Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова»

М.А. Зарецкая
И.В. Глаголева

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Утверждено Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебно-методического пособия

Магнитогорск
2015

УДК: 519.21
ББК: 2.22.1.22.171

Рецензенты:

Доцент кафедры естественно-научных и социально-гуманитарных дисциплин,
Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ
Н.А. Квасова

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры вычислительной техники и программирования,
ФГБОУ ВПО «Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова»
Е.Г. Филиппов

Зарецкая М.А., Глаголева И.В.
Практические занятия по теории вероятностей [Электронный ресурс] : учебно-методическое пособие / Мария Андриановна Зарецкая, Ирина Викторовна Глаголева ; ФГБОУ ВПО «Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова». – Электрон. текстовые дан. (0,9 Мб). – Магнитогорск : ФГБОУ ВПО «МГТУ», 2015. – 1 электрон. опт. диск (CD-R). – Систем. требования : IBM PC, любой, более l GHz ; 512 Мб RAM ; 10 Мб HDD ; MS Windows XP и выше ; Adobe Reader 8.0 и выше ; CD/DVD-ROM дисковод ; мышь. – Загл. с титул. экрана.

Электронное учебно-методическое пособие «Практические занятия по теории вероятностей» предназначается для изучения бакалаврами дисциплины «Теория вероятностей», входящей в вариативную часть Б2.В.ДВ.1 направления подготовки 230100.62 Информатика и вычислительная техника.

ЭОР содержит краткие теоретические сведения, большое количество разобранных примеров и множество задач для проведения практических и лабораторных занятий предназначенных как для отработки основных определений и решения типовых примеров, так и более сложных задач. Многие задачи взяты из различных задачников и математического фольклора, часть составлена авторами. В ЭОП включены разделы: комбинаторика, алгебра событий, классическая и геометрическая вероятности, основные теоремы теории вероятностей, дискретные и непрерывные случайные величины, системы случайных величин, составляющие основу теории вероятностей.

УДК: 519.21
ББК: 2.22.1.22.171

© Зарецкая М.А., Глаголева И.В., 2015
© ФГБОУ ВПО «Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова», 2015

Содержание

1. КОМБИНАТОРИКА 5
1.1. Правила комбинаторики 5
1.2. Размещения, перестановки, сочетания 6
1.2.1. Размещения 6
1.2.2. Перестановки 7
1.2.3. Сочетания 7
1.2.4. Схема определения вида комбинации 8
1.3 Задачи 9
2. АЛГЕБРА СОБЫТИЙ 10
2.1. События и операции над ними 10
2.2. Задачи на основные определения 13
2.3. Алгебра событий (задачи) 15
3. КЛАССИЧЕСКАЯ И ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ 17
3.1. Классическая вероятность 17
3.2. Геометрическая вероятность 20
3.3. Статистическая вероятность 22
3.4. Задачи 22
3.5. Дополнительные задачи 26
4. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ 26
4.1. Теоремы сложения 26
4.2. Условная вероятность. Теоремы умножения 27
4.3. Вероятность появления хотя бы одного события 30
4.4. Формула полной вероятности. Формула Байеса 31
4.5. Схема Бернулли 33
4.6. Предельные теоремы в схеме Бернулли 35
4.7. Задачи 36
5. ДИСКРЕТНЫЕ И НЕПРЕРЫВНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ 40
5.1. Примеры. 40
5. 2. Закон распределения дискретной случайной величины, её характеристики 41
5. 3. Закон распределения непрерывной случайной величины, её характеристики 43
5. 4. Нормальный закон распределения 47
5. 5. Функции случайных величин 49
5. 6. Закон больших чисел 52
5.7. Задачи 53
5. 8. Дополнительные задачи 58

6. СИСТЕМЫ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН 58
6.1. Дискретная двумерная случайная величина 59
6.2. Непрерывная двумерная случайная величина 62
6.3. Задачи 66
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ 69

1. КОМБИНАТОРИКА

1.1. Правила комбинаторики

Комбинаторика — раздел математики, отвечающий на вопрос: сколько различных комбинаций, удовлетворяющих указанным условиям, можно получить из данного множества элементов. Большинство из них решаются с помощью достаточно простых правил, которые называются правилами сложения и умножения.

1. **Правило сложения** (**правило «или»**). Если элемент a может быть выбран n способами, а элемент b может быть выбран другими m способами, то выбрать **или** a, **или** b можно $m+n$ способами.

2. **Правило умножения (правило «и», основное правило комбинаторики (ОПК)).** Если элемент a может быть выбран n способами и для каждого из таких выборов элемента a другой элемент b может быть выбран m способами, то выбор пары элементов (a, b) можно осуществить $n \cdot m$ способами.

Примеры:

1. В магазине имеется 5 видов коробок конфет и 4 вида коробок печенья. Определите сколькими способами можно составить подарок из одной коробки конфет или одной коробки печенья. Определите сколькими способами можно выбрать в подарок набор из одной коробки конфет и одной коробки печенья.

Решение.

Ответ на первый вопрос находится по правилу суммы: $n + m = 5 + 4 = 9$, существует 9 способов составить подарок из одной коробки конфет или одной коробки печенья.

Ответ на второй вопрос находится по правилу произведения: $n \cdot m = 5 \cdot 4 = 20$, существует 20 способов составить подарок из одной коробки конфет и одной коробки печенья.

2. Ученик должен выполнить практическую работу по математике. Ему предложили на выбор 17 тем по алгебре и 13 тем по геометрии. Сколькими способами он может выбрать одну тему для практической работы?

Решение.

Так как ученику необходимо выбрать любую тему, независимо по алгебре она **или** по геометрии, то по правилу суммы $n + m = 17 + 13 = 30$, существует 30 способов для выбора темы.

3. В меню столовой предложено на выбор 5 первых, 8 вторых и 4 третьих блюда. Сколько различных вариантов обедов, состоящих из одного первого, одного второго и одного третьего блюда, можно составить из предложенного меню?

Решение.

Используем правило умножения, так как и первое, и второе, и третье блюдо входят в обед. Таких обедов можно составить $n \cdot m \cdot k = 5 \cdot 8 \cdot 4 = 160$.

4. Сколько существует пятизначных чисел, которые одинаково читаются слева направо и справа налево?

Решение.

В таких числах последняя цифра будет такая же, как и первая, а предпоследняя — как и вторая, третья цифра будет любой. Числа такого вида можно представить в виде $ABCBA$, где B, C — любые цифры, а A — не ноль. Выбираем **и** A, **и** B, **и** C. Значит, по правилу произведения количество чисел, одинаково читающихся как слева направо, так и справа налево равно $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$.

1.2. Размещения, перестановки, сочетания

Пусть дано множество из n элементов; из него можно образовать разные подмножества из m элементов, $(m \le n)$. Такие подмножества называются **выборками из n по m** или **соединениями из n по m.** Выборки бывают упорядоченные и неупорядоченные. В **упорядоченной** выборке существенен порядок, в котором следуют ее элементы, другими словами, изменив порядок элементов, мы получим другую выборку.

Пример. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5 можно составить следующие трехзначные числа 123, 132, 431, 524, и т.д. Это упорядоченные трехэлементные выборки, так как 123 и 132 – разные числа.

Пример. Из 25 учащихся группы выбрать двух дежурных. Любая пара дежурных представляет собой неупорядоченную двухэлементную выборку, так как порядок их выбора не важен.

Если исходное множество состоит из n различных элементов, то при каждом выборе мы будем извлекать из него новый элемент, отличный от всех других – это **выбор без повторений.**

Если исходное множество состоит из элементов κ типов, причем, внутри каждого класса элементы неразличимы, то при очередном выборе мы можем извлечь либо новый элемент, либо такой, какой уже встречался при предшествующих извлечениях – это **выбор с повторениями.**

Иногда модель выбора с повторениями описывается иначе. Полагают, что исходное множество содержит n различных элементов, но каждый элемент после его извлечения «записывается» в создаваемой выборке и возвращается обратно в исходное множество. При этом каждый из n элементов может быть извлечен и «записан» неоднократно; число повторений зависит только от числа производимых извлечений. Такую модель также называют **выбором с возвращением.**

Среди выборок различают перестановки, размещения и сочетания.

1.2.1. Размещения

Определение. Размещениями из n элементов по m элементов $(m \le n)$ называются упорядоченные выборки из n по m, которые отличаются либо самими элементами, либо порядком следования элементов.

Число размещений без повторений из n по m обозначается A_n^m и вычисляется по формуле:

$$A_n^m = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-m+2) \cdot (n-m+1) \quad \text{или} \quad A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Пример. Рассадить 3 человек на 14 стульях можно числом способов, равным количеству размещений из 14 по 3 $A_{14}^3 = 14 \cdot 13 \cdot 12 = 2184$, каждому подбираем стул. Если стульев окажется 60, а человек – 40, то удобнее использовать формулу $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = \frac{60!}{20!} \approx 3{,}42 \cdot 10^{63}$. Не стоит перебирать все возможные способы рассадки!

Число размещений с повторениями из n по m обозначается $\overline{A}_n^m$ и вычисляется по формуле:

$$\overline{A}_n^m = n^m.$$

Пример. Алфавит племени ням-ням состоит из трех букв «н», «я» и «м». Сколько различных четырехбуквенных слов может быть в языке этого имени?

Решение.

Различных четырехбуквенных слов может быть столько, сколько существует размещений из 3 элементов по 4 с повторениями, т.е. $\overline{A}_3^4 = 3^4 = 81$.

1.2.2. Перестановки

Определение. Перестановками из n элементов называются размещения из этих n элементов по n. (Перестановки – это частный случай размещений)

Число перестановок без повторений из n элементов обозначается P_n и вычисляется по формуле:

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1 = n!.$$

Число перестановок с повторениями (k различных элементов, где элементы могут повторяться первый $-m_1$ раз, второй $-m_2$ раз, …, k-й $-m_k$ раз, и $m_1 + m_2 + \ldots + m_к = n$, где n – общее количество элементов) обозначается $P_n(m_1, m_2, \ldots, m_k)$ и вычисляется по формуле:

$$P_n(m_1, m_2, \ldots, m_k) = \frac{n!}{m_1! \cdot m_2! \cdot \ldots \cdot m_k!}.$$

Пример. Сколько различных «слов», в том числе и бессмысленных, можно получить, переставляя буквы в слове а) «вздор», б) «абракадабра»?

Решение.

а). В слове «вздор» все буквы разные, поэтому количество «слов» равно количеству перестановок без повторений $P_n = P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

б). В слове «абракадабра» некоторые буквы повторяются: «а» — 5 раз, «б» — 2 раза, «р» — 2 раза, буквы «к» и «д» встречаются по одному разу. Различных слов будет столько, сколько существует перестановок из 11 букв с повторениями, то есть

$$P_{11}(5,2,2,1,1) = \frac{11!}{5! \cdot 2! \cdot 2!} = 83160.$$

1.2.3. Сочетания

Определение. Сочетанием из n элементов по m элементов $(m \le n)$ называются неупорядоченные выборки из n по m, которые отличаются элементами.

Число сочетаний без повторений (n различных элементов, взятых по m) обозначается C_n^m и вычисляется по формуле:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Число сочетаний с повторениями (n элементов, взятых по m, где элементы в наборе могут повторяться) обозначается $\overline{C}_n^m$ и вычисляется по формуле:

$$\overline{C}_n^m = C_{n+m-1}^m = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}.$$

Пример. В магазине имеется 5 видов эмалей разного цвета для наружных работ. Сколькими способами можно выбрать эмаль для покраски трёх одинаковых садовых скамеек, если на покраску одной скамейки требуется одна банка эмали и а) все скамейки должны быть разного цвета, б) скамейки могут быть одного цвета?

Решение.

а). Три краски из 5 можно выбрать количеством способов, равным числу сочетаний из 5 по 3: $C_5^3 = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{(1 \cdot 2 \cdot 3) \cdot (1 \cdot 2)} = 10$.

б). Так как краски могут повторяться, то количество способов равно числу сочетаний из 5 по 3 с повторениями: $\overline{C}_5^3 = C_{5+3-1}^3 = C_7^3 = \frac{7!}{3!\cdot 4!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{(1\cdot 2\cdot 3)\cdot(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4)} = 35$.

1.2.4. Схема определения вида комбинации

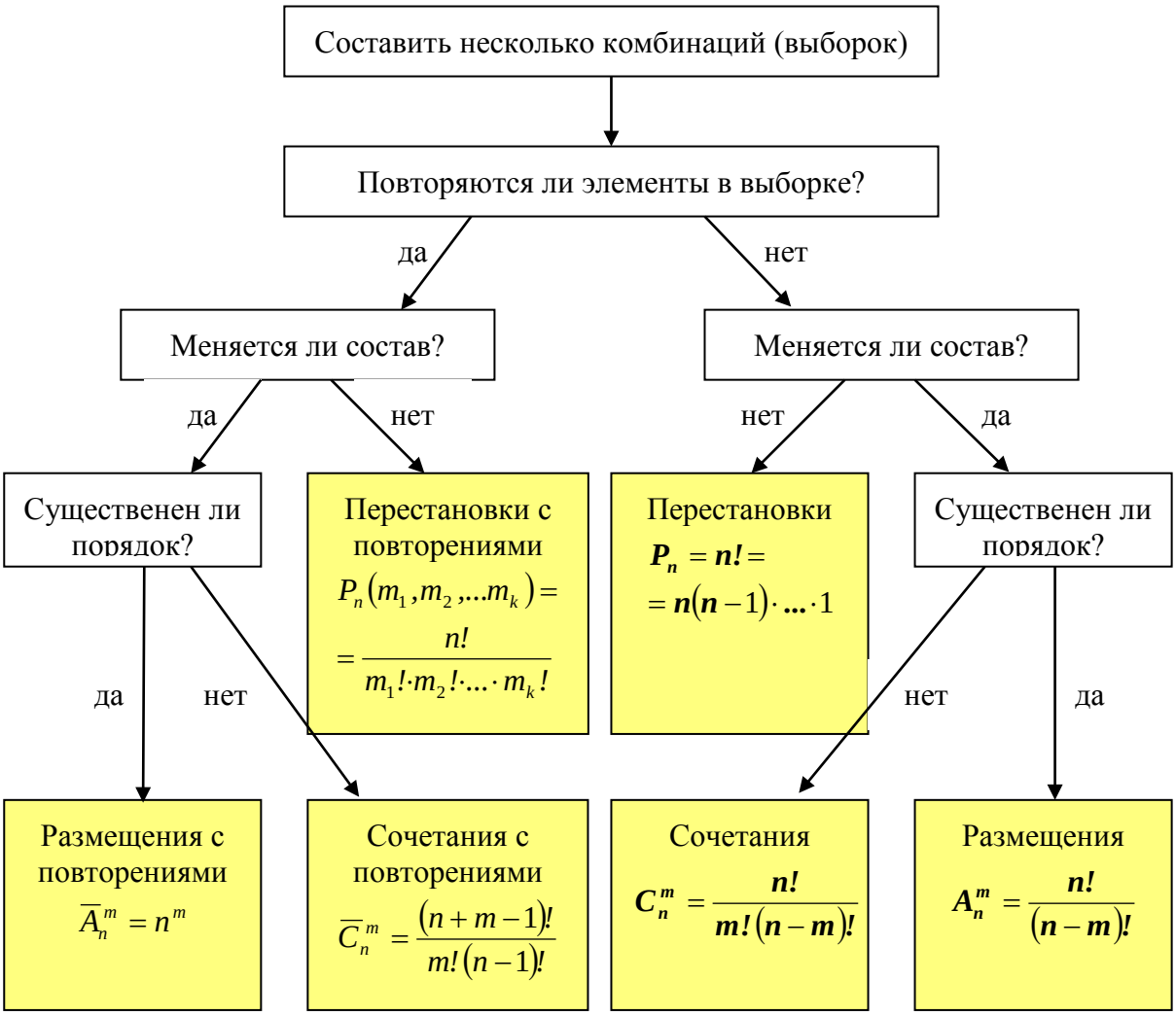


Рис. 1.

Пример. Возьмем буквы **Б, А, Р.**

1) Какие размещения из этих букв, взятых по две, можно получить? Сколько таких наборов получится, если:

a) буквы в наборе не повторяются;

b) буквы могут повторяться.

2) Какие перестановки из этих букв можно получить? Сколько таких наборов получится, если:

a) буквы в наборе не повторяются;

b) буква А повторяется 2 раза.

3) Какие сочетания из этих букв, взятых по две, можно получить? Сколько таких наборов получится, если:

a) буквы в наборе не повторяются;

b) можно брать по две одинаковые буквы.

Решение.

1) а) Получаются следующие наборы: **БА, БР, АР, АБ, РБ, РА.** По формуле

$\boldsymbol{A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}}$ получаем: $A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{1} = 6$ наборов.

b) Получаются следующие наборы: **ББ, БА, БР, АА, АР, АБ, РР, РБ, РА.** По формуле

$\overline{A}_n^m = n^m$ получаем: $\overline{A}_3^2 = 3^2 = 9$ наборов.

2) а) Получаются следующие наборы: **БАР, БРА, АРБ, АБР, РАБ, РБА.** По формуле

$P_n = n!$ получаем: $P_3 = 3! = 1\cdot 2\cdot 3 = 6$ наборов.

b) Получаются следующие наборы: **БАРА, БРАА, ААРБ, БААР, ААБР, АБАР, АРАБ,АРБА, АБРА, РАБА, РААБ, РБАА.**

По формуле

$P_n(m_1, m_2, ...m_k) = \frac{n!}{m_1!\cdot m_2!\cdot ....\cdot m_k!}$ получаем:

$P_4(2,1,1) = \frac{4!}{2!\cdot 1!\cdot 1!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 1} = 3\cdot 4 = 12$ наборов.

3) а) Получаются следующие наборы: **БА (БА** и **АБ –** один и тот же набор**), АР** и **РБ.** По формуле

$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ получаем: $C_3^2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 1} = 3$ набора.

b) Получаются следующие наборы: **БА, ББ, БР, АР, РР, АА.** По формуле

$\overline{C}_n^m = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}$ получаем: $\overline{C}_3^2 = C_4^2 = \frac{(3+2-1)!}{2!(3-1)!} = \frac{4!}{2!\cdot 2!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2} = 3\cdot 2 = 6$ наборов.

1.3 Задачи

1. В пассажирском поезде 9 вагонов. Сколькими способами можно рассадить в поезде 4 человека, при условии, что все они должны ехать в различных вагонах?

Ответ 3024.

2. На перекрестке дорог стоят 6 светофоров. Сколько может быть различных комбинаций их сигналов, если каждый светофор имеет 3 состояния: «красный», «желтый», «зеленый»?

Ответ 729.

3. Сколько шестизначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5 так, чтобы цифры в числе не повторялись?

Ответ 600.

4. Сколькими способами можно расставить белые фигуры (2 ладьи, 2 коня, 2 слона, ферзь и король) на первой линии шахматной доски?

Ответ 5040.

5. Сколько «слов» можно получить, переставляя буквы в слове «гора» и «институт»?

Ответ 24; 3360.

6. Из 20 учащихся надо выбрать двух дежурных. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ 190.

7. На кодовом замке 10 цифр. Сколько трехкнопочных комбинаций существует на нём, если а) все три кнопки нажимаются одновременно, б) важен порядок нажатия кнопок?

Ответ а) 120, б) 720.

8. В группе 9 человек. Сколько можно образовать разных подгрупп при условии, что в подгруппу входит не менее 2 человек?

Ответ 246.

9. В хлебном отделе имеются булки белого и черного хлеба. Сколькими способами можно купить 6 булок хлеба?

Ответ 7.

10. В группе из 9 юношей и 10 девушек нужно выбрать делегацию из 3 юношей и 3 девушек. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ 10080.

2. АЛГЕБРА СОБЫТИЙ

2.1. События и операции над ними

При осуществлении совокупности условий могут происходить различные события, которые мы будем обозначать заглавными буквами *A, B, C, D, …* . События, которые обязательно происходят, называются **достоверными** (обозначаются Ω); которые не могут произойти — **невозможными** (обозначаются $\varnothing$); которые могут произойти, а могут и не произойти — **случайными.**

Пример 1. *A*— после зимы наступит весна; *B*—после среды наступит четверг; *C*— утром взойдёт солнце. *A, B, C*— достоверные события.

Пример 2. *D*—вода в чайнике закипела при температуре $50^0\,C$; *F*—Ваня родился 30 февраля, *G*— одним выстрелом были убиты два зайца, убегавшие от охотника в разных направлениях. *D, F, G*— невозможные события.

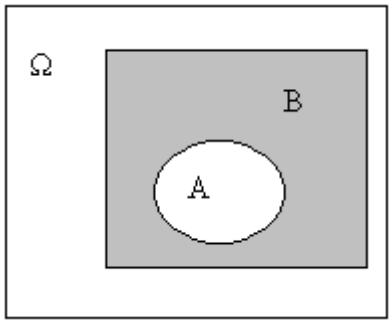
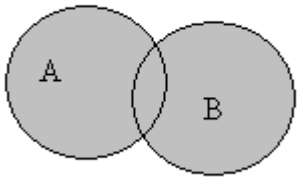
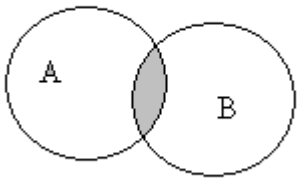
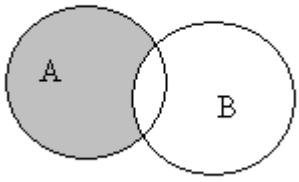
Пример 3. *H*—соединение с абонентом; *K*—совпадение дней рождений у двух человек, *L*— своевременный приход на занятия. *H, K, L*— случайные **события.**

Осуществление совокупности условий называется **испытанием** (**опытом, наблюдением, экспериментом**). Количество испытаний может быть любым, а может неограниченно увеличиваться.

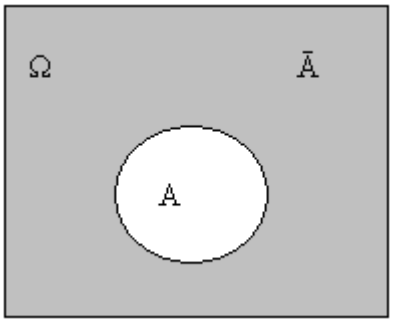
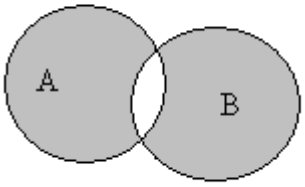
С каждым испытанием связан ряд событий, которые, вообще говоря, могут появляться одновременно. Например, при бросании игральной кости (т.е. кубика, на гранях которого имеются очки 1, 2, 3, 4, 5, 6) событие *A* — выпадение двойки и событие *B* —выпадение четного числа очков, очевидно, не исключают друг друга. Очевидно, что событие *A* является более простым по сравнению с *B*. При аксиоматическом построении теории вероятностей такие события принято называть элементарными $\omega_1,\omega_2,...,\omega_n,...$, а всё множество таких событий пространством элементарных событий Ω: $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,...,\omega_n,...\}$. Произвольное событие при этом отождествляется с множеством, и над событиями можно совершать все операции, выполнимые над множествами. По аналогии с теорией множеств, строится **алгебра событий.** В частности, определены следующие отношения и операции над событиями.

Таблица 2.1

Отношения

	$A \subset B$ (отношение **включения** множеств: множество A является подмножеством множества B) Событие A влечет за собой событие B. Иначе говоря, событие B происходит всякий раз, когда происходит событие A. $A = B$ (отношение **равенства** множеств) Событие A тождественно или равно событию B. Это возможно в том и только в том случае, когда $A \subset B$ и одновременно $B \subset A$, т.е. каждое из них происходит всякий раз, когда происходит другое.
	$A + B$ или $A \cup B$ **(сумма событий)** Это событие, состоящее в том, что происходит хотя бы одно из двух событий или A,или B, или оба события одновременно (не исключающее логическое «или»). В общем случае, под суммой нескольких событий понимается событие, состоящее в появлении хотя бы одного из этих событий.
	AB или $A \cap B$ **(произведение событий)** Это событие, состоящее в совместном осуществлении событий A и B (логическое «и»). В общем случае, под произведением нескольких событий понимается событие, состоящее в одновременном осуществлении всех этих событий.
	$A - B$ **(разность событий)** (множество элементов, принадлежащих A, но не принадлежащих B) Это событие, состоящее из исходов, входящих в A, но не входящих в B. Оно заключается в том, что происходит событие A, но при этом не происходит событие B.

