



Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова»

С.М. Андреев

МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБЪЕКТОВ И СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

*Утверждено Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия*

Магнитогорск
2017

УДК 517.977.1
ББК 32.965я73

Рецензенты

доктор технических наук, профессор,
проректор по учебной работе,
ФГАОУ ВО «Южно-Уральский государственный университет
(национальный исследовательский университет)»
А.А. Радионов

доктор технических наук, профессор,
заведующая кафедрой вычислительной техники и программирования,
ФГБОУ ВО «Магнитогорский государственный
технический университет им. Г.И. Носова»
О. С. Логунова

Андреев С.М.

Моделирование объектов и систем управления [Электронный ресурс]: учебное пособие / Сергей Михайлович Андреев; ФГБОУ ВО «Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова». – Электрон. текстовые дан. (1,85 Мб). – Магнитогорск : ФГБОУ ВО «МГТУ им. Г.И. Носова», 2017. – 1 электрон. опт. диск (CD-R). – Систем. требования : IBM PC, любой, более 1 GHz ; 512 Мб RAM ; 10 Мб HDD ; MS Windows XP и выше ; Adobe Reader 8.0 и выше ; CD/DVD-ROM дисковод ; мышь. – Загл. с титул. экрана.
ISBN 978-5-9967-1028-7

Данное учебное издание содержит основные сведения о моделировании процессов и систем управления, описание практических работ и примеры их выполнения. Кроме того, показано использование вычислительных пакетов Microsoft Excel и SciLab для решения практических задач моделирования.

Учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлению подготовки 27.04.04 – Управление в технических системах при изучении дисциплины «Математическое моделирование объектов и систем управления». Также может быть полезно при изучении порядка математического моделирования систем управления разных типов при выполнении курсовых и выпускной работы.

УДК 517.977.1
ББК 32.965я73

ISBN 978-5-9967-1028-7

© Андреев С.М., 2017
© ФГБОУ ВО «Магнитогорский
государственный технический
университет им. Г.И. Носова», 2017

Содержание

ВВЕДЕНИЕ	4
1.ПРИНЦИПЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ СИСТЕМ.....	5
1.1. Основные понятия и определения в моделировании систем и процессов	5
1.2. Виды и классификация моделей	6
1.3. Классификация математических моделей.....	8
2.МОДЕЛИ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ, ОПИСЫВАЕМЫХ ОБЫКНОВЕННЫМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ	11
2.1. Общие сведения о дифференциальных уравнениях	11
2.2. Численные методы решения дифференциальных уравнений	15
2.3. Метод Эйлера (Метод касательных).....	16
2.4. Метод разложения в ряд Тейлора	20
2.5. Реализация численного метода решения дифференциального уравнения с использованием электронных таблиц MS Excel.....	21
2.6. Общий метод решения дифференциальных уравнений в системах визуального моделирования	24
2.7. Использование методов операционного исчисления для решения дифференциальных уравнений	27
2.8. Задания для самостоятельной подготовки	34
3.ЦИФРОВОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБЪЕКТОВ И СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ.....	35
3.1. Этапы построения цифровых моделей объектов и систем управления	35
3.2. Построение математических моделей физических объектов	35
3.2.1. Построение моделей наполнения баков	36
3.2.2. Математическая модель гармонического осциллятора	39
3.2.3. Модель нагрева массивного тела	41
3.3. Математические модели в форме передаточных функций	43
3.3.1. Динамические характеристики и параметры типовых звеньев.....	44
3.3.2. Соединение звеньев	47
3.4. Задания для самостоятельной подготовки	51
4.ПРОГРАММНЫЕ СРЕДСТВА МОДЕЛИРОВАНИЯ. РЕАЛИЗАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ В SCILAB/XCOS	54
4.1. Назначение программного пакета SciLab/XCos	54
4.2. Принципы построения моделей в среде SciLab/XCos	55
4.3. Принципы управления моделью и получения результатов моделирования	58
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	63

ВВЕДЕНИЕ

На сегодняшний день математическое моделирование является основным способом построения моделей объектов, систем и процессов. Хотя первые математические модели появились вместе с зарождением математики, основной этап развития начался в 30-х годах 20-ого века, вместе с развитием счетных машин, а развитие электронных вычислительных машин привело к появлению основного инструмента исследования математических моделей - вычислительной математики. Математическое моделирование сегодня является базовым этапом при проектировании технических объектов, разработке автоматизированных систем управления технологическими процессами, составлении прогнозов развития и т.д.

Исследования объектов и процессов с использованием математических моделей производится в любой отрасли промышленности. Задачи, решаемые с использованием математического моделирования направлены на поиск оптимальных (с точки зрения работоспособности и экономической эффективности) характеристик механизмов и конструкций зданий, производственных процессов и технологий, траекторий движения различных аппаратов.

Математическая модель является одним из основных этапов при проектировании технических объектов, автоматизированных систем управления технологическими процессами, прогнозирования процессов экономики, экологии и в других отраслях наук.

Учебное пособие предназначено для выполнения практических работ по дисциплине «Моделирование объектов и систем управления» для обучающихся по направлению 27.04.04 – Управление в технических системах. В учебном пособии приведена последовательность выполнения практических работ по темам курса. Дано краткое теоретическое введение, пример выполнения и задание на практическую работу по вариантам.

Выполнение практических работ производится с использованием программных пакетов Microsoft Excel и SciLab. В приложении приведены основные сведения о работе с этими программными пакетами и их использовании, для решения задач практикума.

1. ПРИНЦИПЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ СИСТЕМ

1.1. Основные понятия и определения в моделировании систем и процессов

Моделирование - представляет собой один из методов познания окружающего мира, является формой отражения реального мира и заключается в воспроизведении тех или иных свойств реальных физических объектов, явлений, процессов. При моделировании реальный изучаемый *объект* - *оригинал*, замещается его физической или абстрактной моделью. Модель, при этом, воспроизводит (имитирует те свойства и характеристики оригинала, которые существенны для достижения поставленной цели моделирования. Над моделью возможно проведение различных экспериментов и исследований, на основе которых делаются выводы о свойствах объекта - оригинала. [1,2]

Моделирование в широком смысле понимается либо как реальный эксперимент, либо как мысленный эксперимент. Реальный эксперимент ставит своей целью проведение различных опытов в лабораторных или натурных условиях над реальными объектами или их аналогами. Мысленный эксперимент можно определить как технически не осуществимую процедуру, рассматриваемую в качестве логической аналогии реального опыта.

Как правило моделирование используется при проектировании новых объектов, процессов или систем, что позволяет сократить сроки разработки, снизить материальные затраты, избежать возникновения критических ошибок, создавать возможность более быстрого приобретения знаний в условиях, не наблюдаемых в реальной действительности.

При моделировании систем оперируют следующими понятиями и определениями.

Модель — условный образ объекта исследования, конструируемый исследователем так, чтобы отобразить характеристики объекта (свойства, взаимосвязи, параметры), существенные для исследования.

Моделирование - метод познания реального окружающего мира на моделях, с использованием методов теории подобия

Математическая модель - система математических выражений, описывающих характеристики объекта моделирования.

Физическая модель - установка, устройство или приспособление, воспроизводящее в том же или другом масштабе исследуемый объект при сохранении физического подобия процессов модели процессам объекта исследования.

Концептуальная модель - модель, построенная до начала специальных экспериментальных исследований и включающая в себя описание лишь основных, характерных особенностей объекта.

Физическое моделирование - исследование процессов или явлений с помощью физических моделей при равенстве критериев подобия модели и оригинала.

Математическое моделирование - метод исследования процессов или явлений путем построения их математических моделей и исследования этих моделей. Исследование моделей может производиться аналитическим способом или численным с использованием ЭВМ.

Переменные модели - величины, подлежащие измерению и определению при решении задачи исследования или управления. Переменные модели делятся на входные и выходные. Выходные переменные - величины, характеризующие состояние объекта и подлежащие определению при решении на модели задачи исследования или управления. Входные переменные - величины, целенаправленно изменяемые в соответствии с каким либо планом или законом при решении задачи исследования или управления.

Параметры модели - постоянные величины или заранее заданные функции времени, изменение которых допускается только между решениями задачи.

Идентификация модели - определение параметров или структуры математической модели, обеспечивающей наилучшее совпадение выходных координат объекта и модели при одинаковых входных воздействиях. Если структура модели определена, и речь идет только о

выборе её параметров, то в этом случае можно говорить о параметрической идентификации модели.

1.2. Виды и классификация моделей

В основе моделирования лежит теория подобия, которая утверждает, что абсолютное подобие может иметь место лишь при замене одного объекта другим, точно таким же [3]. При моделировании абсолютное подобие не имеет места и поэтому стремятся к тому, чтобы модель достаточно хорошо отображала исследуемую сторону функционирования объекта.

На сегодняшний день нет четкой классификации моделей из-за многозначности понятия "модель". Наиболее часто исследователи производят классификацию моделей по степени их абстрагирования от оригинала. В этом случае различают материальные (реальные) и абстрактные (мысленные) модели [2]. Например, на рис. 1.1 приведена классификация моделей.

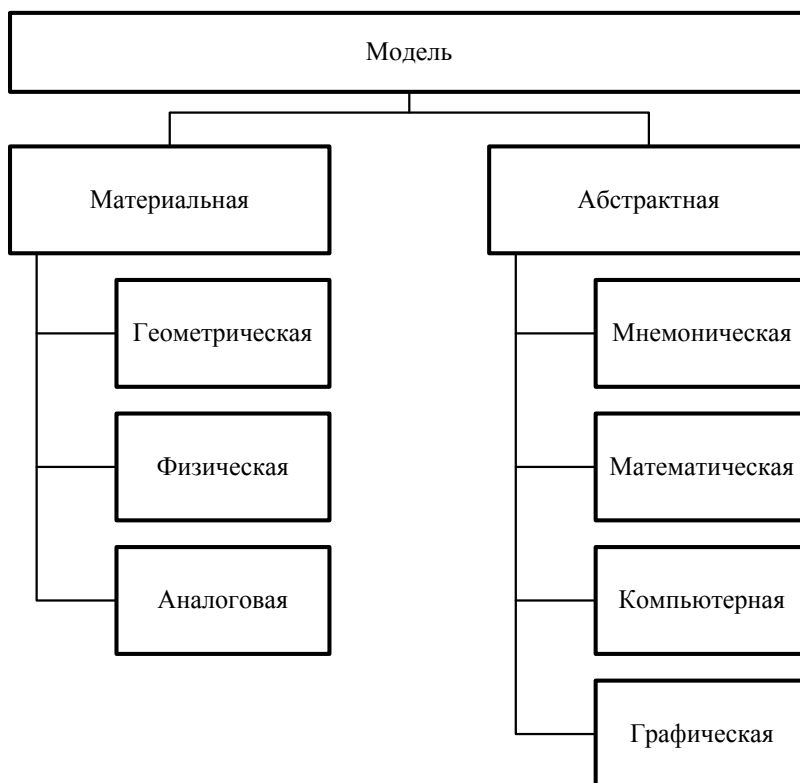


Рис. 1.1. Классификация моделей по степени их абстрагирования от оригинала

Материальные модели наиболее доступны для понимания. Обычно это копии исследуемых предметов, выполненные в масштабе. К материальным моделям в первую очередь относят физические модели. Остальные типы материальных моделей в той или иной мере являются вариантами физической модели.

Физическая модель может иметь иную физическую природу по сравнению с моделируемым объектом, но процессы в физической модели и их протекания будут аналогичны процессам в реальном объекте. Для проведения физического моделирования, изготавливается опытный образец реального объекта в масштабе. Физическая модель создается по законам теории подобия. В процессе испытаний определяются рабочие характеристики, надежность, степень выполнения технических требований, предъявляемых к объекту, а также эргономические показатели. Физические модели применяются для изучения работы турбин, котлов, насосов, различных гидродинамических явлений.

Методы физического моделирования нашли широкое применение при конструировании мостов, кораблей, самолетов. Например, испытания проектируемых летательных аппа-

ратов в разных режимах и скоростях производят на уменьшенных физических моделях в аэродинамических трубах. В этом случае, скорость воздуха, которая обдувает модель, будет соответствовать скорости перемещения модели в неподвижном воздухе. Комплекс тензометрических весов позволяет измерить аэродинамические силы и моменты любых конструктивных элементов модели.

Геометрические модели отображают пространственные и геометрические свойства объекта оригинала. Геометрические модели до сих пор являются единственным способом изучения эргономических характеристик проектируемых технических средств, которые предполагают взаимодействие с человеком (например, расположение рычагов на пультах управления, расположения кресел в салонах самолетов и расстояний между ними и т. д.).

Аналоговая модель отличается от оригинала по своей физической природе, но динамика её внутренних процессов может быть описана, теми же математическими соотношениями, которыми описывают процессы в моделируемой системе-оригинале.

В качестве аналоговых моделей используются электрические, электронные, механические гидравлические пневматические, тепловые и другие системы.

Абстрактные модели состоят не из материальных элементов, и из символов, и применяются они гораздо чаще, чем материальные. Наиболее простой абстрактной моделью, является словесная модель, в которой в простой и понятной форме письменной речи или мысленного процесса, описывается изучаемый процесс. Словесная модель является первоначальным этапом построения более сложных абстрактных моделей.

В абстрактных моделях основным типом моделей является **математическая модель**. Математическая модель, являясь разновидностью абстрактных моделей, выражается языком математических символов и, как другие абстрактные модели, является описанием представляемой системы [1].

Математические модели широко применяются, но труднее воспринимаются, чем материальные и, как правило, представляются в форме систем алгебраических или дифференциальных уравнений, решение которых при заданных начальных условиях (входных переменных модели) позволяют получить численные значения выходных переменных модели.

Математические модели являются универсальными абстрактными моделями. Любые другие представления абстрактных моделей всегда могут быть сведены к математической модели.

Мнемонические модели отображают свойства оригинала (процесса или объекта) посредством схемы, графа, графика, чертежа, химической формулы и других описательных представлений (мнемоник) принятых в области науки, для которых строится мнемоническая модель. Одной из разновидности мнемонических моделей является графическая модель, в которых графическим способом, изображены процессы и связи между ними. Так, например, структурные схемы и графы являются наиболее представительными примерами графической модели (рисунок графической модели). Являясь достаточно наглядной, графическая модель одновременно может подробно описывать внутреннюю структуру объекта или системы, и позволяет достаточно просто производить композицию и декомпозицию разрабатываемой модели. Эти качества графической модели сделали подобный вид моделирования широко используемым для описания процессов в технических, экономических, социальных, биологических и других видах систем.

Под **компьютерной моделью** в настоящее время понимают программный или программно-аппаратный комплекс, позволяющий с помощью последовательности вычислений и графического отображения их результатов, воспроизводить (имитировать) процессы функционирования реального объекта при действии на него различных, случайных факторов [1]. Упрощенно, компьютерная модель представляет собой эквивалент исследуемого объекта [2]. Также такие модели называют **имитационными** моделями.

1.3. Классификация математических моделей

Классификация математических моделей, как одного из вариантов абстрактной модели, также может быть определена в зависимости от критерия классификации. Математические модели могут быть классифицированы:

- по форме представления;
- по способу получения;
- по характеру моделируемого процесса;
- по назначению.

При классификации математических моделей по *форме представления*, определяющим фактором является область математики (или математического анализа), к которой относится математическое описание модели. Можно выделить три основные формы представления математических моделей: во *временной области*, в *форме операторных функций* и в *частотной области*. Однако, в такой классификации, нельзя судить об однозначном отношении математической модели к какому-то классу, так как в большинстве реальных случаев разработки математической модели, её математическое описание может относиться к различным областям математики и математического анализа. Один из возможных примеров классификации по форме представления приведен на рис.1.2.

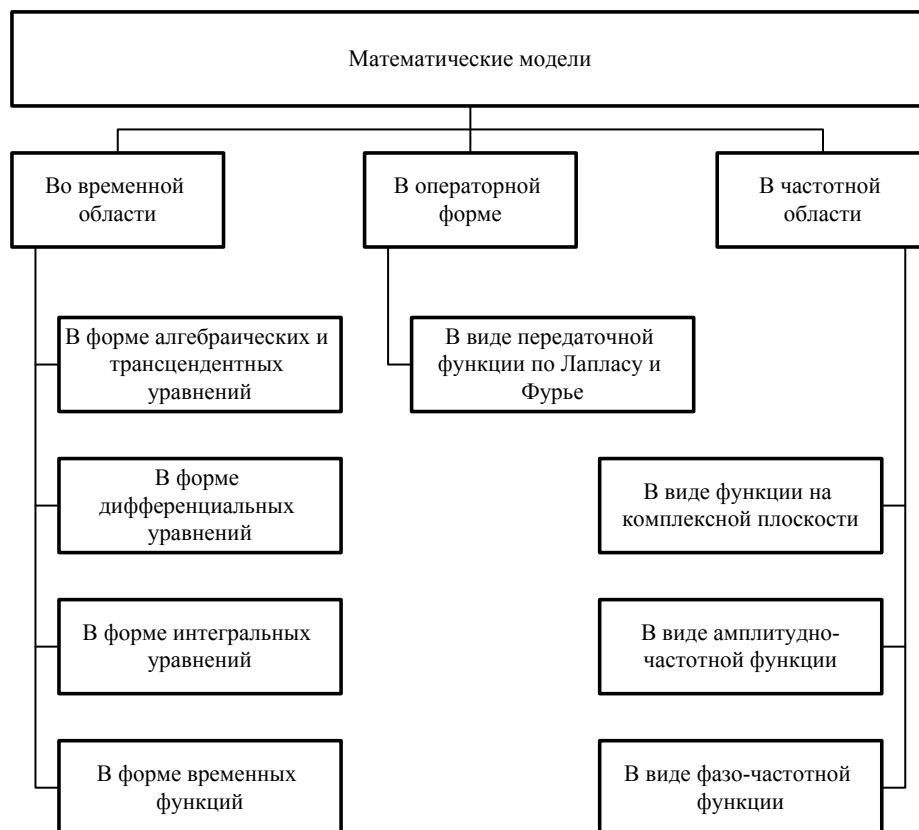


Рис. 1.2. Классификация математических моделей по форме представления

Использование подобной классификации по форме математической модели дает возможность изучать различные подходы к математическому моделированию реальных объектов в зависимости от назначений математической модели.

Форма математической модели во *временной области* позволяет описать математическую связь между входом и выходом моделируемого объекта подобная форма математической модели является наиболее удобной для её алгоритмической реализации и, как правило, используется в компьютерном моделировании объектов и процессов.

Форма математической модели в *операторной форме* позволяет наглядно, в достаточно простом математическом виде, представить процессы в объекте и взаимосвязи между ними.

Такая форма может быть легко трансформирована в структурную схему модели объекта и обратно.

Форма математической модели в *частотной области* позволяет представить моделируемый объект в виде частотных характеристик и характеристик на комплексной плоскости.

По способу получения математические модели делят на теоретические и эмпирические [2].

Теоретические модели получают на основе изучения свойств исследуемого объекта и процессов, происходящих в нем. Теоретическая модель описывает физические закономерности, наблюдаемые в объекте – оригинале. В основу теоретических моделей может быть положены:

- фундаментальные законы природы – законы сохранения энергии, массы, импульса, электрического заряда [2, 4];
- феноменологические законы (описательные, выведенные на основе наблюдений, опытов). К ним относятся законы Ома, Ампера, законы Ньютона (в классической механике), закон Гука, Фурье и т.д.

Структура и параметры теоретических моделей имеют определенное физическое толкование.

Эмпирические модели применяют в случаях, когда отсутствует информация о физических свойствах изучаемого объекта, механизме протекающих в нем процессов или в связи со сложностью объекта нет возможности математически адекватно описать сущность его внутренних процессов.

Эмпирические модели могут быть получены только экспериментальным путем. Моделируемый объект рассматривается как *черный ящик*. Для измерения доступны только его входные сигналы (управляющие воздействия) и выходные сигналы (отклики или реакции). Абстрагируясь от внутреннего устройства и физической сущности объекта, изучают его реакции на различные внешние воздействия.

Эмпирические данные, необходимые для построения эмпирической модели исследуемого объекта, могут быть получены в результате проведения *активного*, заранее спланированного, эксперимента или в результате пассивного наблюдения за исследуемым процессом (*пассивного* эксперимента).

При проведении активного эксперимента имеется возможность произвольного изменения величины входного сигнала, в соответствии с заранее составленным планом.

При пассивном эксперименте данные объекта получают в результате наблюдения и регистрации в определенные моменты времени текущих значений входных и выходных переменных процесса (хронометраж процесса) [5,6].

Обработка результатов измерений позволяет выявить связь между входными и выходными сигналами и определить математическое описание. Математическое описание может быть определено как в форме математических функций, так и форме некоего расчетного алгоритма. Построенная таким образом эмпирическая модель может считаться адекватной только в ограниченном диапазоне изменения значений управляющих воздействий (входных сигналов).

Комбинированные модели строятся на основе комбинации вышеописанных теоретических и эмпирических методов построения, как правило в случае, когда экспериментальные зависимости, от которых отталкиваются при построении эмпирической модели, получены не при физическом эксперименте на реальном объекте, а при вычислительном эксперименте на математической модели этого объекта.

Формирование математической модели объекта на основе наблюдений его входных и выходных сигналов называют идентификацией. Решение задачи идентификации позволяет определить структуру и параметры модели, обеспечивающие наилучшую с точки зрения за-

данного критерия близость выходных функций модели и объекта при совпадающих входных воздействиях.

Классификация математических моделей по характеру изучаемых процессов строится в форме дихотомий [2]:

1. Линейные	Нелинейные
2. Непрерывные	Дискретные
3. Стационарные	Нестационарные
4. Детерминированные	Стохастические
5. Статические	Динамические
6. Для систем с распределенными параметрами	Для систем с сосредоточенными параметрами

По назначению (целевому назначению) модели подразделяются на модели *структуры*, *функционирования* и *стоимостные* (модели расхода ресурсов).

Модели структуры отображают связи между компонентами объекта и внешней средой и в свою очередь подразделяются:

- на каноническую, характеризующую взаимодействие объекта с окружением через входы и выходы;
- модель внутренней структуры, характеризующую состав компонентов объекта и связи между ними;
- модель иерархической структуры (дерево системы), в которой объект (целое) расчленяется на элементы более низкого уровня, действия которых подчинены интересам целого.

Модели структуры обычно представлены в виде блок-схемы, режé графов и матриц связей.

Модели функционирования включают широкий спектр символических моделей, например:

- модель жизненного цикла системы, описывающая процессы существования системы от зарождения замысла ее создания до прекращения функционирования;
- модели операций, выполняемых объектом и представляющих описание взаимосвязанной совокупности процессов функционирования отдельных элементов объекта при реализации тех или иных функций объекта. Так, в состав моделей операций могут входить модели надежности, характеризующие выход элементов системы из строя под влиянием эксплуатационных факторов, и модели живучести, характеризующие выход элементов системы из строя под влиянием целенаправленного воздействия внешней среды;
- информационные модели, отображающие во взаимосвязи источники и потребителей информации, виды информации, характер ее преобразования, а также временные и количественные характеристики данных;
- процедурные модели, описывающие порядок взаимодействия элементов исследуемого объекта при выполнении различных операций, например, обработки материалов, деятельности персонала, использования информации, в том числе и реализации процедур принятия управленческих решений;
- временные модели, описывающие процедуру функционирования объекта во времени и распределение ресурса «время» по отдельным компонентам объекта.

Стоимостные модели, как правило, сопровождают модели функционирования объекта и по отношению к ним вторичны, «питаются» от них информацией и совместно с ними позволяют проводить комплексную технико-экономическую оценку объекта или его оптимизацию по экономическим критериям.

Кроме описанных классификаций математические модели могут подразделяться и по другим признакам. Конкретная классификация и вид математической модели будут определяться традициями математического описания процессов принятой в той или иной области исследований. Однако описанные общие принципы построения математических моделей будут присуще любой математической модели, вне зависимости от области применения.

Естественно, что возможны и смешанные типы: в одном отношении сосредоточенные (по части параметров), в другом — распределённые модели

2. МОДЕЛИ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ, ОПИСЫВАЕМЫХ ОБЫКНОВЕННЫМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ

Теория обыкновенных дифференциальных уравнений — один из основных элементов математического естествознания. Эта теория позволяет изучать всевозможные эволюционные процессы, обладающие свойствами детерминированности, конечномерности и дифференцируемости и является важнейшим инструментом исследования скорости изменения различных величин [7]. Поэтому данный математический аппарат служит основой для моделирования и исследования динамических непрерывных систем.

2.1. Общие сведения о дифференциальных уравнениях

Дифференциальные уравнения — это соотношение вида

$$F(x_1, x_2, x_3, \dots, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

связывающее независимые переменные $x_1, x_2, x_3, \dots$, функцию y этих независимых переменных и ее производные до n -го порядка. При этом функция F определена и достаточное число раз дифференцируема в некоторой области изменения своих аргументов.

Обыкновенным дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее между собой значения только одной независимой переменной x неизвестной функции $y = f(x)$ и её производных.

Дифференциальные уравнения, в которых содержится две и более независимых переменных называются дифференциальными уравнениями *в частных производных*.

В этом разделе ограничимся рассмотрением моделей, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями.

В общем виде обыкновенное дифференциальное уравнение записывается

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

где $y(x)$ неизвестная функция, зависящая от независимой переменной x .

Число n — порядок старшей производной, входящей в данное уравнение, называется порядком дифференциального уравнения.

