Министерство образования и науки Российской Федерации
Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова

И.Ю. Богачева, О.Н. Вострокнутова

МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ФИЗИКЕ. МЕХАНИКА

Утверждено Редакционно-издательским советом университета в качестве учебного пособия

Магнитогорск
2017

УДК 531(075.8)

Рецензенты:
Профессор кафедры вычислительной техники и программирования
ФГБОУ ВО «Магнитогорский государственный технический
университет им. Г.И. Носова», доктор технических наук
И.М. Ячиков

Доцент кафедры радиофизики и электроники
ФГБОУ ВО «Челябинский государственный университет»,
кандидат физико-математических наук
М.А. Загребин

Богачева, И.Ю.
Методика решения задач по физике. Механика: учеб. пособие / И.Ю. Богачева, О.Н. Вострокнутова. – Магнитогорск: Изд-во Магнитогорск. гос. техн. ун-та им. Г.И. Носова, 2017. – 59 с.

В пособии содержатся материалы по разделу «Механика», необходимые для решения задач и для практических работ, которые предусмотрены по образовательному стандарту в рамках изучения курса физики. Задачи подобраны с учетом уровня требований, предъявляемых современными образовательными стандартами.

Предназначено для обучающихся всех направлений подготовки заочной формы обучения.

УДК 531(075.8)

ВВЕДЕНИЕ

Неотъемлемой частью изучения курса физики является решение физических задач. Оно создает практическую основу для усвоения материала и закрепления полученных теоретических знаний.

Особенностью заочной формы обучения является малое количество аудиторных часов и большой объем самостоятельной работы студента, значительная часть которой приходится на выполнение контрольных работ. При этом студент испытывает ряд трудностей, связанных с пониманием физических закономерностей и представлением о протекающих процессах, а также с методикой решения самих задач. Цель настоящего издания − оказать помощь студентам технических направлений подготовки заочной формы обучения в понимании физического смысла изучаемых явлений и в освоении методов решения задач по курсу общей физики.

В учебном пособии приведены примеры решения типовых задач по механике, которые позволяют глубже понять суть физических процессов и ознакомиться со специфическими приемами и методами, используемыми для решения задач определенного типа. Материал излагается так, что в начале каждой темы приводятся основные формулы и законы, связанные с решением задач. Формулы сопровождаются пояснениями. Предполагается, что студент уже прослушал лекции по соответствующим темам, и при работе с данным пособием может опираться на имеющиеся у него знания. Все формулы приведены в системе единиц СИ.

Круг примеров, отобранных для объяснения, охватывает подавляющее большинство задач, которые могут встретиться студенту при выполнении индивидуальных контрольных работ. Это позволит при освоении материала данного учебного пособия любому студенту успешно справиться с самостоятельным выполнением контрольных заданий.

1. КИНЕМАТИКА

Основные формулы

- Положение материальной точки в пространстве задается радиус-вектором $\vec{r}$

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные векторы (орты) вдоль осей X, Y, и Z, а x, y, z – координаты точки.

- Модуль радиус-вектора

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

- Средняя скорость материальной точки

$$\langle\vec{v}\rangle = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1},$$

где $\Delta\vec{r}$ – вектор перемещения точки за интервал времени Δt.

- Мгновенная скорость материальной точки

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k},$$

где $v_x = \frac{dx}{dt}$, $v_y = \frac{dy}{dt}$, $v_z = \frac{dz}{dt}$ – проекции вектора скорости на соответствующие оси координат.

- Модуль вектора скорости

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}\,.$$

- Путь, пройденный точкой

$$S = \int_{t_1}^{t_2} v \cdot dt.$$

- Средняя путевая скорость

$$\langle v\rangle = \frac{\Delta S}{\Delta t},$$

где ΔS – путь, пройденный точкой за интервал времени Δt.

- Среднее ускорение материальной точки

$$\langle\vec{a}\rangle = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t},$$

где $\Delta\vec{v}$ – приращение вектора скорости материальной точки за интервал времени Δt.

- Мгновенное ускорение материальной точки

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k},$$

где $a_x = \frac{dv_x}{dt}$, $a_y = \frac{dv_y}{dt}$, $a_z = \frac{dv_z}{dt}$ – проекции вектора ускорения на соответствующие оси координат.

- Модуль вектора ускорения

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\ .$$

- Тангенциальное ускорение точки

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}.$$

- Нормальное (центростремительное) ускорение точки

$$a_n = \frac{v^2}{R},$$

где R– радиус кривизны траектории в данной точке.

- Полное ускорение точки и его модуль при криволинейном движении

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau,$$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}.\text{у}$$

- Уравнения кинематики равнопеременного поступательного движения ($\vec{a} = const$)

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t,$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2}.$$

- Мгновенная угловая скорость и ее проекция на ось вращения Z, положительное направление которой связано с направлением вращения правого винта

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt},$$

$$\omega_z = \frac{d\varphi}{dt},$$

где $\vec{\varphi}$ и φ – вектор и модуль угла поворота абсолютно твердого тела относительно оси вращения.

- Средняя угловая скорость и ее проекция на ось вращения Z

$$\langle\vec{\omega}\rangle = \frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t} = \frac{\vec{\varphi}_2 - \vec{\varphi}_1}{t_2 - t_1},$$

$$\langle\omega_z\rangle = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{t_2 - t_1},$$

где $\Delta\vec{\varphi}$ и $\Delta\varphi$ – вектор и модуль изменения угла поворота за интервал времени Δt.

- Среднее угловое ускорение и его проекция на ось вращения Z

$$\langle\vec{\varepsilon}\rangle = \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1}{t_2 - t_1},$$

$$\langle\varepsilon_z\rangle = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_{2z} - \omega_{1z}}{t_2 - t_1},$$

где $\Delta\vec{\omega}$ и $\Delta\omega$ – вектор и модуль изменения угловой скорости за интервал времени Δt.

- Мгновенное угловое ускорение и его проекция на ось вращения Z

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt},$$

$$\varepsilon_z = \frac{d\omega_z}{dt}.$$

- Уравнения кинематики равнопеременного вращательного движения ($\varepsilon_z = const$)

$$\omega_z = \omega_{0z} + \varepsilon_z t,$$

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_{0z} t + \frac{\varepsilon_z t^2}{2}.$$

- Связь между линейными и угловыми величинами при вращении абсолютно твердого тела

$$\vec{v} = \left[\vec{\omega}, \vec{R}\right],$$

$$v = \omega R$$

$$a_n = \omega^2 R,$$

$$a_\tau = \varepsilon R.$$

1.1. Кинематика поступательного движения

Задача 1.1.1

Зависимость координаты материальной точки от времени имеет вид $x = 3 + 2 \cdot t + t^2$. Найти скорость v и ускорение a материальной точки в момент времени $t = 2$ с. Определить среднюю скорость $\langle v \rangle$ и среднее ускорение $\langle a \rangle$ за первые три секунды движения.

Решение

Материальная точка движется прямолинейно по оси OX. По определению, мгновенная скорость точки равна первой производной от координаты x по времени t:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d(3 + 2 \cdot t + t^2)}{dt} = 2 + 2 \cdot t.$$

Скорость точки в момент времени $t = 2$ с равна

$$v = 2 + 2 \cdot 2 = 6 \text{ м/с}.$$

Мгновенное ускорение точки определяется первой производной от скорости v по времени t

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d(2 + 2 \cdot t)}{dt} = 2 \text{ м/с}^2 .$$

По определению средняя скорость точки

$$\langle v \rangle = \frac{\Delta S}{\Delta t},$$

где ΔS – путь, пройденный точкой за интервал времени $\Delta t = t_2 - t_1$.

Движение материальной точки прямолинейное, следовательно, путь, пройденный точкой за указанный промежуток времени, равен

$$\Delta S = |\Delta x| = x(t_2) - x(t_1),$$

где $x(t_2)$, $x(t_1)$ – координаты точки в момент времени $t_2 = 3\ c$ и $t_1 = 0\ c$.

Тогда средняя скорость точки за первые 3 с движения

$$\langle v\rangle = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{(3 + 2\cdot 3 + 3^2) - (3 + 2\cdot 0 + 0^2)}{3 - 0} = \frac{15}{3} = 5\ \text{м/с}.$$

Среднее ускорение по определению

$$\langle a\rangle = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

где v_2 и v_1 – мгновенные скорости точки при $t_2 = 3\ с$ и $t_1 = 0\ с$ соответственно.

Подставив в формулу для скорости точки $v = 2 + 2\cdot t$, определим среднее ускорение точки

$$\langle a\rangle = \frac{(2 + 2\cdot 3) - (2 + 2\cdot 0)}{3 - 0} = \frac{6}{3} = 2\ \text{м/с}^2.$$

Задача 1.1.2

Движение точки по плоскости задано уравнениями $\boldsymbol{x = A + B\cdot t^2}$ и $\boldsymbol{y = C\cdot t^2}$, где $\text{A} = \mathbf{2}$ м, $\text{B} = \mathbf{1}\ \text{м/с}^2$, $\text{C} = \mathbf{3}\ \text{м/с}^2$. Найти: 1) уравнение траектории движения точки; 2) зависимость вектора скорости от времени $\boldsymbol{\vec{v}(t)}$ и модуль скорости $\boldsymbol{v}$ в момент времени $\boldsymbol{t_1 = 2}$ с; 3) зависимость вектора ускорения от времени $\boldsymbol{\vec{a}(t)}$; 4) путь $\boldsymbol{S}$, пройденный точкой за $\boldsymbol{t_2 = 10}$ с после начала движения.

Решение

1) Определим уравнение траектории движения точки.

Запишем зависимости $x(t)$ и $y(t)$ с учетом значений A, B и C:

$$\begin{cases} x = 2 + 1\cdot t^2 \\ y = 3\cdot t^2 \end{cases}$$

Из первого уравнения выразим t^2 и, подставив во второе уравнение, получим уравнение траектории точки

$$t^2 = x - 2$$

$$y = 3\cdot(x - 2) = 3\cdot x - 6\ ,$$

то есть траектория движения точки – прямая линия.

2) Вектор скорости

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j},$$

где $v_x = \frac{dx}{dt}, v_y = \frac{dy}{dt}$ – проекции вектора скорости на оси координат X и Y.

В нашем случае

$$v_x = 2t, \qquad v_y = 6t,$$

и зависимость вектора скорости от времени имеет вид

$$\vec{v} = 2t\vec{\imath} + 6t\vec{\jmath}\,.$$

Модуль вектора скорости равен

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(2t)^2 + (6t)^2} = \sqrt{40t^2} = 2t\sqrt{10}.$$

Скорость точки в момент времени $t_1 = 2\ с$ равна:

$$v = 2 \cdot 2\sqrt{10} = 12{,}65\,\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

3) Вектор ускорения

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath},$$

где $a_x = \frac{dv_x}{dt}$ и $a_y = \frac{dv_y}{dt}$ – проекции вектора ускорения на оси координат X и Y.

В нашем случае в момент времени $t_1 = 2\ с$

$$a_x = 2, \qquad a_y = 6,$$

и зависимость вектора ускорения от времени имеет вид:

$$\vec{a} = 2\vec{\imath} + 6\vec{\jmath}\,.$$

Модуль ускорения равен:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(2)^2 + (6)^2} = \sqrt{40} = 6{,}32\ \text{м/с}^2.$$

4) Путь, пройденный точкой за $t_2 = 10$ с после начала движения

$$\boldsymbol{S = \int_0^{t_2} v(t)dt = \int_0^{t_2} 2\sqrt{10}\,t \cdot dt = 2\sqrt{10} \cdot \frac{1}{2}t^2\Big|_0^{t_2} = \sqrt{10} \cdot t_2^2 = 316}\ \text{м}.$$

Задача 1.1.3

Тело брошено с балкона вертикально вверх со скоростью $v_0 = 10$ м/с. Высота балкона над поверхностью Земли $h = 12{,}5$ м. Написать уравнение движения тела $y(t)$ и определить среднюю скорость движения тела $\langle v \rangle$ с момента бросания до момента падения на землю.

Решение

Задачу можно решить координатным методом. Инерциальную систему отсчета удобно связать с поверхностью Земли, а ось OY направить вертикально вверх (рис. 1).

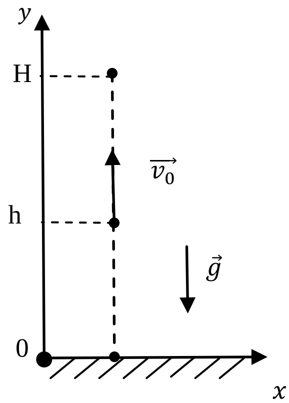

Рис. 1

Координата тела y изменяется по закону:

$$y = y_0 + v_{0\,y}t + \frac{a_y t^2}{2},$$

где y_0 – начальная координата тела, $v_{0\,y}$ – проекция вектора $\vec{v}_0$ на ось движения OY, а $a_y = -g$ – проекция вектора ускорения свободного падения $\vec{g}$ на ось OY.

