Министерство образования и науки Российской Федерации
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И.Носова

Л.А. Изосова
А.В.Изосов

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

*Утверждено Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия*

МАГНИТОГОРСК
2010

УДК 517.2

Рецензенты:

Заведующая кафедрой математического анализа МаГУ
Т.К.Плышевская

Доцент кафедры ПМ и ВТ МаГУ
В.В.Дубровский

Изосова Л.А., Изосов А.В.
Дифференциальные уравнения: учеб. пособие. – Магнитогорск: ГОУ ВПО «МГТУ», 2010. – 78 с.

Рассмотрены основные виды дифференциальных уравнений 1-го порядка и методы их решения. Приведены классификация дифференциальных уравнений высших порядков (однородных и неоднородых) и основные методы их решения. В рамках курса математики, необходимого для изучения в технических вузах, изложены основные методы решения систем дифференциальных уравнений. Приведено большое количество примеров, иллюстрирующих излагаемый материал, способствующих более глубокому его усвоению.

1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ

Дифференциальным уравнением называется уравнение вида

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{1.1}$$

относительно неизвестной функции $y(x)$, ее аргумента x и производных разных порядков этой функции. *Порядком* дифференциального уравнения называется порядок старшей производной, входящей в данное уравнение, т.е. уравнение (1.1) – это уравнение n-го порядка.

Следует заметить, что в уравнении n-го порядка не обязательно должны присутствовать все младшие производные и даже y и x, но обязательно должна быть старшая производная $y^{(n)}$.

Если неизвестная функция зависит от одной переменной, то соответствующее дифференциальное уравнение называется *обыкновенным.* Если неизвестная функция зависит от нескольких переменных, то соответствующее дифференциальное уравнение называется *уравнением в частных производных.* Такие уравнения обычно рассматриваются в разделе математики, который называется *математической физикой.* Мы пока ограничимся обыкновенными дифференциальными уравнениями.

Если уравнение (1.1) разрешено относительно старшей про –изводной, то оно имеет вид:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}). \tag{1.2}$$

Решением дифференциального уравнения называется функция $y = \varphi(x)$, которая обращает уравнение (1.1) (соответственно уравнение (1.2)) в тождество.

Процесс нахождения решений называется *интегрированием дифференциального уравнения.* Задача интегрирования дифференциального уравнения состоит в нахождении *всех* решений данного уравнения и изучении их свойств.

График решения дифференциального уравнения называется *интегральной кривой.*

Дифференциальные уравнения имеют большое значение при решении различных задач в физике, химии, биологии и других наук. Более того, корни данного раздела математики исходят из задач, возникающих в различных прикладных науках, так как они позволяют выяснить соотношения между изменениями различных физических величин. То есть, любой физический процесс, связанный с некоторым изменением (скоростью, ускорением), химическую реакцию и т.п. можно представить с помощью определенного дифференциального уравнения. Рассмотрим примеры, задач, приводящих к дифференциальным уравнениям.

Пример 1. Радиоактивный распад. Пусть $m(t)$ – масса неустойчивого вещества в момент времени t, $\alpha > 0$ – сечение распада. Согласно общему закону радиоактивного распада

$$\frac{dm}{dt} = -\alpha m. \tag{1.3}$$

Таким образом уравнение (1.3) представляет собой дифференциальное уравнение 1-го порядка. Легко проверить, что при любом значении постоянной функция $m(t) = Ce^{-\alpha t}$ является решением данного уравнения; при этом $C = m(0)$ – масса вещества в момент времени $t = 0$.

Пример 2. С некоторой высоты сброшено тело, масса которого равна m. Требуется установить, по какому закону будет изменяться скорость падения этого тела, если на него, кроме силы тяжести, действует тормозящая сила сопротивления воздуха, пропорциональная скорости (с коэффициентом пропорциональности k), т.е. требуется найти $v = f(t)$. По второму закону Ньютона

$$m \cdot \frac{dv}{dt} = F,$$

где $\frac{dv}{dt}$ – ускорение движущегося тела (производная от скорости по времени), а F – сила, действующая на тело в направлении движения, которая складывается из двух сил: силы тяжести mg и силы сопротивления воздуха $-kv$ (так как она направлена в сторону, противоположную направлению скорости). Таким образом,

$$m \cdot \frac{dv}{dt} = mg - kv. \tag{1.4}$$

Получили дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции v.

Таких и более сложных примеров можно привести очень много.

2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ 1- ГО ПОРЯДКА. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Дифференциальным уравнением 1 – го порядка называется уравнение вида

$$F(x, y, y') = 0,$$

где x – независимая переменная; y – неизвестная (искомая) функция; y' – ее производная.

Если удается выразить y' из уравнения (2.1), то получаем уравнение вида:

$$y' = f(x, y), \tag{2.1}$$

которое называется уравнением *разрешенным относительно производной.*

Иногда дифференциальное уравнение имеет более симметричную форму

$$f(x, y) \cdot dx + g(x, y) \cdot dy = 0, \tag{2.2}$$

в которой переменные x и y входят равноправно, т.е. можем считать либо y функцией от x, либо x функцией от y, т.е. получаем более общую форму записи дифференциального уравнения.

Решением уравнения (2.1) на некотором промежутке X числовой прямой называется функция $y = \varphi(x)$, определенная и непрерывно дифференцируемая (т.е. имеющая непрерывную производную) на промежутке X, которая обращает данное уравнение в тождество, причем точки $(x, \varphi(x))$ входят в область определения функции $f(x, y)$. При этом промежуток X может быть замкнутым или незамкнутым, конечным или бесконечным.

График решения дифференциального уравнения называется *интегральной линией или интегральной кривой* данного уравнения.

Решение данного уравнения может быть задано и неявно в виде $F(x, y) = 0$.

Рассмотрим *геометрический смысл* уравнения (2.1):

$$y' = f(x, y).$$

Если учесть геометрический смысл производной, функция $f(x, y)$ в каждой точке своей области определения задает угловой коэффициент касательной к интегральной кривой, являющейся графиком решения данного уравнения и, таким образом, задает так называемое *поле направлений.*

Проведя в каждой точке (x, y) из области задания функции $f(x, y)$ отрезок единичной длины (для определенности) с серединой в этой точке, получим поле направлений.

При изучении поля направлений большой интерес представляют *изоклины* – линии, во всех точках которых направление поля одно и то же.

Например изоклинами уравнения $y' = x^2 + y^2$ являются окружности $x^2 + y^2 = R^2$, поэтому, например, все интегральные кривые данного уравнения при пересечении с окружностями одного и того же радиуса имеют касательные с одним и тем же углом наклона по отношению к оси Ox.

Рассмотрим условия существования решения дифференциального уравнения (2.1). С этой целью приведем без доказательства следующую теорему.

ТЕОРЕМА Коши (существования и единственности решения дифференциального уравнения). Пусть задано дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ и пусть функция $f(x, y)$ определена в некоторой области G плоскости xOy. Пусть, далее, $M(x_0, y_0) \in G$ произвольная точка данной области. Если существует окрестность данной точки, в которой функция $f(x, y)$ непрерывна относительно x и y и имеет ограниченную частную производную $\frac{\partial f}{\partial y}$ в окрестности точки M_0, то существует решение $y = \varphi(x)$ уравнения $y' = f(x, y)$ и это решение единственное, т.е. $y_0 = \varphi(x_0)$.

Геометрически, это означает, что через каждую точку области G проходит единственная интегральная кривая.

Данную теорему доказывать не будем, так как доказательство ее очень громоздкое.

Условие, что при $x = x_0$ выполняется

$$y_0 = \varphi(x_0) \text{ или } y|_{x=x_0} = y_0 \qquad (2.3)$$

называется *начальным условием.*

Задача отыскания решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданным начальным условиям, называется *задачей Коши*, которая записывается следующим образом:

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y|_{x=x_0} = y_0. \end{cases} \tag{2.4}$$

Общим решением дифференциального уравнения (2.1)

$$y' = f(x, y)$$

называется функция $y = \varphi(x, C)$, где C – произвольная постоянная, которая является решением уравнения (2.1) при каждом значении постоянной C, и при любом начальном условии вида (2.3), существует единственное значение постоянной $C = C_0$, такое, что $y_0 = \varphi(x_0, C_0)$ является решением данного уравнения.

В частности, *общим интегралом* дифференциального уравнения называется функция $F(x, y, C) = 0$, такая, что выполнение заданных начальных условий при некотором, единственном для данных условий $C = C_0$, приводит к равенству

$$F(x_0, y_0, C_0) = 0.$$

Частным решением дифференциального уравнения (2.1) называется любая функция $y = \varphi(x, C_0)$, которая получается из общего решения при фиксированном значении постоянной $C = C_0$.

Общее решение представляется множеством интегральных кривых. Частное решение – это одна из интегральных кривых, проходящая через фиксированную точку.

Особым решением дифференциального уравнения (2.1) называется решение, в каждой точке которого нарушается единственность решения задачи Коши (т.е. через каждую точку проходит более одной интегральной кривой). В этом случае особое решение $y = y(x)$ может получиться из формулы общего решения только при $C = C(x)$.

Если правая часть уравнения (2.1) непрерывна и имеет частную производную по y (ограниченную или нет), то особыми решениями могут быть только те, во всех точках графика которых частная производная $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ обращается в бесконечность. Эти интегральные кривые называются *подозрительными на особое решение*. При этом кривая, подозрительная на особое решение, будет особым решением, если она является интегральной кривой и в каждой ее точке нарушается единственность решения задачи Коши.

Особое решение всегда можно обнаружить в процессе нахождения общего решения дифференциального уравнения. Это те решения, которые могут быть утеряны при преобразованиях данного уравнения, переводящих данное уравнение в его общее уравнение.

Дифференциальное уравнение может иметь решения, которые не являются ни частными, ни особыми. Например, такими могут быть решения, «склеенные» из кусков частных и особых решений. Возможна также «склейка» двух частных решений в точке неединственности решения задачи Коши.

3. ОСНОВНЫЕ ВИДЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ 1 – ГО ПОРЯДКА

3.1. Уравнения с разделяющимися переменными

Это уравнения, которые можно привести либо к уравнению вида

$$y' = f(x)\cdot g(y), \tag{3.1}$$

либо

$$M_1(x)\cdot N_1(y)\cdot dx + M_2(x)\cdot N_2(y)\cdot dy = 0\,. \tag{3.2}$$

Чтобы разделить переменные в уравнении (3.1), вспомним, что $y' = \dfrac{dy}{dx}$. Получаем $\dfrac{dy}{dx} = f(x)\cdot g(y)$ или $\dfrac{dy}{g(y)} = f(x)\cdot dx$.

После того, как переменные разделены, полученное уравнение можно интегрировать, т.е. общее уравнение имеет вид:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C.$$

Пример 1. Решить следующую задачу Коши дифференциального уравнения:

$$\begin{cases} y' = e^{x+y} + e^{x-y}, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Преобразуем данное дифференциальное уравнение

$$y' = e^{x} \cdot e^{y} + e^{x} \cdot e^{-y}; \quad \frac{dy}{dx} = e^{x} \cdot (e^{y} + \frac{1}{e^{y}}).$$

Разделяем переменные

$$\frac{dy}{e^{y} + \frac{1}{e^{y}}} = e^{x}dx \text{ или } \frac{e^{y}dy}{e^{2y}+1} = e^{x}dx.$$

Переменные разделены и уравнение можно интегрировать $\int \frac{e^{y}dy}{e^{2y}+1} = \int e^{x}dx$ или, если в первом интеграле сделать замену переменной $e^{y} = t, \quad e^{y}dy = dt$, то получим $\int \frac{dt}{t^{2}+1} = e^{x} + C$, следовательно, $arctg\ t = e^{x} + C;$ возвращаясь к исходной переменной, получаем $arctg\ e^{y} = e^{x} + C.$

Выразим из полученного равенства y

$$e^{y} = tg(e^{x} + C), \quad y = \ln(tg(e^{x} + C)).$$

Это общее решение заданного дифференциального уравнения. Теперь, учитывая начальное условие, найдем частное решение: при $x = 0, \ y = 0$, следовательно, $0 = \ln(tg(e^{0} + C)),$ $tg(1 + C) = 1, \quad 1 + C = \frac{\pi}{4}, \quad C = \frac{\pi}{4} - 1$. Тогда решение задачи Коши (частное решение) имеет вид $y = \ln(tg(e^{x} + \frac{\pi}{4} - 1)).$

В случае уравнения вида (3.2), переменные можно разделить с помощью так называемого «разделяющего множителя».

Чтобы интегрировать дифференциальное уравнение, добиваются того, чтобы слагаемое, содержащее dx, содержало только x, аналогично для y. Лишние множители переносим в разделяющий множитель

$$M_1(x)\cdot N_1(y)\cdot dx+M_2(x)\cdot N_2(y)\cdot dy=0 \quad \cdot\left|\frac{1}{N_1(y)\cdot M_2(x)}\right. .$$

Получим уравнение следующего вида, в котором переменные уже разделены

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}\cdot dx+\frac{N_2(y)}{N_1(y)}\cdot dy=0.$$

После этого уравнение можем интегрировать

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}\cdot dx+\int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}\cdot dy=C.$$

В результате получаем общий интеграл дифференциального уравнения (3.2).

Пример 2. Решить уравнение

$x\cdot(y^6+1)\cdot dx+y^2\cdot(x^4+1)\cdot dy=0$, при условии $y(0)=1.$

Разделим переменные

$$x\cdot(y^6+1)\cdot dx+y^2\cdot(x^4+1)\cdot dy=0 \quad \cdot\left|\frac{1}{(y^6+1)\cdot(x^4+1)}\right.;$$

получаем

$\dfrac{xdx}{x^4+1}+\dfrac{y^2dy}{y^6+1}=0;$ интегрируем полученное уравнение

$$\int \frac{xdx}{x^4+1}+\int \frac{y^2dy}{y^6+1}=C.$$

В первом интеграле сделаем замену

$$\left[x^2=t,\ 2xdx=dt,\ xdx=\frac{dt}{2}\right];$$

во втором – $\left[y^3=z,\ 3y^2dy=dz,\ y^2dy=\dfrac{dz}{3}\right].$

Тогда $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int \frac{dt}{t^2+1}+\frac{1}{3}\int \frac{dz}{z^2+1}=C,$ получаем общий интеграл в виде $\dfrac{1}{2}arctg\,t+\dfrac{1}{3}arctg\,z=C$ или, возвращаясь к исходным переменным, $3arctg\,x^2 + 2arctg\,y^3 = C$. Найдем C, используя начальное условие $3arctg\,0 + 2arctg\,1 = C$, $C = \frac{\pi}{2}$ и получаем ответ $3arctg\,x^2 + 2arctg\,y^3 = \frac{\pi}{2}$.

Пример 3. Найти общий интеграл дифференциального уравнения $6x\,dx - 6y\,dy = 3x^2 y\,dy - 2xy^2 dx$.

Преобразуем данное уравнение:

$$(6x\,dx + 2xy^2 dx) - (6y\,dy + 3x^2 y\,dy) = 0;$$

$$2x\,dx \cdot (3 + y^2) - 3y\,dy \cdot (2 + x^2) = 0 \,\Big|\cdot \frac{1}{(3 + y^2)\cdot(2 + x^2)};$$

$$\frac{2x\,dx}{2 + x^2} - \frac{3y\,dy}{3 + y^2} = 0.$$

После данных преобразований получили уравнение с разделенными переменными, которое можно интегрировать

$$\int \frac{2x\,dx}{2 + x^2} - \int \frac{3y\,dy}{3 + y^2} = C\,.$$

При замене переменных $\left[2 + x^2 = t;\ 2xdx = dt\right]$ для первого интеграла и $\left[3 + y^2 = z;\ 2ydy = dz;\ ydy = \frac{1}{2}dz\right]$ для второго интеграла, получаем

$$\int \frac{dt}{t} - \frac{3}{2}\cdot\int \frac{dz}{z} = C; \quad \ln|t| - \frac{3}{2}\ln|z| = \ln C_1; \quad \ln C_1 = C,\ C_1 > 0.$$

Возвращаясь к исходным переменным, получим

$$\ln(2 + x^2) - \frac{3}{2}\ln(3 + y^2) = \ln C_1\,.$$

При использовании свойств логарифмов, данное равенство можем преобразовать к виду

$$\ln\frac{2 + x^2}{(3 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = \ln C_1 \text{ или } \frac{2 + x^2}{(3 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = C_1\text{, или}$$

$$\frac{(2+x^2)^2}{(3+y^2)^3} = C_1^{\ 2}, \ \ \frac{(2+x^2)^2}{(3+y^2)^3} = C_2.$$

Последнее равенство является общим интегралом заданного дифференциального уравнения.

Замечание. Чтобы интегрировать дифференциальное уравнение любого другого типа, его нужно свести к уравнению с разделяющимися переменными.

3.2. Однородные дифференциальные уравнения 1-го порядка

Введем сначала понятие однородных функций. Функция $f(x,y)$ называется *однородной функцией степени* m, если $f(tx,ty) = t^m f(x,y)$. Например, $f(x,y) = x^3 - 3x^2 y - y^3$ – однородная функция степени 3.