Наиболее часто обыкновенное дифференциальное уравнение представляются в виде, в котором старшая производная выражается в виде функции от x, y и $y^{(i)}$, т.е.

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}). \quad (2.1)$$

В таком виде дифференциальное уравнение называется нормальным или разрешённым относительно производной.

Например, дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0, \quad (2.2)$$

и связывает три переменные величины - неизвестную функцию y , её производную y' и независимую переменную x . В нормальном виде это соотношение можно записать

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \quad (2.3)$$

Обыкновенные дифференциальные уравнения можно разделить на линейные и нелинейные. Дифференциальное уравнение является линейным, если неизвестная функция и её производные входят в уравнение только в первой степени (и не перемножаются друг с другом) [7]. Общий вид линейного дифференциального уравнения n -го порядка может быть записан как:

$$p_n(x)y^{(n)}(x) + p_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + p_0(x)y(x) = b(x)x,$$

где $p_n(x)$ - известные функции независимой переменной, называемые коэффициентами уравнения. Функция $b(x)$ в правой части называется свободным членом (единственное слагаемое, не зависящее от неизвестной функции).

Важным частным классом линейных уравнений являются линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами, которое в общем виде записывается

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \dots + a_0 y(x) = b_0 x,$$

где $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0, b_0$ - постоянные коэффициенты.

Подклассом линейных уравнений являются *однородные* дифференциальные уравнения – уравнения, которые не содержат свободного члена, т.е. $b(x)=0$. Для однородных дифференциальных уравнений выполняется принцип суперпозиции: линейная комбинация частных решений такого уравнения также будет его решением. Все остальные линейные дифференциальные уравнения называются *неоднородными* дифференциальными уравнениями.

Наряду с дифференциальными уравнениями (2.2, 2.3) для одной неизвестной функции в теории обыкновенных дифференциальных уравнений рассматриваются системы уравнений [8]. Система уравнений первого порядка, разрешенных относительно производных и имеющая вид

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, \dots, y_n), \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.4)$$

называется нормальной системой. Вводя векторные функции

$$\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n), \quad \mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n),$$

можем записать систему (2.4) в векторной форме

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$$

Легко видеть, что уравнения n -ого порядка (2.1), разрешенное относительно старшей производной.

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right), \quad (2.5)$$

может быть сведено к нормальной системе. Действительно, введем обозначения

$$y = y_1(x), \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx} = y_2(x), \quad \dots, \quad \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \frac{dy_{n-1}}{dx} = y_n(x). \quad (2.6)$$

Тогда, вследствие очевидного равенства $\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{dy_n}{dx}$ уравнению (2.5) можно сопоставить нормальную систему

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dy_1}{dx} = y_2(x), \\ \dots \\ \frac{dy_{n-1}}{dx} = y_n(x), \\ \frac{dy_n}{dx} = f(x, y_1, \dots, y_n). \end{array} \right. \quad (2.7)$$

Решением системы дифференциальных уравнений (2.4) называется всякая совокупность функций $y_i(x)$, которые при подстановке в уравнения обращают их в тождества.

Как правило, если дифференциальное уравнение разрешимо, то оно обладает бесчисленным множеством решений. Процесс нахождения решений называется *интегрированием дифференциального уравнения*. Например, решением дифференциального уравнения $y'' + y = 0$ является функция $y = \sin x + \cos x$. И действительно, дифференцируя функцию дважды, будем иметь

$$y' = \cos x - \sin x, \quad y'' = -\sin x - \cos x.$$

Подставляя выражение y'' и y' в дифференциальное уравнение, получим тождество

$$-\sin x - \cos x + \sin x + \cos x \equiv 0.$$

Всякое решение $y_i(x)$ системы (2.4) можно интерпретировать геометрически как кривую в $(n+1)$ -мерном пространстве переменных $x, y_1, \dots, y_n$, которая называется интегральной кривой. Подпространство переменных $y_1, \dots, y_n$ называется *фазовым пространством*, а проекция интегральной кривой на фазовое пространство - *фазовой траекторией*.

Решением уравнения (2.4) на интервале I оси x называется любая дифференцируемая функция $y = \varphi(x)$, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество. Общим решением уравнения (2.4) называется множество всех его решений. Общее решение зависит от одной произвольной постоянной C и представляется в следующем виде:

$$y = \varphi(x, C)$$

Выражение вида

$$\Phi(x, y, C) = 0$$

из которого y определяется неявно, как функция от t называется общим интегралом решения (2.4).

Решить дифференциальное уравнение означает найти его общее решение или общий интеграл. При этом предпочтение, как правило, отдается более компактной записи ответа.

Вообще говоря, дифференциальное уравнение имеет бесчисленное множество решений. Так, например, решением дифференциального уравнения $y' - 2x = 0$ является функция $y = x^2 + c$ при любом постоянном c .

Если же в задаче, которая привела к дифференциальному уравнению, ищется единственное решение, то должно быть задано и *начальное условие*, т.е. значение искомой функции при каком-то значении x . Выбор единственного решения называется *частным решением*.

На рис.2.1 показаны интегральные кривые решения дифференциального уравнения при разных c . Частное решение выбирается при $c=1$ (показано сплошной линией).

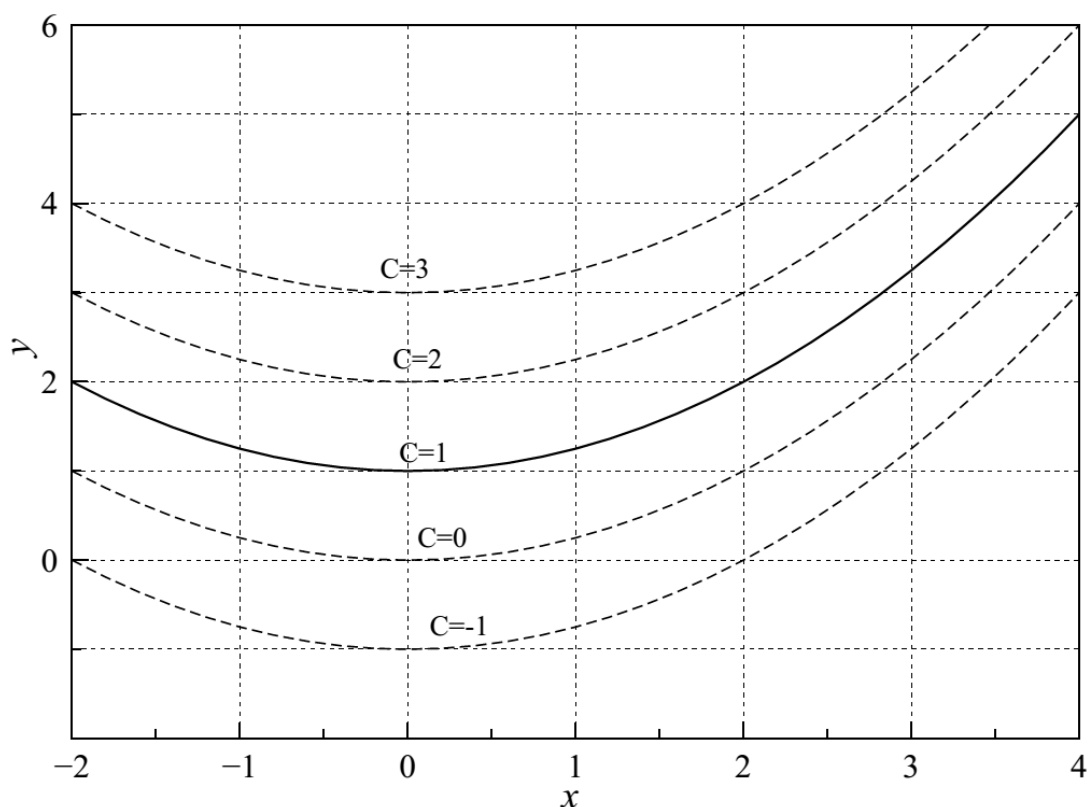


Рис.2.1. Решения дифференциального уравнения $y' - 2x = 0$ при разных C

Начальные условия для системы (2.4) во многих случаях задаются в следующем виде

$$y_i(x_0) = y_i^0 \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.8)$$

и определяет ту точку $(n+1)$ – мерного пространства переменных $x, y_1, \dots, y_n$, через которую проходит данная интегральная кривая.

Задача интегрирования системы (2.4) с начальными условиями (2.8) называется *начальной задачей* или *задачей Коши*.

В простейшем случае одного уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

функция $f(x, y)$ определяет поле направлений в области D плоскости (x, y) . Это поле направлений в каждой точке области D задается вектором $\theta(x, y)$ с угловым коэффициентом $f(x, y)$ ($\tan \alpha = f(x, y)$) (рис.2.2).

Решение начальной задачи (задачи Коши) с заданным начальным условием $y(x_0) = y_0$ в этом случае заключается в построении в области D интегральной кривой $y = y(x)$, выходящей из начальной точки (x_0, y_0) и в каждой своей точке (x, y) касающейся вектора θ с угловым коэффициентом $f(x, y)$.

В *нелинейных* дифференциальных уравнениях по крайней мере одна из производных неизвестной функции (включая и производную нулевого порядка - саму неизвестную функцию) входит нелинейно. Примером может служить уравнение математического маятника

$$\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} = -\frac{g}{L} \sin \varphi,$$

где φ - угол отклонения от вертикали; g - ускорение свободного падения, $[m/s^2]$; L - длина маятника, $[m]$ является нелинейным.

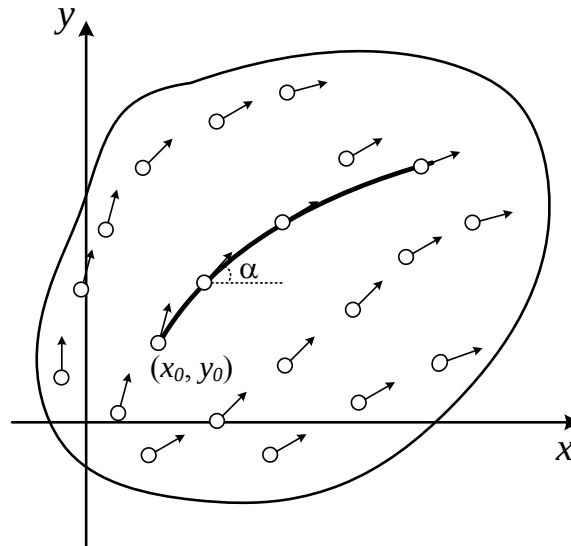


Рис.2.2. Интегральная кривая частного решения дифференциального уравнения

Нелинейные дифференциальные уравнения в общем случае не имеют разработанных методов решения, кроме некоторых частных классов. В некоторых случаях (с применением тех или иных приближений) они могут быть сведены к линейным. Например, предыдущее уравнение сводится к линейному дифференциальному уравнению путем замены $\sin \varphi \approx \varphi$ при малых φ

$$\frac{d^2 \varphi}{d\tau} = -\frac{g}{L} \varphi.$$

В качестве независимой переменной, во многих случаях, выступает время t . Такое дифференциальное уравнение может описывать динамическое состояние системы и использоваться для построения динамических моделей. В этом случае дифференциальное уравнение первого порядка в нормальном виде запишется

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y).$$

В динамической модели учитываются инерционные свойства моделируемого объекта или процесса, т.е. данный тип модели имеет «память» – значение выходного сигнала процесса $y(t)$ зависит не только от значения входного воздействия $x(t)$ в данный момент времени, но и от его прошлых значений (его предыстории).

2.2. Численные методы решения дифференциальных уравнений

При изучении физических явлений, процессов происходящих в системах и объектах управления, часто не удастся найти непосредственно закон, связывающий независимую переменную и искомую функцию, но можно установить связь, между этой функцией и её производными, выражаемые дифференциальными уравнениями.

Численные методы решения дифференциальных уравнений позволяют получить искомое решение $y(x)$ или $y(t)$ дифференциального уравнения в форме таблицы его приближенных значений $y_1, y_2, \dots, y_n$ для заданной последовательности значений аргумента $x_1, x_2, \dots, x_n$ (или $t_1, t_2, \dots, t_n$ для динамических систем).

Главное преимущество численных методов состоит в том, что их можно получить даже в том случае, когда аналитическое решение получить невозможно.

Для получения решения, непрерывный отрезок $[x_0, x_{max}]$, на котором требуется получить решение дифференциального уравнения, заменяют конечной последовательностью дискретных точек $x_1, x_2, \dots, x_n$, называемых узлами (узлами сетки). Величина $h = x_i - x_{i-1}$ – расстояние

между соседними узлами – называют шагом интегрирования (шагом сетки) [10] и вместо решения исходного дифференциального уравнения ищется решение его конечно-разностного аналога.

Функция $y[x_n]$, определённая только в узлах сетки, называется сеточной функцией.

Существует два класса методов решения

- Одношаговые
- Многошаговые

В одношаговых методах для расчета значения на следующем шаге решения y_{i+1} в точке $i+1$ достаточно знать только одно текущее значение y_i на предыдущем шаге в точке i , т.е.

$$y_{i+1} = F(y_i)$$

В многошаговых методах для расчета значения на следующем шаге y_{i+1} используются $R+1$ значений решений, вычисленных на предыдущих шагах, т.е.

$$y_{i+1} = F(y_{i-R}, y_{i-R+1}, \dots, y_{i-1}, y_i).$$

Одношаговые методы можно рассматривать как частный случай многошаговых при $R=0$.

Численные методы позволяют находить частные решения дифференциальных уравнений

Рассмотрим реализацию одношаговых и многошаговых численных методов решения дифференциального уравнения.

Численные методы решения дифференциальных уравнений первого порядка будем рассматривать для следующей задачи Коши. Найти решение дифференциального уравнения вида

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (2.9)$$

удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$.

Т.е. требуется найти интегральную кривую $y=y(x)$, проходящую через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$.

Основное достоинство численных методов состоит в том, что с их помощью практически всегда можно получить решение дифференциального уравнения. Однако, вследствие пошагового интегрирования численные методы дают только частные решения.

2.3. Метод Эйлера (Метод касательных)

Рассмотрим пример перехода к конечно-разностному уравнению для одношагового метода.

Переход осуществляется следующим образом. Вместо точного значения производной рассматривается её разностный аналог, т.е.

$$\frac{dy}{dx} \rightarrow \frac{y(x+h) - y(x)}{\Delta x}, \quad (2.10)$$

где Δx – соответствует шагу сетки h

Тогда в конечных разностях уравнение (2.9) примет следующий вид

$$\frac{y(x+h) - y(x)}{h} = f(x, y(x)). \quad (2.11)$$

Для всех шагов сетки $i = 0 \dots n$ с шагом h уравнение (2.11) можно записать в виде

$$\frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h} = f(x_i, y_i).$$

Отсюда, формула для нахождения значения функции в узле $i+1$ запишется

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + h \cdot f(x_i, y(x_i))$$

или введя обозначение $y(x_i) \rightarrow y_i$, $y(x_{i+1}) \rightarrow y_{i+1}$ получим рекуррентное выражение

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i), \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (2.12)$$

Таким образом, приближенное значение функции y_{i+1} будет зависеть от значения функции в предыдущий момент времени.

Для решения задачи Коши и получения частного решения необходимо задаться начальными значениями в точке (x_0, y_0) .

Выражение (2.12) реализует метод, который называется методом касательных или методом Эйлера. На рис.2.3. приведена геометрическая интерпретация этого метода.

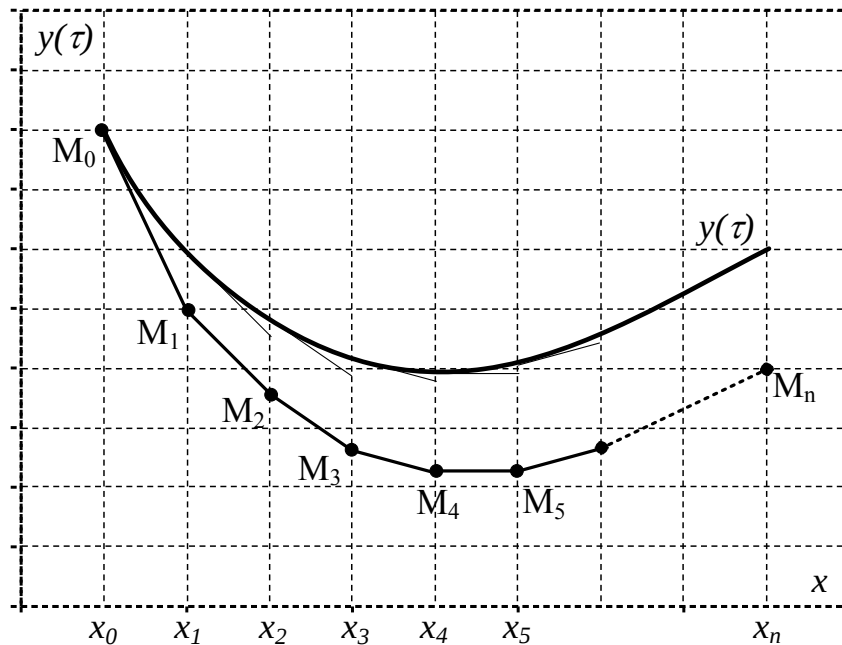


Рис.2.3. Геометрическая интерпретация метода Эйлера

Геометрическая интерпретация метода Эйлера состоит в замене интегральной кривой $y(x)$ ломанной $M_0, M_2, M_3, \dots, M_n$ с вершинами $M_i(x_i, y_i)$. Звенья ломанной Эйлера $M_i M_{i+1}$ в каждой вершине M_i имеют направления $y_i = f(x_i, y_i)$, совпадающее с направлением интегральной кривой, проход

Из (2.10) видно, что метод будет давать хорошее приближение к точному решению дифференциального уравнения, если приращение аргумента Δx достаточно мало.

Из рис. 2.3 понятно, что значение в точке $i+1$ оценивается по значению функции и её производной в i -ой точке. При этом принимается, что значение производной (то есть угла наклона касательной) на отрезке Δx остается неизменным. Увеличение шага Δx приводит к большему отклонению численного решения от точного.

Пример 1. Решения однородного дифференциального уравнения методом Эйлера.

Рассмотрим численное решение однородного дифференциального уравнения

$$y' + y = 0 \text{ или в нормальной форме } y' = -y \quad (2.13)$$

Разностное уравнение получим путем замены величины производной разностным аналогом, аналогично (2.13). Полученное разностное уравнение в соответствии с (2.12) примет вид

$$y_{i+1} = y_i - h \cdot y_i,$$

где h – величина шага сетки.

Поставим задачу Коши, зададимся начальными условиями: $x_0=0$, $y_0=5$. Величину шага примем $h=0,5$. Точное решение дифференциального уравнения (2.13) $y = 5e^{-x}$

Численное решение уравнения по шагам:

$$y_1 = y_0 - h \cdot y_0 = 5 - 0,5 \cdot 5 = 2,5$$

$$y_2 = y_1 - h \cdot y_1 = 2,5 - 0,5 \cdot 2,5 = 1,25$$

$$y_3 = y_2 - h \cdot y_2 = 1,25 - 0,5 \cdot 1,25 = 0,625$$

.....

На рис. 2.4 приведен результат численного и точного решения дифференциального уравнения (2.13).

Пример 2. Решения неоднородного дифференциального уравнения методом Эйлера

Рассмотрим решения неоднородного дифференциального уравнения динамической системы.

Дифференциальное уравнение имеет вид

$$T \frac{dy}{d\tau} + y = x. \quad (2.14)$$

Так как правая часть уравнения отлична от нуля, то уравнение относится к неоднородным. Перенесем производную в правую часть и выразим через нее функцию, получим:

$$\frac{dy}{d\tau} = \frac{x - y}{T}$$

Дифференциальное уравнение описывает поведение системы во времени, где x - входное воздействие, y – выходное воздействие. Коэффициент T – постоянная времени.

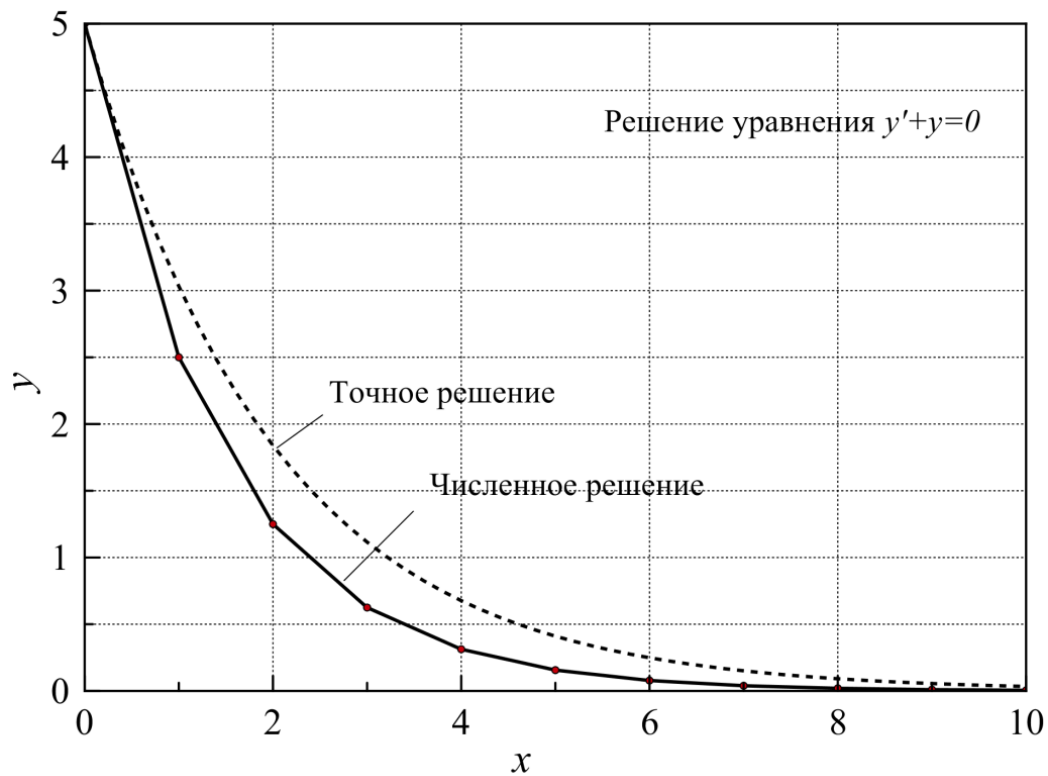


Рис. 2.4. Частное решение дифференциального уравнения, полученное аналитическим (точное решение) и численным методом при шаге $h=0,5$

Произведем замену производной её разностным аналогом, по аналогии с (2.10), получим

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = -\frac{y_i}{T} \quad (2.15)$$

Стоит отметить, что вычисление независимой функции $x(\tau)$ в разностной схеме производится в $i+1$ -ый момент времени. Произведем преобразование (2.15) и выразим функцию y в $i+1$ -ый момент времени, получим

$$y_{i+1} = y_i + h \frac{(x_{i+1} - y_i)}{T} \quad (2.16)$$

Получим частное решение дифференциального уравнения. Определим изменение выходного сигнала y во времени при постоянном значении входного $x=2$ и начальных условиях $y(0)=y_0=0$. Примем $T=2$ с. Шаг по времени $h=1$ с. Частное точное решение дифференциального уравнения (2.14) при $y(0)=y_0=0$ имеет вид:

$$y(\tau) = x \cdot (1 - e^{-\tau/T})$$

На рис.2.5 показан результат решения дифференциального уравнения (2.14).

Метод Эйлера (метод касательных) наглядно демонстрирует способ решения дифференциальных уравнений путем замены производной на разностный аналог. Улучшение точности решения производится путем уменьшения шага сетки h , что приводит к увеличению числа вычислений. Это обстоятельство ограничивает использования метода Эйлера.

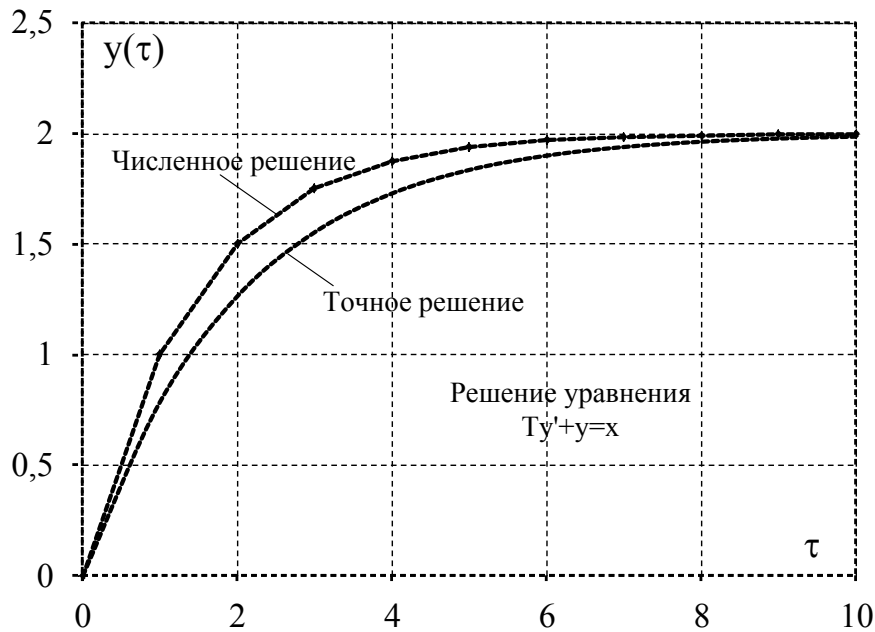


Рис. 2.5. Частное решение дифференциального уравнения (2.32) при нулевых начальных условиях

2.4. Метод разложения в ряд Тейлора

Для анализа путей повышения точности численного решения дифференциальных уравнений рассмотрим суть применения одношаговых методов для динамических процессов.

