Министерство образования и науки Российской Федерации
Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова

Л.А. Изосова, Л.А. Грачёва

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Утверждено Редакционно-издательским советом университета в качестве учебного пособия

Магнитогорск
2017

УДК 512.942(075.8)

Рецензенты:
Заведующая кафедрой ВТиП
ФГБОУ ВО «Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова», доктор технических наук
О.С. Логунова

Доцент кафедры естественнонаучных и социально-гуманитарных дисциплин Магнитогорского филиала ФГБОУ ВО «РАНХ и ГС»
Н.А. Квасова

Изосова, Л.А.
Элементы теории поля: учеб. пособие / Л.А. Изосова, Л.А. Грачёва. Магнитогорск: Изд-во Магнитогорск. гос. техн. ун-та им. Г.И. Носова, 2017. 63 с.

Рассмотрены основные понятия, связанные с элементами теории поля. Приведена классификация полей и их основные характеристики. Кроме того, приведены дополнительные разделы с основными понятиями криволинейных и поверхностных интегралов 1-го и 2-го рода.

УДК 512.942(075.8)

© Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова, 2017
© Изосова Л.А., Грачёва Л.А., 2017

ВВЕДЕНИЕ

Теория поля – крупный раздел математики, физики, механики, в котором изучаются скалярные, векторные поля. Понятие поля, как и другие математические понятия, представляет собой выражение определённых количественных отношений и пространственных форм материального мира.

К рассмотрению скалярных и векторных полей приводят многие задачи математики, физики, электротехники, механики и других технических дисциплин. Изучение одних физических полей способствует изучению и других. Так, например, силы всемирного тяготения, магнитные, электромагнитные силы – все они изменяются обратно пропорционально квадрату расстояния от своего источника; диффузия в растворах происходит по законам, общим с распространением тепла в различных средах; вид силовых магнитных полей напоминает картину обтекания препятствий жидкостью и т.д.

Математическим ядром теории поля являются такие понятия, как градиент, поток, потенциал, дивергенция, ротор, циркуляция и др. Эти понятия важны также в усвоении основных идей математического анализа функций нескольких переменных, дифференциальной геометрии и т.д.

Термин «поле» в физике употребляется для обозначения части пространства (или всего пространства), в котором рассматривается некоторое физическое явление (поле температур, электромагнитное поле и т.п.).

В математике *полем* называется область V пространства, в каждой точке которой определено значение некоторой функции. Если каждой точке M этой области соответствует определённое число $U = U(M)$, то говорят, что в области V определено ***скалярное поле*** (или функция точки). Иначе говоря, скалярное поле – это скалярная функция $U(M)$ вместе с её областью определения. Если же каждой точке M области V пространства соответствует некоторый вектор $\bar{a} = \bar{a}(M)$, то говорят, что задано ***векторное поле (или векторная функция точки).***

Если функции $U(M)$ ($\bar{a}(M)$) не зависит от времени, то скалярное (векторное) поле называется ***стационарным (или установившимся)***; поле, которое меняется с течением времени (меняется, например: скалярное поле температуры при охлаждении тела), называется ***нестационарным (или неустановившимся).***

Если V – область трёхмерного пространства, то скалярное поле U можно рассматривать как функцию трёх переменных x, y, z (координат точки M): $U = U(x, y, z)$. Если функция U зависит только от двух переменных x, y, то скалярное поле $U = U(x, y)$ называют ***плоским***.

Аналогично вектор $\bar{a} = \bar{a}(M)$, определяющий векторное поле, можно рассматривать как векторную функцию трёх скаляр-ных аргументов x, y, z: $\bar{a} = \bar{a}(x, y, z)$. Вектор $\bar{a} = \bar{a}(M)$ можно представить (разложив его по ортам координатных осей) в виде

$$\bar{a} = P(x, y, z)\,\bar{i} + Q(x, y, z)\,\bar{j} + R(z, y, z)\bar{k},$$

где $P(x, y, z)$; $Q(x, y, z)$; $R(x, y, z)$ – проекции вектора $\bar{a}(M)$ на оси координат.

Если в выбранной системе координат $Oxyz$ одна из проекций вектора $\bar{a} = \bar{a}(M)$ равна нулю, а две другие зависят только от двух переменных, то векторное поле называется ***плоским***, например $\bar{a} = P(x, y)\,\bar{i} + Q(x, y)\,\bar{j}$.

Векторное поле называется ***однородным***, если $\bar{a}(M)$ – постоянный вектор, т.е. P, Q, R – постоянные величины. Таким полем, например, является поле тяжести.

Будем предполагать, что скалярные функции $U(x, y, z)$ (определяющая скалярное поле) и $P(x, y, z)$; $Q(x, y, z)$; $R(x, y, z)$ (задающие векторное поле) непрерывны вместе со своими частными производными.

1. СКАЛЯРНОЕ ПОЛЕ

1.1. Поверхности и линии уровня

Рассмотрим скалярное поле, задаваемое функцией $U = U(x, y, z)$. Для наглядного представления скалярного поля используются поверхности и линии уровня.

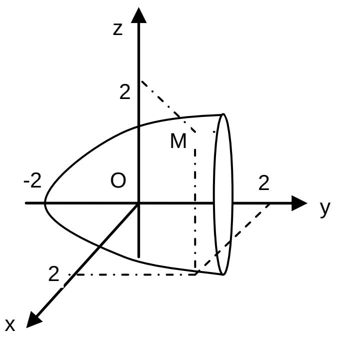
Поверхностью уровня скалярного поля называется геометрическое место точек, в которых функция $U(M)$ принимает постоянное значение, т.е.

$$U(x, y, z) = C. \tag{1}$$

Задавая в равенстве (1) величине С различные значения, получим различные поверхности уровня, которые в совокупности как бы расслаивают поле. Через каждую точку поля проходит только одна поверхность уровня. Её можно найти путём подстановки координат точки в уравнение (1). Так как функцию, задающую скалярное поле, часто, независимо от её физического смысла, называют потенциалом, то поверхности уровня называют также ***эквипотенциальными поверхностями***, т.е. поверхностями равного потенциала.

ПРИМЕР 1. Найти и построить поверхность уровня скалярного поля $U = x^2 - 2y + z^2$, содержащую точку $M_0(2, 2, 2)$.

Поверхности уровня данного скалярного поля имеют уравнение: $x^2 - 2y + z^2 = C$. Найдём *С* из того условия, что поверхность проходит через точку $M_0(2, 2, 2)$: $2^2 - 2 \cdot 2 + 2^2 = C$, т.е. $C = 4$. Тогда уравнение соответствующей поверхности уровня имеет вид: $x^2 - 2y + z^2 = 4$, или $x^2 + z^2 = 4 + 2y$, или $x^2 + z^2 = 2(y + 2)$. Данное уравнение задаёт параболоид с вершиной в точке *М*(0, -2, 0), направленный вдоль оси *Oy*:



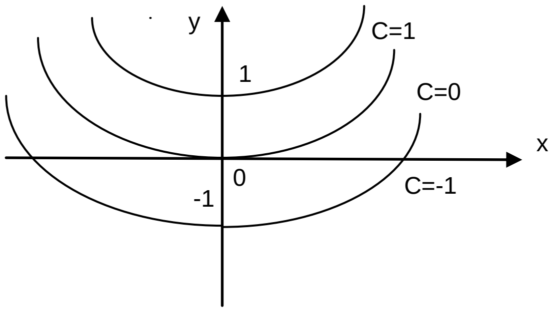
В случае плоского поля $U = U(x, y)$ равенство

$$U(x, y) = C$$

представляет собой уравнение ***линии уровня*** скалярного поля, т.е. линии уровня – это линии на плоскости *Oxy*, в точках которых функция $U(x, y)$ сохраняет постоянное значение.

ПРИМЕР 2. Найти и построить линии уровня скалярного поля $z = y - \frac{1}{2}x^2$.

Линии уровня задаются уравнениями: $y = \frac{1}{2}x^2 + C$.



Они представляют собой семейство парабол, смещённых вдоль оси Oy.

В метеорологии, например, сети изобар и изотерм (линии одинаковых средних давлений и одинаковых средних температур) являются линиями уровня и представляют собой функции координат точек местности.

Линии уровня применяются также в математике при исследовании поверхностей методом сечений.

1.2. Градиент скалярного поля и его свойства. Производная по направлению

Пусть скалярная функция $U = U(x, y, z)$, задающая скалярное поле, имеет непрерывные частные производные.

<u>Градиентом скалярного поля</u> U в некоторой точке $M(x, y, z)$ называется вектор, определяемый равенством

$$gradU(M)=\frac{\partial U}{\partial x}(M)\bar{i}+\frac{\partial U}{\partial y}(M)\bar{j}+\frac{\partial U}{\partial z}(M)\bar{k}.$$

Ясно, что этот вектор зависит как от функции U, определяющей скалярное поле, так и от координат точки M

Следует отметить, что $gradU$ – векторная величина, поэтому говорят, что скалярное поле U порождает векторное поле $grad\ U$.

Пусть имеется скалярное поле $U=U(M)$. Возьмём точку M_0 и выберем какое-либо направление, определяемое вектором $\bar{e}$. Возьмём другую точку M так, чтобы вектор $\overline{M_0M}$ был параллельным вектору $\bar{e}$ (рис. 1).

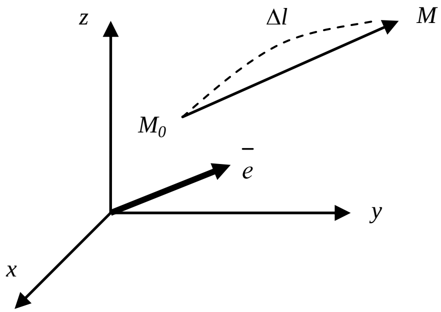


Рис. 1

Пусть Δl – длина вектора $\overline{M_0M}$, а $\Delta U=U(M)-U(M_0)$– приращение функции $U=U(M)$, соответствующее перемещению Δl. Отношение

$$\frac{\Delta U}{\Delta l}=\frac{U(M)-U(M_0)}{\Delta l} \qquad (2)$$

определяет среднюю скорость изменения скалярного поля на единицу длины в данном направлении.

Если при $\Delta l\to 0$ существует конечный предел отношения (3), то его называют ***<u>производной функции</u>*** $U=U(M)$ ***<u>в данной точке</u>*** M_0 ***<u>по направлению</u> вектора*** $\bar{e}$ и обозначают $\left.\frac{\partial U}{\partial \bar{e}}\right|_{M_0}$.

Если $\bar{e}_0 = \dfrac{\bar{e}}{|\bar{e}|} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ – единичный вектор направления $\bar{e}$, то производная по направлению вычисляется по формуле

$$\left.\frac{\partial U}{\partial \bar{e}}\right|_{M_0} = \left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{M_0} \cdot\cos\alpha + \left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{M_0} \cdot\cos\beta + \left.\frac{\partial U}{\partial z}\right|_{M_0} \cdot\cos\gamma\ .$$

Тогда, если учесть определение $grad\,U(M_0)$, получим формулу для вычисления производной по направлению:

$$\left.\frac{\partial U}{\partial \bar{e}}\right|_{M_0} = \left(grad\,U(M_0),\ \frac{\bar{e}}{|\bar{e}|}\right),$$

или

$$\left.\frac{\partial U}{\partial \bar{e}}\right|_{M_0} = |\,grad\,U(M_0)\,|\cdot\cos\varphi,$$

где φ – угол между вектором $grad\,U(M_0)$ и направлением вектора $\bar{e}$. Из этой формулы следует, что производная по направлению достигает наибольшего значения, когда $\cos\varphi = 1$, т.е. при $\varphi = 0$.

Таким образом, направление градиента совпадает с направлением $\bar{e}$, вдоль которого скалярное поле U меняется быстрее всего, т.е. ***градиент функции указывает направление наибыстрейшего возрастания функции, и его длина равна скорости этого максимального изменения***, т.е.

$$V_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}\ .$$

В этом состоит физический смысл градиента. На этом свойстве градиента основано его широкое применение в математике и других дисциплинах.

Дифференциальные свойства градиента поля:

1. Градиент направлен по нормали к поверхности уровня, проходящей через заданную точку.
2. $grad\,(U+V) = grad\,U + drad\,V$.
3. $grad\,(C \cdot U) = C \cdot grad\,U, \quad C = const$.
4. $grad\,(U \cdot V) = U \cdot grad\,V + V \cdot grad\,U$.
5. $grad\,\dfrac{U}{V} = \dfrac{V \cdot grad\,U - U \cdot grad\,V}{V^2}$.
6. $grad\,F(U) = \dfrac{dF}{dU} \cdot grad\,U$.

Эти свойства доказываются с использованием определения градиента. Докажем, например, свойства 4 и 6.

$$grad\,(U \cdot V) = \frac{\partial(U \cdot V)}{\partial x} \cdot \bar{i} + \frac{\partial(U \cdot V)}{\partial y} \cdot \bar{j} + \frac{\partial(U \cdot V)}{\partial z} \cdot \bar{k} =$$

$$= (\frac{\partial U}{\partial x} \cdot V + \frac{\partial V}{\partial x} \cdot U) \cdot \bar{i} + (\frac{\partial U}{\partial y} \cdot V + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot U) \cdot \bar{j} + (\frac{\partial U}{\partial z} \cdot V + \frac{\partial V}{\partial z} \cdot U) \cdot \bar{k} =$$

$$= U \cdot (\frac{\partial V}{\partial x} \cdot \bar{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot \bar{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \cdot \bar{k}) + V \cdot (\frac{\partial U}{\partial x} \cdot \bar{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \bar{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \cdot \bar{k}) =$$

$$= grad\,(U \cdot V) = U \cdot grad\,V + V \cdot grad\,U.$$

Свойство 4 доказано.