Дифференциальное уравнение вида

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \qquad (3.3)$$

называется *однородным* дифференциальным уравнением 1-го порядка, если $M(x,y)$; $N(x.y)$ - однородные функции одной степени. Любое однородное дифференциальное уравнение можно свести к уравнению вида

$$y' = f(\frac{y}{x}), \qquad (3.4)$$

которое решается с помощью введения новой функции $\frac{y}{x} = t;\quad y = tx.$ Тогда $y' = t'x + t$ и уравнение (3.4) приобретает вид $t'x + t = f(t);\quad \frac{dt}{dx}\cdot x = f(t) - t;\quad \frac{dt}{f(t)-t} = \frac{dx}{x}.$

Решение последнего уравнения (с уже разделенными переменными) имеет вид

$$\int\frac{dt}{f(t)-t} = \int\frac{dx}{x};\quad \int\frac{dt}{f(t)-t} = \ln|x| + \ln C = \ln(Cx).$$

Пример 4. Решить дифференциальное уравнение

$$x\cdot y'\sin\frac{y}{x} + x = y\cdot\sin\frac{y}{x}.$$

Если в уравнении содержится выражение $\dfrac{y}{x}$, то уже можно предположить, что оно является однородным. Разделим данное уравнение на $x \cdot \sin\dfrac{y}{x}$.

$$y' + \frac{1}{\sin\dfrac{y}{x}} = \frac{y}{x}, \; y' = -\frac{1}{\sin\dfrac{y}{x}} + \frac{y}{x}.$$

Получено уравнение вида $y' = f(\dfrac{y}{x})$, которое является однородным. Введем новую функцию $\dfrac{y}{x} = t; \quad y = t, \; y' = t'x + t$. Тогда

$$t'x + t = t - \frac{1}{\sin t}; \quad \frac{dt}{dx} \cdot x = -\frac{1}{\sin t}; \quad \sin t \cdot dt = -\frac{dx}{x}.$$

В последнем уравнении переменные разделены и его можно интегрировать

$$\int \sin t \cdot dt = -\int \frac{dx}{x}; \quad -\cos t = -\ln|x| - \ln C; \quad \cos t = \ln|Cx|.$$

Возвращаясь к исходной функции, получаем

$$\cos\frac{y}{x} = \ln|Cx|; \quad \frac{y}{x} = \arccos\ln|Cx|; \quad y = x \cdot \arccos\ln|Cx|.$$

Это общее решение данного дифференциального уравнения.

Пример 5. Найти решение задачи Коши

$$(x^4 + 6x^2y^2 + y^4)dx + 4xy(x^2 + y^2)dy = 0; \quad y(1) = 0.$$

Это уравнение, очевидно, является однородным, так как коэффициенты перед dx и dy являются однородными функциями 4-го порядка. Разделим это уравнение на $(x^4 dx)$

$$(1 + 6\,(\frac{y}{x})^2 + (\frac{y}{x})^4) + 4\,\frac{y}{x} \cdot (1 + (\frac{y}{x})^2) \cdot y' = 0,$$

отсюда

$$y' = -\frac{1 + 6\,(\dfrac{y}{x})^2 + (\dfrac{y}{x})^4}{4\,\dfrac{y}{x} \cdot (1 + (\dfrac{y}{x})^2}.$$

Введем новую функцию $\dfrac{y}{x}=t;\quad y=t,\ \ y'=t'x+t$. Получим

$$t'x+t=-\frac{1+6t^2+t^4}{4t\cdot(1+t^2)}=-\frac{1+6t^2+t^4}{4t+4t^3}\text{, отсюда}$$

$$\frac{dt}{dx}\cdot x=\frac{-1-6t^2-t^4-4t^2-4t^4}{4t+4t^3}\ \text{ или }\ \frac{dt}{dx}\cdot x=-\frac{5t^4+10t^2+1}{4(t^3+t)}.$$

Тогда

$$\frac{4(t^3+t)dt}{5t^4+10t^2+1}=-\frac{dx}{x}.$$

Переменные разделены и уравнение можно интегрировать.

$\displaystyle\int\frac{4(t^3+t)dt}{5t^4+10t^2+1}=-\int\frac{dx}{x}$. Сделаем замену переменной в первом интеграле $[5t^4+10t^2+1=z;\ (20t^3+20t)dt=dz]$.

$$\frac{4}{20}\int\frac{dz}{z}=-\int\frac{dx}{x};\quad \frac{1}{5}\ln|z|=-\ln|x|+\ln C;\quad \ln z^{\frac{1}{5}}=\ln\frac{C}{x};$$

$$z^{\frac{1}{5}}=\frac{C}{x};\quad x^5z=C_1;\quad x^5(5t^4+10t^2+1)=C_1;$$

$$x^5\cdot(5\frac{y^4}{x^4}+10\frac{y^2}{x^2}+1)=C_1;\quad 5y^4x+10y^2x^3+x^5=C_1.$$

Теперь найдем решение задачи Коши: при $x=1,\ \ y=0$, получаем $0+0+1=C_1,\quad C_1=1.$ Тогда решение поставленной задачи Коши имеет вид $5y^4x+10y^2x^3+x^5=1.$

3.3. Линейные дифференциальные уравнения 1-го порядка

Линейным, относительно y, называется дифференциальное уравнение вида

$$y'+p(x)y=f(x), \tag{3.5}$$

где $f(x)$ и $p(x)$ будем считать непрерывными на некотором промежутке X. Уравнение называется линейным, так как неизвестная функция y и ее производная y' входят в уравнение только в первой степени.

Аналогичным образом вводится дифференциальное уравнение, *линейное относительно* x.

$$x' + p(y)x = f(y). \quad (3.6)$$

Для решения таких уравнений можно использовать два метода.

1. **Метод Лагранжа** (метод вариации произвольной постоянной).

Данный метод заключается в том, что сначала решается однородное дифференциальное уравнение вида

$$y' + p(x)y = 0 \quad (3.7)$$

(однородность здесь понимается в том смысле, что правая часть равна нулю).

$\frac{dy}{dx} = -p(x)y$, разделяя переменные, получим $\frac{dy}{y} = -p(x)dx$.

Проинтегрируем равенство $\int \frac{dy}{y} = -\int p(x)dx$. Получаем

$\ln|y| = -\int p(x)dx + \ln C$. Тогда $y = C \cdot e^{-\int p(x)dx}$.

Метод вариации постоянной заключается в том, что произвольную постоянную C заменяем неизвестной функцией $C(x)$ и тогда $y(x) = C(x) \cdot e^{-\int p(x)dx}$. Подставляя данную функцию в исходное уравнение (3.5), получаем

$$C'(x) \cdot e^{-\int p(x)dx} + C(x) \cdot e^{-\int p(x)dx} \cdot (-p(x)) + p(x) \cdot C(x) \cdot e^{-\int p(x)dx} =$$

$$= f(x); \quad C'(x) \cdot e^{-\int p(x)dx} = f(x); \quad C'(x) = f(x) \cdot e^{\int p(x)dx}.$$

Тогда неизвестная функция будет иметь следующий вид:

$$C(x) = \int f(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx + c$$

и общее решение уравнения (3.5):

$$y = (\int f(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx + c) \cdot e^{-\int p(x)dx}. \quad (3.8)$$

Пример 6. Найти общее решение дифференциального уравнения $xy'-y=x^2\cos x.$.

Данное уравнение является линейным, так как его можно записать в виде

$$y'-\frac{y}{x}=x\cos x. \tag{3.9}$$

Рассмотрим соответствующее однородное уравнение:

$$y'-\frac{y}{x}=0;\quad \frac{dy}{dx}=\frac{y}{x};\quad \frac{dy}{y}=\frac{dx}{x};\quad \int\frac{dy}{y}=\int\frac{dx}{x};\quad \ln|y|=\ln|x|+\ln C.$$

Получаем решение однородного уравнения в виде: $y=Cx$. Тогда общее уравнение имеет вид $y=C(x)x$. Подставим его в уравнение (3.9):

$$C'(x)x+C(x)-\frac{C(x)x}{x}=x\cos x;\quad C'(x)x=x\cos x;\quad C'(x)=\cos x$$

и $C(x)=\sin x+c$. Следовательно, общее решение имеет вид

$$y=(\sin x+c)\cdot x.$$

2. Метод Бернулли. Данный метод заключается в том, что неизвестную функцию представляют в виде произведения двух функций $y(x)=u(x)\cdot v(x)$, $(y=u\cdot v;\ \Rightarrow y'=u'v+uv')$.

Подставив эту функцию в уравнение (3.5), получим

$$u'v+uv'+p(x)uv=f(x);\quad u'v+u\cdot(v'+p(x)v)=f(x).$$

Функции $u(x)$ и $v(x)$ подбираем таким образом, чтобы выполнялись равенства

$$\begin{cases} v'+p(x)v=0; & (a)\\ u'v=f(x). & (b)\end{cases}$$

Сначала решаем уравнение (a) системы $\frac{dv}{dx}=-p(x)dx;$

$$\frac{dv}{v}=-p(x)dx;\quad \int\frac{dv}{v}=-\int p(x)dx;\quad \ln|v|=-\int p(x)dx;$$

$$v=e^{-\int p(x)dx}.$$

Следует обратить внимание на то, что при определении первой функции не вводим произвольную постоянную при интегрировании. Подставим полученную функцию в уравнение (b) системы

$$u'\cdot e^{-\int p(x)dx} = f(x); \quad u' = f(x)\cdot e^{\int p(x)dx}; \quad u = \int f(x)\cdot e^{\int p(x)dx}dx + c$$

и, следовательно, $y = u\cdot v = (\int f(x)\cdot e^{\int p(x)dx}dx + c)\cdot e^{-\int p(x)dx}$.

Таким образом, для общего решения линейного уравнения вторым методом получено общее решение в том же виде, как и при применении первого метода.

Пример 7. Решить задачу Коши

$$y' + \frac{1-2x}{x^2}\cdot y = 1, \quad y(1) = 1.$$

Пусть $y = u\cdot v; \quad y' = u'v + uv';$ тогда

$$u'v + uv' + \frac{1-2x}{x^2}\cdot uv = 1; \; u'v + u\cdot(v' + \frac{1-2x}{x^2}\cdot v) = 1.$$

Получаем систему

$$\begin{cases} v' + \dfrac{1-2x}{x^2}\cdot v = 0; & (a) \\ u'v = 1. & (b) \end{cases}$$

Решаем первое уравнение

$$(a): \quad \frac{dv}{dx} = \frac{2x-1}{x^2}\cdot v; \quad \frac{dv}{v} = (\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2})dx; \quad \int\frac{dv}{v} = \int(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2})dx.$$

Имеем

$$\ln|v| = 2\ln|x| + \frac{1}{x}; \quad \ln|v| = \ln x^2 + \ln e^{\frac{1}{x}}; \quad \ln|v| = \ln x^2 e^{\frac{1}{x}};$$

$$v = x^2 e^{\frac{1}{x}}.$$

Подставим полученную функцию в уравнение (b):

$$u'\cdot x^2 e^{\frac{1}{x}} = 1; \quad u' = \frac{1}{x^2}\cdot e^{-\frac{1}{x}}; \quad u = \int e^{-\frac{1}{x}}\frac{dx}{x^2} = e^{-\frac{1}{x}} + C.$$

Тогда общее решение имеет вид

$$y = u\cdot v = (e^{-\frac{1}{x}} + C)\cdot x^2 e^{\frac{1}{x}} = x^2 + Cx^2 e^{\frac{1}{x}}.$$

Учитывая начальное условие: при $x = 1$, $y = 1$, $1 = 1 + Ce$ или $C = 0$. Тогда решение задачи Коши исходного уравнения $y = x^2$.

Пример 8. Решить дифференциальное уравнение

$$(y^4 + 2x)dy = ydx.$$

Преобразуем данное уравнение следующим образом: разделим левую и правую части равенства на ydy. Получаем уравнение вида $y^3 + \frac{2x}{y} = \frac{dx}{dy}$ или $x' - \frac{2x}{y} = y^3$. Данное уравнение, согласно формуле (3.5), является линейным относительно x.

Тогда x можем представить в виде произведения двух функций от y: $x = y \cdot v$; $x' = u'v + uv'$ и рассматриваемое уравнение приобретает вид: $u'v + uv' - \frac{2uv}{y} = y^3$ или

$$u'v + u\,(v' - \frac{2v}{y}) = y^3.$$

Отсюда получаем систему

$$\begin{cases} v' - \dfrac{2v}{y} = 0; \\ u'v = y^3. \end{cases}$$

Решаем первое уравнение:

$$\frac{dv}{dy} = 2\frac{v}{y}; \quad \frac{dv}{v} = 2\frac{dy}{y}; \quad \int\frac{dv}{v} = 2\int\frac{dy}{y}; \quad \ln|v| = 2\ln|y|; \quad v = y^2.$$

Подставим найденную функцию во второе уравнение:

$$u' \cdot y^2 = y^3; = u' = y; \quad u \quad \frac{y^2}{2} + C.$$

Тогда общее решение дифференциального уравнения имеет вид:

$$x = u \cdot v = (\frac{y^2}{2} + C) \cdot y^2 = \frac{y^4}{2} + Cy^2.$$

Пример 9. Найти решение задачи Коши

$$(3y\cos 2y - 2y^2 \sin 2y - 2x) \cdot y' = y; \quad y|_{x=16} = \frac{\pi}{4}.$$

В данном уравнении есть функции от y, зато x встречается только в первой степени, поэтому можем предположить, что оно линейное относительно x. Принимая во внимание, что

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{(\frac{dx}{dy})} = \frac{1}{x'},$$

исходное уравнение можно преобразовать следующим образом:

$$(3y\cos 2y - 2y^2 \sin 2y - 2x) = x'y;$$

$$x'y + 2x = 3y\cos 2y - 2y^2 \sin 2y \,|\cdot \frac{1}{y};$$

$$x' + \frac{2}{y}x = 3\cos 2y - 2y\sin 2y.$$

В самом деле, получили уравнение вида (3.6) – линейное относительно x. Решим его методом Бернулли

$$x = uv; \quad x' = u'v + uv'.$$

Получаем уравнение:

$$u'v + uv' + \frac{2}{y}uv = 3\cos 2y - 2y\sin 2y;$$

$$u'v + u(v' + \frac{2}{y}v) = 3\cos 2y - 2y\sin 2y.$$

Получаем систему

$$\begin{cases} v' + \dfrac{2}{y}v = 0; & (a) \\ u'v = 3\cos 2y - 2y\sin 2y. & (b) \end{cases}$$

Решаем уравнение (a):

$$\frac{dv}{dy} = -\frac{2v}{y}; \quad \frac{dv}{v} = -2\frac{dy}{y}; \quad \int\frac{dv}{v} = -2\int\frac{dy}{y}; \quad \ln|v| = -2\ln|y|,$$

тогда $v = y^{-2} = \dfrac{1}{y^2}$. Подставим полученное выражение в уравнение (b):

$$\frac{u'}{y^2} = 3\cos 2y - 2y\sin 2y; \quad u' = 3y^2\cos 2y - 2y^3\sin 2y;$$

$$u = \int 3y^2\cos 2ydy - \int 2y^3\sin 2ydy + C.$$

Вычислим оба интеграла по отдельности.

$$\int 3y^2\cos 2ydy = \frac{3y^2}{2}\sin 2y - 3\int y\sin 2ydy = \frac{3y^2}{2}\sin 2y +$$

$$+\frac{3y}{2}\cos 2y - \frac{3}{2}\int\cos 2ydy = \frac{3y^2}{2}\sin 2y + \frac{3y}{2}\cos 2y - \frac{3}{4}\sin 2y,$$

Дважды использовали формулу «интегрирования по частям». Чтобы вычислить второй интеграл, данную формулу придется использовать трижды.

$$\int 2y^3\sin 2ydy = -y^3\cos 2y + 3\int y^2\cos 2ydy = -y^3\cos 2y +$$

$$+\frac{3y^2}{2}\sin 2y - 3\int y\sin 2ydy = -y^3\cos 2y + \frac{3y^2}{2}\sin 2y +$$

$$+\frac{3y}{2}\cos 2y - \frac{3}{2}\int\cos 2ydy = -y^3\cos 2y + \frac{3y^2}{2}\sin 2y + \frac{3y}{2}\cos 2y -$$

$$-\frac{3}{4}\sin 2y.$$

Следовательно $u = -y^3\cos 2y + C$. Остальные слагаемые сократились при вычитании интегралов. Тогда общее решение заданного дифференциального уравнения имеет вид

$$x = u\cdot v = (-y^3\cos 2y + C)\cdot\frac{1}{y^2} = -y\cos 2y + \frac{C}{y^2}.$$

Теперь используем начальное условие при $x = 16, \quad y = \dfrac{\pi}{4}$.

$16 = -\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{2} + \frac{16C}{\pi^2}$; $C = \pi^2$. Тогда решение поставленной задачи Коши (частное решение) имеет вид

$$x = -y\cos 2y + \frac{\pi^2}{y^2}.$$

3.4. Уравнение Бернулли

Уравнением *Бернулли* является дифференциальное уравнение вида

$$y' + p(x)\cdot y = f(x)\cdot y^k, \quad k \in R. \tag{3.10}$$

(Следует заметить, что линейное дифференциальное уравнение является частным случаем уравнения Бернулли при $k = 0$, но линейные дифференциальные уравнения встречаются намного чаще, поэтому их выделяют в отдельный класс дифференциальных уравнений.)

При решении дифференциальных уравнений вида (3.10) используется метод Бернулли, т.е. неизвестную функцию представляют в виде произведения двух функций

$$y = u\cdot v; \quad y' = u'\cdot v + u\cdot v'. \tag{3.11}$$

После подстановки этих выражений, уравнение (3.10) приобретает вид

$$u'v + uv' + p(x)uv = f(x)u^k v^k; \quad u'v + u(v' + p(x)v) = f(x)u^k v^k.$$

Получаем систему

$$\begin{cases} v' + p(x)v = 0; & (a) \\ u'v = f(x)u^k v^k. & (b) \end{cases}$$

Записывать общее решение уравнения Бернулли не будем. Просто рассмотрим соответствующий пример.