Пусть на заданном отрезке времени $[a, b]$, требуется найти приближенное численное решение дифференциального уравнения вида

$$y' = f(\tau, y)$$

при начальных условиях $y(\tau_0) = y_0$.

Разобьем заданный интервал времени на n равных частей в точках $\tau_i = \tau_0 + ih$, где $i = 0, 1, 2, \dots, n$, с шагом разбиения (шаг интегрирования) $h = \frac{b-a}{n}$.

На каждом шаге интегрирования заданного дифференциального уравнения искомая функция $y(t)$ в окрестности точки t_i аппроксимируется рядом Тейлора

$$y_{i+1} = y_i + y'_i h + \frac{y''_i}{2!} h^2 + \frac{y'''_i}{3!} h^3 + \frac{y^{(IV)}_i}{4!} h^4 + \dots \text{ или}$$

$$y(\tau_0 + h) = y(0) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{y^{(i)}}{i!} h^i$$

Производя усечение ряда до p -ого члена, определяем порядок численного метода и, соответственно, его точность (порядок точности), т.е.

$$y(\tau_0 + h) \approx y_h = y_0 + \sum_{i=1}^p \frac{y^{(i)}(\tau_0)}{i!} h^i$$

Как не трудно видеть, усечение ряда до 1-ого порядка производной ($p=1$) позволяет получить метод Эйлера, рассмотренный выше.

2.5. Реализация численного метода решения дифференциального уравнения с использованием электронных таблиц MS Excel

Рассмотрим реализацию численного решения дифференциального уравнения, приведенного выше в примере 2 в электронных таблицах MS Excel.

Исходное дифференциальное уравнение (2.14) представляется разностным аналогом (2.16). В качестве постоянных коэффициентов в данном разностном уравнении используются шаг по времени h и коэффициент T . Лист электронной таблицы должен содержать следующие столбцы для расчетов: «Время», «Значение X », «Значение Y ». Кроме того, необходимо задать поля для ввода постоянных значений и коэффициентов. Фрагмент, на котором показаны заполненные заголовки таблицы, показан на рис. 2.6.

	A	B	C	D	E	F
1	Время, с	Значение X	Значение Y	Точное решение	$h=$	1
2	0	2	0	0	$T=$	2
3		2				
4		2				
5		2				

Рис. 2.6. Заполненные поля заголовка электронной таблицы

В ячейку A2 задаем начальное значение времени равное нулю.

В ячейки B2:B12 задается значение входного сигнала $x=2$.

В ячейку C2 задается начальное значение $y(0)=0$.

В ячейку F1 задается шаг по времени равный 1 секунда.

В ячейке F2 задается коэффициент $T=2$.

После ввода постоянных коэффициентов задаются расчетные формулы по ячейкам.

В ячейке A3 записывается формула “ $=\$F\$1+\$A2$ ”. Данная формула рассчитывает значение времени по шагам. После ввода формулы в ячейку A3, необходимо произвести копирование содержимого ячейки A3 по диапазону ячеек A4:A12

В ячейку C3 записывается формула, для расчета в соответствии с разностным уравнением: “ $=C2+(\$F\$1/\$F\$2)*(B3-C2)$ ” После ввода формулы в ячейку C3 необходимо произвести копирование содержимого ячейки C3 по диапазону ячеек C4:C12.

В ячейку D2 записывается формула точного решения дифференциального уравнения: “ $=B2*(1-EXP(-A2/\$F\$2))$ ”. После заполнения ячейки D2, необходимо произвести копирование содержимого этой ячейки по диапазону D3:D12.

В итоге получим заполненную таблицу с результатами численного и точного решения дифференциального уравнения. Вид заполненной таблицы приведен на рис. 2.7.

По данным располагаемым в столбцах таблицы можно построить график решения дифференциального уравнения. Для этого необходимо выделить диапазон ячеек “A1:D12” и выбрать пункт меню «Вставка → Диаграммы → Точечная». Полученный график (рис. 2.8) решения будет аналогичным, приведенному на рис. 2.5.

	A	B	C	D	E	F
1	Время, с	Значение X	Значение Y	Точное решение	h= 1	
2	0	2	0	0	T= 2	
3	1	2	1	0,786938681		
4	2	2	1,5	1,264241118		
5	3	2	1,75	1,55373968		
6	4	2	1,875	1,729329434		
7	5	2	1,9375	1,835830003		
8	6	2	1,96875	1,900425863		
9	7	2	1,984375	1,939605233		
10	8	2	1,9921875	1,963368722		
11	9	2	1,99609375	1,977782007		
12	10	2	1,99804688	1,986524106		

Рис.2.7. Результат численного решения дифференциального уравнения, представленный в табличной форме

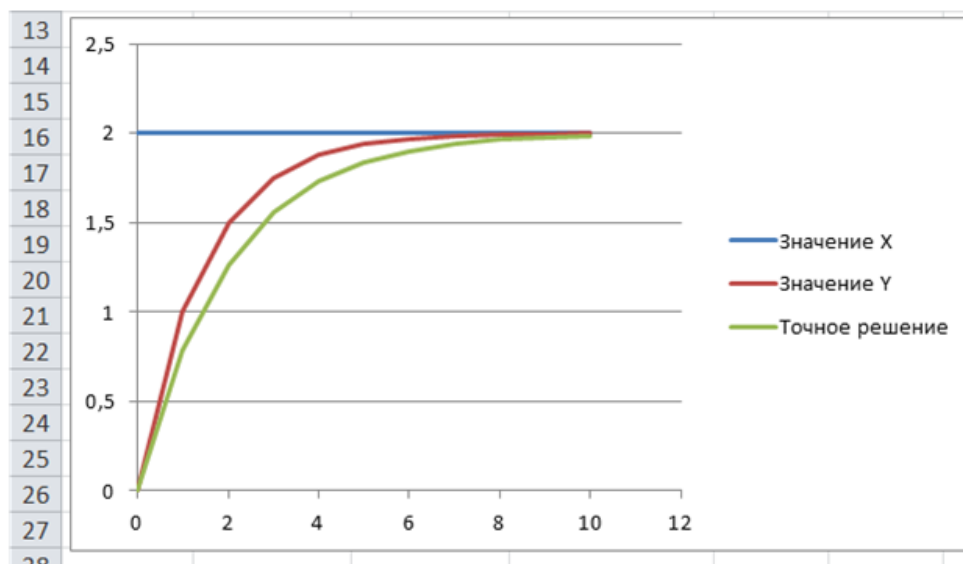


Рис.2.8. Результат численного решения дифференциального уравнения, представленный в форме графика в MS Excel

Для решения дифференциальных уравнений 2-ого и более высоких порядков необходимо исходное дифференциальное уравнение представить в виде нормальной системы (2.7) дифференциальных уравнений 1-ого порядка и произвести их последовательное решение.

Пример 3. Решение дифференциального уравнения 2-ого порядка численным методом Эйлера.

Рассмотрим решение дифференциального уравнения 2-ого порядка следующего вида:

$$2y'' + 2y' + y = x,$$

при начальных условиях: $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$ и постоянном значении $x=1$.

В соответствии с (2.6) введем обозначения: $y_1=y$; $y_2=dy/dt$ и запишем исходное дифференциальное уравнение в виде системы из двух дифференциальных уравнений 1-ого порядка, получим

$$\begin{cases} 2y_2' + 2y_2 + y_1 = x \\ y_1' = y_2 \end{cases}$$

Система разностных уравнений запишется в следующем виде:

$$\begin{cases} 2 \frac{y_{2(i+1)} - y_{2(i)}}{h} + 2y_{2(i)} + y_{1(i)} = x_{i+1} \\ \frac{y_{1(i+1)} - y_{1(i)}}{h} = y_{2(i+1)} \end{cases}$$

Выразив y_1 и y_2 в момент времени $(i+1)$ получим

$$\begin{cases} y_{2(i+1)} = \frac{h}{2} \cdot (x_{i+1} - y_{1(i)} - 2y_{2(i)}) + y_{2(i)} \\ y_{1(i+1)} = h \cdot y_{2(i+1)} + y_{1(i)} \end{cases}$$

Решая последовательно систему уравнений, находим значение $y_2(i+1)$ из первого уравнения полученной системы и подставляем во второе, определяя значение $y_1 = y$, которое является решением данного дифференциального уравнения.

Фрагмент реализации численного метода решения данного уравнения в электронных таблицах MS Excel представлена на рис. 2.9.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Время,с	X	Y2	Y1		h=	0,1
2	0	1	-1	2		x=	1
3	0,1	1	-0,95	1,905			
4	0,2	1	-0,90025	1,814975			
5	0,3	1	-0,85097	1,729878			
6	0,4	1	-0,80237	1,649641			
7	0,5	1	-0,75462	1,574179			
8	0,6	1	-0,70786	1,503393			

Рис.2.9. Результат численного решения дифференциального уравнения второго порядка, представленный в табличной форме

В ячейке “G1” задается величина шага по времени, равная 0,1 с. В ячейке “G2” задается значение переменной x . По условию задачи значение представляет собой константу равную 1.

В ячейке “A2” задается начальное значение времени. В диапазоне ячеек “B2:B82” задается ссылка на ячейку \$G\$2.

В ячейках “C2” и “D2” задаются начальные значения $y'(0)$ и $y(0)$ соответственно.

В ячейке A3 записывается формула “= \$F\$1+\$A2”. Данная формула рассчитывает значение времени по шагам. После ввода формулы в ячейку A3, необходимо произвести копирование содержимого ячейки A3 по диапазону ячеек “A4:A82”.

В ячейке C3 записывается формула для расчета величины y_2 “=(\$G\$1/2)*(B3-D2-2*C2)+C2”. Ячейку C3 необходимо скопировать в диапазон “C4:C82”.

В ячейке D3 записывается формула для расчета величины y_1 “= \$G\$1*C3+D2”. Значение y_1 является численным решением данного дифференциального уравнения. Ячейку D3 необходимо скопировать в диапазон “D4:D82”.

Результат численного решения заданного дифференциального уравнения при заданных начальных условиях представлен на рис. 2.10.

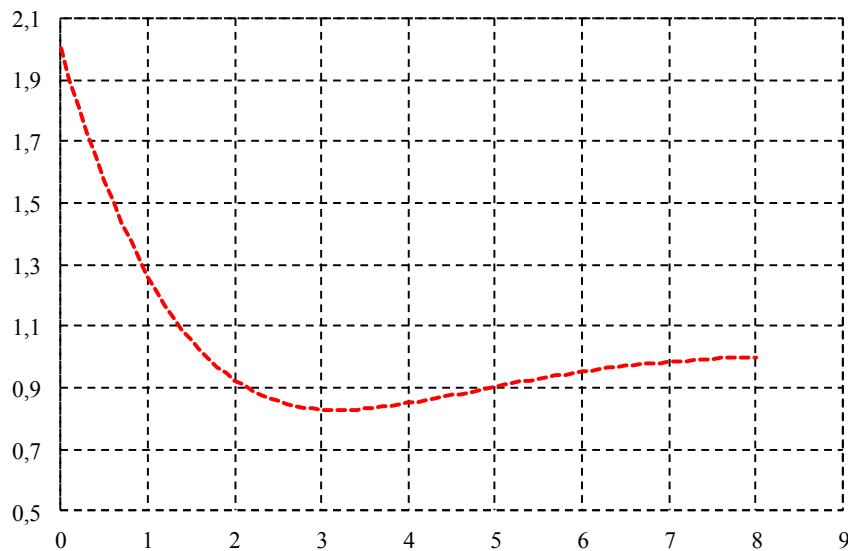


Рис.2.10. Результат численного решения методом Эйлера дифференциального уравнения второго, представленный в форме графика в MS Excel

2.6. Общий метод решения дифференциальных уравнений в системах визуального моделирования

Распространенные системы визуального моделирования систем Matlab/Simulink и Scilab/Xcos позволяют представить модель системы в виде соединения звеньев и задания параметров работы каждого звена.

Рассмотрим общий метод решения дифференциальных уравнений, записанных в форме линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами и с нулевыми начальными условиями. Суть метода состоит в том, что уравнение разрешают относительно старшей производной и представляют в форме (2.5), т.е. исходное дифференциальное уравнение записывают в виде:

$$\frac{d^n y}{d\tau^n} = \frac{b_0}{a_n} x - \frac{a_0}{a_n} y - \frac{a_1}{a_n} \frac{dy}{d\tau} - \dots - \frac{a_{n-1}}{a_n} \frac{dy^{n-1}}{d\tau^{n-1}}$$

Для получения решения дифференциального уравнения и получения функции $y(\tau)$ используют метод понижения порядка производной. Схема решения дифференциального уравнения первого порядка ($n=1$) в виде блок-схемы представлена на рис.2.11.

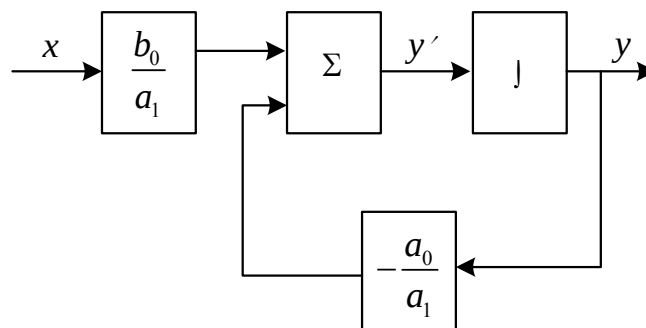


Рис. 2.11. Блок-схема решения дифференциального уравнения первого порядка общим методом понижения порядка производной

Рассмотрим схему решение дифференциального уравнения из задания примера 1.

Разрешим данное уравнение относительно старшей производной, получим выражение:

$$\frac{dy}{d\tau} = \frac{1}{T}x - \frac{1}{T}y$$

Схема решения уравнения в SciLab/XCos при $x=2$ будет иметь вид, представленный на рис. 2.12. Результат решения уравнения При $T=2$ с в виде графика функции $y(\tau)$ представлен на рис. 2.13.

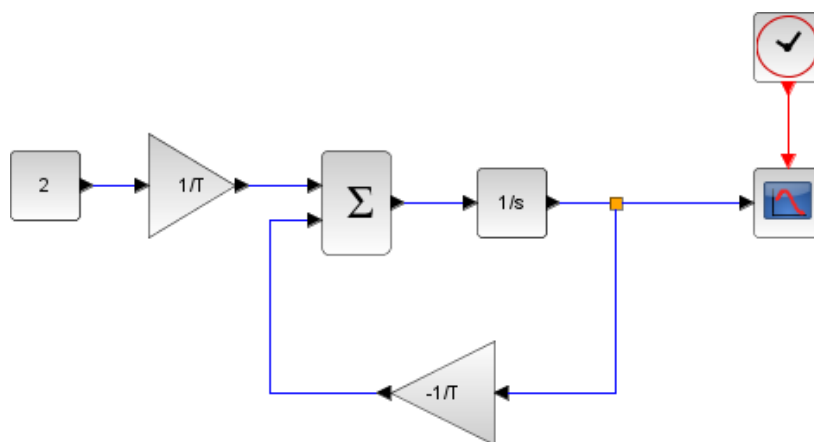


Рис.2.12. Схема решения дифференциального уравнения (2.40) в SciLab/XCos

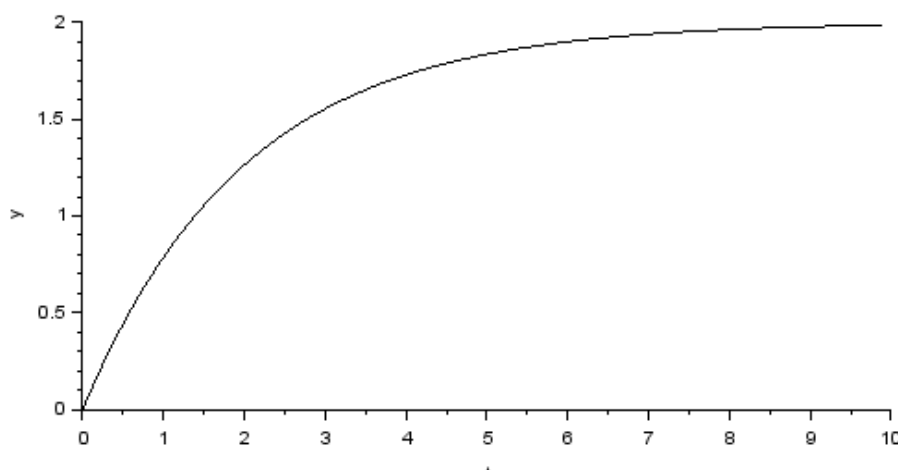


Рис. 2.13. Результат решения уравнения (2.40) при $T=2$ с полученный в SciLab/XCos методом понижения степени по схеме рис.2.10.

При увеличении порядка дифференциального уравнения увеличивается число интеграторов, которые реализуют понижение степени. Так для дифференциального уравнения второго порядка схема решения будет иметь вид, представленный на рис.2.14. В общем виде, блок схема решения дифференциального уравнения n -ого порядка приведена на рис.2.15.

Достоинствами общего метода решения дифференциальных уравнений являются простота и наглядность решения задачи, возможность задания начальных условий. В практических задачах процесс решения сложнее, так как обычно имеются ненулевые начальные условия, входное воздействие может представлять собой сложную функцию времени, требуется учёт изменения знаков переменных, учёт нелинейностей и т. д.

Ненулевые начальные условия задаются через начальные условия интегрирующих элементов для соответствующих производных выходного сигнала.

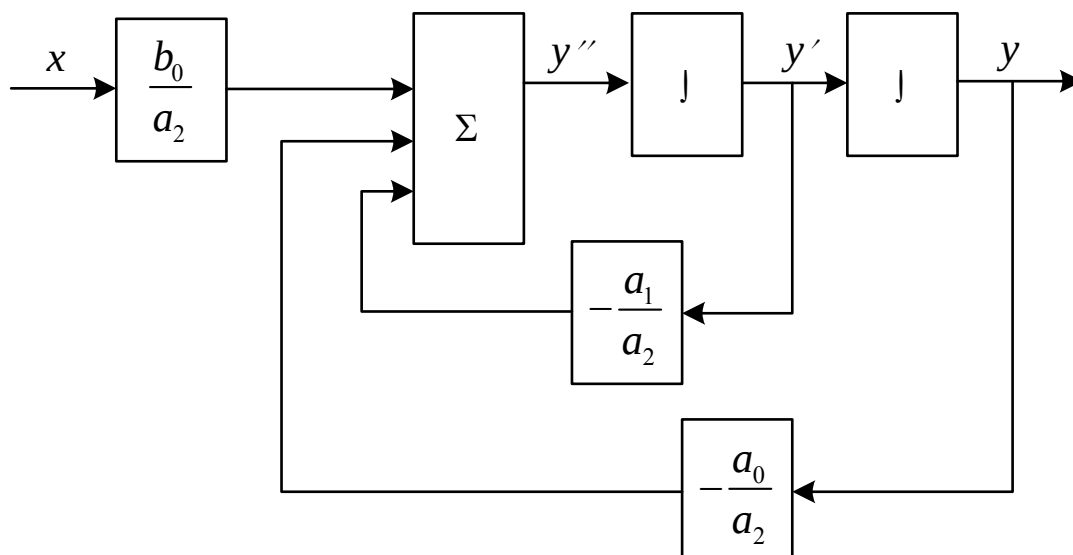


Рис. 2.14. Блок-схема решения дифференциального уравнения второго порядка общим методом понижения порядка производной

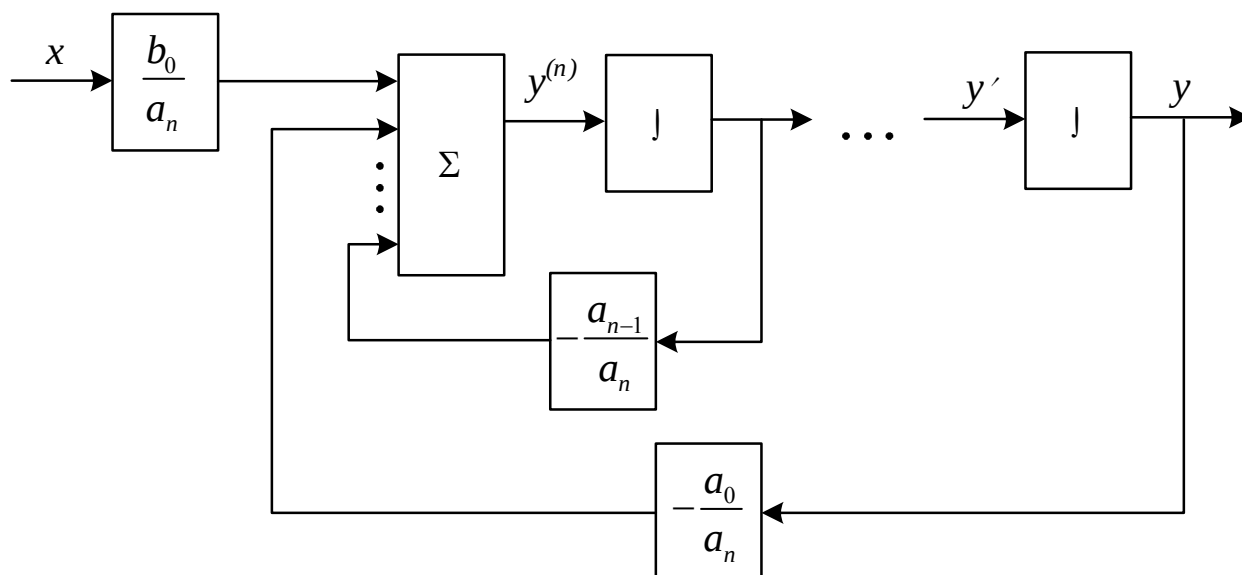


Рис. 2.15. Блок-схема решения дифференциального уравнения n -ого порядка общим методом понижения порядка производной

Пример 4. Решение дифференциального уравнения второго порядка в SciLab/XCos.

Рассмотрим решение дифференциального уравнения 2-ого порядка следующего вида:

$$2y'' + 2y' + y = x,$$

при начальных условиях: $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$ и постоянном значении $x=1$.

Решение получим в пакете визуального моделирования SciLab/XCos.

Выразим относительно старшей производной

$$y'' = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y - y'$$

Схема решения дифференциального уравнения в пакете SciLab/XCos будет иметь вид, представленный на рис.2.16. График решения дифференциального уравнения представлен на рис.2.17. Как видно из полученного результата решение дифференциального уравнения методом Эйлера (рис. 2.10) и получение в пакете SciLab/XCos совпадают.

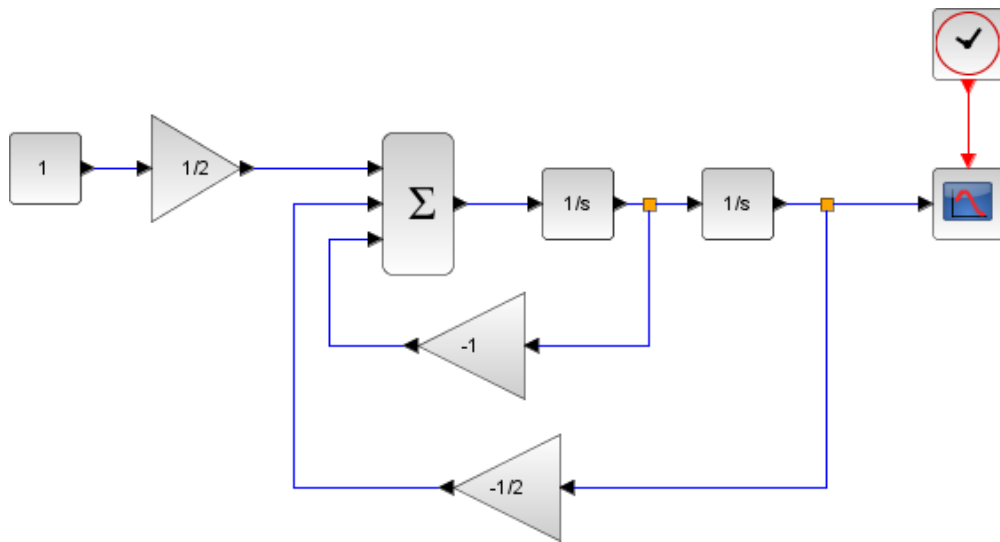


Рис.2.16. Схема решения дифференциального уравнения $2y'' + 2y' + y = x$ в SciLab/XCos

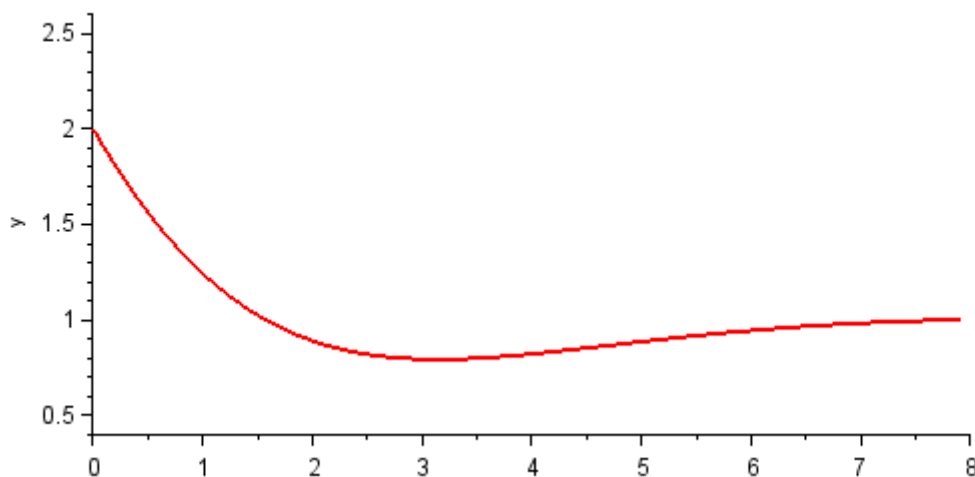


Рис.2.17. График решения дифференциального уравнения $2y'' + 2y' + y = x$

2.7. Использование методов операционного исчисления для решения дифференциальных уравнений

При разработке математических моделей систем автоматического регулирования процессы в линейных системах и в их элементах обычно описываются линейными дифференциальными уравнениями. Важным классом линейных дифференциальных уравнений являются уравнения с постоянными коэффициентами.

