Министерство образования и науки Российской Федерации
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И.Носова

Т.А. Иванова

ФИНАНСОВАЯ МАТЕМАТИКА

Утверждено Редакционно-издательским советом университета в качестве учебного пособия

Магнитогорск
2010

УДК 658.15.011.2

Рецензенты:

Заведующий кафедрой экономики и управления филиала Уральской академии государственной службы в г.Магнитогорске, доцент, кандидат философских наук
Д.А. Яковлев

Старший преподаватель кафедры финансов и бухгалтерского учета ГОУ ВПО «МГТУ»
И.Г. Рыжова

Иванова Т.А.
Финансовая математика: учеб. пособие. – Магнитогорск: ГОУ ВПО «МГТУ», 2010. – 77 с.

В учебном пособии рассмотрены методы начисления простых, сложных и непрерывных процентов, методы наращения и дисконтирования по учетным ставкам, приводятся формулы расчета различных параметров регулярных потоков платежей (финансовых рент), приводятся расчетные примеры, задачи для самостоятельного решения.

Пособие предназначено для студентов специальности 080116 – «Математические методы в экономике», изучающих дисциплину «Финансовая математика».

УДК 658.15.011.2

ВВЕДЕНИЕ

Любые финансово-кредитная операция, инвестиционный проект или коммерческое соглашение предполагают наличие ряда условий их выполнения, к ним относят: денежные суммы (постоянные, переменные), временные параметры (срок операции, наличие рассрочки, количество платежей), процентные ставки и другие величины. В рамках одной финансовой операции эти параметры образуют систему.

Изменение даже одного из параметров системы сказывается на результатах соответствующих операций. Совместное влияние на финансовую операцию многих факторов делает конечный ее результат неочевидным. Для его оценивания необходим специальный количественный анализ. Совокупность методов расчета и составляет предмет курса, который можно назвать «Финансовые и коммерческие расчеты», «Финансовая математика», «Высшие финансовые вычисления». В курсе рассматриваются финансовые вычисления, необходимые для анализа сделок, включающих три основных элемента - размер платежа, срок и ставку процентов.

Количественный финансовый анализ имеет целью решение широкого круга задач – от элементарного начисления процентов до анализа сложных инвестиционных, кредитных и коммерческих операций. К этому кругу задач можно отнести:

- измерение конечных финансовых результатов операции (сделки, контракта) для каждой из участвующих сторон;
- разработку оптимальных планов выполнения финансовых операций;
- выявление зависимости конечных результатов операций от основных её параметров;
- определение допустимых критических значений этих параметров и расчет параметров эквивалентного (безубыточного) изменения условий сделки и др.

1. НАРАЩЕНИЕ И ДИСКОНТИРОВАНИЕ ПО ПРОСТЫМ ПРОЦЕНТНЫМ СТАВКАМ

Время как фактор в финансовых и коммерческих расчетах

В практических финансовых и коммерческих операциях суммы денег обязательно связываются с некоторыми конкретными моментами или интервалами времени. Для этого в контрактах фиксируются соответствующие сроки, даты, периодичность поступлений денежных средств или их выплат.

Фактор времени играет не меньшую роль, чем размеры денежных сумм. Необходимость учета фактора времени определяется принципом неравноценности денег, относящихся к разным моментам времени. Дело в том, что даже в условиях отсутствия инфляции и риска 1 млн руб., полученных через год, не равноценен этой же сумме, поступившей сегодня. Неравноценность определяется тем, что теоретически любая сумма денег может быть инвестирована и принести доход. Поступившие доходы, в свою очередь, могут быть реинвестированы и т.д. Следовательно, сегодняшние деньги в этом смысле ценнее будущих, а будущие поступления менее ценны, чем современные.

Очевидным следствием принципа «неравноценности» является неправомерность суммирования денежных величин, относящихся к разным моментам времени. Подобного рода суммирование допустимо лишь там, где фактор времени не имеет значения – например, в бухучете для получения итогов по периодам и в финансовом контроле.

В финансовых вычислениях фактор времени обязательно учитывается в качестве одного из важнейших элементов. Его учет осуществляется с помощью начисления процентов.

Основные понятия

Размер платежа – выплачиваемая денежная сумма.

Срок операции – время от момента начала до окончания операции. Необходимость учета фактора времени вытекает из принципа неравноценности денег, относящихся к разным моментам времени, связано это с возможностью инвестировать денежные суммы, с целью получения доходов в будущем, влиянием инфляционных процессов.

Под **процентными деньгами** или, кратко, процентами в финансовых расчетах понимают абсолютную величину дохода от предоставления денег в долг в любой форме: в виде выдачи денежной ссуды, продажи в кредит, помещения денег на сберегательный счет, учет векселя, покупка сберегательного сертификата или облигаций и т.д.

Ставка процента – это относительная величина дохода (процентных денег) к сумме дохода. Именно с помощью начисления процентов каждый из методов финансового анализа учитывает временной фактор. Процентная ставка показывает степень интенсивности изменения стоимости денег во времени.

Период начисления процентов – это временной интервал, к которому приурочена процентная ставка, чаще всего это год.

Процесс увеличения суммы денег во времени с присоединением процентов называется **наращением**.