Пример 10. Решить задачу Коши для уравнения Бернулли.

$$2xy' - 3y = -(5x^2 + 3)y^3; \quad y(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Разделим заданное уравнение на $2x$ и заменим y по формулам (3.11):

$$y' - \frac{3y}{2x} = -\frac{5x^2+3}{2x}y^3; \quad u'v + uv' - \frac{3uv}{2x} = -\frac{5x^2+3}{2x}u^3v^3;$$

$$u'v + u\,(\,v' - \frac{3v}{2x}\,) = -\frac{5x^2+5}{2x}u^3v^3.$$

Получается система

$$\begin{cases} v' - \dfrac{3v}{2x} = 0; \\ u'v = -\dfrac{5x^2+3}{2x}u^3v^3. \end{cases}$$

Решаем первое уравнение:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{3v}{2x}; \quad \frac{dv}{v} = \frac{3}{2}\frac{dx}{x}; \quad \int\frac{dv}{v} = \frac{3}{2}\int\frac{dx}{x}; \quad \ln|v| = \frac{3}{2}\ln|x|; \quad v = x^{\frac{3}{2}}.$$

Подставим найденную функцию во второе уравнение системы:

$$u' \cdot x^{\frac{3}{2}} = -\frac{5x^2+3}{2x}u^3 \cdot x^{\frac{9}{2}}; \quad \frac{du}{dx} = -\frac{5x^2+3}{2x}u^3 \cdot x^{\frac{9}{2}-\frac{3}{2}};$$

$$\frac{du}{u^3} = -\frac{5x^2+3}{2x} \cdot x^3 dx; \quad \int\frac{du}{u^3} = -\int(\,\frac{5}{2}\,x^4 + \frac{3}{2}x^2)\,dx;$$

$$-\frac{1}{2u^2} = -\frac{5}{2}\frac{x^5}{5} - \frac{3}{2}\frac{x^3}{3} - \frac{C}{2}; \quad \frac{1}{u^2} = x^5 + x^3 + C.$$

(Здесь мы воспользовались тем, что произвольную постоянную можно взять с любым коэффициентом, не нарушая ее произ - вольности.)

Тогда

$u^2 = \dfrac{1}{x^5+x^3+C}; \quad u = \dfrac{1}{\sqrt{x^5+x^3+C}}$ и общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y = \frac{1}{\sqrt{x^5+x^3+C}} \cdot x^{\frac{3}{2}}.$$

Используем начальное условие $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+1+C}}1; \quad C = 0\,.$

Тогда решение задачи Коши имеет вид

$$y = \frac{1}{\sqrt{x^5 + x^3}} \cdot x^{\frac{3}{2}} = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{x^2 + 1}}; \quad y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

3.5. Уравнения в полных дифференциалах

Уравнение вида

$$P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = 0 \qquad (3.12)$$

называется *уравнением в полных дифференциалах*, если его левая часть представляет собой полный дифференциал некоторой функции $F(x, y)$, т.е.

$$P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = \frac{\partial F}{\partial x}\, dx + \frac{\partial F}{\partial y}\, dy = dF(x, y). \qquad (3.13)$$

Решение дифференциального уравнения $dF(x, y) = 0$ имеет вид $F(x, y) = C.$ (3.14)

Из равенства смешанных производных непрерывной функции $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$ получаем условие, гарантирующее то, что уравнение (3.12) является уравнением в полных дифференциалах, которое непосредственно получается из равенства (3.13) (в случае, если функции $P(x, y)$, $Q(x, y)$ и их частные производные $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывны в некоторой области G плоскости xOy)

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \qquad (3.15)$$

Из равенства (3.13) получаем систему для нахождения функции $F(x, y)$

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = P(x, y); & (a) \\ \frac{\partial F}{\partial y} = Q(x, y). & (b) \end{cases} \qquad (3.16)$$

Интегрируем равенство (a) по x

$$F(x,y)=\int P(x,y)dx+C(y), \tag{3.17}$$

так как интегрируем по переменной x, то $C(y)$ является постоянной относительно этой переменной. Вычисляем производную по y от функции, полученной по формуле (3.17)

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\left(\int P(x,y)dx\right)'_y+C'(y). \tag{3.18}$$

Неизвестную функцию $C(y)$ можно найти, сравнив равенство (3.18) и выражение (b) системы (3.16), т.е.

$$Q(x,y)=\left(\int P(x,y)dx\right)'_y+C'(y);$$

$$C'(y)=Q(x,y)-\left(\int P(x,y)dx\right)'_y.$$

Вид общего решения выглядит довольно громоздко, поэтому удобнее для наглядности рассмотреть несколько примеров с использованием данного алгоритма решения.

Пример 11. Решить дифференциальное уравнение

$$(3x^2y+2y+3)dx+(x^3+2x+3y^2)dy=0.$$

Проверим, что это уравнение в полных дифференциалах

$$P(x,y)=3x^2y+2y+3;\quad \frac{\partial P}{\partial y}=3x^2+2;$$

$$Q(x,y)=x^3+2x+3y^2;\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=3x^2+2.$$

Равенство (3.15) выполняется.

Запишем основную систему для нахождения функции:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=3x^2y+2y+3; & (a)\\[2mm] \dfrac{\partial F}{\partial y}=x^3+2x+3y^2. & (b)\end{cases}$$

Интегрируем равенство (a)

$$F(x,y)=\int(3x^2y+2y+3)dx+C(y)=x^3y+2xy+3x+C(y).$$

Найдем производную по y от функции $F(x,y)$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x^3 + 2x + C'(y).$$

Сравнив данное выражение с равенством (b), получим

$$C'(y) = 3y^2; \quad C(y) = \int 3y^2 dy = y^3.$$

Тогда $F(x, y) = x^3 y + 2xy + 3x + y^3$ и, согласно формуле (3.14), общее решение исходного уравнения имеет вид

$$x^3 y + 2xy + 3x + y^3 = C .$$

Пример 12. Решить задачу Коши дифференциального уравнения $(\ln y - 5y^2 \sin 5x)dx + (\frac{x}{y} + 2y \cos 5x)dy = 0; \quad y(0) = e.$

$$P(x, y) = \ln y - 5y^2 \sin 5x; \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{y} - 10y \sin 5x;$$

$$Q(x, y) = \frac{x}{y} + 2y \cos 5x; \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{y} - 10y \cos 5x.$$

Следовательно, данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Запишем основную систему для нахождения функции $F(x, y)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = \ln y - 5y^2 \sin 5x; & (a) \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = \dfrac{x}{y} + 2y \cos 5x. & (b) \end{cases}$$

Интегрируем первое равенство по x

$$F(x, y) = \int (\ln y - 5y^2 \sin 5x)dx = x \ln y + y^2 \cos 5x + C(y).$$

Найдем $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{x}{y} + 2y \cos 5x + C'(y)$. Сравнивая с равенством (b) системы, получаем, что $C'(y) = 0; \quad C(y) = 0.$

Тогда общее решение имеет вид

$$F(x, y) = x \ln y + y^2 \cos 5x = C.$$

Учитывая начальное условие $y(0) = e,$ получаем

$$0 \cdot \ln e + e^2 \cdot \cos(5 \cdot 0) = C; \quad C = e^2$$

и частный интеграл данного дифференциального уравнения имеет вид $x\ln y + y^2\cos 5x = e^2$.

Мы рассмотрели основные виды дифференциальных уравнений. Следует заметить, что некоторые уравнения могут рассматриваться как уравнения разных типов и, соответственно, решаться разными способами. Например, уравнение вида $y' + \dfrac{y}{x} = \dfrac{y^4}{x^4}$ является одновременно и однородным дифференциальным уравнением 1-го порядка, и уравнением Бернулли. Можно привести достаточно много соответствующих примеров.

Рассмотрим еще два вида уравнений.

3.6. Уравнение Лагранжа

Уравнением *Лагранжа* называется уравнение, линейное относительно x и y, коэффициенты которого являются функциями от y' вида

$$P(y')\,x + Q(y')\,y + R(y') = 0. \tag{3.19}$$

Пусть $y' = p$, тогда $P(p)\,x + Q(p)\,y + R(p) = 0$. Выразим из этого уравнения y: $y = -\dfrac{R(p)}{Q(p)}\,x - \dfrac{P(p)}{Q(p)}$. Если обозначим $f(x) = -\dfrac{R(p)}{Q(p)}$; $g(x) = -\dfrac{P(p)}{Q(p)}$, то получим равенство $y = f(p)\cdot x + g(p)$. Продифференцировав это равенство, получим $dy = f(p)dx + x\ f'(p)dp + g'(p)dp$.

Если заменим $dy = y'dx = pdx$, то приходим к уравнению

$$pdx = f(p)dx + x\ f'(p)dp + g'(p)dp.$$

Полученное уравнение линейно относительно x как функции от p: $(p - f(p))dx - x\ f'(p)dp = g'(p)dp$ или

$$\frac{dx}{dp} - x\cdot\frac{f'(p)}{(p - f(p))} = \frac{g'(p)}{(p - f(p)},$$

и поэтому может быть проинтегрировано. Если его решение существует, то оно имеет вид $x = \varphi(p, C)$. Тогда общее решение уравнения Лагранжа задается параметрически в виде

$$\begin{cases} x = \varphi(p, C); \\ y = x \cdot f(p) + g(p) = \varphi(p, C) \cdot f(p) + g(p). \end{cases}$$

Частным случаем уравнения Лагранжа является так называемое *уравнение Клеро* вида

$$y = x\, y' = g(y'), \tag{3.20}$$

которое решается аналогичным образом, и его общее решение имеет вид $y = Cx + g(C)$, которое определяет семейство прямых на плоскости.

Но уравнение Клеро, кроме общего решения, имеет еще и особое решение, которое определяется параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = -g'(p); \\ y = -p\, g'(p) + g(p). \end{cases}$$

Особое решение (оно существует, если $g'(p) \neq const$) является *огибающей* семейства прямых, определяемых общим решением (другими словами, *общим решением уравнения Клеро является семейство касательных к особому решению*).

Пример 13. Проинтегрировать уравнение

$$y = 2x(y')^2 + 4(y')^2.$$

Это уравнение Лагранжа. Пусть $y' = p$, тогда уравнение приобретает вид $y = 2xp^2 + 4p^2$. Продифференцируем это равенство $dy = 2p^2 dx + 4pxdp + 8pdp$. Заменим $dy = pdx$:

$pdx = 2p^2 dx + 4pxdp + 8pdp$. Сократим данное равенство на p и получим уравнение с разделяющимися переменными: $dx = 2pdx + 4xdp + 8dp; \quad dx(1-2p) = 4dp(x+2);$

$$\frac{dx}{x+2} = \frac{4dp}{1-2p}; \quad \int \frac{dx}{x+2} = 4\int \frac{dp}{1-2p}; \quad \ln|x+2| = -2\ln|1-2p| + \ln C;$$

$$\ln|x+2| = \ln\frac{C}{(1-2p)^2}; \quad x+2 = \frac{C}{(1-2p)^2}; \quad x = \frac{C}{(1-2p)^2} - 2.$$

Но $y = 2p^2(x+2)$, следовательно, $y = \dfrac{2Cp^2}{(1-2p)^2}$. Получаем параметрически заданное решение данного уравнения:

$$\begin{cases} x = \dfrac{C}{(1-2p)^2} - 2; \\ y = \dfrac{2Cp^2}{(1-2p)^2}. \end{cases}$$

При решении уравнения мы производили сокращение на p, что привело к потере особого решения, которое получается при $p = 0$. Это особое решение $y = 0$.

$$pdx = 2p^2dx + 4pxdp + 4pdp.$$

Пример 14. Проинтегрировать уравнение

$$y = xy' + (y' - y'^2).$$

Судя по общему виду – это уравнение Клеро. Положив $y' = p$, получаем $y = xp + (p - p^2)$. Продифференцируем это равенство $dy = pdx + xdp + (1-2p)dp$, но $dy = pdx$ и поэтому получаем $xdp + (1-2p)dp = 0$: $(x + 1 - 2p)dp = 0$. Поэтому либо $x = 2p - 1$, либо $dp = 0$.

Если $p = 0$, то $p = C$ и получаем общее решение исходного уравнения $y = Cx + (C - C^2)$.

Если $x = 2p - 1$, то

$$y = 2p^2 - p + p - p^2 = p^2$$

и получаем особое решение уравнения

$$\begin{cases} x = 2p - 1; \\ y = p^2. \end{cases}$$

Исключая параметр p из выражения для x: $p = \dfrac{x+1}{2}$, получаем особое решение в виде $y = \dfrac{1}{4}(x+1)^2$.

4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

4.1. Основные понятия

Дифференциальным уравнением n ***-го порядка*** называется уравнение вида

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{4.1}$$

где порядок уравнения n совпадает с порядком старшей производной, входящей в уравнение. Если это возможно, то другая запись данного уравнения имеет вид

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}). \tag{4.2}$$

Дифференциальное уравнение, записанное в виде (4.2), называется *разрешенным относительно старшей производной.*

Решением дифференциального уравнения (4.2) называется любая функция $y = \varphi(x)$, которая обращает данное уравнение в тождество. При этом предполагается, что функция $y = \varphi(x)$ имеет непрерывные производные до порядка n включительно.

Как и в случае дифференциального уравнения 1-го порядка, условия существования и единственности решения дифференциального уравнения (4.2) задает теорема Коши.

ТЕОРЕМА Коши. Пусть задано дифференциальное уравнение вида (4.2), где функция f и ее частные производные

$$\frac{\partial f}{\partial y}, \ \frac{\partial f}{\partial y'}, \quad \ldots, \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$$

непрерывны в некоторой области G $(n+1)$-мерного пространства. Пусть

$$M_0(x_0, y_0, y_0', y_0'', \ldots, y_0^{(n-1)}) \in G \text{ -}$$

произвольная точка этой области. Тогда в окрестности этой точки существует единственное решение $y = \varphi(x)$ данного дифференциального уравнения (4.2), удовлетворяющее условиям:

$$y\,|_{x=x_0} = y_0; \ \ y'\,|_{x=x_0} = y_0'; \ \ \ldots; y^{(n-1)}\,|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}. \tag{4.3}$$

Условия (4.3) называются *начальными условиями* дифференциального уравнения (4.2).

Общим решением уравнения (4.2) называется функция $y=\varphi(x.C_1,C_2,\ldots,C_n)$, где $C_1,C_2,\ldots,C_n$ произвольные постоянные, такая, что при любых начальных условиях вида (4.3) существует единственный набор чисел $C_1^0,C_2^0,\ldots,C_n^0$ такой, что функция $y=\varphi(x.C_1^0,C_2^0,\ldots,C_n^0)$ является решением уравнения (4.2) и удовлетворяет начальным условиям (4.3).

Всякое решение вида $y=\varphi(x.C_1^0,C_2^0,\ldots,C_n^0)$, получающееся из общего решения $y=\varphi(x.C_1,C_2,\ldots,C_n)$ при фиксированных значениях произвольных постоянных, называется *частным решением.* Частные решения – это решения задачи Коши:

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)}). \\ y|_{x=x_0}=y_0; \;\; y'|_{x=x_0}=y_0'; \;\; \ldots; y^{(n-1)}|_{x=x_0}=y_0^{(n-1)}. \end{cases}$$

Как и в случае уравнения первого порядка, график решения называется *интегральной кривой.* Причем общее решение задает множество интегральных кривых, а частное решение определяет единственную кривую, которая проходит через фиксированную точку $M_0(x_0,y_0)$ плоскости.

Решить задачу Коши – это значит из множества интегральных кривых выбрать единственную, проходящую через заданную точку.

4.2. Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка

1) ***Уравнения вида*** $y^{(n)} = f(x)$

Уравнения этого вида решаются последовательным интегрированием, т.е.

$$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1; \quad y^{(n-2)} = \int\left(\int f(x)dx + C_1\right)dx + C_2; \ldots,$$

пока не получим функцию y.

Пример 1. Решить задачу Коши

$$y^{(4)} = \cos^2 x; \quad y(0)=\frac{1}{16}, \quad y'(0)=0, \quad y''(0)=\frac{1}{8}; \quad y'''(0)=0.$$

Согласно алгоритму,

$$y''' = \int y^{(4)} dx = \int \cos^2 x dx + C_1 = \int \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) dx + C_1 =$$

$$= \frac{1}{2}(x + \frac{1}{2}\sin 2x) + C_1 = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + C_{1.}$$

Найдем C_1, используя начальные условия $x = 0, \quad y'''(0) = 0.$

$$0 = \frac{0}{2} + \frac{1}{4}\sin 0 + C_1; \quad C_1 = 0.$$

$$y'' = \int y''' dx = \int\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x\right)dx = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{8}\cos 2x + C_2.$$

Найдем C_2, используя условие $y''(0) = \frac{1}{8}$,

$$\frac{1}{8} = \frac{0}{4} - \frac{1}{8}\cos 0 + C_2; \quad C_2 = 0. \quad y'' = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{8}\cos 2x.$$

Тогда

$$y' = \int y'' dx = \int (\frac{x^2}{4} - \frac{1}{8}\cos 2x) dx = \frac{x^3}{12} - \frac{1}{16}\sin 2x + C_3.$$

Находим C_3, используя условие $y'(0) = 0.$

$$0 = 0 - \frac{1}{16}\sin 0 + C_3; \quad C_3 = 0; \quad y' = \frac{x^3}{12} - \frac{1}{16}\sin 2x.$$

Теперь найдем

$$y = \int y' dx = \int (\frac{x^3}{12} - \frac{1}{16}\sin 2x) dx = \frac{x^4}{48} + \frac{1}{32}\cos 2x + C_4.$$

Из условия $y(0) = \frac{1}{32}$: $\frac{1}{16} = 0 + \frac{1}{32}\cos 0 + C_4; \quad C_4 = \frac{1}{32}$,

тогда решение исходной задачи Коши имеет вид

$$y = \frac{x^4}{48} + \frac{1}{32}\cos 2x + \frac{1}{32}.$$

2) ***Уравнения вида*** $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0$, в котором отсутствуют либо только y, либо y и несколько младших производных. В этом случае порядок уравнения понижается с помощью

введения новой функции $y^{(k)} = z, \quad (z = z(x))$. Тогда $y^{(k+1)} = z', \ldots, y^{(n)} = z^{(n-k)}$ и порядок уравнения уменьшается на k.