Продолжение Таблицы 2.1

	$\overline{A} = \Omega - A$ (переход к противоположному событию) Это событие, состоящее из всех исходов, которые не входят в A. Два события называются противоположными, если появление одного из них равносильно непоявлению другого. Событие $\overline{A}$, противоположное событию A, происходит тогда и только тогда, когда событие A не происходит. Другими словами, наступление события $\overline{A}$ означает просто то, что событие A не наступило.
	$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$ (Симметрическая разность двух событий) Это событие, состоящее из исходов, входящих в A или B, но не входящих в A и в B одновременно.

Важную роль играют также следующие понятия: совместные и несовместные события, равновозможные и неравновозможные события.

Определение. События, которые в данных условиях могут происходить одновременно, называются **совместными.** В противном случае события называются **несовместными.**

События A и B несовместны, если произведение их есть событие невозможное, т.е. $AB = \varnothing$.

Например, события «наступила ночь» и «пошел снег» являются совместными, а события «наступила ночь» и «наступило утро» являются несовместными.

Определение. События называются **равновозможными**, если по условию испытания нет основания считать какое-либо из них более возможным, чем любое другое.

Например, «появление орла» и «появление решки» при одном бросании монеты являются равновозможными событиями, а «падение бутерброда маслом вверх» и «падение бутерброда масло вниз» — неравновозможными, т.к. бутерброд чаще падает маслом вниз из–за того, что после намазывания хлеба маслом центр тяжести бутерброда смещается из центра его симметрии в сторону слоя масла.

Рассмотрим простейшие примеры на алгебру событий.

Пример 1. Опыт состоит в двукратном бросании монеты. Опишите пространство элементарных событий. Представьте события A — «хотя бы один раз выпал герб» и B — «оба раза выпал герб» как подмножества пространства Ω. Придумайте другие способы записи этих событий.

Решение. Как при первом, так и при втором броске может выпасть герб (*Г*), а может выпасть цифра (*Ц*); каждый исход испытания будем обозначать упорядоченной парой.

Тогда $\Omega = \{ГГ, ГЦ, ЦГ, ЦЦ\}$. Событие A — хотя бы один раз выпал герб определятся подмножеством Ω: $A = \{ГГ, ГЦ, ЦГ\}$, а B — «оба раза выпал герб» $B = \{ГГ\}$.

Пусть A_1 — «первый раз выпал герб», а A_2 — «второй раз выпал герб», тогда $A_1 = \{ГГ, ГЦ\}$. $A_2 = \{ГГ, ЦГ\}$, $A_1 + A_2$ — или первый раз выпал герб, или второй раз выпал герб, т.е. хотя бы один раз выпал герб, а это — $A_1 + A_2 = A$.

Событие $A_1 \cdot A_2$ — и «первый раз выпал герб», и «второй раз выпал герб», т.е. «оба раза выпал герб» $A_1 \cdot A_2 = \{ГГ\} = B$.

Пример 2. Пусть *A*, *B* и *C* – произвольные события. Что означают события: $\overline{A}BC$, $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$, $\overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$, $A\overline{B}\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\overline{B}C$, $\overline{A}\overline{B}\overline{C} + \overline{A}\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}\overline{C}$?

Решение. $\overline{A}BC$ — первое событие не произошло, а второе и третье произошли; $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ —и *A* не произошло, и *B* не произошло, и *C* не произошло, т.е. ни одно из трех событий не произошло;

$\overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$ —или *A* не произошло, или *B* не произошло, или *C* не произошло, т.е.хотя бы одно из трех событий не произошло;

$A\overline{B}\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\overline{B}C$—или (*A* произошло, а *B*не произошло, и *C* не произошло), или (*A* не произошло, *B* произошло, а *C* не произошло), или (*A* не произошло, и *B* не произошло, а *C* произошло), т.е.произошло ровно одно из трех событий;

$\overline{A}\overline{B}\overline{C} + A\overline{B}\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\overline{B}C$— произошло не более одного из трех событий.

2.2. Задачи на основные определения

В задачах 1 — 3 для каждого из данных событий определите, каким оно является: невозможным, достоверным или случайным.

1. Из 25 студентов группы двое справляют свой день рождения:

a) 25 января,

b) 31 июня

Ответ: a) случайное, b) невозможное.

2. Сегодня в Москве барометр показывает нормальное атмосферное давление. При этом:

a) вода в кастрюле закипит при $70^0 C$;

b) когда температура упала до $-4^0 C$, вода в луже замерзла.

Ответ: a) невозможное, b) достоверное.

3. Случайным образом открывается художественное произведение и находится второе слово на левой странице. Это слово начинается:

a) с буквы М,

b) с буквы Ъ.

Ответ: a) случайное, b) невозможное.

4. На дорогу от дома до университета Миша тратит от 10 до 15 минут, если идет пешком, и от 2 до 3 минут, если едет на автобусе. При каких интервалах движения автобусов событие А – по пути в университет Мишу обгонит хотя бы один автобус, будет невозможным, при каких – случайным, при каких – достоверным?

Ответ: больше 7 минут – случайным,

меньше 7 минут – достоверным.

5. Около университета останавливаются автобусы трех маршрутов, идущих в сторону вокзала: №5, №13 и №23. Интервал движения автобусов каждого маршрута колеблется от 10

до 12 минут. Когда Саша, Маша, Боря и Наташа подошли к остановке, от нее отошел автобус №13, а еще через 7 минут подошел автобус №5. После этого каждый из ребят высказал свое мнение о том, автобус какого маршрута будет следующим:

Саша: Следующим обязательно будет №23,

Маша: Возможно, что следующим будет №23,

Боря: Возможно, что следующим будет №13,

Наташа: Невозможно, что следующим будет №5.

С кем из ребят вы согласны, а с кем нет? Объясните сделанный выбор.

Ответ: не прав только Саша

6. Три господина, придя в ресторан, сдали свои шляпы. Расходились по домам они уже в темноте и разобрали свои шляпы наугад. Какие из следующих событий невозможные, случайные, достоверные:

a) каждый надел свою шляпу,
b) все надели чужие шляпы,
c) двое надели чужие шляпы, а один — свою,
d) двое надели свои шляпы, а один — чужую?

7. Определите какие из событий совместные, какие несовместные.

В сыгранной партии в шахматы:

a) Катя выиграла, а Лариса проиграла,

b) Катя проиграла, Лариса проиграла.

Ответ: a) совместные, b) несовместные.

8. Из предложенных событий составьте всевозможные пары и выявите среди них пары совместных и пары несовместных событий:

a) «идет дождь»,

b) «на небе нет ни облачка»,

c) «наступило лето»

Ответ: «идет дождь» и «на небе нет ни облачка» — несовместные; «наступило лето» и «на небе нет ни облачка» и «наступило лето» и «идет дождь» — совместные.

9. Из предложенных событий составьте всевозможные пары и выявите среди них пары совместных и пары несовместных событий:

a) «наступило утро»,

b) «сегодня по расписанию 4 пары»,

c) «сегодня 1 января»,

d) «температура воздуха в Москве $+30^0$C»

Ответ: «сегодня по расписанию 4 пары»,и «температура воздуха в Москве $+30^0$C», «сегодня 1 января» и «температура воздуха в Москве $+30^0$C», «сегодня 1 января» и «сегодня по расписанию 4 пары» - несовместные; «наступило утро» и «температура воздуха в Москве $+30^0$C»и «наступило утро» и «сегодня по расписанию 4 пары» - совместные.

10. Ниже перечислены разные события. Укажите противоположные им события.

a) Мою новую соседку зовут или Таня, или Аня.

b) Все студенты получили оценку 5.

c) Из пяти выстрелов в цель попали хотя бы два.

d) На контрольной я не решил, как минимум, три задачи из пяти.

e) Хотя бы один из моих знакомых ездил в Норвегию.

Ответ: a) Мою новую соседку зовут не Таня и не Аня; b) Хотя бы один студент не получил 5; c) Из пяти выстрелов в цель попали менее двух; d) На контрольной я решил максимум две задачи из пяти; e) Ни один из моих знакомых не ездил в Норвегию.

11. Назовите событие, для которого противоположным является такое событие:

a) на контрольной работе больше половины группы получили пятерки;

b) все семь пулек в тире у меня попали мимо цели;

c) в нашей группе все умные и красивые;

d) в кошельке у меня есть десять рублей одной монетой или два доллара одной бумажкой.

Ответ: a) на контрольной работе пятерки получили не более половины группы или на контрольной работе больше половины группы не получили пятерки; b) в тире хотя бы одна пулька из семи у меня попала в цель; c) в нашей группе есть хотя бы один не умный или не красивый; d) в кошельке у меня нет ни десяти рублей одной монетой, ни двух долларов одной бумажкой.

2.3. Алгебра событий (задачи)

1. Пространство Ω состоит из четырёх элементарных событий. Перечислите все события. Каково их число?

Ответ. 16.

2. Имеются три одинаковые урны, в каждой из которых лежат неразличимые на ощупь белые и черные шары. Опыт состоит в выбор произвольной урны и вынимании произвольного шара. Пусть

H_1 − выбрали первую урну,

H_2 − выбрали вторую урну,

H_3 − выбрали третью урну,

A − вынули из урны белый шар,

$\overline{A}$ − вынули из урны черный шар.

Запишите следующие события.

a) Выбрали либо первую, либо вторую урну.
b) Выбрали не первую урну.
c) Из первой урны вынули белый шар.
d) Из третьей урны вынули черный шар
e) Из первой урны вынули чёрный шар, а из второй — белый.

Ответ a) $H_1 + H_2$, b) $\overline{H}_1 = H_2 + H_3$, c) AH_1, d) $\overline{A}H_3$,e) $\overline{A}H_1 + AH_3$.

3. Стрелок делает 3 выстрела по мишени. Событие A_i – попадание в мишень при i – ом выстреле. $(i=1,2,3)$. Выпишите через A_i пространство элементарных событий Ω и перечислите элементарные события, входящие в A – «попадание только при одном выстреле», B – «попадание хотя бы при двух выстрелах».

Ответ

$$\Omega=\left\{\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3,\overline{A}_1\overline{A}_2A_3,\overline{A}_1A_2\overline{A}_3,\overline{A}_1A_2A_3,A_1\overline{A}_2\overline{A}_3,A_1\overline{A}_2A_3,A_1A_2\overline{A}_3,A_1A_2A_3\right\}$$

$$A=\left\{\overline{A}_1\overline{A}_2A_3,\overline{A}_1A_2\overline{A}_3,A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\right\},\ B=\left\{\overline{A}_1A_2A_3,A_1\overline{A}_2A_3,A_1A_2\overline{A}_3,A_1A_2A_3\right\}.$$

4. Игральная кость бросается два раза. Выпишите пространство элементарных событий Ω. Определите событие A – «сумма выпавших очков равна 5» как подмножество пространства Ω.

Ответ

$$\Omega=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),\cdots,(6,5),(6,6)\},$$

$$A=\{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}.$$

5. Стрелок делает 3 выстрела по мишени. Событие A_i – попадание в мишень при i – ом выстреле $(i=1,2,3)$. Выразите через A_1, A_2, A_3 следующие события:

A – хотя бы одно попадание,

B – три промаха,

C – три попадания,

D – хотя бы один промах,

E – не меньше двух попаданий,

F – не больше одного попадания,

G – попадание в мишень после первого выстрела.

Ответ: $A=A_1+A_2+A_3$; $B=\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$;

$C=A_1A_2A_3$; $D=\overline{A}_1+\overline{A}_2+\overline{A}_3$;

$E=A_1A_2+A_1A_3+A_2A_3$;

$F=\overline{A}_1\overline{A}_2+\overline{A}_1\overline{A}_3+\overline{A}_2\overline{A}_3$; $G=\overline{A}_1(A_2+A_3)$.

6. Опыт состоит в бросании трех монет. Пусть монеты занумерованы и события $\Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_3$ означают выпадение герба соответственно на первой, второй и третьей монетах. Выразите через $\Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_3$ следующие события:

A – выпадение одного герба и двух цифр,

B – выпадение не более одного герба,

C – число выпавших гербов меньше числа выпавших цифр,

D – выпадение хотя бы двух гербов,

E – на первой монете выпал герб, а на остальных – цифры,

F – на первой монете выпала цифра и хотя бы на одной из остальных выпал герб.

Ответ: $A=\Gamma_1\overline{\Gamma}_2\overline{\Gamma}_3+\overline{\Gamma}_1\Gamma_2\overline{\Gamma}_3+\overline{\Gamma}_1\overline{\Gamma}_2\Gamma_3$;

$B=\overline{\Gamma}_1\overline{\Gamma}_2+\overline{\Gamma}_1\overline{\Gamma}_3+\overline{\Gamma}_2\overline{\Gamma}_3$;

$C=\overline{\Gamma}_1\overline{\Gamma}_2+\overline{\Gamma}_1\overline{\Gamma}_3+\overline{\Gamma}_2\overline{\Gamma}_3$;

$$D = \Gamma_1\Gamma_2 + \Gamma_1\Gamma_3 + \Gamma_2\Gamma_3;\ E = \Gamma_1\overline{\Gamma}_2\overline{\Gamma}_3;$$
$$F = \overline{\Gamma}_1(\Gamma_2 + \Gamma_3).$$

7. Производится наблюдение за группой, состоящей из четырех однородных объектов. Каждый из них за время наблюдения может быть обнаружен, а может быть не обнаружен. Рассматриваются события

A — «обнаружение ровно одного из четырех объектов»;

B — «обнаружение хотя бы одного объекта»;

C — «обнаружение в точности двух объектов».

В чем состоят события $A+B$, AB, $B+C$, BC, $A+C$, AC, $\overline{B}$, $\overline{C}$ Опишите их словесно и проверьте, не совпадают ли они с *A, B*, и *C*.

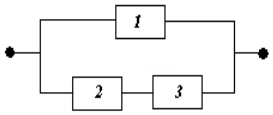
Ответ. $A+B=B$, $AB=A$, $B+C=B$, $BC=C$, $A+C$ − обнаружение одного или двух объектов, AC =Ø, $\overline{B}$ − необнаружение объектов, $\overline{C}$ − обнаружение одного, или трех, или четырех объектов, или необнаружение объектов совсем.

8. Блок в электрической цепи содержит два параллельно соединенных элемента; событие A_1 есть исправность первого элемента, A_2 − второго. Выразите через A_1 и A_2 следующие события: A − блок пропускает ток, B − блок не пропускает ток, C − в блоке исправен только один элемент.

Ответ $A = A_1 + A_2 = A_1A_2 + \overline{A}_1A_2 + A_1\overline{A}_2$

$B = \overline{A}_1\overline{A}_2$, $C = \overline{A}_1A_2 + A_1\overline{A}_2$.

9. Участок электрической цепи составлен по указанной схеме. Событие $A_i - i-$й элемент проводит ток $(i = 1,2,3)$. Выразите через A_1, A_2, A_3 событие− «участок цепи проводит ток».



Ответ

$A_1 + A_2A_3 = A_1A_2A_3 + A_1\overline{A}_2A_3 + A_1A_2\overline{A}_3 + A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1A_2A_3$.

10. Машинно-котельная установка состоит из двух котлов и одной машины. Событие A − «исправна машина», событие B_i $i = 1,2$ − «исправен i-й котел», событие C означает работоспособность машинно-котельной установки, что будет в том случае, если исправны машина и хотя бы один котел. Выразите события C и $\overline{C}$ через A и B_i.

Ответ $C = A(B_1 + B_2) = AB_1B_2 + A\overline{B}_1B_2 + AB_1\overline{B}_2$.

3. КЛАССИЧЕСКАЯ И ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ

3.1. Классическая вероятность

Классической вероятностью события A (обозначается $P(A)$) называется отношение числа m исходов, благоприятствующих данному событию A, к общему числу n всех несовместных, единственно-возможных и равновозможных исходов: $P(A) = \frac{m}{n}$.

Пример 1. Правильная игральная кость бросается один раз. Найдите вероятности следующих событий: A — выпадение 4 очков; B — выпадение нечетного числа очков; C

— выпадение более четырёх очков; D — выпадение менее 7 очков; E — выпадение менее 1 очка.

Решение. Из условия задачи (игральная кость правильная) следует, что все исходы равновозможны, а их всего 6 — выпадение 1 очка, 2,3,4,5 и 6. Применим формулу классической вероятности. Общее количество исходов $n=6$. Для события A $m_A=1$, поэтому $P(A)=\frac{m_A}{n}=\frac{1}{6}$; для события B $m_B=3$, поэтому $P(B)=\frac{m_B}{n}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$; для события C $m_C=2$, поэтому $P(C)=\frac{m_C}{n}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$; для события D $m_D=6$, поэтому $P(D)=\frac{m_D}{n}=\frac{6}{6}=1$, очевидно, событие D — достоверное; для события E $m_E=0$, поэтому $P(E)=\frac{m_E}{n}=\frac{0}{6}$, очевидно, событие E — невозможное.

Пример 2. В урне 3 белых и 7 черных шаров. Наудачу поочерёдно вынимаются два из них. Найдите вероятность того, что вынуты а) 2 белых шара, б) 2 чёрных шара, в) белый и чёрный шары.

Решение. Из условия задачи (слово «наудачу») следует, что все исходы равновозможны. Применим формулу классической вероятности. Общее количество исходов n найдём как число размещений из 10 по 2 (слово «поочерёдно»): $n=A_{10}^2=\frac{10!}{8!}=90$. Рассмотрим события A — вынуты два белых шара, B — вынуты два чёрных шара, C — вынут один белый и один чёрный шар. Найдём количества благоприятствующих исходов для каждого из этих событий и соответствующие вероятности.

а) Количество всевозможных пар белых шаров можно найти с помощью числа размещений из 3 по 2: $m_A=A_3^2=6$, поэтому $P(A)=\frac{m_A}{n}=\frac{6}{90}=\frac{1}{15}$.

б) Количество всевозможных пар чёрных шаров можно найти с помощью числа размещений из 7 по 2: $m_B=A_7^2=42$, поэтому $P(B)=\frac{m_B}{n}=\frac{42}{90}=\frac{7}{15}$.

в) Количество всевозможных пар из одного белого и одного чёрного шара находим по правилам умножения и сложения: $m_C=3\cdot 7+7\cdot 3=42$, поэтому $P(C)=\frac{m_C}{n}=\frac{42}{90}=\frac{7}{15}$.

Пример 3. В группе 15 студентов, из которых 6 отличников. По списку наудачу отобраны 5 студентов. Найдите вероятность того, что среди отобранных студентов нет отличников.

Решение. Для вычисления события A (среди отобранных студентов нет отличников) воспользуемся формулой $P(A)=\frac{m}{n}$, где n – общее число возможных элементарных исходов испытания, а m – число элементарных исходов благоприятствующих появлению события A.

В нашем случае общее число возможных элементарных исходов испытания равно числу способов, которыми можно отобрать 5 студентов из 15, т.е. C_{15}^5. А общее число благоприятствующих исходов равно числу способов, которыми можно отобрать 5 студентов из 9 неотличников, т.е. C_9^5. Следовательно, $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{C_9^5}{C_{15}^5}=\frac{\frac{9!}{5!\cdot 4!}}{\frac{15!}{5!\cdot 10!}}=\frac{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}{11\cdot 12\cdot 13\cdot 14\cdot 15}=\frac{6}{143}$.

Из решения предыдущих примеров вырисовывается часто встречающаяся в классической вероятности схема, которую можно условно назвать «Схемой с мечеными элементами».

Пусть имеется N элементов, среди которых M меченых (попросту говоря, отличных от остальных). Наудачу выбирают n элементов. Какова вероятность, что среди них m меченых? Разумеется, считаем, что $M < N$, $n < N$ и $m < M$ (Рисунки 1 и 2).

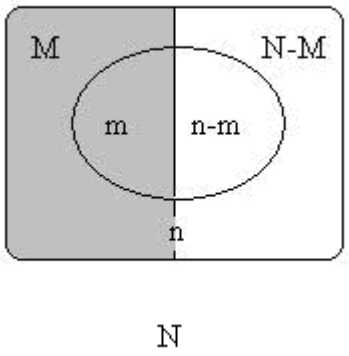


Рис. 1. Схема с мечеными элементами.

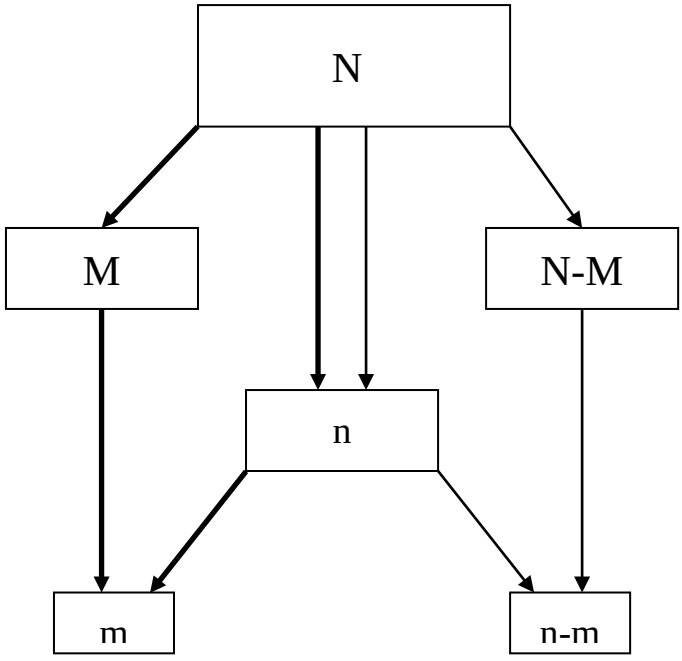


Рис. 2. Схема с мечеными элементами.

Решение. Из условия задачи (слово «наудачу») следует, что все исходы равновозможны. Применим формулу классической вероятности. Общее количество исходов найдём как число сочетаний из N по n: $C_N^n = \frac{N!}{n!\cdot(N-n)!}$. Рассмотрим события A — из n выбранных элементов m меченых. Меченые элементы можно выбрать только из имеющихся M. Это можно сделать $C_M^m = \frac{M!}{m!\cdot(M-m)!}$ способами. Оставшиеся $n-m$ элементов выбираем из немеченых $N-M$. Это можно сделать

$C_{N-M}^{n-m} = \dfrac{(N-M)!}{(n-m)!\cdot(N-M-(n-m))!}$ способами. По правилу умножения общее количество благоприятствующих исходов будет равно

$C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m} = \dfrac{M!}{m!\cdot(M-m)!} \cdot \dfrac{(N-M)!}{(n-m)!\cdot(N-M-(n-m))!}$, а соответствующая вероятность

$$P(A) = \frac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n} = \frac{\dfrac{M!}{m!\cdot(M-m)!} \cdot \dfrac{(N-M)!}{(n-m)!\cdot(N-M-(n-m))!}}{\dfrac{N!}{n!\cdot(N-n)!}}.$$

При работы с заданными числами формула не будет казаться столь устрашающей.

Пример 4. В урне 12 белых и 8 черных шаров. Наудачу вынимаются пять из них. Найдите вероятность того, что вынуты3 белых и 2 чёрных шара (событие A).