Докажем теперь свойство 6.

$$grad\,F\,(U) = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \bar{i} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \bar{j} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \bar{k}.$$

По правилу дифференцирования сложной функции:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial U} \cdot \frac{\partial U}{\partial x}; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial U} \cdot \frac{\partial U}{\partial y}; \quad \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial F}{\partial U} \cdot \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Подставив эти выражения в предыдущую формулу, получим

$$grad\,F\,(U) = \frac{\partial F}{\partial U} \cdot (\frac{\partial U}{\partial x} \cdot \bar{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \bar{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \cdot \bar{k}) = \frac{\partial F}{\partial U} \cdot grad U$$

и свойство доказано.

Скалярное произведение вектора $gradU$ на дифференциал радиус-вектора $d\,\bar{r} = \bar{i}\cdot dx + \bar{j}\cdot dy + \bar{k}\cdot dz$ равно дифференциалу $U = U(M)$:

$$grad\,U \cdot d\,\bar{r} = d\,U.$$

Действительно, если возьмём в поле произвольную точку $M(x, y, z)$ и проведём в неё радиус-вектор

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\,\bar{j} + z\,\bar{k},$$

то
$$d\,\bar{r} = \bar{i}\cdot dx + \bar{j}\cdot dy + \bar{k}\cdot dz\,.$$

Скалярное произведение векторов этого вектора и вектора

$$grad\,U = \frac{\partial U}{\partial x}\,\bar{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\,\bar{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\,\bar{k}$$

равно сумме произведений их одинаковых проекций, т.е.

$$grad\;U \cdot d\,\bar{r} = \frac{\partial U}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial U}{\partial y}\cdot dy + \frac{\partial U}{\partial z}\cdot dz = d\,U\,.$$

Эти же свойства справедливы и для плоского поля.

ПРИМЕР 1. Найти наибольшую скорость возрастания функции $U = \dfrac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$ в точке $A(1;\;\; 2; 3)$.

Для этого нам необходимо найти градиент этой функции в точке и длину этого вектора.

$$grad\;U(A) = \frac{\partial U(A)}{\partial x}\cdot\bar{i} + \frac{\partial U(A)}{\partial y}\cdot\bar{j} + \frac{\partial U(A)}{\partial z}\cdot\bar{k}.$$

Найдём частные производные: функции *U* и их значения в точке А:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{x^2 + y^2 + z^2 - 2x^2}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2} = \frac{y^2 + z^2 - x^2}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)}; \quad \frac{\partial U(A)}{\partial x} = \frac{3}{49};$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{2xy}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2}; \quad \frac{\partial U(A)}{\partial y} = -\frac{1}{49};$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{2xz}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2}; \quad \frac{\partial U(A)}{\partial z} = -\frac{3}{98} .$$

Тогда

$$grad\ U(A) = \frac{3}{49} \cdot \bar{i} - \frac{1}{49} \cdot \bar{j} - \frac{3}{98} \cdot \bar{k}.$$

Максимальная скорость возрастания заданной функции равна модулю этого вектора, т.е.

$$|\ grad\ U(A)\ | = \sqrt{\frac{9}{2401} + \frac{1}{2401} + \frac{9}{9604}} = \sqrt{\frac{49}{9604}} = \frac{7}{98} .$$

ПРИМЕР 2. Найти производную скалярного поля $U = x \cdot y + y \cdot z + 2x$ в точке $A(1;\ 2;\ 3)$ в направлении вектора $\bar{e} = 4\bar{i} + 3\bar{j} + 12\bar{k}$.

Найдём частные производные функции *U* и их значения в точке А:

$$\frac{\partial U}{\partial x} == y + z; \quad \frac{\partial U(A)}{\partial x} = 4\ ; \quad \frac{\partial U}{\partial y} == x + z; \quad \frac{\partial U(A)}{\partial y} = 4;$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} == y; \quad \frac{\partial U(A)}{\partial x} = 2 .$$

Вектор направления $\bar{e} = 4\bar{i} + 3\bar{j} + 12\bar{k} = (4, 3, 12)$. Его длина $|\ \bar{e}\ | = \sqrt{16 + 9 + 144} = 13$. Найдём направляющие косинусы:

$$\cos\alpha = \frac{4}{13}, \quad \cos\beta = \frac{3}{13}, \quad \cos\gamma = \frac{12}{13}.$$

Тогда

$$\left.\frac{\partial U(A)}{\partial \bar{e}}\right| = \frac{\partial U(A)}{\partial x} \cdot \cos\alpha + \left.\frac{\partial U(A)}{\partial\, y}\right| \cdot \cos\beta + \left.\frac{\partial U(A)}{\partial\, z}\right| \cdot \cos\gamma =$$

$$= 4 \cdot \frac{4}{13} + 4 \cdot \frac{3}{13} + 2 \cdot \frac{12}{13} = \frac{52}{13} = 4.$$

Естественно, возникает вопрос об обратной задаче: определить поле по заданному градиенту.

Решение обратной задачи существует и определяется формулой

$$U(M) = \int_{M_0M} grad U \, d\bar{r} + U(M_0), \tag{3}$$

где M_0M – любая линия, соединяющая точки M_0 и M, на которой $U(M)$ дифференцируема.

В самом деле, по формуле $grad\, U \cdot d\,\bar{r} = d\,U$ и потому

$$U(M) - U(M_0) = \int_{M_0M} dU = \int_{M_0M} grad U \, d\bar{r},$$

что и доказывает формулу (4).

Из этой формулы видно, что вектор $grad U$ достаточно полно характеризует само поле U(M).

2. ВЕКТОРНОЕ ПОЛЕ

Векторное поле можно рассматривать как векторную функцию радиус-вектора точки: $\bar{a} = \bar{a}(\bar{r})$. Разложив вектор $\bar{a}$ по осям координат, получим

$$\bar{a} = P(x, y, z)\ \bar{i} + Q(x, y, z)\ \bar{j} + R(z, y, z)\,\bar{k},$$

где $P(x, y, z)$; $Q(x, y, z)$; $R(x, y, z)$ – скалярные функции от x, y, z.

Задание векторного поля равносильно заданию трёх скалярных функций $P(x, y, z)$; $Q(x, y, z)$; $R(x, y, z)$ от трёх переменных.

2.1. Векторные линии

Геометрической характеристикой векторного поля служат векторные линии. ***<u>Векорной линией, или силовой линией</u> <u>векторного поля</u>,*** называется кривая, в каждой точке которой касательная к ней совпадает с направлением векторного поля $\bar{a}$ в точке касания (рис. 2).

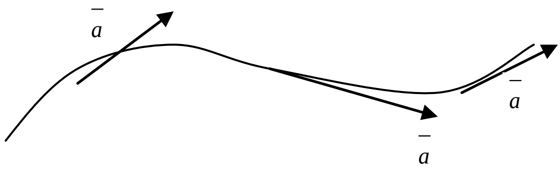


Рис. 2

Векторные линии определяют в каждой точке направление векторного поля в этой точке.

Это понятие для конкретных полей имеет ясный физический смысл. Например, в поле скоростей текущей жидкости векторными линиями будут линии, по которым движутся частицы жидкости (линии тока). Для магнитного поля векторными (силовыми) линиями являются линии, выходящие из северного полюса и заканчивающиеся в южном.

Совокупность всех векторных линий поля, проходящих через некоторую замкнутую кривую, называется ***<u>векторной трубкой.</u>***

Изучение векторного поля начинают с изучения расположения его векторных линий.

Пусть $\bar{r}(t) = x(t)\,\bar{i} + y(t)\,\bar{j} + z(t)\,\bar{k}$ – радиус-вектор текущей точки векторной линии векторного поля $\bar{a}$ (t – параметр). Из определения векторной линии следует, что вектор $\bar{a} = P(x,y,z)\,\bar{i} + Q(x,y,z)\,\bar{j} + R(z,y,z)\,\bar{k}$ и вектор касательной к этой кривой $\frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\bar{i} + \frac{dy}{dt}\bar{j} + \frac{dz}{dt}\bar{k}$ должны быть коллинеарны в каждой точке векторной линии. Условием коллинеарности векторов является пропорциональность их координат, т.е.

$$\frac{dx}{P(x,y,z)} = \frac{dy}{Q(x,y,z)} = \frac{dz}{R(x,y.z)}. \tag{4}$$

Таким образом, для векторных линий мы получили систему дифференциальных уравнений в симметричной форме:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{P(x,\,y,\,z)} = \dfrac{dy}{Q(x,\,y,\,z)}, \\[2ex] \dfrac{dx}{P(x,\,y,\,z)} = \dfrac{dz}{R(x,\,y,\,z)}. \end{cases} \tag{5}$$

Пусть найдены два независимых интеграла системы (2):

$$\begin{cases} \varphi_1(x, y, z) = c_1; \\ \varphi_2(x, y, z) = c_2. \end{cases} \tag{6}$$

Система уравнений (6) определяет векторную линию как линию пересечения двух поверхностей. Произвольно меняя постоянные c_1, c_2, получим семейство векторных линий как семейство с двумя степенями свободы.

ПРИМЕР 1. Найти векторные линии в заданном векторном поле $\overline{F} = 3x\overline{i} + 6y\overline{j} - z\overline{k}$.

Решение

$$P(x, y, z) = 3x; \quad Q(x, y, z) = 6y; \quad R(x, y, z) = -z.$$

Тогда уравнение (4) приобретает вид:

$$\frac{dx}{3x} = \frac{dy}{6y} = \frac{dz}{-z}.$$

Получаем систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{3x} = \dfrac{dy}{6y}, \\ \dfrac{dx}{3x} = -\dfrac{dz}{z}. \end{cases}$$

Её решение:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{3}\ln x = \dfrac{1}{6}\ln y + \dfrac{1}{3}\ln c_1, \\ \dfrac{1}{3}\ln x = -\ln z + \ln c_2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ln \dfrac{x}{\sqrt{y}} = \ln c_1, \\ \ln x \cdot \sqrt[3]{z} = \ln c_2, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{y}} = c_1, \\ x \cdot \sqrt[3]{z} = c_2. \end{cases}$$

Векторные линии задаются пересечением полученных поверхностей.

ПРИМЕР 2. Определить векторные линии магнитного поля, образованного постоянным электрическим током силой I, текущим по бесконечно длинному прямолинейному проводу.

Если совместить ось Oz с проводом, то вектор $\overline{H}$ напряжённости этого магнитного поля в точке $M(x, y, z)$ выражается формулой

$$\overline{H} = \frac{2I}{\rho^2} \cdot (-y\,\bar{i} + x\,\bar{j}),$$

где ρ – расстояние от точки M до провода.

В данном случае

$$P(x, y, z) = -\frac{2I}{\rho^2} \cdot y; \quad Q(x, y, z) = \frac{2I}{\rho^2} \cdot x; \quad R(x, y, z) = 0.$$

Тогда уравнения (1) приобретают вид

$$\frac{dx}{-\frac{2I}{\rho^2} \cdot y} = \frac{dy}{\frac{2I}{\rho^2} \cdot x} = \frac{dz}{0} \quad \text{или} \quad \frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{0}.$$

Получаем два уравнения: $dz = 0$, откуда $z = C$ (постоянная) и $\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x}$; последнее уравнение можем записать в виде $x\,dx = -y\,dy$, $x\,dx + y\,dy = 0$. Интегрируя это уравнение, получим $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C_1$ или $x^2 + y^2 = 2C_1$. Следовательно, векторные линии напряжённости магнитного поля определяются уравнениями

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = c_1 \\ z = c_2, \end{cases}$$

т.е. это окружности, лежащие в плоскостях, перпендикулярных оси Oz, с центрами на этой оси.

Аналогичные векторные линии получаются для векторного поля, образованного векторами линейных скоростей частиц жидкости, вращающейся вокруг оси Oz.

2.2. Поток векторного поля через поверхность

Пусть в некоторой части пространства задано течение несжимаемой жидкости с постоянной скоростью $\overline{V}$. Пусть в потоке жидкости, перпендикулярно $\overline{V}$, поставлена проницаемая пластинка площадью S (рис. 3).

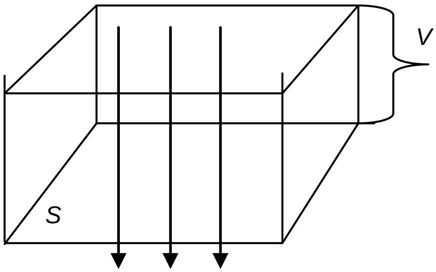


Рис. 3

За единицу времени каждая частица жидкости переместится по направлению движения на расстояние V. Поэтому все частицы жидкости, находящиеся в начальный момент времени на расстоянии не больше чем на V перед пластинкой, за единицу времени пройдут через пластинку. Следовательно, за единицу времени через пластинку S протечёт объём жидкости, равный $\Pi = V \cdot S$, который называется ***<u>потоком постоянного векторного поля</u>*** $\overline{V}$ через пластинку S.

Если та же пластинка поставлена к потоку под некоторым углом α, где α – угол между $\overline{V}$ и перпендикуляром к площадке S, направленным в сторону потока, то в этом случае за единицу времени через пластинку пройдут те и только те частицы, которые отстояли от неё в начальный момент на расстояние не более, чем $V \cdot \cos\alpha$. Поэтому поток в этом случае будет равен

$$\Pi = V \cdot S \cdot \cos\alpha .$$

Определим теперь поток произвольного вектора $\overline{a}$ через поверхность S (замкнутую или незамкнутую). В каждой точке поверхности построим единичный вектор нормали $\overline{n}_0$ (если поверхность замкнутая, то $\overline{n}_0$ будем брать по направлению внешней нормали, если незамкнутая, то одно из двух направлений нормали, заранее оговаривая, какое именно), однако так, чтобы векторы $\overline{n}_0$ во всех точках поверхности лежали «по одну сторону» поверхности (рис. 4).

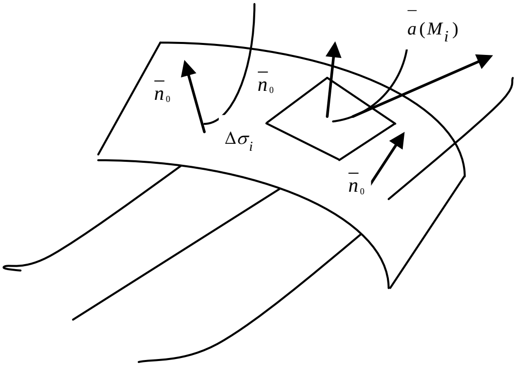


Рис. 4

Разобьём поверхность S на n малых площадок $\Delta\sigma_i$. В каждой из площадок выберем произвольную точку M_i.