Пример 2. Решить дифференциальное уравнение

$$2xy''' \cdot y'' = (y'')^2 - 1.$$

Введем новую переменную $y'' = z, \quad y''' = z'$. Получим уравнение с разделяющимися переменными

$$2x \cdot z' \cdot z = z^2 - 1; \quad 2x \cdot \frac{dz}{dx} \cdot z = z^2 - 1.$$

После разделения переменных равенство приобретает вид $\frac{2zdz}{z^2 - 1} = \frac{dx}{x}$. После интегрирования получим

$$\int \frac{2zdz}{z^2 - 1} = \int \frac{dx}{x}, \quad \ln|z^2 - 1| = \ln|x| + \ln C.$$

Учитывая свойства логарифмов

$$ln|z^2 - 1| = ln|Cx|; \quad z^2 - 1 = Cx; \quad z = \pm\sqrt{Cx + 1},$$

возвращаемся к исходной переменной $y'' = \pm\sqrt{Cx+1}$, дважды проинтегрируем это равенство.

$$y' = \int y'' dx = \pm\int (Cx+1)^{\frac{1}{2}} dx = \pm\frac{(Cx+1)^{\frac{3}{2}}}{C \cdot {}^{3}\!/_{2}} + C_1 =$$

$$= \pm\frac{2(Cx+1)^{\frac{3}{2}}}{3C} + C_1.$$

$$y = \int y' dx = \pm\int \frac{2(Cx+1)^{\frac{3}{2}}}{3C} dx + C_1 x + C_2 =$$

$$= \pm\frac{2(Cx+1)^{\frac{5}{2}}}{3C^2 \cdot {}^{5}\!/_{2}} + C_1 x + C_2 = \pm\frac{4(Cx+1)^{\frac{5}{2}}}{15C^2} + C_1 x + C_2.$$

Получили общее решение заданного дифференциального уравнения.

Пример 3. Решить задачу Коши

$$y'' - \frac{y'}{x-2} = x(x-2), \quad y(3) = 1, \quad y'(3) = -4.$$

В данном уравнении отсутствует y, поэтому вводим новую переменную $y' = z, \quad y'' = z'$. Тогда уравнение примет вид: $z' - \frac{z}{x-2} = x(x-2)$, которое является линейным относительно z. При решении линейных уравнений искомую функцию следует представить в виде произведения двух функций

$$z = u \cdot v, \quad z' = u'v + uv'.$$

Тогда получаем $u'v + uv' - \frac{uv}{x-2} = x(x-2)$ или

$u'v + u(v' - \frac{v}{x-2}) = x(x-2).$ Получаем систему

$$\begin{cases} v' - \dfrac{v}{x-2} = 0, \\ u'v = x(x-2). \end{cases}$$

Решаем первое уравнение:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{v}{x-2}, \quad \frac{dv}{v} = \frac{dx}{x-2}, \quad \ln|v| = \ln|x-2|, \quad v = x-2.$$

Подставим полученное выражение во второе равенство:

$u'(x-2) = x(x-2); \quad u' = x: \quad u = \frac{x^2}{2} + C_1.$ Тогда

$$z = u \cdot v = (\frac{x^2}{2} + C_1)(x-2) = y'.$$

Следовательно, $y' = (\frac{x^2}{2} + C_1)(x-2)$. Используя начальное условие $y'(3) = -4$: $\quad -4 = (\frac{9}{2} + C_1)(3-2), \quad C_1 = -\frac{17}{2}$ и

$y' = (\frac{x^2}{2} - \frac{17}{2})(x-2) = \frac{1}{2}(x^3 - 2x^2 - 17x + 34)$. Теперь найдем y, проинтегрировав последнее равенство

$$y = \int y' dx = \frac{1}{2}(\frac{x^4}{4} - 2\frac{x^3}{3} - 17\frac{x^2}{2} + 34x) + C_2.$$

Из начального условия $y(3) = 1$ получаем

$$1 = \frac{1}{2}(\frac{81}{4} - 2\frac{27}{3} - 17\frac{9}{2} + 34 \cdot 3) + C_2, \quad C_2 = -\frac{103}{8}.$$

Получаем решение задачи Коши

$$y = \frac{x^4}{8} - \frac{x^3}{3} - \frac{17}{4}x^2 + 17x - \frac{103}{8}.$$

3) ***Уравнения вида*** $F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$, которые не содержат явно независимую переменную x.

Для понижения порядка уравнений такого вида выполняется замена $y' = p$ $(p = p(y))$. Тогда вторая производная находится как производная сложной функции, т.е. $y'' = \frac{dp}{dy} \cdot y' = p' \cdot p$. При такой замене порядок уравнения понижается на единицу.

Пример 4 . Решить уравнение $y''(y+2) - (y')^2 = 0$.

Данное уравнение не содержит явно x, поэтому заменяем $y' = p(y), \quad y'' = p' \cdot p$. Подставив в уравнение, получим

$$p' \cdot p\,(y+2) - p^2 = 0; \quad \frac{dp}{dy} \cdot p \cdot (y+2) = p^2.$$

После разделения переменных уравнение приобретает вид

$$\frac{dp}{p} = \frac{dy}{y+2}; \quad \int \frac{dp}{p} = \int \frac{dy}{y+2}; \quad \ln|p| = \ln|y+2| + \ln C_1;$$

$$\ln|p| = \ln(C_1(y+2)|; \quad p = C_1(y+2).$$

Тогда

$$y' = C_1(y+2); \quad \frac{dy}{dx} = C_1(y+2); \quad \frac{dy}{y+2} = C_1 dx;$$

$$\ln|y+2| = C_1 x + \ln C_2; \quad y+2 = C_2 e^{C_1 x}; \quad y = C_2 e^{C_1 x} - 2.$$

Получили общее решение заданного дифференциального уравнения.

Пример 5. Найти частные решения дифференциального уравнения при заданных начальных условиях

$$y^4 - y^3 \cdot y'' = 1; \quad y(0) = \sqrt{2}; \quad y'(0) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Данное уравнение не содержит переменную x явно. Более того, в данном уравнении нет даже y', но все равно порядок понижаем той же подстановкой $y' = p(y), \quad y'' = p' \cdot p$.

Получаем уравнение $y^4 - y^3 \cdot p' \cdot p = 1; \quad y^3 \cdot \dfrac{dp}{dy} \cdot p = y^4 - 1.$

Разделим переменные в данном уравнении

$$p \cdot dp = \frac{(y^4 - 1)}{y^3} dy; \quad \int p dp = \int \left(y - y^{-3}\right) dy;$$

$$\frac{p^2}{2} = \frac{y^2}{2} + \frac{y^{-2}}{2} + C_1; \quad (y')^2 = y^2 + \frac{1}{y^2} + 2C_1.$$

Найдем C_1, используя начальные условия

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = (\sqrt{2})^2 + \frac{1}{(\sqrt{2})^2} + 2C_1; \quad C_1 = -1.$$

Тогда

$$(y')^2 = y^2 + \frac{1}{y^2} - 2; \quad (y')^2 = \frac{y^4 - 2y^2 + 1}{y^2}; \quad (y')^2 = \frac{(y^2 - 1)^2}{y^2};$$

$$y' = \frac{y^2 - 1}{y}; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - 1}{y}; \quad \frac{y dy}{y^2 - 1} = dx; \quad \int \frac{y dy}{y^2 - 1} = \int dx.$$

Следовательно, $\frac{1}{2}\ln|y^2-1|=x+C_2$. Из начальных условий находим значение произвольной постоянной

$$\frac{1}{2}\ln|(\sqrt{2})^2-1|=0+C_2; \quad C_2=0.$$

Получаем

$$\ln|y^2-1|=2x; \quad y^2-1=e^{2x}; \quad y^2=e^{2x}+1; \quad y=\sqrt{e^{2x}+1}.$$

Получили решение заданной задачи Коши.

4. ***Уравнения вида*** $F(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n)})$ ***однородные относительно*** $y,y',y'',\ldots,y^{(n))}$. Уравнения такого типа допускают понижение порядка при введении новой функции $z=\frac{y'}{y}$,

$z'=\frac{y''y-(y')^2}{y^2}$. При такой замене порядок уравнения понижается на единицу. Рассмотрим соответствующий пример.

Пример 6. Решить дифференциальное уравнение

$$y''\cdot y-(y')^2=2y\cdot y'+2y^2.$$

Судя по виду данного уравнения, можем сделать вывод, что это дифференциальное уравнение, допускающее понижение порядка 4-го вида, хотя его же можно воспринимать и как уравнение 3-го вида. (Это еще раз подтверждает тот факт, что одно и то же уравнение можно отнести к двум разным типам и, соответственно, решать разными способами.)

Разделим данное уравнение на y^2. Получаем

$$\frac{y''\cdot y-(y')^2}{y^2}=2\cdot\frac{y'}{y}+2.$$

Легко увидеть, что левая часть данного уравнения представляет собой производную дроби $\frac{y'}{y}$, т.е. уравнение принимает вид

$\left(\dfrac{y'}{y}\right)' = 2\cdot\dfrac{y'}{y} + 2$, поэтому можем ввести переменную $\dfrac{y'}{y} = z$.

Тогда получаем $z' = 2z + 2$: $\dfrac{dz}{dx} = 2\cdot(z+1)$. Отсюда

$$\frac{dz}{z+1} = 2dx; \quad \int\frac{dz}{z+1} = \int 2dx; \quad \ln|z+1| = 2x + \ln C_1; \quad z+1 = C_1e^{2x};$$

$$\frac{y'}{y} + 1 = C_1e^{2x}; \quad \frac{dy}{y} = \left(C_1e^{2x} - 1\right)dx; \quad \ln|y| = \frac{1}{2}C_1e^{2x} - x + \ln C_2.$$

Решение можем оставить в таком виде, а можем выразить из этого равенства $y = C_2 e^{\frac{C_1 e^{2x}}{2} - x}$.

4.3. Линейно зависимые и линейно независимые системы функций

Рассмотрим некоторую систему функций

$$y_1(x),\ \ y_2(x), \dots,\ \ y_m(x), \tag{4.4}$$

определенных и непрерывно дифференцируемых до $(m-1)$-го порядка на некотором промежутке (a,b) (конечном или бесконечном).

Данная система функций называется *линейно независимой* на данном промежутке, если из равенства нулю линейной комбинации этих функций, т.е.

$$C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \dots + C_my_m(x) = 0, \tag{4.5}$$

следует, что все коэффициенты данного разложения равны 0, т.е. $C_1 = C_2 = \dots = C_m = 0.$

Если же в данных условиях не все коэффициенты данного разложения (4.5) обращаются в нуль, т.е. существуют ненулевые коэффициенты, то система функций называется *линейно зависимой.* Это означает, что некоторые функции (с ненулевыми коэффициентами) в разложении (4.5) можно представить в виде линейной комбинации остальных.

Выясним условия линейной зависимости и независимости системы функций. Для этого равенство (4.5) продифференцируем $(m-1)$ раз. Получим систему m однородных уравнений с m неизвестными $C_1,\ C_2, \ldots,\ C_m$

$$\begin{cases} C_1 y_1 + C_2 y_2 \quad + \ \ldots \ + \quad C_m y_m \ = 0, \\ C_1 y_1' + C_2 y_2' \quad + \ \ldots \ + \quad C_m y_m' \ = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1 y_1^{(m-1)} + C_2 y_2^{(m-1)} + \ldots + C_m y_m^{(m-1)} = 0. \end{cases}$$

Из линейной алгебры известно, что однородная система m линейных уравнений с m неизвестными имеет нетривиальное (ненулевое) решение, если ее определитель равен нулю и имеет единственное (нулевое) решение, если ее определитель не равен нулю. Определителем данной системы уравнений является так называемый *определитель Вронского* или, иначе, *вронскиан*

$$W[y_1, y_2, \ldots, y_m] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_m \\ y_2' & y_m' & \cdots & y_m' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(m-1)} & y_2^{(m-1)} & \ldots & y_m^{(m-1)} \end{vmatrix}. \tag{4.6}$$

Таким образом, если

$$W[y_1, y_2, \ldots, y_m] \equiv 0$$

для всех значений аргумента x из рассматриваемого промежутка (a,b), то система функций (4.4) линейно зависима, а если

$$W[y_1, y_2, \ldots, y_m] \neq 0,$$

для некоторых $x \in (a,b)$, то данная система линейно независима.

Рассмотрим некоторые примеры линейно независимых функций, которые нам понадобятся в дальнейшем.

1. Функции $1,\ x,\ x^2,\ x^3, \ldots,\ x^{m-1}$.

Найдем для этих функций производные до $(m-1)$ порядка включительно и по формуле (4.6) вычислим для данной системы определитель Вронского.

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & \dots & x^{m-1} \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 & \dots & (m-1)x^{m-2} \\ 0 & 0 & 1\cdot 2 & 2\cdot 3x & \dots & (m-1)(m-2)x^{m-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & (m-1)(m-2)\dots 3\cdot 2\cdot 1 \end{vmatrix} = 1\cdot 1!\cdot 2!\cdot \dots \cdot (m-1)! \neq 0.$$

(Здесь мы воспользовались тем свойством определителей, что определитель треугольной матрицы равен произведению элементов главной диагонали.)

Следовательно, данная система функций является линейно не- зависимой.

2. Функции $e^{k_1 x},\ e^{k_2 x},\ \dots,\ e^{k_m x}$, где $k_1,\ k_2, \dots,\ k_m$ – различные действительные числа.

Определитель Вронского данной системы функций имеет вид

$$\begin{vmatrix} e^{k_1 x} & e^{k_2 x} & \dots & e^{k_m x} \\ k_1 e^{k_1 x} & k_2 e^{k_2 x} & \dots & k_m e^{k_m x} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_1^{m-1} e^{k_1 x} & k_2^{m-1} e^{k_2 x} & \dots & k_m^{m-1} e^{k_m x} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{k_1 x} \cdot e^{k_2 x} \cdot \dots \cdot e^{k_m x} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ k_1 & k_2 & \dots & k_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_1^{m-1} & k_2^{m-1} & \dots & k_m^{m-1} \end{vmatrix} \neq 0,$$

(мы вынесли общие множители из каждого столбца матрицы определителя), если числа $k_1,\ k_2, \dots,\ k_m$ различны, то известно, что полученный определитель не может обращаться в нуль.

Следовательно, соответствующая система функций линейно независима.

1. Функции $e^{kx},\ xe^{kx},\ x^2e^{kx},\ldots,x^{m-1}e^{kx}$.

Составим линейную комбинацию данных функций

$$C_1e^{kx}+C_2xe^{kx}+C_3x^2e^{kx}+\ldots,+C_mx^{m-1}e^{kx}=0, \qquad (4.7)$$

или, соответственно,

$$(C_1+C_2x+C_3x^2+\ldots,+C_mx^{m-1})\cdot e^{kx}=0.$$

Так как $e^{kx}\neq 0$, то $C_1+C_2x+C_3x^2+\ldots,+C_mx^{m-1}=0,$ а при условии, что система функций $1,\ x,\ x^2,\ x^3,\ldots,\ x^{m-1}$ линейно независима, из последнего равенства следует, что

$$C_1=C_2=\ldots=C_m=0.$$

Следовательно, система функций $e^{kx},\ xe^{kx},\ x^2e^{kx},\ldots,x^{m-1}e^{kx}$ также является линейно независимой.

4.4. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков

Многие задачи математики, механики, электротехники и других технических наук приводят к линейным дифференциальным уравнениям.

Общий вид линейного дифференциального уравнения порядка n задает следующее равенство:

$$L_n[y]=y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=f(x), \qquad (4.8)$$

где $p_1(x),\ p_2(x),\ldots,p_n(x),\ f(x)$ - функции, заданные и непрерывные на некотором промежутке (a,b).

Выражение

$$L_n[y]=y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y \qquad (4.9)$$

называется *линейным дифференциальным оператором.*

Линейность данного оператора заключается в том, что функция y и ее производные входят в данное выражение только в первой степени, что обеспечивает выполнение следующего равенства:

$$L_n[A\cdot y_1+B\cdot y_2]=A\cdot L_n[y_1]+B\cdot L_n[y_2], \qquad (4.10)$$

которое и означает линейность данного оператора.

Уравнение вида

$$L_n[y]=0,\quad (f(x)\equiv 0) \qquad (4.11)$$

называется *линейным однородным дифференциальным уравнением* (ЛОДУ) порядка n, а уравнение вида

$$L_n[y] = f(x) \qquad (4.12)$$

называется *линейным неоднородным дифференциальным уравнением* (ЛНОДУ) порядка n.

Частным решением (решением) дифференциального уравнения (4.11) называется любая функция $y = y(x)$, непрерывная на промежутке (a, b), которая обращает данное уравнение в тождество, т.е. $L_n[y] \equiv 0$.

ТЕОРЕМА. Если некоторые функции $y_1(x),\ y_2(x)$ являются решениями уравнения (4.11), т.е. $L_n[y_1] \equiv 0,\ L_n[y_2] \equiv 0$, то любая их линейная комбинация $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ также является решением дифференциального уравнения (4.11).

Доказательство этой теоремы непосредственно следует из свойства (4.10) линейного дифференциального оператора

$$L_n[y] = L_n[C_1 y_1 + C_2 y_2] = C_1 L_n[y_1] + C_2 L_n[y_2] \equiv C_1 0 + C_2 0 \equiv 0.$$

Теорема доказана.