Решение. Будем считать, что белые шары — меченые. Составляем схему и решаем задачу (Рисунок 3).

$$P(A) = \frac{C_{12}^3 \cdot C_8^2}{C_{20}^5} = \frac{55}{3876} \approx 0{,}014.$$

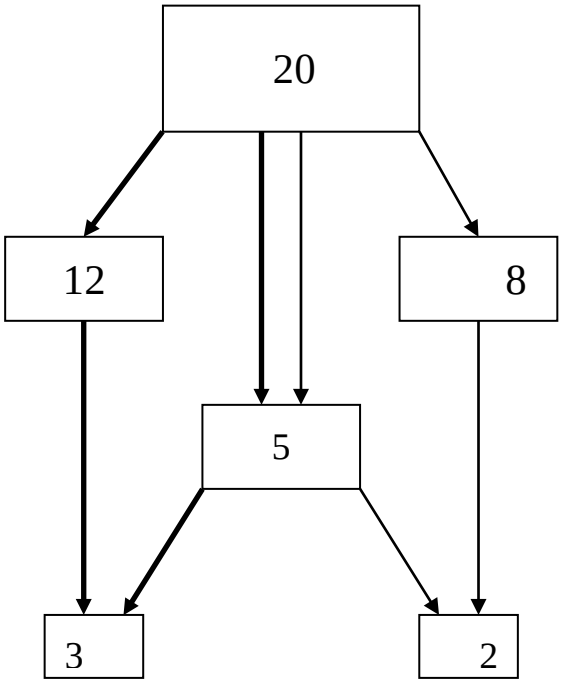


Рис. 3. Схема с мечеными элементами к примеру 2.

3.2. Геометрическая вероятность

Применяется, если множество несовместных, равновозможных и единственно возможных исходов бесконечно и им можно сопоставить точки некоторой геометрической фигуры G (линейной, поверхностной или объёмной), а исходы, благоприятствующие событию A, можно сопоставить точкам фигуры g, включенной в G. **Геометрической вероятностью** события A называется

$$P(A) = \frac{mesg}{mesG},$$

где $mes-$ мера фигуры (длина, площадь или объём).

Пример 1. Внутрь круга радиуса 7 наудачу брошена точка. Какова вероятность того, что точка окажется внутри круга радиуса 4, заключённого полностью в первом круге?

Решение. Множество всевозможных исходов — точки круга радиуса 7 (фигура G). Из условия задачи (слово «наудачу») следует, что все исходы равновозможны. Множество благоприятствующих исходов — точки круга радиуса 4 (фигура g). Мерой этих фигур служит площадь. Вероятность описанного события A $P(A)=\dfrac{mesg}{mesG}=\dfrac{S_g}{S_G}=\dfrac{\pi\cdot 4^2}{\pi\cdot 7^2}=\dfrac{16}{49}\approx 0{,}33$.

Не всегда условия задачи столь явно указывают на геометрическую вероятность. Рассмотрим достаточно известную задачу из [5].

Пример 2.Мэрвин заканчивает работу и приходит на станцию метро в произвольный момент времени между 17 и 18 часами. Его мама и невеста живут в противоположных частях города. Мэрвин садится в первый подошедший к платформе поезд, идущий в любом направлении, и обедает с той из дам, к которой приедет. Мать Мэрвина жалуется на то, что он редко у нее бывает, но юноша утверждает, что его шансы пообедать с ней и с невестой равны, так как поезда в обоих направлениях ходят одинаково часто. Однако Мэрвин обедал с матерью дважды в течение 20 дней. Объясните это явление.

Решение. Сопоставим промежуток времени между 17 и 18 часами некоторому отрезку AB. Из условия задачи (слова «в произвольный момент времени») следует, что все исходы (точки отрезка) равновозможны. Определим множество благоприятствующих исходов для поездки в каком-нибудь одном из этих направлений (событие M). Предположим, что поезда ходят с интервалом в полчаса и отложим на отрезке AB моменты отправления поездов.

а) Пусть A, C, B — моменты отправления поезда в интересующем нас направлении, а E и D — моменты отправления поезда в противоположном направлении (Рисунок 4).Множество благоприятствующих исходов — точки отрезков EC и DB, тогда $P(M)=\dfrac{mesg}{mesG}=\dfrac{l(EC)+l(DB)}{l(AB)}=\dfrac{1}{2}$.

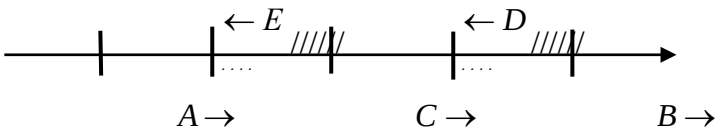


Рис. 4. Движение поездов в случае а).

б) Пусть A, C, B — моменты отправления поезда в интересующем нас направлении, а E и D — моменты отправления поезда в противоположном направлении (Рисунок 5). Множество благоприятствующих исходов — точки отрезков EC и DB, тогда $P(M)=\dfrac{mesg}{mesG}=\dfrac{l(EC)+l(DB)}{l(AB)}=\dfrac{1}{4}$. Итак, дело в расписании.

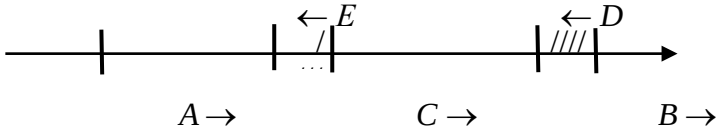


Рис. 5. Движение поездов в случае б).

Покажите пример расписания, при котором $P(M)=0{,}1$.

Пример 3. Вокруг дома 30м х 10м на расстоянии 5м проложена дорожка (см. рисунок 6), по которой с постоянной скоростью ездит малыш. Беспокойная мама время от времени (случайно) выглядывает в окно. Какова вероятность увидеть на дорожке малыша?

Решение. Множество точек дорожки — это фигура G, а видимая из окна часть дорожки — фигура g; найдём их длины. $l(G)=2\cdot(30+5+5)+2\cdot(10+5+5)=120$, $l(g)=30+5+5+2\cdot5=50$. $P(A)=\dfrac{mesg}{mesG}=\dfrac{l(g)}{l(G)}=\dfrac{50}{120}\approx0{,}42$.

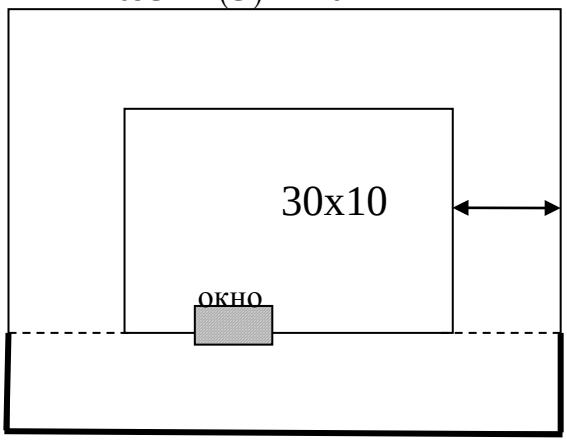


Рис. 6. План к примеру 3.

3.3. Статистическая вероятность

Относительной частотой (частостью) события A в n испытаниях называется отношение числа m испытаний, в которых появилось событие A, к общему числу n всех испытаний $P^*(A)=\dfrac{m}{n}$

Основой для создания теории вероятностей послужил следующий опытный факт: относительная частота, меняясь от случая к случаю, колеблется около некоторого постоянного числа, которое и является (как потом выяснилось) вероятностью события (закон устойчивости относительных частот). Поэтому относительную частоту $P^*(A)$ или близкое к ней число можно принять за вероятность события A. Это и есть **статистическая вероятность** $P^*(A)\approx P(A)$.

Пример. Монету подбросили 100 раз (n), герб выпал 54 раза (m). Пусть A — выпадение герба. Относительная частота $P^*(A)=\dfrac{54}{100}=0{,}54$. Вероятность $p(A)$ для правильной монеты $p(A)=0{,}5$, $0{,}54\approx0{,}5$. При другой серии из 100 подбрасываний этой монеты относительная частота, вообще говоря, изменится, но останется приближенно равной 0,5.

3.4. Задачи

В группе 12 студентов, из которых 7 отличников. По списку наудачу отобраны 5 студентов. Найдите вероятность того, что все отобранные студенты – отличники.

1. Игральная кость бросается 2 раза. Какова вероятность, что оба раза выпадет одинаковое число очков?

2. Игральная кость бросается 2 раза.

а) Какова вероятность, что оба раза выпадет одинаковое число очков?

б) Какова вероятность получить сумму, равную 7?

в) Какова вероятность получить сумму, равную 8?

г) Какова вероятность, что оба раза выпадет более 3 очков?

д) Известно, что в сумме выпало 9 очков. Найдите вероятность, что при втором броске выпало 6 очков.

3. Игральная кость бросается три раза. Найдите вероятность того, что сумма выпавших очков равна шестнадцати.

4. Игральная кость бросается три раза. Найдите вероятность того, что сумма выпавших очков – не меньше семнадцати.

5. Игральная кость бросается 4 раза. Какова вероятность, что хотя бы один раз выпадет 6 очков?

6. Две игральные кости бросаются 24 раза. Какова вероятность того, что хотя бы один раз выпадут две шестерки?

7. Слово «корабль» разрезали на буквы, которые тщательно перемешали, а затем одну за другой вынули 4 буквы и расположили их в последовательность. Какова вероятность, что получилось слово «роба»?

8. На карточках написаны буквы «о», «р», «с», «т». Карточки выкладывают в произвольном порядке. Какова вероятность получить

а) слово «трос»?

б) осмысленное слово?

9. Почти одновременно 7 человек, в том числе Коля, заказали по телефону пиццы, все разных видов. Оператор перепутал 2 и 3 заказы. С какой вероятностью Коле привезут его пиццу?

10. Для экскурсии по подземной реке группа из 18 туристов произвольным образом рассаживается по двум одинаковым девятиместным лодочкам. Какова вероятность того, что туристы Иванов и Петров окажутся в одной лодочке?

11. В зрительном зале кинотеатра имеется 9 рядов, пронумерованных подряд от 1 до 9, а в каждом ряду по 9 мест, также пронумерованных от 1 до 9. Зритель наудачу занимает место. Что вероятнее: сумма номеров ряда и места в ряду окажется четной или нечетной?

12. Найдите вероятность того, что дни рождения 12 человек приходятся на разные месяцы года.

13. В кошельке находятся 5 монет по 10 рублей и 7 монет по 1 рублю. Наудачу извлекаются две монеты. Найдите вероятность того, что обе извлеченные монеты имеют достоинство в 10 рублей.

14. Куб, все грани которого окрашены, распилен на 1000 кубиков одинакового размера. Полученные кубики тщательно перемешаны. Определите вероятность того, что извлеченный наудачу кубик будет иметь

а) три окрашенные грани,

б) две окрашенные грани,

в) одну окрашенную грань,

г) неокрашенные грани?

15. Студент записал в тетради произвольное двузначное число. Какова вероятность, что сумма цифр этого числа равна 7?

16. Какова вероятность того, что произвольно выбранное четырехзначное число

а) не содержит одинаковых цифр,

б) содержит ровно две одинаковые цифры,

в) содержит ровно три одинаковые цифры?

17. Найдите вероятность того. Что среди наудачу выбранных трёх цифр

а) нет повторяющихся,

б) две совпадают,

в) все три совпадают.

18. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5 выбирается наудачу одна, а из оставшихся — вторая. Найдите вероятность того, что нечётная цифра будет выбрана

а) первый раз,

б) второй раз,

в) оба раза.

19. Из 30 чисел (1, 2, …, 29, 30) случайно отбираются 10 различных чисел. Найдите вероятности следующих событий

а) все отобранные числа нечётные,

б) из отобранных чисел ровно 5 чисел делятся на 3,

в) отобрано пять чётных и пять нечётных чисел, причём только одно делится на 10.

20. Числа 1, 2, …, n расставлены случайным образом. Найдите вероятность того, что

а) 1 и 2 расположены рядом,

б) 1 и 2 расположены рядом, притом в порядке возрастания.

21. На полке в случайном порядке расставлены 40 книг, среди которых находится четырёхтомник И. Хмелевской. Найдите вероятность того, что

а) эти тома стоят в порядке возрастания, но не обязательно рядом,

б) эти тома стоят рядом, но не обязательно в порядке возрастания,

в) эти тома стоят рядом в порядке возрастания.

22. В новом доме имеется 20 квартир, из которых 8 расположены на крайних этажах. Квартиры распределяются по жребию. Найдите вероятность того, что эти 8 квартир достанутся 8 молодым семьям?

23. В партии из 14 деталей имеется 5 бракованных. Наудачу отобраны четыре детали. Найдите вероятность того, что среди отобранных деталей нет бракованных.

24. Из урны, в которой лежат 5 белых и 8 черных шара, наудачу по одному извлекают три шара без возвращения. Найдите вероятность того, что только один из извлеченных шаров будет белым.

25. В наборе из 16 конфет 10 содержат начинку, а 6 нет. Из набора случайным образом выбирается 7 конфет. Какова вероятность того, что среди них

а) 3 конфеты без начинки,

б) одна конфета с начинкой,

в) более 5 конфет без начинки,

г) все конфеты с начинкой,

д) все конфеты без начинки?

26. В кемпинге молодежная компания из 10 девушек и 8 юношей организует уборку территории, выбирая троих дежурных по жребию. Какова вероятность, что будут выбраны одни юноши?

27. В урне находятся 20 шаров: 5 черных, 8 белых и 7 красных. Наудачу вынимаются два шара. Какова вероятность, что

а) они разных цветов,

б) они одного цвета?

28. Случайным образом в группе из 14 студентов отбирают троих для продолжения учебы в Кембридже. Какова вероятность для

а) студента этой группы Вани попасть в их число,

б) студентов этой группы Тани и Вани попасть в их число?

29. Пять из 20 билетов являются «счастливыми» для студентов. Наудачу два студента вытаскивают по билету. Найдите вероятность того, что вынуты «счастливые» билеты?

30. Колода из 36 карт хорошо перемешана. Найдите вероятность того, что

а) четыре туза расположены рядом,

б) места расположения тузов образуют арифметическую прогрессию с шагом 7.

31. Из полной колоды карт (52 листа) вынимают сразу 4 карты. Найдите вероятность того, что все эти 4 карты будут разных мастей.

Те же условия, но каждая карта после вынимания возвращается в колоду.

32. Какова вероятность, что при розыгрыше 10 призов каждый из четырех участников получит хотя бы один?

33. В лифт восьмиэтажного дома на первом этаже вошли 3 человека. Найдите вероятность того, что все пассажиры выйдут

а) на пятом этаже,

б) на одном этаже,

в) на разных этажах,

предполагая, что все способы распределения пассажиров по этажам, начиная со второго, равновозможны.

34. После бури на участке дороги между 40 и 70 км телефонной линии произошел обрыв провода. Какова вероятность, что обрыв произошел между 55 и 62 км?

35. Вход в бухту загражден минами, расположенными на расстоянии 45 м друг от друга. Какова вероятность для судна шириной 30 м благополучно миновать это заграждение?

36. Противотанковые мины поставлены на прямой через 15 метров. Танк шириной 3 м движется перпендикулярно этой прямой. Какова вероятность, что он подорвется?

37. В одной из популярных в Америке игр игрок бросает монету с достаточно большого расстояния на поверхность стола, разграфленную на однодюймовые квадраты. Если монета (3/4 дюйма в диаметре) попадает полностью внутрь квадрата, то игрок получает награду, в противном случае он теряет свою монету. Каковы шансы выиграть, если монета упала на стол?

Как изменится ответ, если линии имеют толщину в 1/16 дюйма?

38. Игровое поле расчерчено на чередующиеся красные и зеленые полосы. Ширина красных полос 35 см, а зеленых — 20 см. Игрок бросает на поле круглый диск радиуса 10 см. Если большая часть диска попадает на зеленое поле, игрок выигрывает, иначе — проигрывает. Какова вероятность выигрыша?

39. Внутрь куга радиуса R наудачу брошена точка. Найдите вероятность того, что точка окажется внутри вписанного в круг

а) квадрата,

б) правильного треугольника,

в) правильного шестиугольника.

40. Из отрезка $[0;1]$ наудачу выбираются два числа p и q. Найдите вероятность того, что

а) $q \le 0{,}2p$,

б) многочлен $x^2 + px + q$ имеет действительные корни.

Как изменится ответ, если взять отрезок $[-1;1]$?

41. Из отрезка $[0;1]$ наудачу выбираются два числа p и q. Рассмотрим треугольник со сторонами 1, p и q, причем случай $p+q\le 1$ исключается. Какова вероятность, что полученный треугольник будет тупоугольным?

42. Какова вероятность того, что сумма трех наудачу взятых отрезков, длина каждого из которых не превосходит 3, будет больше 3?

3.5. Дополнительные задачи

1. Десять супружеских пар обедают вместе. Из них по жребию выбирают 5 человек, которые должны накрывать на стол. Чему равна вероятность того, что среди этих 5 человек не будет ни одной супружеской пары?

2. В приемной у зубного врача ожидают своей очереди 2 женщины и 10 мужчин. К их услугам 8 экземпляров последнего номера журнала и 4 экземпляра утренней газеты. Чему равна вероятность того, что при случайном распределении женщины будут читать одно и то же?

3. На 10 карточках написаны числа 3, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 6. Вынимаются наугад одна за другой 2 карточки. Число, написанное на первой карточке, берется за числитель, а на второй — за знаменатель. Какова вероятность того, что полученная дробь правильная?

4. Кусок проволоки длиной 20 *см* согнули в наудачу выбранном месте. После этого, согнув проволоку еще в двух местах (не ломая ее), сделали прямоугольную рамку. Какова вероятность того, что площадь полученного прямоугольника не превосходит 21 $см^2$?

5. В мешке лежат белые и красные шары. Вася вынул один шар, затем заглянул в мешок и сказал: ≪вероятность сейчас вынуть белый шар 5/7≫, после чего положил шар обратно в мешок. Затем один шар вынула Маша, заглянула в мешок и сказала: ≪а сейчас вероятность вынуть белый шар 12/17≫. Сколько шаров было в мешке первоначально?

6. Автобус приходит на остановку каждые 15 минут, а маршрутка — каждые 10 минут. Известно, что маршрутка ушла с остановки 2 минуты назад. Что теперь с большей вероятностью придет раньше: автобус или маршрутка?

7. Семь различных шаров произвольным образом раскладываются по 7 различным ящикам. Какова вероятность, что

а) в каждой коробке будет по шару,

б) ровно одна коробка окажется пустой?

4. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

4.1. Теоремы сложения

Если события A и B — несовместные, то согласно аксиоме $P(A+B)=P(A)+P(B)$. Аналогично для любого числа попарно несовместных событий

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n).$$

Для совместных событий используем теорему сложения.

Теорема сложения. $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$ (1)

Приведите словесную формулировку этой теоремы.

По мере добавления слагаемых формулировки усложняются как для формулы включений и исключений в дискретной математике. Так для трёх слагаемых формула принимает вид

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC) \quad (2)$$

Формулы становятся громоздкими, да и при использовании этих формул необходимо уметь вычислять вероятности произведения событий.

Пример 1. Вероятности попарно несовместных событий *A*, *B* и *C* равны соответственно 0,2; 0,3 и 0,4. Какова вероятность появления хотя бы одного из них?

Решение. Так как события несовместны, то

$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)=0{,}2+0{,}3+0{,}4=0{,}9$.

Пример 2. В салоне «Море цветов» наиболее востребованными являются розы и хризантемы. Вероятность того, что к концу рабочего дня закончатся розы, равна 0,3, а для хризантем эта вероятность равна 0,4, вероятность того, что закончатся и розы, и хризантемы равна 0,15. Найдите вероятность того, что к концу рабочего дня в салоне можно будет купить и розы, и хризантемы.

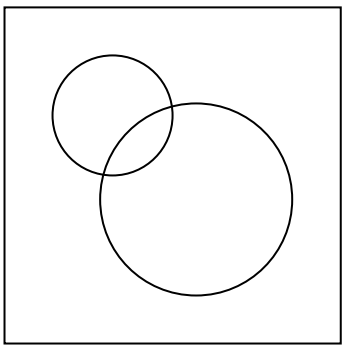
Решение. Пусть событие A— к концу дня закончатся розы, а B — к концу дня закончатся хризантемы; тогда AB — закончатся и розы, и хризантемы, $P(A)=0{,}3$, $P(B)=0{,}4$, а $P(AB)=0{,}15$. Событие— останутся и розы, и хризантемы — противоположно событию $A+B$— или закончатся розы, или закончатся хризантемы. Найдём $P(A+B)$ по формуле (1):

$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0{,}3+0{,}4-0{,}15=0{,}55$. Следовательно, вероятность противоположного события $P(\overline{A+B})=1-P(A+B)=1-0{,}55=0{,}45$.

В рассмотренном примере вероятность $P(AB)$ нам была задана. Чтобы научиться находить подобные вероятности, нам потребуются условные вероятности и теоремы умножения.

4.2. Условная вероятность. Теоремы умножения

Условной вероятностью события B при условии A (обозначается $P_A(B)$ или $P(B/A)$) называется вероятность события B, вычисленная в предположении, что событие A произошло.



В случае классической вероятности

$$p(A)=\frac{|A|}{|\Omega|},\ p(B)=\frac{|B|}{|\Omega|},\ p(A\cdot B)=p(A\cap B)=\frac{|A\cap B|}{|\Omega|}$$

Предположение, что событие A произошло, меняет пространство элементарных событий: теперь это только события, составляющие A, а благоприятствующие – $A\cap B$, поэтому

$$P_A(B)=\frac{|A\cap B|}{|A|}=\frac{\frac{|A\cap B|}{|\Omega|}}{\frac{|A|}{|\Omega|}}=\frac{P(A\cdot B)}{P(A)}.$$

Итак, $P_A(B)=\dfrac{P(A\cdot B)}{P(A)}$. (1)

По формуле (1) вычисляется условная вероятность для всех случаев (не только классическая).

Из (1) следует $P(A\cdot B)=P(A)\cdot P_A(B)$.

Теорема умножения 1. Вероятность совместного появления событий A и B равна вероятности первого, умноженной на вероятность второго, вычисленного в предположении, что первое произошло

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P_A(B).$$

Пример 1.Имеются три карточки. На одной с обеих сторон написан 0, на другой – 1, а на третьей с одной стороны 0, а с другой 1. Одна из карточек выбирается наудачу и произвольной стороной кладётся на стол. Предположим, что на лицевой стороне мы видим 0. Какова вероятность, что с другой стороны будет 1?

Решение. Введем события:

A – на лицевой стороне – 0; B – на оборотной – 1.

$\Omega = \{0_1 0_2; 0_2 0_1; 0_1 1_2; 1_2 0_1; 1_1 1_2; 1_2 1_1\}$ – пространство элементарных событий (индекс указывает физическую сторону карточки).

$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Найдём $P_A(B) = P(B/A)$. $A = \{0_1 0_2; 0_2 0_1; 0_1 1_2\}$ $B = \{0_1 1_2\}$.

$P_A(B) = 1/3$.

Пример 2. Монета бросается два раза. Событие A – появление герба при первом бросании, B – появление цифры при втором бросании. Найдите $P(A), P(B), P_A(B)$.

Решение. $\Omega = \{ГГ, ГЦ, ЦГ, ЦЦ\}$ – пространство элементарных событий. Тогда

$P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{2}$, $P_A(B) = \frac{1}{2} = P(B)$.

События A и B называются **независимыми**, если условная вероятность каждого из них равна его безусловной вероятности.

Теорема умножения 2. Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению вероятностей двух этих событий $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$.

События $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ называются **независимыми в совокупности**, если каждое из них и любая комбинация из остальных есть события независимые.

Теорема умножения 3. Вероятность произведения событий $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$

$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A)_n = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 \cdot A_2}(A_3) \cdot \ldots \cdot P_{A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_{n-1}}(A_n)$.

Теорема умножения 4. Если события $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ независимы в совокупности, то вероятность произведения этих событий $P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n)$.

Пример 3. В урне 3 белых и 7 черных шаров. Наудачу поочередно вынимаются два из них. Найдите вероятность того, что вынуты 2 белых шара.

Событие A – первым вытащен белый шар, B – вторым вытащен белый шар.

Решение. $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B) = 3/10 \cdot 2/9 = 1/15$.

Сравните с решением в пункте 3.1. Рассмотрите остальные случаи.

Пример 4. Два стрелка делают по выстрелу по мишени. Вероятность попадания первого $p_1 = 0{,}8$, второго – $p_2 = 0{,}7$. Найдите вероятность того, что:

а) оба стрелка попадут в мишень;

б) хотя бы один попадет в мишень.