В выбранной системе отсчета уравнение движения тела имеет вид

$$y = h + v_0 t - \frac{g\,t^2}{2}.$$

Подставим значения величин и получим, что координата тела изменяется по закону

$$y = 12{,}5 + 10t - \frac{10t^2}{2} = 12{,}5 + 10t - 5t^2.$$

По определению средняя скорость движения тела:

$$\langle v \rangle = \frac{\Delta S}{\Delta t},$$

где $\Delta S -$ путь, пройденный телом за интервал времени Δt.

Промежуток времени Δt найдем исходя из того, что координата тела в момент приземления $y = 0$:

$$y(\Delta t) = 12{,}5 + 10 \cdot \Delta t - 5 \cdot \Delta t^2 = 0.$$

Решим квадратное уравнение относительно времени Δt и получим, что корни уравнения

$$\Delta t = \frac{10 \mp \sqrt{100 - 4 \cdot 5 \cdot (-12{,}5)}}{2 \cdot 5} = \frac{10 \mp 18{,}7}{10} = \begin{cases} -0{,}9 \text{ с} \\ 2{,}9 \text{ с} \end{cases}.$$

Интервал времени $\Delta t = -0{,}9$ (с отрицательным знаком) не имеет смысла.

Определим путь ΔS, пройденный телом за все время движения тела. Скорость тела есть первая производная координаты по времени

$$v_y = \frac{dy}{dt} = v_0 - gt = 10 - 10 \cdot t.$$

Определим момент времени τ, когда тело окажется на максимальной высоте. В этот момент проекция вектора скорости на ось OY равна нулю

$$v_y = 0, \text{ то есть}$$

$$10 - 10\tau = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \tau = 1 \text{ с}.$$

В момент времени $\tau = 1$ с. точка окажется на высоте

$$H = y(\tau) = 12{,}5 + 10 \cdot 1 - 5 \cdot 1^2 = 17{,}5 \text{ м}.$$

Весь путь, пройденный телом за время $\Delta t = 2{,}9$ с. равен

$$\Delta S = H - h + H = 2H - h = 2 \cdot 17{,}5 - 12{,}5 = 22{,}5 \text{ м}$$

Средняя скорость движения тела равна:

$$\langle v \rangle = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{22{,}5}{2{,}9} = 7{,}6 \text{ с}.$$

Задача 1.1.4

С башни высотой h_0 = 25 м брошен камень со скоростью v_0 = 15 м/с под углом $\alpha = 30^{\circ}$ к горизонту. Какое время t камень будет в движении? На каком расстоянии S от основания башни он упадет на землю? С какой скоростью v_k он упадет на землю? Сопротивление воздуха не учитывать.

Решение

Решим задачу координатным методом. Систему отсчета выбираем так, чтобы ее начало совпало с точкой бросания, а оси координат были направлены вдоль поверхности Земли и по нормали к ней (рис. 2) Изобразим траекторию движения тела, его начальную скорость, угол бросания и горизонтальное перемещение тела S. Движение тела, брошенного под углом к горизонту, можно представить как результат сложения двух прямолинейных движений: одного вдоль поверхности Земли (оно будет равномерным) и второго – перпендикулярно поверхности Земли (в данном случае это движение тела, брошенного вертикально вверх).

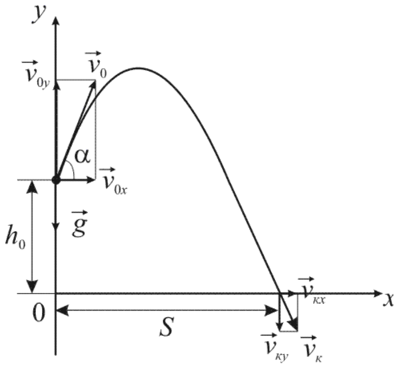

Рис. 2

Запишем кинематические характеристики:

$$x_0 = 0, \qquad y_0 = h_0$$

$$v_{0x} = v_0 \cos\alpha, \quad v_{0y} = v_0 \sin\alpha$$

$$a_x = 0, \qquad a_y = -g$$

Составим уравнения движения тела для двух направлений:

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2} \qquad \Rightarrow \qquad x = v_0 \cos\alpha \cdot t$$

$$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{a_y t^2}{2} \qquad \Rightarrow \qquad y = h_0 + v_0 \sin\alpha\, t - \frac{gt^2}{2}$$

Найдем время полета тела t. В момент приземления тела на землю его координата $y = 0$:

$$\frac{gt^2}{2} - v_0 \sin\alpha \cdot t - h_0 = 0.$$

Решая квадратное уравнение относительно времени t и учтя, что должно выполняться соотношение $t > 0$, получим

$$t = \frac{v_0 \sin\alpha + \sqrt{{v_0}^2 sin^2\alpha + 2gh_0}}{g} = 3{,}15 \text{ с.}$$

В этот момент координата x равна дальности полета тела

$$x = S$$

$$S = v_0 \cos\alpha \cdot \frac{v_0 \sin\alpha + \sqrt{{v_0}^2 sin^2\alpha + 2gh_0}}{g} = 40{,}9 \text{ м.}$$

Скорость тела в момент падения тела равна

$$v_k = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2},$$

где $v_x = v_{0x} = v_0 \cos\alpha$ и $v_y = v_0 \sin\alpha - gt$ – проекции вектора скорости на оси движения, а t – время полета камня.

Подставив проекции v_x и v_y в формулу для определения скорости, получим

$$v_k = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2} = \sqrt{(v_0 \cos\alpha)^2 + (v_0 \sin\alpha - gt)^2}.$$

Подставив значение времени t, окончательно имеем

$$v_k = \sqrt{{v_0}^2 + 2gh_0} = 26{,}7 \text{ м/с.}$$

1.2. Кинематика вращательного движения

Задача 1.2.1

Тело вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$**,** где, $A = 10\, рад, B = 20\ рад/с\,, C = -2\ рад/с^2\,, D = 1\, рад/с^3$. Для момента времени $t_1 = 1 с$ определить угловой путь, пройденный телом, угловую скорость и угловое ускорение диска. Найти для точки, находящейся на расстоянии $r = 0{,}1$ м от оси вращения полное ускорение в момент времени, когда тангенциальное ускорение равно нулю.

Решение

Угловой путь равен разности углов поворота при условии, что вращение происходит в одном направлении:

$$\Delta\varphi(t) = \varphi(t) - \varphi(0)$$

$$\Delta\varphi(t) = Bt + Ct^2 + Dt^3.$$

Угловая скорость в момент времени t определяется по формуле

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d}{dt}(A + Bt + Ct^2 + Dt^3) = B + 2Ct + 3Dt^2.$$

Угловое ускорение определяется по формуле

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt}(B + 2Ct + 3Dt^2) = 2C + 6Dt.$$

Найдем для точки, находящейся на расстоянии r от оси вращения диска, полное ускорение, когда тангенциальное ускорение равно нулю. Полное ускорение точки, движущейся по окружности, равно геометрической сумме тангенциальной составляющей ускорения $\vec{a}_\tau$, направленной по касательной к траектории, и нормальной составляющей ускорения, $\vec{a}_\tau$, направленной к центру кривизны траектории (рис. 3).

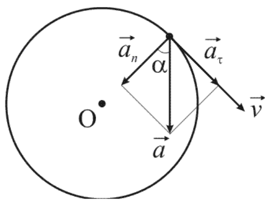

Рис. 3

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau$$

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}.$$

Так как тангенциальное ускорение равно нулю, то полное ускорение точки, находящейся на расстоянии r от оси вращения в этот момент времени t_2 равно только нормальному ускорению:

$$a(t_2) = \sqrt{a_n^2} = a_n(t_2) = \omega^2 r = (B + 2Ct_2 + 3Dt^2)^2 r.$$

Найдем момент времени t_2, когда $a_\tau(t_2) = 0$. По определению тангенциальное ускорение равно $a_\tau = \varepsilon \cdot r$. В момент времени t_2

$$a_\tau(t_2) = \varepsilon(t_2) r = (2C + 6Dt_2) r = 0$$

$$t_2 = -\frac{C}{3D}.$$

Подставим полученное время t_2 в выражение для определения полного ускорения и получим

$$a(t_2) = \left(B + 2C\left(-\frac{C}{3D}\right) + 3D\left(-\frac{C}{3D}\right)^2\right)r = \left(B - \frac{1}{3}\frac{C^2}{D}\right)r = 1{,}87\ \text{м/с}^2.$$

Задача 1.2.2

Твёрдое тело вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = 6t - 2t^3$(рад).Найти: 1) среднюю угловую скорость $< \omega >$ как функцию от t; 2) среднее значение углового ускорения в промежутке времени от 0 до остановки; 3) угловое ускорение в момент остановки; 4) полное ускорение точки, находящейся на расстоянии $r = 0{,}2$ м от оси вращения в момент времени $t = 0{,}5\ c$.

Решение

По определению средняя угловая скорость вращения тела:

$$\langle\omega\rangle = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t - t_0}.$$

По условию задачи $t_0 = 0$, $\varphi(t) = 6\text{t} - 2\text{t}^3$ и $\varphi(0) = 0$.
Поэтому

$$\langle\omega\rangle = \frac{6t - 2t^2 - 0}{t} = 6 - 2t.$$

По определению среднее угловое ускорение

$$\langle\varepsilon\rangle = \frac{\Delta\omega}{\Delta t},$$

где $\Delta\omega$ − изменение угловой скорости за интервал времени $\Delta t = t_{ост} - t_0$.

Момент остановки тела $t_{\text{ост}}$ найдем из условия, что в момент остановки тела его угловая скорость $\omega = 0$. По определению

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = 6 - 6t^2 = 0$$

$$t_{\text{ост}} = 1\ c.$$

Среднее угловое ускорение тела

$$\langle\varepsilon\rangle = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_{\text{ост}} - \omega(0)}{t_{\text{ост}} - 0} = \frac{0 - 6}{1} = -6\ \text{рад/с}^2.$$

По определению угловое ускорение

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = -12t.$$

В момент остановки угловое ускорение тела равно

$$\varepsilon = -12 \text{ рад/с}^2.$$

Полное ускорение точки, движущейся по окружности, равно геометрической сумме тангенциальной составляющей ускорения $\vec{a}_\tau$, направленной по касательной к траектории, и нормальной составляющей ускорения $\vec{a}_n$, направленной к центру кривизны траектории. Так как векторы $\vec{a}_n$ и $\vec{a}_\tau$ взаимоперпендикулярны, то модуль ускорения

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}.$$

Тангенциальная и нормальная составляющие ускорения выражаются формулами

$$a_\tau = \varepsilon r$$

$$a_n = \omega^2 r.$$

Тогда модуль полного ускорения точки равен

$$a = \sqrt{(\varepsilon r)^2 + (\omega^2 r)^2}.$$

Подставляя значения ε, ω и r, получим

$$a = \sqrt{(-12 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}2)^2 + ((6 - 6 \cdot 0{,}5^2) \cdot 0{,}2)^2} = 4{,}2 \text{ м/с}^2.$$

Задача 1.2.3

Колесо вращается с постоянным угловым ускорением ε вокруг неподвижной оси. За время t_0 оно изменило свою скорость от ω_0=31,4 рад/с до ω_1=69,1 рад/с, сделав 240 оборотов. Найти момент времени t_0 и угловое ускорение колеса ε.

Решение

Колесо вращается равноускоренное, следовательно, угловая скорость возрастает равномерно по закону:

$$\omega(t) = \omega_0 + \varepsilon t.$$

В этом случае угол поворота колеса изменяется по закону:

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}.$$

По условию задачи колесо сделало N оборотов. Значит, оно прошло угловой путь равный

$$\Delta\varphi = \varphi(t_0) - \varphi_0 = N \cdot 2\pi.$$

Угловое ускорение ε и время t_0 найдем путем решения системы уравнений:

$$\begin{cases} \Delta\varphi = N \cdot 2\pi = \omega_0 t_0 + \dfrac{\varepsilon t_0^2}{2} \\ \omega_1 = \omega_0 + \varepsilon t_0 \end{cases}.$$

Угловое ускорение возьмем с положительным знаком, так как по условию задачи скорость вращения колеса возрастает. Тогда

$$t_0 = \frac{4 \cdot \pi \cdot T}{\omega_1 + \omega_0} = 30\ c$$

$$\varepsilon = \frac{\omega_1 - \omega_0}{t_0} = 1{,}26\ \text{рад/с}^2.$$

Задача 1.2.4

Диск вращается вокруг неподвижной оси так, что зависимость угла поворота радиуса диска от времени задается уравнением $\boldsymbol{\varphi = At^2}$, где А = 0,1 рад/с^2. Определить полное ускорение точки на ободе диска к концу второй секунды после начала движения, если линейная скорость этой точки в этот момент $\boldsymbol{v}$ = 0,4 м/с.