Если площадка расположена перпендикулярно линиям тока (вектору $\bar{a}$), то поток жидкости, протекающей за единицу времени через площадку площадью $\Delta\sigma_ш$, равен $|\bar{a}|\cdot\Delta\sigma_i$. В случае площадки, наклонной относительно линий тока, сквозь неё будет протекать такое же количество жидкости, как сквозь проекцию этой площадки на плоскость, перпендикулярную направлению тока жидкости, т.е. вектору $\bar{a}$. Поэтому количество жидкости, протекающее через площадку $\Delta\sigma_i$, выразится формулой

$$\Delta\Pi = |\bar{a}|\cdot\Delta\sigma_i\cdot\cos\phi = a_{\bar{n}}\cdot\Delta\sigma_i,$$

где ϕ – угол между векторами $\bar{a}$ и нормалью $\bar{n}$ к площадке $\Delta\sigma$,

а $a_{\bar{n}}$ – проекция вектора $\bar{a}$ на эту же нормаль.

Площадку $\Delta\sigma_i$ можно представить как вектор $\overline{\Delta\sigma_i}$, направленный по нормали к площадке, модуль которого равен площади площадки $\Delta\sigma$. Тогда получим

$$\Delta\Pi = |\bar{a}|\cdot\Delta\sigma_i\cdot\cos\phi = a_{\bar{n}}\cdot\Delta\sigma_i = \bar{a}\cdot\overline{\Delta\sigma_i}, \qquad (7)$$

($\bar{a}\cdot\overline{\Delta\sigma_i}$ – скалярное произведение векторов).

Тогда общее количество жидкости, протекающей через поверхность S, равное сумме количеств жидкости, протекающей через отдельные площадки $\Delta\sigma_i$, на которые эта поверхность разложена, приближённо выражается формулой

$$\Pi \approx \sum_{i=1}^{n} a_{\bar{n}} \cdot \Delta\sigma_i = \sum_{i=1}^{n} \bar{a} \cdot \Delta\sigma_i . \tag{8}$$

При неограниченном увеличении числа элементарных площадок и стремлению к нулю их размеров интегральная сумма (8) стремится к поверхностному интегралу

$$\Pi = \iint_S a_{\bar{n}} d\sigma = \iint_S \bar{a} \cdot \overline{d\sigma} , \tag{9}$$

который и определяет количество жидкости, протекающей через поверхность S за единицу времени.

Независимо от физического смысла векторного поля $\bar{a}$ интеграл по поверхности (9) называют ***<u>потоком векторного</u> поля*** $\bar{a}$ через поверхность S. (Следует заметить, что это всегда скалярная величина). Например, если $\bar{a}$ – вектор магнитного поля, то поток вектора выражает количество маг -нитных силовых линий, проходящих через S.

Рассмотрим разложение вектора $\overline{d\sigma}$ по ортам прямоугольной системы координат. Считаем, что проекция элемента площади поверхности $\overline{d\sigma}$ на координатную плоскость является элементом площади в соответствующей плоскости. Можем записать $\overline{d\sigma} = dy\ dz\ \bar{i} + dz\ dx\ \bar{j} + dx\ dy\ \bar{j}$. Если учесть, что

$$\bar{a} = P(x, y, z)\ \bar{i} + Q(x, y, z)\ \bar{j} + R(z, y, z)\,\bar{k} ,$$

то получим ещё одну формулу для вычисления потока векторного поля:

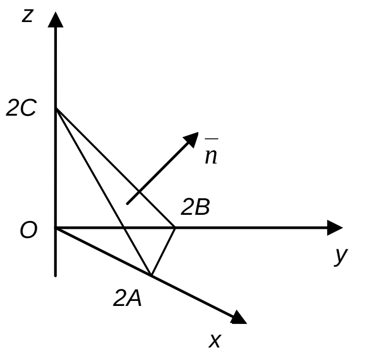
$$\Pi = \iint_S P\ dy\ dz + Q\ dz\ dx + R\ dx\ dy\ . \tag{10}$$

ПРИМЕР. Найти поток векторного поля

$$\bar{a} = (x-2z)\,\bar{i} + (x+2y+z)\,\bar{j} + (4x+y)\,\bar{k}$$

через часть плоскости $x+y+z=2$, лежащую в первом октанте.

Решение. Построим поверхность:

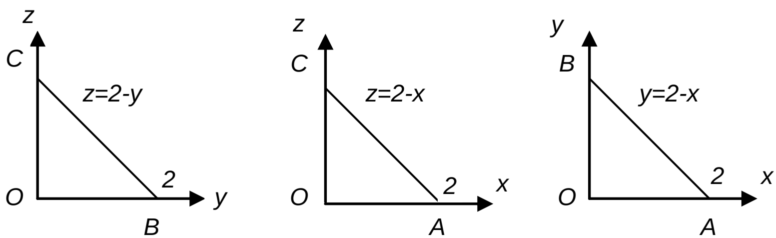


Тогда по определению

$$\Pi = \iint\limits_{ABC} \bar{a}\cdot\overline{d\sigma} = \iint\limits_{ABC}(x-3z)dydz + \iint\limits_{ABC}(x+2y+z)dzdx +$$

$$+ \iint\limits_{ABC} (4x+y)dxdy.$$

В поверхностных интегралах перейдём к двойным интегралам по соответствующим областям, которые являются проекциями треугольника ABC на координатные плоскости:



В первом интеграле из уравнения поверхности выразим $x = 2-y-z$ и получим двойной интеграл:

$$\iint\limits_{ABC} (x-3z)\,dydz = \iint\limits_{OBC} (2-y-z-3z)\,dydz = \int\limits_0^2 dy \int\limits_0^{2-y} (2-y-4z)dz =$$

$$= \int\limits_0^2 dy(2z - yz - 2z^2)\,|_0^{2-y} = \int\limits_0^2 (4-2y-2y+y^2-8+8y-2y^2)dy =$$

$$= \int\limits_0^2 (-4+4y-y^2)dy = -4y+2y^2-\frac{y^3}{3})\Big|_0^2 = -8+8-\frac{8}{3} = -2\frac{2}{3}.$$

Аналогичным образом вычисляем два других поверхностных интеграла:

$$\iint\limits_{ABC} (x+2y+z)dzdx = \iint\limits_{OAC} (x+2(2-x-z)+z)dxdz =$$

$$= \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{2-x} (4-x-z)dz = \int\limits_0^2 dx(4z - xz - \frac{z^2}{2})\Big|_0^{2-x} =$$

$$= \int\limits_0^2 (8-4x-2x+x^2-2+2x-\frac{x^2}{2})\,dx =$$

$$= \int\limits_0^2 (6-4x+\frac{x^2}{2})dx = (6x-2x^2+\frac{x^3}{6})\Big|_0^2 = 12-8+\frac{4}{3} = 5\frac{1}{3};$$

$$\iint\limits_{ABC} (4x+y)dxdy = \iint\limits_{OAB} (4x+y)dxdy = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{2-x} (4x+y)dy =$$

$$= \int\limits_0^2 dx(4xy+\frac{y^2}{2})\Big|_0^{2-x} = \int\limits_0^2 (8x-4x^2+2-2x+\frac{x^2}{2})\,dx =$$

$$= \int\limits_0^2 (2+6x-\frac{7}{2}x^2)\,dx = (2x+3x^2-\frac{7x^3}{6})\Big|_0^2 = 4+12-\frac{28}{3} = 6\frac{2}{3}.$$

Таким образом, поток $\Pi = -2\frac{2}{3}+5\frac{1}{3}+6\frac{2}{3} = 9\frac{1}{3}$.

Особый интерес представляет тот случай, когда поверхность S замкнута и ограничивает некоторый объём. Тогда

$$\Pi = \oiint_S a_{\bar{n}} \cdot d\sigma = \oiint_S \bar{a} \cdot \overline{d\sigma} = \oiint_S P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy \qquad (11)$$

(кружок на знаке интеграла означает, что поверхность замкнута). В этом случае обычно рассматривают внешний нормальный вектор.

Когда жидкость несжимаема, то количество жидкости внутри объёма V, ограниченного поверхностью S, должно всё время оставаться неизменным. Если поток положителен, то это означает, что из объёма V вытекает больше жидкости, чем втекает. При постоянстве объёма жидкости внутри V это возможно только тогда, когда внутри есть ***источники***, питающие поток. И наоборот, если поток векторного поля отрицателен, то количество вытекающей жидкости меньше количества втекающей жидкости, внутри имеются **стоки**, поглощающие излишек жидкости. Если в объёме V нет ни источников, ни стоков, то поток векторного поля равен нулю.

В электростатическом или магнитном поле источниками будут соответственно положительные заряды или северный полюс магнита, а стоки – отрицательные заряды или южный полюс магнита.

Понятие о потоке вектора через замкнутую поверхность приводит к понятию **дивергенции** или **расходимости** поля, которое даёт некоторую характеристику поля в каждой его точке. Пусть M – изучаемая точка. Окружим её поверхностью S произвольной формы, например сферой достаточно малого радиуса. Пусть объём области, ограниченной этой поверхностью, равен V. Поток векторного поля через эту поверхность вычисляется по формуле

$$\Pi = \oiint_S \bar{a} \cdot \overline{d\sigma}\,.$$

2.3. Дивергенция

<u>Дивергенцией</u> векторного поля (или дивергенцией вектора $\bar{a}$) называется предел (если он существует) отношения этого потока к величине объёма V, ограниченного поверхностью S, если этот объём стремится к нулю (т.е. поверхность стягивается в точку M) и обозначается

$$div\,\bar{a}(M) = \lim_{V \to 0} \frac{\oiint_S \bar{a} \cdot \overline{d\sigma}}{V}\,. \qquad (12)$$

Дивергенция векторного поля – скалярная величина. Если $div\,\overline{a}(M)>0$, то в точке расположен источник, если же $div\,\overline{a}(M)<0$, то в точке – сток.

Формула (12) означает, что дивергенция функции в точке M является объёмной плотностью векторного потока в данной точке. Это инвариантное определение дивергенции, не связанное с системой координат.

Если векторное поле задано в координатной форме $\overline{a}=P(x,y,z)\,\overline{i}+Q(x,y,z)\,\overline{j}+R(z,y,z)\,\overline{k}$, то дивергенция вычисляется по формуле

$$div\,\overline{a}(M)=\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\Big|_M. \qquad (13)$$

ПРАВИЛА ВЫЧИСЛЕНИЯ ДИВЕРГЕНЦИИ:

1. Дивергенция обладает свойством линейности:

$$div(c_1\overline{a_1}+\ldots+c_n\overline{a_n})=c_1 div\,\overline{a_1}+\ldots+c_n div\,\overline{a_n},$$

где $c_1,\ldots,c_n$ – постоянные числа.

2. Дивергенция постоянного вектора равна нулю.

3. Дивергенция произведения скалярной функции $u(M)$ на вектор $\overline{a}(M)$ вычисляется по формуле

$$div\,(u\cdot\overline{a})=u\cdot div\,\overline{a}+(grad\,u,\,\overline{a}).$$

ПРИМЕР. Найти дивергенцию векторного поля

$\overline{a}=x^3y\,\overline{i}+y^2z\,\overline{j}-3xz\,\overline{k}$ в точке $M(1,2,-1)$.

Решение. В этом примере

$$P(x,\,y,\,z)=x^3y,\quad \frac{\partial P}{\partial x}=3x^2y,\quad \frac{\partial P}{\partial x}(M)=6;$$

$$Q(x,\,y,\,z)=y^2z,\quad \frac{\partial Q}{\partial y}=2yz,\quad \frac{\partial Q}{\partial y}(M)=-4;$$

$$R(x,\,y,\,z)=-3xz,\quad \frac{\partial R}{\partial z}=-3x,\quad \frac{\partial R}{\partial z}(M)=-3.$$

Тогда $div\,\overline{a}(M)=6-4-3=-1.$ Следовательно, в точке M поверхности есть сток.

ТЕОРЕМА (Гаусса-Остроградского). Поток векторного поля $\overline{a}$ через замкнутую поверхность S, ограничивающую некоторое тело V, можно вычислить по формуле

$$\Pi=\oiint\limits_{S}\overline{a}\cdot\overline{d\sigma}=\iiint\limits_{V}div\,\overline{a}\,dv=\iiint\limits_{V}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz\,. \quad (14)$$

ПРИМЕР. Найти поток векторного поля

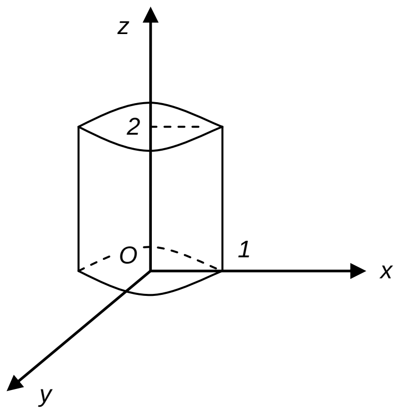
$$\overline{a}=(x^2+y^2)\,\overline{i}+(y^2+z^2)\,\overline{j}+(x^2+z^2)\,\overline{k}$$

через замкнутую поверхность $S:\left\{x^2+y^2=1,\ z=0,\ z=2\right\}.$

Решение. Воспользуемся формулой (13):

$$P=x^2+y^2,\quad \frac{\partial P}{\partial x}=2x;\quad Q=y^2+z^2,\quad \frac{\partial Q}{\partial y}=2y;$$

$$R=z^2+z^2,\quad \frac{\partial R}{\partial z}=2z.$$



Тогда поток можем вычислить следующим образом:

$$\Pi=\iiint\limits_{V}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz=\iiint\limits_{V}(2x+2y+2z)dxdydz=$$

Перейдём к цилиндрическим координатам:
$z = z$, $x = \rho\cos\varphi,\ \ y = \rho\sin\varphi.$ В нашей области
$0 \le \phi \le 2\pi, \quad 0 \le \rho \le 1,\ \ 0 \le z \le 2.$

$$= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^1 \rho d\rho \int_1^2 (2\rho\cos\phi + 2\rho\sin\phi + 2z)dz =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^1 \rho d\rho (2\rho\cos\phi\ z + 2\rho\sin\phi\, z + z^2)\Big|_0^2 =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^1 (4\rho^2\cos\varphi + 4\rho^2\sin\phi + 4\rho)d\rho =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\phi \left(\frac{4}{3}\rho^3\cos\phi + \frac{4}{3}\rho^3\sin\phi + 2\rho^2\right)\Big|_0^1 =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\phi \left(\frac{4}{3}\cos\phi + \frac{4}{3}\sin\phi + 2\right) = \left(\frac{4}{3}\sin\phi - \frac{4}{3}\cos\phi + 2\phi\right)\Big|_0^{2\pi} =$$

$$= 4\pi.$$

Если во всех точках некоторой области G дивергенция векторного поля, заданного в этой области, равна нулю $div\,\overline{a} = 0$, то говорят, что в этой области ***поле <u>соленоидальное</u>*** (или ***<u>трубчатое</u>***). Имея в виду физический смысл $div\,\overline{a}$, можно сказать, что *соленоидальное поле* – это такое поле, в котором нет ни *источников, ни стоков.*

Основное свойство соленоидального поля состоит в том, что в нём векторные линии не могут нигде ни начинаться, ни кончаться.