При записи линейного дифференциального уравнения придерживаются правила, что все члены уравнения, содержащие выходную величину y и её производные, записываются в левой части уравнения, а входное воздействие x и его производные – в правой:

$$a_0 \frac{d^n y}{d\tau^n} + \dots + a_{n-1} \frac{dy}{d\tau} + a_n y = b_0 \frac{d^m x}{d\tau^m} + \dots + b_m x \quad (2.17)$$

где $a_0, \dots, a_n$ и $b_0, \dots, b_m$ – коэффициенты (параметры) уравнения.

В большинстве случаев параметры уравнения (2.17) можно принять постоянными. В тех случаях, когда параметры изменяются во времени, то система, описываемая такими уравнениями, называется системой с переменными параметрами.

Уравнение (2.17) системы регулирования удобно представлять в символической (операторной) форме, заменив символ дифференцирования оператором p :

$$\frac{d}{d\tau} = p$$

Такая операция замены носит название алгебраизации дифференциального уравнения (2.17). В линейных системах с постоянными параметрами она формально соответствует преобразованию Лапласа, в котором функции $y(\tau)$, заданной во времени и называемой оригиналом, ставится в соответствие функция $Y(p)$ комплексной переменной p , называемая изображением функции $y(\tau)$ по Лапласу [11].

Данное обстоятельство дает возможность применять для решения дифференциальных уравнений, описывающих процессы в системах регулирования, методы операторного исчисления.

Преобразование Лапласа — это интегральное преобразование, которое ставит в соответствие некоторой функции $f(t)$, зависящую от действительного аргумента некоторую функцию $F(p)$, зависящую от комплексного переменного. Функция $f(t)$ называется оригиналом, а функцию $F(p)$ — изображением. Такое соответствие записывается в следующей форме

$$f(t) \xrightarrow{\quad} F(p) \text{ или } L\{f(t)\} \rightarrow F(p)$$

Преобразование Лапласа может быть найдено по следующей формуле.

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$$

Данный интеграл называется интегралом Лапласа.

Рассмотрим получение изображений для некоторых функций.

Преобразование Лапласа для функции $f(t)=1$ можно записать

$$L\{1\} \rightarrow \int_0^{\infty} e^{-pt} \cdot 1 dt$$

Преобразуем в определенный интеграл

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} dt = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a e^{-pt} dt = \lim_{a \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{p} e^{-pt} \right]_0^a = \lim_{a \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{p} e^{-pa} - -\frac{1}{p} e^{-p0} \right) = \lim_{a \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{p} e^{-pa} + \frac{1}{p} \right]$$

При $S > 0$

$$\lim_{a \rightarrow \infty} e^{-pa} = 0,$$

получим

$$L\{1\} = \frac{1}{p}.$$

Преобразование Лапласа для функции $f(t)=e^{at}$

$$L\{e^{at}\} = \int_0^{\infty} e^{-pt} \cdot e^{at} dt = \int_0^{\infty} e^{(a-p)t} dt = \frac{1}{a-p} \left[e^{(a-p)t} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{a-p} [0-1] = \frac{1}{p-a}$$

Полученные изображения некоторых функций сведены в табл. 2.1.

После выполнения операции алгебраизации для дифференциального уравнения (2.17) получим следующую операторную запись дифференциального уравнения:

$$(a_0 p^n + \dots + a_{n-1} p + a_n) Y = (b_0 p^m + \dots + b_m) X \quad (2.42)$$

Таблица 2.1.

Таблица преобразования Лапласа некоторых функций

Оригинал	Изображение	Оригинал	Изображение
1	$\frac{1}{p}$	$t \sin \omega t$	$\frac{2 p \omega}{(p^2 + \omega^2)^2}$
t	$\frac{1}{p^2}$	$t \cos \omega t$	$\frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}$
t^2	$\frac{2}{p^3}$	$sh \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$
$t^n, n \in N$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$ch \omega t$	$\frac{p}{p^2 - \omega^2}$
$e^{\lambda t}$	$\frac{1}{p - \lambda}$	$e^{\lambda t} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p - \lambda)^2 + \omega^2}$
$t e^{\lambda t}$	$\frac{1}{(p - \lambda)^2}$	$e^{\lambda t} \cos \omega t$	$\frac{p - \lambda}{(p - \lambda)^2 + \omega^2}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	$\delta(t)$	1
$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$	$\delta(t - a), a > 0$	e^{-ap}

Разделив все члены полученного уравнения на коэффициент a_n при выходной переменной Y , получим **стандартную** форму записи дифференциального уравнения элемента САР в операторной форме:

$$(T_n p^n + \dots + T_{n-1} p + 1) Y = k (T_m p^m + \dots + 1) X, \quad (2.18)$$

где $T_n = \frac{a_0}{a_n}$, $T_{n-1} = \frac{a_{n-1}}{a_n}$, $k = \frac{b_m}{a_n}$, $T_m = \frac{b_0}{a_n}$.

Многочлен, стоящий в скобках при выходной переменной Y принято называть характеристическим (собственным) оператором, а при входной величине X – выходным оператором, или оператором воздействия. Коэффициенты T_i , имеющие размерность времени, называются постоянными времени.

Важной особенностью стандартной формы дифференциального уравнения является то, что размерности при слагаемых, входящих в характеристический оператор, не зависят от физической природы изучаемого объекта: коэффициент при выходной переменной y размерности не имеет и равен единице, а при остальных слагаемых (производных y) коэффициенты

имеют размерность только времени. Это обстоятельство позволяет обнаружить совершенно одинаковые временные закономерности протекания процессов в различных по своей физической природе системах (электрических, механических, тепловых и др.).

При использовании преобразования Лапласа для решения дифференциальных уравнений следует учитывать следующие свойства преобразования.

1. Свойство линейности:

$$L\{\alpha f(\tau) + \beta g(\tau)\} = \alpha F(p) + \beta G(p),$$

где α, β - любые комплексные постоянные, L - операция преобразования Лапласа.

2. Теорема подобия:

$$L\{f(\alpha\tau)\} = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$

3. Дифференцирование оригинала:

$$L\{f'(\tau)\} = pF(p) - f(0),$$

или в общем случае

$$f^{(n)}(\tau) = p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0), \quad (2.19)$$

где $f^{(n-1)}(0) \dots f(0)$ - начальные условия для производных функции f .

При использовании решения дифференциальных уравнений метода преобразования Лапласа процедура решения дифференциального уравнения (2.17) заменяется решением алгебраического уравнения (2.18), после чего делается переход от изображения к оригиналу функции $y(\tau)$ с помощью таблиц преобразования [19]. В табл. 2.1 приведены основные соответствия между оригиналом функции и его изображением. В общем виде решение дифференциального уравнения с использованием операционного метода можно представить диаграммой, представленной на рис. 2.18.

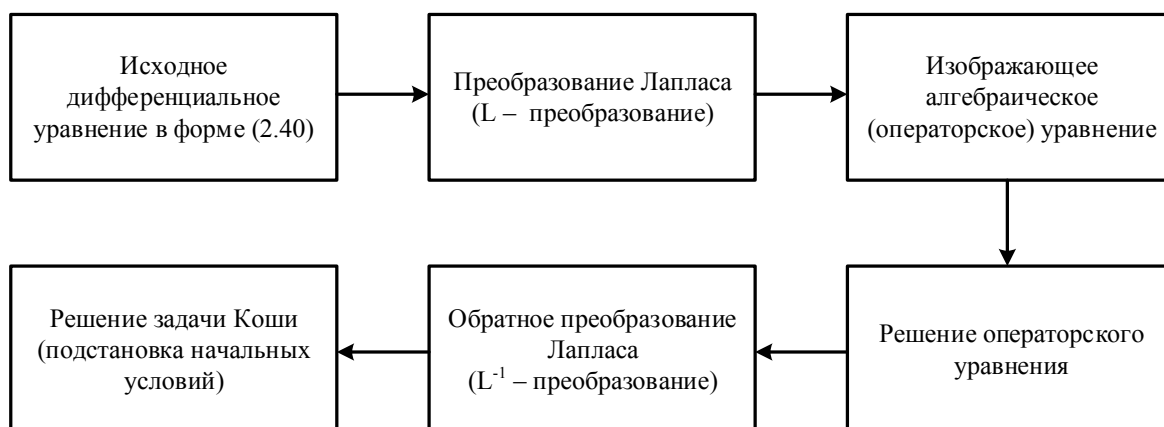


Рис. 2.18. Диаграмма последовательности решения дифференциального уравнения операторским методом с использованием преобразования Лапласа

Пример 5. Решение дифференциального уравнения с использованием преобразования Лапласа.

Решим дифференциальное уравнение

$$y'' + 16y = 0,$$

при начальных условиях $y'(0) = 4$, $y(0) = 0$.

Проведем преобразование исходного уравнения, используя свойство (2.19), получим:

$$p^2 Y(p) - py(0) - y'(0) + 16Y(p) = 0.$$

Отсюда выразим изображение $Y(p)$ и подставив начальные условия получим

$$Y(p) = \frac{4}{p^2 + 16} = \frac{4}{p^2 + 4^2}.$$

В соответствии с табл. 2.1 найдем оригинал из полученного изображения функции:

$$y(\tau) = \sin(4\tau).$$

Полученная функция является решением заданного дифференциального уравнения.

Также важной и удобной в практических приложениях характеристикой, описывающих динамические свойства элемента САР, является передаточная функция, определяемая как отношение изображений выходной переменной $Y(p)$ к входной $X(p)$, взятое при нулевых начальных условиях

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}.$$

Например, для дифференциального уравнения элемента САР (2.43), выражение для изображения выходной переменной $Y(p)$ запишется

$$Y(p) = W_1(p) X(p),$$

где $W_1(p) = \frac{k(T_m p^m + \dots + 1)}{(T_n p^n + \dots + T_{n-1} p + 1)}$ является передаточной функцией по каналу «входной сигнал $X(p)$ - выходная величина $Y(p)$ ».

В следующих разделах будет показано представление математической модели в виде структурной схемы, в которой элементы структуры – звенья описываются передаточными функциями. Из передаточной функции легко получить дифференциальное уравнение. Однако надо помнить, что уравнение будет получено для нулевых начальных условий.

Числитель и знаменатель передаточной функции называются характеристическими полиномами, а при приравнивании их к нулю – характеристическим уравнением. Решение характеристических уравнений, т.е. корни уравнений называются полюсами для знаменателя и нулями для числителя.

Для реализуемых систем порядок полинома числителя передаточной функции m не может превышать порядка полинома её знаменателя n , то есть $m \leq n$. В противном случае система является физически не реализуемой.

Пример 6. Представление динамических свойств линейной системы передаточной функцией.

Получить передаточную функцию системы, поведение которой описывается дифференциальным уравнением 1-ого порядка

$$a_1 y' + a_0 y = b_0 x$$

с нулевыми начальными условиями.

Из (2.19) получим

$$a_1 Y(p)p + a_0 Y(p) = b_0 X(p).$$

После преобразований, получим:

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{b_0}{a_1 p + a_0}.$$

Пример 7. Получить импульсную функцию для линейной системы с передаточной функцией:

$$W(p) = \frac{10p+1}{(10p+1)^2+1}$$

Из табл. 2.1 изображение по Лапласу для импульсной функции $\delta(t)$ соответствует 1, это означает, что $X(p)=1$. Из таблиц обратного преобразования Лапласа [19] известно, что

$$\frac{\lambda p + \mu}{(p + \alpha)^2 + \beta^2} \xrightarrow{L^{-1}} \lambda e^{-\alpha\tau} \cos(\beta\tau) + \frac{1}{\beta}(\mu - \alpha\lambda) e^{-\alpha\tau} \sin(\beta\tau).$$

Преобразуем исходную передаточную функцию к виду табличного преобразования, получим:

$$\begin{aligned} W(p) &= \frac{10p+1}{(10p+1)^2+1} = \frac{10p+1}{100(p+0,1)^2+1} = \\ &= \frac{10(p+0,1)}{100(p+0,1)^2+1} = \frac{p+0,1}{(p+0,1)+0,1^2} \cdot \frac{1}{10}, \end{aligned}$$

где $\lambda = 1$, $\mu = \frac{1}{10}$, $\alpha = 0,1 = \frac{1}{10}$, $\beta = 0,1 = \frac{1}{10}$.

Функция оригинал имеет вид:

$$y(\tau) = \left[e^{-\frac{\tau}{10}} \cdot \cos\left(\frac{\tau}{10}\right) + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{10}\right) e^{-\frac{\tau}{10}} \cdot \sin\left(\frac{\tau}{10}\right) \right] \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{10} e^{-\frac{\tau}{10}} \cos\left(\frac{\tau}{10}\right).$$

Пример 8. Получить импульсную функцию для линейной системы с передаточной функцией:

$$W(p) = \frac{10p}{100p^2+10p+1}.$$

Из табл. 2.1 изображение по Лапласу для импульсной функции $\delta(t)$ соответствует 1, это означает, что $X(p)=1$.

Представим знаменатель исходной передаточной функции в виде произведения. Для этого найдем полюса (корни) характеристического уравнения знаменателя.

Характеристическое уравнение передаточной функции:

$$100p^2 + 10p + 1 = 0.$$

Дискриминант

$$D = b^2 - 4ac = 100 - 4 \cdot 100 \cdot 1 = -300.$$

Т.к. дискриминант отрицательный, то корни характеристического уравнения комплексные

$$p_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-10 \pm 10\sqrt{3}i}{200} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{20}.$$

Передаточную функцию перепишем в следующем виде

$$W(p) = \frac{10p}{100 \left(p + \frac{1-\sqrt{3}i}{20} \right) \left(p + \frac{1+\sqrt{3}i}{20} \right)} = \frac{p}{10 \left(p + \frac{1-\sqrt{3}i}{20} \right) \left(p + \frac{1+\sqrt{3}i}{20} \right)}$$

Из таблиц обратного преобразования Лапласа [19] воспользуемся следующим преобразованием:

$$\frac{\lambda p + \mu}{(p + \alpha)(p + \beta)} \xrightarrow{L^{-1}} \frac{\alpha\lambda - \mu}{\alpha - \beta} e^{-\alpha\tau} + \frac{\beta\lambda - \mu}{\beta - \alpha} e^{-\beta\tau}$$

Для передаточной функции получим:

$$\lambda = 1, \quad \mu = 0, \quad \alpha = \frac{1-\sqrt{3}i}{20}, \quad \beta = \frac{1+\sqrt{3}i}{20}.$$

Найдем выражения:

$$\begin{aligned} \alpha - \beta &= \frac{1-\sqrt{3}i}{20} - \frac{1+\sqrt{3}i}{20} = \frac{(1-\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)}{20} = \frac{-2i\sqrt{3}}{20} = \frac{-\sqrt{3}i}{10} \\ \beta - \alpha &= \frac{1+\sqrt{3}i}{20} - \frac{1-\sqrt{3}i}{20} = \frac{(1+\sqrt{3}i) - (1-\sqrt{3}i)}{20} = \frac{1+\sqrt{3}i - 1 + \sqrt{3}i}{20} = \frac{\sqrt{3}i}{10} \end{aligned}$$

Подставим значение в табличный оригинал, получим

$$\begin{aligned} y(\tau) &= \frac{1}{10} \left[\frac{\frac{1-\sqrt{3}i}{20}}{-\frac{\sqrt{3}i}{10}} e^{-\frac{1-\sqrt{3}i}{20}\tau} + \frac{\frac{1+\sqrt{3}i}{20}}{\frac{\sqrt{3}i}{10}} e^{-\frac{1+\sqrt{3}i}{20}\tau} \right] = \frac{1}{10} \left[\frac{1-\sqrt{3}i}{-2\sqrt{3}i} e^{-\frac{\tau}{20}} \cdot e^{\frac{\sqrt{3}i}{20}\tau} + \frac{1+\sqrt{3}i}{2\sqrt{3}i} e^{-\frac{\tau}{20}} \cdot e^{-\frac{\sqrt{3}i}{20}\tau} \right] = \\ &= \frac{e^{-\frac{\tau}{20}}}{10} \left[-\frac{1-\sqrt{3}i}{2\sqrt{3}i} e^{\frac{\sqrt{3}i}{20}\tau} + \frac{1+\sqrt{3}i}{2\sqrt{3}i} e^{-\frac{\sqrt{3}i}{20}\tau} \right]. \end{aligned}$$

Введем обозначения

$$A = \frac{1-\sqrt{3}i}{2\sqrt{3}i}, \quad B = \frac{1+\sqrt{3}i}{2\sqrt{3}i}, \quad k = \frac{\sqrt{3}}{20}$$

Получим решение оригинал исходной передаточной функции в комплексной форме

$$y(\tau) = \frac{e^{-\frac{\tau}{20}}}{10} \left[-Ae^{ikt} + Be^{-ikt} \right].$$

Используя уравнения Эйлера $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ и тождества $\cos x = \cos(-x)$, $\sin(-x) = -\sin(x)$, получим

$$\begin{aligned} y(\tau) &= \frac{e^{-\frac{\tau}{20}}}{10} \left[-A \{ \cos(k\tau) + i \sin(k\tau) \} + B \{ \cos(-k\tau) + i \sin(-k\tau) \} \right] = \\ &= \frac{e^{-\frac{\tau}{20}}}{10} \left[-A \cos(k\tau) - iA \sin(k\tau) + B \cos(k\tau) - Bi \sin(k\tau) \right] = \\ &= \frac{e^{-\frac{\tau}{20}}}{10} \left[(B - A) \cos(k\tau) - i(A + B) \sin(k\tau) \right]. \end{aligned}$$

Т.к.

$$A+B = \frac{1-\sqrt{3}i+1+\sqrt{3}i}{2\sqrt{3}i} = \frac{1}{\sqrt{3}i} \text{ и}$$

$$B-A = \frac{1+\sqrt{3}i-1+\sqrt{3}i}{2\sqrt{3}i} = 1, \text{ то получим решение в следующем виде}$$

$$y(\tau) = \frac{e^{-\frac{\tau}{20}}}{10} \left[\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{20}\tau\right) - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{20}\tau\right) \right].$$

2.8. Задания для самостоятельной подготовки

Произвести численное решение дифференциальных уравнений, используя метод Эйлера. Построить графики частных решений заданных дифференциальных уравнений. Получить точные решения заданных дифференциальных уравнений, используя метод преобразования Лапласа. Оценить точность численного решения.

1. $y'' + 2y' + y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 2$
2. $y'' + 16y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 4$
3. $y'' - y = 0, y(0) = 4, y'(0) = 2$
4. $y'' + 5y' + 2y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 2$
5. $y'' + 5y' + 6y = 0, y(0) = 2, y'(0) = 3$
6. $3y'' + 4y' - 4y = 0, y(0) = 2, y'(0) = 2$
7. $y'' + 3y' - 4y = 0, y(0) = 3, y'(0) = 0$
8. $y'' - y = 0, y(0) = 3, y'(0) = 0$
9. $y'' + 5y' + y = 0, y(0) = 4, y'(0) = 2$
10. $y'' + y' + y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 5$
11. $y'' - y' + y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 5$
12. $y'' - y' + y = 0, y(0) = 6, y'(0) = 0$
13. $y'' + 2y' + 5y = 0, y(0) = 2, y'(0) = 2$
14. $3y'' + 5y' + 10y = 0, y(0) = 2, y'(0) = 2$
15. $y'' + 2y' + 7y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 3$
16. $y'' + y' + 5y = 0, y(0) = 3, y'(0) = 3$
17. $y'' - 3y' + 3y = 0, y(0) = 2, y'(0) = 1$
18. $y'' - 3y' + 3y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1$
19. $4y'' - y = 0, y(0) = 2, y'(0) = 2$
20. $y'' - 5y' = 0, y(0) = 4, y'(0) = 2$

3. ЦИФРОВОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБЪЕКТОВ И СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

3.1. Этапы построения цифровых моделей объектов и систем управления

Цифровое моделирование систем проводится при помощи вычислительной техники, которая реализует вычислительный алгоритм в соответствии с системой конечно-разностных уравнений, описывающих поведение объекта-оригинала [13]. Обобщенную структурную схему процесса построения модели, можно представить следующим образом.

Первым этапом при построении модели является выбор наиболее подходящего математического описания объекта. В зависимости от особенностей объекта описание может включать линейные и нелинейные интегральные, дифференциальные и интегродифференциальные уравнения с сосредоточенными и распределенными параметрами. На данном этапе необходимо получить наиболее удачное с точки зрения простоты, адекватности и целей моделирования описание объекта-оригинала в виде непрерывной математической модели.

Вторым этапом процесса проектирования является приведение непрерывной математической модели к дискретному виду, пригодному для моделирования на компьютере. Задача решается путем приведения математических зависимостей к дискретному виду путем использования как методов вычислительной математики, так и методов теории автоматического управления, касающихся дискретных систем. Этот этап завершается математическим описанием и структурной схемой дискретной системы, идентичной непрерывной системе с точки зрения целей и задач построения модели объекта-прототипа, т.е. данная дискретная модель должна адекватно описывать те же связи и закономерности, что и непрерывная модель объекта.

Третьим этапом является разработка алгоритма моделирования и его программную реализацию.

На **четвертом этапе** моделирования происходит контроль и отладка полученной цифровой модели, а также тестирование модели и проверка ее адекватности с использованием экспериментальных данных, полученных на реальном объекте-прототипе.

Сущность построения цифровой модели системы заключается в дискретизации математического описания непрерывной системы, которая в свою очередь является математическим аналогом объекта прототипа. В результате дискретизации осуществляется переход от описания при помощи непрерывных математических зависимостей к описанию при помощи дискретных математических зависимостей. Если речь идет о моделировании динамики системы с сосредоточенными параметрами, то исходная непрерывная модель представляет систему обыкновенных дифференциальных уравнений, исходя из которой путем временной дискретизации получают систему конечно-разностных уравнений.

3.2. Построение математических моделей физических объектов

Как уже было отмечено в классификации математических моделей, по способу получения математические модели можно разделить на теоретические, эмпирические и комбинированные, как комбинацию двух вышеуказанных способов. Соответственно существует два основных способа построения математических моделей [13].

Теоретический способ построения модели – способ при котором математическая модель получается в виде т.н. «белого ящика».

«Белый ящик» - математическое описание с известными структурой и параметрами, соответствующими физическим процессам в реальной системе. Способ базируется на априорных сведениях об исследуемом объекте и включает в себя следующие этапы построения модели:

- формирование предположений и допущений, выявление существенных свойств исследуемого объекта;

- структуризация (декомпозиция), основанная на выделении ряда элементарных явлений, математическое описание которых известно из предыдущего опыта;
- формализация – собственно математическое описание элементарных явлений на основе фундаментальных законов природы;
- сочленение (композиция) элементарных явлений в соответствии с внутренней логикой исследуемого процесса.

Рассмотрим варианты построения математической модели основных типов промышленных объектов.

3.2.1. Построение моделей наполнения баков

В производственных процессах технологические элементы, которые представляют различной формы емкости, наполняемых жидкими продуктами являются самыми распространенными производственными объектами. Рассмотрим построение модели наполнения емкости, которая представляет собой бак с постоянной площадью поверхности наполняющей его жидкости, т.е. $S_{II} = \text{const}$. Для подобных объектов возможен постоянный (регулируемый) слив и свободный слив. Схематичное изображение подобных типов объектов показано на рис. 3.1.