Решение. а) Пусть событие A_1 – попадание первого, A_2 – попадание второго, A – оба попали. $p(A) = p(A_1 \cdot A_2) = p(A_1) \cdot p(A_2) = p_1 \cdot p_2 = 0{,}8 \cdot 0{,}7 = 0{,}56$.

б) Пусть событие B – хотя бы одно попадание.

Первый способ решения:

$B = A_1 \cdot \overline{A_2} + \overline{A_1} \cdot A_2 + A_1 \cdot A_2$, где A_1 и A_2 независимые, а $A_1 \cdot \overline{A_2}$, $A_1 \cdot A_2$ и $\overline{A_1} \cdot A_2$ – попарно несовместные, поэтому

$p(B) = p(A_1 \cdot \overline{A_2}) + p(\overline{A_1} \cdot A_2) + p(A_1 \cdot A_2) = p(A_1) \cdot p(\overline{A_2}) + p(\overline{A_1}) \cdot p(A_2) + p(A_1) \cdot p(A_2) =$

$= 0{,}8 \cdot (1 - 0{,}7) + (1 - 0{,}8) \cdot 0{,}7 + 0{,}8 \cdot 0{,}7 = 0{,}94.$

Второй способ:

$B = A_1 + A_2$, а так как A_1 и A_2 – совместные события, то

$p(B) = p(A_1) + p(A_2) - p(A_1 \cdot A_2) = 0{,}8 + 0{,}7 - 0{,}8 \cdot 0{,}7 = 0{,}94$.

Третий способ:

Событие $\overline{B}$ – ни один не попал.

$\overline{B} = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2}$

$p(\overline{B}) = p(\overline{A_1}) \cdot p(\overline{A_2}) = (1 - 0{,}8) \cdot (1 - 0{,}7) = 0{,}06$

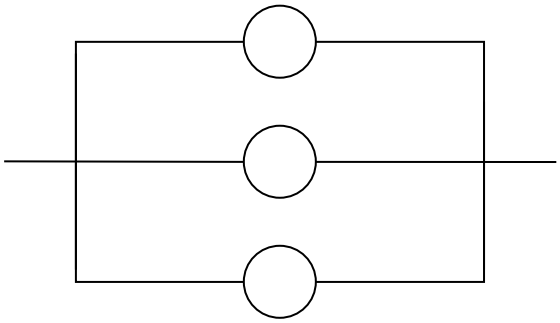
$p(B) = 1 - p(\overline{B}) = 1 - 0{,}06 = 0{,}94.$

Пример 5. В электрическую цепь последовательно включены два элемента, работающие независимо друг от друга. Вероятности отказов элементов равны соответственно 0,1 и 0,2. Найдите вероятность того, что тока в цепи не будет.

Решение. Введем обозначения событий: A_k - откажет k–й элемент, A – тока в цепи не будет. Тогда

$P(A) = P(A_1) \cdot P(\overline{A_2}) + P(\overline{A_1}) \cdot P(A_2) + P(A_1) \cdot P(A_2) = 0{,}1 \cdot (1 - 0{,}2) + (1 - 0{,}1) \cdot 0{,}2 + 0{,}1 \cdot 0{,}2 = 0{,}28$.

Пример 6. Надежность i–го элемента $(1 \le i \le 3)$ (надежность – вероятность безотказной работы в течение некоторого времени) равна p_i. Найдите вероятность безотказной работы схемы.



Решение. Пусть события A – безотказная работа схемы, A_i – безотказная работа i–го элемента. Тогда $A = A_1 + A_2 + A_3$, причём A_1, A_2, A_3 – совместные события. Рассмотрим событие $\overline{A}$ – ни один из элементов не работает. $\overline{A} = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}$.

$\overline{A_1}, \overline{A_2}, \overline{A_3}$ – независимые события.

$p(\overline{A}) = p(\overline{A_1}) \cdot p(\overline{A_2}) \cdot p(\overline{A_3}) = (1 - p_1) \cdot (1 - p_2) \cdot (1 - p_3) = q_1 \cdot q_2 \cdot q_3$.

$p(A) = 1 - p(\overline{A}) = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot q_3$, здесь $q_i = 1 - p_i$.

Пример 7. Студент знает ответы на 15 из 20 вопросов программы. Найдите вероятность того, что а) студент ответит на один из двух предложенных ему вопросов, б) студент ответит на все три предложенных ему вопроса.

Решение. Введем обозначения событий: A_k (студент знает ответ на *к*–й предложенный ему вопрос), A (студент знает ответы на один из двух предложенных ему вопросов), B (студент знает ответы на все три предложенных ему вопроса).

а). $A = A_1 \cdot \overline{A}_2 + \overline{A}_1 \cdot A_2$. Так как по условию задачи события A_1 и A_2 зависимы, то $P(A) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(\overline{A}_2) + P(\overline{A}_1) \cdot P_{\overline{A}_1}(A_2) = \frac{15}{20} \cdot \frac{5}{20-1} + \frac{5}{20} \cdot \frac{15}{20-1} = \frac{15}{38}$.

б). $B = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$. Так как по условию задачи события A_1, A_2 и A_3 зависимы, то $P(B) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 \cdot A_2}(A_3) = \frac{15}{20} \cdot \frac{15-1}{20-1} \cdot \frac{15-2}{20-2} = \frac{91}{228}$.

4.3. Вероятность появления хотя бы одного события

Пусть в результате испытания каждое из k событий A_1, $A_2, \ldots, A_k$, независимых в совокупности, может появиться с вероятностью $p_1, p_2, \ldots, p_k$, соответственно вероятности непоявления обозначим $q_1 = 1 - p_1$, $q_2 = 1 - p_2$, …, $q_k = 1 - p_k$.

Пусть A – появление хотя бы одного из событий A_1, $A_2, \ldots, A_k$, $\overline{A}$ – непоявление ни одного из A_1, $A_2, \ldots A_k$. Тогда

$p(\overline{A}) = q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_k$, откуда

$p(A) = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_k$. (1)

Если события A_1, $A_2, \ldots A_k$ имеют одинаковую вероятность, равную p, тогда

$p(A) = 1 - q^k$, где $q = 1 - p$. (2)

Пример 1. Наладчик обслуживает три станка. Вероятность того, что в течение часа потребует его вмешательства первый станок, равна 0,15, второй – 0,25, третий – 0,2. Найдите вероятность того, что в течение часа потребует вмешательства наладчика хотя бы один станок.

Решение. Введем обозначения событий: A_k - вмешательства наладчика потребует k–й станок, A – вмешательства наладчика потребует хотя бы один станок. Тогда $P(A) = 1 - P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot P(\overline{A}_3) = 1 - 0{,}85 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}8 = 0{,}49$.

Пример 2. На хлебозаводе на каждую булочку полагается в среднем 10 изюминок. Изюм попадает в булочку случайно: весь изюм бросается в тесто и перемешивается. Ежедневно завод изготавливает партию в 1000 булочек. Какова вероятность, что

1) в купленной вами булочке изюма не окажется (*A*),

2) хотя бы одна булочка в партии окажется без изюма (*B*),

3) в течение года хотя бы в одной партии окажется булочка без изюма (*C*)?

Решение. 1). Вероятность попадания каждой из $n = 10\,000$ изюминок в вашу булочку равна $p = 0{,}001$, $q = 1 - p = 0{,}999$.

1). $p(A) = q^n = 0{,}999^{10\,000} \approx 0{,}00005$.

2). $k = 1000$, $p = 0{,}00005$, $q = 1 - p = 0{,}99995$,

$p(B) = 1 - q^{1000} = 1 - 0{,}99995^{1000} \approx 1 - 0{,}95 = 0{,}05$.

3). $k = 365$, $p = 0{,}05$, $q = 1 - p = 0{,}95$,

$p(C) = 1 - q^{365} = 1 - 0{,}95^{365} \approx 0{,}999\,999\,992$.

Задание. В каждом из случаев определите события A_1, $A_2, \ldots, A_k$.

4.4. Формула полной вероятности. Формула Байеса

Пусть событие A может наступить только при условии появления одного из событий $H_1,\ H_2,\ldots,H_n$, образующих полную группу несовместных событий. Если известны вероятности событий $H_1,\ H_2,\ldots,H_n\ p(H_1),\ p(H_2),\ldots,p(H_n)$ и условные вероятности A – $p_{H_1}(A),\ p_{H_2}(A),\ldots,p_{H_n}(A)$, то имеет место формула полной вероятности

$$p(A)=\sum_{i=1}^{n} p(H_i)\cdot p_{H_i}(A). \qquad (1)$$

Если событие A произошло, то можно переоценить вероятности условий H_1, $H_2,\ldots,H_n$, которые еще называются гипотезами (мы можем не знать, какое из событий H_1, $H_2,\ldots,H_n$ предшествовало A), т.е. вычислить $p_A(H_i)$:

$$p_A(H_i)=\frac{P(H_i)\cdot P_{H_i}(A)}{P(A)}. \qquad (2)$$

Формула (2) называется формулой Байеса.

Пример 1. Из 1000 ламп 380 принадлежит к 1 партии, 270 – ко второй партии, остальные к третьей. В первой партии 4% брака, во второй – 3%, в третьей – 6%. Наудачу выбирается одна лампа. Определить вероятность того, что выбранная лампа – бракованная.

Решение. Введем полную группу независимых гипотез:

H_i – лампа принадлежит i – й партии, $i=1,2,3.$

Найдем вероятности гипотез по классическому определению вероятностей. Всего ламп 1000, из них 1 – ой партии принадлежит 380, т.е. $P(H_1)=\frac{380}{1000}=0,38,2$ – ой партии принадлежит 270, т.е. $P(H_2)=\frac{270}{1000}=0,27,$ остальные $1000-380-270=350$ ламп принадлежит 3 –ей партии, поэтому $P(H_3)=\frac{350}{1000}=0,35.$

Введем событие A — лампа бракованная. По условию даны вероятности $P(A/H_1)=0,04,,\ P(A/H_2)=0,03,\ P(A/H_3)=0,06.$

Тогда вероятность события A найдем по формуле полной вероятности: $P(A)=P(A/H_1)P(H_1)+P(A/H_2)P(H_2)+P(A/H_3)P(H_3)=$

$=0,38\cdot 0,04+0,27\cdot 0,03+0,35\cdot 0,06=0,0443$.

Пример 2. Из 30 стрелков 12 попадает в цель с вероятностью 0,6, 8 стрелков – с вероятностью 0,5 и 10 – с вероятностью 0,7. Наудачу выбранный стрелок произвел выстрел, поразив цель. К какой из групп вероятнее принадлежал этот стрелок?

Решение. Введем полную группу гипотез

H_1 – стрелок принадлежал первой группе,

H_2 – стрелок принадлежал второй группе,

H_3 – стрелок принадлежал третьей группе

Найдем вероятности гипотез по классическому определению вероятности. $P(H_1)=\frac{12}{30}=\frac{2}{5},\ P(H_2)=\frac{8}{30}=\frac{4}{15},\ P(H_3)=\frac{10}{30}=\frac{1}{3}.$

Введем событие A – стрелок попал в мишень. Известны вероятности $P(A/H_1)=0,6,,$ $P(A/H_2)=0,5,\ P(A/H_3)=0,7.$ Тогда вероятность события A найдем по формуле полной

вероятности:

$$P(A) = P(A/H_1)P(H_1) + P(A/H_2)P(H_2) + P(A/H_3)P(H_3) = \frac{2}{5}\cdot 0{,}6 + \frac{4}{15}\cdot 0{,}5 + \frac{1}{3}\cdot 0{,}7 = 0{,}607.$$

Теперь найдем вероятности того, что стрелок принадлежал i-ой группе, если он попал в цель по формуле Байеса.

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{5}\cdot 0{,}6}{0{,}607} = 0{,}395,$$

$$P(H_2/A) = \frac{P(H_2)P(A/H_2)}{P(A)} = \frac{\frac{4}{15}\cdot 0{,}5}{0{,}607} = 0{,}22,$$

$$P(H_3/A) = \frac{P(H_3)P(A/H_3)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3}\cdot 0{,}7}{0{,}607} = 0{,}384.$$

Таким образом, вероятнее всего стрелок принадлежал первой группе.

Пример 3. В группе спортсменов лыжников в 2 раза больше, чем бегунов, а бегунов в 3 раза больше, чем велосипедистов. Вероятность выполнить норму для лыжника 0,9, для бегуна 0,75, для велосипедиста – 0,8. Найти вероятность того, что спортсмен, выбранный наугад, выполнит норму.

Решение

Введем полную группу гипотез

H_1 – спортсмен – лыжник,

H_2 – спортсмен – велосипедист,

H_3 – спортсмен – бегун.

Найдем вероятности гипотез по классическому определению вероятности. Пусть велосипедистов - x, тогда бегунов будет $3x$, а лыжников $6x$. Получаем

$$P(H_1) = \frac{6x}{6x+3x+x} = \frac{6}{10} = 0{,}6,$$

$$P(H_2) = \frac{x}{6x+3x+x} = \frac{1}{10} = 0{,}1,$$

$$P(H_3) = \frac{3x}{6x+3x+x} = \frac{3}{10} = 0{,}3.$$

Введем событие A – спортсмен выполнит норму. Известны вероятности $P(A/H_1) = 0{,}9,$, $P(A/H_2) = 0{,}8$, $P(A/H_3) = 0{,}75.$

Тогда вероятность события A найдем по формуле полной вероятности: $P(A) = P(A/H_1)P(H_1) + P(A/H_2)P(H_2) + P(A/H_3)P(H_3) = 0{,}6\cdot 0{,}9 + 0{,}1\cdot 0{,}8 + 0{,}3\cdot 0{,}75 = 0{,}845$.

Пример 4. Сотрудники отдела маркетинга полагают, что в ближайшее время ожидается рост спроса на продукцию фирмы. Вероятность этого они оценивают в 80%. Консультационная фирма, занимающаяся прогнозом рыночной ситуации, подтвердила предположение о росте спроса. Положительные прогнозы консультационной фирмы сбываются с вероятностью 95%, а отрицательные – с вероятностью 99%. Какова вероятность того, что рост спроса действительно произойдет?

Решение. Введем искомое событие A – рост спроса произойдет. Событие может произойти вместе с одной из двух гипотез:

H_1 – консультационная фирма дала положительный прогноз о росте

H_2 – консультационная фирма дала отрицательный прогноз о росте

Вероятности $P(H_1) = 80\% = 0{,}8$, $P(H_2) = 1 - P(H_1) = 0{,}2$.

Условные вероятности $P(A/H_1) = 0{,}95$, $P(A/H_2) = 0{,}99$.

Тогда вероятность события A найдем по формуле полной вероятности: $P(A) = P(A/H_1)P(H_1) + P(A/H_2)P(H_2) = 0{,}8 \cdot 0{,}95 + 0{,}2 \cdot 0{,}99 = 0{,}958$.

4.5. Схема Бернулли

Схема Бернулли— это последовательность n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления, некоторого события A одна и та же и равна p.

Результат этих испытаний можно представить последовательностью длины n из символов A и $\overline{A}$ ($У$ — успех, $Н$ — неудача или 1 и 0).

При $n = 3$

ННН ННУ УУУ

$\underbrace{000 \quad 001 \ldots 111}_{2^n}$

Так как испытания независимые, то вероятность, полученная последовательностью содержащих в точности k успехов равна

$$\underbrace{p \cdot p \cdot q \cdot \ldots \cdot p \cdot \ldots \cdot q \cdot \ldots}_{(n-k)-q} = p^k \cdot q^{n-k}$$

Можно рассмотреть следующую полную группу несовместных событий (ПГНС), связанную с нашими испытаниями:

A_0 — событие A не появилось ни разу

$\left\{\underbrace{HH,\ldots,H}_{n}\right\}$

A_1 — событие A появилось один раз

$\{YH\ldots H, HYH\ldots H, \ldots HH\ldots Y\}$

A_2 — событие A появилось два раза

……..

A_n — событие A появилось n раз.

Вероятность ($P_n(k)$) того, что в n испытаниях событие A появлялось ровно k раз, вычисляется по формуле Бернулли

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k} \qquad (1)$$

Пример 1. Монета подбрасывается n раз. Какова вероятность, что герб выпадет ровно k раз?

Решение. Будем считать, что монета правильная, т.е. $p = 0{,}5$ и $q = 1 - p = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$. Рассмотрим разные случаи.

1). $n = 5$, $k = 2$. $P_5(2) = C_5^2 \cdot 0{,}5^2 \cdot 0{,}5^3 = \dfrac{5}{16} = 0{,}3125$.

2). $n=10,\ k=4.\quad P_{10}(4)=C_{10}^{4}\cdot 0{,}5^{4}\cdot 0{,}5^{6}=\dfrac{210}{1024}=0{,}2051,..$

3) $n=50,\ k=20.\quad P_{50}(20)=C_{50}^{20}\cdot 0{,}5^{20}\cdot 0{,}5^{30}=0{,}0419.$

Количество испытаний и успехов меняются пропорционально, а вероятность уменьшается. Почему?

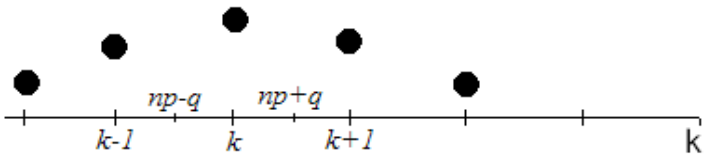
С испытаниями Бернулли связана ПГНС: $A_0, A_1, A_2, ..., A_n$, где A_k — событие A появилось ровно k раз. |ПГНС|=n+1, сумма вероятностей всех событий равна 1, но эта 1 распределяется на n+1 событие, поэтому с ростом n вероятности событий A_k уменьшаются.

Пример 2. Банк выдал пять кредитов. Вероятность того, что кредит не будет погашен в срок, равна 0,1. Найдите вероятность того, что в срок не будут погашены три кредита.

Решение. Воспользуемся формулой Бернулли: $P_n(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k}$, где $n=5,\ k=3,\ p=0{,}1,\ q=0{,}9$. Тогда $P_5(X=3)=C_5^3 p^3 q^{5-3}=\dfrac{5!}{3!\cdot 2!}\cdot 0{,}1^3\cdot 0{,}9^{5-3}=0{,}0081.$

Пример 3. В среднем 80% студентов группы сдают зачет с первого раза. Найдите вероятность того, что из 6 человек, сдававших зачет, с первого раза сдадут ровно 4 студента.

Решение. Воспользуемся формулой Бернулли: $P_n(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k}$, где $n=6,\ k=4,\ p=0{,}8,\ q=0{,}2.$ Тогда $P_6(X=4)=C_6^4 p^4 q^{6-4}=\dfrac{6!}{4!\cdot 2!}\cdot 0{,}8^4\cdot 0{,}2^2=0{,}24576.$



Наивероятнейшее число k_0 появления события A в схеме Бернулли удовлетворяет неравенству

$$np-q\le k_0\le np+p. \qquad (2)$$

Пример 4. Пусть вероятность того, что расход электроэнергии в МГТУ в течение дня не превзойдет некоторую величину (нормальный расход), равна $\dfrac{4}{5}$. Найдите вероятность того, что расход электроэнергии будет нормальным за неделю в течение 0, 1, 2, 3,….., 7 дней.

Решение. Пусть A — событие, состоящее в том, что расход электроэнергии в МГТУ в течение дня будет нормальным («успех»). Тогда $n=7$, $p=\dfrac{4}{5}$, $q=\dfrac{1}{5}$. Подсчитаем вероятности $P_n(k)$ для различных k:

$$P_7(0)=\left(\frac{1}{5}\right)^7=0{,}0000128,$$

$$P_7(1)=C_7^1\cdot\frac{4}{5}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^6=0{,}0003584,$$

$$P_7(2)=C_7^2\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^5=0{,}0043008,$$

$$P_7(3) = C_7^3 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^4 = 0{,}028672,$$

$$P_7(4) = C_7^4 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3 = 0{,}114688,$$

$$P_7(5) = C_7^5 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 = 0{,}2752512,$$

$$P_7(6) = C_7^6 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^6 \cdot \frac{1}{5} = 0{,}3670016,$$

$$P_7(7) = C_7^7 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^7 = 0{,}2097152.$$

Мы видим, что наибольшая вероятность соответствует $k = 6$. Этот же результат получается из формулы (2): $np - q = 7 \cdot \frac{4}{5} - \frac{1}{5} = 5{,}4$, $np + p = 7 \cdot \frac{4}{5} + \frac{4}{5} = 6{,}4$,

$5{,}4 \le k_0 \le 6{,}4$, следовательно, $k_0 = 6$.

4.6. Предельные теоремы в схеме Бернулли

Теорема 1. (Локальная теорема Муавра-Лапласа). Если вероятность p «успеха» в n испытаниях Бернулли не слишком мала $(p \neq 0)$ и не слишком велика $(p \neq 1)$, а n велико $(npq > 10)$, то

$$P_n(k) \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}, \qquad \text{где } \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} \qquad (1)$$

причем эта приближенная формула тем точнее, чем больше n.

Здесь $\varphi(x)$ − четная функция, $\varphi(x) \to 0$ при $n \to \infty$ уже $\varphi(4) \approx 0$. Для $\varphi(x)$ составлены таблицы.

Пример 1. Монета подбрасывается n раз. Какова вероятность, что герб выпадет ровно k раз?

Решение. а) $n = 50$, $p = q = 0{,}5$, $npq = 50 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 12{,}5 > 10$, $k = 30$, $x = \frac{30 - 25}{\sqrt{50 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5}} = \sqrt{2}$, $\varphi(x) = 0{,}1476$. $P_{50}(30) = \frac{\varphi(x) \cdot \sqrt{2}}{5} \approx 0{,}0416$.

б) $n = 100$, $p = q = 0{,}5$, $npq = 100 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 25 > 10$, $k = 60$, $x = \frac{60 - 50}{\sqrt{25}} = 2$, $\varphi(x) = 0{,}051$. $P_{100}(60) = \frac{\varphi(x)}{5} \approx 0{,}01$.

При больших n $P_n(k)$ всегда мало, поэтому обычно рассматривают событие: «число успехов заключено между k_1 и k_2», его вероятность обозначают $P_n(k_1, k_2)$.

Теорема 2. (Интегральная теорема Муавра-Лапласа). Если вероятность p «успеха» в n испытаниях Бернулли не слишком мала $(p \neq 0)$ и не слишком велика $(p \neq 1)$, а n велико $(npq > 10)$, то

$$P_n(k_1, k_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{z^2}{2}} dz, \qquad \text{где } x_i = \frac{k_i - np}{\sqrt{npq}} \qquad (2)$$

причем эта приближенная формула тем точнее, чем больше n.

Для вычисления определенного интеграла в (13) используется так называемая **функция Лапласа**: $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$, поэтому

$$P_n(k_1,k_2)\approx\Phi(x_2)-\Phi(x_1). \qquad (2')$$

Здесь $\Phi(x)$ − нечетная функция, монотонно возрастающая от -0,5 на $-\infty$ до 0,5 на $+\infty$, $\Phi(x)\approx 0{,}5$ при $x\geq 4$. Для $\Phi(x)$ составлены таблицы.

Пример 2. Найдите вероятность того, что при 100 бросаниях монеты герб появится от а) 45 до 55 раз, б) 55 до 65 раз.

Решение. $n=100$, $p=q=0{,}5$, $npq=100\cdot 0{,}5\cdot 0{,}5=25>10$, $\sqrt{npq}=5$.

а) $x_1=\frac{45-50}{5}=-1$, $x_2=\frac{55-50}{5}=1$, $\Phi(x_1)=-0{,}3413$, $\Phi(x_2)=0{,}3413$,

$P_{100}(45,55)\approx\Phi(1)-\Phi(-1)=2\Phi(1)=0{,}6836$.

б) $x_1=\frac{55-50}{5}=1$, $x_2=\frac{65-50}{5}=3$, $\Phi(x_1)=0{,}3413$, $\Phi(x_2)=0{,}4987$,

$P_{100}(55,65)\approx\Phi(3)-\Phi(1)=0{,}4987-0{,}3413=0{,}1574$.