Из формулы Гаусса – Остроградского следует, что в трубчатом поле поток вектора через замкнутую поверхность S, лежащую в этом поле, равен нулю:

$$\Pi = \oiint_S \overline{a}\cdot\overline{d\sigma} = 0.$$

РАБОТА ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ. Если в некоторой пространственной области, содержащей пространственную кривую L, задана сила $\overline{F} = P(x, y, z)\,\overline{i} + Q(x, y, z)\,\overline{j} + R(x, y, z))$, то работа этой силы по перемещению материальной точки с единичной массой вдоль этой кривой от точки $M(z, y, z)$ до точки $N(z, y, z)$ вычисляется по формуле:

$$A = \int_{MN} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz . \qquad (15)$$

ПРИМЕР. Найти работу силы $\overline{F} = (x^2 - y^2)\bar{i} + (x^2 + y^2)\bar{j}$ при перемещении материальной точки от точки $M(3, 0)$ до точки $N(-3, 0)$ вдоль линии $L: \quad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \quad (y \ge 0)$.

Решение. По формуле (15)

$$A = \int_{MN} (x^2 - y^2)dx + (x^2 + y^2)dy =$$

Перейдём от криволинейного интеграла 2-го рода к определённому интегралу. Выразим y из уравнения кривой:

$$y = \frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2} \text{. Тогда } dy = \frac{2}{3}\frac{-2x}{2\sqrt{9 - x^2}}dx = -\frac{2xdx}{3\sqrt{9 - x^2}}.$$

При переходе от точки $M(3, 0)$ к точке $N(-3, 0)$ переменная x меняется от 3 до -3. Получим

$$= \int_3^{-3} ((x^2 - 4 + \frac{4}{9}x^2)dx + (x^2 + 4 - \frac{4}{9}x^2)\frac{-2xdx}{3\sqrt{9 - x^2}}) =$$

$$= \int_3^{-3} (\frac{13}{9}x^2 - 4)dx + \frac{1}{3}\int_3^{-3} \frac{(\frac{5}{9}x^2 + 4) \cdot (-2xdx)}{\sqrt{9 - x^2}} =$$

Во втором интеграле сделаем замену переменной $9 - x^2 = t^2$,тогда $-2xdx = 2tdt$, при $x = -3, \quad t = 0$ и при $x = 3, \quad t = 0$. Верхний и нижний пределы совпадают. Поэтому второй интеграл равен нулю.

$$= (\frac{13}{9}\frac{x^3}{3} - 4x)\Big|_3^{-3} = (\frac{13}{27}(-27) - (-12)) - (\frac{13}{27}27 - 12) = -2.$$

2.4. Циркуляция вектора

Пусть в некоторой области G задано непрерывное векторное поле $\overline{a} = P(x, y, z)\ \overline{i} + Q(x, y, z)\ \overline{j} + R(z, y, z)\overline{k}$ и замкнутый ориентированный контур L.

<u>Циркуляцией векторного поля</u> $\overline{a}$ по замкнутому контуру L называется криволинейный интеграл 2-го рода от вектора $\overline{a}$ по контуру L:

$$Ц = \oint\limits_L \overline{a} \cdot \overline{dl} = \oint\limits_L Pdx + Qdy + Rdz\ , \qquad (16)$$

где $\overline{dl}$ – вектор, длина которого равна дифференциалу дуги L, а направление совпадает с направлением касательной к L, определяемым ориентацией контура.

ПРИМЕР. Найти циркуляцию векторного поля $\overline{a} = x\overline{i} - 2z^2\overline{j} + y\overline{k}$ вдоль контура $L: x = 3\cos t,\ y = 4\sin t,\ z = 6\cos t - 4\sin t + 1$ в направлении, соответствующем возрастанию параметра $t \in [0,\ 2\pi]$.

Решение. По формуле (16);

$$Ц = \oint\limits_L Pdx + Qdy + Rdz = \oint\limits_L xdx - 2zdy + ydz =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} 3\cos t \cdot (-3\sin t)\,dt - 2(6\cos t - 4\sin t + 1) \cdot 4\cos t\,dt +$$

$$+ 4\sin t \cdot (-6\sin t - 4\cos t)\,dt = \int\limits_0^{2\pi} (9\cos t \cdot \sin t - 48\cos^2 t +$$

$$+32\sin t \cdot \cos t - 8\cos t - 24\sin^2 t - 16\sin t \cdot \cos t)\,dt =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} (7\sin t \cdot \cos t - 48\cos^2 t - 24\sin^2 t - 8\cos t)\,dt =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} (3{,}5\sin 2t - 24 - 24\cos 2t - 12 + \cos 2t - 8\cos t)\,dt =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} (3{,}5\sin 2t - 12\cos 2t - 8\cos t - 36)\,dt = (-1{,}75\cos 2t - 6\sin 2t -$$

$$-8\sin t - 36t)\Big|_0^{2\pi} = -72\pi.$$

2.5. Ротор (вихрь) векторного поля

Рассмотрим векторного поле

$$\bar{a} = P(x, y, z)\ \bar{i}\ + Q(x, y, z)\ \bar{j} + R(z, y, z)\,\bar{k}\,,$$

в котором функции $P(x,\ y,\ z)$, $Q(x,\ y,\ z)$, $R(x,\ y,\ z)$ непрерывны и имеют непрерывные частные производные первого порядка по всем своим аргументам.

Ротором вектора $\bar{a}(M)$ называется вектор, обозначаемый символом $rot\,\bar{a}$, который определяется равенством

$$rot\,\bar{a} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\bar{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\bar{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\bar{k}\,.$$

Можно записать это равенство в более удобной для запоминания форме:

$$rot\,\bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

Если в некоторой области G выполнено $rot\,\bar{a} = 0$, то поле называется *безвихревым* (или *потенциальным)*

ПРИМЕР. Найти ротор поля вектора

$$\bar{a} = xyz\,\bar{i} + (x + y + z)\ \bar{j} - x^2 y^2\ \bar{k}\,.$$

Решение. Составляем символический определитель:

$$rot\,\bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xyz & x + y + z & x^2 y^2 \end{vmatrix}.$$

Разложив его по элементам первой строки, получим

$$rot\,\bar{a} = -\bar{i}\,(2x^2y+1) + \bar{j}\,(xy+2xy^2) + \bar{k}\,(1-xz).$$

СВОЙСТВА ВИХРЯ ВЕКТОРА:

1. Если $\bar{a}$ – постоянный вектор, то $rot\,\bar{a} = 0$.

2. $rot\,(C\cdot\bar{a}) = C\cdot\cdot rot\;\bar{a}$, т.е. постоянный множитель можно выносить за знак ротора.

3. Дивергенция вихревого вектора векторного поля равна нулю: $div(rot\,\bar{a}) = 0.$

4. $rot\,(\bar{a}+\bar{b}\,) = rot\,\bar{a} + rot\,\bar{b}.$

5. Если $u\;(x,\,y,\,z)$ – скалярная функция, то

$rot\;\;(u\cdot\bar{a}) = u\cdot rot\,\bar{a} + grad\;u\times\bar{a}..$

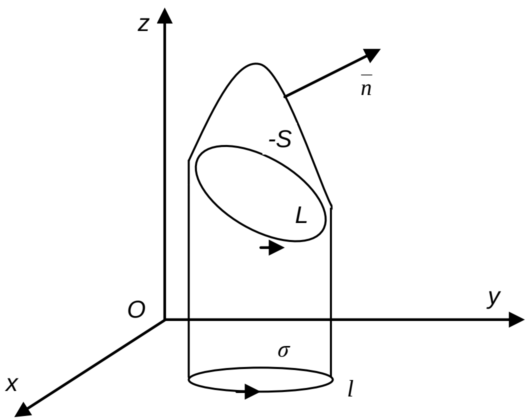
6. $div\,(\bar{a}\times\bar{b}) = \bar{b}\cdot rot\,\bar{a} - \bar{a}\cdot rot\,\bar{b}.$

Связь вихря поля с циркуляцией устанавливается теоремой Стокса, являющейся, как и теорема Гаусса-Остроградского, основной теоремой векторного анализа.

Построим в поле вектора

$$\bar{a} = P(x,y,z)\;\bar{i}\;+Q(x,y,z)\;\;\bar{j} + R(z,y,z)\,\bar{k}$$

некоторый замкнутый контур L и «натянем» на него не- которую поверхность S :



Рассмотрим формулу Стокса:

$$\oint_L P\,dx+Q\,dy+R\,dz=\iint_S\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dy\,dz+$$

$$+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dz\;dx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial Q}{\partial y}\right)dx\,dy.$$

Учитывая формулу Стокса

$$Ц=\oint_L \overline{a}\cdot\overline{dl}=\oint_L Pdx+Qdy+Rdz=$$

$$=\iint_S rot_n\;\overline{a}\cdot ds.$$

Это интегральное представление формулы Стокса. Эта формула показывает, что циркуляция векторного поля $\overline{a}$ вдоль замкнутого контура L равна потоку ротора этого вектора через поверхность S, лежащую в поле вектора $\overline{a}$ и ограниченную контуром L.

Тогда оказывается справедливой следующая теорема.

ТЕОРЕМА (Стокса). Циркуляция поля вектора $\overline{a}$ по контуру L равняется потоку вихря поля через поверхность S, натянутую на контур L:

$$Ц=\oint_L \overline{a}\cdot\overline{dl}=\iint_S rot\,\overline{a}\cdot\overline{ds}\,. \tag{17}$$

Теорема Стокса означает, что поток вектора $\overline{a}$ не зависит от вида поверхности S, проходящей через кривую L и равен циркуляции этого вектора по этой кривой.

Поток вихря векторного поля через замкнутую поверхность равен нулю. Это означает, что поле вихря является *соленоидальным.*

2.6. Потенциальное поле

Поле вектора $\overline{a}(M)$ называется ***потенциальным***, если существует скалярная функция $U(M)$, такая что

$$grad\,U=\overline{a}\,. \tag{18}$$

При этом функция $U(M)$ называется ***<u>потенциалом поля</u>***; её поверхности уровня называются ***<u>эквипотенциальными</u>*** <u>поверхностями.</u>

Пусть векторное поле имеет вид

$$\bar{a} = P(x, y, z)\ \bar{i} + Q(x, y, z)\ \bar{j} + R(z, y, z)\,\bar{k}\,.$$

Так как $grad\,U = \dfrac{\partial U}{\partial x}\,\bar{i} + \dfrac{\partial U}{\partial y}\,\bar{j} + \dfrac{\partial U}{\partial z}\,\bar{k}$, то соотношение (18) равносильно следующим трём скалярным равенствам:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P(x,\, y,\, z); \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Q(x,\, y,\, z); \quad \frac{\partial U}{\partial z} = R(x,\, y,\, z)\,.$$

Следует заметить, что потенциал поля определяется с точностью до постоянного слагаемого.

Основной особенностью потенциального векторного поля является то, что *потенциальное векторное поле вполне определяется одной скалярной функцией* – его потенциалом, тогда как для задания произвольного векторного поля требуется задание трёх скалярных функций – проекций вектора на оси координат.

Отсутствие *вихрей* является наиболее существенной характеристикой потенциального поля. Всякое *безвихревое поле является потенциальным.*

Векторное поле является потенциальным, если работа поля вдоль любой замкнутой кривой равна нулю.

ТЕОРЕМА (об условии потенциальности). Для того чтобы векторное поле $\bar{a} = \bar{a}(x,\, y,\, z)$ было потенциальным, необходимо и достаточно, чтобы оно было безвихревым, т.е.

$$rot\,\bar{a} \equiv 0\,,$$

т.е. чтобы его ротор равнялся нулю во всех точках поля. При этом предполагается непрерывность всех частных производных от координат вектора $\bar{a}$ и поверхностная односвязность области, в которой задан вектор $\bar{a}$.

<u>Замечание</u>. Векторное поле будет потенциальным, если работа поля вдоль любой замкнутой кривой равна нулю.

ПРИМЕР. Поле любого радиус-вектора $\bar{r} = x\,\bar{i} + y\,\bar{j} + z\,\bar{k}$ является потенциальным, так как

$$\bar{r} = x\,\bar{i} + y\,\bar{j} + z\,\bar{k} = grad\left(\frac{x^2 + y^2 + x^2}{2}\right) = grad\,\frac{r^2}{2},$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Если векторное поле является потенциальным, то криволинейный интеграл в нём не зависит от пути интегрирования.