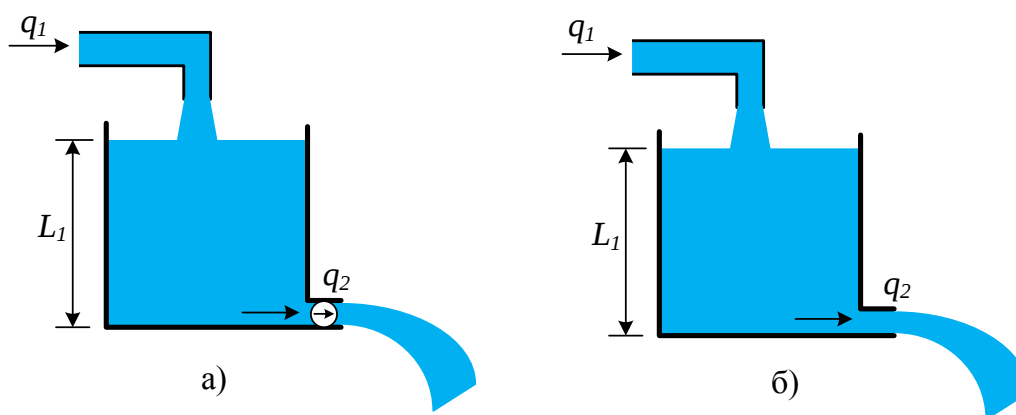


Рис.3.1. Схематичное изображение объектов «бак» с регулируемым – а) и свободным – б) сливом

Расход поступающей жидкости - q_1 , сливающейся жидкости - q_2 , $[м^3/ч]$. Изменение уровня L_1 в баке с регулируемым сливом (рис. 3.1, а) пропорционально разности между расходами поступающей и сливающейся жидкости, т.е. можно записать

$$\frac{\Delta L_1}{\Delta \tau} = (q_1 - q_2) \cdot \frac{1}{S}$$

Формализуем полученное выражение, обозначив $x = q_1 - q_2$, $K_H = 1/S$, $L_1 = y$. При $\Delta \tau \rightarrow 0$, получим дифференциальное уравнение описывающее поведение объекта:

$$\frac{dy}{d\tau} = K_H x \quad (3.1)$$

Для бака со свободным сливом, предположим, что расход q_2 прямо пропорционален текущему уровню с коэффициентом пропорциональности K_C , т.е.

$$q_2 = K_C L_1$$

В этом случае, можно получить следующую формализованную запись дифференциального уравнения, описывающего подобный объект

$$\frac{dy}{d\tau} = K_H (x - K_C y) \quad (3.2)$$

Рассмотрим получение численного решения уравнений (3.1) и (3.2). Разностный аналог дифференциального уравнения (3.1) запишется в следующем виде:

$$y_{(i+1)} = \Delta\tau \cdot K_H \cdot x_{(i+1)} + y_i$$

Получение переходного процесса наполнения бака с площадью поверхности $S=2 \text{ м}^2$, с начальным уровнем $y_0=1 \text{ м}$ при $q_1-q_2=0,05 \text{ м}^3/\text{с}$ в электронных таблицах MS Excel показано на рис. 3.2.

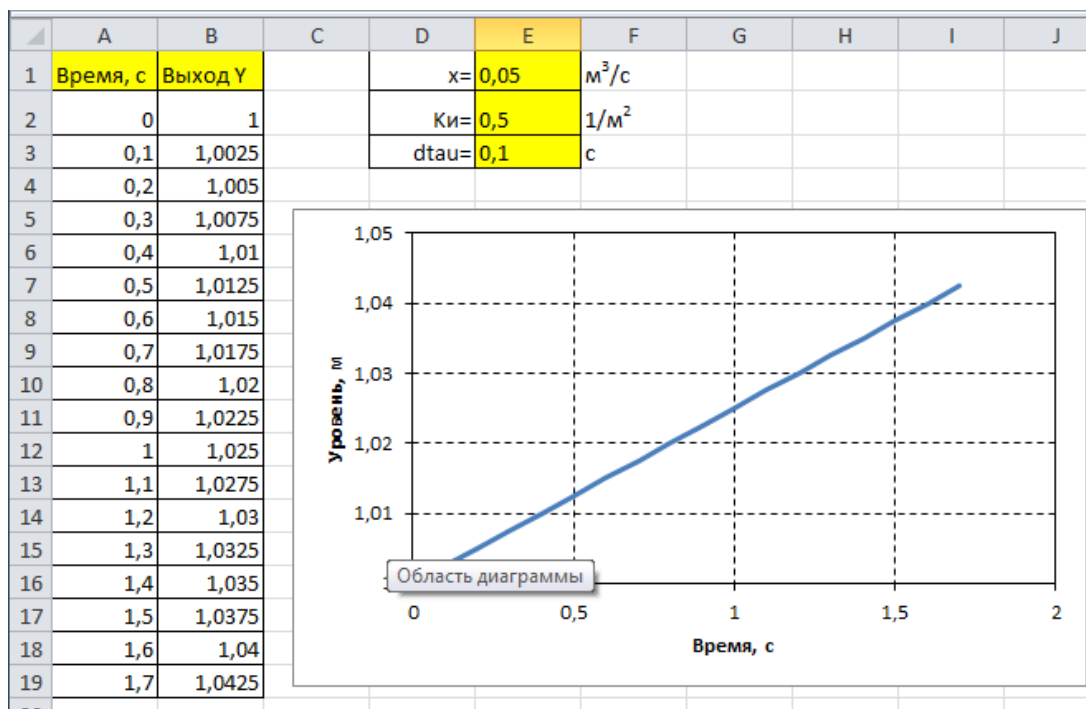


Рис. 3.2. Получение переходного процесса наполнения бака по математической модели процесса, описываемого дифференциальным уравнением (3.1)

Для реализации расчетов по полученному разностному уравнению в ячейках электронной таблицы MS Excel задаем следующие формулы для расчета.

В ячейке A2 – начальное время процесса

В ячейке B2 – начальное значение уровня в баке

В ячейках E1:E3 разность расходов поступающей жидкости и расходуемой, $K_H=1/S$, и величина шага по времени $\Delta\tau$, соответственно.

В ячейке A3 - $=A2+\$E\3 .

В ячейке B3 $=\$E\$3*\$E\$2*\$E\$1+B2$.

В диапазон ячеек A4:B19 копируются значения формул из ячеек диапазона A3:B3.

Разностный аналог уравнения (3.2) запишется в следующем виде:

$$y_{(i+1)} = \Delta\tau \cdot K_H \cdot (x_{(i+1)} - K_C y_i) + y_i$$

Получение переходного процесса наполнения бака с площадью поверхности $S=2 \text{ м}^2$, с начальным уровнем $y_0=1 \text{ м}$ при $q_1=0,05 \text{ м}^3/\text{с}$, $K_C=0,045$ (коэффициент, определяющий способность жидкости к свободному сливу через патрубок) в электронных таблицах MS Excel показано на рис. 3.3.

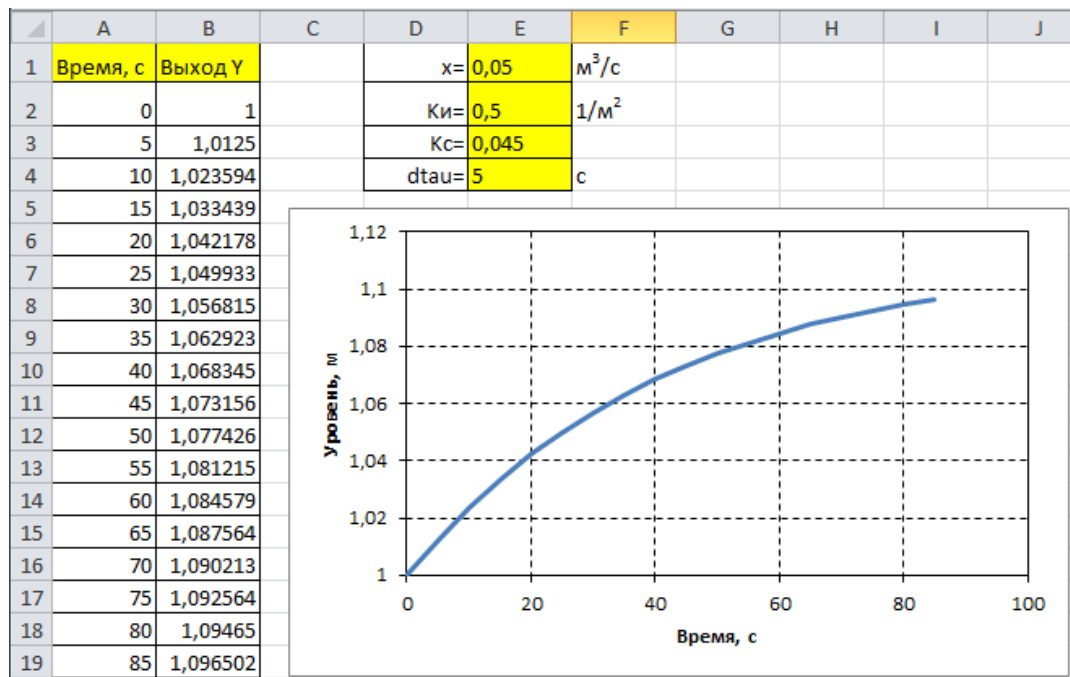


Рис. 3.3. Получение переходного процесса наполнения бака по математической модели процесса, описываемого дифференциальным уравнением (3.2)

По сравнению с реализацией предыдущей модели, добавляется поле ввода коэффициента K_c . Формула для расчета выходного сигнала в ячейке B3 для данной реализации модели = $\$E\$4*\$E\$2*(\$E\$1-\$E\$3*B2)+B2$.

Математическую модель (3.2) можно представить в виде интегрального уравнения. Для этого, проинтегрируем левую и правую часть уравнения (3.2) получим

$$y = K_H \int_0^{\tau} (x - K_c y)$$

Реализация математической модели, описываемой уравнением (3.4) в SciLab/XCos представлена на схеме рис.3.4, а полученные переходные характеристики показаны на рис.3.5.

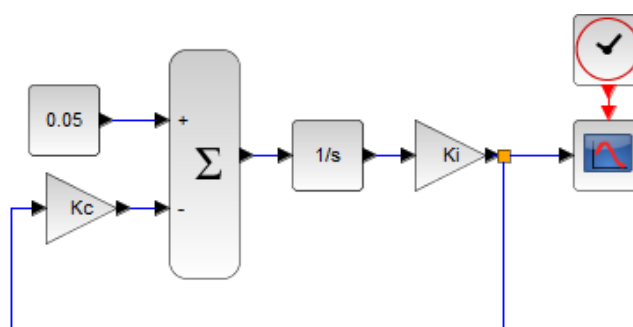


Рис.3.4. Реализация математической модели в соответствии с уравнением (3.2)

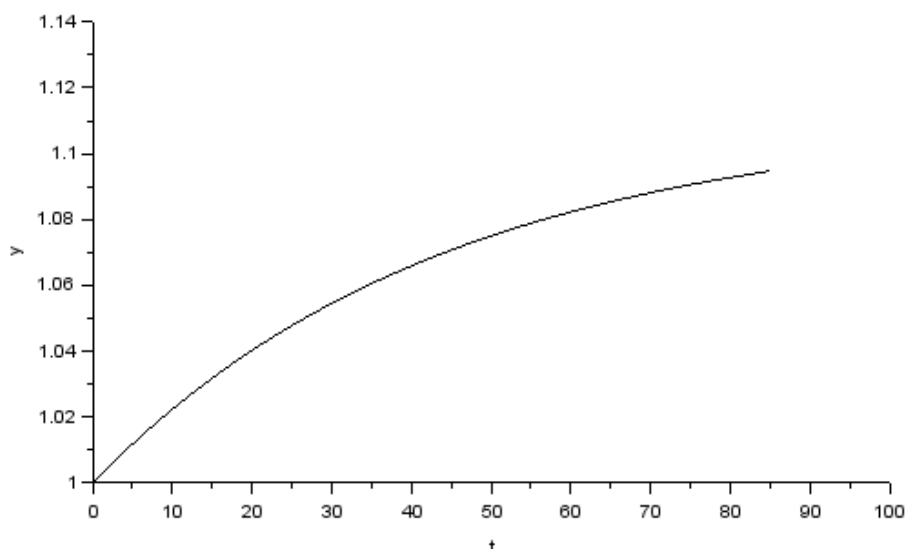


Рис. 3.5. Результат расчета переходной характеристики наполнения бака в соответствии с уравнением (3.2)

Как видно из решения, полученные результаты расчета по математической модели при использовании численного метода Эйлера и в системе визуального моделирования SciLab/XCos идентичны.

3.2.2. Математическая модель гармонического осциллятора

Гармонический осциллятор — система, которая при смещении из положения равновесия испытывает действие возвращающей силы F , пропорциональной смещению x . Схематичное изображение гармонического осциллятора представлено на рис. 3.6.

Свободные колебания тела массой m совершаются за счет действия пружины с жесткостью k . Трение в такой системе отсутствует.

В соответствии с законом Гука, сила действующая на тело со стороны пружины $F = -kx$. Исходя из 2-ого закона Ньютона, определим ускорение движение тела за счет прикладываемой силы F :

$$\frac{dx^2}{d\tau^2} = \frac{F}{m} = \frac{-kx}{m}$$

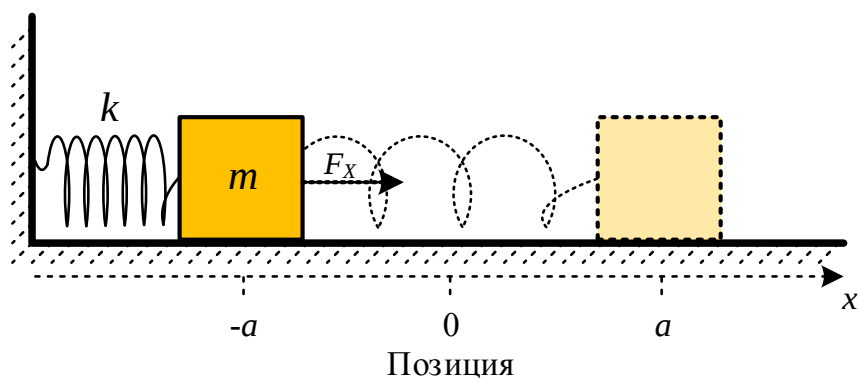


Рис.3.6. Схематичное изображение гармонического осциллятора

Обозначая $\omega_0^2 = k / m$ можно записать дифференциальное уравнение гармонического осциллятора:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (3.3)$$

Это дифференциальное уравнение описывает поведение консервативного гармонического осциллятора. Коэффициент ω_0^2 называют циклической частотой осциллятора (имеется в виду круговая частота, измеряющаяся в радианах за секунду).

Точное решение уравнения (3.3) будет иметь вид:

$$x(\tau) = A \cos(\omega_0 \tau + \delta) \quad (3.4)$$

где A – амплитуда колебаний, δ – начальная фаза. Период колебаний составит $T = 2\pi / \omega_0 = 2\pi / \sqrt{k / m}$.

Система разностных уравнений, реализующая численный метод Эйлера для решения уравнения (3.3) будет иметь вид

$$\begin{cases} x_{2(i+1)} = x_{2(i)} + h \cdot [-\omega_0^2 x_{1(i)}] \\ x_{1(i+1)} = x_{1(i)} + h \cdot x_{2(i+1)} \end{cases} \quad (3.5)$$

где $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$; h – шаг интегрирования по времени.

Уравнение (3.4) и система (3.5) описывают свободные колебания осциллятора, которые возникают при ненулевых начальных условиях. Реализация системы разностных уравнений (3.5) при $x_1(0)=1$, $x_2(0)=0$, $\omega_0=1$ приведет к получению решения, график которого представлен на рис. 3.7. Для реализации модели в среде визуального моделирования схема решения дифференциального уравнения приведена на рис.3.8.

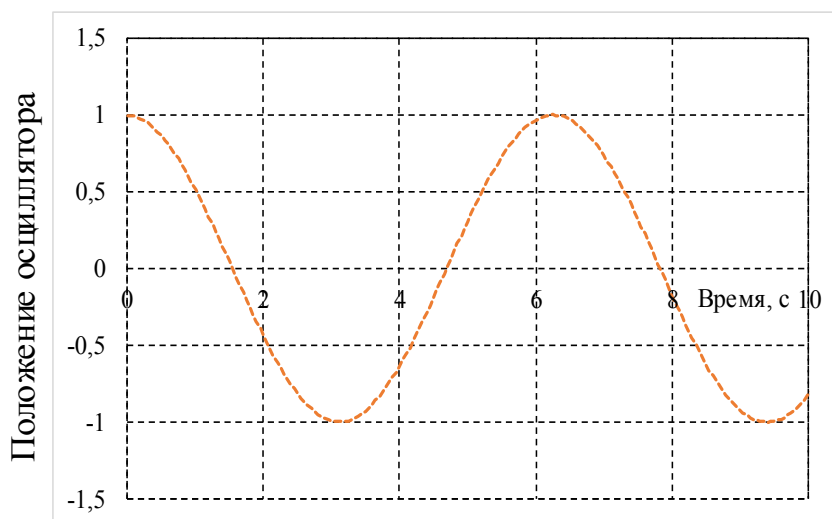


Рис.3.7. График решения дифференциального уравнения гармонического осциллятора

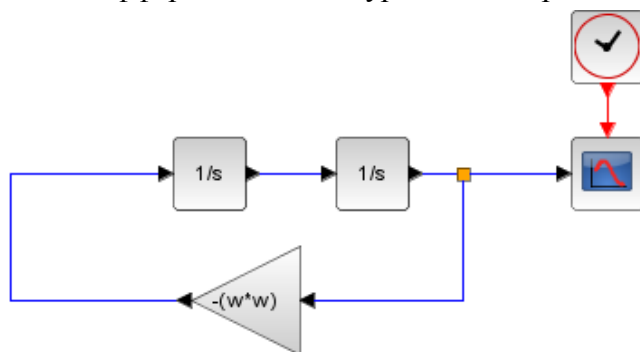


Рис.3.8. Схема решения дифференциального уравнения гармонического осциллятора

3.2.3. Модель нагрева массивного тела

Рассмотрим нагрев теплотехнически тонкого тела в нагревательной печи камерного типа. Внешний вид нагревательной печи, для которой будет строиться математическая модель нагрева, показан на рис. 3.9,а. В качестве выходного параметра системы выступает температура нагреваемого тела T_M , в качестве входного параметра – температура рабочего пространства нагревательной печи T_F .

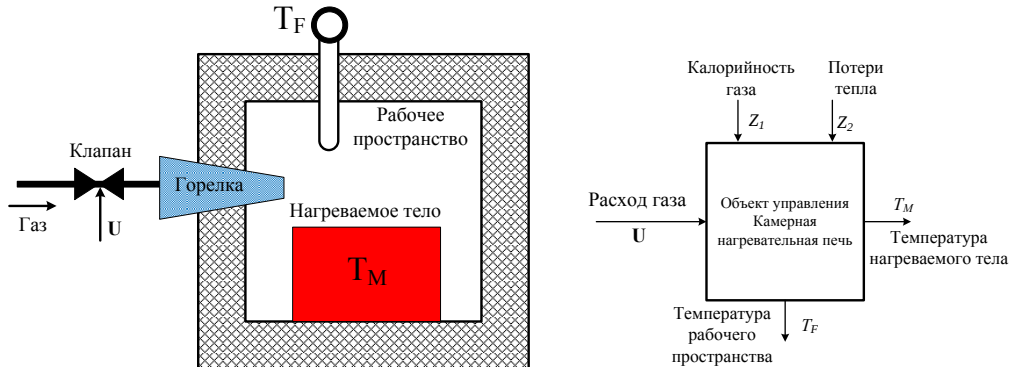


Рис. 3.9. Пример объекта управления: а) вид камерной нагревательной печи; б) структурная схема

Тепловой поток на поверхность тела пропорционален разности температур рабочего пространства нагревательной печи T_F и нагреваемого тела T_M и рассчитывается по формуле:

$$q = \alpha \cdot (T_F - T_M),$$

где α - коэффициент теплоотдачи, Вт/(м² град).

За время $\Delta\tau$ нагреваемое тело аккумулирует тепло в количестве:

$$Q = \alpha \cdot F \cdot (T_F - T_M) \cdot \Delta\tau,$$

где F – тепловоспринимающая поверхность нагреваемого тела, м².

Аккумулированное тепло затрачивается на повышение температуры тела на величину ΔT_M . Составим тепловой баланс, учитывая то что, в соответствии с законом сохранения энергии тепло переданное телу затрачивается на увеличение его энтальпии, т.е. можно записать:

$$\alpha \cdot F \cdot (T_F - T_M) \cdot \Delta\tau = C \cdot M \cdot \Delta T_M,$$

где C - удельная теплоемкость нагреваемого тела, Дж/(кг град); M – масса нагреваемого тела, кг.

Отсюда получим:

$$\frac{\alpha \cdot F}{C \cdot M} (T_F - T_M) = \frac{\Delta T_M}{\Delta\tau} \quad (3.6)$$

Введем обозначение:

$$\frac{\alpha \cdot F}{C \cdot M} = K.$$

Определим размерность полученного коэффициента, получим

$$\frac{\frac{Вт}{м^2 \cdot К} \cdot м^2}{\frac{Дж}{кг \cdot К}} = \frac{1}{с}.$$

Выразим из (3.6) температуру рабочего пространства нагревательной печи, получим:

$$T_F = \frac{1}{K} \cdot \frac{\Delta T_M}{\Delta \tau} + T_M.$$

Введем обозначение $1/K = T_0$ где T_0 - постоянная времени, с, отсюда получим

$$T_F = T_0 \cdot \frac{\Delta T_M}{\Delta \tau} + T_M.$$

Формализуем полученное выражение. Введем обозначения $x = T_F$, $y = T_M$ и приняв $\Delta \tau \rightarrow 0$ получим дифференциальное уравнение описывающее теплообмен между рабочим пространством нагревательной печи и нагреваемым телом:

$$x = T_0 \cdot \frac{dy}{d\tau} + y. \quad (3.7)$$

Полученное дифференциальное уравнение является линейным уравнением I-ого порядка.

Для полученного дифференциального уравнения запишем передаточную функцию. Произведем замену $d/d\tau = p$, и запишем дифференциальное уравнение (3.7) в операторной форме, получим:

$$X(p) = T_0 p Y(p) + Y(p)$$

Приведем подобные получим:

$$X(p) = Y(p)(T_0 p + 1) \quad (3.8)$$

Отсюда передаточная функция системы запишется:

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{1}{T_0 p + 1}.$$

Найдем аналитическое решение дифференциального уравнения (3.7) с использованием таблиц преобразования Лапласа при подаче на вход системы единичного ступенчатого воздействия, т.е. при $x(\tau) = 1$.

Из таблиц преобразования Лапласа [19] определим изображение для функции $x(\tau) = 1$, получим $X(p) = 1/p$. Подставим полученное изображение функции в (3.8) и выразив $Y(p)$ получим:

$$Y(p) = \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{T_0 p + 1} = \frac{1}{p(T_0 p + 1)}.$$

Так как таблицы преобразований [19] не содержит оригинал изображения полученной функции, поэтому представим полученное изображение функции в виде суммы, изображения функций которых приведены в [19].

В общем виде изображение суммы запишется в виде:

$$Y(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{p + \lambda},$$

где $\lambda = 1/T_0$, A , B - значение числителя находятся из решения системы уравнений, которая строится исходя из следующих соображений:

$$\frac{A}{p} + \frac{B}{p + \lambda} = \frac{A(p + \lambda) + Bp}{p(p + \lambda)} = \frac{(A + B)p + A\lambda}{p(p + \lambda)} = \frac{\lambda}{p(p + \lambda)}.$$

Отсюда система уравнений будет иметь вид:

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ A = 1 \end{cases}$$

Отсюда $B = -1$. Получим изображение для передаточной функции:

$$Y(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p + \lambda} \quad (3.9)$$

Из [19] получим оригинал изображения (3.9) при нулевых начальных условиях:

$$y(t) = 1 - e^{-\lambda t} = 1 - e^{-\frac{t}{T_0}}.$$

График решения дифференциального уравнения (3.7) при $T_0=25$ с показан на рис. 3.10.

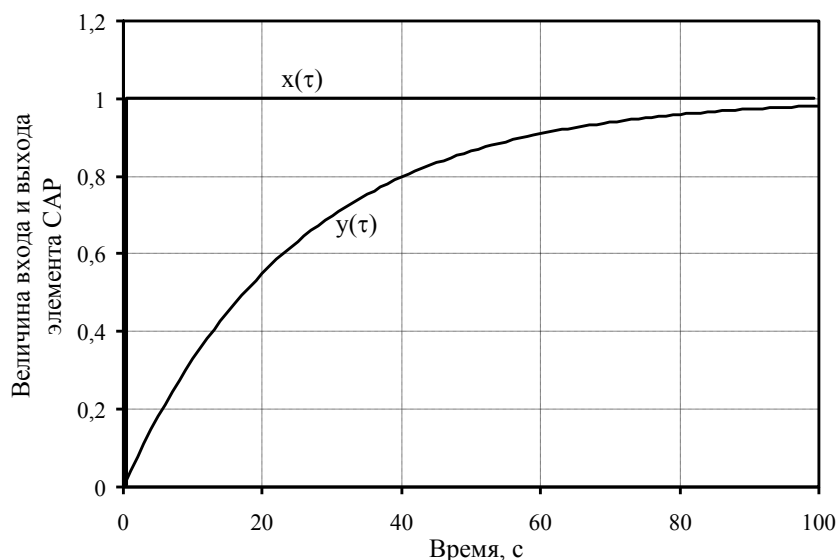


Рис.3.10. График решения дифференциального уравнения (3.14) при значении входа приведенном к единице и $T_0=25$ с

Использование передаточных функций позволяет производить анализ САР любой сложности. Отдельные элементы САР могут соединяться в самых разных сочетаниях, однако любую сложную систему можно всегда рассматривать как совокупность трех видов соединений звеньев: последовательного, параллельного и встречно-параллельного.

3.3. Математические модели в форме передаточных функций

Математические модели в форме передаточных функций представляют собой структурную схему, элементами структуры которой являются передаточные функции. Структурная схема – это совокупность элементарных звеньев и связей между ними, один из видов графической модели. Под элементарным звеном понимают часть объекта, системы управления и т.д. которая реализует элементарную функцию.