Структура общего решения линейного однородного уравнения порядка n

Любая система $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ n линейно независимых решений уравнения (4.11) называется *фундаментальной системой решений* данного уравнения. Тогда *общее решение линейного однородного дифференциального уравнения* (4.11) имеет вид

$$\bar{y}(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k y_k(x). \qquad (4.13)$$

В самом деле

$$L_n[\bar{y}(x)] = L_n\left(\sum_{k=1}^{n} C_k y_k(x)\right) = \sum_{k=1}^{n} C_k L_n[y_k(x)] \equiv 0.$$

Структура общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения порядка n

Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения (4.12) имеет вид

$$y(x) = \overline{y}(x) + y_*(x), \qquad (4.14)$$

где $\overline{y}(x)$ – общее решение соответствующего однородного уравнения (4.11), а $y_*(x)$ – частное решение данного решения, соответствующее данной правой части $f(x)$.

В самом деле,

$$L_n[y(x)] = L_n[\overline{y}(x)] + L_n[y_*(x)] = 0 + L_n[y_*(x)] = f(x).$$

4.5 Линейные однородные дифференциальные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами

Это уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{n-2} \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \qquad (4.15)$$

где $a_1,\ a_2, \ldots, a_{n-1},\ a_n$ – некоторые действительные числа.

Частные решения уравнения такого вида ищутся в виде $y = e^{kx}$. Подставив данную функцию в уравнение (4.15) $(y' = ke^{kx},\quad y'' = k^2 e^{kx}, \ldots,\ y^{(n)} = k^n e^{kx})$, получаем

$k^n e^{kx} + a_1 k^{n-1} e^{kx} + a_2 k^{n-2} e^{kx} + \ldots + a_{n-1} k e^{kx} + a_n e^{kx} = 0$ или

$e^{kx}(k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \ldots + a_{n-1} k + a_n) = 0$.

Так как $e^{kx} \neq 0$, то получаем уравнение

$$k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \ldots + a_{n-1} k + a_n = 0, \qquad (4.16)$$

которое называется *характеристическим уравнением* уравнения (4.15).

Если некоторое число k_i является корнем характеристического уравнения (4.16), то функция $y = e^{k_i x}$ является решением дифференциального уравнения (4.15).

Из алгебры известно, что любое уравнение n-го порядка имеет ровно n корней, среди которых могут быть различные, одинаковые (кратные) и комплексные. Выясним структуру общего решения дифференциального уравнения (4.15) в зависимости от корней характеристического уравнения (4.16).

1. Если все корни уравнения (4.16) $k_1,\ k_2,\ldots,k_n$ различные и действительные, то $y_1=e^{k_1x},\ y_2=e^{k_2x},\ \ldots,\ y_n=e^{k_nx}$ и общее решение уравнения (4.15) имеет вид

$$\overline{y}=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}+\ldots+C_ne^{k_n x}.$$

Пример 1. Решить дифференциальное уравнение

$$y'''-5y''-6y'=0.$$

Составим соответствующее характеристическое уравнение (следует заметить, что степень k в характеристическом уравнении совпадает с порядком производной дифференциального уравнения):

$$k^3-5k^2-6k=0;\quad k(k^2-5k-6)=0;\quad k(k-6)(k+1)=0,$$

т.е.

$$k_1=0,\ y_1=e^{0x}=1;\quad k_2=6,\ y_2=e^{6x};\quad k_3=-1,\ y_3=e^{-x}.$$

Тогда общее решение имеет вид

$$\overline{y}(x)=C_1+C_2e^{6x}+C_3e^{-x}.$$

Пример 2. Найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее данным начальным условиям

$$y''+5y'+6y=0,\quad y(0)=1,\quad y'(0)=-6.$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$k^2+5k+6=0,\quad (k+2)(k+3)=0,\quad k_1=-2,\quad k_3=-3.$$

Тогда $y_1=e^{-2x},\quad y_2=e^{-3x}$ и общее решение имеет вид $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{-3x}$. Его производная $y'=-2C_1e^{-2x}-3C_2e^{-3x}$. Из начальных условий получаем $1=C_1+C_2$. $-6=-2C_1-3C_2$, $C_1=-3,\ C_2=4$ и решение, отвечающее данному начальному условию, имеет вид $y=-3e^{-2x}+4e^{-3x}$.

2. Если среди корней характеристического уравнения есть некоторый корень кратности m: $k_1=k_2=\ldots=k_m=k$, то данному множеству решений характеристического уравнения отвечают следующие решения уравнения (4.15):

$$y_1 = e^{kx},\ \ y_2 = xe^{kx}, \ldots, y_m = x^{m-1}e^{kx}.$$

Пример 3. Решить дифференциальное уравнение:

$$y^{(5)} + 3y^{(4)} + 3y''' + y'' = 0.$$

Его характеристическое уравнение $k^5 + 3k^4 + 3k^3 + k^2 = 0$ или $k^2(k+1)^3 = 0.$ Следовательно, $k_1 = k_2 = 0,\ k_3 = k_4 = k^5 = -1.$ Соответствующие частные решения имеют вид

$y_1 = e^{0x} = 1,\quad y_2 = x,\quad y_3 = e^{-x},\quad y_4 = xe^{-x},\ y_5 = x^2e^{-x}$,

получаем общее решение данного уравнения

$$\overline{y} = C_1 + C_2x + C_3e^{-x} + C_4xe^{-x} + C_5x^2e^{-x}.$$

3. Если характеристическое уравнение имеет действительные коэффициенты, то комплексные корни таких уравнений появляются парами, вместе с комплексно сопряженными, т.е., если $k_1 = a + bi$ является корнем характеристического уравнения, то $k_2 = a - bi$ также является корнем характеристического уравнения и этой паре корней отвечают решения

$$y_1 = e^{ax}\cos bx;\quad y_2 = e^{ax}\sin bx.$$

Пример 4. Найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданным начальным условиям

$$y'' - 2y' + 10y = 0;\quad y(\frac{\pi}{6}) = 0,\ \ y'(\frac{\pi}{6}) = e^{\frac{\pi}{6}}.$$

Характеристическое уравнение имеет вид: $k^2 - 2k + 10 = 0$. Его решение $k = 1 \pm 3i$ и соответствующие решения данного уравнения $y_1 = e^x\cos 3x,\ \ y_2 = e^x\sin 3x$. Тогда общее решение данного дифференциального уравнения

$$y(x) = C_1e^x\cos 3x + C_2e^x siv 3x = e^x(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x).$$

Его производная

$$y'(x) = e^x(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x) + e^x(-3C_1\sin 3x + 3C_2\cos 3x).$$

Найдем произвольные постоянные, используя начальные условия

$$0 = y(\frac{\pi}{6}) = e^{\frac{\pi}{6}}(C_1\cos\frac{\pi}{2} + C_2\sin\frac{\pi}{2}); \quad 0 = e^{\frac{\pi}{6}}(0 + C_2); \quad C_2 = 0;$$

$$e^{\frac{\pi}{6}} = y'(\frac{\pi}{6}) = e^{\frac{\pi}{6}}(C_1\cos\frac{\pi}{2} + C_2\sin\frac{\pi}{2}) + e^{\frac{\pi}{6}}(-3C_1\sin\frac{\pi}{2} +$$

$$+3C_2\cos\frac{\pi}{2}) = e^{\frac{\pi}{6}}(0+0) + e^{\frac{\pi}{6}}(-3C_1 + 0); \quad C_1 = -\frac{1}{3}.$$

Тогда решение данной задачи Коши имеет вид

$$y = -\frac{1}{3}e^x\cos 3x.$$

4. Случай кратных комплексных корней рассмотрим на при - мере (как и в случае действительных корней, второе решение, соответствующее кратному корню, умножается на x).

Пример 5. Решить следующее дифференциальное уравнение $y^{(4)} + 2y'' + y = 0.$

Его характеристическое уравнение $k^4 + 2k^2 + 1 = 0;$ $(k^2+1)^2 = 0;\quad k^2 = -1;\quad k_{1,2} = \pm i;\quad k_{3,4} = \pm i$ (одинаковые корни из-за квадрата соответствующей скобки, так как степень скобки обеспечивает кратность корня). Тогда $y_1 = cos\,x,\ y_2 = sin\,x;$ $y_3 = x\,cos\,x,\ y_4 = x\,sin\,x$ и общее решение имеет вид

$$\overline{y}(x) = C_1\cos x + C_2\sin x + C_3 x\cos x + C_4 x\sin x.$$

4.6. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами

Такие уравнения имеют вид

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{n-2} \ldots + a_{n-1}y' + a_n y = f(x), \qquad (4.17)$$

где $f(x)$ некоторая непрерывная на промежутке $[a,b]$ функция, а $a_1,\ a_2, \ldots, a_{n-1},\ a_n$ – некоторые действительные числа.

Как следует из п. 4.4 (формула (4.14)), общее решение такого уравнения имеет вид $y(x) = \overline{y}(x) + y_*(x)$, где $\overline{y}(x)$ – общее решение соответствующего однородного уравнения, а $y_*(x)$ – частное решение, соответствующее данной правой части $f(x)$ уравнения (4.17).

Выясним вид частного решения $y_*(x)$ в зависимости от вида функции $f(x)$ и рассмотрим соответствующие примеры.

1. Пусть правая часть уравнения (4.17) представляет собой многочлен степени n, т.е. $f(x)=P_n(x)$. Тогда

$$y_*(x)=Q_n(x)\cdot x^r,$$

где $Q_n(x)$ – многочлен такой же степени с неопределенными коэффициентами, а r – кратность корня $k=0$ в характеристическом уравнении.

Пример 1. Найти общее решение уравнения

$$y^{(4)}+2y'''+y''=12x^2-6x.$$

Решение данного уравнения имеет вид $y(x)=\overline{y}(x)+y_*(x)$.

Найдем сначала $\overline{y}(x)$. Для этого решим характеристическое уравнение

$$k^4+2k^3+k^2=0;\quad k^2(k^2+2k+1)=0\quad k^2\cdot(k+1)^2=0.$$

Тогда $k_1=k_2=0;\quad k_3=k_4=-1$. Соответствующие частные решения однородного уравнения

$$y_1=e^{0\cdot x}=1,\quad y_2=x\cdot e^{0\cdot x}=x,\quad y_3=e^{-x},\quad y_4=x\cdot e^{-x}.$$

Тогда общее решение однородного уравнения имеет вид

$$\overline{y}(x)=C_1+C_2x+C_2e^{-x}+C_2x\cdot e^{-x}.$$

Правая часть данного уравнения: $f(x)=12x^2-5x$. Следовательно, $y_*(x)=(Ax^2+Bx+C)\cdot x^2=Ax^4+Bx^3+Cx^2$. Скобку умножаем на x^2, так как характеристическое уравнение имеет два корня, равных 0. Найдем коэффициенты $A,\ B,\ C$ из того условия, что функция $y_*(x)$ удовлетворяет исходному уравнению (т.е. так называемым методом неопределенных коэффициентов). Для этого найдем четыре производные от функции $y_*(x)$ и подставим в исходное уравнение

$$y'_* = 4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx; \quad y''_* = 12Ax^2 + 6Bx + 2C;$$

$$y'''_* = 24Ax + 6B; \quad y_*^{(4)} = 24A.$$

Подставим полученные производные в исходное уравнение

$$24A + 2(24Ax + 6B) + (12Ax^2 + 6Bx + 2C) = 12x^2 - 6x;$$

$$12Ax^2 + (48A + 6B)x + (24A + 12B + 2C) = 12x^2 - 6x.$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях данного равенства

$$\begin{array}{c|l} x^2 & 12A = 12, \\ x & 48A + 6B = -6, \\ 1 & 24A + 12B + 2C = 0. \end{array}$$

Следовательно, $A=1$, $B=-9$, $C=42$ и $y_* = x^4 - 9x^3 + 42x^2$.

Тогда общее решение исходного уравнения

$$y(x) = \overline{y} + y_* = C_1 + C_2 x + C_2 e^{-x} + C_2 x \cdot e^{-x} + x^4 - 9x^3 + 42x^2.$$

2. Если правая часть уравнения (4.17) имеет следующий вид:

$$f(x) = P_n(x) \cdot e^{a \cdot x},$$

то $y_* = Q_n(x) \cdot e^{a \cdot x} \cdot x^r$, где r - кратность корня $k = a$ в характеристическом уравнении.

Пример 2. Решить дифференциальное уравнение

$$y''' - y'' - 2y' = (6x - 11) \cdot e^{-x}.$$

Решение данного уравнения имеет вид $y(x) = \overline{y}(x) + y_*(x)$.

Характеристическое уравнение имеет вид

$$k^3 - k^2 - 2k = 0; \quad k \cdot (k^2 - k - 2) = k \cdot (k - 2) \cdot (k + 1) = 0;$$

$$k_1 = 0, \; y_1 = 1; \quad k_2 = 2, \; y_2 = e^{2x}; \quad k_3 = -1, \; y_3 = e^{-x}.$$

Тогда $\overline{y}(x) = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-x}$.

Правой части данного уравнения $f(x) = (6x - 11) \cdot e^{-x}$ соответствует $y_* = (Ax + B) \cdot e^{-x} \cdot x = (Ax^2 + Bx) \cdot e^{-x}$ (на x умноаем, так как среди корней характеристического уравнения есть один корень $k=-1$). Найдем три производные получен -ной функции и подставим в исходное уравнение.

$$y_*' = (2Ax+B)\cdot e^{-x} - (Ax^2+Bx)\cdot e^{-x} = e^{-x}\cdot(-Ax^2+2Ax-Bx+B);$$

$$y_*'' = -e^{-x}(-Ax^2+2Ax-Bx+B)+e^{-x}(-2Ax+2A-B)=$$

$$= e^{-x}\cdot(Ax^2-4Ax+Bx+2A-2B);$$

$$y_*''' = -e^{-x}(Ax^2-4Ax+Bx+2A-2B)+e^{-x}(2Ax-4A+B)=$$

$$= e^{-x}(-Ax^2+6Ax-Bx-6A+3B).$$

Подставим полученные производные в заданное уравнение

$$e^{-x}(-Ax^2+6Ax-Bx-6A+3B)-e^{-x}(Ax^2-4Ax+Bx+2A-2B)-$$

$$-2e^{-x}(-Ax^2+2Ax-Bx+B)=e^{-x}(6x-11).$$

Разделим полученное равенство на e^{-x} и сгруппируем подобные слагаемые

$$x^2(-A-A+2A)+x(6A-B+4A-B-4A+2B)+(-6A+3B-2A+$$

$$+2B-2B)=6x-11;\quad x(6A)+(-8A+3B)=6A-11.$$

Тогда $A=1,\ B=-1$ и $y_*(x)=(x^2-x)e^{-x}$ и общее решение

$$Y(x)=\overline{y}(x)+y_*(x)=C_1+C_2e^{2x}+C_3e^{-x}+(x^2-x)\cdot e^{-x}.$$

3. Если правая часть уравнения (4.17) имеет вид

$$f(x)=e^{ax}(\alpha\cos bx+\beta\sin bx),$$

где $a,\ b,\ \alpha,\ \beta$ – некоторые фиксированные числа, то

$$y_*(x)=e^{ax}(A\cos bx+B\sin bx)\cdot x^r,$$

где r – кратность корней $k=a\pm bi$ в характеристическом уравнении.