ТЕОРЕМА. $\int\limits_{M_1}^{M_2} \bar{a} \cdot \overline{d\sigma}$ в потенциальном поле $\bar{a}(M)$ равен разности значений потенциала $U(M)$ в конечной и начальной точках пути интегрирования:

$$\int\limits_{M_1}^{M_2} \bar{a} \cdot \overline{d\sigma} = U(M_2) - U(M_1).$$

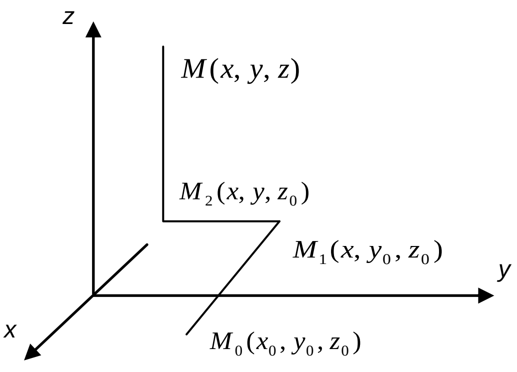
Если векторное поле задано координатами

$$\bar{a} = P(x, y, z)\,\bar{i} + Q(x, y, z)\,\bar{j} + R(z, y, z)\,\bar{k},$$

то потенциальная функция $U(M)$ может быть найдена по формуле

$$U(x, y, z) = \int\limits_{M_0}^{M} P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz. \quad (19)$$

Интеграл (19) удобнее всего вычислять по ломаной $M_0M_1M_2M$:



$$\int\limits_{M_1}^{M_2} \overline{a}\cdot\overline{d\sigma} = \int\limits_{M_0}^{M_1} \overline{a}\cdot\overline{d\sigma} + \int\limits_{M_1}^{M_2} \overline{a}\cdot\overline{d\sigma} + \int\limits_{M_2}^{M} \overline{a}\cdot\overline{d\sigma} =$$

$$= \int\limits_{x_0}^{x} P(x, y_0, z_0)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x, y, z_0)dy + \int\limits_{z_0}^{z} R(x, y, z)dz. \qquad (20)$$

Здесь x, y, z – координаты текущей точки на звеньях ломаной, по которой ведётся интегрирование.

ПРИМЕР. Доказать, что векторное поле

$$\overline{a} = (3x^2y^2 + \ln z)\,\overline{i} + (2x^3y + e^y z^2)\,\overline{j} + (\frac{x}{z} + 2z\,y^2)\,\overline{k}$$

является потенциальным и найти его потенциал.

Решение. Сначала проверим, что поле вектора $\overline{a}$ является потенциальным. Для этого вычислим ротор поля:

$$rot\,\overline{a} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ (3x^2y^2 + \ln z) & (2x^3y + e^y z^2) & (\dfrac{x}{z} + 2z\,e^y) \end{vmatrix} =$$

$$= \overline{i}\ (\frac{\partial}{\partial y}(\frac{x}{z} + 2z\,e^y) - \frac{\partial}{\partial z}(2x^3y + e^y z^2)) - \overline{j}\,(\frac{\partial}{\partial x}(\frac{x}{z} + 2z\,e^y) -$$

$$- \frac{\partial}{\partial z}(3x^2y^2 + \ln z)) + \overline{k}\,(\frac{\partial}{\partial x}(2x^3y + e^y z^2) - \frac{\partial}{\partial y}(3x^2y^2 + \ln z)) =$$

$$= \overline{i}\,(2z\,e^y - 2z\,e^y) - \overline{j}\,(\frac{1}{z} - \frac{1}{z}) + \overline{k}\,(6x^2y - 6x^2y) = \overline{0}.$$

$$rot\,\overline{a} = \overline{0}\,.$$

Поэтому поле является потенциальным. Потенциал этого поля найдём с помощью формулы (20). В качестве точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ возьмём точку $M_0(0, 0, 1)$. Тогда

$$U(x,y,z)=\int\limits_0^x(3x^2\cdot 0+\ln 1)dx+\int\limits_0^y(2x^3y+e^y1^2)dy+\int\limits_1^z(\frac{x}{z}+2z\,e^y)dz=$$

$$=0+(2z^3\,\frac{y^2}{2}+e^y)\Big|_0^y+(x\ln z+z^2e^y)\Big|_1^z=x^3y^2+e^y-1+x\ln z+z^2e^y-e^y=$$

$$=x^3y^2+x\ln z+x^2e^y-1.$$

Тогда потенциал векторного поля $\bar{a}$ равен

$$U(x,y,z)=x^3y^2+x\ln z+x^2e^y+C,$$

где C – произвольная постоянная.

Потенциал этого поля можно найти и другим способом. По определению потенциал $U(x,y,z)$ – скалярная функция, для которой $grad\,U(M)=\bar{a}(M)$. Это векторное равенство равносильно трём скалярным уравнениям:

$$\frac{\partial U}{\partial x}=P(x,y,z)=3x^2y^2+\ln z; \qquad (21)$$

$$\frac{\alpha U}{\partial y}=Q(x,y,z)=2x^3y+e^yz^2; \qquad (22)$$

$$\frac{\partial U}{\partial z}=R(x,y,z)=\frac{x}{y}+2z\,e^y. \qquad (23)$$

Интегрируя равенство (21) по x, получим

$$U(x,y,z)=\int(3x^2y^2+\ln z)dx=x^3y^2+\ln z\cdot x+C_1(y,z), \qquad (24)$$

где $C_1(y,z)$ – произвольная дифференцируемая функция от y и z. Продифференцируем равенство (24) по переменной y.

$$\frac{\partial U}{\partial y}=2x^3y+C_1'(y,z).$$

Сравнивая это равенство с равенством (22), получим:

$$C_1'(y,z)=e^yz^2; \qquad C_1(y,z)=\int e^yz^2dy=e^yz^2+C_2(z).$$

Тогда $U(x,y,z) = x^3 y^2 + x\ln z + e^y z^2 + C_2(z).$

Продифференцируем полученное равенство по z:

$$\frac{\partial U}{\partial z} = 0 + \frac{x}{z} + 2z\,e^y + C_2{}'(z).$$

Сравнивая полученное равенство с (23), получим

$$C_2{}'(z) = 0, \qquad C_2(z) = C,$$

где C – произвольная постоянная.

Окончательно

$$U(x,y,z) = x^3 y^2 + x\ln z + x^2 e^y + C\,.$$

Получили тот же результат.

3. ОПЕРАТОР ГАМИЛЬТОНА

3.1. Векторные дифференциальные операции первого порядка

Основными дифференциального порядка над скалярным полем U и векторным полем $\bar{a}$ являются

$$grad\,U, \quad div\,\bar{a}, \quad rot\,\bar{a}.$$

Действия взятия градиента, дивергенции и ротора называются ***векторными операциями первого порядка*** (в них участвуют только первые производные).

Эти операции удобно записывать с помощью так называемого ***оператора Гамильтона***:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial}{\partial z}\bar{k}\,.$$

Этот символический вектор называют также оператором ∇ («набла»). Он приобретает определённый смысл только в комбинации со скалярными и векторными функциями. Символическое «умножение» вектора ∇ на скаляр U или вектор $\bar{a}$ производится по обычным правилам векторной алгебры, а «умножение» символов $\dfrac{\partial}{\partial x}$, $\dfrac{\partial}{\partial y}$, $\dfrac{\partial}{\partial z}$ на величины $U,\ P,\ Q,\ R$ понимают как взятие соответствующей частной производной от этих величин.

Применяя оператор Гамильтона, получим дифференциальные операции первого порядка:

1. $$\nabla U = \left(\frac{\partial}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial}{\partial z}\bar{k}\right)\cdot U =$$
$$= \frac{\partial U}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\bar{k} = grad\, U.$$

2. $$\nabla \bar{a} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial}{\partial z}\bar{k}\right)\cdot\left(P\,\bar{i} + Q\,\bar{j} + R\,\bar{k}\right) =$$
$$= \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = div\,\bar{a}.$$

3. $$\nabla \times \bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = rot\,\bar{a}.$$

Оператор Гамильтона применяется для записи и других операций и для вывода различных формул в теории поля. При действиях с ним необходимо пользоваться правилами векторной алгебры и правилами дифференцирования.

В частности, производная о направлении может быть записана в виде

$$\frac{\partial U}{\partial \bar{e}} = \nabla U \cdot \bar{e} = (\bar{e} \cdot \nabla)\cdot U,$$

где $\bar{e} = (\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$.

3.2. Векторные дифференциальные операции второго порядка

После применения оператора Гамильтона к скалярному или векторному полю получается новое поле, к которому можно снова применить этот оператор. В результате получатся ***дифференциальные операции второго порядка***.

Нетрудно убедиться, что имеется лишь пять дифференциальных операций второго порядка: $div\, grad\, U$, $rot\, grad\, U$, $grad\, div\, \overline{a}$, $div\, rot\, \overline{a}$, $rot\, rot\, \overline{a}$. (Понятно, что операция $div\, div\, \overline{a}$, например, не имеет смысла; $div\, \overline{a}$ – скаляр и поэтому говорить о дивергенции скалярной величины нет смысла).

Запишем явные выражения для дифференциальных операций второго порядка, используя оператор Гамильтона. Заметим, что оператор действует только на множитель, расположенный непосредственно за оператором.

1. $div\ grad\, U = \nabla\ (\nabla U) = (\nabla \cdot \nabla)\ U =$

$$= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \cdot U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}.$$

Правая часть этого равенства называется ***оператором Лапласа*** скалярной функции U и обозначается ΔU. Таким образом,

$$div\ grad\, U = \Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}. \qquad (25)$$

Дифференциальное уравнение Лапласа $\Delta U = 0$ играет важную роль в различных разделах математической физики. Решениями уравнения Лапласа являются так называемые ***гармонические функции.***

Замечание. К равенству (25) можно прийти, введя в рассмотрение скалярный оператор дельта:

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

который также называют ***оператором Лапласа***.

2. $rot\ \ grad\, U = \nabla \times (\nabla U) = (\nabla \times \nabla) U = 0$, так как векторное произведение двух одинаковых векторов равно нулю (нуль-вектор). Это означает, что поле градиента является безвихревым.

3. $grad\ div\overline{a} = \nabla(\nabla\overline{a}) =$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(div\overline{a})\cdot\overline{i} + \frac{\partial}{\partial y}(div\overline{a}\}\cdot\overline{j} + \frac{\partial}{\partial z}(div\overline{a})\cdot\overline{k} =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial z^2}\right)\overline{i} + \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial z^2}\right)\overline{j} +$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial z^2}\right)\overline{k}.$$

4. $div\ rot\ \overline{a} = \nabla\cdot(\nabla\times\overline{a}) = 0$, так как смешанное произведение трёх векторов, из которых два совпадающие, равно нулю. Это означает, что поле вихря является соленоидальным.

5. $rot\ rot\overline{a} = \nabla\times(\nabla\times\overline{a}) = \nabla(\nabla\cdot\overline{a}) - (\nabla\cdot\nabla)\ \overline{a} = grad\ dv\overline{a} - \Delta\overline{a},$ так как двойное векторное произведение обладает свойством

$$\overline{a}\times(\overline{b}\times\overline{c}) = \overline{b}\cdot\overline{a}\cdot\overline{c} - \overline{c}\cdot\overline{a}\cdot\overline{b}.$$

Здесь $\Delta\overline{a} = \Delta P\overline{i} + \Delta Q\overline{j} + \Delta R\overline{k}$ – векторная величина, полученная в результате применения оператора Лапласа.

4. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ОСНОВНЫХ КЛАССОВ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

4.1. Соленоидальное поле

Напомним, что векторное поле называется ***соленоидальным***, если во всех его точках дивергенция равна нулю, т.е. $div\overline{a} = 0$.

Примерами соленоидальных полей являются: поле линейных скоростей вращающегося твёрдого тела; магнитное поле, создаваемое прямолинейным проводником, вдоль которого течет электрический ток, и др.

Приведём некоторые ***свойства*** соленоидального поля:

1. В соленоидальном поле $\overline{a}$ поток вектора через любую замкнутую поверхность равен нулю, т.е. соленоидальное поле не имеет ни источников, ни стоков.

2. Соленоидальное поле является потоком ротора некоторого векторного поля, т.е. если $div\,\overline{a} = 0$, то существует такое поле $\overline{b}$, что $\overline{a} = rot\,\overline{b}$. Вектор $\overline{b}$ называется ***векторным потенциалом*** поля $\overline{a}$.

3. В соленоидальном поле $\overline{a}$ поток векторного поля через поперечное сечение векторной трубки сохраняет постоянное значение, которое называется ***интенсивностью*** трубки.

4.2. Потенциальное поле

Векторное поле называется ***потенциальным*** (или ***безвихревым***, или ***градиентным***), если во всех точках поля ротор равен нулю, т.е. $rot\,\overline{a} = 0$. Примером потенциального поля является, например, электрическое поле напряжённости точечного заряда.

Основные **свойства** потенциального поля:

1. Циркуляция потенциального поля $\overline{a}$ по любому замкнутому контуру в этом поле равна нулю, так как

$$Ц = \oint\limits_L \overline{a} \cdot \overline{dl} = \iint\limits_S rot\,\overline{a} \cdot \overline{ds}.$$

В частности, для силового потенциального поля это означает, что работа силы по любому замкнутому контуру равна нулю. В поле скоростей текущей жидкости равенство $Ц = 0$ означает, что в потоке нет замкнутых струек, т.е. нет водоворотов.

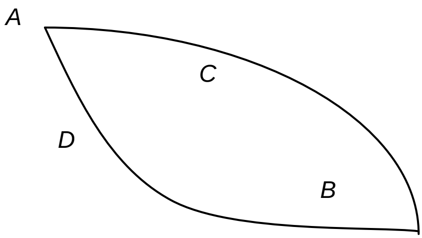
2. В потенциальном поле $\overline{a}$ криволинейный интеграл

$$\int\limits_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

вдоль любой кривой от точки А до точки В не зависит от пути интегрирования.