Элементарные звенья изображаются прямоугольниками, а связи между ними сплошными линиями со стрелками показывающие направления действия звена. Иногда в поле прямоугольника вписывают математическое выражение закона преобразования сигнала в звене.

Структурная схема предназначена для отражения общей структуры устройства, объекта или системы и связей между основными его блоками. Из структурной схемы должно быть понятна работа системы, её режимы функционирования и взаимодействие отдельных частей.

Использование передаточных функций позволяет производить анализ САР любой сложности. Отдельные элементы САР могут соединяться в самых разных сочетаниях, однако любую сложную систему можно всегда рассматривать как совокупность трех видов соединений звеньев: последовательного, параллельного и встречно-параллельного. Рассмотрим, каким образом можно найти передаточную функцию этих соединений по известным передаточным функциям входящих в них звеньев.

3.3.1. Динамические характеристики и параметры типовых звеньев

Контур системы автоматического регулирования можно представить в виде комбинации соединения звеньев различного типа. При этом всегда могут быть выделены звенья, которые описываются простейшими алгебраическими и дифференциальными уравнениями. Такие звенья называются элементарными звеньями САР. Рассмотрим уравнения и характеристики этих звеньев.

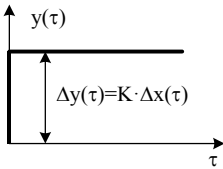
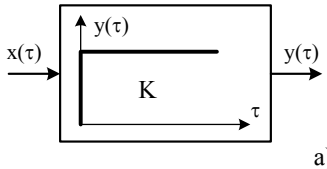
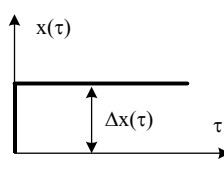
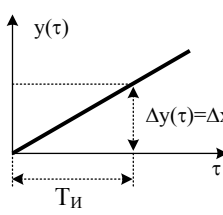
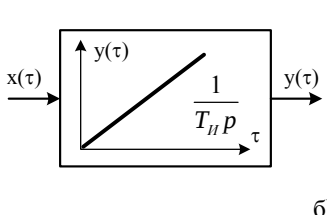
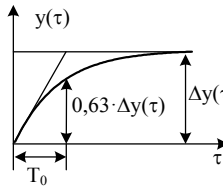
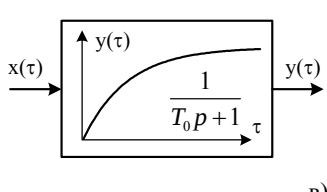
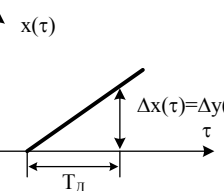
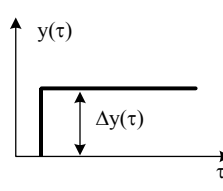
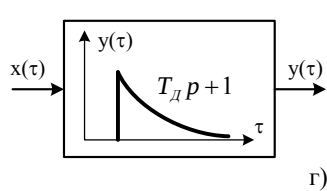
Тип звена	Входное воздействие	Выходное воздействие	Обозначение звена
Пропорциональное			 а)
Интегрирующее			 б)
Инерционное			 в)
Дифференцирующее			 г)

Рис.3.11. Обозначение и переходные характеристики типовых звеньев САР

Пропорциональное (безынерционное) звено.

Между входной и выходной величинами пропорционального звена отсутствует сдвиг во времени. Выходная величина мгновенно изменяется пропорционально входной.

Для такого звена справедливо соотношение:

$$\frac{y(\tau)}{x(\tau)} = K, \quad (3.10)$$

где $y(\tau)$ – изменение выходного параметра во времени; $x(\tau)$ – изменение входного параметра во времени; K – коэффициент передачи (усиления) звена.

Коэффициент K показывает на сколько изменится выходная величина при изменении входной на единицу. Необходимо помнить, что размерности $y(\tau)$ и $x(\tau)$, как правило, не совпадают, тогда в отличие от коэффициента усиления величина K имеет размерность.

Пропорциональное звено является наиболее простым звеном. На рис. 3.11, а показано условное обозначение пропорционального звена, передаточная функция и переходная харак-

теристика. Примером пропорционального звена может являться делитель напряжения, механический редуктор.

Интегрирующее звено.

В интегрирующем звене скорость изменения выходной величины $dy/d\tau$ пропорциональна входной величине $x(\tau)$.

$$\frac{dy(\tau)}{d\tau} = \frac{x(\tau)}{T_{II}}$$

или

$$y(\tau) = \frac{1}{T_{II}} \cdot \int_0^{\tau} x(\tau) d\tau \text{ при } y(\tau) \in [0, y_{MAX}].$$

При $x(\tau)=0$ получим $y(\tau)=\text{const}$. В реальных звеньях изменение $y(\tau)$ может происходить только до некоторого предела (обычно заданного).

Постоянная величина T_{II} называется временем интегрирования. Эта величина количественно характеризует скорость изменения выходного параметра, приходящуюся на единицу изменения входной величины $x(\tau)$. Чем больше T_{II} , тем меньше изменяется выходная величина в единицу времени.

Если входная и выходная величины однородны по своей физической природе, то численное значение T_{II} определяется простым образом в соответствии с эскизом б (см. рис.3.11).

Если в момент времени $\tau=0$ величина $x(\tau)$ скачком изменяется в данном случае от нулевого до некоторого значения $\Delta\tau$, то выходная величина $y(\tau)$ возрастет линейно и за время T_{II} , прирост значения $y(\tau)$ станет равным величине $\Delta\tau$.

Переходная функция интегрирующего звена, определяющая траекторию изменения $y(\tau)$ при изменении $x(\tau)$ на единицу – $h(\tau)$, определяется выражением:

$$h(\tau) = \frac{y(\tau)}{x(\tau)} = \frac{\tau}{T_{II}},$$

где T_{II} , характеризует запаздывающие свойства звена.

В качестве примера интегрирующего звена можно привести угол поворота вала исполнительного механизма постоянной скорости. Эти механизмы очень широко используются в контурах управления технологическими параметрами.

При отсутствии управляющего напряжения вал двигателя неподвижен. При подаче управляющей команды (ступенчатое изменение входной величины $x(\tau)$) вал исполнительного механизма (ИМ) начинает вращаться с постоянной скоростью. Постоянная скорость в данном случае определяется технической характеристикой ИМ.

Также примером интегрирующего звена является наполнение бака водой. При открытии крана и постоянном расходе воды уровень воды в баке начинает изменяться линейно. При закрытии крана, уровень не изменяется и остается постоянным

Объекты, обладающие интегрирующими свойствами, очень сложны для управления и требуют более тщательного контроля эффективности работы управляющего контура.

Дифференцирующее звено.

Если выходная величина звена пропорциональна скорости изменения входной величины, то такое звено называется дифференцирующим.

Это свойство звена определяется уравнением следующего вида:

$$y(\tau) = T_d \frac{dx(\tau)}{d\tau},$$

где T_d – коэффициент пропорциональности, называется временем дифференцирования.

Величина T_d определяет степень чувствительности выходной величины к изменению входной. Физический смысл количественной оценки значения T_d приведен на рис. 3.11, г.

Если параметры $x(\tau)$ и $y(\tau)$ имеют одинаковую физическую природу (например напряжение), то величину T_d можно определить, если $x(\tau)$ будет изменяться с постоянной скоростью

$$\frac{dx(\tau)}{d\tau} = \text{const.}$$

Время дифференцирования T_d дифференцирующего элемента есть время, за которое входная величина, изменяясь с постоянной скоростью достигнет значения выходной величины.

Если на входе идеального дифференцирующего звена сигнал $x(\tau)$ изменить скачком, то $y(\tau)$ за время $\Delta\tau \rightarrow 0$ должна быть бесконечно большой и затем вновь уменьшиться до нуля, т.к. $y(\tau)=0$, то

$$\frac{dx(\tau)}{d\tau} = 0.$$

Для реальных систем, как правило используется реальное дифференцирующее звено, которое имеет передаточную функцию:

$$W(p) = T_d p + 1$$

Инерционное звено первого порядка

Инерционное звено первого порядка обычно называют инерционностью. Свойство инерционности в той или иной мере присуще всем реальным объектам регулирования, и оно является одним из основных негативных явлений, с которыми необходимо бороться при управлении производственными объектами.

Иногда при наличии высокочастотных помех входного информационного сигнала (например, при использовании оптических датчиков для измерения и регулирования температуры поверхности нагреваемых в печи заготовок) инерционность на входе регулятора создается искусственно и такой прием называют сглаживанием (демпфированием).

У инерционного звена первого порядка выходная величина $y(\tau)$ не следует непосредственно за изменением входной $x(\tau)$.

В установившемся состоянии при $\tau \rightarrow \infty$ соотношение $y(\tau)/x(\tau)$ принимают равным единице.

Графическое изменение входной $x(\tau)$ и выходной $y(\tau)$ величин и условное обозначение инерционного звена первого порядка представлены на рис. 3.11, в.

Инерционность звена (объекта) количественно оценивается постоянной времени T_0 .

Постоянная времени T_0 есть время, за которое выходная величина $y(\tau)$ переходит из одного установившегося значения в другое (при скачкообразном изменении $x(\tau)$, если изменение будет происходить с постоянной максимальной скоростью.

У линейных звеньев значение T_0 постоянно и поэтому оно называется постоянной времени и объективно количественно характеризует инерционные свойства объекта. Величина T_0 не зависит от величин входного воздействия. Дифференциальное уравнение инерционного звена первого порядка имеет вид:

$$T_0 \cdot \frac{dy(\tau)}{d\tau} + y(\tau) = x(\tau)$$

Если величина $x(\tau)$ изменяется скачкообразно, то как было показано при решении дифференциального уравнения нагрева тела $y(\tau)$ определяется выражением:

$$c = \frac{\tau}{T_0} ,$$

где τ – текущее время.

3.3.2. Соединение звеньев

Последовательное соединение звеньев. При последовательном соединении звеньев выходная величина предыдущего звена является входной величиной последующего (рис. 3.12,а). Передаточная функция системы последовательно соединенных звеньев равна произведению передаточных функций отдельных звеньев:

$$W(p) = \prod_{i=1}^n W_i(p) .$$

Параллельное соединение звеньев. Входная величина системы, состоящей из параллельно соединенных звеньев (рис. 3.12, б) одновременно подается на входы всех звеньев, а её выходная величина равна сумме выходных величин отдельных звеньев. Передаточная функция системы, состоящий из параллельно соединенных звеньев, равна сумме передаточных функций этих звеньев.

$$W(p) = \sum_{i=1}^n W_i(p)$$

Встречно-параллельное соединение (соединение с обратной связью). При встречно-параллельном соединении (рис. 3.12, в) на вход соединения одновременно с входной величиной подается его выходная величина, прошедшая через звено с передаточной функцией $W_2(p)$. В этом случае передаточная функция соединения будет равна

$$W(p) = \frac{W_1(p)}{1 \pm W_1(p)W_2(p)} .$$

В знаменателе знак «+» относится к отрицательной обратной связи, т.е. когда $x_{BX1} = x_{BX} - x_{OC}$. Знак «-» относится к положительной обратной связи, т.е. когда $x_{BX1} = x_{BX} + x_{OC}$.

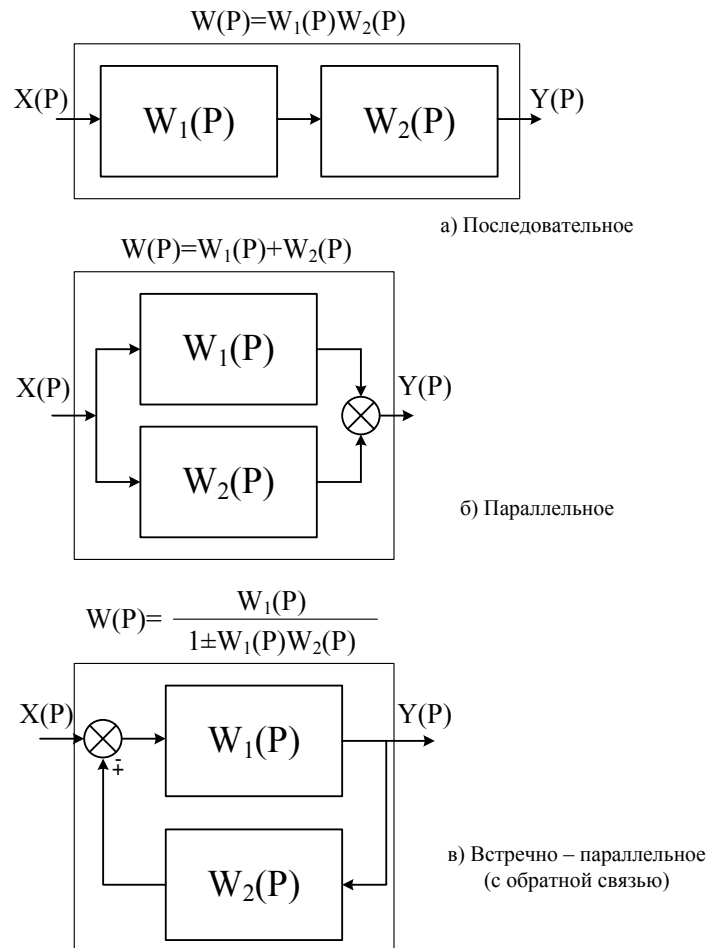


Рис. 3.12. Последовательное (а), параллельное (б) и встречно-параллельное (в) соединение звеньев

Рассмотрим построение модели системы, структурная схема которой приведена на рис. 3.13 с целью получения импульсной характеристики.

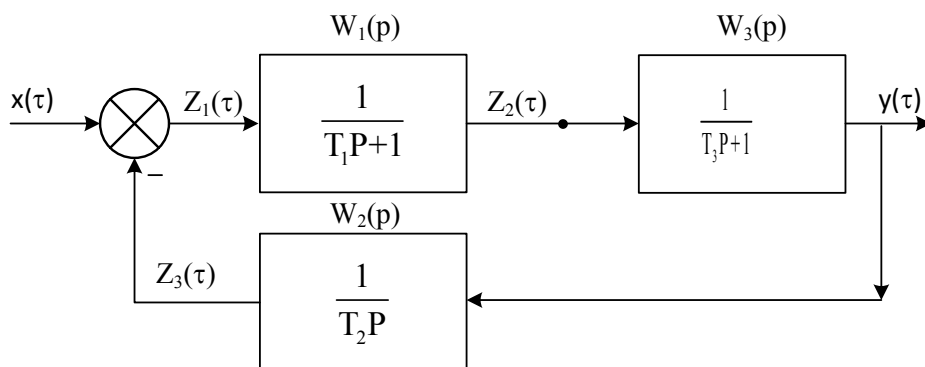


Рис.3.13. Структурная схема моделируемой системы

Рассмотрим метод последовательного моделирования, при котором выходной сигнал подается на вход следующего звена. Модель реализуем в электронных таблицах MS Excel.

Представим звенья с передаточными функциями $W_1(p)$, $W_2(p)$, $W_3(p)$ в виде дифференциальных уравнений, входной и выходной сигналы которых обозначим в соответствии с обозначениями на схеме, получим:

для звена с передаточной функцией $W_1(p)$:

$$\frac{dZ_2}{d\tau} = \frac{1}{T_1} (Z_1(\tau) - Z_2(\tau));$$

для звена с передаточной функцией $W_2(p)$:

$$\frac{dZ_2(\tau)}{d\tau} = \frac{1}{T_2} y(\tau);$$

для звена с передаточной функцией $W_3(p)$:

$$\frac{dy(\tau)}{d\tau} = \frac{1}{T_3} (Z_2(\tau) - y(\tau));$$

для элемента сравнения ЭС:

$$Z_1(\tau) = x(\tau) - Z_3(\tau).$$

Для полученной математической модели определим разностные уравнения для момента времени $(i+1)$ выраженные через момент времени (i) , получим следующую систему разностных уравнений:

$$Z_{2(i+1)} = \frac{h}{T_1} (Z_{1(i+1)} - Z_{2(i)}) + Z_{2(i)}$$

$$y_{(i+1)} = \frac{h}{T_3} Z_{2(i+1)} + y_{(i)}$$

$$Z_{3(i+1)} = \frac{h}{T_2} y_{(i+1)} + Z_{3(i)}$$

$$Z_{1(i+1)} = x_{(i+1)} - Z_{3(i)}$$

Необходимо обратить внимание, что в разностных уравнениях в правой части входные сигналы принимаются в момент времени $(i+1)$, а выходные в момент времени (i) .

Рассмотрим реализацию математической модели, представленной разностными уравнениями в электронных таблицах MS Excel при нулевых начальных условиях и значениях постоянных времени $T_1=5$ с, $T_2=10$ с, $T_3=10$ с и шаге $h=0,1$ с. Вид заполненной таблицы представлен на рис.3.14.

В ячейках электронной таблицы реализованы формулы:

- в ячейке A3: =A2+\$I\$4
- в ячейке C3: =B3-E2
- в ячейке D3: =(\$I\$4/\$I\$1)*(C3-D2)+D2
- в ячейке E3: =(\$I\$4/\$I\$3)*F2+E2
- в ячейке F3: =(\$I\$4/\$I\$3)*(D3-F2)+F2

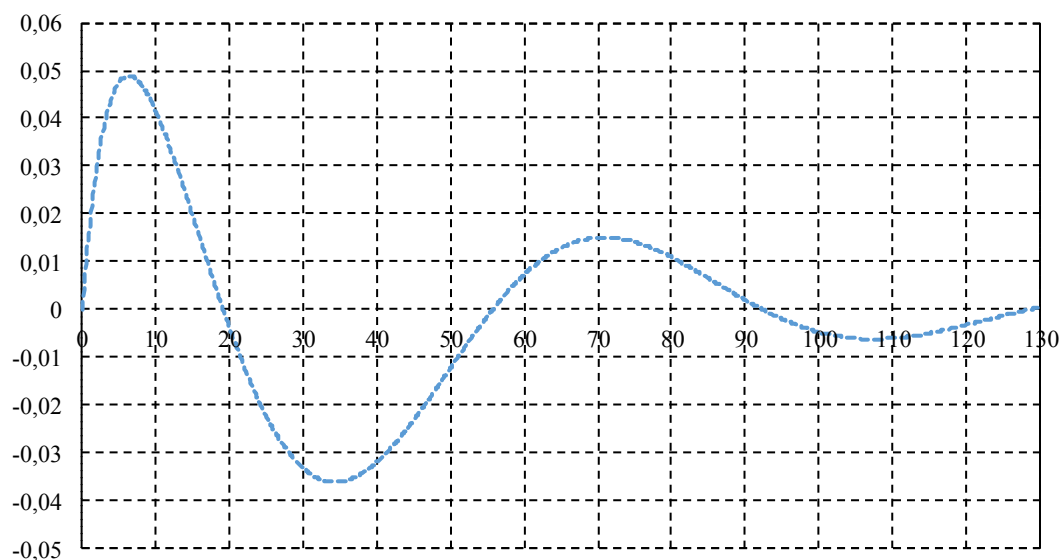
В ячейке B3 задается величина импульса. Так как импульсная характеристика предполагает подачу на вход системы импульса бесконечно большой величины и бесконечно малой длительности с площадью равной единице, то при численном моделировании достаточно сформировать импульс длительностью один шаг и такой амплитудой, чтобы его площадь была равна единице. Амплитуда импульса будет обратно пропорциональна шагу по времени, т.е. $A=1/h$.

Произведя копирование ячеек до момента времени $t=130$ с получим в столбце A («у») импульсную характеристику. График полученной импульсной характеристики приведен на рис.3.15.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Время, с	X	Z1	Z2	Z3	y		T1=	5
2	0	0	0	0	0	0		T2=	10
3	0,1	10	10	0,2	0	0,002		T3=	10
4	0,2	0	0	0,196	0,00002	0,00394		h=	0,1
5	0,3	0	-0,00002	0,19208	5,94E-05	0,005821			
6	0,4	0	-5,9E-05	0,188237	0,000118	0,007646			
7	0,5	0	-0,00012	0,18447	0,000194	0,009414			
8	0,6	0	-0,00019	0,180776	0,000288	0,011127			
9	0,7	0	-0,00029	0,177155	0,000399	0,012788			
10	0,8	0	-0,0004	0,173604	0,000527	0,014396			
11	0,9	0	-0,00053	0,170121	0,000671	0,015953			
12	1	0	-0,00067	0,166706	0,000831	0,017461			
13	1,1	0	-0,00083	0,163355	0,001005	0,01892			
14	1,2	0	-0,00101	0,160068	0,001195	0,020331			
15	1,3	0	-0,00119	0,156842	0,001398	0,021696			
16	1,4	0	-0,0014	0,153678	0,001615	0,023016			
17	1,5	0	-0,00161	0,150572	0,001845	0,024292			

Рис. 3.14. Фрагмент расчета математической модели системы (рис.3.13) в электронных таблицах MS Excel

Импульсная характеристика



3.15. Импульсная характеристика исследуемой системы

Передаточную функцию всей системы можно получить путем соединения звеньев в соответствии со следующей формулой

$$W(p) = \frac{W_1 W_3}{1 + W_1 W_2 W_3}.$$

Подставив передаточные функции и численные значения постоянных времени получим итоговую передаточную функцию системы

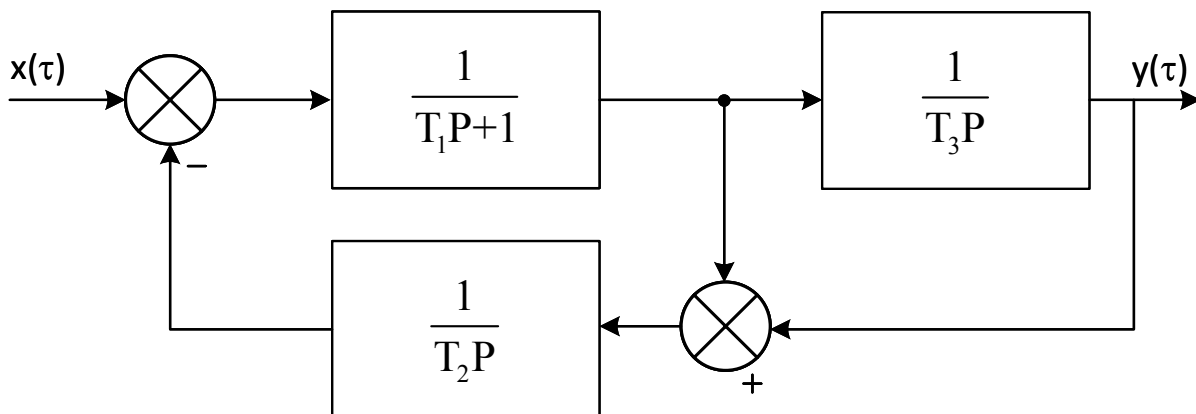
$$\begin{aligned}
 W(p) &= \frac{W_1 W_3}{1 + W_1 W_2 W_3} = \frac{\frac{1}{T_1 p + 1} \cdot \frac{1}{T_3 p + 1}}{1 + \frac{1}{T_1 p + 1} \cdot \frac{1}{T_2 p} \cdot \frac{1}{T_3 p + 1}} = \frac{\frac{1}{(T_1 p + 1)(T_3 p + 1)}}{\frac{(T_1 p + 1)(T_2 p)(T_3 p + 1) + 1}{(T_1 p + 1)(T_2 p)(T_3 p + 1)}} = \\
 &= \frac{1}{\frac{(T_1 p + 1)(T_2 p)(T_3 p + 1) + 1}{(T_2 p)}} = \frac{T_2 p}{(T_1 p + 1)(T_2 p)(T_3 p + 1) + 1} = \frac{10 p}{10 p(5 p + 1)(10 p + 1) + 1}
 \end{aligned}$$

Полученную итоговую передаточную функцию, можно представить в виде дифференциального уравнения и получить аналитическое решение. Также полученную итоговую характеристику можно использовать в дальнейших исследованиях системы, с том числе и в математических пакетах программ.

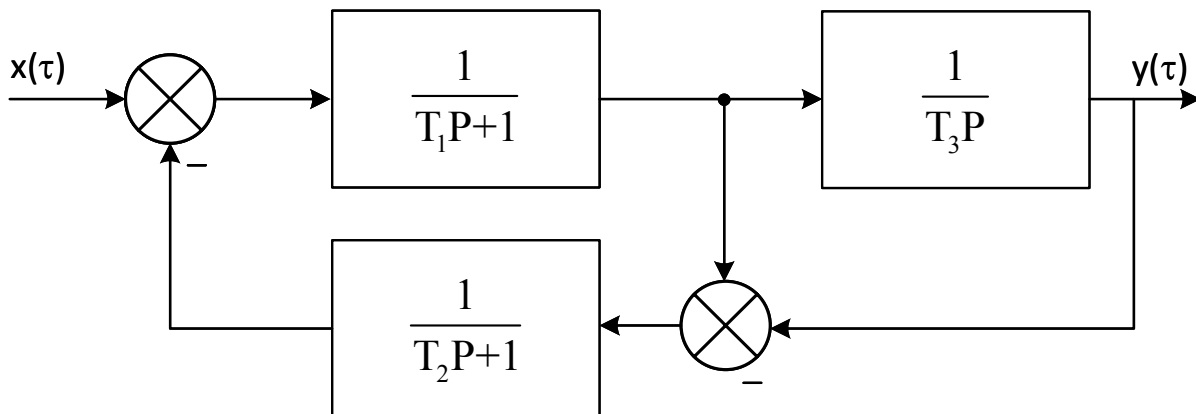
3.4. Задания для самостоятельной подготовки

Получить передаточную функцию для заданной схемы соединения звеньев. Для полученной передаточной функции получить дифференциальное уравнение. Получить выражение для импульсной характеристики полученной передаточной функции. Сравнить полученное точное решение с численным решением, полученное последовательным численным моделированием заданного соединения звеньев в MS Excel при $T_1=5$ с, $T_2=10$ с, $T_3=10$ с и в SciLab/XCos.