Пример 3. Решить дифференциальное уравнение

$$y''-4y'+4y=e^{2x}\cos 4x.$$

Характеристическое уравнение $k^2-4k+4=(k-2)^2=0$,

$$k_1=k_2=2;\quad y_1=e^{2x},\ y_2=x\cdot e^{2x};\quad \overline{y}(x)=C_1e^{2x}+C_2x\cdot e^{2x}.$$

Правая часть $f(x)=e^{2x}\cos 4x$, тогда

$$y_*(x) = e^{2x}(A\cos 4x + B\sin 4x).$$

На x не нужно умножать, так как в характеристическом уравнении нет корней $k = 2 \pm 4i$. Найдем две производные от y_* и подставим в уравнение

$$y_*' = 2e^{2x}(A\cos 4x + B\sin 4x) + e^{2x}(-4A\sin 4x + 4B\cos 4x);$$

$$y_*'' = 4e^{2x}(A\cos 4x + B\sin 4x) + 2e^{2x}(-4A\sin 4x + 4B\cos 4x) +$$

$$+ 2e^{2x}(-4A\sin 4x + 4B\cos 4x) + e^{2x}(-16A\cos 4x - 16B\sin 4x).$$

После подстановки в уравнение, получаем

$$4e^{2x}(A\cos 4x + B\sin 4x) + 2e^{2x}(-4A\sin 4x + 4B\cos 4x) +$$

$$+ 2e^{2x}(-4A\sin 4x + 4B\cos 4x) + e^{2x}(-16A\cos 4x - 16B\sin 4x) -$$

$$- 4(2e^{2x}(A\cos 4x + B\sin 4x) + e^{2x}(-4A\sin 4x + 4B\cos 4x)) +$$

$$+ 4(e^{2x}(A\cos 4x + B\sin 4x)) = e^{2x}\cos 4x.$$

Разделим полученное равенство на e^{2x} и сгруппируем подобные элементы

$$\cos 4x(4A + 8B + 8B - 16A - 8A - 16B + 4A) + \sin 4x(4B - 8A - 8A -$$

$$16B - 8B + 16A + 4B) = \cos 4x; \;\; -16A\cos 4x - 16B\sin 4x = \cos 4x.$$

$$-16A = 1, \quad A = -\frac{1}{16}; \quad -16B = 0, \quad B = 0.$$

Получаем $y_* = -\frac{1}{16}e^{2x}\cos 4x$, общее решение имеет вид

$$y(x) = \overline{y}(x) + y_*(x) = C_1e^{2x} + C_2x \cdot e^{2x} - \frac{1}{16}e^{2x}\cos 4x.$$

Пример 4. Решить дифференциальное уравнение

$$y'' + 4y = \cos 2x; \quad y(0) = y(\frac{\pi}{4}) = 0.$$

Сначала найдем решение однородного уравнения. Характеристическое уравнение $k^2 + 4 = 0;$ $k_{1,2} = \pm 2i;$ $y_1 = \cos 2x,$ $y_2 = \sin 2x$ и общее решение однородного уравнения имеют вид $\overline{y} = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$. Правая часть данного дифференциального уравнения $f(x)=\cos 2x$ (соответствует $k=\pm 2i$), поэтому $y_*(x)=(A\cos 2x+B\sin 2x)\cdot x$. Чтобы найти коэффициенты A и B найдем две производные этой функции и подставим их в исходное уравнение:

$$y_*'=(-2A\sin 2x+2B\cos 2x)\cdot x+(A\cos 2x+B\sin 2x);$$

$$y_*''=(-4A\cos 2x-4B\sin 2x)\cdot x+(-2A\sin 2x+2B\cos 2x)+$$
$$+(-2A\sin 2x+2B\cos 2x);$$

$$(-4A\cos 2x-4B\sin 2x)\cdot x+(-2A\sin 2x+2B\cos 2x)\cdot 2+$$
$$+4(A\cos 2x+B\sin 2x)=\cos 2x.$$

Получаем $-4A\sin 2x+4B\cos 2x=\cos 2x$, следовательно $-4A=0,\ 4B=1;\ A=0,\ B=\frac{1}{4};\ y_*=\frac{1}{4}\sin 2x\cdot x$. Тогда общее решение

$$y(x)=\overline{y}(x)+y_*(x)=(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)+\frac{1}{4}\sin 2x\cdot x.$$

Чтобы найти $C_1,\ C_2$, используем краевые условия

$$y(0)=y\left(\frac{\pi}{4}\right)=0.$$

Получим систему $\begin{cases}0=C_1\cos 0+C_2\sin 0+0,\\ 0=C_1\cos\dfrac{\pi}{2}+C_2\sin\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{1}{4}\sin\dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{\pi}{4};\end{cases}$

$$\begin{cases}C_1=0,\\ 0=C_2+\dfrac{\pi}{16},\quad C_2=-\dfrac{\pi}{16}.\end{cases}$$

Тогда частное решение, отвечающее данной краевой задаче, имеет вид

$$y(x)=-\frac{\pi}{16}\sin 2x+\frac{1}{4}x\sin 2x;\quad y(x)=\frac{1}{16}\cdot(4x-1)\sin 2x.$$

4. Если правая часть дифференциального уравнения представляет собой сумму функций предыдущего вида

$$f(x)=f_1(x)+f_2(x),$$

то частное решение данного уравнения представляет собой сумму частных решений, отвечающих соответствующим функциям $y_* = y_{*1} + y_{*2}$.

Пример 5. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' + 4y = -8\sin 2x + 32\cos 2x + 4e^{2x}.$$

Характеристическое уравнение имеет вид $k^2 + 4 = 0$, $k_{1,\,2} = \pm\, 2i$. Тогда

$$y_1 = \cos 2x, \quad y_2 = \sin 2x; \quad \overline{y} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

Правая часть данного дифференциального уравнения представляет собой сумму двух функций: $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, где $f_1(x) = -8\cos 2x + 32\sin 2x$ отвечает $k = \pm\, 2i$, которое совпадает с корнями характеристического уравнения, поэтому $y_{*1} = (A\cos 2x + B\sin 2x)\cdot x$; $f_2(x) = 4e^{2x}$ и $y_{*,2} = C\cdot e^{2x}$.

Тогда $y_* = (A\cos 2x + B\sin 2x)\cdot x + C\cdot e^{2x}$. Чтобы найти A, B и С, найдем две производные полученной функции и подставим их в исходное дифференциальное уравнение.

$$y_*' = (-2A\sin 2x + 2B\cos x)\cdot x + (A\cos 2x + B\sin 2x) + 2C\cdot e^{2x};$$

$$y_*'' = (-4A\cos 2x - 4B\sin 2x)\cdot x + (-2A\sin 2x + 2B\cos 2x) +$$

$$+(-2A\sin 2x + 2B\cos 2x) + 4C\cdot e^{2x}.$$

Получаем

$$(-4A\cos 2x - 4B\sin 2x)\cdot x + 2\cdot(-2A\sin 2x + 2B\cos 2x) + 4C\cdot e^{2x} +$$

$$+4((A\cos 2x + B\sin 2x)\cdot x + C\cdot e^{2x}) \quad = -8\sin 2x + 32\cos 2x + 4e^{2x};$$

$$(-4A\cos 2x - 4B\sin 2x)\cdot x + 2\cdot(-2A\sin 2x + 2B\cos 2x) + 4C\cdot e^{2x} +$$

$$+(4A\cos 2x + 4B\sin 2x)\cdot x + 4C\cdot e^{2x} = -8\sin 2x + 32\cos 2x + 4e^{2x};$$

Первое и четвертое слагаемые в данном равенстве взаимно уничтожаются. В результате получаем

$$-4A\sin 2x + 4B\cos 2x + 8C\cdot e^{2x} = -8\sin 2x + 32\cos 2x + 4e^{2x};$$

$$-4A = -8, \quad 4B = 32, \quad 8C = 4; \quad A = 2, \quad B = 8, \quad C = 0{,}5.$$

Тогда $y_* = (2\cos 2x + 8B\sin 2x)\cdot x + 0{,}5e^{2x}$, следовательно, общее решение имеет вид

$$y(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + (2\cos 2x + 8B \sin 2x) \cdot x + 0{,}5e^{2x}.$$

В общем случае правая часть дифференциального уравнения высшего порядка специального вида записывается следующим образом:

$$f(x) = e^{\alpha x}(P_{n_1}(x)\cos \beta x + P_{n_2}(x)\sin \beta x)$$

и частное решение, соответствующее данной правой части уравнения имеет вид

$$y_*(x) = e^{\alpha x}(Q_n(x)\cos \beta x + R_n(x)\sin \beta x) \cdot x^r,$$

где r – кратность корней $k = \alpha \pm \beta i$ в характеристическом уравнении; $Q_n(x)$, $R_n(x)$ – многочлены с неопределенными коэффициентами степени $n = \max(n_1, n_2)$.

Мы рассмотрели основные виды линейных дифференциальных уравнений высшего порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида.

Более универсальным методом решения неоднородных линейных дифференциальных уравнений высшего порядка является так называемый метод вариации (или метод *Лагранжа*).

4.7. Решение линейных неоднородных дифференциальных уравнений методом вариации произвольных постоянных

Пусть задано неоднородное линейное дифференциальное уравнение порядка n

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x), \quad (4.18)$$

где функции $p_1(x)$, $p_2(x), \ldots, p_n(x)$, $f(x)$ непрерывны на некотором отрезке $[a, b]$. Пусть найдено общее решение соответствующего однородного линейного дифференциального уравнения в виде

$$\overline{y}(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x), \quad (4.19)$$

где C_1, $C_2, \ldots, C_n$ – произвольные постоянные. Метод вариации произвольных постоянных заключается в том, что произвольные постоянные C_1, $C_2, \ldots, C_n$ в равенстве (4.19) заменяются функциями, т.е. общее решение уравнения (4.18) записывают в виде:

$$y(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) + \ldots + C_n(x)y_n(x), \quad (4.20)$$

где $C_1(x),\ C_2(x),\ldots,C_n(x)$ – неизвестные функции, которые находим из того условия, что равенство (4.20) определяет решение уравнения (4.18).

Рассмотрим произвольное линейное неоднородное уравнение 2-го порядка

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x). \tag{4.21}$$

Пусть $y_1(x),\ y_2(x)$ – частные решения однородного дифференциального уравнения

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0, \tag{4.22}$$

т.е. $y_1''+p(x)y_1'+q(x)y_1=0;\ \ y_2''+p(x)y_2'+q(x)y_2=0.$ (4.23)

Тогда общее решение данного уравнения имеет вид

$\bar{y}(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$.

Решение неоднородного дифференциального уравнения (4.21) будем искать в виде

$$y(x)=C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x).$$

Найдем производную данной функции

$$y'(x)=C_1'(x)y_1(x)+C_1(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2(x)+C_2(x)y_2'(x)=$$
$$=(C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x))+(C_1(x)y_1'(x)+C_2(x)y_2'(x)).$$

На искомые функции $C_1(x),\ C_2(x)$ наложим ограничение

$$C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x)=0. \tag{4.24}$$

Тогда

$$y'(x)=C_1(x)y_1'(x)+C_2(x)y_2'(x).$$

Найдем вторую производную

$$y''(x)=C_1'(x)y_1'(x)+C_1(x)y_1''(x)+C_2'(x)y_2'(x)+C_2(x)y_2''. \tag{4.25}$$

Полученные производные подставим в исходное уравнение (4.21). В результате получаем

$$C_1'(x)y_1'(x)+C_1(x)y_1''(x)+C_2'(x)y_2'(x)+C_2(x)y_2''+$$
$$+p(x)\cdot(C_1(x)y_1'(x)+C_2(x)y_2'(x))+$$
$$+q(x)(C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x))=f(x).$$

Перегруппируем полученное равенство следующим образом:

$$(C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x))+C_1(x)(y_1''(x)+p(x)y_1'(x)+q(x)y_1(x))+$$
$$+C_2(x)(y''(x)+p(x)y_2'(x)+q(x)y_2(x))=f(x).$$

Если учтем формулы (4.23), то данное равенство сводится к виду

$$C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)=f(x). \tag{4.26}$$

Принимая во внимание формулы (4.24) и (4.26), получаем линейную систему уравнений, позволяющую найти неизвестные функции $C_1'(x),\ C_2'(x)$.

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x)=0, \\ C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)=f(x). \end{cases} \tag{4.27}$$

Решим данную систему по правилам Крамера. Главный определитель

$$\Delta=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}=W[y_1,y_2]\neq 0$$

представляет собой определитель Вронского линейно независимой системы функций $y_1(x),\ y_2(x)$, образующей общее решение однородного уравнения (4.22).

Определители

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ f(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}=-f(x)\cdot y_2(x) \text{ и}$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} y_1(x) & 0 \\ y_1'(x) & f(x) \end{vmatrix}=y_1(x)\cdot f(x).$$

Тогда

$$C_1'(x)=\frac{\Delta_1}{\Delta}=-\frac{f(x)\cdot y_2(x)}{W[y_1,y_2]};\quad C_1(x)=-\int\frac{f(x)\cdot y_2(x)}{W[y_1,y_2]}dx+c_1;$$

$$C_2'(x)=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{f(x)\cdot y_1(x)}{W[y_1,y_2]};\quad C_1(x)=\int\frac{f(x)\cdot y_1(x)}{W[y_1,y_2]}dx+c_2.$$

Рассмотрим примеры

Пример 1. Решить дифференциальное уравнение второго порядка методом вариации $y''+2y'+2=\dfrac{e^{-x}}{\sin x}$.

Составим характеристическое уравнение $k^2+2k+2=0$. Его решения $k_{1,2}=-1\pm i$, соответствующие этой паре комплексных чисел, частные решения однородного уравнения

$$y_1(x)=e^{-x}\cos x,\quad y_2(x)=e^{-x}\sin x$$

и общее решение однородного дифференциального уравнения имеет вид $\overline{y}(x)=C_1e^{-x}\cos x+C_2e^{-x}\sin x$, тогда общее решение неоднородного (исходного) дифференциального уравнения

$$y(x)=C_1(x)e^{-x}\cos x+C_2(x)e^{-x}\sin x. \tag{4.28}$$

По формуле (4.27), функции $C_1'(x),\ C_2'(x)$ можно найти как решение системы

$$\begin{cases} C_1'(x)\cdot e^{-x}\cos x+C_2'(x)\cdot e^{-x}\sin x=0,\\ C_1'(x)(-e^{-x}\cos x-e^{-x}\sin x)+C_2'(x)(-e^{-x}\sin x+e^{-x}\cos x)=\dfrac{e^{-x}}{\sin x}.\end{cases}$$

Разделим оба уравнения системы на e^{-x}

$$\begin{cases} C_1'\cos x+C_2'\sin x=0,\\ C_1'(-\cos x-\sin x)+C_2'(-\sin x+\cos x)=\dfrac{1}{\sin x}.\end{cases}$$

Главный определитель этой системы

$$\Delta=\begin{vmatrix}\cos x & \sin x\\ -\cos x-\sin x & -\sin x+\cos x\end{vmatrix}=-\cos x\cdot\sin x+\cos^2 x+$$
$$+\cos x\cdot\sin x+\sin^2 x=1.$$

Вычислим определители

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}0 & \sin x\\ \dfrac{1}{\sin x} & -\sin x+\cos x\end{vmatrix}=0-\sin x\cdot\frac{1}{\sin x}=-1;$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}\cos x & 0\\ -\cos x-\sin x & \dfrac{1}{\sin x}\end{vmatrix}=\frac{\cos x}{\sin x}-0=ctgx.$$

Тогда

$$C_1'(x)=\frac{\Delta_1}{\Delta}=-1;\quad C_2'(x)=\frac{\Delta_2}{\Delta}=ctgx.$$

Теперь можем найти сами функции $C_1(x),\ C_2(x)$, проинтегрировав последние равенства

$$C_1(x)=\int(-1)dx = x+c_1;\quad C_2(x)=\int ctgx dx=\ln|\sin x|+c_2.$$

Тогда общее решение заданного уравнения имеет вид

$$y(x)=(x+c_1)e^{-x}\cos x+((\ln|\sin x|+c_2)e^{-x}\sin x=$$
$$=(c_1(x)e^{-x}\cos x+{}_2(x)e^{-x}\sin x)+(xe^{-x}\cos x+\ln|\sin x|e^{x}\sin x).$$

В последнем выражении первая скобка представляет собой решение однородного уравнения – $\overline{y}(x)$, а вторая скобка – частное решение, отвечающее заданной правой части, т.е. это $y_*(x)$.

Пример 2. Найти решение задачи Коши заданного дифференциального уравнения:

$$y''-3y'+2y=\frac{1}{1+e^{-x}};\quad y(0)=1+2\ln 2,\quad y'(0)=3\ln 2.$$

Составим и решим характеристическое уравнение

$k^2-3k+2=0;\ k_1=1,\ k_2=2,\ y_1(x)=e^{x},\ y_2(x)=e^{2x}$ и общее решение однородного уравнения

$$\overline{y}(x)=C_1e^{x}+C_2e^{2x}.$$

Общее решение неоднородного уравнения будем искать в виде:

$$y(x)=C_1(x)e^{x}+C_2(x)e^{2x}. \qquad (4.29)$$

Составим систему вида (4.27) для данного уравнения

$$\begin{cases} C_1'(x)e^{x}+C_2'(x)e^{2x}=0,\\ C_1'(x)e^{x}+2C_2'(x)e^{2x}=\dfrac{1}{1+e^{-x}}. \end{cases}$$

Главный определитель данной системы

$$\Delta=\begin{vmatrix} e^{x} & e^{2x}\\ e^{x} & 2e^{2x}\end{vmatrix}=2e^{3x}-e^{3x}=e^{3x}.$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 0 & e^{2x}\\ \dfrac{1}{1+e^{-x}} & 2e^{2x}\end{vmatrix}=\frac{e^{2x}}{1+e^{-x}};\quad \Delta_2=\begin{vmatrix} e^{x} & 0\\ e^{x} & \dfrac{1}{1+e^{-x}}\end{vmatrix}=\frac{e^{x}}{1+e^{-x}}.$$

Тогда

$$C_1'(x)=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}};\quad C_2'(x)=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{e^{-2x}}{1+e^{-x}}.$$

Найдем функции $C_1(x)$, $C_2(x)$, проинтегрировав последние равенства

$$C_1(x)=\int\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx=\int\frac{-d(1+e^{-x})}{1+e^{-x}}=-\ln(1+e^{-x})+c_1;$$

$$C_2(x)=\int\frac{e^{-2x}}{1+e^{-x}}\,dx=\int\frac{(e^{-2x}+e^{-x})-e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx=$$

$$=\int(e^{-x}-\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}})\,dx=-e^{-x}+\ln(1+e^{-x})+c_2.$$

Тогда, учитывая равенство (4.29), общее решение исходного дифференциального уравнения имеет вид

$$y(x)=(-\ln(1+e^{-x})+c_1)e^{x}+(-e^{-x}+\ln(1+e^{-x})+c_2)e^{2x}.$$

Чтобы найти решение задачи Коши, используя начальные условия, найдем производную

$$y'(x)=(-\frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}})\cdot e^{x}+(-\ln(1+e^{-x})+c_1)\cdot e^{x}+$$

$$+(e^{-x}+\frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}})\cdot e^{2x}+(-e^{-x}+\ln(1+e^{-x})+c_2)\cdot 2e^{2x}.$$

Получаем следующую систему:

$$\begin{cases}1+2\ln 2=(-\ln(1+e^{0})+c_1)e^{0}+(-e^{0}+\ln(1+e^{0})+c_2)e^{0},\\ 3\ln 2=(\dfrac{e^{0}}{1+e^{0}})e^{0}+(-\ln(1+e^{0})+c_1)e^{0}+(e^{0}-\dfrac{e^{0}}{1+e^{0}})e^{0}+\\ \qquad +(-e^{0}+\ln(1+e^{0})+c_2)\cdot 2e^{0},\end{cases}$$

или

$$\begin{cases}1+2\ln 2=-\ln 2+c_1-1+\ln 2+c_2,\\ 3\ln 2=\dfrac{1}{2}-\ln 2+c_1+1-\dfrac{1}{2}-2+2\ln 2+2c_2;\end{cases}$$

$$\begin{cases}c_1+c_2=2+2\ln 2,\\ c_1+2c_2=2\ln 2+1;\end{cases}\qquad \begin{cases}c_1=3+2\ln 2,\\ c_2=-1.\end{cases}$$

Тогда получаем решение задачи Коши

$$y(x) = (-\ln(1+e^{-x}) + 3 + 2\ln 2)e^{x} + (-e^{-x} + \ln(1+e^{-x}) - 1)e^{2x} =$$
$$= -e^{x}\ln(1+e^{-x}) + (3 + 2\ln 2)e^{x} + e^{x} + e^{2x}\ln(1+e^{-x}) - e^{2x}.$$

Окончательно

$$y(x) = (e^{2x} - e^{x})\ln(1+e^{-x}) + (4 + 2\ln 2)e^{x} - e^{2x}.$$

Замечание 1. В случае линейного неоднородного дифференциального уравнения произвольного порядка

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x)$$

система (4.27) будет иметь вид:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) + \ldots + C_n'(x)y_n(x) = 0, \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) + \ldots + C_n'(x)y_n'(x) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + C_2'(x)y_2^{(n-1)}(x) + \ldots + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) = f(x). \end{cases}$$

Во всех уравнениях, кроме последнего, в правой части стоят нули.