Это свойство следует из первого свойства. Действительно, если возьмём в поле две точки А и В и соединим их двумя *кривыми ACB и ADB так, чтобы замкнутый контур ACBDA* лежал внутри поля, то по свойству 1.

$$\oint\limits_{ACBDAL} \overline{a} \cdot \overline{dl} = \oint\limits_{ACBDA} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0.$$



Учитывая свойства криволинейного интеграла, получаем:

$$\oint\limits_{ACBDA} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int\limits_{ACB} P\,dx + Q\,dy + R\,dz +$$

$$+ \int\limits_{BDA} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int\limits_{ACB} P\,dx + Q\,dy + R\,dz -$$

$$- \int\limits_{ADC} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0,$$

т.е.

$$\int\limits_{ACB} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int\limits_{ADC} P\,dx + Q\,dy + R\,dz\,.$$

3. Потенциальное поле является полем градиента некоторой скалярной функции $U(x, y, z)$, т.е. если $rot\,\overline{a} = 0$, то существует функция $U(x, y, z)$, такая что $\overline{a} = grad\,U$. Соответствующие примеры мы уже рассматривали в разделе 3.

4.3. Гармоническое поле

Векторное поле $\overline{a}$ называется ***гармоническим***, или ***лапласовым***, если оно одновременно является потенциальным и соленоидальным, т.е. если $rot\ \overline{a} = 0$ и $div\,\overline{a} = 0$.

Примером гармонического поля можно считать поле линейных скоростей стационарного безвихревого потока жидкости при отсутствии в нём источников и стоков.

Так как поле $\overline{a}$ потенциально, то его можно записать в виде $\overline{a} = grad\,U$ /, где $U = U(x, y, z)$ – потенциал поля.

Но так как поле одновременно и соленоидальное, то

$$div\,\bar{a} = div\ grad\,U = 0,$$

или, что то же самое,

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0,$$

т.е. потенциальная функция U гармонического поля $\bar{a}$ является решением дифференциального уравнения Лапласа. Такая функция, как уже упоминалось, называется ***гармонической.***

5. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ 1-го РОДА

Рассмотрим на плоскости xOy некоторую кривую AB, заданную параметрическими уравнениями:

$$x = \varphi(y); \quad y = \psi(t).$$

Эта кривая называется ***гладкой*** на промежутке $[\alpha, \beta]$, если для всех точек этого промежутка функции

$$\varphi'(t); \quad \psi'(t)$$

являются непрерывными и не обращаются в ноль одновременно.

Непрерывная кривая, состоящая из конечного числа гладких кусков, называется ***кусочно-гладкой.***

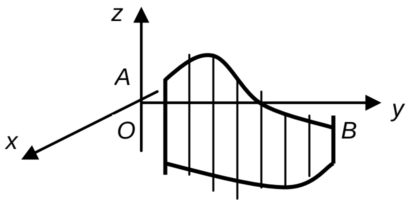
Пусть функция $z = f(x, y)$ определена и ограничена на множестве точек, лежащих на гладкой или кусочно-гладкой кривой AB. Разобьём эту кривую произвольным образом на n частей точками $A = M_0, M_1, M_2, \ldots, M_n = B$. На каждой из частичных дуг возьмём фиксированную точку $M_i^* \in M_{i-1}M_i$ и составим сумму $\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(M_i^*)\Delta l_i$, где Δl_i – длина дуги $M_{i-1}M_i$. Эта сумма называется ***интегральной суммой*** для функции $z = f(x, y) = f(M)$ по кривой AB. Пусть λ – максимальная из длин частичных дуг.

Определение. Если существует конечный предел $\lim_{\gamma \to 0} \sigma = I$, то этот предел называется ***криволинейным интегралом 1-го рода*** от функции $f(x, y)$ по кривой AB и обозначается

$$I = \int\limits_{AB} f(M)dl = \int\limits_{AB} f(x,y)dl\,. \qquad (26)$$

В этом случае функция $f(x,y)$ называется ***интегрируемой*** вдоль кривой AB, а сама эта кривая называется ***контуром*** интегрирования.

Геометрический смысл криволинейного интеграла 1-го рода. Если определённый интеграл – это площадь криволинейной трапеции, то криволинейный интеграл 1-го рода численно равен площади криволинейной цилиндрической поверхности, образующая которой параллельна оси Oz, направляющая совпадает с кривой AB, а верхний контур состоит из значений функции $f(x,y)$ по контуру AB.



Основные свойства криволинейного интеграла 1-го рода:

1. Криволинейный интеграл 1-го рода не зависит от пути интегрирования:

$$\int\limits_{AB} f(x,y)\,dl = \int\limits_{BA} f(x,y)\,dl.$$

2. $\int\limits_{AB} \left[f_1(x,y) \pm f_2(x,y) \right] dl = \int\limits_{AB} f_1(x,y)\,dl \pm \int\limits_{AB} f_2(x,y)\,dl.$

3. $\int\limits_{AB} k\, f(x,y)\,dl = k \int\limits_{AB} f(x,y)\,dl.$

4. Если C – некоторая точка на дуге AB, то

$$\int\limits_{AB} f(x,y)\,dl = \int\limits_{AC} f(x,y)\,dl + \int\limits_{CB} f(x,y)\,dl.$$

Вычисление криволинейного интеграла 1-го рода. Криволинейный интеграл первого рода легко сводится к определённому интегралу.

Если кривая задана параметрическими уравнениями:

$$AB: \quad x=\varphi(t); \quad y=\psi(t),$$

где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ – непрерывно дифференцируемые функции при $t\in[\alpha,\beta]$, то

$$\int_{AB} f(x,y)dl=\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{(\varphi'(t))^2+((\psi'(t))^2}\,dt, \tag{27}$$

причём значение $t=\alpha$ соответствует точке A, а $t=\beta$ – точке B.

ПРИМЕР 1. Вычислить интеграл $\int_{AB} x^2y\,dl$, где $AB: x=2\cos t;$ $y=2\sin t,\ \dfrac{\pi}{2}\le t\le\pi.$

$$\int_{AB} x^2y\,dl=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 4\cos^2 t\cdot 2\sin t\cdot\sqrt{(-2\sin t)^2+(2\cos t)^2}\,dt=$$

$$=8\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos^2 t\cdot\sin t\sqrt{4\sin^2 t+4\cos^2 t}\,dt=16\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos^2 t\cdot(\sin t\,dt)=$$

$$=16\left(-\frac{\cos^3 t}{3}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\frac{16}{3}.$$

Если AB – пространственная кривая, заданная уравнениями

$$x=x(t); \quad y=y(t); \quad z=z(t); \qquad \alpha\le t\le\beta,$$

формула (27) приобретает вид:

$$\int_{AB} f(x,y,z)\,dl=\int_{\alpha}^{\beta} f(x(t),y(t),z(t))\cdot\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t)^2+(z'(t))^2}\,dt.$$

В частности, если кривая AB задана уравнением

$$y = y(x), \quad a \le x \le b,$$

где $y(x)$ – непрерывно дифференцируемая функция, то формула (27) приобретает вид:

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dl = \int\limits_a^b f(x, y(x))\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx. \qquad (28)$$

ПРИМЕР 2. Вычислить криволинейный интеграл:

$$\int\limits_{AB} \frac{4y^2}{\sqrt{9x-14}}\,dl, \quad AB: \quad y = (x-2)^{3/2}, \quad 2 \le x \le 5.$$

Решение. $y' = \dfrac{3}{2}(x-2)^{\frac{1}{2}}$, тогда

$$\int\limits_{AB} \frac{4y^2}{\sqrt{9x-14}}dl = \int\limits_2^5 \frac{4\cdot(x-2)^3}{\sqrt{9x-14}}\sqrt{1+\frac{9}{4}(x-2)}\,dx =$$

$$= \int\limits_2^5 \frac{4\cdot(x-2)^3}{\sqrt{9x-14}}\sqrt{\frac{4+9x-18}{4}}\,dx = \int\limits_2^5 \frac{4\cdot(x-2)^3}{\sqrt{9x-14}}\,\frac{\sqrt{9x-14}}{2}\,dx =$$

$$= \int\limits_2^5 2\cdot(x-2)^3 dx = 2\frac{(x-2)^4}{4}\Big|_2^5 = \frac{1}{2}(3^4-0) = \frac{81}{2} = 40{,}5.$$

Если кривая AB задана уравнением в полярных координатах, т.е.

$$AB: \quad \rho = \rho(\varphi), \quad \alpha \le \varphi \le \beta,$$

то получаем ещё один частный случай формулы (27):

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dl = \int\limits_a^b f\;(\rho(\varphi)\cos\phi, \rho(\varphi)\sin\varphi)\sqrt{(\rho(\varphi)^2 + (\rho'(\varphi))^2}\,d\varphi.$$

ПРИМЕР 3. Вычислить криволинейный интеграл:

$$\int\limits_{AB} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dl, \quad AB: \quad \rho = \frac{5}{\cos\varphi}, \quad \frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{\pi}{3}.$$

Решение

$$\rho' = \frac{5\sin\varphi}{\cos^2\varphi}, \qquad \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi} =$$

$$= \rho\sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = \rho = \frac{5}{\cos\varphi};$$

$$dl = \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\ d\varphi =$$

$$\sqrt{\frac{25}{\cos^2\varphi} + \frac{25\sin^2\varphi}{\cos^4\varphi}}\ d\varphi = \sqrt{\frac{25(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}{\cos^4\varphi}}\ d\varphi = \frac{5}{\cos^2\varphi}\ d\varphi,$$

$$y = \rho\sin\varphi = \frac{5}{\cos\varphi}\sin\varphi.$$

Тогда

$$\int\limits_{AB} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dl = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\frac{5\sin\varphi}{\cos\varphi}}{\frac{5}{\cos\varphi}} \cdot \frac{5}{\cos^2\varphi}\, d\varphi = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{5\sin\varphi d\varphi}{\cos^2\varphi} =$$

Сделаем замену переменной:

$$\begin{bmatrix} \cos\phi = t; \qquad -\sin\varphi\, d\varphi = dt; \\ [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}] \to [\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}] \end{bmatrix} =$$

$$= -5 \cdot \int\limits_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{t^2} = \frac{5}{t}\Bigg|_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{1}{2}} = 5\cdot(2 - \frac{2}{\sqrt{3}}) = \frac{10(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}} = \frac{10}{3}(3-\sqrt{3}).$$

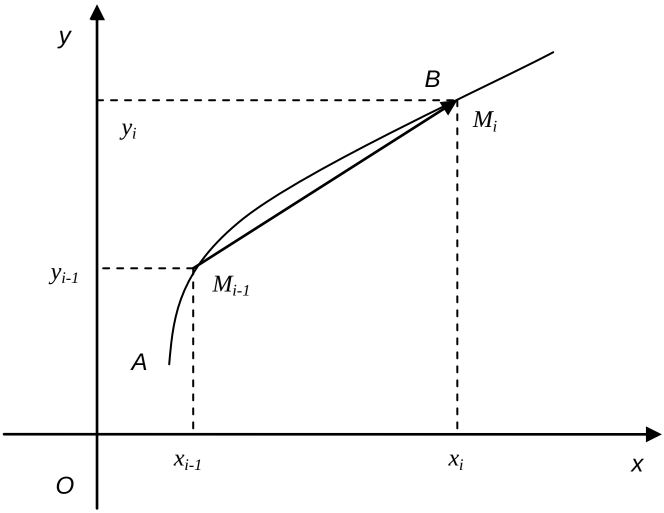
Криволинейные интегралы 1-го рода имеют разнообразные применения в математике и механике.

6. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ 2-го РОДА

Решение задач о вычислении работы переменной силы при перемещении материальной точки вдоль некоторой кривой (и других задач) приводит к понятию криволинейного интеграла 2-го рода.

Пусть на кривой AB, лежащей в плоскости xOy, определены две ограниченные функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$. Разобьем кривую AB на n частей точками: $A = M_0,\ M_1,\ \ldots,\ M_{i-1},\ M_i,\ \ldots, M_n = B$.

Обозначим через Δx_i и Δy_i проекции вектора $\overline{M_{i-1}M_i}$ на оси координат.



$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}; \quad \Delta y_i = y_i - y_{i-1}.$$

На каждой частичной дуге $M_{i-1}M_i$ возьмём произвольную точку M_i^* и составим интегральные суммы для функций $P(x, y)$ и $Q(x, y)$:

$$\sigma_1 = \sum_{i=1}^{n} P(M_i^*)\,\Delta x_i; \qquad \sigma_2 = \sum_{i=1}^{n} Q(M_i^*)\,\Delta y_i. \tag{29}$$

Пусть $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n} \Delta l_i$, где Δl_i – длина дуги $M_{i-1}M_i$.

<u>Определение.</u> Если интегральные суммы (29) при $\lambda \to 0$ имеют конечные пределы, то они называются ***<u>криволинейными иньегралами 2-го рода</u>*** по кривой AB от функций $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ и обозначаются соответственно

$$\int\limits_{AB} P(x, y)\, dx \quad \text{и} \quad \int\limits_{AB} Q(x, y)\, dy.$$

Их сумму называют ***<u>общим криволинейным интегралом 2-го рода</u>*** и обозначают

$$\int\limits_{AB} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy.$$

Криволинейные интегралы 2-го рода, как и криволинейные интегралы 1-го рода, легко сводятся к определённым интегралам.

В самом деле, пусть кривая AB задана параметрическими уравнениями:

$x = \varphi(t),\ \ y = \psi(t),\ \ \alpha \le t \le \beta$, где функции $\varphi(t),\ \psi(t)$ непрерывны на отрезке $[\alpha, \beta]$ вместе со своими производными, причём точке A отвечает $t = \alpha$, а точке B - $t = \beta$. Пусть функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны вдоль кривой AB. Тогда справедливы следующие формулы:

$$\int\limits_{AB} P(x, y)\, dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} P(\varphi(t), \psi(t))\, \varphi'(t)\, dt;$$

$$\int\limits_{AB} Q(x, y)\, dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} Q(\varphi(t), \psi(t))\, \psi'(t)\, dt; \qquad (30)$$

$$\int\limits_{AB} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} \left[P(\varphi(t), \psi(t))\, \varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\, \psi'(t)\right] dt,$$

которые сводят криволинейные интегралы 2-го рода к определённым интегралам.