Задание. Подумайте, почему вторая вероятность получилась меньше первой.

Теорема 3. (Формула Пуассона). Если вероятность p «успеха» в n испытаниях Бернулли мала $(p\approx 0)$, а n достаточно велико $(npq<10)$, то

$$P_n(k)\approx\frac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\lambda}, \quad \text{где } \lambda=np, \quad x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}} \qquad (3)$$

причем эта приближенная формула тем точнее, чем больше n.

Пример 3. В страховой компании 10 000 клиентов, застраховавших свои жизни. Вероятность наступления несчастного случая $p=0{,}0005$. Найдите вероятность того, что страховых случаев а) не будет, б) будет ровно1, в) будет больше 1.

Решение. $\lambda=np=5$, $npq=5\cdot 0{,}9995<10$. Применяем формулу Пуассона.

а) $P_{1000}(0)\approx\frac{5^0}{0!}\cdot e^{-5}\approx 0{,}0068$;

б) $P_{1000}(1)\approx\frac{5^1}{1!}\cdot e^{-5}\approx 0{,}0337$;

в) $P_{1000}(k>1)=1-P_{1000}(k\leq 1)\approx 1-0{,}0068-0{,}0337=0{,}9595$.

4.7. Задачи

1. Каждое из четырех несовместных событий может произойти с вероятностями 0,1, 0,2, 0,2 и 0,3 соответственно. Определите вероятность того, что в результате опыта произойдет хотя бы одно из этих событий.

2. Каждое из четырех независимых событий может произойти с вероятностями 0,1, 0,2, 0,2 и 0,3 соответственно. Определите вероятность того, что в результате опыта произойдет хотя бы одно из этих событий.

3. (Парадокс Монти Холла). За одной из трех дверей, выбранной случайно, помещают автомобиль. Участник игры выбирает одну из дверей (например, №1), после чего ведущий, который знает, где находится автомобиль, открывает одну из оставшихся дверей (например, №2), за которой пусто. После этого он спрашивает вас, не желаете ли вы изменить свой выбор и выбрать дверь №3. Увеличатся ли ваши шансы выиграть автомобиль, если вы

примете предложение ведущего изменить свой выбор? (Считается, что если у ведущего есть выбор, какую из двух дверей открыть, он выбирает любую из них с одинаковой вероятностью).

4. Наладчик обслуживает три станка. Вероятность того, что в течение часа потребует его вмешательства первый станок, равна 0,1, второй – 0,15, третий – 0,2. Найдите вероятность того, что в течение часа потребует вмешательства наладчика только один станок.

5. Вероятность поражения цели первым стрелком равна 0,9, а вторым – 0,85. Оба стрелка стреляют одновременно. Найдите вероятность того, что цель будет поражена только одним стрелком.

6. Вероятность поражения цели первым стрелком равна 0,9, а вторым – 0,85. Оба стрелка стреляют одновременно. Найдите вероятность поражения цели.

7. Для разрушения моста достаточно попадания одной авиационной бомбы. Найдите вероятность того, что мост будет разрушен, если на него сбросить 4 бомбы, вероятности попадания которых соответственно равны 0,3; 0,4; 0,6; 0,7.

8. При увеличении напряжения может произойти разрыв электрической цепи вследствие выхода из строя одного из трех последовательно соединенных элементов, вероятности отказа которых равны 0,2, 0,3 и 0,4 соответственно. Определите вероятность того, что разрыва цепи не будет.

9. Пользователь компьютера давно не обновлял антивирусные базы. Поэтому новый вирус может быть обнаружен с вероятностью 0,6. Если вирус не обнаружен, то он поражает наиболее ценные файлы с вероятностью 0,8. Какова вероятность поражения ценных файлов?

10. Вероятность брака из-за нарушения режима обработки деталей равна 0,02, а вследствие неисправности станка 0,08. Какова вероятность выпуска бракованных деталей?

11. Два станка работают независимо друг от друга. Вероятность бесперебойной работы первого в течение смены $p_1 = 0{,}9$, второго $p_2 = 0{,}8$. Какова вероятность

а) бесперебойной работы обоих станков в течение смены,

б) выхода из строя обоих станков,

в) бесперебойной работы хотя бы одного из этих станков?

12. Три стрелка делают по одному выстрелу по мишени. Вероятность попадания первого $p_1 = 0{,}9$, второго $p_2 = 0{,}8$, третьего $p_3 = 0{,}7$. Найдите вероятность того, что

а) все стрелки попадут в мишень,

б) только один попадет в мишень,

в) все промахнутся,

г) хотя бы один попадет в мишень?

13. Экзаменационный билет содержит три вопроса. Вероятности того, что студент ответит на первый и второй вопросы равны по 0,9, а на третий − 0,8. Найдите вероятность того, что студент сдаст экзамен, если для этого необходимо ответить

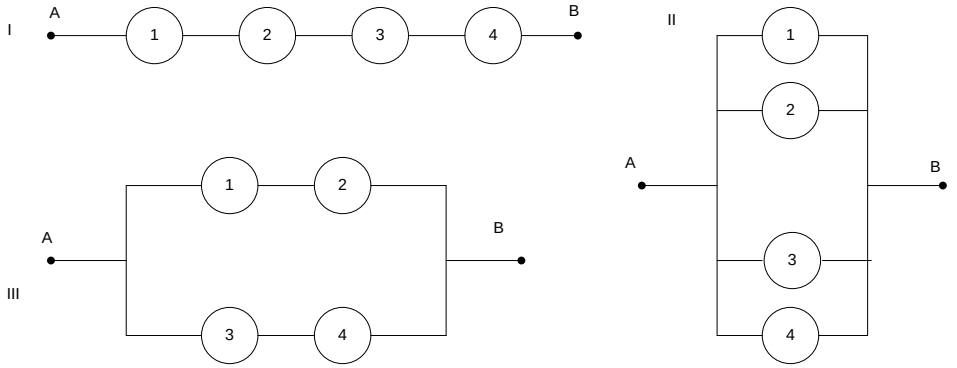
а) на все вопросы,

б) хотя бы на два вопроса.

14. Имеется коробка с 9 новыми теннисными мячами. Для игры берут 3 мяча; после игры их кладут обратно. При выборе мячей игранные от неигранных не отличают. Какова вероятность того, что после трех игр в коробке не останется неигранных мячей?

15. Имеются три электрические схемы, состоящие каждая из 4 выключателей, каждый из которых с вероятностью 0,5 может быть включен и выключен. Выяснить, для какой из схем вероятность того, что ток будет проходить от точки А к точке В, будет наибольшей (схема 1).

Та же задача при условии, что первый выключатель включен с вероятностью 0,6, второй − с вероятностью 0,7, третий − с вероятностью 0,8, четвертый − с вероятностью 0,9.



16. Частица поглощается стенкой с вероятностью 0,5. Какое минимальное число таких стенок надо поставить на пути частицы, чтобы они поглотили эту частицу с вероятностью, не меньшей, чем 0,999?

17. Дворцовый чеканщик кладет в каждый ящик вместимостью в 100 монет одну фальшивую. Король подозревает чеканщика и подвергает проверке монеты, взятые наудачу по одной в каждом из 100 ящиков. Какова вероятность, что чеканщик не будет разоблачен?

18. Каждую секунду с вероятностью p независимо от других моментов времени по дороге проезжает машина. Для перехода дороги пешеходу необходимо 3 с. Какова вероятность того, что подошедший к дороге пешеход будет ожидать возможности перехода а) 3 с, б) 4 с, в) 5 с?

19. На большой улице с односторонним движением расположены один за другим два светофора; каждый из светофоров устроен так, что промежуток времени, когда в нем горит зеленый свет, составляет две трети всего времени работы светофора. Автомобилист заметил, что когда он, двигаясь с обычной скоростью, проезжает на зеленый свет первый светофор, то в 3 случаях из 4 и второй светофор его не задерживает. Допустим теперь, что автомобилист проскочил первый светофор при красном свете. Чему равна вероятность того, что и на втором светофоре будет гореть красный свет?

20. В одном маленьком французском городке полиция разыскивает бродягу. Можно считать, что есть 4 шанса из 5, что он находится в одном из 8 баров городка, безразлично в каком − он не отдает предпочтения ни одному из них. Полицейские посетили 7 баров, но бродягу не обнаружили. Каковы шансы найти его в восьмом баре?

21. В партии смешаны изделия с трех станков: 10% с первого, 25% со второго, 65% с третьего. Вероятность дефекта для изделий с первого станка 0,01, со второго − 0,005, с третьего − 0,001. Найдите вероятность того, что случайно взятое изделие имеет дефект.

22. У Танечки в левом кармане три конфеты «Былина» и одна «Маска», а в правом − две «Былины» и две «Маски». Она достала две конфеты из одного кармана, и оказалось, что одна из них «Былина», а другая − «Маска». Чему равны вероятности, что она достала конфеты из левого кармана, из правого кармана?

23. В цехе работают 20 станков, из них 10 марки А, 6 марки В и 4 марки С. Вероятности того, что качество деталей окажется отличным, для этих станков соответственно равны 0,9, 0,8 и 0,7. Какой процент отличных деталей выпускает цех в целом?

24. Старшая сестра моет посуду 5 раз в неделю, вероятность для нее разбить тарелку равна 0,05. Младшая моет в оставшиеся дни и может разбить тарелку с вероятностью 0,2. а) Какова вероятность, что сегодня будет разбита тарелка? б) Тарелка разбита. Какова вероятность, что ее разбила младшая сестра?

25. Строгий начальник Иван Иванович подписывает своим подчиненным заявления на внеочередной отпуск с вероятностью 0,63, если он встал в этот день с правой ноги; с вероятностью 0,35, если − с левой и с вероятностью 0,75, если встал на обе ноги. Из кругов, близких к Ивану Ивановичу, известно, что в течение месяца (30 дней) он в среднем 10 раз встает с правой ноги, 15 − с левой и 5 − на обе. Степан Степанович хочет подписать заявление на внеочередной отпуск. Какова вероятность, что заявление будет подписано?

26. В магазин привезли две партии апельсинов. В первой партии 15 ящиков, в которых 10% апельсинов испорчены, во второй партии 20 ящиков и 8% апельсинов испорчены. Продавец наудачу из произвольного ящика вынимает апельсин. Какова вероятность, что он испорчен?

27. Ковбой Джон попадает в муху на стене с вероятностью 0,9, если стреляет из пристрелянного револьвера. Если Джон стреляет из непристрелянного револьвера, то он попадает в муху с вероятностью 0,2. На столе лежит 10 револьверов, из них только 4 пристрелянные. Ковбой Джон видит на стене муху, наудачу хватает первый попавшийся револьвер и стреляет в муху. Найдите вероятность того, что Джон промахнётся.

28. В некоторой местности утро в мае бывает либо ясным, либо облачным. Наблюдения показали:

Если майское утро ясное, то вероятность дождя в этот день 0,2.

Если майское утро облачное, то вероятность дождя в течение дня равна 0,6.

Вероятность того, что утро в мае будет облачным, равна 0,4.

Найдите вероятность того, что в случайно взятый майский день дождя не будет.

29. У Деда Мороза в мешке с подарками 12 синих пакетов и 18 красных. Каждый синий пакет содержит 20 наборов с «Маской» и 25 наборов с «Былиной», а каждый красный — 10 наборов с «Маской» и 30 наборов с «Былиной». Развязав мешок, Дед Мороз нащупывает один из пакетов и вытаскивает из него случайный набор. Какова вероятность, что будет вынут набор с «Маской»?

30. Брак в продукции завода вследствие дефекта А составляет 6%, причем среди забракованной по признаку А продукции в 4% случаев встречается дефект В, а в продукции, свободной от дефекта А., дефект В встречается в 1% случаев. Найдите вероятность встретить дефект В во всей продукции.

31. Три стрелка произвели залп, причем две пули поразили мишень. Найдите вероятность того, что третий стрелок поразил мишень, если вероятности попадания в мишень первым, вторым и третьим стрелками соответственно равны 0,6, 0,5 и 0,4.

32. При проверке изделия на соответствие стандарту вероятность того, что оно пройдет через первого контролера, равна 0,55, а через второго − 0,45. Вероятность признания бездефектного изделия стандартным у первого контролера равна 0,9, а у второго − 0,98. Бездефектное изделие при проверке было признано стандартным. Найдите вероятность того, что это изделие прошло через второго контролера.

33. Для прядения смешаны поровну белый и окрашенный хлопок. Какова вероятность среди 5 случайно выбранных волокон смеси обнаружить менее двух окрашенных.

34. Контрольный тест состоит из 4 вопросов. На каждый вопрос предлагается 4 варианта ответов, среди которых только один правильный. Найти вероятность правильного ответа на 2, 3 и 4 вопроса для неподготовленного человека (выбор ответа наудачу).

35. Подсчитано, что 10% открывающихся новых фирм прекращают свою деятельность в течение года. Какова вероятность того, что из 6 фирм не более двух прекратят работу в течение года?

36. Банк имеет 6 отделений. С вероятностью 0,2 независимо от других каждое отделение может заказать на завтра крупную сумму денег. В конце рабочего дня один из

вице-премьеров банка знакомится с поступившими заявками. Какова вероятность того, что будет а) ровно 2 заявки, б) хотя бы одна заявка? Какова вероятность того, что есть заявка от первого отделения, если поступило две заявки?

37. В банк отправлено 4000 пакетов денежных знаков. Вероятность того, что пакет содержит недостаточное или избыточное количество денежных знаков, равна 0,0001. Найдите вероятность того, что при проверке будет обнаружено а) 3 ошибочно упакованных пакета, б) не более трех пакетов.

38. Вероятность того, что пассажир опоздает к отправлению поезда, равна 0,01. Найдите наиболее вероятное число опоздавших из 800 пассажиров и вероятность такого числа опоздавших.

39. Аудиторную работу по теории вероятностей с первого раза успешно выполняют 50% студентов. Найдите вероятность того, что из 400 студентов работу успешно выполнят а) 180, б) не менее 180.

40. Известно, что в среднем 60% всего числа изготавливаемых заводом телефонных аппаратов является продукцией первого сорта. Чему равна вероятность того, что в изготовленной партии окажется а) 6 аппаратов 1 сорта, если партия содержит 10 аппаратов, б) 120 аппаратов 1 сорта, если партия содержит 200 аппаратов?

41. Рассмотрим всевозможные семьи с двумя детьми. Половина таких семей − «удачные», т.е. число мальчиков в семье совпадает с числом девочек. Обстоит ли аналогично дело для семей с 4 детьми? Предполагается, что рождение мальчика и девочки равновероятно.

42. Из 10 студентов, пришедших сдавать экзамен по теории вероятностей и взявших билеты, Иванов и Петров знают 20 билетов из 30, Сидоров плохо занимался весь семестр и успел повторить только 15 билетов, остальные студенты знают все 30 билетов. По прошествии отведенного времени на подготовку экзаменатор наудачу вызывает отвечать одного из студентов. Какова вероятность того, что вызванный сдал экзамен, если знание билета гарантирует сдачу экзамена с вероятностью 0,85, а при незнании билета можно сдать экзамен лишь с вероятностью 0,1?

43. В первой урне находятся 6 белых и 4 черных шара, во второй − 3 белых и 2 черных. Из первой урны наудачу извлекают сразу 3 шара, и шары того цвета, которые окажутся в большинстве, опускают во вторую урну и тщательно перемешивают. После этого из второй урны наудачу извлекают один шар. Какова вероятность того, что этот шар белый?

44. В урне находятся 7 белых и 3 черных шара. Три игрока по очереди извлекают по одному шару, отмечают цвет и возвращают шар обратно. Выигрывает тот, кто первым достанет черный шар. Найдите вероятность выигрыша для каждого из игроков, если игра может продолжаться неограниченно.

45. Морис едет на работу либо на собственной машине (и тогда из-за пробок в пути опаздывает в половине случаев), либо на метро (и тогда опаздывает только один раз из четырех). Если в какой-то день Морис пребывает на службу вовремя, то на следующий день всегда пользуется тем же транспортом, что и накануне, а если он опаздывает на службу, то на следующий день обязательно меняет вид транспорта. Зная все это, скажите, много ли шансов у Мориса опоздать на службу, когда он поедет туда 475-й раз?

5. ДИСКРЕТНЫЕ И НЕПРЕРЫВНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

5.1. Примеры.

1. Число родившихся мальчиков среди ста новорожденных есть случайная величина, которая имеет следующие возможные значения: 0, 1, 2, …, 100. **— Д.**

2. Расстояние, которое пролетит снаряд при выстреле из орудия, есть случайная величина. Действительно, расстояние зависит не только от установки прицела, но и от многих других причин (силы и направления ветра, температуры и т.д.), которые не могут

быть полностью учтены. Возможные значения этой величины принадлежат некоторому промежутку $(a, в)$. — **Н**.

3. Количество успехов в испытаниях Бернулли. — **Д**.
4. Количество пар обуви, проданное магазином за день. — **Д**.
5. Размер обуви, купленной сегодня в магазине первым покупателем. — **Д**.
6. Момент времени отказа прибора. — **Н**.
7. Количество стандартных изделий в партии. — **Д**.

Задание. Приведите по 5 примеров своих дискретных и непрерывных случайных величин.

5. 2. Закон распределения дискретной случайной величины, её характеристики

Законом распределения случайной величины называется любое соотношение между ее возможными значениями и соответствующими им вероятностями.

Функцией распределения $F(x)$ случайной величины X в точке x называется вероятность того, что случайная величина X, примет значение, меньшее x: $F(x) = P(X < x)$.

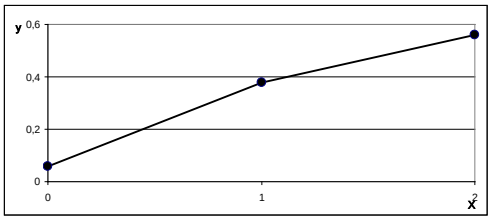
Пример 1. Вероятности сдачи студентом семестровых экзаменов по алгебре и дискретной математике равны соответственно 0,7 и 0,8. Составьте ряд распределения случайной величины X — числа семестровых экзаменов, которые сдаст студент, и функцию распределения $F(x)$.

Решение. Студент может не сдать ни одного экзамена $X = 0$, или сдать только один (сдать алгебру, но не сдать дискретную математику или сдать дискретную математику, но не сдать алгебру) — $X = 1$, или сдать оба предмета $X = 2$. Вычислим соответствующие вероятности:

$P(X = 0) = 0{,}3 \cdot 0{,}2 = 0{,}06;$

$P(X = 1) = 0{,}7 \cdot 0{,}2 + 0{,}3 \cdot 0{,}8 = 0{,}38;$

$P(X = 2) = 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}56.$



X	0	1	2
P	0,06	0,38	0,56

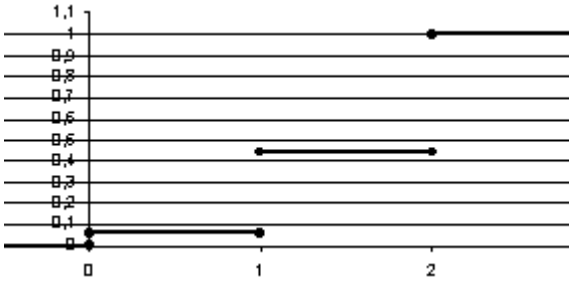
Найдем $F(x)$. Какое бы $x < 0$ мы не взяли, даже $x = 0$, $P(X < x) = 0$, т.к. случайная величина не принимает таких значений.

Для $0 < x \le 1$` $P(X < x) = P(X = 0) = 0{,}06$.

Для $1 < x \le 2$` $\mathrm{P}(\mathrm{X} < \mathrm{x}) = \mathrm{P}(\mathrm{X} = 0 \text{ или } \mathrm{X} = 1) = 0{,}06 + 0{,}38 = 0{,}44$.

Для $x > 2$` $P(X < x) = P(\Omega) = 1$. Итак,

$$\mathrm{F}(\mathrm{x}) = \begin{cases} 0, & \textit{если } \mathrm{x} \le 0, \\ 0{,}06, & \text{если } 0 < \mathrm{x} \le 1, \\ 0{,}44, & \text{если } 1 < \mathrm{x} \le 2, \\ 1, & \text{если } \mathrm{x} > 2. \end{cases}$$



Пример 2. Даны ряды распределения случайных величин X_1 и X_2 — количества очков, выбиваемых первым и вторым стрелком соответственно.

X_1	0	1	2	3
P	0,1	0,2	0,5	0,2

X_2	0	1	2	3
P	0,2	0,1	0,2	0,5

Кто лучше стреляет?

Для ответа на этот вопрос стоит рассмотреть среднее количество выбиваемых очков. Таким средним значением случайной величины служит ее математическое ожидание.

Определение. **Математическим ожиданием** $M(X)$ дискретной случайной величины X называется сумма произведений всех ее значений на соответствующие им вероятности $M(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$.

Решение примера 2. $M(X_1)=\sum_{i=1}^{4} x_i p_i = 0\cdot 0{,}1+1\cdot 0{,}2+2\cdot 0{,}5+3\cdot 0{,}2=1{,}8$. Аналогично для второго стрелка $M(X_2)=2$. Второй стрелок стреляет лучше.

Дисперсией $D(X)$ дискретной случайной величины X называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания

$D(X)=M\left((X-M(X))^2\right).$

Теорема. Дисперсия равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины X и квадратом ее математического ожидания

$D(X)=M(X^2)-(M(X))^2$.

Пример 3. Найдите $D(X)$ двумя способами: по определению и по теореме.

X	0	1	2
P	0,2	0,3	0,5

Решение. $M(X)=0\cdot 0{,}2+1\cdot 0{,}3+2\cdot 0{,}5=1{,}3.$

1). (По определению). $D(X)=M\left((X-M(X))^2\right)$. Запишем возникающие законы распределения.

$X-M(X)$	1,69	0,09	0,49
P	0,2	0,3	0,5

$(X-M(X))^2$	1,69	0,09	0,49
P	0,2	0,3	0,5

В этом случае закон правильнее написать так:

$(X-M(X))^2$	0,09	0,49	1,69
P	0,3	0,5	0,2

Но на наших вычислениях это никак не сказывается:

$D(X)=1{,}69\cdot 0{,}2+0{,}09\cdot 0{,}3+0{,}49\cdot 0{,}5=0{,}61.$

2). (По теореме). $D(X)=M(X^2)-(M(X))^2$. Составим закон распределения X^2.

X^2	0	1	4
P	0,2	0,3	0,5

$M(X^2)=0\cdot 0{,}2+1\cdot 0{,}3+4\cdot 0{,}5=2{,}3.$

$D(X)=M(X^2)-(M(X))^2=2{,}3-(1{,}3)^2=0{,}61.$

5. 3. Закон распределения непрерывной случайной величины, её характеристики

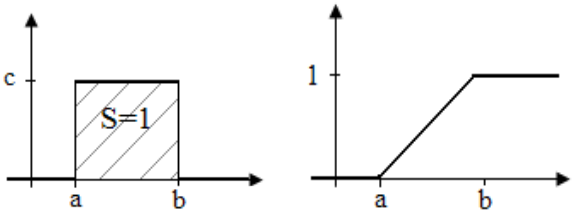
Определение. Случайная величина X называется **непрерывной** если множество ее значений заполняет некоторый промежуток, а функция распределения $F(x)$ является непрерывной и кусочно-дифференцируемой.

Закон распределения непрерывной случайной величины может задаваться функцией распределения $F(x)=P(X<x)$, так и ее производной $f(x)=F'(x)$, называемой плотностью вероятности. Разные законы задаются разными функциями распределения.

Равномерный закон распределения

задается плотностью вероятности:

$$f(x)=\begin{cases}c, x\in[a,b]\\ 0, x\notin[a,b]\end{cases},\ c=\frac{1}{b-a}$$



Функция распределения

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\begin{cases}0, & x\le a,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & x\in(a,b),\\ 1, & x\ge b.\end{cases}$$

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x)dx=\int_{a}^{b} x\cdot\frac{1}{b-a}dx=\frac{x^2}{2(b-a)}\Big|_a^b=\frac{a+b}{2};$$

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\cdot f(x)dx-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{b^3-a^3}{3\cdot(b-a)}+\frac{a^2+2ab+b^2}{4}=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

Равномерному закону распределения подчиняется, например, время ожидания (автобуса, трамвая), интервал движения которого известен, а время прихода на остановку случайно.