Замечание 2. Методом вариации произвольных постоянных можно решать и линейные неоднородные уравнения, рассмотренные в предыдущем разделе (т.е. этот метод можно отнести к общим методам решения линейных неоднородных дифференциальных уравнений), но часто при вычислении неизвестных функций $C_1(x),\ C_2(x), \ldots,\ C_n(x)$ можем получить довольно громоздкие интегралы, поэтому, если функцию $f(x)$ можно считать правой частью специального вида, удобно подобрать частное решение, соответствующее данной функции, используя метод неопределенных коэффициентов, рассмотренный в п.4.6.

Пример 3. Методом вариации найти общее решение дифференциального уравнения $y''' - y' = -2x - 2$.

Найдем общее решение однородного уравнения. Характеристическое уравнение $k^3 - k = 0$, $\ k_1 = 0,\ k_2 = 1,\ k_3 = -1$. Тогда $y_1(x) = 1,\ y_2(x) = e^{x},\ y_3(x) = e^{-x}$ и $\overline{y}(x) = C_1 + C_2e^{x} + C_3e^{-x}$.

Решение неоднородного уравнения записываем в виде

$$y(x) = C_1(x) + C_2(x)e^{x} + C_3(x)e^{-x}.$$

Неизвестные функции находим с помощью системы

$$\begin{cases} C_1'(x) + C_2'(x)e^{x} + C_2'(x)e^{-x} = 0, \\ C_2'(x)e^{x} - C_3'(x)e^{-x} = 0, \\ C_2'(x)e^{x} + C_3'(x)e^{-x} = -2x - 2, \end{cases}$$

$C_3'(x) = C_2'e^{2x}$ (из второго уравнения). Тогда из третьего уравнения $2C_2'(x)e^{x} = (-2x-2)$, $C_2'(x) = (-x-1)e^{-x}$ и $C_3'(x) = (-x-1)\,e^{x}$.
Из первого уравнения $C_1'(x) = -C_2'e^{x} - C_3'e^{-x} = (x+1)+(x+1) = 2x+2.$

Найдем функции $C_1(x),\ C_2(x),\ C_3(x).$

$$C_1(x) = \int (2x+2)dx = x^2 + 2x + c_1; \quad C_2(x) = \int (-x-1)\,e^{-x}dx =$$

$$= (-x-1)(-e^{-x}) - \int e^{-x}dx = (x+1)\,e^{-x} + e^{-x} + c_2 = (x+2)\,e^{-x} + c_2;$$

$$C_3(x) = \int (-x-1)\,e^{x}dx = (-x-1)\,e^{x} + \int e^{x}dx = (-x-1)\,e^{x} + e^{x} + c_3 =$$

$$= -xe^{x} + c_3.$$

(При вычислении второго и третьего интегралов использовали формулу интегрирования по частям.) Получаем общее решение заданного дифференциального уравнения

$$y(x) = (x^2 + 2x + c_1) + ((x+2)\,e^{-x} + c_2)\,e^{x} + (-xe^{x} + c_3)\,e^{-x} =$$

$$= (c_1 + c_2e^{x} + c_3e^{-x}) + x^2 + 2x + x + 2 - x = (c_1 + c_2e^{x} + c_3e^{-x}) +$$

$$+ (x^2 + 2x + 2).$$

$$y(x) = (c_1 + c_2e^{x} + c_3e^{-x}) + (x^2 + 2x + 2) = \overline{y}(x) + y_*(x).$$

Точно такое же решение получили бы, решая это уравнение, как уравнение с правой частью специального вида, воспользовавшись методом неопределенных коэффициентов.

5. СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

5.1. Общие сведения о системах дифференциальных уравнений

Системой обыкновенных дифференциальных уравнений называется система уравнений вида:

$$\begin{cases} F_1(t, x_1, x_1', \ldots, x_1^{(m_1)}, \ldots, x_n, x_n', \ldots, x_n^{(m_n)}) = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_n(t, x_1, x_1', \ldots, x_1^{(m_1)}, \ldots, x_n, x_n', \ldots, x_n^{(m_n)}) = 0, \end{cases} \tag{5.1}$$

где $x_1(t), x_2(t), \ldots x_n(t)$ - неизвестные функции независимого аргумента t; F_i, $i = 1, \ldots, n$ – заданные функции, аргументами которых являются независимая переменная t, неизвестные функции $x_1(t), x_2(t), \ldots x_n(t)$ и их производные. Наибольшее из чисел $m_1, m_2, \ldots, m_n$ называется порядком системы (5.1).

Если данную систему можно разрешить относительно старших производных, то получаем систему дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} x_1^{(m_1)} = \hat{O}_1(t, x_1, x_1', \ldots, x_1^{(m_1 - 1)}, \ldots, x_n, x_n', \ldots, x_n^{(m_{nn} - 1)}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n^{(m_n)} = \hat{O}_n(t, x_1, x_1', \ldots, x_1^{(m_1 - 1)}, \ldots, x_n, x_n', \ldots, x_n^{(m_n - 1)}), \end{cases} \tag{5.2}$$

которая называется *канонической.*

Набор функций $x_1(t), x_2(t), \ldots x_n(t)$, определенных на некотором промежутке T (конечном или бесконечном, открытом или замкнутом), дифференцируемых необходимое количество раз на этом промежутке, которые при всех $t \in T$ обращают уравнения системы в тождественные равенства, называется *решением* данной системы.

Большинство физических процессов (т.е. процессов, связанных с какими-либо изменениями) описывается дифференциальными уравнениями. Величины, характеризующие процесс, как правило, зависят от времени. Поэтому, если это удобно в соответствующих задачах, независимую переменную t будем интерпретировать, как время.

Система (5.1) можно свести к системе дифференциальных уравнений 1-го порядка с помощью введения новых

$$n' = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$$

неизвестных функций

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = x_1', \quad \dots \quad, y_{m_1} = x_1^{m_1 - 1},$$

$$y_{m_1+1} = x_2, \quad y_{m_1+2} = x_2'. \quad \dots \quad, y_{m_1+m_2} = x_2^{m_2-1},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$y_{n'-m_n+1} = x_n, \quad y_{n'-m_n+2} = x_n', \quad \dots \quad, y_{n'} = x_n^{m_n-1}.$$

В результате таких замен система (5.1) будет преобразована в систему дифференциальных уравнений 1-го порядка вида

$$\begin{cases} F_1(t, y_1, \dots, y_{m_1}, y'_{m_1}, \dots, y_{n'-m_n+1}, \dots, y_{n'}, y'_{n'}) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F_n(t, y_1, \dots, y_{m_1}, y'_{m_1}, \dots, y_{n'-m_n+1}, \dots, y_{n'}, y'_{n'}) = 0, \\ y_1' = y_2, \quad y_2' = y_3, \quad \dots \quad, y'_{m_1-1} = y_{m_1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y'_{n'-m_n+1} = y_{n'-m_n+2}, \qquad \dots \quad, y'_{n'-1} = y'_n. \end{cases}$$

Если число уравнений равно числу неизвестных и сами эти уравнения можно разрешить относительно производных, то получаем систему вида

$$\begin{cases} y_1' = f_1(t, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ y_2' = f_2(t, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n' = f_n(t, y_1, y_2, \dots, y_n), \end{cases} \tag{5.3}$$

которая называется *нормальной системой* обыкновенных дифференциальных уравнений.

В частности, если правые части уравнений системы (5.3) не зависят явно от t, т.е. если система имеет

$$\begin{cases} y_1' = f_1(y_1, y_2, \dots, y_n), \\ y_2' = f_2(y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n' = f_n(y_1, y_2, \dots, y_n), \end{cases} \tag{5.4}$$

то она называется *динамической* или *автономной.*

ТЕОРЕМА Коши. Если в системе (5.3) все функции $f_i(t, y_1, y_2, \dots, y_n)$ непрерывны вместе со своими частными производными по y_i, $i = 1, 2, \dots, n$, в некоторой области G $(n+1)$ - мерного пространства, то для произвольной точки $M_0(t_0, y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0) \in G$ этой области в некоторой окрестности этой точки существует единственное решение данной системы $y_1(t),\ y_2(t), \dots\ y_n(t)$, удовлетворяющее условиям

$$y_1(t_0) = y_1^0,\ \ y_2(t_0) = y_2^0, \dots, y_n(t_0) = y_n^0. \tag{5.5}$$

Условия (5.5) называются *начальными условиями*.

Совокупность функций

$$\begin{cases} y_1 = \varphi_1(t, C_1, C_2, \dots, C_n), \\ y_2 = \varphi_2(t, C_1, C_2, \dots, C_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ y_n = \varphi_n(t, C_1, C_2, \dots, C_n) \end{cases} \tag{5.6}$$

называется *общим решением* нормальной системы (5.3), если:
а) данная система разрешима относительно произвольных постоянных, т.е.

$$\begin{cases} C_1 = g_1(t, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ C_2 = g_2(t, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ C_n = g_n(t, y_1, y_2, \dots, y_n); \end{cases} \tag{5.7}$$

б) совокупность (5.6) является решением системы (5.3) при всех значениях произвольных постоянных, определяемых уравнениями (5.7).

Частным решением нормальной системы дифференциальных уравнений (3) называется совокупность функций:

$$\begin{cases} y_1 = \varphi_1(t, C_1^{(0)}, C_2^{(0)}, \dots, C_n^{(0)}), \\ y_2 = \varphi_2(t, C_1^{(0)}, C_2^{(0)}, \dots, C_n^{(0)}), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ y_n = \varphi_n(t, C_1^{(0)}, C_2^{(0)}, \dots, C_n^{(0)}), \end{cases}$$

которая получается из общего решения при выполнении начальных условий (5.5), т.е. постоянные вычисляются по формулам

$$\begin{cases} C_1^{(0)} = g_1(t_0, y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0), \\ C_2^{(0)} = g_2(t_0, y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_n^{(0)} = g_n(t_0, y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0); \end{cases}$$

5.2. Системы линейных дифференциальных уравнений

Линейная система дифференциальных уравнений имеет вид

$$\begin{cases} y_1' = p_{11}(t)y_1 + p_{12}(t)y_2 + \ldots + p_{1n}(t)y_n + f_1(t), \\ y_2' = p_{21}(t)y_1 + p_{22}(t)y_2 + \ldots + p_{2n}(t)y_n + f_2(t), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = p_{n1}(t)y_1 + p_{n2}(t)y_2 + \ldots + p_{nn}(t)y_n + f_n(t), \end{cases} \tag{5.8}$$

где $p_{ij}(t), \quad f_i(t), \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$ – непрерывные функции, заданные на некотором промежутке (a, b).

ЗАМЕЧАНИЕ. Для линейной системы дифференциальных уравнений при любом $t \in (a,b)$ выполняются условия теоремы Коши, так как частные производные правых частей уравнений по y_i, $(i = 1, \ldots, n)$, равные p_{ij}, непрерывны по определению. Следовательно, при любых начальных условиях, при условии, что $t_0 \in (a,b)$, линейная система дифференциальных уравнений имеет единственное частное решение.

Если в системе (5.8) все функции $f_i(t) \equiv 0, \quad (i = 1, \ldots, n)$, то система называется *однородной*, в противном случае она называется *неоднородной.*

Для построения общего решения линейной однородной системы дифференциальных уравнений необходимо знать n *линейно независимых* при $t \in (a,b)$ ненулевых частных решений данной системы

$$Y_1 = \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \cdots\cdots \\ y_{n1} \end{pmatrix}; \quad Y_2 = \begin{pmatrix} y_{12} \\ y_{22} \\ \cdots\cdots \\ y_{n2} \end{pmatrix}; \quad \ldots, \quad Y_n = \begin{pmatrix} y_{1n} \\ y_{2n} \\ \cdots\cdots \\ y_{nn} \end{pmatrix}, \tag{5.9}$$

т.е. таких решений, для которых равенство $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i Y_i \equiv 0$ возможно только в случае, если $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$.

Такая система решений называется *фундаментальной.*

Для того, чтобы система решений была фундаментальной, необходимо и достаточно, чтобы ее *определитель Вронского*

$$W[Y_1, \ldots, Y_n] = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix} \tag{5.10}$$

был отличен от нуля хотя бы в одной точке интервала (a,b).

Если известна фундаментальная система решений, то общее решение системы линейных однородных дифференциальных уравнений ищется в виде линейной комбинации элементов фундаментальной системы, т.е.

$$\overline{Y} = \sum_{i=1}^{n} C_i Y_i, \tag{5.11}$$

или

$$\begin{cases} y_1 = C_1 y_{11} + C_2 y_{12} + \ldots + C_n y_{1n}, \\ y_2 = C_1 y_{21} + C_2 y_{22} + \ldots + C_n y_{2n}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n = C_1 y_{n1} + C_2 y_{n2} + \ldots + C_n y_{nn}. \end{cases} \tag{5.12}$$

Чтобы найти решение неоднородной системы линейных дифференциальных уравнений (5.8), достаточно найти общее решение соответствующей однородной системы и одно частное решение неоднородной системы Y^* и тогда общее решение системы (5.8) будет иметь вид

$$Y = \overline{Y} + Y^* = \sum_{i=1}^{n} C_i Y_i + Y^* . \qquad (5.13)$$

Методом вариации произвольных постоянных (методом Лагранжа) общее решение неоднородной системы (5.8) можно найти в виде

$$Y = \sum_{i=1}^{n} C_i(t) \cdot Y_i , \qquad (5.14)$$

знная фундаментальную систему решений однородной системы. При этом функции $C_i(t)$ - непрерывно дифференцируемые, можно найти, проинтегрировав решение системы

$$\begin{cases} C_1'(t)y_{11} + C_2'(t)y_{12} + \ldots + C_n'(t)y_{1n} = f_1(t), \\ C_1'(t)y_{21} + C_2'(t)y_{22} + \ldots + C_n'(t)y_{2n} = f_2(t), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1'(t)y_{n1} + C_2'(t)y_{n2} + \ldots + C_n'(t)y_{nn} = f_n(t). \end{cases}$$

Если найдены $C_i'(t) = \varphi_i(t), \quad (i = 1, \ldots, n)$, то подставив функции $C_i(t) = \int \varphi_i(t)dt + C_i$ в формулу (5.14), получим общее решение неоднородной системы линейных дифференциальных уравнений в виде

$$Y = \sum_{i=1}^{n} (\int \varphi_i(t)dt) \cdot Y_i + \sum_{i=1}^{n} C_i \cdot Y_i . \qquad (5.15)$$

5.3. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Пусть теперь в системе (5.8) все коэффициенты перед неизвестными функциями являются числами, т.е. рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n + f_1(t), \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n + f_2(t), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n + f_n(t). \end{cases} \qquad (5.16)$$

Эту систему можно записать в виде матричного дифференциального уравнения

$$Y' = A \cdot Y + F\ , \tag{5.17}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ \dots \ a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ \dots \ a_{2n} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ a_{n1} & a_{n2} \ \dots \ a_{nn} \end{pmatrix}; \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}; \quad Y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \dots \\ y_n' \end{pmatrix}; \quad F = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \dots\dots \\ f_n(t) \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим методы решения таких систем уравнений.

1. *Метод исключения неизвестных*

Из первого уравнения выразим y_n и подставим его во все остальные уравнения. После этого из второго уравнения найдем y_{n-1} и подставим в следующие уравнения и так далее. В результате система сведется к линейному дифференциальному уравнению n-го, порядка однородному или неоднородному, в зависимости от того, какую систему рассматривали. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2, \\ y_2' = y_1 + 2y_2 \end{cases}$$

при условиях $y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 3.$

Из первого уравнения: $y_2 = y_1' - 2y_1$. Подставим это выражение во второе уравнение $y_1'' - 2y_1' = y_1 + 2y_1' - 4y_1$ или $y_1'' - 4y_1' + 3y_1 = 0.$ Получили линейное дифференциальное уравнение 2-го порядка. Его характеристическое уравнение $k^2 - 4k + 3 = 0$ имеет корни $k_1 = 1, \quad k_2 = 3$. Следовательно, решение $y_1 = C_1 e^t + C_2 e^{3t}$, тогда

$$y_2 = C_1 e^t + 3C_2 e^{3t} - 2C_1 e^t - 2C_2 e^{3t} = -C_1 e^t + C_2 e^{3t}.$$

Таким образом, общее решение системы имеет вид

$$\begin{cases} y_1 = C_1 e^t + C_2 e^{3t}, \\ y_2 = -C_1 e^t + C_2 e^{3t}. \end{cases}$$

Найдем частное решение системы, используя начальные условия $1 = C_1e^0 + C_2e^0$, $3 = -C_1e^0 + C_2e^0$. Отсюда получаем $C_1 = -1$, $C_2 = 2$ и тогда частное решение системы

$$\begin{cases} y_1 = -e^t + 2e^{3t}, \\ y_2 = e^t + 2e^{3t}. \end{cases}$$

Пример 2. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y + z, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y - z, \\ \dfrac{dz}{dt} = 2x - y \end{cases}$$

или, что то же самое, систему вида

$$\begin{cases} x' = x - y + z, \\ y' = x + y - z, \\ z' = 2x - y. \end{cases}$$

Из первого уравнения $z = x' - x + y$. Подставим это выражение в другие уравнения

$$\begin{cases} y' = x + y - x' + x - y, \\ x'' - x' + y' = 2x - y \end{cases} \text{ или } \begin{cases} y' = 2x - x', \\ x''' - x'' + y'' = 2x' - y' \end{cases}$$

(второе уравнение системы продифференцировали). Подставив y' во второе уравнение, получим

$$x''' - x'' + 2x' - x'' = 2x' - 2x + x' \text{ или } x''' - 2x'' - x' + 2x = 0.$$

Его характеристическое уравнение $k^3 - 2k^2 - k + 2 = 0$,

$k^2(k-2) - (k-2) = 0$, $(k-2)(k^2 - 1) = 0$, $k_1 = 2, k_2 = 1, k_3 = -1$.