ПРИМЕР 1. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_L (y^2 - x^2)\, dx + 2x\, y\, dy,$$

где $L: \quad x = t^2, \quad y = \frac{1}{3}t^3; \quad 0 \le t \le 1.$

$$\int\limits_L (y^2 - x^2)\, dx + 2x \cdot y\, dy =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(\frac{1}{9}t^6 - t^4\right) \cdot 2t\, dt + 2t^2 \cdot \frac{1}{3}t^3 \cdot t^2\, dt =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(\frac{2}{9}t^7 - 2t^5 + \frac{2}{3}t^7\right) dt = \int\limits_0^1 \left(\frac{8}{9}t^7 - 2t^5\right) dt =$$

$$= \frac{t^8}{9} - \frac{t^6}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{9} - \frac{1}{3} = -\frac{2}{9}.$$

Аналогично, если кривая $L = AB$ задана явным уравнением $y = f(x), \;\; a \le x \le b$, получим соответствующие формулы, в частности,

$$\int\limits_{AB} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = \int\limits_\alpha^\beta \left[P(x, f(x)) + Q(x, f(x))\, f'(x)\right] dx. \qquad (31)$$

ПРИМЕР 2. Вычислить криволинейный интеграл:

$$\int\limits_{AB} (x^2 - 2xy)\, dx + (2xy + y^2) dy,$$

если $y = x^2; \quad A(1,1), \quad B(2,4)$.

По формуле (31) получаем:

$$\int\limits_{AB} (x^2 - 2xy)\,dx + (2xy + y^2)dy =$$

$$= \int\limits_1^2 (x^2 - 2x^3 + (2x^3 + x^4)\,2x)\,dx =$$

$$= \int\limits_1^2 (x^2 - 2x^3 + 4x^4 + 2x^5)\,dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{2x^4}{4} + \frac{4x^5}{5} + \frac{2x^6}{6} \right)\Big|_1^2 =$$

$$= \left(\frac{8}{3} - 8 + \frac{128}{5} + \frac{64}{3} \right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{4}{5} + \frac{1}{3} \right) = \frac{1219}{30}.$$

Криволинейный интеграл 2-го рода обладает всеми свойствами определённого интеграла. В отличие от криволинейного интеграла 1-го рода, он зависит от пути интегрирования, т.е. если изменить направление движения по дуге, знак интеграла сменится на противоположный:

$$\int\limits_{AB} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = -\int\limits_{BA} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy\,.$$

В самом деле, если изменим направление обхода кривой, в интегральных суммах (29) Δx_i и Δy_i поменяют знак на противоположный.

Поэтому при вычислении криволинейного интеграла 2-го рода необходимо учитывать направление интегрирования.

В случае, когда L замкнутая кривая, т.е. когда точка A совпадает с точкой B, *положительным* направлением считается такой обход контура, при котором область, ограниченная этим контуром, всегда остаётся слева по отношению к точке, совершающей обход. Противоположное направление обхода контура принято называть *отрицательным*.

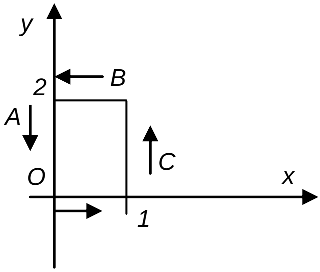
Криволинейный интеграл по замкнутому контуру L, пробегаемому в положительном направлении, обычно обозначают символом

$$\oint\limits_L P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy\,.$$

ПРИМЕР 3. Вычислить криволинейный интеграл

$$\oint\limits_L (x+y)\,dy\,,$$

где L – контур прямоугольника, образованного прямыми: $x=0,\quad y=0,\quad x=1,\quad y=2$.



Если разобьём контур интегрирования на части, то получим:

$$\oint\limits_L (x+y)\,dy = \int\limits_{OC} (x+y)\,dy + \int\limits_{CB} (x+y)\,dy + \int\limits_{BA} (x+y)\,dy + \int\limits_{AO} (x+y)\,dy.$$

Очевидно, что первый и третий интегралы в этом равенстве вдоль участков OC и BA равны нулю, так как y на этих участках принимает постоянное значение и $dy=0$.

На участке CB: $x=1$, а y меняется от 0 до 2. Тогда

$$\int\limits_{CB} (x+y)\,dy = \int\limits_0^2 (1+y)\,dy = \left(y+\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^2 = 4.$$

На участке AO: $x=0$, а y меняется от 2 до 0. Тогда

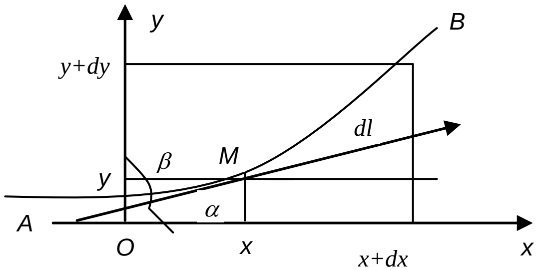
$$\int\limits_{AO} (x+y)\,dy = \int\limits_2^0 y\,dy = \frac{y^2}{2}\Bigg|_2^0 = -2.$$

Следовательно,

$$\oint\limits_L (x+y)\,dy = 0+4+0-2 = 2\,.$$

7. СВЯЗЬ МЕЖДУ КРИВОЛИНЕЙНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ 1-го И 2-го РОДА

Пусть α *и* β – углы, образованные с осями координат направленной касательной к кривой AB в точке $M(x, y)$.



Тогда получим соотношения:

$$dx = \cos\alpha \cdot dl; \quad dy = \cos\beta \cdot dl \ . \tag{32}$$

Заменяя в криволинейных интегралах 2-го рода dx и dy этими выражениями, преобразуем криволинейные интегралы второго рода в криволинейные интегралы 1-го рода:

$$\begin{gathered}\int\limits_{AB} P(x,y)dx = \int\limits_{AB} P(x,y)\cos\alpha\, dl,\\ \int\limits_{AB} Q(x,y)dy = \int\limits_{AB} Q(x,y)\cos\beta\, dl,\\ \int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{AB} (P(x,y)\cos\alpha + Q(x,y)\cos\beta)dl.\end{gathered} \tag{33}$$

Эти формулы устанавливают связь между криволинейными интегралами 1-го и 2-го рода.

Формула Грина. Формула Грина устанавливает связь между криволинейными и двойными интегралами.

Пусть G – некоторая простая замкнутая область, ограниченная контуром L (область называется *простой*, если её граница пересекается с прямыми, параллельными осям координат, не более чем в двух точках). Пусть функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны вместе со своими частными производными $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ в данной области. Тогда выполняется формула:

$$\iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy = \oint_L P\, dx + Q\, dy ,$$

которая называется ***<u>формулой Грина.</u>***

<u>Замечание</u>. Формула Грина остаётся справедливой для всякой замкнутой области, которую можно разбить на конечное число простых замкнутых областей.

ПРИМЕР. С помощью формулы Грина вычислить криволинейный интеграл:

$$\oint_L (2x - 2y)dx + (3x + y)dy ,$$

где L – окружность $x^2 + y^2 = 4$.

В данном примере $P(x, y) = 2x - 2y; \quad Q(x, y) = 3x + y.$

Тогда $\dfrac{\partial P}{\partial y} = -2, \quad \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 3$ непрерывны в замкнутом круге радиуса 2. Следовательно, можем применить формулу Грина к заданному криволинейному интегралу. Получаем

$$\oint_L (2x - 2y)dx + (3x + y)dy = \iint_G (3 - (-2))dxdy = 5\iint_G dxdy = 20\pi ,$$

так как G – это круг радиуса 2.

8. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ 1-го РОДА

Пусть в точках некоторой поверхности S, гладкой или кусочно-гладкой, определена ограниченная функция

$$f(M) = f(x, y, z).$$

(Поверхность называется *<u>гладкой</u>*, если в каждой её точке существует касательная плоскость и при переходе от точки к точке положение этой касательной плоскости меняется непрерывно. Поверхность называется кусочно-гладкой, если она состоит из конечного числа гладких частей, которые соединены непрерывно.)

Поверхность S произвольным образом разобьём на n частей с площадями $\Delta S_1, \ \Delta S_2, \ldots, \Delta S_n$. На каждой частичной поверхности выберем произвольную точку $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ и составим сумму:

$$\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\,\Delta S_i\ . \tag{34}$$

Эта сумма называется _интегральной суммой_ для функции $f(M)$ по поверхности S. Пусть λ – максимальный диаметр частичных поверхностей данной поверхности.

Определение. Если интегральная сумма (34) при $\lambda \to 0$ имеет предел, равный I, то этот предел называется _поверхностным интегралом 1-го рода от функции_ $f(x,y,z)$ по поверхности S и обозначается одним из следующих символов:

$$I = \iint_S f(M)\,dS = \iint_S f(x\,y,z)\,dS\ .$$

В этом случае функция $f(x,y,z)$ называется _интегрируемой по поверхности_ S, а сама поверхность S называется _областью интегрирования._

Данное определение, по сути, аналогично определению двойного интеграла. Поэтому свойства двойных интегралов и условия их существования без особых изменений переносятся на поверхностные интегралы.

Вычисление поверхностных интегралов первого рода производится сведением к двойному интегралу.

Пусть поверхность S задана уравнением $z = z(x,y)$, где функция $z(x,y)$ вместе частными производными $z'_x(x,y)$ и $z'_y(x,y)$ непрерывна в замкнутой области G – проекции поверхности S на плоскость Oxy, и пусть функция $f(x,y,z)$ непрерывна в точках поверхности S и, следовательно, интегрируема по этой поверхности. Тогда имеет место следующая формула для вычисления поверхностного интеграла 1-го рода:

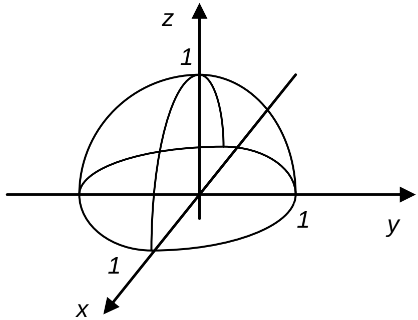
$$\iint_S f(x,y,z)\,dS =$$
$$= \iint_G f\left[x,y,z(x,y)\right]\sqrt{1+\left(z'_x(x,y)\right)^2+\left(z'_y(x,y)\right)^2}\,dx\,dy. \tag{35}$$

Аналогичные формулы можно получить, если спроектировать поверхность S в другие координатные плоскости.

ПРИМЕР. Вычислить поверхностный интеграл 1-го рода

$$\iint\limits_S \sqrt{1+4x^2+4y^2}\ dS,$$

где S – часть параболоида вращения $z=1-x^2-y^2$, отсечённого плоскостью $z=0$.



Проекцией поверхности S в плоскости Oxy является единичный круг G: $x^2+y^2\le 1$ с центром в начале координат. В этом круге функция $z=1-x^2-y^2$ имеет непрерывные частные производные:

$$z'_x(x,y)=-2x, \quad z'_y(x,y)=-2y.$$

По формуле (34) получаем:

$$\iint\limits_S f(x,y,z)\,dS=\int\limits_S \sqrt{1+4x^2+4y^2}\ dS=$$

$$=\iint\limits_G \sqrt{1+4x^2+4y^2}\cdot\sqrt{1+4x^2+4y^2}\ dx\,dy=$$

$$=\iint\limits_G \left(1+4x^2+4y^2\right)dx\,dy.$$

Так как область интегрирования представляет собой круг, есть смысл перейти к полярным координатам:

$$x=\rho\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\varphi;\quad G\to G^*: 0\le\varphi\le 2\pi;\ \ 0\le\rho\le 1;$$

$$\iint\limits_G \left(1+4x^2+4y^2\right)dx\,dy=\iint\limits_{G^*}\left(1+4\rho^2\right)\rho\,d\rho\,d\varphi=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^1\left(\rho+4\rho^3\right)d\rho=\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\left(\frac{\rho^2}{2}+\rho^4\right)\Bigg|_0^1=\frac{3}{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi=3\pi.$$

9. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ 2-го РОДА

Пусть S – гладкая поверхность, заданная уравнением $z = f(x, y)$, а $R(x, y, z)$ – ограниченная функция, определённая в точках поверхности S. Выберем одну из двух сторон поверхности, т.е. одно из двух возможных направлений нормали в точках поверхности. Если нормали составляют острые углы с осью Oz, то будем говорить, что выбрана *верхняя сторона* поверхности $z = f(x, y)$, если тупые углы, то *нижняя сторона* поверхности.

Разобьём поверхность S произвольным образом на n частей и обозначим через G_i проекцию i-й части поверхности на плоскость Oxy. На каждой части поверхности выберем произвольную точку $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ и составим сумму

$$\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\,\Delta s_i\,, \tag{36}$$

где Δs_i – площадь области G_i, взятая со знаком «плюс», если выбрана верхняя сторона поверхности, и со знаком «минус», если выбрана нижняя сторона.

Сумма (36) называется *интегральной суммой* для функции $R(M) = R(x, y, z)$. Пусть λ – максимальный диаметр частичных поверхностей.

Определение. Если интегральная сумма (36) при $\lambda \to 0$ имеет конечный предел, равный I, то этот предел называется *поверхностным интегралом 2-го рода* от функции $R(x, y, z)$ по выбранной стороне поверхности S и обозначается одним из следующих символов:

$$I = \iint_S R(M)\,dx\,dy = \iint_S R(x, y, z)\,dx\,dy\,.$$

В этом случае функция $R(x, y, z)$ называется *интегрируемой* по поверхности S.