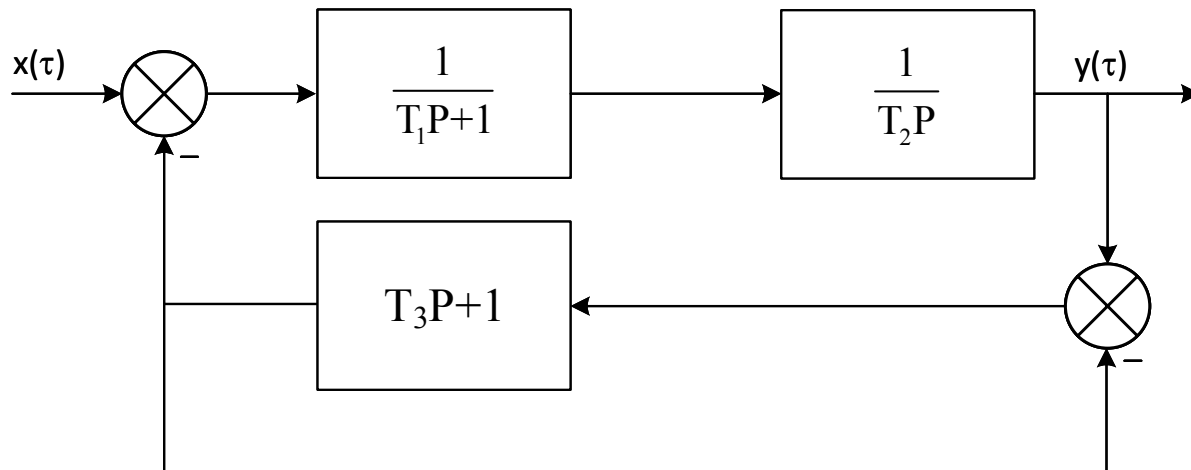
Вариант 1.



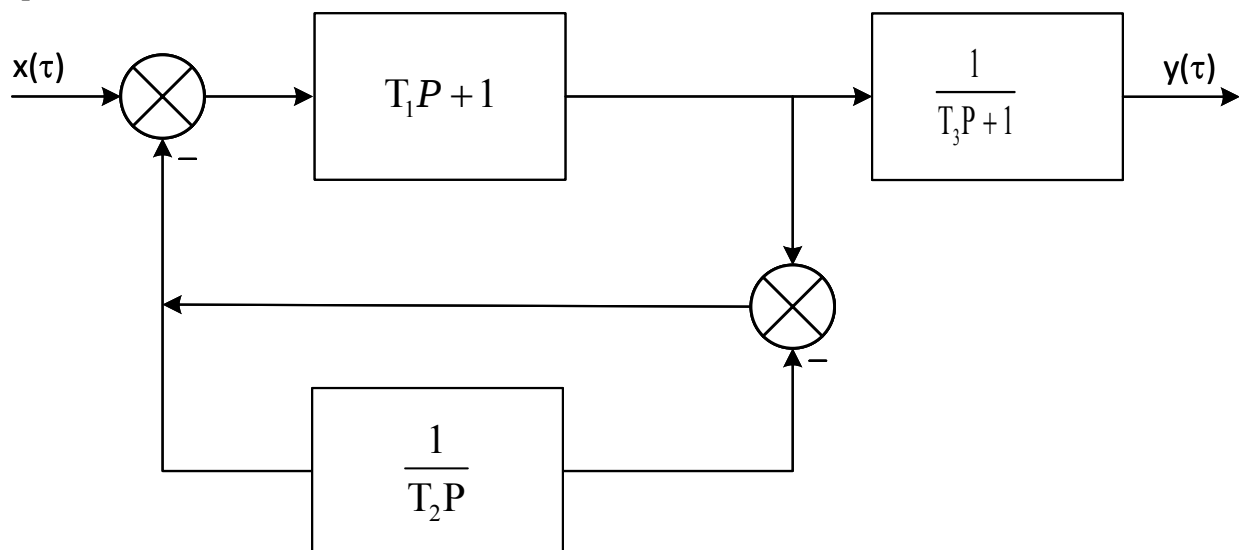
Вариант 2.



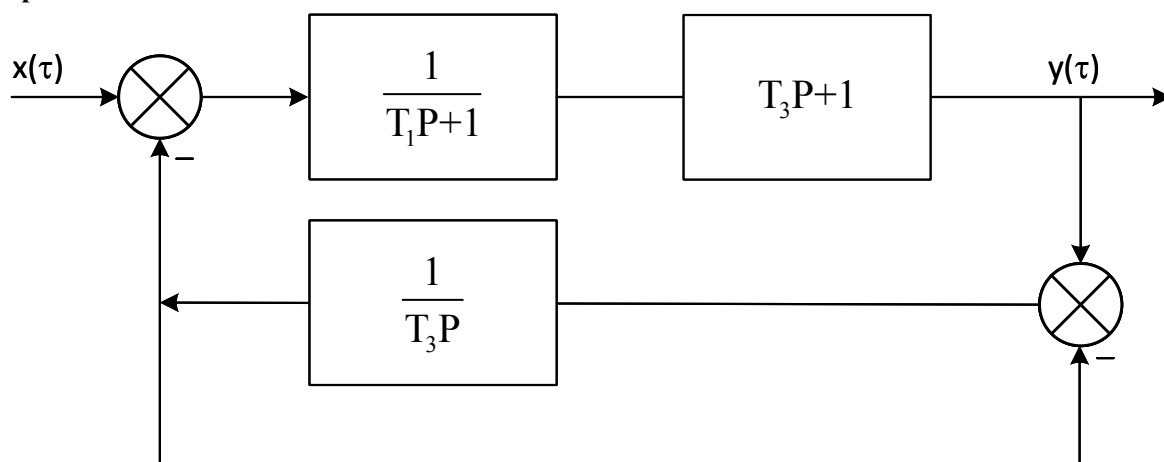
Вариант 3.



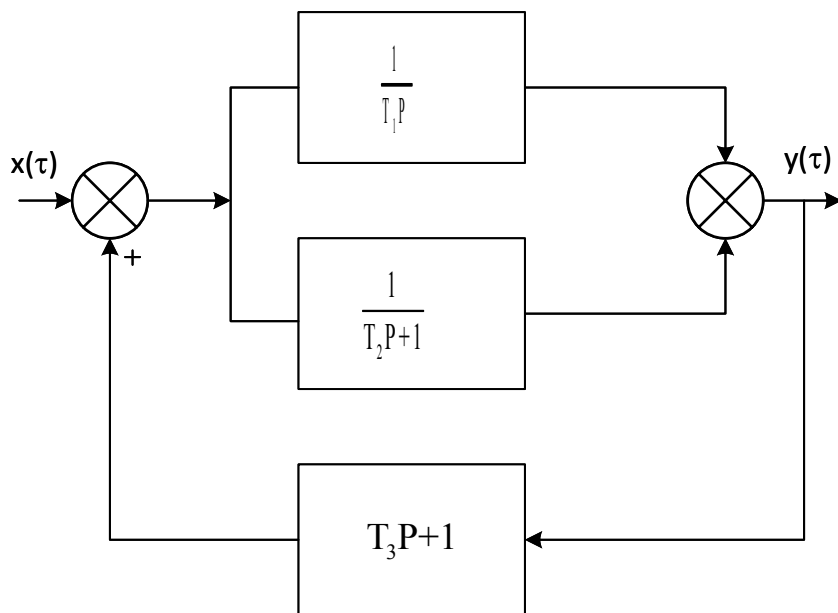
Вариант 4.



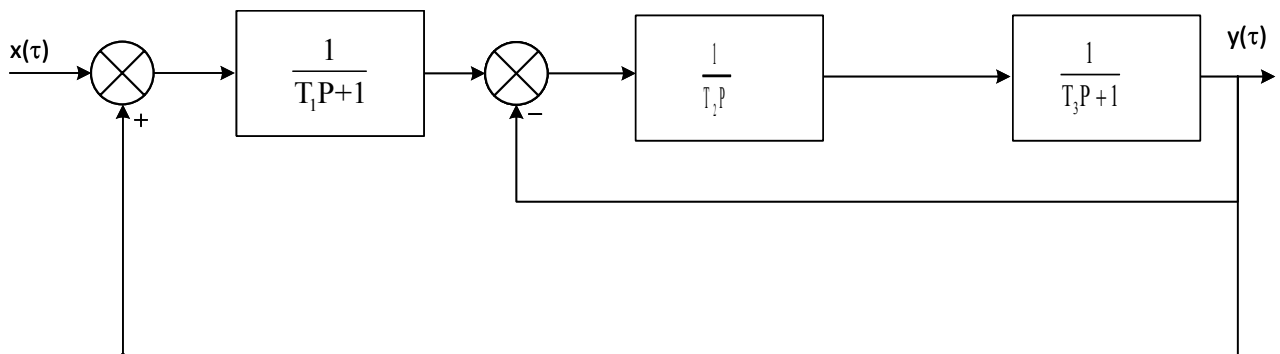
Вариант 5.



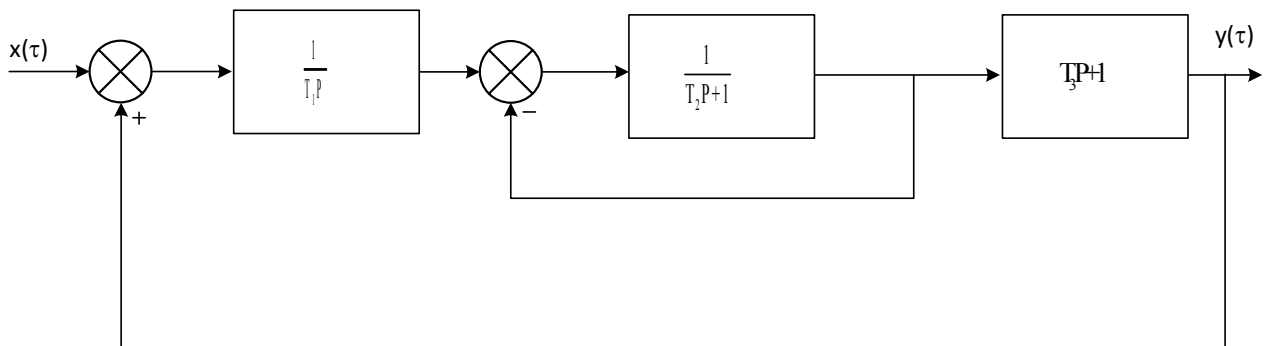
Вариант 6.



Вариант 7.



Вариант 8.



4. ПРОГРАММНЫЕ СРЕДСТВА МОДЕЛИРОВАНИЯ. РЕАЛИЗАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ В SCILAB/XCOS

4.1. Назначение программного пакета SciLab/XCos

Пакет SciLab/XCos является составной частью пакета SciLab (Scientific Laboratory) и обеспечивает возможность визуального моделирования непрерывных и дискретных динамических систем. Разработан в Национальном исследовательском институте информатики и автоматизации INRIA и Национальной школе дорожного ведомства ENPC. С 2003 года поддержкой Scilab занимается консорциум Scilab Consortium.

Программа предоставляет человеку развитой графический интерфейс, используя который, исследователь создает модель из виртуальных элементов с некоторой степенью условности так же, как если бы он строил реальную систему из настоящих элементов. Это позволяет создавать, а затем исследовать и оптимизировать модели систем широкого диапазона сложности.

Обладая весьма богатыми возможностями по моделированию систем, программа SciLab/XCos является бесплатной и свободно распространяемой. Эти качества способствовали широкому распространению SciLab/XCos в образовательной среде.

Графический интерфейс SciLab/XCos. Интерфейс SciLab/XCos. Интерфейс программы это совокупность средств, позволяющих человеку общаться с ней:

- вводить и получать данные
- контролировать ход выполнения компьютером программы
- подавать управляющие воздействия и наблюдать реакцию на них программы и т.п.

Программа SciLab/XCos предоставляет исследователю графический интерфейс, позволяющий основную часть работы по созданию модели выполнить с помощью мыши, а параметры элементов ввести с клавиатуры.

Интерфейс SciLab/XCos состоит из главного окна (непосредственно командное окно SciLab), имеющего меню и ряд кнопок управления, воспринимающих щелчки копков мыши, и командного поля, через которое запускаются программы, задаются параметры, выполняются команды. Для запуска оболочки визуального моделирования Xcos необходимо выполнить команду из меню главного окна **«Инструменты»** -> **«Визуальное моделирование Xcos»**.

С точки зрения исследователя интерфейс программы SciLab/XCos представляет собой интерактивный виртуальный лабораторный стенд, обеспечивающий построение моделей из отдельных блоков, запуск процесса моделирования, управление им и контроль результатов.

На рис 4.1 показаны открытые окна SciLab/XCos. При визуальном моделировании используются окно «Палитры блоков» в котором содержатся виртуальные блоки для построения виртуальной модели и окна рабочее пространство диаграммы «XCos» в котором происходит непосредственно сборка модели.

В окне «Палитры блоков» представлены группы блоков, из которых строится диаграмма Xcos. Выделив нужную группу левым кликом мыши (ЛКМ), вы увидите графические изображения входящих в неё блоков. Правый клик мыши (ПКМ) на изображении блока вызывает контекстное меню, через которое можно добавить выбранный блок к диаграмме или вызвать справку по данному блоку. Добавить выбранный блок к диаграмме можно также просто перетаскив его мышью.

Также на рис.4.1 показаны блоки, вынесенные на диаграмму XCos: генератор, осциллограф и источник тактовых сигналов. При запуске процесса моделирования (щелчком по кнопке с треугольником или через меню «Моделирование»-«Запустить»), на появившемся графическом окне вывода сигнала с осциллографа изображается сигнал, вырабатываемый генератором, в данном случае - синусоида. Амплитуду, частоту и начальную фазу сигнала генератора исследователь может менять, и при новом запуске моделирования эти изменения будут приводить к соответствующему изменению графика на экране осциллографа.

Диаграммой в SciLab/XCos называется совокупность связанных, а также автономных блоков и надписей, помещенных на рабочее пространство и способных в известном смысле функционировать при запуске процесса моделирования. Диаграмма может быть сохранена в виде отдельного файла и, при необходимости, открыта вновь.

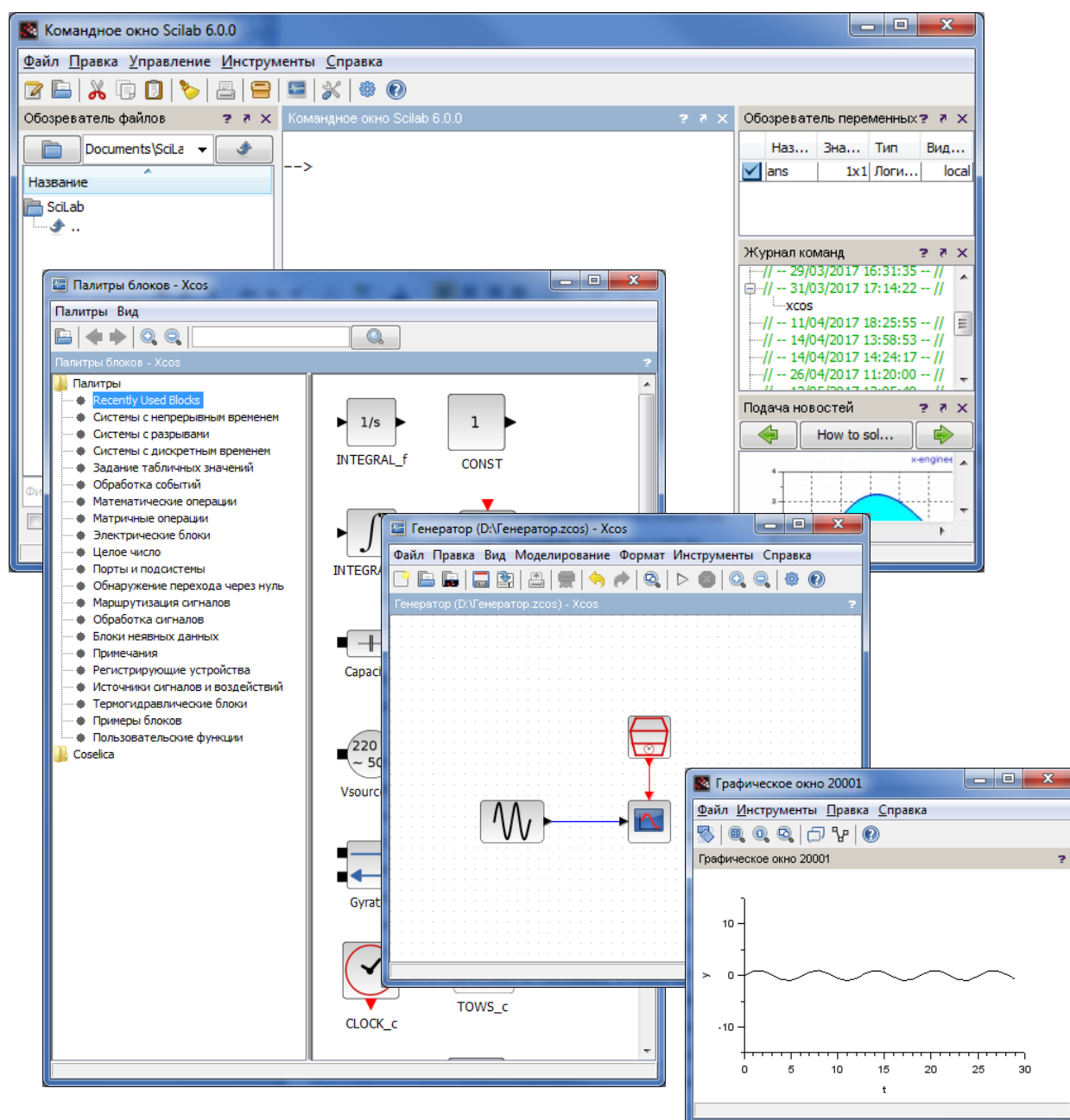


Рис.4.1. Окна пакета моделирования SciLab/XCos

4.2. Принципы построения моделей в среде SciLab/XCos

Исходными данными для построения модели в SciLab/XCos являются структурно-функциональная схема моделируемой системы, процесса или объекта и описывающие их дифференциально-алгебраические уравнения. Вместо таких уравнений могут быть заданы операторы или функции, характеризующие отдельные элементы моделируемой системы, например, передаточные функции для линейных элементов и статические характеристики для нелинейных элементов.

Реальные системы и объекты состоят из отдельных, связанных и взаимодействующих друг с другом элементов. И для всей системы в целом, и для отдельных ее, должным образом

выбранных элементов, можно указать место приложения воздействия, которое можно назвать входом, и место их реакции (отклика) на входное воздействие, называемое выходом.

Модели систем и объектов в пакете SciLab/XCos строятся из отдельных элементов – т.н. блоков. Блок это виртуальный аналог физического элемента реальной системы. «Виртуальный» в данном контексте значит воображаемый, физически не существующий, реализуемый программно, но с точки зрения человека, работающего с моделирующей программой, блок воспринимается зрением, он видим на диаграмме SciLab/XCos. Термин «аналог» предполагает, что блок функционирует, он подчиняется тем же самым уравнениям, что и реальный, моделируемый элемент системы.

Виртуальные блоки могут иметь или вход, на который может быть подан выходной сигнал другого блока, или выход, виртуальный сигнал с которого может быть подан на вход другого блока. Наконец, блоки могут иметь и вход, и выход одновременно. Взаимодействие между блоками отображается линиями связи, указывающими направление передачи воздействий (сигналов) от одного блока к другому.

Взаимодействие между блоками моделируется сигналами – функциями времени, передаваемыми между блоками по линиям связи. Сигналы в модели могут быть измерены с помощью виртуальных измерительных устройств или рассмотрены и изучены с помощью виртуального осциллографа.

Внешне виртуальные блоки с некоторой степенью условности воспринимаются исследователем так же, как реальные устройства. Например, генераторы вырабатывают сигналы, блоки-преобразователи реагируют на входные сигналы в определенном смысле точно так же, как реальные устройства на реальные воздействия, индикаторы показывают величины сигналов.

Т.о. принцип построения модели состоит в вынесении на рабочее пространство моделей реальных элементов (блоков) и соединении их в соответствии с заранее составленной структурно-алгоритмической схемой моделируемой системы. Такое построение модели из виртуальных блоков очень похоже, с известной степенью условности, на построение реальной системы из настоящих блоков (генераторов, осциллографов, и других устройств) в производственных условиях или на лабораторном стенде.

Основные блоки SciLab/XCos

Так SciLab/XCos является расширяемой средой, то число блоков и их разновидности определяются числом загруженных модулей. Принципиально все блоки можно условно разделить на три основные и одну дополнительную категории:

Генераторы - блоки, имеющие только выход (источники сигналов и воздействий)

Преобразователи - блоки, имеющие вход и выход

Индикаторы (регистрирующие устройства) - блоки, имеющие только вход (осциллограф, цифровой индикатор).

Важным компонентом модели является **соединительная линия** – виртуальный аналог физического соединения элементов, передающего воздействия от одного элемента к другому. Соединительные линии в SciLab/XCos однонаправленные, передают сигналы с выхода одного блока к входу другого. Поэтому при построении модели следует так разделять реальную систему на функциональные блоки, чтобы последующий блок практически не влиял на функционирование предыдущего. На рис. 4.2 в качестве примера реализации в SciLab/XCos приведена структурная схема замкнутого контура САР стабилизации параметра выходного сигнала инерционного объекта управления.

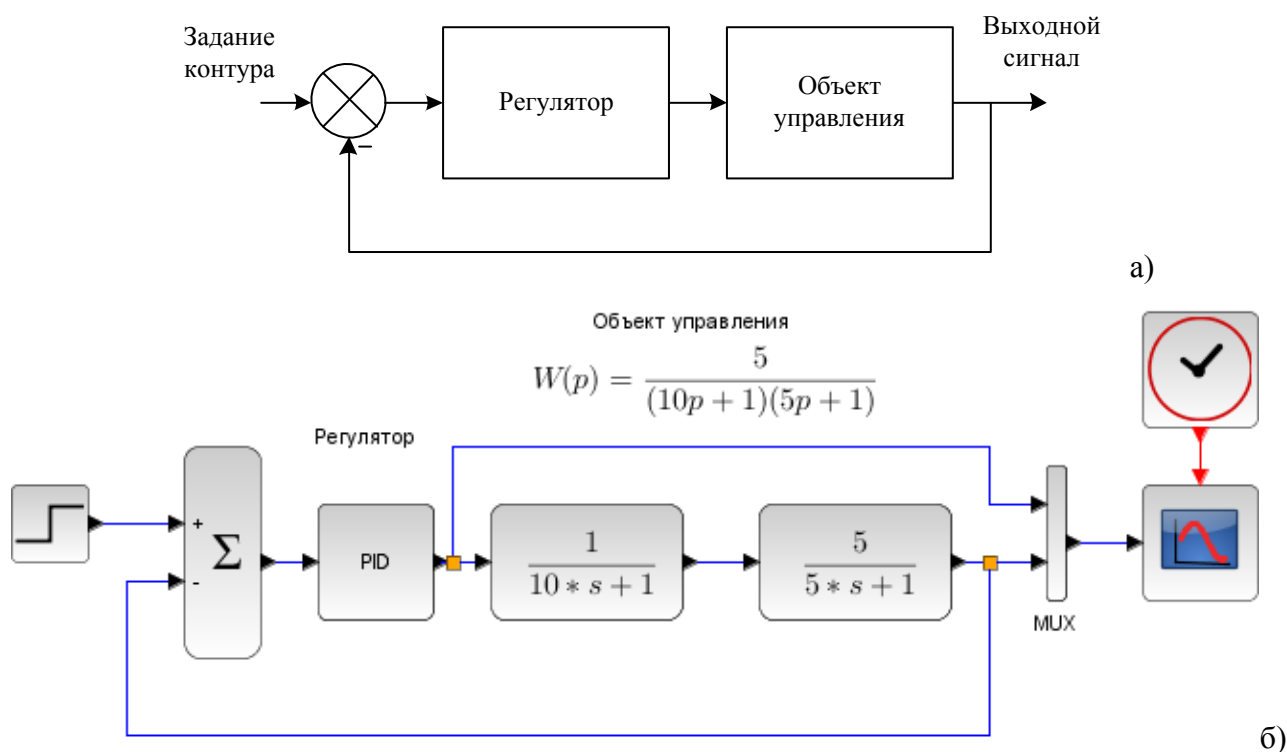


Рис.4.2. Исходная функциональная схема САР выходного параметра инерционного объекта (а) и её структурно-алгоритмическая модель в SciLab/XCos

Примечание: Входные и выходные сигналы могут быть как одиночными функциями времени, так и набором таких функций. В последнем случае сигнал называется векторным, как и соответствующий вход или выход блока. Например, для подачи и контроля двух сигналов на осциллографе сигналы с регулятора и объекта управления объединяются посредством блока MUX.