Решение

Полное ускорение точки на ободе диска:

$$\boldsymbol{a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}},$$

где $\boldsymbol{a_n = \frac{v^2}{R}}$ и $\boldsymbol{a_\tau = \varepsilon R}$ − нормальное ускорение и тангенциальное ускорение точки на ободе диска.

Определим угловую скорость и угловое ускорение диска. По определению угловая скорость тела равна первой производной от угла поворота по времени:

$$\boldsymbol{\omega = \frac{d\varphi}{dt} = 2At},$$

а угловое ускорение тела − первая производная от угловой скорости по времени

$$\boldsymbol{\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 2A}.$$

Линейная скорость точки на ободе диска $\boldsymbol{v}$ и угловая скорость диска $\boldsymbol{\omega}$ связаны соотношением:

$$\boldsymbol{v = \omega R,}$$

где $\boldsymbol{R}$ − радиус диска.

Тогда радиус диска равен

$$\boldsymbol{R = \frac{v}{\omega} = \frac{v}{2At}}.$$

Следовательно, нормальное и тангенциальное ускорения точки равны

$$\boldsymbol{a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{v^2}{v} \cdot 2At = 2Avt,}$$

$$\boldsymbol{a_\tau = \varepsilon R = 2A \cdot \frac{v}{2At} = \frac{v}{t}}.$$

А полное ускорение точки на ободе диска

$$\boldsymbol{a = \frac{v}{t}\sqrt{1 + (2At^2)^2} = 0,26}\ \text{м/с}^{\boldsymbol{2}}.$$

Задача 1.2.5

Точка движется по окружности так, что зависимость координаты от времени дается уравнением $x = A - Bt + Ct^2$, где B = 2 м/с и C=1 м/с^2. Найти линейную скорость точки v, ее тангенциальное ускорение a_τ, нормальное ускорение a_n и полное ускорение a через t = 3 с после начала движения, если известно, что при $t' = 2$ с нормальное ускорение точки $a'_n = 0{,}5$ м/с^2.

Решение

Линейная скорость точки

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d(A - Bt + Ct^2)}{dt} = -B + 2Ct.$$

В момент времени $t = 3c$ линейная скорость точки равна

$$v = -B + 2Ct = -2 + 2 \cdot 1 \cdot 3 = 4\ \text{м/с}.$$

Тангенциальное ускорение

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d(-B+2Ct)}{dt} = 2C = 2\,\text{м/с}^2.$$

Через $t' = 2$ с точка будет иметь линейную скорость

$$v' = v(2) = -B + 2Ct' = -2 + 2 \cdot 1 \cdot 2 = 2\,\text{м/с}.$$

Радиус окружности можно найти следующим образом:

$$a'_n = \frac{v'^2}{R} \qquad \Rightarrow \qquad R = \frac{v'^2}{a'_n}.$$

Тогда нормальное ускорение через t = 3 с после начала движения равно

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{v^2}{v'^2} \cdot a'_n.$$

Подставим численные значения

$$a_n = \frac{4^2}{2^2} \cdot 0{,}5 = 2\,\text{м/с}^2.$$

Полное ускорение:

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2{,}8\,\text{м/с}^2.$$

2. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ И АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Основные формулы

- Импульс материальной точки (тела)

$$\vec{p} = m\vec{v},$$

где m – масса материальной точки, $\vec{v}$ – ее скорость.

- Основное уравнение динамики поступательного движения тела (второй закон Ньютона)

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \qquad \text{или} \qquad m\vec{a} = \vec{F},$$

где $\vec{a}$ – ускорение, $\vec{F}$ − векторная сумма сил, действующих на тело

$$\vec{F} = \sum \vec{F}_i \,.$$

- Координатная форма второго закона Ньютона

$$\begin{cases} ma_x = \sum F_{xi} \\ ma_y = \sum F_{yi}, \\ ma_z = \sum F_{zi} \end{cases}$$

где a_x, a_y, a_z – проекции вектора ускорения, а F_{xi}, F_{yi}, F_{zi} – проекции векторов сил на оси координат.

- Сила гравитационного взаимодействия

$$F_{\text{гр}} = G\frac{m_1 m_2}{r^2},$$

где G – гравитационная постоянная, m_1 и m_2 – массы взаимодействующих тел, r – расстояние между ними.

- Сила тяжести на Земле

$$F_{\text{т}} = mg,$$

где $g = 9{,}8\ \text{м/с}^2$ – ускорение свободного падения вблизи поверхности Земли.

- Сила упругости

$$F_{\text{упр}} = -kx,$$

где k – коэффициент упругости (жесткости пружины), x – отклонение тела от положения равновесия (деформация).

- Сила трения скольжения

$$F_{\text{тр}} = -\mu N,$$

где μ – коэффициент трения скольжения, N – сила нормального давления.

- Момент силы относительно центра вращения

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{\mathrm{F}}],$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор, проведенный из центра вращения в точку приложения силы, квадратными скобками обозначено векторное произведение двух векторов.

- Момент силы относительно оси вращения Z

$$M_z = \mathrm{F}_{\perp} l.$$

где $\mathrm{F}_{\perp}$ − проекция силы $\vec{F}$ на плоскость, перпендикулярную оси вращения Z, l – плечо силы $\vec{F}$ (кратчайшее расстояние от оси вращения до линии действия силы).

- Момент инерции материальной точки относительно оси вращения

$$I = mr^2$$

где r – расстояние от точки до оси вращения.

- Момент инерции твердого тела относительно произвольной оси вращения

$$I = \int r^2\, dm$$

где r – расстояние элемента тела массы dm до оси вращения.

- Моменты инерции некоторых твердых тел правильной геометрической формы относительно оси вращения, проходящей через центр симметрии тела:

Тонкостенный цилиндр (кольцо, обруч) $I = mR^2$,

Сплошной цилиндр (диск) $I = \frac{1}{2} mR^2$,

Тонкостенная сфера $I = \frac{2}{3} mR^2$,

Шар $I = \frac{2}{5} mR^2$,

где R – радиусы соответствующих тел (кольца, цилиндра, сферы, шара).

- Момент инерции однородного тонкого стержня относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно стержню

$$I = \frac{1}{12} ml^2,$$

где l – длина стержня.

- Теорема Штейнера

$$I = I_0 + md^2,$$

где I – момент инерции тела относительно произвольной оси, I_0 – момент инерции относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс тела, d − расстояние между осями.

- Момент импульса материальной точки относительно центра

$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}],$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор, проведенный из центра к движущейся материальной точке, квадратными скобками обозначено векторное произведение двух векторов.

- Момент импульса материальной точки относительно оси вращения Z

$$L_z = p_\perp l.$$

где $p_\perp$ − проекция импульса $\vec{p}$ на плоскость, перпендикулярную оси вращения Z, l – плечо импульса $\vec{p}$ (кратчайшее расстояние от оси вращения до линии движения точки).

- Момент импульса твердого тела, вращающегося относительно оси Z

$$L = I\omega,$$

где ω − угловая скорость вращения твердого тела, I − момент инерции тела относительно оси вращения.

- Основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M},$$

где $\vec{M}$ – результирующий момент всех внешних сил, действующих на тело

$$\vec{M} = \sum \vec{M}_i .$$

- Основное уравнение динамики вращательного движения относительно оси вращения Z

$$I\varepsilon = M_z,$$

где ε – угловое ускорение тела, M_z – проекция момента сил на ось Z.

2.1. Динамика поступательного движения

Задача 2.1.1

Брусок массой $m = 5$ кг тянут по горизонтальной поверхности, прикладывая силу $F = 20$ Н под углом $\alpha = 30°$ к горизонту. При этом брусок за время $\tau = 2$ с изменил свою скорость от $v_0 = 2{,}4$ м/с до $v = 7{,}8$ м/с, двигаясь равноускоренно. Найти коэффициент трения μ бруска о поверхность.

Решение

Силы, действующие на брусок, изображены на рисунке (рис. 4).

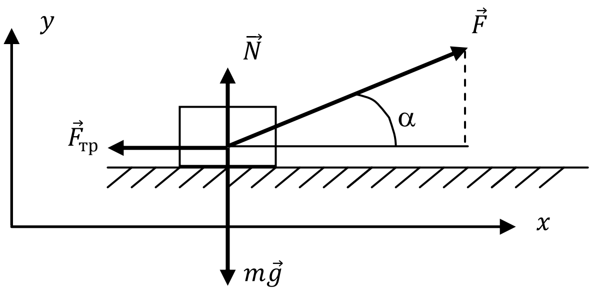

Рис. 4

Запишем для бруска второй закон Ньютона в векторной форме:

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{F}_{тр} + \vec{N} + m\vec{g}$$

Запишем второй закон Ньютона в проекциях на горизонтальное и вертикальное направления:

$$\begin{cases} ma = F\ \cos\alpha - F\text{тр} \\ 0 = \mathrm{N} - \mathrm{mg} + \mathrm{F}\sin\alpha \end{cases}$$

Так как $F_{тр} = \mu \cdot \mathrm{N}$, а ускорение тела $a = \frac{v - v_0}{t}$, то получим систему уравнений

$$\begin{cases} m\dfrac{v - v_0}{t} = F\cos\alpha - \mu N \\ N + F\sin\alpha - mg = 0 \end{cases}.$$

Решая эту систему уравнений относительно μ, найдем искомую величину:

$$\mu = \frac{F\cos\alpha - m\dfrac{v - v_0}{t}}{mg - F\sin\alpha} = \frac{20 \cdot \cos 30° - 5 \cdot \dfrac{7.8 - 2.4}{2}}{5 \cdot 9.8 - 20\sin 30°} = 0{,}1.$$

Задача 2.1.2

Через блок перекинута нить, на концах которой висят два груза с одинаковыми массами *M*. Одновременно на каждый из грузов кладут по перегрузку: справа – массой *3m*, слева – массой *m*. Определить ускорение системы, силу натяжения нити и силу давления перегрузков на основные грузы.

Решение

На рисунке изображены силы, действующие на основные грузы (рис. 5).

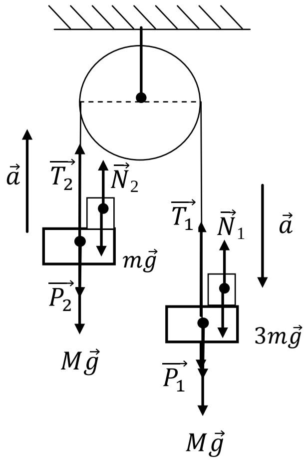

Рис. 5

Проектируя уравнения движения грузов (второй закон Ньютона) на вертикальное направление, получаем

$$Ma = Mg - P_1 - T_1$$

$$Ma = -Mg - P_2 + T_2,$$

где P_1 и P_2 – силы давления перегрузков на основные грузы, T – сила натяжения нити.

Рассматривая аналогично силы, действующие на перегрузки, получаем уравнения их движения:

$$3ma = 3mg - N_1$$

$$ma = N_2 - mg,$$

где N_1 и N_2 – силы реакции, действующие на перегрузки со стороны основных грузов.

В силу третьего закона Ньютона

$$T_1 = T_2, \qquad P_1 = N_1 \qquad \text{и} \qquad P_2 = N_2.$$

Получается система уравнений:

$$\begin{cases} Ma = Mg - P_1 - T \\ Ma = -Mg - P_2 + T \\ ma = N_2 - mg \\ 3ma = 3mg - N_1 \end{cases}.$$

Решая ее относительно ускорения, имеем

$$a = \frac{mg}{2m + M}.$$

Используя полученный результат, находим силу натяжения нити

$$T = \frac{(M + m)(M + 3m)}{2m + M}$$

и силы давления перегрузков на основные грузы

$$P_1 = \frac{3(M + m)m}{2m + M} g,$$

$$P_2 = \frac{(M + m)m}{2m + M} g.$$

Задача 2.1.3

Два соприкасающихся бруска скользят по наклонной плоскости. Масса верхнего бруска $\boldsymbol{m_1 = 2}$ кг, нижнего $\boldsymbol{m_2 = 3}$ кг. Коэффициент трения между плоскостью и верхним бруском $\boldsymbol{\mu_1 = 0,1}$, между плоскостью и нижним бруском $\boldsymbol{\mu_2 = 0,3}$. Угол при основании наклонной плоскости $\boldsymbol{\alpha = 45°}$. Определить ускорение, с которым движутся бруски, и силу, с которой бруски давят друг на друга.