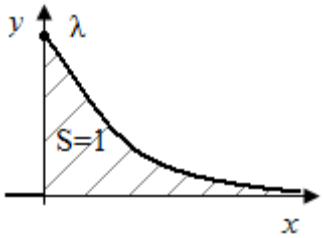
Пример. Автобусы на городском маршруте идут регулярно с интервалом 20 минут. Пассажир подходит к остановке в случайный момент времени. Какова вероятность того, что ждать ему придется не более 12 минут? Найти $f(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

Решение. Случайная величина X — время ожидания на временном отрезке [0; 20] имеет равномерный закон распределения, поэтому $f(x)=\frac{1}{20}$, $P(X\le 12)=\int_0^{12}\frac{dx}{20}=0{,}6$,

$M(X)=10$, $D(X)=\frac{100}{3}$, $\sigma(X)=\frac{10}{\sqrt{3}}\approx 5{,}8$.

Показательный (экспоненциальный) закон распределения

задается плотностью:



$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0.\end{cases} \qquad \lambda>0\,.$$

Функция распределения:

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt=\begin{cases}0, & x<0\\ \int\limits_{0}^{x}\lambda e^{-\lambda x}=1-e^{-\lambda x}, & x\ge 0.\end{cases}$$

$$M(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int\limits_{0}^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x}dx=\left|\begin{matrix}u=x, & e^{-\lambda x}dx=dv\\ du=dx, & -\dfrac{e^{-\lambda x}}{\lambda}=v\end{matrix}\right|=\lambda\left(-\frac{xe^{-\lambda x}}{\lambda}\Big|_0^{\infty}+\int\limits_0^{\infty}\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}dx\right)=\frac{1}{\lambda};$$

$$D(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx-\frac{1}{\lambda^2}=\int\limits_{0}^{+\infty} x^2\lambda e^{-\lambda x}dx-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda^2}\,.$$

Показательному закону распределения подчиняется, например, время T безотказной работы прибора, в этом случае $F(t)=P(T<t)$ — вероятность отказа за время T, тогда вероятность безотказной работы за время t:

$1-F(t)=1-(1-e^{-\lambda t})=e^{-\lambda t}$.

Функция $R(t)=e^{-\lambda t}$ называется функцией надежности прибора, а математическое ожидание $M(T)$ есть среднее время безотказной работы прибора.

Так как $M(T)=\frac{1}{\lambda}$, то $\lambda=\frac{1}{M(T)}$ — среднее количество отказов за единицу времени (интенсивность отказов).

Пример. В период опытной эксплуатации нового образца флотационной машины установлена интенсивность отказов $\lambda=0{,}005\ ч^{-1}$. Найдите вероятность безотказной работы машины в течение 2000 часов.

Решение. Вычисляем вероятность безотказной работы по формуле $R(t)=1-F(t)=1-(1-e^{-\lambda t})=e^{-\lambda t}$, $R(2000)=e^{-0{,}005\cdot 2000}=e^{-10}\approx 4{,}5\cdot 10^{-5}=0{,}000045$. На безотказную работу рассчитывать не приходится.

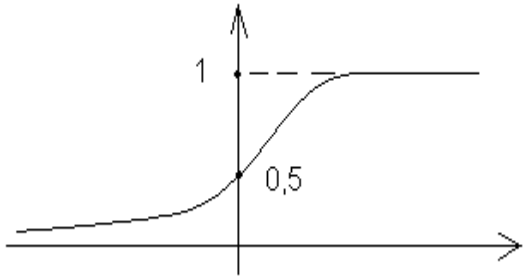
Разные законы

Пример. Случайная величина X задана функцией распределения. Найдите плотность вероятности и вероятность попадания этой величины в промежуток $P(-1<x<2)$, если

1). $F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{x}{2}}, & x\le 0,\\ 1-\frac{1}{2}\cdot e^{-\frac{x}{2}} & x\ge 0\end{cases}$

2). $F(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}\cdot e^{x}, & x<0,\\ 1-\frac{2}{3}e^{-x}, & x\ge 0.\end{cases}$

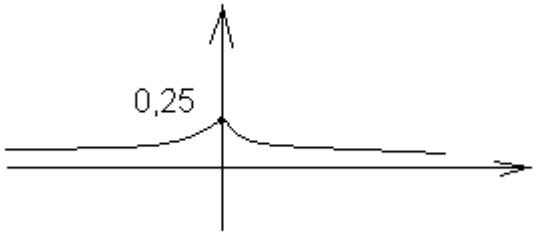
Решение. 1). Построим график функции распределения.



Плотность вероятности

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}}, & x<0\\ \frac{1}{4}e^{-\frac{x}{2}}, & x>0.\end{cases}$$

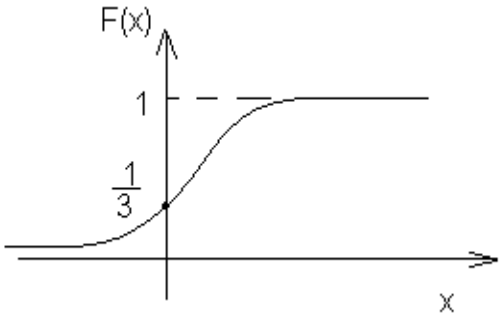
Её график



Вероятность попадания величины в промежуток $P(-1<x<2)$

$$P(-1<X<2)=F(2)-F(-1)=\left(1-\frac{1}{2}\cdot e^{-1}\right)-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}\approx 0{,}75.$$

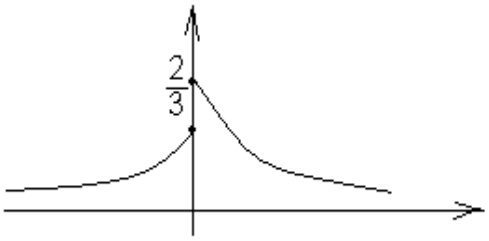
2). Построим график функции распределения.



Плотность вероятности

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}\cdot e^{x}, & x<0,\\ \frac{2}{3}\cdot e^{-x}, & x>0.\end{cases}$$

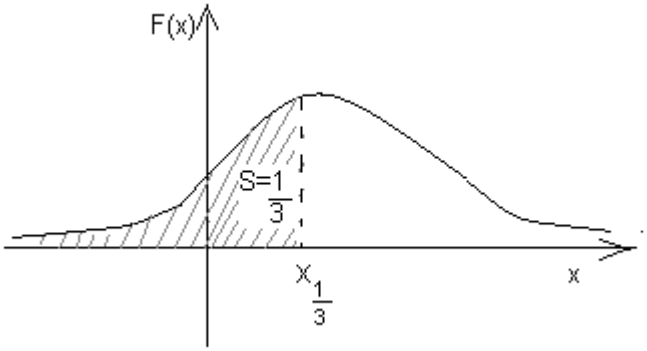
Её график

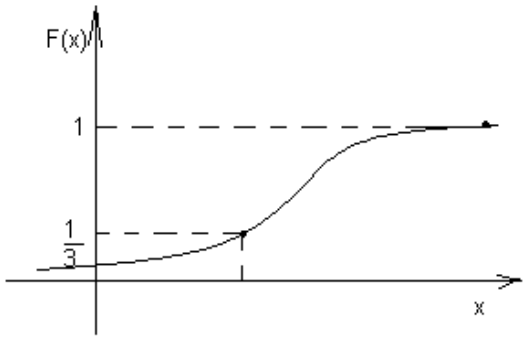


Вероятность попадания величины в промежуток $P(-1 < x < 2)$

$$P(-1 < x < 2) = F(2) - F(-1) = 1 - \frac{2}{3} \cdot e^{-2} - \frac{1}{3} \cdot e^{-1} = 0{,}79.$$

Квантилем уровня q называется такое значение x_q случайной величины X, для которого функция распределения в точке $F(x_q) = q$.





Начальным моментом порядка k случайной величины X называется математическое ожидание величины X^k: $\nu_k = M(X^k)$.

В частности, $\nu_1 = M(X)$, $\nu_2 = M(X^2)$, поэтому $D(X) = \nu_2 - \nu_1^2$.

Центральным моментом порядка k случайной величины X называется математическое ожидание величины $(X - M(X))^k$: $\mu_k = (X - M(X))^k$.

В частности, $\mu_1 = M(X - M(X)) = 0$, $\mu_2 = M((X - M(X))^2) = D(X)$.

Коэффициентом асимметрии случайной величины X называется число $A = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$.

Если распределение симметрично относительно $M(X)$, то $A = 0$.

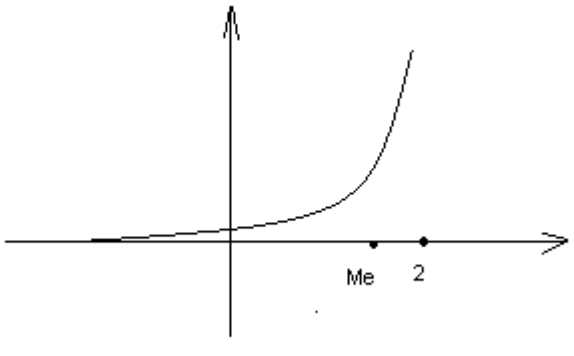
Эксцессом случайной величины X называется число $E = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$.

Пример. Найдите моду, медиану, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, квантиль уровня 0,2 случайной величины X с плотностью $f(x)=\begin{cases} a\cdot x^3, & x\in[0;2], \\ 0, & x\notin[0;2]. \end{cases}$

Решение. Сначала найдем значение параметра a:

$1=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=\int_0^2 ax^3\,dx=a\dfrac{x^4}{4}\Big|_0^2=4a$, следовательно $a=\dfrac{1}{4}$

$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{4}\cdot x^3, & x\in[0;2], \\ 0, & x\notin[0;2]. \end{cases}$



Очевидно, что $M_0(X)=2$. Найдем $Me(X)$.

Пусть $M_e(X)=b$, тогда $\int_0^b \dfrac{x^3}{4}dx=0{,}5$, $\int_0^b \dfrac{x^3}{4}dx=0{,}5$, $\dfrac{b^4}{16}=0{,}5$, $b=\sqrt[4]{8}\approx 1{,}7$.

$M(X)=\int_0^2 \dfrac{x^3}{4}x dx=\dfrac{x^5}{20}\Big|_0^2=1{,}6$. $M(X^2)=\int_0^2 \dfrac{x^3}{4}x^2dx=\dfrac{x^6}{24}\Big|_0^2=\dfrac{8}{3}$,

$D(X)=M(X^2)-M(X)^2=\dfrac{8}{3}-\left(\dfrac{8}{5}\right)^2=\dfrac{8}{75}$, $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{\dfrac{8}{75}}\approx 0{,}33$.

Пример 3. Найдите коэффициент асимметрии и эксцесс случайной величины, распределенной по так называемому закону Лапласа с плотностью $f(x)=0{,}5e^{-|x|}$.

Решение. Так как распределение симметрично относительно оси ординат, то $M(X)=0$, и все нечетные центральные и начальные моменты равны 0.

$\mu_2=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\,0{,}5e^{-|x|}dx-0=2\int_0^{+\infty} x^2\,0{,}5e^{-x}dx=\ldots=2$. $\sigma=\sqrt{2}$.

$\nu_4=\mu_4=\int_{-\infty}^{+\infty} x^4\,0{,}5e^{-|x|}dx-0=2\int_0^{+\infty} x^4\,0{,}5e^{-x}dx=\ldots=24$.

$E=\dfrac{\mu_4}{\sigma^4}-3=\dfrac{24}{\left(\sqrt{2}\right)^4}-3=3$.

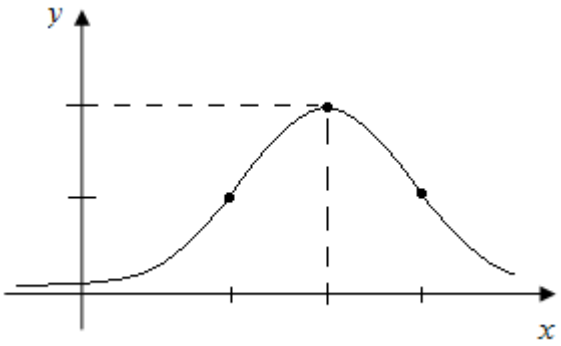
5. 4. Нормальный закон распределения

Задается плотностью вероятности:

$f(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, $\sigma>0, a$ – любое действительное число. Записывается $X\sim N(a,\sigma^2)$ $a\pm\sigma$ -абсциссы точек перегиба.

$x=\alpha\pm\sigma$ $f(a\pm\sigma)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}$.

Функция



распределения: $F(x)=\frac{1}{2}+\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$, где $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{\frac{-z^2}{2}}dz$.

$M(X)=a;\quad D(X)=\sigma^2$.

Основные свойства

1. $P(\alpha<x<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)$.

2. Вероятность отклонения случайной величины от ее математического ожидания a меньше, чем на δ равна $P(|X-a|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$.

3. Правило «3 σ»: $P(|X-a|<3\sigma)=0{,}9973$.

Если случайная величина распределена нормально, то абсолютная величина ее отклонения от математического ожидания не превосходит утроенного среднего квадратического отклонения (принцип практической уверенности).

Пример. Полагая, что рост мужчины определенной возрастной группы есть нормально распределенная случайная величина X с параметрами $a=173$ и $\sigma^2=36$, найдите:

а) плотность вероятности и функцию распределения;

б) долю костюмов пятого роста (т.е. рост > 182), которую надо предусмотреть в общем объеме производства для этой возрастной группы.

Решение.

а) $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{\frac{-(x-173)^2}{72}}$ – плотность вероятности,

$F(x)=\frac{1}{2}+\Phi\left(\frac{x-173}{6}\right)$ – функция распределения.

б) $P(X>182)=1-P(X\le 182)=1-P(X<182)=1-F(182)=1-\left(\frac{1}{2}+\Phi\left(\frac{182-173}{6}\right)\right)=$

$=\frac{1}{2}-\Phi(1{,}5)=\frac{1}{2}-0{,}4332=0{,}0668\approx 0{,}07\approx 7\%$.

Пример. Непрерывная случайная величина подчинена нормальному закону распределения с параметрами $a=2,\ \sigma=5$. Запишите функцию распределения и плотность вероятности. Найдите а) $P(X<5)$, б) $P(1<X<5)$, в) $P(|X-2|<15)$, г) $P(|X-2|<3)$, д) $P(|X-3|<1)$, е) $P(X>3)$, ж) $P(|X-2|>2)$.

Решение. Функция распределения непрерывной случайной величины. Подчиненной нормальному закону имеет вид $F(x)=\frac{1}{2}+\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$, в нашем случае, $a=2,\ \ \sigma=5$, поэтому $F(x)=\frac{1}{2}+\Phi\left(\frac{x-2}{5}\right)$. Плотность вероятности $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, $\sigma>0,$ в нашем случае, $f(x)=\frac{1}{5\sqrt{2\pi}}\cdot e^{\frac{-(x-2)^2}{50}}$. Для нахождения вероятностей используем таблицы для функции Лапласа $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{\frac{-z^2}{2}}dz$.

а) $P(X<5)=F(5)=\frac{1}{2}+\Phi\left(\frac{5-2}{5}\right)=0{,}5+\Phi(0{,}6)=0{,}5+0{,}2257=0{,}7257$;

б) $P(1<X<5)=\Phi\left(\frac{5-2}{5}\right)-\Phi\left(\frac{1-2}{5}\right)=\Phi(0{,}6)-\Phi(-0{,}2)=\Phi(0{,}6)+\Phi(0{,}2)=$

$=0{,}2257+0{,}0793=0{,}3050$;

в) $P(|X-2|<15)=2\Phi\left(\frac{15}{5}\right)=2\Phi(3)=0{,}9973$ (правило трех сигм);

г) $P(|X-2|<3)=2\Phi\left(\frac{3}{5}\right)=2\cdot 0{,}2257=0{,}4514$;

д) $P(|X-3|<1)=P(2<X<4)=\Phi\left(\frac{4-2}{5}\right)-\Phi\left(\frac{2-2}{5}\right)=\Phi(0{,}4)-\Phi(0)=0{,}1554$,

(предыдущую формулу здесь использовать нельзя, так как отклонение берется не от математического ожидания);

е) $P(X>3)=P(X\geq 3)=1-P(X<3)=1-F(3)=\frac{1}{2}-\Phi\left(\frac{3-2}{5}\right)=0{,}5-0{,}0793=0{,}4207$;

ж) $P(|X-2|>2)=P(|X-2|\geq 2)=1-P(|X-2|<2)=1-2\Phi\left(\frac{2}{5}\right)=1-2\cdot 0{,}1554=0{,}6892$.

5. 5. Функции случайных величин

Если каждому возможному значению случайной величины X соответствует одно возможное значение случайной величины Y, то Y называют функцией случайного аргумента X и записывают $Y=\varphi(X)$.

Для дискретной случайной величины X возможные значения величины Y находят из равенства $y_i=\varphi(x_i)$, причем вероятности соответствующих значений X и Y одинаковы. Если разным значениям X соответствуют одинаковые значения Y, то вероятность повторяющегося значения Y равна сумме вероятностей тех значений X, при которых это значение Y получается.

Пример. Дискретная величина X задана законом распределения

X	1	2	3	4
p	0,2	0,1	0,4	0,3

Найдите закон распределения случайной величины $Y=(X-2)^2$.

Решение. Найдем возможные значения Y: $y_1 = (x_1 - 2)^2 = (1-2)^2 = 1$,

$f(x)$	$\frac{1}{\pi(1+x^2)}$
$y = \varphi(x)$	$y = 1 - x^3$
$x = \psi(y)$	$x = \sqrt[3]{1-y}$
$\lvert\psi'(y)\rvert$	$\frac{1}{3\sqrt[3]{(1-y)^2}}$
$g(y) = f(\psi(y)) \cdot \lvert\psi'(y)\rvert$	$g(y) = \frac{1}{3\pi\left(1+\sqrt[3]{(1-y)^2}\right)\cdot\sqrt[3]{(1-y)^2}}$

$y_2 = (x_2 - 2)^2 = (2-2)^2 = 0$, $y_3 = (x_3 - 2)^2 = (3-2)^2 = 1$, $y_4 = (x_4 - 2)^2 = (4-2)^2 = 4$. x_1 и x_3 соответствуют одинаковые значения y. Для того, чтобы величина Y приняла значение $Y = 1$ достаточно, чтобы величина X приняла значение $X = 1$ или $X = 3$. Эти события несовместны, их вероятности равны 0,2 и 0,4, поэтому вероятность события $P(Y=1) = P(X=1) + P(X=3) = 0{,}2 + 0{,}4 = 0{,}6$.

Запишем теперь закон распределения Y:

Y	0	1	4
p	0,1	0,6	0,3

Если X — непрерывная случайная величина, заданная плотностью распределения $f(x)$ и $y = \varphi(x)$— дифференцируемая строго монотонная функция, обратная которой $x = \psi(y)$, то плотность распределения $g(y)$ случайной величины Y находится по формуле:

$$g(y) = f(\psi(y)) \cdot \lvert\psi'(y)\rvert. \qquad (1)$$

Если $y = \varphi(x)$ — не монотонна, то промежуток возможных значений X следует разбить на частичные, где $\varphi(x)$ монотонна, и найти плотности распределений $g_i(y)$ для каждого частичного промежутка, а затем представить $g(y)$ в виде суммы:

$$g(y) = \sum_i g_i(y). \qquad (2)$$

Пример. Непрерывная случайная величина X распределена по закону Коши:

$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$, $Y = 1 - X^3$. Найдите плотность распределения случайной величины Y.

Решение. Функция $y = 1 - x^3$ строго монотонна на всей числовой оси, поэтому применим формулу (1). Решение оформляем в виде таблицы:

Ответ. $g(y) = \frac{1}{3\pi\left(1+\sqrt[3]{(1-y)^2}\right)\cdot\sqrt[3]{(1-y)^2}}$.

Пример. Непрерывная случайная величина X распределена по закону Коши: $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$, $Y = X^2$. Найдите плотность распределения случайной величины Y.

Решение. Функция $y = x^2$ не монотонна, поэтому применим формулу (2):

$f(x)$	$\frac{1}{\pi(1+x^2)}$
$y = \varphi(x)$	$y = x^2$
$x = \begin{cases}\psi_1(y)\\ \psi_2(y)\end{cases}$	$x_1 = -\sqrt{y},\ y > 0$ $x_2 = \sqrt{y},\ y > 0$
$\lvert\psi_1'(y)\rvert = \lvert\psi_2'(y)\rvert$	$\frac{1}{2\sqrt{y}}$
$g(y) = \sum_i g_i(y)$	$g(y) = \frac{1}{2\pi(1+y)\cdot\sqrt{y}} + \frac{1}{2\pi(1+y)\cdot\sqrt{y}} = \frac{1}{\pi(1+y)}$

Ответ. $g(y) = \dfrac{1}{\pi(1+y)\cdot\sqrt{y}},\quad y > 0$.

Пример. X и Y — независимые и случайные величины: $M(X) = 1$, $D(X) = 2$, $M(Y) = 3$, $D(Y) = 4$. Найдите:

1). $M\left(X^2 + 3XY - 5Y + 2\right)$,

2). $D(X - 2Y + 5)$.

Решение.

$M\left(X^2 + 3XY - 5Y + 2\right) = M\left(X^2\right) + 3M(XY) - 5M(Y) + 2 = D(X) + (M(X))^2 + 3M(X)\cdot M(Y) - -5M(Y) + 2 = 2 + 1^2 + 3\cdot 1\cdot 3 - 5\cdot 3 + 2 = -1.$

$D(X - 2Y + 5) = D(X) + (-2)^2 \cdot D(Y) + 0 = 2 + 4\cdot 4 = 18$.

Можно ввести функции нескольких случайных величин. Для независимых дискретных случайных величин X и Y рассмотрим пример такой функции.

Пример. Дискретные независимые случайные величины X и Y заданы распределениями:

X	1	2
p	0,3	0,7

Y	6	9
p	0,2	0,8

Найдите закон распределения случайной величины $Z = 3X + Y$.

Решение. Найдем все возможные значения Z и их вероятности.

Если $X = 1$, а $Y = 6$, то $z_1 = 3\cdot 1 + 6 = 9$,

если $X = 2$, а $Y = 6$, то $z_2 = 3\cdot 2 + 6 = 12$,

если $X = 1$, а $Y = 9$, то $z_3 = 3\cdot 1 + 9 = 12$,

если $X = 2$, а $Y = 9$, то $z_4 = 3\cdot 2 + 9 = 15$.

Найдем вероятности этих значений. Чтобы $Z = 9$, достаточно, чтобы $X = 1$, а $Y = 6$. Так как аргументы независимы, то события $X = 1$ и $Y = 6$ независимы и вероятность их совместного наступления (вероятность события $Z = 9$) по теореме умножения равна $0{,}3\cdot 0{,}2 = 0{,}06$. Аналогично находим вероятности остальных значений и, складывая вероятности значения $Z = 12$, получаем распределение Z:

Z	9	12	15
p	0,06	0,38	0,56

5. 6. Закон больших чисел

Под «законом больших чисел» в широком смысле слова понимается общий принцип, согласно которому (по словам А.Н. Колмогорова) совокупное действие большого числа случайных факторов приводит к результату, почти не зависящему от случая.

В узком (математическом) смысле слова закон больших чисел – это ряд теорем, в которых при тех или иных условиях устанавливается факт приближения средних характеристик большого числа испытаний к некоторым определенным постоянным.

Теорема Бернулли (современная формулировка).