Любая диаграмма Xcos содержит два типа соединений: регулярные (чёрные) и управляющие (красные). По регулярным соединениям передаются сигналы данных, а по управляющим - сигналы активации. Блоки также могут иметь регулярные и управляющие входы и выходы. Как правило регулярные входы и выходы блоков располагаются слева и справа от изображения блока, а управляющие - сверху и снизу.

В качестве основного источника сигналов активации при построении динамических моделей используется счётчик времени SampleCLK. Его особенность заключается в том, что все такие счётчики внутри одной диаграммы синхронизированы. Если разные участки модели системы должны работать асинхронно, то для этих целей применяется блок CLOCK_c. Оба блока находятся в разделе палитры блоков «Источники сигналов и воздействий»

Также в этом разделе представлены различные элементы (**генераторы**), которые вырабатывают изменяющиеся во времени или постоянные сигналы. Примерами таких блоков в SciLab/XCos являются блоки:

- CONST_f – генератор постоянного сигнала, величина которого не меняется в процессе моделирования;
- RAMP - генератор линейно растущего сигнала
- STEP_FUNCTION - генератор ступенчатой функции заданной величины
- GENSIN_f - генератор синусоидального сигнала

Преобразователи способны воспринимать воздействия от других блоков, преобразовывать их в соответствии с определенными уравнениями или правилами и выдавать преобразованный сигнал (отклик, реакцию блока) на выход.

Важнейшие блоки для моделирования линейных систем:

CLR - передаточная функция. Этот блок позволяет создавать модели как простых, так и очень сложных элементов линейных систем и систем в целом;

INTEGRAL_f - блок интегратора, являющийся элементарным звеном и осуществляющий интегрирование входного сигнала по времени и являющийся фундаментальным элементом модели линейной системы;

BIGSOM_f - сумматор двух и более сигналов, его выходной сигнал равен сумме входных.

GAIN_f – усилитель (пропорциональное звено).

Основные блоки для моделирования линейных систем расположены в разделе «Системы с непрерывным временем» и «Математические операции».

Индикаторы - это блоки, имеющие только вход. Индикаторы предназначены для отображения сигналов в форме, удобной и привычной для исследователя.

Важнейшими индикаторами являются блоки:

- осциллограф – CSCOPE
- цифровой индикатор – AFFICH_m.

Осциллограф предназначен для графического представления в течение некоторого временного интервала зависимости мгновенной величины исследуемого сигнала от времени.

Цифровой индикатор **AFFICH_m** – выводит, показывает в цифровом виде значение сигнала на выходе того блока, к которому он подключен. Этот прибор используется для измерения постоянных величин.

Надписи и комментарии. Надписи – это блоки без входов и выходов. Эти блоки позволяют создавать на рабочем пространстве диаграммы XCos текстовые области, которые помогают понять смысл диаграммы и содержат сведения о том, кто, когда и какую диаграмму создал. Основной блок: **TEXT_f** – надпись располагается в разделе «Примечания». Кроме текстовых значений блок позволяет размещать на окне диаграммы и формулы. В этом случае формулы задаются в формате LaTeX.

4.3. Принципы управления моделью и получения результатов моделирования

Построенную модель следует запустить в работу, щелкнув по кнопке с треугольником "Запустить" или из меню окна диаграммы «Моделирование»- «Запустить».

В результате работы модели выходные сигналы блоков начнут изменяться, их величины просматривают на виртуальном осциллографе и других индикаторах. Параметры некоторых сигналов и блоков исследователь может изменять в процессе работы модели, другие параметры можно изменить, остановив процесс работы модели. Продолжительность работы модели можно задавать до ее запуска, можно и прерывать работу модели по желанию исследователя.

Для того чтобы задать время моделирования до запуска модели необходимо в диалоговом окне «Моделирование»-«Установка» установить в поле «Конечное время моделирования» значения времени в секундах.

В качестве примера рассмотрим получения переходной характеристики интегрирующего и инерционного звена.

Переходная характеристика САР позволяет характеризовать ее качество (быстродействие и точность) в переходном режиме работы. Кроме того, зная переходную функцию линейной системы можно определить реакцию системы на произвольное воздействие.

Важное для практики приложение переходной функции – идентификация объектов и систем: определение по экспериментально снятой переходной функции вида типового звена, которым можно промоделировать отдельные элементы и системы в целом, а также возможность определения параметров моделирующих звеньев.

Для получения переходной характеристики необходимо подавать на вход звена единичное ступенчатое воздействие, которое можно получить, используя блоки STEP_FUNCTION или CONST_f. В примере используем оба варианта получения ступенчатой функции.

Пример 9. Построить модель и получить переходную характеристику интегрирующего звена. Передаточная функция интегрирующего звена

$$W(p) = \frac{K_{II}}{p},$$

где K_{II} – коэффициент интегрирования, [1/с], p – оператор Лапласа.

Необходимо помнить, что в среде SciLab/XCos оператор Лапласа обозначается символом s . В обозначениях блока интегрирования указана передаточная функция $1/s$.

Интегрирующее звено можно представить, как последовательное соединение двух звеньев: звена усилителя GAIN_f и звена интегратора INTEGRAL_f.

Структура модели в SciLab/XCos с коэффициентом передачи $K_{II}=2,5$ 1/с показана на рис. 4.3. Рассмотрим настройку модели.

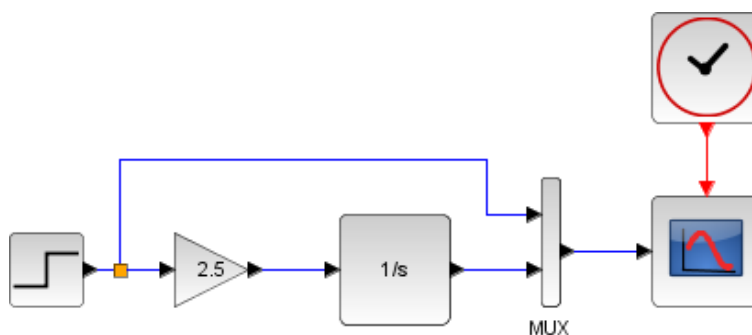


Рис.4.3. Модель интегрирующего звена

Для формирования единичного ступенчатого сигнала используется блок STEP_FUNCTION. Настройка блока позволяет задать величину ступенчатого сигнала и момент времени, в который будет сформирован сигнал. Для входа в диалоговое окно настроек блока необходимо выделить блок и выбрать последовательность команд «Правка»-«Параметры блока». Настройки блока STEP_FUNCTION показаны на рис.4.4,а.

Настройка блока GAIN_f заключается в установки коэффициента масштабирования. Настройка показана на рис.4.4,б. Настройка блока INTEGRAL_f для данной задачи не требуется.

Для получения вектора сигналов с входа и выхода моделируемой системы используется блок MUX.

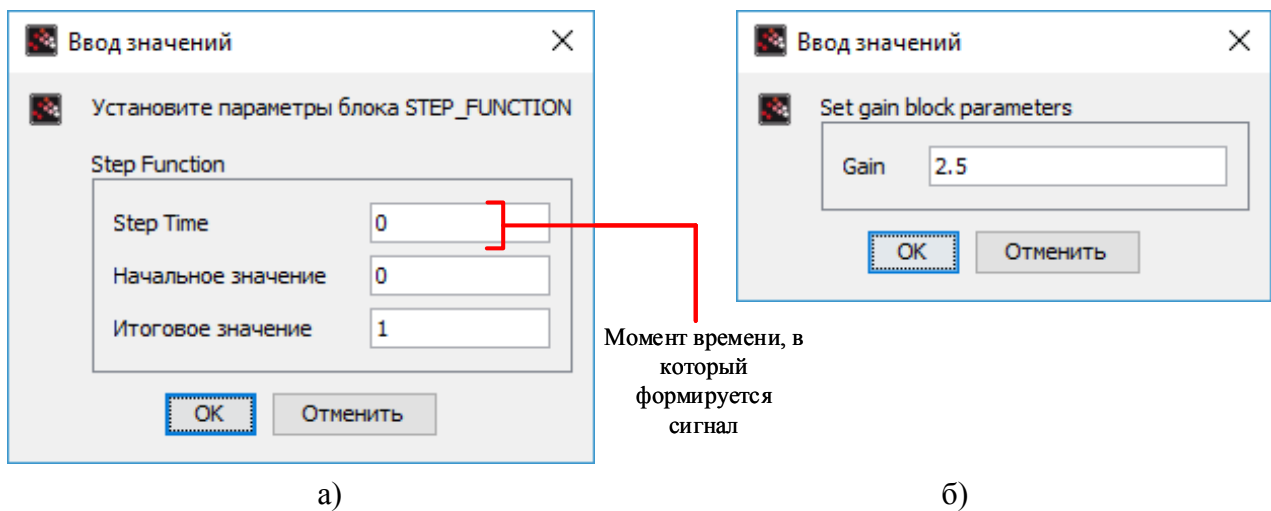


Рис.4.4. Вид диалоговых окон настройки параметров блоков STEP_FUNCTION (а) и GAIN_f (б)

Блок CLOCK_c отвечает за синхронизацию вывода графика на осциллографе. Настройки блока включают период формирования импульсов для отсчета сигнала во времени и смещения. Настройка блока CLOCK_c для формирования периода формирования импульсов и нулевого смещения относительно момента начала процесса моделирования показана на рис.4.5,б. Настройки блока CSCOPE определяют вид графика переходной характеристики. Основные типы настроек показаны на рис.4.5,а.

Конечное время моделирование устанавливается в диалоговом окне «Параметры моделирования» вызовом команд «Моделирование»-«Установка». Ограничимся временем моделирования равным 2 с. После запуска моделирования график переходной характеристики выводится в отдельном окне и имеет вид показанный на рис.4.6.

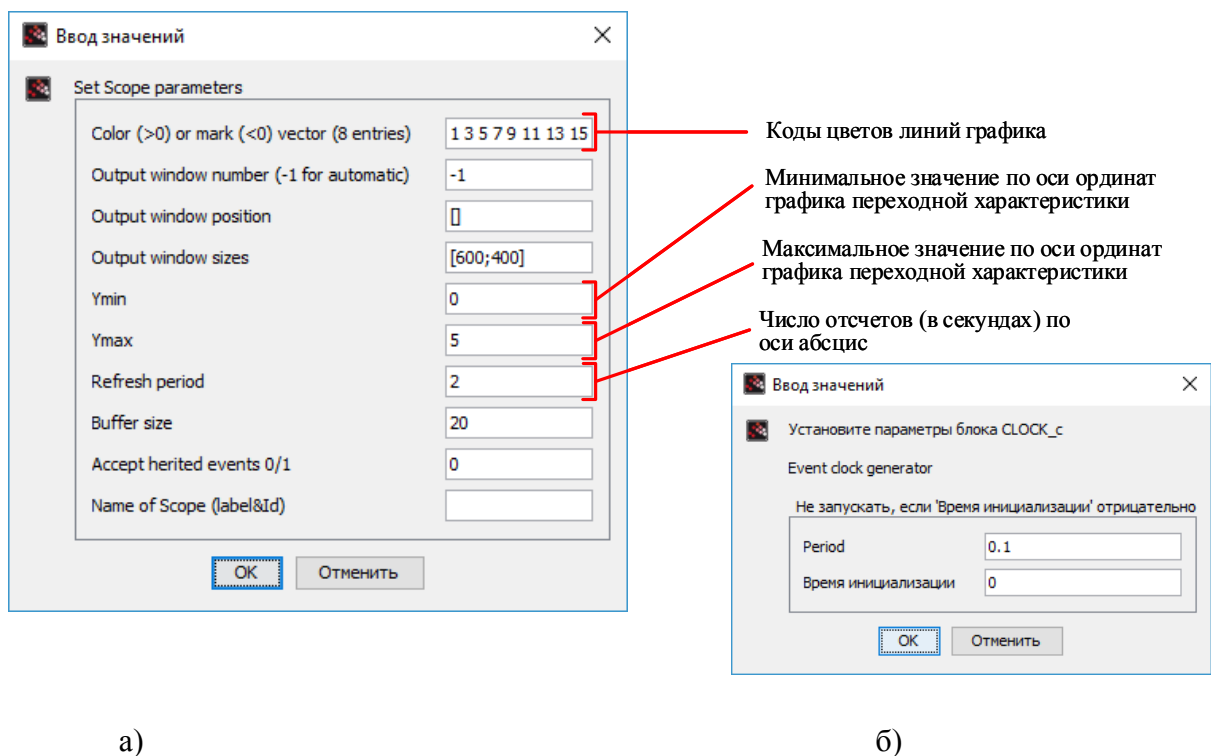


Рис.4.5. Настройка блоков осциллографа CSCOPE (а) и источника синхрои импульсов CLOCK_c (б)

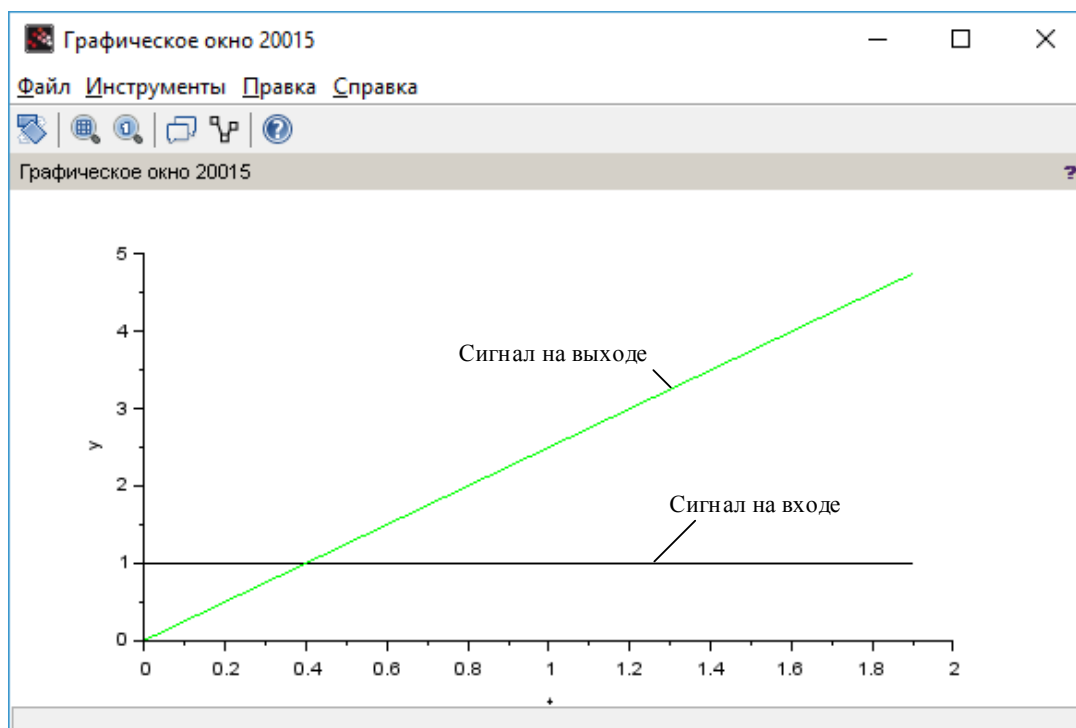


Рис.4.6. Окно с графиком переходной характеристики, полученной по модели SciLab/XCos

Пример 10. Построить модель и получить характеристику инерционного звена 2-ого порядка. Передаточная функция звена

$$W(p) = \frac{5}{5p^2 + 3p + 1}.$$

Для построения модели используем блок CLR из раздела «Системы с непрерывным временем» палитры блоков.

Формирование входного сигнала и реализация осциллографа рассмотрено в предыдущем примере. Настройка блока CLR показана на рис.4.7. Диаграмма модели для получения переходной характеристики инерционного звена 2-ого порядка по заданной передаточной функции изображена

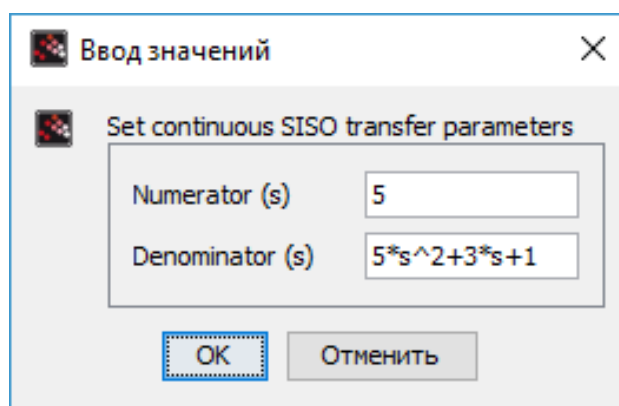


Рис.4.7. Настройка блока CLR для реализации заданной передаточной функции.

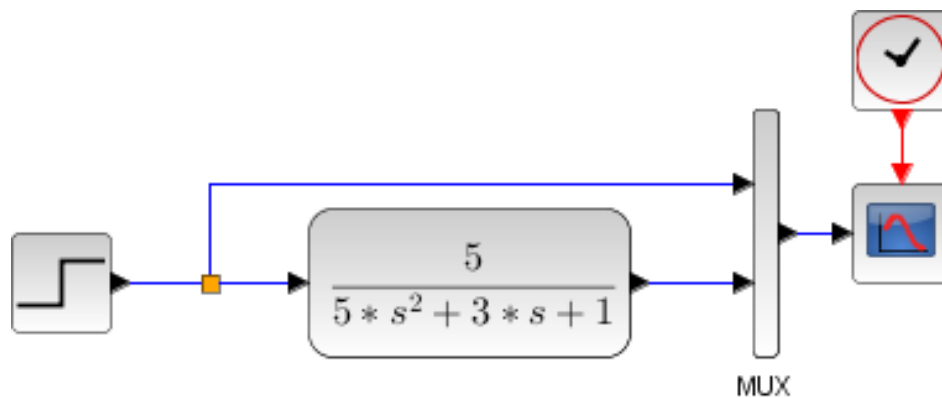


Рис.4.8. Диаграмма модели для получения переходной характеристики инерционного звена 2-ого порядка по заданной передаточной функции

В настройках блока CSCOPE указать диапазоны по оси ординат: $Y_{min}=0$, $Y_{max}=6$ и время по оси абсцисс Refresh period = 20.

В настройках параметров моделирования установить время моделирования 20 с. При единичном ступенчатом изменении входного сигнала в результате моделирования получим переходную характеристику, показанную на рис.4.9.

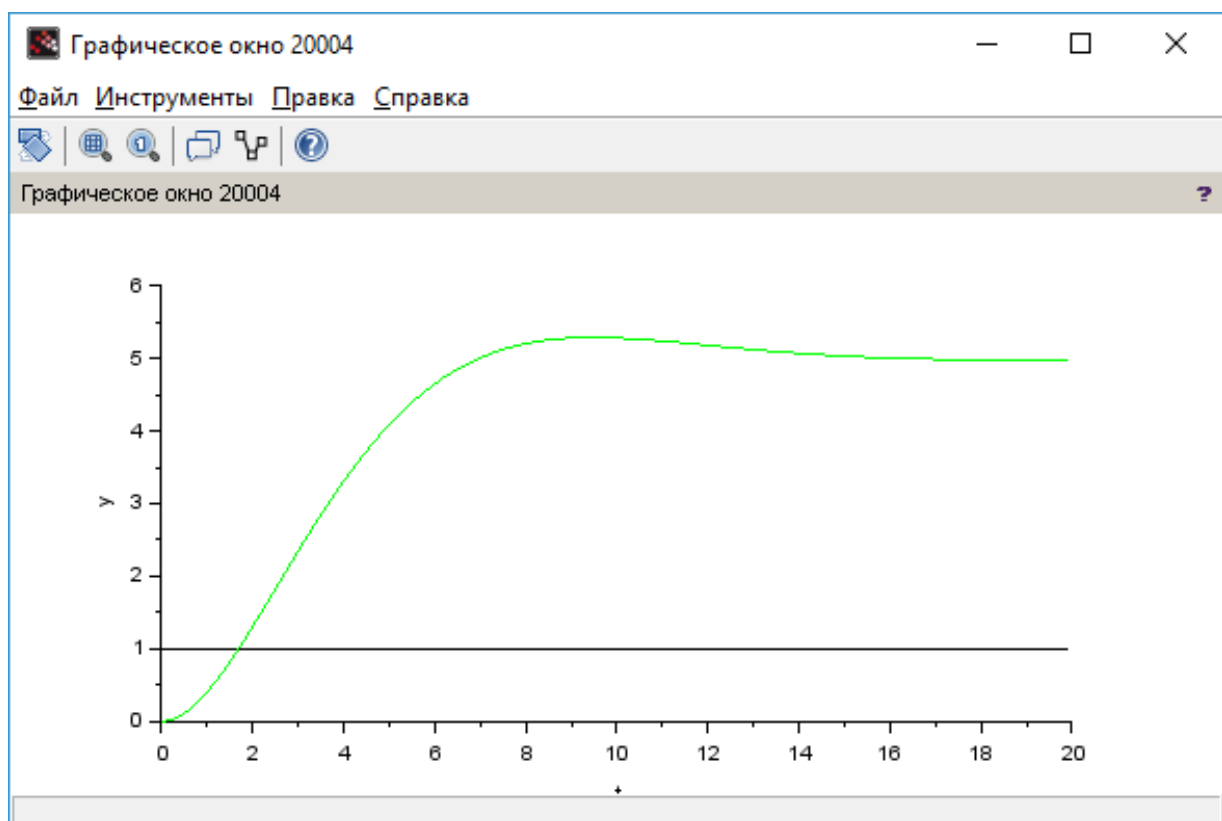


Рис.4.9. Переходная характеристика звена с передаточной функцией $W(p) = \frac{5}{5p^2 + 3p + 1}$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бахвалов Л.А. Моделирование систем -М.: Горная книга, 2006. - 295 с.
2. Голубева Н. В. Математическое моделирование систем и процессов -М.:Лань. 2013. -192 с.
3. Советов Б.Я., Яковлев С.А. Моделирование систем: учеб. для вузов. -М.: Высш. шк., 2001. -343 с.
4. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры -М.Физматлит, 2005. - 320 с.
5. Парсункин Б.Н., Андреев С.М., Бушманова М.В., Булычева С.В., Мельникова Г.Г. Статистическое исследование и моделирование экономических и технологических процессов металлургического производства: учеб. пособие. - Магнитогорск: Изд-во Магнитогорск. гос. тех. ун-та им. Г.И. Носова. 2007. -315 с.
6. Парсункин Б.Н., Андреев С.М., Рябчикова Е.С. Использование экспериментально-статистических методов моделирования для управления технологическими процессами: учеб.пособие. -Магнитогорск: Изд-во Магнитогорск. гос. техн. ун-та им. Г.И. Носова. 2012. - 177 с.
7. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. -Ижевск: Ижевская республиканская типография. 2000. -368.
8. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. - М.:Физматлит, 2005. -254 с.
9. Петров А.В. Моделирование систем: учеб. пособие. – Иркутск: Изд-во Иркутского госуд. техн. ун-та, 2000. -268 с.
10. Алексеев Е.Р., Чеснокова О.В. Введение в Octave для инженеров и математиков: - М.: ALT Linux, 2012. -368 с.
11. Андреев С.М., Парсункин Б.Н. Разработка и моделирование несложных систем автоматизации с учетом специфики технологических процессов: учеб. пособие. -М.: Издательский центр "Академия", 2016. -272 с.
12. Елисarov И.А. Моделирование систем: учеб. пособие. – Тамбов: изд-во ФГБОУ ВПО «ТГТУ», 2011. 96 с.
13. Рубанов В.Г., Филатов А.Г. Моделирование систем управления: учеб. пособие. - Белгород: Изд-во БГТУ им В.Г. Шурова, 2006. -349 с.
14. Савенкова Н.П., Проворова О.Г., Мокин А.Ю. Численные методы в математическом моделировании: учеб. пособие –М.: АРГАМАК-МЕДМА: ИНФРА-М, 2014. -176 с.
15. Чикуров Н.Г. Моделирование систем и процессов: учеб. пособие. –М.: РИОР: ИНФРА-М, 2013. -398 с.
16. Андриевский А.Б., Андриевский Б.Р., Капитонов А.А., Фрадков А.Л. Решение инженерных задач в среде Scilab. Учебное пособие.— СПб.: НИУ ИТМО, 2013. -97 с.
17. Алексеев Е. Р., Чеснокова О. В., Рудченко Е. А. Scilab: Решение инженерных и математических задач — М. : ALT Linux ; БИНОМ. Лаборатория знаний. 2008. -269 с.
18. Парсункин Б.Н., Дубинин В.М., Рябчиков М.Ю., Андреев С.М. Расчеты и моделирование переходных процессов в системах позиционного регулирования: учеб. пособие. Магнитогорск: Изд-во Магнитогорск. гос. тех. ун-та им. Г.И. Носова. 2006. -173 с.
19. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Том 1: преобразования Фурье, Лапласа, Меллина. Серия "Справочная математическая библиотека". -М.: Наука, 1969. -344 с.

Учебное текстовое электронное издание

Андреев Сергей Михайлович

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБЪЕКТОВ
И СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ**

Учебное пособие

1,85 Мб

1 электрон. опт. диск

г. Магнитогорск, 2017 год
ФГБОУ ВО «МГТУ им. Г.И. Носова»
Адрес: 455000, Россия, Челябинская область, г. Магнитогорск,
пр. Ленина 38

ФГБОУ ВО «Магнитогорский государственный
технический университет им. Г.И. Носова»
Кафедра автоматизированных систем управления
Центр электронных образовательных ресурсов и
дистанционных образовательных технологий
e-mail: ceor_dot@mail.ru