГУ, 2008. – 216 с.
5. Гусева Е.Н. Моделирование макроэкономических процессов: учеб. пособ.: [электронный ресурс]/ Е. Н. Гусева. – М.: Флинта, 2014.–214с.– Режим доступа: http://www.ozon.ru/context/detail/id/28975354/
6. Гусева Е. Н. Экономико-математическое моделирование: учеб. пособ.: / Е. Н. Гусева. – Москва: МПСИ, 2011.–216 с.
7. Гусева Е.Н., Варфоломеева Т.Н. Применение имитационных моделей для решения экономических задач оптимизации/Гусева Е.Н., Т.Н. Варфоломеева //Современные проблемы науки и образования. 2014. № 6. С. 200.
8. Гусева Е.Н. Имитационное моделирование экономических процессов в среде «Arena»: учеб. пособие: [электронный ресурс]. М.: Флинта, 2011. – 132 с. – Режим доступа: http://www.knigafund.ru/books/114189
9. Гусева Е.Н. Имитационное моделирование социально-экономических процессов. – Магнитогорск: изд-во Магнитогорск. гос. техн. ун-та им. Г.И. Носова, 2015. – 25с.
10. Гусева Е.Н. Основы имитационного моделирования экономических процессов: лаб. практикум / Е.Н. Гусева. - Магнитогорск: МаГУ, 2008. - 100с.
11. Гусева Е.Н. Методические рекомендации по дисциплине «Программирование» для обучающихся направления 080500.62 «Бизнес информатика» всех форм обучения/Е.Н. Гусева, Т.Н. Варфоломеева. – Магнитогорск: изд-во Магнитогорск. гос. техн. ун-та им. Г.И. Носова, 2015. – 26с.
12. Гусева Е.Н. Дидактические условия использования педагогических программных средств в процессе профессиональной подготовки будущих учителей: дис. канд. пед. наук.– Магнитогорск, 1999, – 168 с.

13. Гусева Е.Н. Моделирование макроэкономических процессов: учеб. пособ.: [электронный ресурс]/ Е. Н. Гусева. – М.: Флинта, 2014.–214с.– Режим доступа: http://www.ozon.ru/context/detail/id/28975354/

14. Гусева Е.Н. Задачи на измерение количества информации с использованием понятия вероятности// Информатика и образование. – М.: № 2, 2008. –С. 61-64.

15. Курзаева Л.В. Дистанционный курс «Основы математической обработки информации»: электронный учебно-методический комплекс//Хроники объединенного фонда электронных ресурсов «Наука и образование». -2014. -Т. 1, № 12 (67). -С. 117.

16. Курзаева Л.В. Введение в анализ данных с использованием информационных технологий: учеб.-метод. пособие/Л.В. Курзаева, И.Г. Овчинникова. -Магнитогорск: МаГУ, 2012. -60 с.

Учебное текстовое электронное издание

Гусева Елена Николаевна

**ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИИ**

Учебно-методическое пособие

1,54 Мб
1 электрон. опт. диск

г. Магнитогорск, 2018 год
ФГБОУ ВО «МГТУ им. Г.И. Носова»
Адрес: 455000, Россия, Челябинская область, г. Магнитогорск,
пр. Ленина 38

ФГБОУ ВО «Магнитогорский государственный
технический университет им. Г.И. Носова»
Кафедра бизнес-информатики и информационных технологий
Центр электронных образовательных ресурсов и
дистанционных образовательных технологий
e-mail: ceor_dot@mail.ru