Решение

Очевидно, что в силу соотношения $\mu_2 > \mu_1$ верхний брусок соскальзывал бы с большим ускорением, чем нижний, если бы они двигались отдельно друг от друга. По этой причине верхний брусок будет давить на нижний, и они будут двигаться, как одно целое.

Изобразим на рисунке силы, действующие на каждый брусок, и запишем уравнения их движения в проекциях на оси X и Y (рис. 6).

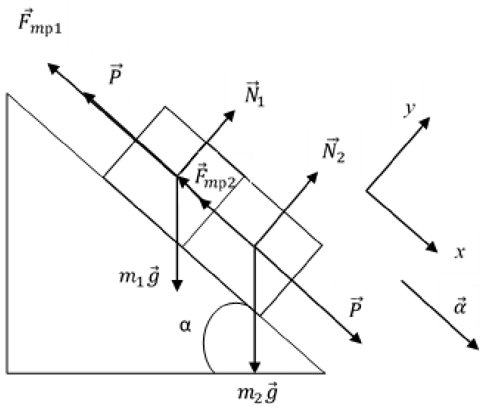

Рис. 6

$$m_1 a = m_1 g \sin\alpha - F_{тр1} - P_1$$

$$N_1 - m_1 g \cos\alpha = 0$$

$$m_2 a = m_2 g \sin\alpha - F_{тр1} + P$$

$$N_2 - m_2 g \cos\alpha = 0\,.$$

Дополним эту систему условиями пропорциональности сил трения и сил нормальной реакции опоры:

$$\mathrm{F}_{тр1} = \mu_1 \mathrm{N}_1$$

$$\mathrm{F}_{тр2} = \mu_2 \mathrm{N}_2\ .$$

Подставив эти выражения, находим ускорение системы:

$$a = g(\sin\alpha - \frac{\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2}{m_1 + m_2}\cos\alpha) = 5{,}4\ \text{м/с}^2.$$

Используя полученный результат, находим силу взаимодействия грузов при их движении вдоль плоскости:

$$P = \frac{m_1 m_2 \cos\alpha\,(\mu_2 - \mu_2)}{m_1 + m_2} g = 1{,}66\ \text{Н}.$$

Задача 2.1.4

По горизонтальной поверхности движутся два тела (1 и 2) одинаковой массы $M = 2$ кг, соединенные нитью между собой и с телом 3 массы $m = 1{,}5$ кг. Нити, связывающие тела, нерастяжимы и невесомы.

Коэффициенты трения между телами 1 и 2 и поверхностью $\mu_1 = 0{,}1$ и $\mu_2 = 0{,}15$. Найти: 1) ускорение, с которым движутся тела; 2) натяжение нити между телами 1 и 2; 3) натяжение нити, на которой висит тело массы m; 4) давление на ось блока.

Решение

Изобразим силы, действующие на каждое тело (рис. 7).

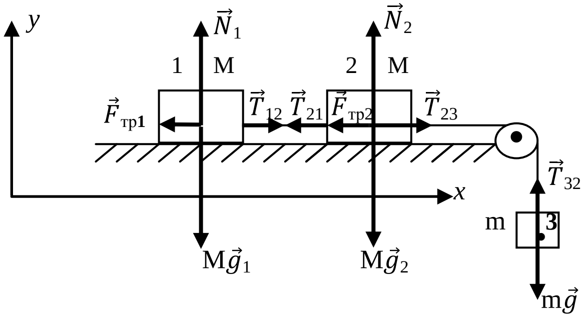

Рис. 7

Запишем второй закон Ньютона для каждого тела

$$\begin{cases} M\vec{a}_1 = \vec{T}_{12} + \vec{F}_{тр1} + \vec{N}_1 + M\vec{g} \\ M\vec{a}_2 = \vec{T}_{23} + \vec{T}_{21} + \vec{N}_2 + M\vec{g} + \vec{F}_{тр2}. \\ m\vec{a}_3 = m\vec{g} + \vec{T}_{32} \end{cases}$$

Так как нити и блок невесомы, то по третьему закону Ньютона

$$T_{12} = T_{21} = T_1,$$

$$T_{23} = T_{32} = T_2.$$

Так как нити нерастяжимы, то

$$a_1 = a_2 = a_3 = a.$$

Запишем уравнения движения тел в проекциях на оси X и Y:

$$\begin{cases} Ma = T_1 - F_{тр1} \\ Ma = T_2 - T_1 - F_{тр2} \\ 0 = N_1 - Mg \\ 0 = N_2 - Mg \\ T_2 - mg = -mg \end{cases}.$$

Дополним эту систему условиями пропорциональности сил трения и сил нормальной реакции

$$F_{\text{тр}1} = \mu_1 N_1$$

$$F_{\text{тр}2} = \mu_2 N_2.$$

Тогда система трех уравнений примет вид

$$\begin{cases} Ma = T_1 - \mu_1 Mg \\ Ma = T_2 - T_1 - \mu_2 Mg \\ T_2 - mg = -ma \end{cases}.$$

После сложения уравнений получим выражение для определения ускорения системы трех тел

$$a = g\frac{m - (\mu_1 + \mu_2)M}{2M + m} = 9{,}8 \cdot \frac{1{,}5 - (0{,}1 + 0{,}15) \cdot 2}{4 + 1{,}5} = 1{,}8\ \text{м/с}^2.$$

Натяжение нити между телами 1 и 2

$$T_1 = M(a + \mu_1 g) = 2(1{,}8 + 0{,}1 \cdot 9{,}8) = 5{,}6H.$$

Натяжение нити между телами 2 и 3

$$T_2 = m(g - a) = 1{,}5(9{,}8 - 1{,}8) = 12H.$$

Для нахождения силы давления на ось блока изобразим силы, действующие на ось (рис. 8)

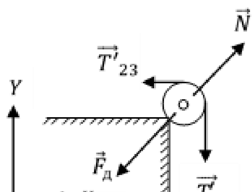

Рис. 8

Учтем, что

$$\vec{T}'_{23} + \vec{T}'_{32} + \vec{N}_0 = 0,$$

где $\vec{T}'_{23}$, $\vec{T}'_{32}$ – силы, действующие на блок со стороны нитей, а $\vec{N}_0$ – сила давления оси на блок, равная по модулю и противоположно направленная силе давления $\vec{F}_{\text{давл}}$ блока на ось блока (по третьему закону Ньютона).

Поскольку

$$T'_{23} = T_{23},\ T'_{32} = T_{32},$$

но

$$T_{23} = T_{23} = T_2,$$

то в проекциях на оси X и Y получим:

$$\begin{cases} -T_2 + N_0 \cos 45° \\ -T_2 + N_0 \sin 45° \end{cases}.$$

Откуда $N_0 = \sqrt{2}T_2$, а сила давления на ось блока равна

$$F_{\text{давл}} = N_0 = \sqrt{2} \cdot 12 = 16{,}8H.$$

2.2. Динамика вращательного движения

Задача 2.2.1

На шкив в виде обруча массы $\boldsymbol{m = 0,5}$ кг и радиуса $\boldsymbol{R = 0,2}$ м плотно намотана легкая нить, к концу которой прикреплен груз массы $\boldsymbol{m_{\text{г}} = 0,2}$ кг. В некоторый момент времени система пришла в движение. Пренебрегая трением в оси шкива, найти зависимость от времени модуля угловой скорости. Чему будет равна угловая скорость вращения шкива через $\boldsymbol{t = 4}$ с после начала движения?

Решение

Сделаем рисунок, на котором обозначим действующие силы (рис. 9).

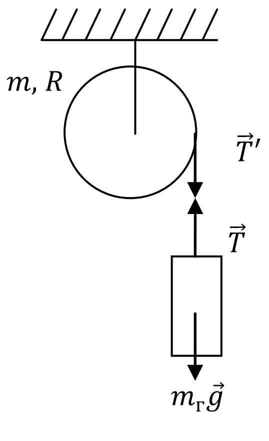

Рис. 9

Запишем основное уравнение динамики поступательного движения (второй закон Ньютона) для груза и основное уравнение динамики вращательного движения для шкива. Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} m_г\vec{g} + \vec{T} = m_г\vec{a} \\ \vec{M} = I\vec{\varepsilon} \end{cases}.$$

Здесь $m_г\vec{g}$ и $\vec{T}$ – это силы тяжести и натяжения нити, действующие на груз, $\vec{a}$ – ускорение груза, I и $\vec{\varepsilon}$ – момент инерции и угловое ускорение шкива, $\vec{M}$ – момент сил, приводящий шкив во вращение. Вращающий момент создается силой натяжения нити T', приложенной к ободу шкива с плечом, равным радиусу шкива R. Учтем, что согласно третьему закону Ньютона

$$T = T'.$$

Тогда модуль вращающего момента

$$M = T'R = TR.$$

Шкив представляет собой обруч, поэтому его момент инерции

$$I = mR^2.$$

Кроме того, так как линейное ускорение груза равно тангенциальному ускорению точек шкива, находящихся на его поверхности, то линейное и угловое ускорения связаны соотношением

$$a = \varepsilon R.$$

Спроектируем первое уравнение системы на ось движения (вниз), а во второе подставим приведенные выше выражения и сократим на R. После этого сложим два уравнения:

$$\begin{cases} m_г g - T = m_г a \\ TR = mR^2\varepsilon \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_г g - T = m_г R\varepsilon \\ T = mR\varepsilon \end{cases}$$

$$m_г g = (m_г + m)R\varepsilon.$$

Выразим угловое ускорение и воспользуемся связью между угловой скоростью и ускорением при равнопеременном вращательном движении

$$\varepsilon = \frac{m_г g}{(m_г + m)R} = \frac{g}{R(1 + \frac{m}{m_г})}$$

$$\omega(t) = \omega_0 + \varepsilon t = \frac{gt}{R(1 + \frac{m}{m_г})}.$$

Подставим числовые значения:

$$\omega = \frac{9{,}8 \cdot 4}{0{,}2(1 + \frac{0{,}5}{0{,}2})} = 56\ \text{с}^{-1}.$$

Задача 2.2.2

Через блок, имеющий вид однородного сплошного цилиндра массы $m = 400$ г, перекинута нить, к концам которой подвешены грузы с массами $m_1 = 100$ г и $m_2 = 400$ г. Скольжения нити и трения в оси цилиндра нет. Найти ускорение, с которым будут двигаться грузы, и отношение натяжений T_2/T_1 вертикальных участков нитей в процессе движения.

Решение

На рис. 10 показаны силы, действующие в системе.

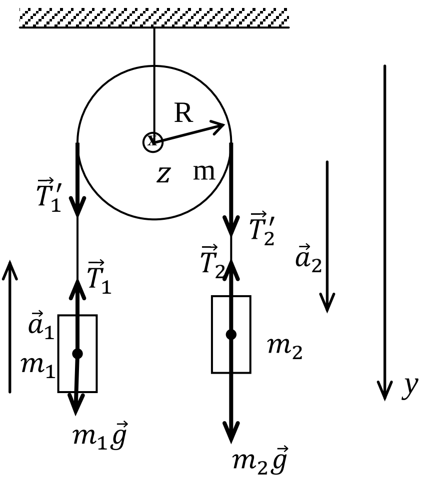

Рис. 10

При этом блок вращается вокруг неподвижной оси $\boldsymbol{z}$, а грузы движутся поступательно вдоль оси $\boldsymbol{y}$. Так как второй груз имеет большую массу, то он опускается, а первый поднимается. Составим для грузов и блока уравнения согласно основным законам поступательного и вращательного движений:

$$\begin{cases} \boldsymbol{m_1\vec{g} + \vec{T}_1 = m_1\vec{a}_1} \\ \boldsymbol{m_2\vec{g} + \vec{T}_2 = m_2\vec{a}_2}. \\ \boldsymbol{\vec{M}_1 + \vec{M}_2 = I\vec{\varepsilon}} \end{cases}$$

$\boldsymbol{\vec{M}_1}$ и $\boldsymbol{\vec{M}_2}$ – это моменты сил натяжения $\vec{\mathbf{T}}'_1$ и $\vec{\mathbf{T}}'_2$, приложенных к блоку. Первый момент будет закручивать блок против часовой стрелки, а второй в обратном направлении, при этом общее вращение будет осуществляться по часовой стрелке. При переходе к проекции на ось вращения необходимо взять эти моменты с разными знаками. Для первого и второго уравнений также возьмем проекции на оси движений. Тогда система примет вид:

$$\begin{cases} T_1 - m_1 g = m_1 a_1 \\ m_2 g - T_2 = m_2 a_2. \\ M_2 - M_1 = I\varepsilon \end{cases}$$