Аналогичным образом определяются поверхностные интегралы 2-го рода по переменным y и z от функции $P(x, y, z)$ по переменным z и x от функции $Q(x, y, z)$, которые определены на поверхности S:

$$\iint\limits_S P(x,y,z)\,dy\,dz \quad \text{и} \quad \iint\limits_S Q(x,y,z)\,dz\,dx.$$

Сумму

$$\iint\limits_S P(x,y,z)\,dy\,dz + \iint\limits_S Q(x,y,z)\,dz\,dx + \iint\limits_S R(x,y,z)\,dx\,dy$$

называют общим поверхностным интегралом 2-го рода и обозначают

$$\iint\limits_S P(x,y,z)\,dy\,dz + Q(x,y,z)\,dz\,dx + R(x,y,z)\,dx\,dy. \qquad (37)$$

Поверхностный интеграл 2-го рода обладает такими же свойствами, как и поверхностный интеграл 1-го рода, но в отличие от последнего, меняет знак при изменении стороны поверхности.

Как и для поверхностных интегралов 1-го рода, вычисление поверхностных интегралов 2-го рода производится сведением их к двойным интегралам. Пусть ориентированная гладкая поверхность S (выбрана верхняя сторона поверхности) задана уравнением $z = f(x,y)$, где $f(x,y)$ – функция, определённая в области G -проекции поверхности S на плоскость Oxy, а $R(x,y,z)$ – функция, непрерывная на поверхности S. Тогда для перехода от поверхностного интеграла 2-го рода к двойному интегралу получаем следующую формулу:

$$\iint\limits_S R(x,y,z)\,dx\,dy = \iint\limits_G R(x,y,f(x,y))dx\,dy. \qquad (38)$$

Аналогично, если G_1 -проекция поверхности S на плоскость Oyz и $x = f_1(y,z)$, а функция $P(x,y,z)$ непрерывна на поверхности S, то

$$\iint\limits_S P(x,y,z)\,dx\,dy = \iint\limits_{G_1} R(f_1(y,z),y,z)\,dy\,dz, \qquad (39)$$

и, если G_2 -проекция поверхности S на плоскость Oxz, а $y = f_2(x,z)$, и функция $Q(x,y,z)$ непрерывна на поверхности S, то

$$\iint\limits_S Q(x,y,z)\,dx\,dy = \iint\limits_{G_1} Q(x, f_2(x,z),z)\,dz\,dx. \qquad (40)$$

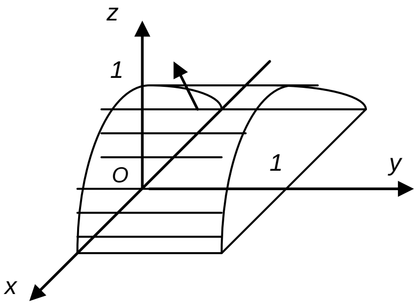
Для вычисления поверхностного интеграла 2-го рода общего вида (37) используются те же формулы (38)-(40), если поверхность

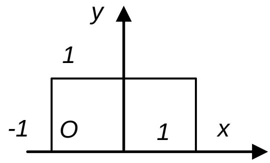
S однозначно проектируется на все три координатные плоскости. В более сложных случаях поверхность S разбивают на части, обладающие указанными свойствами, а интеграл (37) – на сумму интегралов по этим частям.

ПРИМЕР 1. Вычислить интеграл

$$\iint_S \left(y^2+z^2\right)dx\,dy,$$

где S – верхняя сторона поверхности $z=\sqrt{1-x^2}$, отсечённая плоскостями $y=0, \quad y=1$.





Проекцией G на плоскость Oxy является прямоугольник, определяемый неравенствами: $-1\le x\le 1,\ 0\le y\le 1$. По формуле (28)

$$\iint_S \left(y^2+z^2\right)dx\,dy=\iint_G \left(y^2+\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2\right)dx\,dy=$$

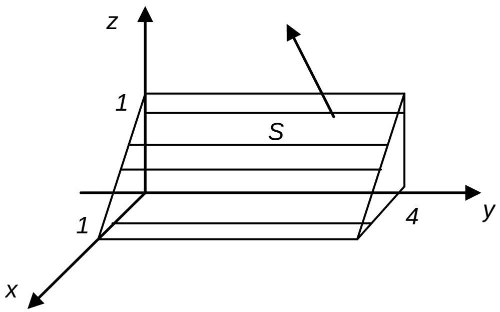
$$=\int_{-1}^{1}dx\int_0^1\left(y^2+1-x^2\right)dy=\int_{-1}^{1}\left(\frac{y^3}{3}+y-x^2y\right)\Bigg|_0^1 dx=$$

$$=\int_{-1}^{1}\left(\frac{4}{3}-x^2\right)dx=\left(\frac{4}{3}x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1}=2.$$

ПРИМЕР 2. Вычислить интеграл

$$\iint_S x\,dy\,dz+y\,dz\,dx+z\,dx\,dy,$$

где S – верхняя сторона части плоскости $x+z-1=0$, отсечённая плоскостями $y=0, \quad y=4$, лежащая в первом октанте.



По определению

$$\iint\limits_S x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy =$$

$$= \iint\limits_{G_1} x\,dy\,dz + \iint\limits_S y\,dz\,dx + \iint\limits_{G_2} z\,dx\,dy.$$

Здесь G_1 и G_2-проекции поверхности S на плоскости Oyz и Oxy соответственно, а $\iint\limits_S y\,dz\,dx = 0$, так как поверхность S параллельна оси Oy.

Область G_1 – это прямоугольник: $0 \le y \le 4; \quad 0 \le z \le 1.$

Тогда

$$\iint\limits_{G_1} x\,dy\,dz = \iint\limits_{G_1} (1-z)\,dy\,dz = \int\limits_0^4 dy \int\limits_0^1 (1-z)\,dz = \int\limits_0^{} dy\,(z - \frac{z^2}{2})\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2} y \Big|_0^4 = 2.$$

Область G_2 – это прямоугольник: $0 \le y \le 4; \quad 0 \le x \le 1$.

Тогда

$$\iint\limits_{G_2} z\,dy\,dx = \iint\limits_{G_{21}} (1-x)\,dy\,dx = \int\limits_0^4 dy \int\limits_0^1 (1-x)\,dx = \int\limits_0^{} dy\,(x - \frac{x^2}{2})\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2} y \Big|_0^4 = 2.$$

Следовательно,

$$\iint\limits_S x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy = 2 + 0 + 2 = 4.$$

10. СВЯЗЬ МЕЖДУ ПОВЕРХНОСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ 1-го И 2-го РОДА

Поверхностные интегралы 2-го рода можно ввести и другим способом, а именно как поверхностные интегралы 1-го рода, в которых под знаком интеграла стоят некоторые специальные выражения.

Пусть $\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma$ – направляющие косинусы нормального вектора ориентированной поверхности S в произвольной её точке. Тогда получаем следующие формулы выражения поверхностных интегралов 2-го рода через поверхностные интегралы 1-го рода:

$$\iint\limits_S R(x,y,z)\,dx\,dy = \iint\limits_S R(x,y,z)\cos\gamma\,dS\ ; \tag{41}$$

$$\iint\limits_S Q(x,y,z)\,dz\,dx = \iint\limits_S Q(x,y,z)\cos\beta\,dS\ ; \tag{42}$$

$$\iint\limits_S P(x,y,z)\,dy\,dz = \iint\limits_S P(x,y,z)\cos\alpha\,dS \tag{43}$$

и, суммируя формулы (41)-(43), получаем:

$$\begin{aligned}&\iint\limits_S P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy = \\ &= \iint\limits_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS.\end{aligned} \tag{44}$$

Если выбрать другую сторону поверхности, то направляющие косинусы нормали $\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma$ поменяют знак и, следовательно, сменит знак поверхностный интеграл 2-го рода.

10.1. Формула Остроградского

Эта формула устанавливает связь между поверхностным интегралом по замкнутой поверхности и тройным интегралом по пространственной области, ограниченной данной поверхностью (некоторый аналог формулы Грина для криволинейных интегралов).

Пусть S – замкнутая поверхность некоторой простой замкнутой области V трёхмерного пространства и пусть функции $P(x,y,z),\ \ Q(x,y,z),\ \ R(x,y,z)$ непрерывны вместе со своими частными производными 1-го порядка в данной области. Тогда имеет место следующая формула, которая называется ***формулой Остроградского***:

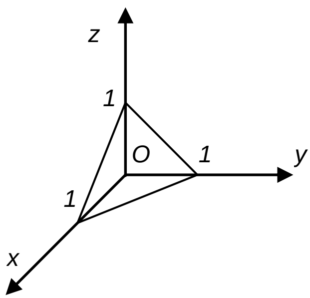
$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz=\iint\limits_S P\,dy\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dx\,dy\,. \quad (45)$$

С помощью формулы Остроградского удобно вычислять поверхностные интегралы по замкнутым поверхностям.

ПРИМЕР 1. Вычислить интеграл

$$\iint\limits_S x\,dy\,dz+y\,dz\,dx+z\,dx\,dy\,,$$

где S – внешняя сторона пирамиды, ограниченной плоскостями: $x+y+z=1,\quad x=0,\quad y=0,\quad z=0$.



$$P(x,y,z)=x,\quad Q(x,y,z)=y,\quad R(x,y,z)=z;$$

$$\frac{\partial P}{\partial x}=1,\qquad \frac{\partial Q}{\partial y}=1,\qquad \frac{\partial R}{\partial z}=1.$$

Тогда, по формуле Остроградского

$$\iint\limits_S x\,dy\,dz+y\,dz\,dx+z\,dx\,dy=\iiint\limits_M (1+1+1)\,dx\,dy\,dz=$$

$$=3\iiint\limits_V dx\,dy\,dz=3\cdot V_{\text{пирамиды}}=3\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{2}.$$

ПРИМЕР 2. Вычислить интеграл

$$\iint\limits_S x^3\,dy\,dz+y^3\,dz\,dx+z^3\,dx\,dy\,,$$

где S – внешняя сторона сферы $x^2+y^2+z^2=9$.

$$P(x,y,z)=x^3,\quad Q(x,y,z)=y^3,\quad R(x,y,z)=z^3;$$

$$\frac{\partial P}{\partial x}=3x^2,\qquad \frac{\partial Q}{\partial y}=3y^2,\qquad \frac{\partial R}{\partial z}=3z^2.$$

Тогда по формуле Остроградского

$$\iint\limits_S x^3\,dy\,dz+y^3\,dz\,dx+z^3\,dx\,dy=3\iiint\limits_V\left(x^2+y^2+z^2\right)dx\,dy\,dz=.$$

Введём сферические координаты:

$$x=\rho\cos\varphi\sin\theta;\quad y=\rho\sin\varphi\sin\theta;\quad z=\rho\cos\theta;$$

$$x^2+y^2+z^2=\rho^2;\quad dx\,dy\,dz=\rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\varphi\,d\theta.$$

$$=3\iiint\limits_{V^*}\rho^2\cdot\rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\varphi\,d\theta=3\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\int\limits_0^{3}\rho^4 d\rho=$$

$$=3\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\,\frac{\rho^5}{5}\Big|_0^3=\frac{3^6}{5}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\left(-\cos\theta\right)\Big|_0^{\pi}=\frac{2\cdot 3^6}{5}\cdot 2\pi=\frac{2916\pi}{5}.$$

10.2. Формула Стокса

Формула Стокса устанавливает связь между поверхностными и криволинейными интегралами. Подобно формулам Грина и Остроградского, формулу Стокса применяют как в самом анализе, так и в его приложениях.

Пусть S – поверхность, заданная уравнением $z=z(x,y)$, где функции $z(x,y)$, $z'_x(x,y)$, $z'_y(x,y)$ непрерывны в замкнутой области G -проекции поверхности S на плоскость Oxy; L – контур, ограничивающий поверхность S, а l – его проекция на плоскость Oxy, являющаяся границей области G. Выберем верхнюю сторону поверхности S. Тогда при сделанных предположениях справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА. Если функция $P(x,y,z)$ непрерывна вместе со своими частными производными первого порядка в точках поверхности S, то справедлива следующая формула:

$$\oint_L P(x,y,z)\,dx = \iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta - \frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right) dfS\ , \qquad (46)$$

где $\cos\beta,\quad \cos\gamma$ – направляющие косинусы нормали к поверхности S, а контур L пробегается в положительном направлении.

При аналогичных условиях выполняются и следующие формулы:

$$\oint_L Q(x,y,z)\,dy = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\cos\gamma - \frac{\partial Q}{\partial z}\cos\alpha\right) dfS\ ; \qquad (47)$$

$$\oint_L R(x,y,z)\,dz = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y}\cos\alpha - \frac{\partial R}{\partial x}\cos\beta\right) dfS\ . \qquad (48)$$

Складывая равенства (46)-(48) и перегруппировав слагаемые, получим формулу:

$$\oint_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz =$$

$$= \iint_S \left[\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta\right] dS, \qquad (49)$$

которая называется ***формулой Стокса***.

Использовав формулу перехода от поверхностного интеграла 1-го рода к поверхностному интегралу 2-го рода (44), получим формулу Стокса в другом виде:

$$\oint_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz =$$

$$= \iint_S \left[\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\,dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz\,dx\right]. \qquad (50)$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н. Лекции по математическому анализу. М.: Высш. шк., 2000.

2. Гольдфайн И.А. Векторный анализ и теория поля. М.: Наука, 1968.

3. Вся высшая математика / М.Л. Краснов, А.И. Киселёв, Г.И. Макаренко, Е.В. Шикин, В.И. Заляпин, С.К. Соболев. М.: Эдиториал УРСС, 2001. Т. 4.

4. Никитин Б.Л., Родионов С.В. Векторный анализ. М.: Высш. шк., 1960.

5. Шипачёв В.С. Высшая математика. М.: Высш. шк., 1985.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Любовь Андреевна ИЗОСОВА
Лилия Александровна ГРАЧЁВА

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Учебное пособие

Редактор Н.П. Боярова
Компьютерная верстка А.А. Нерода

Подписано в печать 31.08.2017. Рег. № 74-17. Формат 60x84/16. Бумага тип. № 1.
Плоская печать. Усл. печ. л. 4,00. Тираж 100 экз. Заказ 358.

Издательский центр ФГБОУ ВО «МГТУ им. Г.И. Носова»
455000, Магнитогорск, пр. Ленина, 38
Участок оперативной полиграфии ФГБОУ ВО «МГТУ им. Г.И. Носова»