Тогда $x = C_1e^{2t} + C_2e^t + C_3e^{-t}$,

$$y' = 2x - x' = 2C_1e^{2t} + 2C_1e^t + 2C_3e^{-t} - 2C_1e^{2t} - C_2e^t + C_3e^{-t} =$$

$$= C_2e^t + 3C_3e^{-t}; \quad y = C_2e^t - 3C_3e^{-t}.$$

$$z = x' - x + y = 2C_1e^{2t} + C_2e^t - C_3e^{-t} - C_1e^{2t} - C_2e^t - C_3e^{-t} +$$
$$+ C_2e^t - 3C_3e^{-t} = C_1e^{2t} + C_2e^t - 5C_3e^{-t}.$$

Следовательно, общее решение системы имеет вид

$$\begin{cases} x = C_1e^{2t} + C_2e^t + C_3e^{-t}, \\ y = C_2e^t - 3C_3e^{-t}, \\ z = C_1e^{2t} + C_2e^t - 5C_3e^{-t}. \end{cases}$$

Пример 3. Решить неоднородную систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' = 2x + y + \cos t + t \cdot e^t, \\ y' = -x + 2\sin t. \end{cases}$$

Из второго уравнения $x = 2\sin t - y'$. Подставим это выражение в первое уравнение

$$2\cos t - y'' = 4\sin t - 2y' + y + \cos t + t\,e^t,$$
$$y'' - 2y' + y = \cos t - 4\sin t - t\,e^t.$$

Составим характеристическое уравнение $k^2 - 2k + 1 = 0$ или $(k-1)^2 = 0,\quad k_1 = k_2 = 1$, решение однородного уравнения имеет вид $\overline{y} = C_1e^t + C_2t\,e^t$.

Правая часть уравнения составная $f_1(t) = \cos t - 4\sin t$, $f_2(t) = -t\,e^t$. Первой функции отвечает $y_{*1} = A\cos t + B\sin t$, второй – $y_{*2} = (Et + F)e^t \cdot t^2$, так как среди корней характеристического уравнения есть два корня, равных 1. Найдем коэффициенты частных решений.

Сначала рассмотрим уравнение

$$y'' - 2y' + y = \cos t - 4\sin t, \tag{а}$$

$y'_{*1} = -A\sin t + B\cos t,\quad y''_{*1} = -A\cos t - B\sin t$, подставим их в уравнение (а)

$$-A\cos t - B\sin t + 2A\sin t - 2B\cos t + A\cos t + B\sin t = \cos t - 4\sin t.$$

Тогда $A = -2;\quad B = -0.5$ и $y_{*1} = -2\cos t - 0.5\sin t$.

Для того чтобы найти $E,\quad F$, рассмотрим уравнение

$$y'' - 2y' + y = -t\,e^t. \tag{б}$$

$$y_{*2} = (Et^3 + Ft^2)e^t, \quad y'_{*2} = (3Et^2 + 2Ft)e^e + (Et^3 + Ft^2)e^t,$$

$$y''_{*2} = (6Et + 2F)e^t + (3Et^2 + 2Ft)e^t + (3Et^2 + 2Ft)e^t + (Et^3 + Ft^2)e^t.$$

Подставим полученные выражения в уравнение (б)

$$e^t(6Et + 2F + 6Et^2 + 4Ft + Et^3 + Ft^2) - e^t(6Et^2 + 4Ft + 2Et^3 + 2Ft^2) +$$

$$+e^t(Et^3 + Ft^2) = -te^t, \quad 6Et + 2F = -t, \quad E = -\frac{1}{6}, \quad F = 0.$$

(Равенство разделили на e^t и привели подобные.) Тогда

$$y_{*2} = -\frac{1}{6}t^3e^t, \quad y_* = y_{*1} + y_{*2} = -2\cos t - 0.5\sin t - \frac{1}{6}t^3e^t.$$

Следовательно,

$$y = \overline{y} + y_* = C_1e^t + C_2t \cdot e^t - 2\cos t - 0.5\sin t - \frac{1}{6}t^3e^t.$$

Найдем

$$x = 2\sin t - y' = 2\sin t - C_1e^t - C_2e^t - C_2t \cdot e^t - 2\sin t + 0.5\cos t +$$

$$+\frac{1}{2}t^2e^t + \frac{1}{6}t^3e^t = -C_1e^t - C_2e^t(1+t) + 0.5\cos t + \frac{e^t}{6}(3t^2 + t^3).$$

Тогда общее решение системы имеет вид:

$$\begin{cases} x = -e^t(C_1 + C_2(1+t)) = 0.5\cos t + \dfrac{e^t}{6}(3t^2 + t^3), \\ y = e^t(C_1 + C_2t) - 2\cos t - 0.5\sin t - \dfrac{1}{6}t^3e^t. \end{cases}$$

2. Метод Эйлера

Рассмотрим однородную систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} y'_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n, \\ y'_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y'_n = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n. \end{cases} \tag{5.18}$$

Решение данной системы будем искать в виде

$$y_1 = u_1 \cdot e^{\lambda t}, \quad y_2 = u_2 \cdot e^{\lambda t}, \ \dots \ , \ y_n = u_n \cdot e^{\lambda t} \ ,$$

$$y_i' = \lambda \cdot u_i \cdot e^{\lambda t}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Подставив эти функции в систему (5.17), после переноса всех функций в одну часть уравнений, получим систему

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)u_1 + a_{12}u_2 + \dots + a_{1n}u_n = 0, \\ a_{21}u_1 + (a_{22} - \lambda)u_2 + \dots + a_{2n}u_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}u_1 + a_{n2}u_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda)u_n = 0. \end{cases} \qquad (5.19)$$

Система (5.19) должна иметь ненулевое решение, поэтому ее определитель

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \qquad (5.20)$$

Данное уравнение называется *характеристическим уравнением* системы (5.18).

Если характеристическое уравнение имеет n различных действительных корней $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, то каждому этому корню отвечает собственный вектор, который получается как решение системы (5.19) при соответствующем значении λ.

Общее решение системы (5.19) в этом случае имеет вид

$$Y = \sum_{i=1}^{n} C_i U_i e^{\lambda_i t}, \text{ где } U_i = \begin{pmatrix} u_{1i} \\ u_{2i} \\ \dots\dots \\ u_{ni} \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Пример 1. Решить систему методом Эйлера

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2, \\ y_2' = 3y_1 + 4y_2. \end{cases}$$

Составим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ или } (2-\lambda)\cdot(4-\lambda)-3=0, \quad \lambda^2-6\lambda+5=0.$$

Его корни $\lambda_1 = 1,\quad \lambda_2 = 5$. Система вида (5.19) для данной системы имеет вид

$$\begin{cases} (2-\lambda)u_1 + u_2 = 0, \\ 3u_1 + (4-\lambda)u_2 = 0. \end{cases}$$

При $\lambda_1 = 1$ получаем $\begin{cases} u_1 + u_2 = 0, \\ 3u_1 + 3u_2 = 0; \end{cases}\quad u_2 = -u_1.$

Если $u_1 = 1,\ u_2 = -1$ и $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

При $\lambda_2 = 5$ имеем $\begin{cases} -3u_1 + u_2 = 0; \\ 3u_1 - u_2 = 0; \end{cases}\quad u_2 = 3u_1.$

Для $u_1 = 1,\quad u_2 = 3$ и $U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Тогда $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\cdot e^t + C_2\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\cdot e^{5t}$ или

$$\begin{cases} y_1 = C_1e^t + C_2e^{5t}, \\ y_2 = -C_1e^t + 3C_2e^{5t}. \end{cases}$$

Пример 2. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - y + z, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y + z, \\ \dfrac{dz}{dt} = 4x - y + 4z. \end{cases}$$

Характеристическое уравнение данной системы

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 4 & -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Решим это уравнение

$$(3-\lambda)(1-\lambda)(4-\lambda) - 4 - 1 - 4(1-\lambda) + 3 - \lambda + 4 - \lambda = 0;$$

$$(3-\lambda)(4+\lambda^2-5\lambda) - 2 + 2\lambda = 0; \quad -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 17\lambda + 10 = 0.$$

Его корни $\lambda_1 = 1; \quad \lambda_2 = 2; \quad \lambda_3 = 5.$ Система (5.19) в данном примере будет иметь вид

$$\begin{cases} (3-\lambda)u_1 - u_2 + u_3 = 0, \\ u_1 + (1-\lambda)u_2 + u_3 = 0, \\ 4u_1 - u_2 + (4-\lambda)u_3 = 0. \end{cases}$$

При $\lambda = 1$ получим

$$\begin{cases} 2u_1 - u_2 + u_3 = 0, \\ u_1 + u_3 = 0, \\ 4u_1 - u_2 + 3u_3 = 0, \end{cases} \qquad u_1 = -u_3, \quad \begin{cases} -u_2 - u_3 = 0, \\ -u_2 - u_3 = 0, \end{cases} \quad u_2 = -u_3.$$

Если положить $u_3 = 1$, получаем $u_1 = u_2 = -1$ и первый собственный вектор $U_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

При $\lambda = 2$ имеем систему

$$\begin{cases} u_1 - u_2 + u_3 = 0, \\ u_1 - u_2 + u_3 = 0, \\ 4u_1 - u_2 + 2u_3 = 0, \end{cases} \qquad u_1 = u_2 - u_3, \quad \begin{cases} u_1 = u_2 - u_3, \\ 3u_2 - 2u_3 = 0. \end{cases}$$

В случае, если $u_3 = 3, \quad u_2 = 2, \quad u_1 = -1$, второй собственный вектор $U_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

При $\lambda = 5$ получаем $\begin{cases} -2u_1 - u_2 + u_3 = 0, \\ u_1 - 4u_2 + u_3 = 0, \\ 4u_1 - u_2 - u_3 = 0. \end{cases}$

Прибавив третье уравнение к первому и второму, получим

$$\begin{cases} 2u_1 - 2u_2 = 0, \\ 5u_1 - 5u_2 = 0, \\ 4u_1 - u_2 - u_3 = 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} u_2 = u_1, \\ u_3 = 3u_1. \end{cases}$$

Если $u_1 = 1$, то $u_2 = 1,\ \ u_3 = 3$ и получаем третий собственный вектор $U_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Тогда $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^t + C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot e^{2t} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot e^{5t}$ и общее решение $\begin{cases} x = -C_1 e^t + C_2 e^{2t} + C_3 e^{5t}, \\ y = -C_1 e^t + 2C_2 e^{2t} + C_3 e^{5t}, \\ z = C_1 e^t + 3C_2 e^{2t} + 3C_3 e^{5t}. \end{cases}$

На примере рассмотрим случай, когда характеристическое уравнение имеет комплексные корни. При этом будет использована формула Эйлера

$$e^{a+bi} = e^a (\cos b + i \sin b).$$

Пример 3. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' = x - 3y, \\ y' = 3x + y. \end{cases}$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0; \quad (1-\lambda)^2 + 9 = 0; \quad (\lambda - 1)^2 = -9; \quad \lambda - 1 = \pm 3i.$$

Тогда $\lambda_1 = 1 + 3i, \quad \lambda_2 = 1 - 3i.$

При $\lambda = 1 + 3i$ получим систему

$$\begin{cases} (1-1-3i)u_1 - 3u_2 = 0, \\ 3u_1 + (1-1-3i)u_2 = 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} -3iu_1 - 3u_2 = 0, \\ 3u_1 - 3i\,u_2 = 0, \end{cases} \quad u_2 = -iu_1.$$

Первый собственный вектор имеет вид $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$.

При $\lambda = 1 - 3i$ имеем

$$\begin{cases} (1-1+3i)u_1 - 3u_2 = 0, \\ 3u_1 + (1-1+3i)u_2 = 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 3iu_1 - 3u_2 = 0, \\ 3u_1 + 3i\,u_2 = 0, \end{cases} \quad u_2 = iu_1.$$

Второй собственный вектор $U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$.

Следовательно,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \cdot e^{(1+3i)t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \cdot e^{(1-3i)t} \text{ или}$$

$$\begin{cases} x = C_1 e^t (\cos 3t + i \sin 3t) + C_2 e^t (\cos 3t - i \sin 3t), \\ y = C_1 e^t (-i \cos 3t + \sin 3t) + C_2 e^t (i \cos 3t + \sin 3t). \end{cases}$$

Окончательно

$$\begin{cases} x = e^t ((C_1 + C_2)\cos 3t + i\,(C_1 - C_2)\sin 3t), \\ y = e^t ((C_1 + C_2)\sin 3t + i\,(C_2 - C_1)\cos 3t). \end{cases}$$

Если λ – корень характеристического уравнения порядка m, то общее решение, соответствующее данному корню, имеет вид $Y = \sum_{i=1}^{m} C_i \cdot U_i(t) \cdot e^{\lambda t}$, где $U_i(t), \quad i = 1, \ldots, m$ – многочлены степени не выше $(m-1)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. В случае кратных корней характеристического уравнения систему удобнее решать методом исключения.

В заключение рассмотрим пример решения систем неоднородных линейных дифференциальных уравнений методом вариации.

Пример 4. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений методом вариации

$$\begin{cases} x' = -x - 2y + 2e^{-t}, \\ y' = 3x + 4y + e^{-t}. \end{cases}$$

Сначала решаем однородную систему

$$\begin{cases} x' = -x - 2y, \\ y' = 3x + 4y. \end{cases}$$

Ее характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0; \quad (-1-\lambda)(4-\lambda)+6=0; \quad \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0.$$

Его корни $\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2.$

При $\lambda = 1$ получаем систему $\begin{cases} -2u_1 - 2u_2 = 0, \\ 3u_1 + 3u_2 = 0, \end{cases}$ $u_2 = -u_1$ и собственный вектор $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. При $\lambda = 2$ имеем

$\begin{cases} -3u_1 - 2u_2 = 0, \\ 3u_1 + 2u_2 = 0, \end{cases}$ $u_2 = -\dfrac{3}{2}u_1$; при $u_1 = 2,\ u_2 = -3;\ U_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Тогда $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} e^{2t}$; $\begin{cases} x = C_1 e^t + 2C_2 e^{2t}, \\ y = -C_1 e^t - 3C_2 e^{2t}. \end{cases}$

Общее решение неоднородного уравнения будем искать в виде

$$\begin{cases} x = C_1(t)e^t + 2C_2(t)e^{2t}, \\ y = -C_1(t)e^t - 3C_2(t)e^{2t}, \end{cases}$$

где функции $C_1(t), \quad C_2(t)$ являются решениями системы

$$\begin{cases} C_1'(t)e^t + 2C_2'(t)e^{2t} = 2e^{-t}, \\ -C_1'(t)e^t - 3C_2'(t)e^{2t} = e^{-t}. \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^t & 2e^{2t} \\ -e^t & -3e^{2t} \end{vmatrix} = -3e^{3t} + 2e^{3t} = -e^{3t};$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2e^{-t} & 2e^{2t} \\ e^{-t} & -3e^{2t} \end{vmatrix} = -6e^t - 2e^t = -8e^t; \quad C_1'(t) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 8e^{-2t};$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} e^t & 2e^{-t} \\ -e^t & e^{-t} \end{vmatrix} = 1 + 2 = 3; \qquad C_2'(t) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -3e^{-3t}.$$

Тогда

$$C_1(t) = \int 8e^{-2t}dt = -4e^{-2t} + C_1; \quad C_2(t) = -\int 3e^{-3t}dt = e^{-3t} + C_2$$

и тогда общее решение имеет вид

$$\begin{cases} x = (-4e^{-2t} + C_1) \cdot e^t + 2(e^{-3t} + C_2) \cdot e^{2t}, \\ y = -(-4e^{-2t} + C_1) \cdot e^t - 3(e^{-3t} + C_2) \cdot e^{2t}. \end{cases}$$

Окончательно, после перегруппировки, получаем

$$\begin{cases} x = C_1e^t + 2C_2e^{2t} - 2e^{-t}, \\ y = -C_1e^t - 3C_2e^{2t} + e^{-t}. \end{cases}$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бибиков Ю.Н. Общий курс обыкновенных дифференциальных уравнений. – СПб.: Изд-во Ленинград. ун-та, 1981.
2. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Т.2. – М.: Высш. шк., 1986.
3. Матвеев Н.М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – СПб.: Изд-во «Лань», 2002.
4. Карташев А.П., Рождественский Б.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления. – М.: Наука, 1980.
5. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. Ч.2. – М.: Айрис-пресс, 2004.

СОДЕРЖАНИЕ