Выразим моменты сил натяжения с учетом третьего закона Ньютона ($\boldsymbol{T'_1 = T_1}$, $\boldsymbol{T'_2 = T_2}$):

$$\boldsymbol{M_1 = T'_1 R = T_1 R}$$

$$\boldsymbol{M_2 = T'_2 R = T_2 R}.$$

Подставим выражение для момента инерции блока, имеющего форму сплошного однородного цилиндра

$$\boldsymbol{I = \frac{1}{2} m R^2}.$$

Учтем, что нить нерастяжима и грузы движутся с одинаковым ускорением

$$\boldsymbol{a_1 = a_2 = a},$$

а также запишем связь между линейным и угловым ускорениями:

$$\boldsymbol{\varepsilon = \frac{a}{R}}.$$

Подставив все в систему, получаем

$$\begin{cases} T_1 - m_1 g = m_1 a \\ m_2 g - T_2 = m_2 a \\ (T_2 - T_1)R = \dfrac{1}{2} m R^2 \dfrac{a}{R} \end{cases}.$$

Сократим в последнем уравнении все R, сложим все уравнения и выразим ускорение

$$(m_2 - m_1)g = \left(m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m\right)a$$

$$a = \frac{(m_2 - m_1)g}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m}.$$

Выразим силы натяжения нитей T_1 и T_2 и найдем их отношение

$$\begin{cases} T_1 = m_1 g + m_1 a \\ T_2 = m_2 g - m_2 a \end{cases}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{m_2}{m_1} \cdot \frac{g - a}{g + a} = \frac{m_2}{m_1} \cdot \frac{4m_1 + m}{4m_2 + m}.$$

Подставим числа и получим окончательный ответ:

$$a = \frac{(0{,}4 - 0{,}1) \cdot 9{,}8}{0{,}1 + 0{,}4 + 0{,}2} = 4{,}2 \text{ м/с}^2$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{0{,}4}{0{,}1} \cdot \frac{4 \cdot 0{,}1 + 0{,}4}{4 \cdot 0{,}4 + 0{,}4} = 1{,}6.$$

Задача 2.2.3

На горизонтальной шероховатой плоскости лежит катушка ниток массы m. Ее момент инерции относительно собственной оси $I = \gamma m R^2$, где γ − числовой коэффициент, R − внешний радиус катушки. Радиус намотанного слоя ниток равен r. Катушку без скольжения начали тянуть за нить с постоянной силой F, направленной под углом α к горизонту. Найти проекцию на ось x ускорения оси катушки.

Решение

Обозначим на рисунке действующие силы (рис. 11) и составим уравнения для поступательного и вращательного движения катушки:

$$\begin{cases} m\vec{g} + \vec{F} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}} = m\vec{a} \\ \vec{M}_F + \vec{M}_{F_{\text{тр}}} = I\vec{\varepsilon} \end{cases}$$

Запишем, чему равны модули вращательных моментов, которые создаются силой натяжения нити и силой трения. Обратим внимание, что плечи этих сил относительно оси катушки будут различными:

$$M_F = Fr$$

$$M_{F_{\text{тр}}} = F_{\text{тр}} R.$$

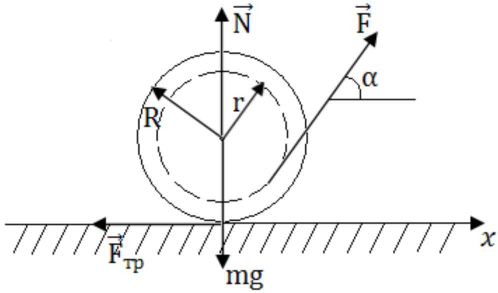

Рис. 11

Перейдем от векторной формы к проекциям на ось движения для первого уравнения и на ось вращения для второго. Заметим, что сила трения и сила натяжения нити создают вращательные моменты, направленные в противоположные стороны. Подставим во второе уравнение значение для момента инерции катушки из условия задачи, а также учтем связь между линейным и угловым ускорением ($a_x = \varepsilon R$):

$$\begin{cases} F\cos\alpha - F_{\text{тр}} = ma_x \\ F_{\text{тр}}R - Fr = I\varepsilon = \gamma m R^2 \cdot \dfrac{a_x}{R}. \end{cases}$$

Разделим обе части второго уравнения на R, сложим оба уравнения и выразим проекцию ускорения на ось x:

$$\begin{cases} F\cos\alpha - F_{\text{тр}} = ma_x \\ F_{\text{тр}} - F\dfrac{r}{R} = \gamma m a_x \end{cases}$$

$$F\cos\alpha - F\frac{r}{R} = m(\gamma + 1)a_x$$

$$a_x = \frac{F(\cos\alpha - \frac{r}{R})}{m(\gamma + 1)}.$$

Обратим внимание, что знак проекции ускорения на ось x может быть различным и зависит от отношения внутреннего и внешнего радиусов катушки и косинуса угла, под которым тянут за нить, но он не зависит от величины силы, с которой тянут.

Если выполняется соотношение $\cos\alpha > \frac{r}{R}$, то катушка будет катиться в положительном направлении оси x, что соответсвует на рисунке ее вращению по часовой стрелке. При соотношении $\cos\alpha < \frac{r}{R}$ движение будет в противоположную сторону.

3. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ, ИМПУЛЬСА И МОМЕНТА ИМПУЛЬСА

Основные формулы

- Работа, совершаемая силой при перемещении тела из точки 1 в точку 2

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r} = \int_1^2 F_s dS,$$

где $F_s = F\cos\alpha$ – проекция силы $\vec{F}$ на направление вектора элементарного перемещения $d\vec{r}$, α – угол между направлениями векторов силы и перемещения, dS – модуль вектора перемещения $d\vec{r}$.

- Мощность силы

$$P = \frac{dA}{dt} = \vec{F}\vec{v},$$

где $\vec{v}$ – мгновенная скорость тела.

- Работа, совершаемая моментом силы при вращательном движении

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{M} d\vec{\varphi} = \int_1^2 M_z d\varphi,$$

где $d\vec{\varphi}$ – вектор элементарного угла поворота, $d\varphi$ – его модуль, M_z – проекция момента силы на ось вращения Z.

- Мощность момента силы

$$P = M_z \omega,$$

где ω – мгновенная угловая скорость тела.

- Кинетическая энергия поступательного движения

$$T = \frac{mv^2}{2}.$$

- Кинетическая энергия вращательного движения

$$T = \frac{I\omega^2}{2},$$

где I – момент инерции тела относительно оси вращения.

- Приращение кинетической энергии тела

$$T_2 - T_1 = A_{12},$$

где A_{12} – суммарная работа всех сил при перемещении тела из точки 1 в точку 2.

- Потенциальная энергия гравитационного взаимодействия

$$U = -G\frac{m_1 m_2}{r},$$

где G – гравитационная постоянная, m_1 и m_2 – массы взаимодействующих тел, r – расстояние между ними.

- Потенциальная энергия тела в поле силы тяжести

$$U = mgh,$$

где g – ускорение свободного падения, h – высота, на которой расположено тело (отсчитывается от уровня, принятого за нулевой для потенциальной энергии).

- Потенциальная энергия деформированной пружины

$$U = \frac{kx^2}{2},$$

где k – коэффициент жесткости пружины, x – ее деформация.

- Убыль потенциальной энергии тела

$$U_1 - U_2 = A_{12},$$

где A_{12} – работа силы поля при перемещении тела из точки 1 в точку 2.

- Полная механическая энергия тела

$$E = T + U.$$

- Изменение полной механической энергии системы

$$E_2 - E_1 = A_{12}^{\text{внеш}} + A_{12}^{\text{дис}},$$

где $A_{12}^{\text{внеш}}$ – работа внешних сил, не принадлежащих системе, $A_{12}^{\text{дис}}$ – работа внутренних диссипативных сил (сил трения и сопротивления).

- Закон сохранения полной механической энергии:

$$T + U = const.$$

Полная механическая энергия системы тел остается постоянной, если на систему не действуют внешние силы, а внутренние силы являются консервативными, то есть их работа не зависит от формы траектории, а определяется только начальным и конечным положением тела.

- Импульс системы материальных точек

$$\vec{p} = \sum \vec{p}_i,$$

где $\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$ – импульс отдельной материальной точки, входящей в систему.

- Закон сохранения импульса:

$$\vec{p}(t) = \sum \vec{p}_i(t) = const.$$

Суммарный импульс системы тел остается постоянным, если система является замкнутой, то есть сумма внешних сил, действующих на нее, равна нулю

$$\sum \vec{F}_i^{\text{внеш}} = 0.$$

- Момент импульса системы тел

$$\vec{L} = \sum \vec{L}_i,$$

где $\vec{L}_i = [\vec{r}_i, \vec{p}_i]$ – момент импульса отдельной материальной точки или $L_i = I_i \omega_i$ – момент импульса твердого тело, входящего в систему.

- Закон сохранения момента импульса

$$\vec{L}(t) = \sum \vec{L}_i(t) = const.$$

Суммарный момент импульса системы тел остается постоянным, если система является замкнутой, то есть суммарный момент внешних сил, действующих на нее, равен нулю

$$\sum \vec{M}_i^{\text{внеш}} = 0.$$

3.1. Законы сохранения при поступательном движении

Задача 3.1.1

Шар массой $m_1 = 5$ кг движется со скоростью $v_1 = 1$ м/с и сталкивается с шаром массой $m_2 = 3$ кг, который движется ему навстречу со скоростью $v_2 = 2$ м/с. Считая удар абсолютно упругим и центральным, определить скорости u_1 и u_2 шаров после соударения.

Решение

Для нахождения скоростей шаров после удара применим законы сохранения импульса и механической энергии. Запишем закон сохранения импульса шаров в векторном виде:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2.$$

Примем за положительное направление движения направление скорости первого шара. Тогда в проекции на ось движения имеем

$$m_1v_1 - m_2v_2 = m_1u_1 + m_2u_2.$$

Запишем закон сохранения энергии при соударении шаров:

$$\frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} = \frac{m_1u_1^2}{2} + \frac{m_2u_2^2}{2}.$$

Преобразуем уравнения и, перенеся в левую часть все члены с индексами "1", а в правую с индексами "2", объединим их в систему

$$\begin{cases} m_1v_1 - m_1u_1 = m_2u_2 + m_2v_2 \\ m_1v_1^2 - m_1u_1^2 = m_1u_2^2 - m_2v_2^2 \end{cases}.$$

Вынесем за скобки в обоих уравнениях массы

$$\begin{cases} m_1(v_1 - u_1) = m_2(u_2 + v_2) \\ m_1(v_1^2 - u_1^2) = m_1(u_2^2 - v_2^2) \end{cases}.$$

Теперь разделим второе уравнение на первое, учтя, что

$$v_1^2 - u_1^2 = (v_1 + u_1)(v_1 - u_1)$$

и

$$u_2^2 - v_2^2 = (u_2 + v_2)(u_2 - v_2).$$

Получим соотношение между скоростями

$$v_1 + u_1 = u_2 - v_2.$$

Разделим первое уравнение в системе сначала на m_2 и вычтем из него второе, а затем разделим на m_1 и сложим два уравнения. В итоге получаем

$$u_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_1 - 2m_2v_2}{m_1 + m_2}$$

$$u_2 = \frac{2m_1v_1 + (m_1 - m_2)v_2}{m_1 + m_2}.$$

Подставим числовые значения

$$u_1 = \frac{(5-3)\cdot 1 - 2\cdot 3\cdot 2}{5+3} = -1{,}25 \text{ м/с}$$

$$u_2 = \frac{2\cdot 5\cdot 1 + (5-3)\cdot 2}{5+3} = 1{,}75\,\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Знак "−" в скорости первого шара говорит о том, что он после соударения будет двигаться в направлении, противоположном тому, которое мы выбрали за положительное.

Задача 3.1.2

Брусок, имеющий массу $\boldsymbol{m = 200}$ г, соскальзывает с наклонной плоскости длиной $\boldsymbol{l = 48}$ см с углом наклона $\boldsymbol{\alpha = 45°}$. На горизонтальной поверхности он налетает на покоящийся брусок массой $\boldsymbol{M = 600}$ г. Соударение брусков абсолютно неупругое. Определить изменение механической энергии в этом процессе. Трением пренебречь.