При неограниченном числе испытаний n в схеме Бернулли относительная частота (частость) появления события A стремится по вероятности к вероятности p события A:

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}1 \quad\Leftrightarrow\quad \lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right)=1.$$

Теорема (неравенство Чебышева). Для любого $\varepsilon>0$ и любой случайной величины X, имеющей математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$, вероятность того, что случайная величина отклонится от $M(X)$ не меньше чем на ε меньше либо равна $\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$:

$$P\left(\left|X-M(X)\right|\ge\varepsilon\right)\le\frac{D(X)}{\varepsilon^2}. \qquad (1)$$

$$P\left(\left|X-M(X)\right|<\varepsilon\right)\ge 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}. \qquad (2)$$

Пример. Для любой случайной величины X по неравенству Чебышева получаем

$P\left(\left|X-M(X)\right|<3\sigma\right)\ge 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}=1-\frac{\sigma^2}{9\sigma^2}=\frac{8}{9}\approx 0{,}889$, в то время как для нормально распределённой величины $\mathrm{X}\,P\left(\left|X-M(X)\right|<3\sigma\right)\approx 0{,}997$, т. е. оценка по неравенству Чебышева менее точная, но применимая для всех без исключения случайных величин.

Теорема Чебышева. Если $X_1, X_2,..., X_n$ − попарно независимые случайные величины с равномерно ограниченными дисперсиями, т.е. $\left|D(X_i)\right|<C$, то при неограниченном увеличении n их среднее арифметическое $\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n}$ стремится по вероятности к среднему арифметическому их математических ожиданий: $\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{\sum_{i=1}^{n}M(X_i)}{n}$,

т.е. для любого $\varepsilon>0$ $\quad P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n}-\frac{\sum_{i=1}^{n}M(X_i)}{n}\right|<\varepsilon\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}1.$

Теорема (центральная предельная теорема Ляпунова). Распределение суммы n попарно независимых случайных величин $X_1, X_2,..., X_n$ приближается к нормальному, если:

все эти величины имеют конечные математические ожидания и дисперсии

ни одна из величин по своим значениям резко не отличается от остальных.

Пример. В университете, куда ежедневно приходят 6400 студентов, имеется 2 входа. Каждый студент с вероятностью 0,5 заходит в любой из них и сдает пальто в соответствующий гардероб. Сколько вешалок должно быть в каждом гардеробе, чтобы с вероятностью, большей 0,997 их хватило?

Решение. С каждым студентом свяжем случайную величину X_i, $i = \overline{1; 6400}$, которая примет значение 1, если студент заходит с первого входа и 0 в противном случае. Тогда количество студентов, зашедших с первого входа и сдающих пальто в соответствующий гардероб, равно $X = \sum_{i=1}^{6400} X_i$. Законы распределения составляющих, очевидно, таковы

X_i	0	1
P	0,5	0,5

$M(X_i) = 0.5, \quad D(X_i) = 0.25,$

$M(X) = \sum_{i=1}^{6400} M(X_i) = 3200, \quad D(X) = \sum_{i=1}^{6400} D(X_i) = 1600, \quad \sigma(X) = 40$

Так как сумма большого числа одинаково распределенных величин по теореме Ляпунова подчиняется нормальному закону распределения, то $P\left(\left|X - M(X)\right| < 3\sigma\right) = 0{,}997$, поэтому достаточно вешалок в промежутке $3200 \pm 3 \cdot 40$, т.е. $3200 + 120 = 3320$.

Ответ. 3320 вешалок.

5.7. Задачи

1. Количество бракованных изделий, изготавливаемых каждым из двух рабочих за смену, имеет соответственно закон распределения

X_1	0	1	2
p	0,93	0,05	0,02

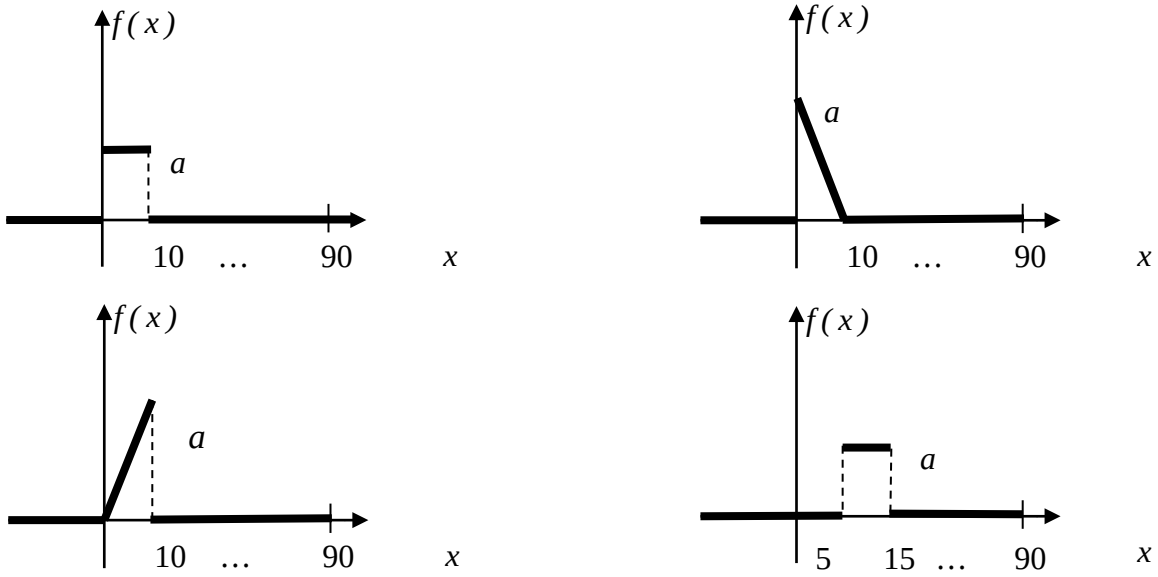
X_2	0	1	2
p	0,94	0,02	0,04

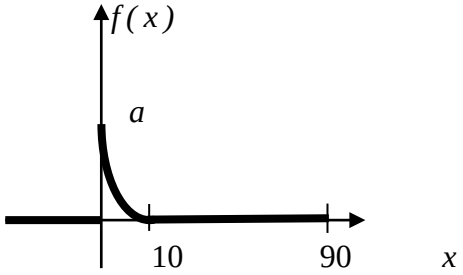
Какой из рабочих работает лучше?

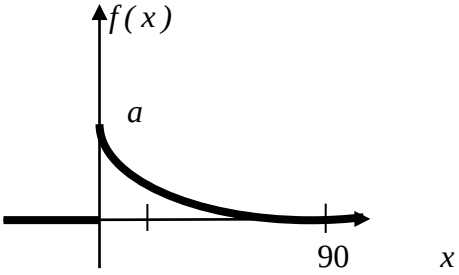
2. X – время опоздания преподавателя на занятие:

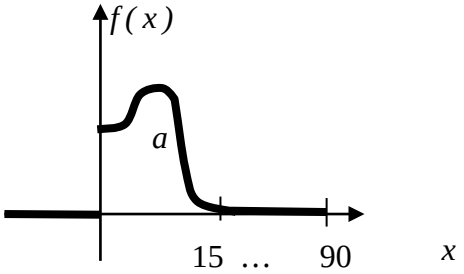
Какие значения может принимать X? Какая это величина дискретная или непрерывная?

Охарактеризуйте величину X по графикам плотности









1. Найдите или оцените значение a.

3. Законы распределения выигрыша, выпадающего на один билет в двух разных лотереях, имеют соответственно вид

X_1	0	1	2	5	10
p	0,85	0,08	0,04	0,02	0,01

X_2	0	1	2	5	10
p	0,91	0,03	0,01	0,03	0,02

Какой лотерее стоит отдать предпочтение?

4. Количество дорожных происшествий, происходящих за сутки на каждом из двух перекрестков, имеет соответственно законы распределения

X_1	0	1	2
p	0,86	0,08	0,06

X_2	0	1	2	3
p	0,87	0,10	0,02	0,01

Какой из перекрестков более безопасный?

5. Дан закон распределения случайной величины X

X	-2	-1	0	1	2	3
p	0,15	0,25	0,30	0,15	0,10	0,05

Составьте законы распределения величин $Y = 5X - 4$ и $Z = X^2$. Найдите $M(X)$, $D(X)$, $M(Y)$, $D(Y)$, $M(Z)$, $D(Z)$.

6. В билете три задачи. Вероятность правильного решения первой равна 0,8, второй − 0,7, а третьей −0,6. Составьте закон распределения случайной величины X − числа правильно решенных задач в билете. Постройте многоугольник распределения и функцию $F(x)$. Найдите $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.

7. Испытывается устройство, состоящее из четырех независимо работающих приборов. Вероятности отказа каждого из приборов равны соответственно $p_1 = 0{,}3$, $p_2 = p_3 = 0{,}4$, $p_4 = 0{,}5$. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа отказавших приборов.

8. Для функции распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1, \\ 0{,}3, & 1 < x \le 2, \\ 0{,}7, & 2 < x \le 3, \\ 1, & x > 3 \end{cases}$$

найдите ряд распределения, $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.

9. Даны законы распределения двух независимых случайных величин

X	0	1	3
p	0,2	0,5	?

Y	2	3
p	0,4	?

а) Найдите вероятности, с которыми величины принимают значение 3.

б) Составьте закон распределения величины $Z = 3X - 2Y$.

в) Найдите $M(Z)$, $D(Z)$ и $\sigma(Z)$.

10. Пусть X, Y, Z – случайные величины, X – выручка фирмы, Y – ее затраты, Z – прибыль. Составьте закон распределения величины $Z = X - Y$, если X и Y независимы и заданы распределениями

X	3	4	5
p	1/3	1/3	1/3

Y	1	2
p	1/2	1/2

11. Дан закон распределения случайной величины X

X	1	2	3	4	5
p	0,2	0,3	0,3	0,1	0,1

Найдите условную вероятность события $X < 5$ при условии $X > 2$.

12. Распределение дискретной случайной величины задается формулой

$$P(X = k) = \frac{c}{2^k}, \qquad k = 0, 1, 2, \cdots.$$

Найдите c и $P(X \le 3)$.

13. Вероятность написать АКР по ТВ с первого раза для студента Сидорова равна 0,25. При каждой следующей попытке вероятность увеличивается на 0,2, но дается не более трех дополнительных попыток. Составьте закон распределения случайной величины X – количества предпринятых попыток написания работы Сидоровым. Найдите $M(X)$ и $D(X)$.

14. Банк выдал кредит размером 400 тыс. рублей сроком на один год под 15% годовых. Известно, что с вероятностью 0,92 кредит будет погашен полностью, с вероятностью 0,05 будет погашена только половина основного долга, а с вероятностью 0,03 не погасят ничего. Найдите математическое ожидание прибыли банка от этой кредитной операции.

15. Банк выдал кредит размером 400 тыс. рублей сроком на один год под 15% годовых. Известно, что кредит будет погашен полностью только с вероятностью 0,92. Чтобы

застраховать свой риск на сумму 400 тыс. рублей, банк покупает страховой полис за 15 тыс. рублей. Найдите математическое ожидание прибыли банка.

16. В рекламных целях торговая фирма вкладывает в каждую десятую единицу товара денежный приз размером в 1000 руб. Составьте закон распределения случайной величины X – размера выигрыша при 5 сделанных покупках. Найдите $M(X)$ и $D(X)$.

17. Охотник, имеющий 4 патрона, стреляет по дичи до первого попадания или до израсходования всех патронов. Вероятность попадания при первом выстреле равна 0,6, а при каждом следующем уменьшается на 0,1. . Составьте закон распределения случайной величины X – числа патронов, израсходованных охотником. Найдите $M(X)$ и $D(X)$.

18. X и Y – независимые случайные величины, $M(X)=3$, $M(Y)=2$, $D(X)=11$, $D(Y)=7$. Найдите а) $M(4X+3Y)$, $D(4X+3Y)$;

б) $M(4X-3Y)$, $D(4X-3Y)$;

в) $M(4X-3Y-5)$, $D(4X-3Y-5)$,

г) $M(2X^2-5XY+7X-12)$.

19. Заданы законы распределения двух независимых случайных величин X и Y. Допишитенедостающие вероятности и найдите законы распределения величин $Z=2X-4$, $V=Y^2+3$ и $U=X+5Y$:

X	2	4	6
p	0,1	0,5	

Y	-2	-1	0	1
p	0,3	0,1	0,2	

20. Законы распределения двух независимых случайных величин X и Y имеют соответственно вид:

X	1	3	6
p	0,2	0,4	

Y	-3	-1	0	1
p	0,5	0,1	0,2	

Допишите недостающие вероятности и найдите законы распределения величин $Z=3X+4$, $V=1-Y^2$ и $U=2XY-3$.

21. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ x^2, & 0<x\le 1,\\ 1, & x>1.\end{cases}$$

Найдите $f(X)$, $M(X)$, $D(X)$, $P(X=0{,}2)$, $P(X<0{,}2)$, $P(X>0{,}2)$, $P(0{,}2<X\le 0{,}8)$.

22. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{9}, & 0<x\le 3,\\ 1, & x>3.\end{cases}$$

Найдите $f(X)$, $M(X)$, $D(X)$, $P(X=1{,}2)$, $P(X<1{,}2)$, $P(X>1{,}2)$, $P(1{,}2<X\le 2{,}3)$.

23. Найдите моду, медиану, $M(X), D(X)$, $\sigma(X)$, квантиль уровня 0,2 случайной величины X с плотностью $f(x)=\begin{cases}a\cdot x^3, & x\in[0;2],\\ 0, & x\notin[0;2].\end{cases}$

24. Случайная величина X, сосредоточенная на отрезке $[2;6]$ задана функцией распределения $F(x)=\frac{1}{16}(x^2-4x+4)$.

Найдите $f(X)$, $P(X=3)$, $P(X<4)$, $P(X\geq 6)$, $P(X\geq 3)$, $P(3\leq X\leq 4)$.

25. Случайная величина X, сосредоточенная на отрезке $[-1;3]$ задана функцией распределения $F(x)=\frac{1}{4}(x+1)$.

Постройте графики $f(x)$, $F(x)$; найдите $M(X)$, $D(X)$, $P(0<X<2)$.

26. Плотность вероятности $f(x)=c\cos x$ в интервале $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$. Найдите c, $F(x)$, $P\left(\frac{\pi}{6}<X<\frac{\pi}{4}\right)$.

27. Случайная величина X, распределена по нормальному закону с параметрами $a=3$, $\sigma^2=16$. Запишите $f(x)$ и постройте ее график. Найдите следующие вероятности:

1) $P(0<X<9)$, 2) $P(0\leq X<9)$, 3) $P(0<X\leq 9)$, 4) $P(X<3)$, 5) $P(X<4)$,

6) $P(X>5)$, 7) $P(|X-3|<2)$, 8) $P(|X-3|<5)$, 9) $P(|X-3|<15)$, 10) $P(|X-3|>7)$,

11) $P(|X-5|<2)$, 12) $P(|X-5|\geq 4)$, 13) $P(|X-5|>2)$.

28. Случайная величина X распределена по показательному закону $f(x)=3e^{-3x}$ $x>0$.Найдите закон распределения $Y=2-5X$.

29. Случайная величина X распределена нормально с математическим ожиданием, равным a, и средним квадратическим отклонением, равным σ. Докажите, что линейная функция $Y=kX+b$ также распределена нормально с математическим ожиданием $ka+b$ и средним квадратическим отклонением $|k|\sigma$.

30. Случайная величина X распределена равномерно в интервале $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. Найдите плотность распределения случайной величины $Y=\sin X$.

31. Случайная величина X распределена равномерно в интервале $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. Найдите плотность распределения случайной величины $Y=\cos X$.

32. Случайная величина X распределена нормально с математическим ожиданием, равным 0, и средним квадратическим отклонением, равным 5. Найдите плотность распределения случайной величины $Y=|X|$.

33. Вероятность получения изделий первого сорта равна 0,75. Принята партия в 1000 изделий. Найдите вероятность того, что изделий первого сорта окажется а) от 700 до 800, б) более 730.

34. Проверкой качества изготавливаемых аккумуляторов для мобильных телефонов установлено, что 94% изделий служат не меньше гарантируемого срока. Наугад выбирают 15000 изделий. Найдите вероятность того, что со сроком службы менее гарантируемого будет от 860 до 940 аккумуляторов.

35. Вероятность того, что наудачу выбранная деталь окажется бракованной, при каждой проверке одна и та же и равна 0,15. Определите вероятность того, что среди 60 наугад выбранных деталей бракованных окажется не менее 8.

36. Суточная потребность электроэнергии в населенном пункте является случайной величиной, математическое ожидание которой равно 3000 кВт/час, а дисперсия составляет 2500. Оцените вероятность того, что в ближайшие сутки расход электроэнергии в этом населенном пункте будет от 2500 до 3500 кВт/час.

5.8. Дополнительные задачи

1. При сборке точного прибора для подгонки некоторой детали может понадобиться в зависимости от случая 1, 2, 3, 4 или 5 проб. Вероятности их даются таблицей

1	2	3	4	5
0,07	0,16	0,55	0,21	0,01

Каким числом деталей нужно снабдить данного сборщика для 20 приборов?

2. Урна содержит шары с числами 1, 2, 3, 4, которые вытягиваются в случайной последовательности сериями по четыре. За каждое число, совпадающее с номером его вытягивания в серии, уплачивается выигрыш в один гульден. Требуется определить математическое ожидание выигрыша.

3. Некое судно занимается ловлей рыбы в территориальных водах иностранного государства, не имея на то соответствующего разрешения. Каждый заброс сетей приносит нарушителям улов одной и той же постоянной стоимости. Вероятность задержания судна пограничной охраной при очередном забросе сетей равна $\frac{1}{k}$, где k — некоторое фиксированное постоянное число. Предполагается, что событие, состоящее в задержании или незадержании судна при очередном забросе сетей, не зависит от предшествовавшего хода лова. При задержании судна пограничной охраной вся пойманная ранее рыба конфискуется, и дальнейший лов становится невозможным. Капитан намеревается уйти из территориальных вод после $n-$го заброса сетей. Поскольку возможность задержания судна пограничной охраной отнюдь не исключена, прибыль от лова рыбы представляет собой случайную величину.

Найдите число n, при котором ожидаемая величина прибыли максимальна.

4. При испытании стали на содержание углерода вероятность того, что в случайно взятой пробе процент углерода превысит допустимый уровень, равна $p = 0{,}01$. Считая применимым закон Пуассона, вычислить, сколько в среднем необходимо испытать образцов, чтобы с вероятностью $p = 0{,}95$ указанный эффект наблюдался по крайней мере k раз. (Рассмотреть случаи $k = 1;\ \ 2;\ \ 3.$)

6. СИСТЕМЫ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Случайные величины, возможные значения которых определяются двумя, тремя, …, n числами, называются соответственно двумерными, трехмерными, …, n-мерными. n-мерные величины обозначаются $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Каждую из величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ называют составляющей, рассматриваемые одновременно они образуют систему случайных величин.

Пример.

1) Возраст, рост и вес человека — трехмерная случайная величина;

2) Одиннадцатимерной случайной величиной, включающей рост, размах рук, ширину груди, длины и ширины головы, длину левой стопы и т.п., является по сути бертильонаж, система идентификации преступников, используемая до появления дактилоскопии.

3). Масса и диаметр изготавливаемой детали — двумерная случайная величина.

Свойства систем удобно рассматривать на примерах двумерной случайной величины (X, Y), которая может быть дискретной (составляющие дискретны) и непрерывной (составляющие непрерывны).

6.1. Дискретная двумерная случайная величина

Закон распределения дискретной случайной величины обычно задают в виде таблицы, первая строка которой содержит все возможные значения составляющей X, а первый столбец — все возможные значения составляющей Y. В клетке, стоящей на пересечении строки и столбца, указывается вероятность появления соответствующей пары значений. Зная закон распределения дискретной двумерной случайной величины (X,Y), находят законы распределения составляющих, складывая вероятности по столбцам (для составляющей X) и по строкам (для составляющей Y).

Пример 6.1. Закон распределения системы дискретных случайных величин (X,Y) задан таблицей. Найдите а) законы распределения составляющих, б) их математические ожидания и дисперсии, в) вероятность попадания случайной величины (X,Y) в область $D: D=\{-1 \le x \le 0,\ \ 0 \le y \le 2\}$

.

X \ Y	-2	-1	0	1
-1	0,02	0,05	0,04	0,1
0	0,03	0,08	0,05	0,2
2	0,02	0,05	0,06	0,3

Решение. а) Перечислим возможные значения X: это -2, -1, 0 и 1. Событие $X=-2$ является суммой несовместных событий $(X=-2, Y=-1)$, $(X=-2, Y=0)$ и $(X=-2, Y=2)$, поэтому
$P(X=-2)=P(X=-2, Y=-1)+P(X=-2, Y=0)+P(X=-2, Y=2)=0{,}02+0{,}03+0{,}02=0{,}07$;
закон распределения X найдем, складывая вероятности по столбцам:

X	-2	-1	0	1
P	0,07	0,18	0,15	0,6

Аналогично, складывая вероятности по строкам, найдем закон распределения составляющей Y:

Y	-1	0	2
P	0,21	0,36	0,43

б) Математические ожидания и дисперсии составляющих находим как и раньше:
$M(X)=-2\cdot 0{,}07+(-1)\cdot 0{,}18+0\cdot 0{,}15+1\cdot 0{,}6=0{,}28$,
$M(X^2)=4\cdot 0{,}07+1\cdot 0{,}18+0\cdot 0{,}15+1\cdot 0{,}6=1{,}06$,
$D(X)=M(X^2)-(M(X))^2=1{,}06-(0{,}28)^2=0{,}9816$.
$M(Y)=-1\cdot 0{,}21+0\cdot 0{,}36+2\cdot 0{,}43=0{,}65$,
$M(Y^2)=1\cdot 0{,}21+0\cdot 0{,}36+4\cdot 0{,}43=1{,}93$,
$D(Y)=M(Y^2)-(M(Y))^2=1{,}93-(0{,}65)^2=1{,}5075$.

в) Выберем точки (X,Y), попадающие в область D:

X \ Y	-2	-1	0	1
-1	0,02	0,05	0,04	0,1
0	0,03	0,08	0,05	0,2
2	0,02	0,05	0,06	0,3

Складывая выделенные вероятности, найдем

$P((X,Y)\in D)=0{,}08+0{,}05+0{,}05+0{,}06=0{,}24$.

Можно рассмотреть условные законы распределения составляющих. Для дискретных величин условные вероятности находятся по формулам

$$P(x_i / y_j)=\frac{P(x_i,y_j)}{P(y_j)} \qquad \text{и} \qquad P(y_j / x_i)=\frac{P(x_i,y_j)}{P(x_i)}.$$

Пример 6.2. Найдем законы распределения X при $Y=-1$ и $Y=0$ (из примера 6.1).

Решение.

$$Y=-1.\ P(-2/y=-1)=\frac{P(-2;-1)}{P(y=-1)}=\frac{0{,}02}{0{,}21}=\frac{2}{21},\ P(-1/y=-1)=\frac{P(-1;-1)}{P(y=-1)}=\frac{0{,}05}{0{,}21}=\frac{5}{21},$$

$$P(0/y=-1)=\frac{P(0;-1)}{P(y=-1)}=\frac{0{,}04}{0{,}21}=\frac{4}{21},\qquad P(-1/y=-1)=\frac{P(1;-1)}{P(y=-1)}=\frac{0{,}1}{0{,}21}=\frac{10}{21}.$$

Условный закон распределения X при $Y=-1$:

X	-2	-1	0	1
$P_{y=-1}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{10}{21}$

$$Y=0.\ P(-2/y=0)=\frac{P(-2;0)}{P(y=0)}=\frac{0{,}03}{0{,}36}=\frac{3}{36},\ P(-1/y=0)=\frac{P(-1;0)}{P(y=0)}=\frac{0{,}08}{0{,}36}=\frac{8}{36},$$

$$P(0/y=0)=\frac{P(0;0)}{P(y=0)}=\frac{0{,}05}{0{,}36}=\frac{5}{36},\qquad P(1/y=0)=\frac{P(1;0)}{P(y=0)}=\frac{0{,}2}{0{,}36}=\frac{20}{36}.$$

Условный закон распределения X при $Y=0$:

X	-2	-1	0	1
$P_{y=0}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{20}{36}$

Мы видим, что условные законы распределения оказались разными, значит, случайные величины X и Y являются зависимыми.