Решение

При движении бруска по наклонной плоскости в отсутствии трения (диссипативных сил) будет выполняться закон сохранения механической энергии. В начальном положении брусок обладает потенциальной энергией

$$\boldsymbol{E_1 = U = mgh},$$

где высота наклонной плоскости определяется из геометрических соображений:

$$\boldsymbol{h = l \sin \alpha}.$$

У подножья наклонной плоскости потенциальная энергия обращается в ноль, и тело будет обладать кинетической энергией

$$\boldsymbol{E_2 = T = \frac{mv^2}{2}}.$$

Так как $\boldsymbol{E_1 = E_2}$, то имеем

$$mgh = \frac{mv^2}{2}.$$

Отсюда получаем, что после соскальзывания с наклонной плоскости первый брусок имеет скорость

$$v = \sqrt{2gh}.$$

При абсолютно неупругом соударении двух брусков будет выполняться закон сохранения импульса. Учитывая, что второй брусок покоится, можно записать

$$mv = (m + M)v_{\text{общ}}.$$

Это позволяет найти общую скорость движения двух брусков

$$v_{\text{общ}} = \frac{mv}{m + M}.$$

Конечная механическая энергия равна кинетической энергии совместного движения брусков

$$E_3 = T_{\text{общ}} = \frac{(m + M)v_{\text{общ}}^2}{2}.$$

Подставляя в последнее выражение последовательно формулы для $v_{\text{общ}}$ и v, получаем

$$E_3 = \frac{m^2 gh}{m + M}.$$

Найдем изменение механической энергии

$$\Delta E = E_3 - E_1.$$

Подставляя выражения для E_3, E_1 и h, имеем

$$\Delta E = -\frac{mMgl \sin\alpha}{m + M},$$

где знак "−" означает, что энергия системы в данном процессе убывает.

Произведя вычисления, получим окончательный ответ:

$$\Delta E = -\frac{0,2 \cdot 0,6 \cdot 9,8 \cdot 0,48 \cdot 0,707}{0,2 + 0,6} = -0,5 \text{ Дж}.$$

Задача 3.1.3

Снаряд, летящий горизонтально со скоростью $\boldsymbol{v_0 = 13}$ м/с, разрывается на высоте $\boldsymbol{h = 20,4}$ м на два равных осколка. Первый осколок летит вертикально вниз и достигает Земли со скоростью $\boldsymbol{v = 25}$ м/с. Определить, под каким углом к горизонту и с какой скоростью полетит второй осколок снаряда сразу же после взрыва. Сопротивление воздуха не учитывать.

Решение

Запишем закон сохранения импульса сразу же после разрыва снаряда:

$$m\vec{v}_0 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2.$$

Так как согласно условию задачи

$$m_1 = m_1 = \frac{m}{2},$$

то

$$2\vec{v}_0 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2.$$

Перейдем от векторной формы к проекциям на оси X и Y:

$$\begin{cases} 2v_0 = v_2 \cos\alpha \\ 0 = -v_1 + v_2 \sin\alpha \end{cases}.$$

Перепишем последнее выражение в виде:

$$\begin{cases} v_2 \cos\alpha = 2v_0 \\ v_2 \sin\alpha = v_1 \end{cases}.$$

Для вычисления v_1 рассмотрим движение первого осколка и запишем для него закон сохранения энергии:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + m_1 g h = \frac{m_1 v^2}{2}.$$

Выразим интересующую нас скорость и подставим численные значения:

$$v_1 = \sqrt{v^2 - 2gh}$$

$$v_1 = \sqrt{25^2 - 2 \cdot 9{,}8 \cdot 20{,}4} = 15 \text{ м/с}.$$

Вернемся к системе уравнений. Чтобы найти, под каким углом полетит второй осколок, разделим второе уравнение на первое. Получаем

$$tg\ \alpha = \frac{v_1}{2v_0}$$

$$tg\ \alpha = \frac{15}{2 \cdot 13} = 0{,}577$$

$$\alpha = arctg\ (0{,}577) = 30°.$$

Для вычисления скорости v_2 возведем оба уравнения в квадрат и сложим:

$$\begin{cases} v_2^2 \cos^2 \alpha = 4v_0^2 \\ v_2^2 \sin^2 \alpha = v_1^2 \end{cases}$$

$$v_2^2 = 4v_0^2 + v_1^2.$$

Выразим скорость второго осколка и подставим численные значения:

$$v_2 = \sqrt{4v_0^2 + v_1^2}$$

$$v_2 = \sqrt{4 \cdot 13^2 + 15^2} = 30\ \text{м/с}.$$

3.2. Законы сохранения при вращательном движении

Задача 3.2.1

Платформа в виде однородного диска массы $\boldsymbol{M = 100}$ кг и радиуса $\boldsymbol{R = 30}$ см вращается вокруг вертикальной оси с некоторой угловой скоростью. В центре платформы стоит человек и держит вертикально стержень массы $\boldsymbol{m = 6}$ кг и длины $\boldsymbol{l = 1}$ м. После того, как человек перевел стержень в горизонтальное положение, скорость вращения платформы уменьшилась на 8%. Определить момент инерции человека. Центр масс стержня в обоих положениях совпадает с осью вращения платформы.

Решение

Платформа, человек и стержень представляют собой замкнутую механическую систему, для которой будет выполняться закон сохранения момента импульса:

$$L_1 = L_2.$$

Здесь L_1 и L_2 – это моменты импульса системы в начальном и конечном состояниях, каждый из которых можно представить в виде произведения момента инерции на угловую скорость:

$$L_1 = I_1 \omega_1$$

$$L_2 = I_2 \omega_2.$$

Момент инерции является аддитивной величиной, поэтому момент инерции системы равен сумме моментов инерции платформы, человека и стержня, то есть

$$I_1 = I_{пл} + I_ч + I_{ст1}$$

$$I_2 = I_{пл} + I_ч + I_{ст2}.$$

Платформа представляет собой однородный диск массы M и радиуса R, для нее

$$I_{\text{пл}} = \frac{1}{2} M R^2.$$

Стержень в начальном положении расположен вертикально и находится на оси вращения, поэтому его момент инерции будет равен нулю, а в конечном положении определяется согласно формуле для однородного тонкого стержня относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно стержню:

$$I_{\text{ст1}} = 0$$

$$I_{\text{ст2}} = \frac{1}{12} m l^2.$$

Тогда

$$I_1 = \frac{1}{2} M R^2 + I_{\text{ч}}$$

$$I_2 = \frac{1}{2} M R^2 + I_{\text{ч}} + \frac{1}{12} m l^2,$$

и закон сохранения момента импульса выглядит следующим образом:

$$\boldsymbol{\left(\frac{1}{2} M R^2 + I_{\text{ч}}\right) \omega_1 = \left(\frac{1}{2} M R^2 + I_{\text{ч}} + \frac{1}{12} m l^2\right) \omega_2}.$$

Воспользуемся условием задачи, связывающим начальную и конечную угловые скорости:

$$\boldsymbol{\omega_2 = (1 - \eta)\omega_1},$$

где $\boldsymbol{\eta = 0,08}$ – относительное уменьшение скорости вращения платформы (8%).

Тогда имеем

$$\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{MR^2}+\boldsymbol{I}_{\text{ч}}\right)\boldsymbol{\omega_1}=\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{MR^2}+\boldsymbol{I}_{\text{ч}}+\frac{1}{12}\boldsymbol{ml^2}\right)(\mathbf{1}-\boldsymbol{\eta})\boldsymbol{\omega_1}.$$

В получившемся уравнении произведем сокращение, перегруппируем члены и выразим момент инерции человека:

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{MR^2\eta}+\boldsymbol{I}_{\text{ч}}\boldsymbol{\eta}=\frac{1}{12}\boldsymbol{ml^2}(\mathbf{1}-\boldsymbol{\eta})$$

$$I_{\text{ч}}=\frac{1-\eta}{12\eta}ml^2-\frac{1}{2}MR^2.$$

После подстановки чисел окончательно получим

$$I_{\text{ч}}=\frac{1-0{,}08}{12\cdot 0{,}08}\cdot 6\cdot 1^2-\frac{1}{2}\cdot 100\cdot 0{,}3^2=1{,}25\ \text{кг}\cdot\text{м}^2.$$

Задача 3.2.2

Вертикально расположенный однородный стержень массы $\boldsymbol{M}=\mathbf{2}$ кг и длины $\boldsymbol{l}=\mathbf{1{,}2}$ м может вращаться вокруг своего верхнего конца (рис. 12). В нижний конец стержня попала, застряв, горизонтально летевшая пуля массы $\boldsymbol{m}=\mathbf{10}$ г, в результате чего стержень отклонился на угол $\alpha=\mathbf{60}°$. Найти скорость летевшей пули.

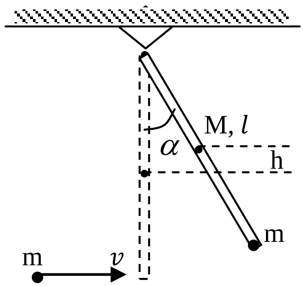

Рис. 12

Решение

При попадании в стержень пуля застревает в нем, и они начинают двигаться как единое целое. Это соответствует абсолютно неупругому удару, в процессе которого закон сохранения энергии выполняться не будет. Система стержень-пуля придет во вращательное движение, и можно записать закон сохранения момента импульса:

$$L_п + L_{ст} = L_{общ},$$

где $L_п$ и $L_{ст}$ – моменты импульса пули и стержня до соударения, а $L_{общ}$ − их общий момент импульса сразу после попадания пули.

Пулю можно рассматривать, как материальную точку, момент импульса которой определяется произведением ее импульса на плечо, равное, согласно условию задачи, длине стержня:

$$L_п = p_п r_\perp = mvl.$$

Стержень в начальный момент времени неподвижен, и для него

$$L_{ст} = 0,$$

а общий момент импульса сразу же после соударения можно рассчитать, умножив суммарный момент инерции стержня и пули на угловую скорость их совместного вращения:

$$L_{общ} = I_{общ}\omega,$$

где

$$I_{общ} = I_{ст} + I_п.$$

Момент инерции стержня относительно точки подвеса, которая проходит через верхний край, вычислим, воспользовавшись теоремой Штейнера:

$$I_{ст} = I_0 + Md^2,$$

где I_0 – момент инерции стержня относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс тела, а d − расстояние между осями.

Учтем, что

$$I_0 = \frac{1}{12}Ml^2$$

и

$$d = \frac{l}{2}.$$

Тогда

$$I_{ст} = \frac{1}{12}Ml^2 + M\frac{l^2}{4} = \frac{1}{3}Ml^2.$$

Пуля в условиях данной задачи представляет собой материальную точку, момент инерции которой определяется выражением

$$I_{\text{п}} = ml^2.$$

Учитывая, что масса пули намного меньше массы стержня $(m \ll M)$, получаем

$$I_{\text{общ}} = \frac{1}{3}Ml^2 + ml^2 = \frac{1}{3}Ml^2.$$

Тогда закон сохранения момента импульса примет вид

$$mvl = \frac{1}{3}Ml^2\omega,$$

и из него можно выразить начальную угловую скорость вращения стержня вместе с застрявшей в нем пулей:

$$\omega = \frac{3mv}{Ml}.$$

При отклонении стержня от первоначального положения будет выполняться закон сохранения энергии. Сразу же после удара стержень с пулей обладают кинетической энергией вращательного движения:

$$E_1 = T_{\text{вр}} = \frac{I_{\text{общ}}\omega^2}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}Ml^2\left(\frac{3mv}{Ml}\right)^2 = \frac{3m^2v^2}{2M}.$$

Кинетическая энергия перейдет в потенциальную энергию стержня и пули в поле тяжести Земли:

$$E_2 = U = U_{\text{ст}} + U_{\text{п}}.$$

Потенциальные энергии стержня и пули определяются формулами

$$U_{\text{ст}} = Mgh_{\text{ст}}$$

$$U_{\text{п}} = mgh_{\text{п}},$$

где $h_{\text{ст}}$ – высота, на которую поднимется центр масс стержня относительно первоначального положения, а $h_{\text{п}}$ – высота, на которую поднимется пуля. Однако, учитывая, что масса стержня намного превышает массу пули, а высоты подъема являются величинами одного порядка, имеем

$$U = Mgh_{\text{ст}} + mgh_{\text{п}} = Mgh_{\text{ст}}.$$

Высоту, на которую поднимется центр масс стержня можно рассчитать из геометрии задачи:

$$h_{\text{ст}} = \frac{l}{2}(1 - \cos\alpha).$$

Тогда

$$U = Mg\frac{l}{2}(1 - \cos\alpha).$$

Запишем закон сохранения энергии и подставим в него выражения для начальной и конечной энергии:

$$E_1 = E_2$$

$$\frac{3m^2v^2}{2M} = Mg\frac{l}{2}(1 - \cos\alpha).$$

Выразим скорость пули:

$$v = \frac{M}{m}\sqrt{\frac{gl \cdot (1 - \cos\alpha)}{3}} = \frac{M}{m}\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{2}{3}gl}.$$

Подставим численные значения и произведем вычисления:

$$v = \frac{2}{0{,}01}\sin 30^\circ\sqrt{\frac{2}{3} \cdot 9{,}8 \cdot 1{,}2} = 280\ \text{м/с}.$$

Задача 3.2.3

На гладкой горизонтальной плоскости лежит однородный диск массы $\boldsymbol{m_1 = 3}$ кг и радиуса $\boldsymbol{R = 10}$ см. На него осторожно опустили другой диск такого же радиуса массы $\boldsymbol{m_1 = 2}$ кг, предварительно сообщив ему частоту вращения $\boldsymbol{n_0 = 2}$ об/с. Центры дисков совпадают. Через некоторое время оба диска будут вращаться совместно. Определить работу, которую совершили при этом силы трения.

Решение

Запишем закон сохранения момента импульса, учтя, что взаимодействие между дисками будет неупругим:

$$L_1 + L_2 = L_{\text{общ}}.$$

Первый диск покоился, поэтому его момент импульса равен нулю, а для второго диска рассчитывается, как произведение момента инерции на угловую скорость:

$$L_1 = 0$$

$$L_2 = I_2\omega_0.$$

Аналогичной формулой можно воспользоваться для нахождения общего момента импульса системы двух дисков при их совместном вращении, учтя, что общий момент инерции будет равен сумме моментов инерции дисков:

$$L_{\text{общ}} = I_{\text{общ}}\omega = (I_1 + I_2)\omega.$$

Тогда закон сохранения момента импульса примет вид

$$I_2\omega_0 = (I_1 + I_2)\omega.$$

Из него можно выразить общую угловую скорость вращения двух дисков:

$$\omega = \frac{I_2\omega_0}{I_1 + I_2}.$$

Силы трения являются диссипативными силами, поэтому найти их работу можно по формуле:

$$A_{\text{тр}} = E_{\text{кон}} - E_{\text{нач}},$$

где $E_{\text{нач}}$ и $E_{\text{кон}}$ – начальная и конечная энергии системы.

Начальная энергия складывается из кинетической энергии вращательного движения дисков. Поскольку первый диск покоился, то

$$E_{\text{нач}} = T_1 + T_2 = \frac{I_2\omega_0^2}{2}.$$

Конечная энергия представляет собой кинетическую энергию совместного вращения дисков:

$$E_{\text{кон}} = T_{\text{общ}} = \frac{I_{\text{общ}}\omega^2}{2} = \frac{(I_1 + I_2)\omega^2}{2}.$$

Если подставить выражение для общей угловой скорости, то получится

$$E_{\text{кон}} = \frac{I_2^2\omega_0^2}{2(I_1 + I_2)}.$$

Тогда работа силы трения

$$A_{\text{тр}} = \frac{I_2^2\omega_0^2}{2(I_1 + I_2)} - \frac{I_2\omega_0^2}{2} = \frac{I_2\omega_0^2}{2}\left(\frac{I_2}{I_1 + I_2} - 1\right) = \frac{-I_1 I_2\omega_0^2}{2(I_1 + I_2)}.$$

Моменты инерции однородных дисков определяются по формулам:

$$I_1 = \frac{1}{2} m_1 R^2$$

$$I_2 = \frac{1}{2} m_2 R^2.$$

Циклическая частота вращения

$$\omega_0 = 2\pi n_0.$$

Подставив эти выражения, получаем

$$A_{\text{тр}} = -\frac{\pi^2 m_1 m_2 R^2 n_0^2}{m_1 + m_2}.$$

Численный расчет дает окончательный ответ:

$$A_{\text{тр}} = -\frac{3{,}14^2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 0{,}01 \cdot 4}{5} = -0{,}47 \text{ Дж}.$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Движение материальной точки задано уравнением $x = A \cdot t + B \cdot t^2$, где $\mathrm{A} = 4\,\mathrm{м/с}$; $\mathrm{B} = -\ 0{,}05\,\mathrm{м/с^2}$. Найти координату и ускорение точки в момент времени, в который скорость точки $v = 0$. Определить момент времени, когда координата точки $x = 0$.

2. Точка движется в плоскости XOY по закону $x = -2 \cdot t,\ y = 4 \cdot t(1 - t)$. Найти 1) уравнение траектории $y = f(x)$ и изобразить ее графически; 2) вектор скорости $\vec{v}$ и ускорения $\vec{a}$ в зависимости от времени; 3) средний вектор скорости точки за первые 2 с движения.

3. Движение материальной точки задано уравнением $x = A + B \cdot t + C \cdot t^3$, где $\mathrm{A} = 4\,\mathrm{м/с}$, $\mathrm{B} = 2\ \mathrm{м/с}$, $\mathrm{C} = 0{,}2\ \mathrm{м/с^3}$. Найти: 1) положение точки в моменты времени 2 с и 5 с; 2) среднюю скорость за время, протекшее между этими моментами; 3) мгновенные скорости в указанные моменты времени; 4) среднее ускорение за указанный промежуток времени.

4. Зависимость координаты тела от времени имеет вид $x = A + B \cdot t + C \cdot t^2$, где $\mathrm{A} = 6\ \mathrm{м}$; $\mathrm{B} = -\ 3\,\mathrm{м/с}$; $\mathrm{C} = 2\ \mathrm{м/с^2}$. Найти среднюю скорость и среднее ускорение тела в интервале времени от 1 до 4 с.

5. Тело брошено с балкона вертикально вверх со скоростью $10\ \mathrm{м/с}$. Высота балкона $12{,}5\ \mathrm{м}$. Написать уравнение движения тела и определить среднюю скорость движения с момента бросания до момента падения тела на Землю.

6. Тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью $v_0 = 4\,\mathrm{м/с}$. Когда оно достигло верхней точки полета, из того же начального пункта с той же начальной скоростью v_0 вертикально вверх было брошено второе тело. На каком расстоянии h от начального пункта встретятся тела? Сопротивление воздуха не учитывать.

7. Определить начальную скорость, с которой тело брошено вертикально вверх, если точку, находящуюся на высоте $60\ \mathrm{м}$, оно проходило 2 раза с промежутками времени 4 с. Сопротивление воздуха не учитывать.

8. Мяч с отвесной скалы высотой $24{,}5\,\mathrm{м}$ бросают в горизонтальном направлении с некоторой начальной скоростью. Мяч попадает в цель, лежащую на земле, на расстоянии $30\,\mathrm{м}$ от основания скалы. С какой начальной скоростью был брошен мяч и какую конечную скорость он приобрел, попадая в цель?

9. Из одной точки одновременно брошены два тела под углами 60^0 и 45^0 к горизонту с начальными скоростями соответственно $40\,\mathrm{м/с}$ и $50\,\mathrm{м/с}$. Траектории тел лежат в одной плоскости. На каком расстоянии друг от друга будут находиться тела через 3 с?

10. Снаряд, выпущенный из орудия под углом $\alpha = 30^0$ к горизонту, дважды был на одной и той же высоте h: спустя 10 с и 50 с после выстрела. Определить начальную скорость и высоту h.

11. Диск радиусом 20 см вращается согласно уравнению $\boldsymbol{\varphi = A + B \cdot t + C \cdot t^3}$, где $\boldsymbol{A = 3}$ рад, $\boldsymbol{B = -1}$ рад/с , $\mathrm{C} = \boldsymbol{0,1}$ рад/с$^{\boldsymbol{3}}$. Определить тангенциальное, нормальное и полное ускорения точек окружности диска для момента времени $\boldsymbol{t = 10}$ с.

12. Точка движется по окружности радиусом $\boldsymbol{R = 30}$ см с постоянным угловым ускорением ε. Определить тангенциальное ускорение a_τ точки, если известно, что за время t = 4 с она совершила три оборота и в конце третьего оборота ее нормальное ускорение $\boldsymbol{a_n}$= 2,7 м/с^2.

13. Точка движется по окружности радиусом $R = 4$ м. Закон ее движения выражается уравнением $S = A + B \cdot t^2$, где $A = 8$ м, $B = -2$ м/с^2. Определить момент времени t, когда нормальное ускорение точки $a_n = 9$ м/с^2. Найти скорость v, тангенциальное a_τ и полное a ускорение точки в тот же момент времени.

14. Тело вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = 6t - 2t^3$. Найти: 1) число оборотов, совершенных телом до остановки; 2) среднее угловое ускорение в этом промежутке времени; 3) полное ускорение точки, находящейся на расстоянии 20 см от оси вращения в момент времени t = 0,8 с.

15. Точка движется по окружности радиусом R = 10 см с постоянным тангенциальным ускорением a_τ. Найти нормальное ускорение a_n точки через t = 20 с после начала движения. Известно, что к концу пятого оборота линейная скорость точки равна v = 10 см/с.

16. Точка движется по окружности радиусом R = 8 м. В некоторый момент времени нормальное ускорение точки a_n= 4 м/с^2, вектор полного ускорения a образует в этот момент с вектором нормального ускорения a_n угол α = 60°. Найдите скорость v и тангенциальное ускорение a_τ точки.

17. С момента выключения мотора пропеллер самолета, вращавшийся с угловой скоростью, равной $\omega_0 = 40\pi$ рад/с, сделал до остановки N = 80 оборотов. Сколько времени прошло с момента выключения мотора до остановки, если считать вращение пропеллера равнозамедленным?

18. Нормальное ускорение точки, движущейся по окружности радиусом 4 м, изменяется по закону $a_n = 1 + 6t + 9t^2$. Определить: 1) тангенциальное ускорение точки; 2) путь, пройденный точкой за время 5 с после начала движения; 3) полное ускорение точки для момента времени 1 с.

19. Определите скорость v и полное ускорение a точки в момент времени t = 2 с, если она движется по окружности радиусом R = 1 м согласно уравнению $\varphi = 8t - t^3$, где φ – криволинейная координата, отсчитанная от некоторой точки, принятой за начальную, вдоль окружности.

20. Маховик диаметром 18 см вращается на оси электродвигателя с частотой 20 об/с. После отключения электрического тока маховик вместе с ротором электродвигателя совершил 120 оборотов и остановился. Найти и написать закон изменения угловой скорости маховика, и законы изменения нормального и тангенциального ускорения для точек, лежащих на ободе маховика, от времени.

21. Два груза массами m_1 = 400 г и m_2 = 600 г связаны невесомой нитью и лежат на гладкой горизонтальной поверхности. К грузу m_1 приложена горизонтально направленная сила F = 5 Н. Пренебрегая трением, определить: 1) ускорение грузов; 2) силу натяжения нити.

22. Три груза массами m, m и 4m, где m = 5 кг, соединены невесомыми нерастяжимыми нитями, как показано на рисунке (рис. 13). Коэффициент трения между грузами и горизонтальной поверхностью μ = 0,3. Определить силы натяжения нитей. Блок невесомый, трения в оси блока нет.

23. К краю стола прикреплен блок. Через блок перекинута невесомая и нерастяжимая нить, к концам которой прикреплены грузы. Один груз движется по поверхности стола, а другой – вдоль вертикали вниз. Определить коэффициент трения между поверхностями груза и стола, если массы каждого груза одинаковы и грузы движутся с ускорением a = 2,6 м/с^2. Трением в блоке пренебречь.

24. Через неподвижный блок перекинута нить, к которой подвешены три одинаковых груза массой m = 5 кг каждый (рис. 14). Найти ускорение системы и силу натяжения между грузами 1 и 2. Какой путь пройдут грузы за первые t = 4 с движения? Трением пренебречь.

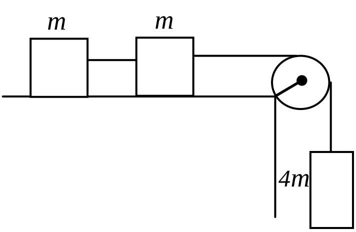

Рис. 13

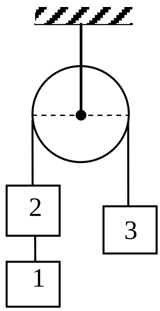

Рис. 14

25. На концах нити, переброшенной через блок, висят на одинаковой высоте две гирьки массой по 96 г каждая. Если на одну из них положить перегрузок, вся система придет в движение и через 3 с расстояние между гирьками станет равным 1,8 м. Определить вес перегрузка, силу натяжения нити и силу давления перегрузка на гирьку.

26. На наклонную плоскость, образующую угол $\alpha=30^0$ с горизонтом, положили груз массой $m = 1$ кг. Коэффициент трения груза о плоскость равен $\mu = 0,1$. Какую горизонтальную силу F необходимо приложить к грузу, чтобы он равномерно перемещался вверх по наклонной плоскости?

27. Небольшое тело резко толкнули снизу вверх по наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha=60^0$ с горизонтом. Найти коэффициент трения μ между телом и поверхностью плоскости, если время подъема оказалось на 20 % меньше времени спуска.

28. На вершине наклонной плоскости с углом при основании $\alpha=30^0$ укреплен неподвижный блок. Через блок перекинута невесомая нить, к концам которой привязаны грузы массами $m_1 = 250$ г и $m_2 =200$ г (груз m_1 лежит на плоскости). Пренебрегая трением, определить: 1) ускорение грузов; 2) силу натяжения нити.