Для установления связи между величинами вводится понятие **корреляционного момента** (или **ковариации**) $\mu_{xy}=M((X-M(X))(Y-M(Y)))$, , который часто удобнее считать по формуле $\mu_{xy}=M(XY)-M(X)\cdot M(Y)$.

Свойства корреляционного момента

1. Для независимых случайных величин X и Y $\mu_{XY}=0$.
2. Если $\mu_{XY}\neq 0$, то случайные величины X и Y зависимы.
3. $M(XY)=M(X)M(Y)+\mu_{XY}$.

4. $D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2\mu_{XY}$.

5. $\mu_{aXbY}=ab\mu_{XY}$.

6. $|\mu_{XY}|\le\sigma_X\sigma_Y$.

Корреляционный момент имеет размерность произведения размерностей случайных величин X и Y и зависит от того, в каких единицах измерялись величины. Для получения безразмерной характеристики вводится понятие **коэффициента корреляции**:

$$r_{XY}=\frac{\mu_{XY}}{\sigma_X\cdot\sigma_Y}.$$

Свойства коэффициента корреляции

Для независимых случайных величин X и Y $r_{XY}=0$.

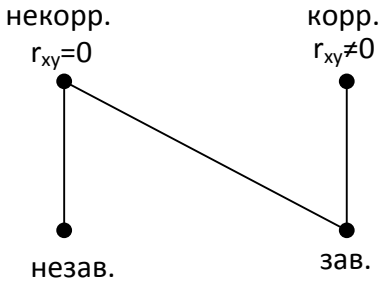
Если $r_{XY}\neq 0$, то случайные величины X и Y зависимы.

$-1\le r_{XY}\le 1$. Коэффициент корреляции по абсолютной величине не превосходит единицы.

$|r_{XY}|=1$ тогда и только тогда, когда случайные величины X и Y связаны линейной функциональной зависимостью, т.е. $Y=aX+b$.

Случайные величины X и Y называются **некоррелированными**, если $r_{XY}=0$, и **коррелированными**, если $r_{XY}\neq 0$.

Следует помнить, что понятия некоррелированности и независимости не совпадают, несмотря на внешнее сходство. Независимые величины − некоррелированные, но обратное неверно. Коррелированные величины − зависимые, но обратное неверно. Любые коррелированные величины всегда зависимые, любые независимые величины всегда некоррелированные. Это можно отразить на двудольном графе.



Пример 6.3. Найдем корреляционный момент и коэффициент корреляции в примере 6.1.

Решение. Для дискретных случайных величин X и Y $M(XY)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}x_i y_j p(x_i,y_j)$.

$M(XY)=(-2)\cdot(-1)\cdot 0{,}02+(-1)\cdot(-1)\cdot 0{,}05+1\cdot(-1)\cdot 0{,}1+(-2)\cdot 2\cdot 0{,}02+(-1)\cdot 2\cdot 0{,}05+$
$1\cdot 2\cdot 0{,}3=0{,}41$, $\mu_{XY}=M(XY)-M(X)\cdot M(Y)=0{,}41-0{,}28\cdot 0{,}65=-0{,}228$,

$$r_{XY}=\frac{\mu_{XY}}{\sigma_X\cdot\sigma_Y}=\frac{-0{,}228}{\sqrt{0{,}9816}\cdot\sqrt{1{,}5075}}=0{,}1874.$$

Пример 6.4. У случайных величин X и Y $M(X)=2$, $M(Y)=-3$, $D(X)=16$, $D(Y)=1$, $r_{XY}=0{,}5$. Найдите $M(X+7Y+5)$ и $D(X+7Y+5)$.

Решение. $M(X+7Y+5)=M(X)+7M(Y)+5=2-21+5=-14$.

$D(X+7Y+5)=D(X+7Y)=D(X)+D(7Y)+2\mu_{X7Y}=D(X)+7^2\cdot D(Y)+2\cdot 7\mu_{XY}=$

$=16+49+14\cdot 4\cdot 1\cdot 0{,}5=93$.

6.2. Непрерывная двумерная случайная величина

Задается функцией распределения $F(x,y)=P(X<x,Y<y)$, которая является непрерывной и имеющей вторую смешанную производную $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}$ почти всюду. Эта производная обозначается $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=f(x,y)$ и называется плотностью вероятности двумерной случайной величины. (Обратите внимание, что эта функция вводится только для непрерывных случайных величин.) График плотности вероятности $z=f(x,y)$ − поверхность в пространстве: «гора или горы, переходящие вдали от начала координат в равнину».

Свойства функции распределения $F(x,y)$

1. $0\le F(x,y)\le 1$.
2. $F(x,y)$ неубывающая функция по каждому аргументу.
3. $F(-\infty,-\infty)=F(-\infty,y)=F(x,-\infty)=0$.
4. Если один из аргументов равен «$+\infty$», то $F(x,y)$ становится функцией распределения для второй составляющей: $F(x,+\infty)=F_1(x)$, $F(+\infty,y)=F_2(y)$. Здесь $F_1(x)$ и $F_2(y)$ − функции распределения составляющих X и Y двумерной случайной величины (X,Y).
5. $F(+\infty,+\infty)=1$.

Свойства плотности вероятности $f(x,y)$

1. $f(x,y)\ge 0$.
2. Вероятность попадания случайной величины (X,Y) в область D:

$P((X,Y)\in D)=\iint\limits_D f(x,y)dxdy$.

3. $F(x,y)=\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y} f(\xi,\eta)d\xi d\eta$.
4. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=1$.
5. $F_1(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi,\eta)d\xi d\eta$, т.к. $F_1(x)=F(x,+\infty)$,

$F_2(y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{y} f(\xi,\eta)d\xi d\eta$, т.к. $F_2(y)=F(+\infty,y)$.

6. $f_1(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$, $\qquad f_2(y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$,

где $f_1(x)$ и $f_2(y)$ − плотности вероятностей составляющих X и Y двумерной случайной величины (X,Y).

Пример 6.5. Задана плотность вероятности совместного распределения системы (X,Y)

$$f(x,y)=\begin{cases}16xye^{-4x^2-y^2} & x,y>0,\\ 0 & \text{при остальных } x,y.\end{cases}$$

Найдите плотности вероятностей составляющих X и Y двумерной случайной величины (X,Y).

Решение. Найдем

$$f_1(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int\limits_{0}^{+\infty}16xye^{-4x^2-y^2}dy=-8xe^{-4x^2}\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-y^2}(-2y)dy=-8xe^{-4x^2}e^{-y^2}\Big|_0^{+\infty}=8xe^{-4x^2}.$$

$$f_2(y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\int\limits_{0}^{+\infty}16xye^{-4x^2-y^2}dx=-2ye^{-y^2}\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-4x^2}(-8x)dx=-2ye^{-y^2}e^{-4x^2}\Big|_0^{+\infty}=2ye^{-y^2}.$$

Для непрерывных величин рассматриваются условные законы распределения: плотности для условных законов распределения имеют вид:

$$f_1(x/y)=\frac{f(x,y)}{f_2(y)}=\frac{f(x,y)}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx}\quad\text{и}\quad f_2(y/x)=\frac{f(x,y)}{f_1(x)}=\frac{f(x,y)}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy}.$$

Числовые характеристики составляющих X и Y двумерной непрерывной случайной величины (X,Y) можно найти по формулам

$$M(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}xf_1(x)dx=\int\limits_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty}xf(x,y)dxdy,$$

$$M(Y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}yf_2(y)dy=\int\limits_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty}yf(x,y)dxdy,$$

$$D(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(x-M(X))^2f_1(x)dx=\int\limits_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty}(x-M(X))^2f(x,y)dxdy,$$

$$D(Y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(y-M(Y))^2f_2(y)dy=\int\limits_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty}(y-M(Y))^2f(x,y)dxdy.$$

Аналогичные характеристики можно ввести и для условных распределений, например, условные математические ожидания

$$M(X/y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}xf_1(x/y)dx,\qquad M(Y/x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}yf_2(y/x)dy.$$

Условное математическое ожидание $M(X/y)$ будет функцией от y:

$$M(X/y)=\varphi(y),\qquad (1)$$

и наоборот, условное математическое ожидание $M(Y/x)$ будет функцией от x:

$$M(Y/x)=\psi(x).\qquad (2)$$

Функции (1) и (2) называются функциями регрессии: (1) − X на Y, а (2) − Y на X. Графики этих функций называются линиями регрессии или кривыми регрессии.

Пример. Задан закон распределения системы случайных величин (X,Y):

$$f(x,y)=\begin{cases}a(1-x-y) & \text{в } D,\\ 0 & \text{вне } D,\end{cases}\qquad D:\quad x,y\ge 0,\quad x+y\le 1.$$

Найдите значение параметра a. Найдите законы распределения составляющих X и Y. Найдите условные законы распределения составляющих. Найдите $M(X)$, $D(X)$, $M(Y)$, $D(Y)$, $M(XY)$, μ_{XY}, r_{XY}.

Решение. а) Согласно свойству $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = 1$ совместной плотности вероятности $f(x,y)$ системы случайных величин (X,Y) (свойство 4 из §10) для заданной плотности также

$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = 1$, т.е. $\iint\limits_D a(1-x-y)dxdy = 1$. Вычислим интеграл:

$$a\iint\limits_D (1-x-y)dxdy = a\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x}(1-x-y)dy =$$

$$= a\int\limits_0^1 dx\left((1-x)y - \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^{1-x} = a\int\limits_0^1 \frac{(1-x)^2}{2}dx = -\frac{a}{2}\frac{(1-x)^3}{3}\Bigg|_0^1 = \frac{a}{6}.$$ Следовательно, $a = 6$.

Итак, плотность вероятности имеет вид

$$f(x,y) = \begin{cases} 6(1-x-y) & \text{в } D, \\ 0 & \text{вне } D. \end{cases}$$

б) Законы распределения составляющих X и Y найдем по формулам:

$f_1(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$ – плотность вероятности составляющей X и

$f_2(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$ – плотность вероятности составляющей Y.

Если $x \notin [0;1]$, то $f_1(x) = 0$, а при $x \in [0;1]$

$f_1(x) = 6\int\limits_0^{1-x}(1-x-y)dy = 3(1-x)^2$, поэтому

$$f_1(x) = \begin{cases} 3(1-x)^2, & x \in [0;1], \\ 0, & x \notin [0;1]. \end{cases}$$

Аналогично, если $y \notin [0;1]$, то $f_2(y) = 0$, а при $y \in [0;1]$

$f_2(y) = 6\int\limits_0^{1-y}(1-x-y)dx = 3(1-y)^2$, поэтому

$$f_2(y) = \begin{cases} 3(1-y)^2, & y \in [0;1], \\ 0, & y \notin [0;1]. \end{cases}$$

в) Условные законы распределения составляющих X и Y найдем по формулам:

$$f_1(x/y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)} = \frac{f(x,y)}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx} \text{ и } f_2(y/x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)} = \frac{f(x,y)}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy}.$$

$f_1(x/y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)} = \frac{6(1-x-y)}{3(1-y)^2} = 2\frac{1-x-y}{(1-y)^2}$ при $(x,y) \in D$, т.е.

$$f_1(x/y)=\begin{cases}2\dfrac{1-x-y}{(1-y)^2}, & (x,y)\in D,\\ 0, & (x,y)\notin D.\end{cases}$$

$f_2(y/x)=\dfrac{f(x,y)}{f_1(x)}=\dfrac{6(1-x-y)}{3(1-x)^2}=2\dfrac{1-x-y}{(1-x)^2}$ при $(x,y)\in D$, т.е.

$$f_2(y/x)=\begin{cases}2\dfrac{1-x-y}{(1-x)^2}, & (x,y)\in D,\\ 0, & (x,y)\notin D.\end{cases}$$

г) Математическое ожидание $M(X)$ найдем по формуле

$M(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}xf_1(x)dx=\int\limits_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty}xf(x,y)dxdy$, а т.к. $f(x,y)$ отлична от 0 только в области D, то

$$M(X)=6\iint\limits_D x(1-x-y)dxdy=6\int\limits_0^1 xdx\int\limits_0^{1-x}(1-x-y)dy=6\int\limits_0^1 xdx\left((1-x)y-\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^{1-x}=$$

$$=6\int\limits_0^1 x\frac{(1-x)^2}{2}dx=3\int\limits_0^1\left(x^3-2x^2+x\right)dx=\left(\frac{3x^4}{4}-2x^3+\frac{3x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1=0{,}25.$$

Аналогично, $M(Y)=0{,}25$.

Для вычисления дисперсии найдем $M(X^2)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x^2f_1(x)dx=\int\limits_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty}x^2f(x,y)dxdy$. А т.к. $f(x,y)$ отлична от 0 только в области D, то

$$M(X^2)=6\iint\limits_D x^2(1-x-y)dxdy=6\int\limits_0^1 x^2dx\int\limits_0^{1-x}(1-x-y)dy=6\int\limits_0^1 x^2dx\left((1-x)y-\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^{1-x}=$$

$$=6\int\limits_0^1 x^2\frac{(1-x)^2}{2}dx=3\int\limits_0^1\left(x^4-2x^3+x^2\right)dx=\left(\frac{3x^5}{5}-\frac{3x^4}{2}+x^3\right)\Bigg|_0^1=0{,}1.$$

$$D(X)=M(X^2)-(M(X))^2=0{,}1-0{,}25^2=\frac{3}{80}.$$

Аналогичные вычисления для Y дают $D(Y)=\dfrac{3}{80}$.

Средние квадратические отклонения $\sigma_X=\sqrt{D(X)}=\sqrt{\dfrac{3}{80}}$ и $\sigma_Y=\sqrt{D(Y)}=\sqrt{\dfrac{3}{80}}$.

д) Математическое ожидание $M(XY)$ найдем по формуле

$M(XY)=\int\limits_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty}xyf(x,y)dxdy$. А т.к. $f(x,y)$ отлична от 0 только в области D, то

$$M(XY)=6\iint\limits_D xy(1-x-y)dxdy=6\int\limits_0^1 xdx\int\limits_0^{1-x}y(1-x-y)dy=6\int\limits_0^1 xdx\left((1-x)\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^{1-x}=$$

$$= 6\int_0^1 x\frac{(1-x)^3}{6}dx = \begin{vmatrix} t = 1-x \\ dt = -dx \\ x \quad 0 \quad 1 \\ t \quad 1 \quad 0 \end{vmatrix} = -\int_1^0 (1-t)t^3 dt = \int_0^1 (t^3 - t^4)dt = \left(\frac{t^4}{4} - \frac{t^5}{5}\right)\Bigg|_0^1 = 0{,}05.$$

е) Корреляционный момент μ_{XY} найдем по формуле $\mu_{XY} = M(XY) - M(X)M(Y)$.

$$\mu_{XY} = 0{,}05 - 0{,}25 \cdot 0{,}25 = -\frac{1}{80}.$$

Коэффициент корреляции r_{XY} вычисляется по формуле $r_{XY} = \dfrac{\mu_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$.

$$r_{XY} = \frac{\left(-\frac{1}{80}\right)}{\sqrt{\frac{3}{80}} \cdot \sqrt{\frac{3}{80}}} = -\frac{1}{3}.$$

Так как коэффициент корреляции отличен от 0, случайные величины X и Y коррелированные, а значит, зависимые.

Ответ. $a = 6$,

$$f_1(x) = \begin{cases} 3(1-x)^2, & x \in [0;1], \\ 0, & x \notin [0;1]. \end{cases}$$

$$f_2(y) = \begin{cases} 3(1-y)^2, & y \in [0;1], \\ 0, & y \notin [0;1]. \end{cases}$$

$$f_1(x/y) = \begin{cases} 2\dfrac{1-x-y}{(1-y)^2}, & (x,y) \in D, \\ 0, & (x,y) \notin D. \end{cases}$$

$$f_2(y/x) = \begin{cases} 2\dfrac{1-x-y}{(1-x)^2}, & (x,y) \in D, \\ 0, & (x,y) \notin D. \end{cases}$$

$M(X) = 0{,}25$, $D(X) = \dfrac{3}{80}$, $M(Y) = 0{,}25$, $D(Y) = \dfrac{3}{80}$,

$M(XY) = \dfrac{1}{20}$, $\mu_{XY} = -\dfrac{1}{80}$, $r_{XY} = -\dfrac{1}{3}$.

Замечание. Симметричные значения для составляющих в данном примере получились благодаря симметричности плотности совместного распределения и области D. В общем случае таких совпадений не будет.

6.3. Задачи

1. Задан закон распределения системы случайных величин (X, Y). Найдите законы распределения составляющих X и Y. Найдите все условные законы распределения составляющих. Найдите $M(X)$, $D(X)$, $M(Y)$, $D(Y)$, $M(XY)$, $\mu(XY)$, $r(XY)$.

Y \ X	0	1
-1	0,1	0,2
2	0,3	0,4

2. Задан закон распределения системы случайных величин (X,Y). Найдите законы распределения составляющих X и Y. Найдите все условные законы распределения составляющих. Найдите $M(X)$, $D(X)$, $M(Y)$, $D(Y)$, $M(XY)$, $\mu(XY)$, $r(XY)$.

Y \ X	0	1	2
-1	0,05	0,15	0,1
3	0,15	0,3	0,25

3. Задан закон распределения системы случайных величин (X,Y). Найдите законы распределения составляющих X и Y. Найдите все условные законы распределения составляющих. Найдите $M(X)$, $D(X)$, $M(Y)$, $D(Y)$, $M(XY)$, $\mu(XY)$, $r(XY)$.

Y \ X	-1	0	1
-1	0,1	0,2	0,1
0	0,1	0,3	0,2

4. Закон распределения системы дискретных случайных величин (X,Y) задан таблицей. Найдите а) законы распределения составляющих, б) их математические ожидания и дисперсии, в) корреляционный момент и коэффициент корреляции $r_{x,y}$, г) вероятность попадания случайной величины (X,Y) в область D $\mathrm{D} = \{(\mathrm{x}+1)^2 + \mathrm{y}^2 \le 1\}$.

Y \ X	-2	-1	1	2
-1	0,03	0,04	0,06	0,08
0	0,06	0,07	0,10	0,10
3	0,05	0,07	0,14	0,20

5. Закон распределения системы дискретных случайных величин (X,Y) задан таблицей. Найдите а) законы распределения составляющих, б) их математические ожидания и дисперсии, в) корреляционный момент и коэффициент корреляции $r_{x,y}$, г) вероятность попадания случайной величины (X,Y) в область D $D = \{2 \le x \le 3;\ 0 \le y \le 1\}$.

Y \ X	1	2	3	4
-1	0,04	0,06	0,10	0,08
0	0,04	0,09	0,15	0,10
1	0,06	0,08	0,11	0,09

6. Известно, что $\mathrm{Y} = -\mathrm{X} + 9$, $M(X) = 11$, $D(X) = 49$. Найдите $M(Y)$, $D(Y)$, K_{xy}, r_{xy}.

7. Известно, что $Y = 9X - 11$, $M(X) = 5$, $D(X) = 9$. Найдите $M(Y)$, $D(Y)$, K_{xy}, r_{xy}.

8. X и Y – случайные величины. $M(X)=5$, $D(X)=9$, $M(Y)=-7$, $D(Y)=16$, $r_{xy}=0{,}4$. Найдите $M(2X-4Y+19)$, $D(2X-4Y+19)$, $M(2X^2-3XY+5Y^2-X-7Y+9)$.

9. Известны законы распределения случайных величин X, Y $f_1(x)=\begin{cases}c,\ x\in[0;3],\\ 0,\ x\notin[0;3],\end{cases}$ $f_2(y)=\begin{cases}3e^{-3y},\ y\ge 0,\\ 0,\quad y<0,\end{cases}$ и $r_{xy}=0{,}1$.

Найдите $M(5Y^2-3X-4XY-5)$, $D(2X+5Y+7)$.

10. Известны законы распределения случайных величин X, Y $f_1(x)=\begin{cases}c,\ x\in[0;12],\\ 0,\ x\notin[0;12],\end{cases}$

$f_2(y)=\dfrac{1}{5\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-1)^2}{50}}$ и $r_{xy}=0{,}6$.

Найдите $M(5Y^2-3X+15XY-7)$, $D(3X+5Y-11)$.

11. Система случайных величин (X,Y) подчинена закону распределения с плотностью $f(x,y)=\begin{cases}24xy & в\ D,\\ 0 & вне\ D,\end{cases}$ $D:\ x,y\ge 0,\ x+y\le 1.$

Найдите $M(X)$, $D(X)$, $M(Y)$, $D(Y)$, r_{XY}.

12. Задана плотность распределения $f(x,y)$ системы двух случайных величин (X,Y). Найдите а) коэффициент A, б) $M(X)$ и $M(Y)$, $D(X)$ и $D(Y)$, в) корреляционный момент и коэффициент корреляции r_{xy}.

$$f(x,y)=\begin{cases}A\sin(2x+y),\ в\ обл\ D\\ 0,\ вне\ обл\ D,\end{cases}\quad D=\left\{-\frac{\pi}{4}\le x\le 0,\ \frac{\pi}{2}\le y\le 0\right\}.$$

13. Задана плотность распределения $f(x,y)$ системы двух случайных величин (X,Y). Найдите а) коэффициент A, б) $M(X)$ и $M(Y)$, $D(X)$ и $D(Y)$, в) корреляционный момент и коэффициент корреляции r_{xy}.

$$f(x,y)=\begin{cases}A(2x+y),\ в\ обл\ D\\ 0,\ вне\ обл\ D,\end{cases}\quad D=\{2x+5y\le 10,\ x\ge 0,\ y\ge 0\}.$$

14. Двумерная случайная величина (X,Y) распределена равномерно внутри квадрата К с центром в начале координат. Стороны квадрата равны $\sqrt{2}$ и составляют углы в 45^0 с осями координат. Определите

а) совместную плотность вероятности,

б) плотности вероятности составляющих,

в) условные плотности,

г) зависимы или независимы X и Y.

15. Даны плотности вероятности независимых составляющих двумерной случайной величины (X,Y): $f_1(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 5e^{-5x}, & x\ge 0,\end{cases}$ $f_2(y)=\begin{cases}0, & y<0,\\ 2e^{-2y}, & y\ge 0.\end{cases}$

Найдите совместную плотность вероятности и функцию распределения

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Беррондо М*. Занимательные задачи / *М.Беррондо*− М.: Мир, 1983. − 230 с.
2. *Вуколов Э.А.* Сборник задач по математике для втузов. Специальные курсы / *Э.А. Вуколов, А.В. Ефимов* − М.: Наука, 1984. − 608 с.
3. *Гмурман В.Е.* Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / *В.Е. Гмурман*. – М.: Высшее образование, 2008. − 404 с.
4. *Кремер Н.Ш.* Теория вероятностей и математическая статистика / *Н.Ш. Кремер*. − М.: Издательство ЮНИТИ-ДАНА, 2000. − 543 с.
5. *Мостеллер Ф*. Пятьдесят занимательных вероятностных задач с решениями / *Ф. Мостеллер*− М.: Наука, 1971. − 104 с.
6. *Зарецкая М.А*. Дискретная математика для программистов / *М.А.Зарецкая*. −Магнитогорск: МГТУ, 2009. − 172 с.
7. *Зарецкая М.А.* Переключательные функции: методические указания по дисциплине «Дискретная математика» для бакалавров направлений 080500 и 230100 [Электронный ресурс] / *М.А.Зарецкая*. – М.: ФГУП НТЦ «Информрегистр», 2013. - № 0321302817.

Учебное текстовое электронное издание

Зарецкая Мария Андриановна
Глаголева Ирина Викторовна

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Учебно-методическое пособие

Издается полностью в авторской редакции
0,9 Мб
1 электрон. опт. диск

г. Магнитогорск, 2014 год
ФГБОУ ВПО «МГТУ»
Адрес: 455000, Россия, Челябинская область, г. Магнитогорск,
пр. Ленина 38

ФГБОУ ВПО «Магнитогорский государственный
технический университет им. Г.И. Носова»
Кафедра высшей математики № 2
Центр электронных образовательных ресурсов и
дистанционных образовательных технологий
e-mail: ceor_dot@mail.ru