29. Груз массой $m = 1$ кг, находящийся на горизонтальном столе, соединен нитями посредством блоков с грузами массами $m_1 = 600$ г и $m_2 = 300$ г. (рис. 15) Считая блоки и нити невесомыми и пренебрегая трением, определить: 1) ускорение тел; 2) разность сил натяжения нитей.

30. Блок укреплен на вершине двух наклонных плоскостей, составляющих с горизонтом углы $\alpha=30^0$ и $\beta=45^0$ (рис. 16). Грузы равной массы $m_1 = m_2 = 2$ кг соединены нитью, перекинутой через блок. Считая нить и блок невесомыми и принимая коэффициент трения грузов о плоскости одинаковым и равным $\mu=0,1$, определить: 1) ускорение грузов; 2) силу натяжения нити.

31. Два тела, массы которых $m_1 = 0,125$ кг и $m_2 = 0,15$ кг, связаны нитью, переброшенной через блок (рис. 17). Блок массой $m = 0,1$ кг укреплён на краю горизонтального стола, по поверхности которого скользит тело массой m_1. Коэффициент трения тела m_1 о поверхность стола $\mu = 0,2$. С каким ускорением движутся тела?

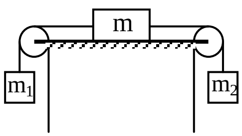

Рис. 15

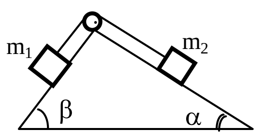

Рис. 16

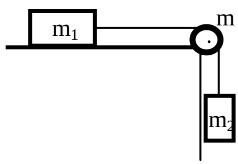

Рис. 17

32. На однородный сплошной цилиндрический вал радиусом R = 20 см, момент инерции которого I = 0,15 кг·м^2, намотана легкая нить, к концу которой прикреплён груз массой m = 0,5 кг (рис. 18). До начала вращения барабана высота h груза над полом составила 2,3 м. Определить: 1) время опускания груза до пола; 2) силу натяжения нити.

33. Через неподвижный блок в виде однородного сплошного цилиндра массой m = 0,2 кг перекинута невесомая нить, к концам которой прикреплены тела массами m_1 = 0,35 кг и m_2 = 0,55 кг (рис. 19). Пренебрегая трением в оси блока, определить отношение T_2/T_1 сил натяжения нити.

34. На гладкой наклонной плоскости, составляющей угол α = 30° с горизонтом, находится катушка с ниткой, свободный конец которой укреплён, как показано на рисунке (рис. 20). Масса катушки m = 200 г, её момент инерции относительно собственной оси I = 0,45 г·м^2, радиус намотанного слоя ниток r = 3 см. Найти ускорение оси катушки.

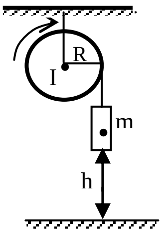

Рис. 18

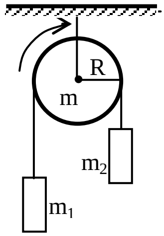

Рис. 19

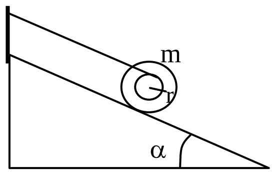

Рис. 20

35. На барабан радиусом R = 15 см намотана нить (рис. 21). К концу нити привязан груз массой m = 800 г, который опускается с ускорением a = 1,5 м/с^2. Пренебрегая трением в оси вращения, определите момент инерции барабана.

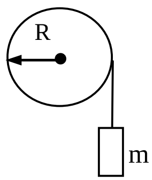

Рис. 21

36. Через блок, масса которого m = 120 г, перекинута тонкая нерастяжимая нить, к концам которой подвешены 2 груза массами m_1 = 200 г и m_2 = 280 г. Чему равно угловое ускорение блока, если его радиус R = 15 см? Трением в оси пренебречь.

37. На обод маховика диаметром D = 60 см намотан шнур, к концу которого привязан груз массой m = 2 кг. Определить момент инерции маховика, если он, вращаясь равноускоренно под действием силы тяжести груза, за время t = 3 с приобрел угловую скорость ω = 9 рад/с.

38. Через блок в виде однородного сплошного цилиндра, масса которого M = 0,25 кг, перекинута невесомая и нерастяжимая нить, к концам которой подвешены 2 груза массами m_1 = 0,3 кг и m_2 = 0,45 кг (рис. 22). Определите радиус блока, если его угловое ускорение ε = 7,5 c^{-2}. Трением пренебречь.

39. Маховик в виде диска радиуса R = 18 см и массой m = 12 кг свободно вращается вокруг оси, проходящей через его центр, с частотой ν = 6 c^{-1}. При торможении маховик останавливается через t = 7 с. Определите тормозящий момент.

40. К концу нерастяжимой и невесомой нити, намотанной на неподвижный цилиндрический сплошной блок массой M = 0,4 кг, прикреплено тело массой m = 0,6 кг, которое находится на наклонной плоскости с углом наклона α = 60° (рис. 23). Какой путь пройдет тело по наклонной плоскости за t = 2 с, если коэффициент трения скольжения по наклонной плоскости μ = 0,2? Трением в блоке пренебречь.

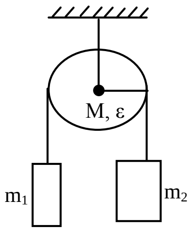

Рис. 22.

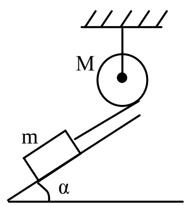

Рис. 23

41. Шар массой $m_1 = 300$ г, движущийся со скоростью $v_1 = 3$ м/с, догоняет шар массой $m_2 = 200$ г, движущийся со скоростью $v_2 = 2$ м/с в ту же сторону. Чему равна скорость шаров после удара, если удар центральный прямой и абсолютно упругий?

42. Шар массой $m_1 = 100$ г, движущийся со скоростью $v_1 = 7$ м/с, догоняет шар массой $m_2 = 300$ г, движущийся со скоростью $v_2 = 1$ м/с в ту же сторону. Чему равна скорость шаров после удара, если удар центральный прямой и абсолютно упругий?

43. Шар массой $m = 250$ г, движущийся со скоростью $v = 2$ м/с, налетает на другой шар, который находится в состоянии покоя. Чему равна его масса, если налетающий шар начал двигаться в обратном направлении со скоростью $u = 1$ м/с? Удар считать прямым центральным и абсолютно упругим.

44. Шар массой $m = 150$ г, движущийся со скоростью $v = 3$ м/с, налетает на другой шар, который находится в состоянии покоя. Чему равна его масса, если налетающий шар начал двигаться в обратном направлении со скоростью $u = 1$ м/с? Удар считать прямым центральным и абсолютно упругим.

45. Шар массой $m = 600$ г, движущийся со скоростью $v = 2$ м/с, налетает на другой шар, который находится в состоянии покоя. Чему равна его масса, если налетающий шар продолжает двигаться в том же направлении со скоростью $u = 1$ м/с? Удар считать прямым центральным и абсолютно упругим.

46. Шар массой $m = 500$ г, движущийся со скоростью $v = 3$ м/с, налетает на другой шар, который находится в состоянии покоя. Чему равна его масса, если налетающий шар продолжает двигаться в том же направлении со скоростью $u = 1$ м/с? Удар считать прямым центральным и абсолютно упругим.

47. Шар массой $m_1 = 4$ кг движется со скоростью $v_1 = 5$ м/с навстречу шару массой $m_2 = 1$ кг. После центрального абсолютно неупругого удара общая скорость шаров направлена в сторону движения первого шара и составляет $v_{\text{общ}} = 3$ м/с. Определить начальную скорость второго шара и убыль механической энергии шаров.

48. Два пластилиновых шарика, двигавшихся со скоростями $v_1 = 3$ м/с и $v_2 = 5$ м/с навстречу друг другу, испытывают абсолютно неупругий удар. Чему равна скорость шариков после удара, если кинетическая энергия первого шарика до удара была в $n = 1{,}6$ раза больше, чем кинетическая энергия второго?

49. Тело массой 5 кг ударяется о неподвижное тело массой 2,5 кг. Кинетическая энергия системы тел после удара стала равна 5 Дж. Считая удар центральным и неупругим, найти кинетическую энергию системы тел до удара.

50. Тело массой 3 кг движется со скоростью 4 м/с и ударяется о неподвижное тело такой же массы. Считая удар центральным и неупругим, найти скорость тел после удара и количество выделившегося тепла.

51. Стержень длиной $l = 1{,}5$ м и массой М = 4 кг может вращаться вокруг неподвижной оси, проходящей через верхний конец стержня. В середину стержня ударяет пуля массой $m = 10$ г, летящая в горизонтальном направлении со скоростью v_0=500 м/с, и застревает в нем. На какой угол φ отклонится стержень после удара?

52. Однородный стержень длиной $l = 1$ м и массой М = 0,7 кг подвешен на горизонтальной оси, проходящей через его верхний конец. В точку, отстоящую от оси на 2 l/3, попадает пуля массой $m = 5$ г, летящая перпендикулярно стержню и его оси вращения, и застревает в нем. После удара стержень отклоняется на угол α = 60°. Определить скорость пули.

53. Однородный стержень длиной $l = 1$ м и массой М = 2 кг может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через один из его концов. В другой конец стержня ударяет пуля массой m = 10 г, летящая перпендикулярно стержню и его оси вращения, и застревает в нем. Определить угол, на который при этом отклонится стержень. Скорость пули $v = 300$ м/с.

54. Однородный стержень массой М = 6 кг и длиной l = 2 м может вращаться в вертикальной плоскости относительно горизонтальной оси, проходящей через верхний конец стержня. В нижний конец стержня попадает пуля массой m = 10 г, летящая горизонтально со скоростью $v = 10^3$ м/с, и застревает в нём. Определить кинетическую энергию стержня после удара.

55. Вертикально расположенный однородный стержень массой М = 1,5 кг и длиной l = 1,1 м может вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через его верхний конец. В нижний конец стержня попала горизонтально летевшая пуля массой m = 5 г, и застряла в нем, в результате чего стержень отклонился на угол α = 45°. Определить скорость летевшей пули.

56. Человек массой m = 60 кг, стоящий на краю горизонтальной платформы массой М = 120 кг, вращающейся по инерции вокруг неподвижной вертикальной оси с частотой n_1 = 10 мин$^{-1}$, переходит к её центру. Считая платформу круглым однородным диском, а человека точечной массой, определить, с какой частотой n_2 будет тогда вращаться платформа.

57. Горизонтальная платформа массой m = 25 кг и радиусом R = 0,8 м вращается с частотой n_1 = 18 мин$^{-1}$. В центре стоит человек и держит в расставленных руках гири. Считая платформу диском, определить частоту вращения платформы, если человек, опустив руки, уменьшит свой момент инерции от I_1 = 3,5 кг·м^2 до I_2 = 1 кг·м^2.

58. Платформа, имеющая форму сплошного однородного диска, может вращаться по инерции вокруг неподвижной вертикальной оси. На краю платформы стоит человек, масса которого в 3 раза меньше массы платформы. Определить, как и во сколько раз изменится угловая скорость вращения платформы, если человек перейдёт ближе к центру на расстояние равное половине радиуса платформы.

59. Платформа в виде диска радиусом R = 1,5 м и массой m_1 = 180 кг вращается по инерции вокруг вертикальной оси с частотой n = 10 $мин^{-1}$. В центре платформы стоит человек массой m_2 = 60 кг. Какую линейную скорость относительно пола помещения будет иметь человек, если он перейдёт на край платформы?

60. В центре скамьи Жуковского стоит человек и держит в руках за один из концов стержень длиной L = 2,4 м и массой m = 8 кг, расположенный вертикально вдоль оси скамьи. Скамья с человеком вращается с частотой n_1 = 1 $с^{-1}$. С какой частотой n_2 будет вращаться скамья с человеком, если он повернёт стержень в горизонтальное положение? Суммарный момент инерции человека и скамьи I = 6 кг·$м^2$.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Ирина Юрьевна БОГАЧЕВА
Ольга Николаевна ВОСТРОКНУТОВА

МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ФИЗИКЕ. МЕХАНИКА

Учебное пособие

Издается полностью в авторской редакции

Подписано в печать 08.09.2017. Рег. № 77-17. Формат 60x84/16. Бумага тип. № 1.
Плоская печать. Усл. печ. л. 3,75. Тираж 100 экз. Заказ 372.

Издательский центр ФГБОУ ВО «МГТУ им. Г.И. Носова»
455000, Магнитогорск, пр. Ленина, 38
Участок оперативной полиграфии ФГБОУ ВО «МГТУ им. Г.И. Носова»