Процесс определения процентов при движении во времени в обратном направлении, связанный с уменьшением суммы денег, относящейся к будущему, на величину соответствующего дисконта (скидки), называется **дисконтированием**.

С помощью наращения определяется будущая стоимость «сегодняшних» денег. Дисконтирование денежных сумм применяют для обеспечения сопоставимости величины распределенных по времени платежей.

Под **наращенной суммой** ссуды (долга, депозита, других видов инвестированных средств) понимается первоначальная ее сумма вместе с начисленными на нее процентами к концу срока.

Виды процентных ставок и способы начисления процентов

Если процентная ставка применяется к одной и той же первоначальной сумме, то это **простая ставка**.

Если процентная ставка применяется к изменяющейся, увеличенной на проценты, начисленные за предыдущий период, сумме, то это сложная процентная ставка.

Если процентные деньги рассчитываются от настоящего к будущему, то применяют **ставки наращения**, в противном случае (от будущего к настоящему) – **учетные (дисконтные) ставки.**

Различают процентные ставки **фиксированные** (их размер указан в контракте) и **плавающие** – равные сумме базовой ставки, изменяющейся во времени, и надбавки к ней постоянной или переменной, называемой «маржой». Плавающие ставки часто применяются во внешнеэкономических операциях. Примером базовой ставки может служить лондонская межбанковская ставка ЛИБОР

(LIBOR – London interbank offered rate) или московская межбанковская ставка МИБОР. Размер маржи определяется целым рядом условий (сроком операции и т.д.). Судя по мировой практике, он обычно находится в пределах 0,5-5%. В контракте может использоваться и переменный во времени размер маржи.

Проценты могут начисляться непрерывно или дискретно за определенные промежутки времени. **Дискретные проценты** используют чаще на практике, **непрерывные** - в аналитических расчетах.

Теперь мы рассмотрим методы анализа сделок, в которых предусматриваются разовые платежи при выдаче и погашении кредита или депозита. Задачи такого анализа сводятся к расчету наращенной суммы, суммы процентов и размера дисконта, современной величины (текущей стоимости) платежа, который будет произведен в будущем.

1.1. Формулы наращения

Введем обозначения:

P – первоначальная сумма денег;
i – годовая ставка (в виде десятичной дроби);
n – срок операции, в годах;
I – сумма процентных денег за весь срок;
S – наращенная сумма за весь срок.

В случае начисления простых процентов, процесс изменения суммы долга с начисленными простыми процентами описывается арифметической прогрессией. Первый член этой прогрессии равен P, разность Pi, а последний член, определяемый как S=P(1+ni).

Абсолютная величина изменения денежной суммы во времени называется **процентом** и измеряется в денежных единицах (например рублях). В случае начисления простых процентов, сумма процентов определяется по формуле

$$I = P \cdot i \cdot n,$$

а наращенная сумма равна

$$S = P + I = P + P \cdot i \cdot n\,;$$

$$S = P(1 + i \cdot n)\,. \qquad (1.1)$$

Формула (1.1) называется формулой **наращения по простым процентам** или, кратко, формулой **простых процентов.** Множитель (1+ni) является **множителем наращения**. Он показывает во сколько раз наращенная сумма больше первоначальной суммы.

Пример. Определим проценты и сумму накопленного долга, если ссуда равна 100000 руб., срок долга 1,5 года при ставке простых процентов, равной 15% годовых.

I=100000 •1,5 •0,15=22500 руб. – проценты за 1,5 года.

S=100000+22500=122500 руб. – наращенная сумма.

Процентная ставка *i* – относительная величина, измеряемая в десятичных дробях или %, она определяется делением процентов на первоначальную сумму

$$i = \frac{I}{P} = \frac{S - P}{P}\,. \tag{1.2}$$

На рис. 1.1 представлен график роста по простым процентам.

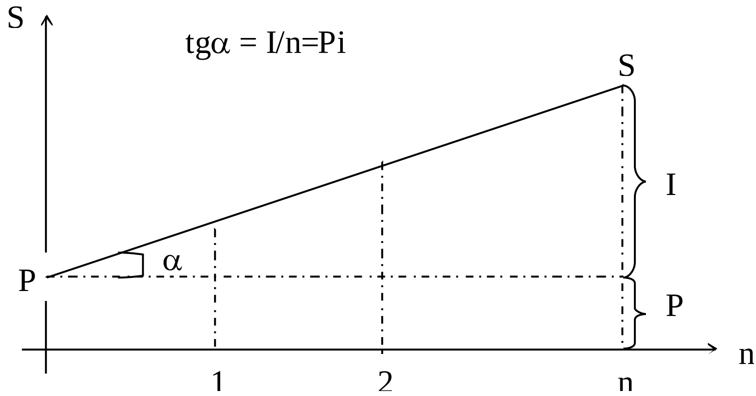


Рис. 1.1. График роста при начислении простых процентов

Практика начисления простых процентов

При анализе краткосрочных операций (n<1 года) срок n выражают в виде дроби

$$n = \frac{t}{K}\,,$$

где t – срок контракта в днях;
K – временная база, число дней в году.

Здесь возможно несколько вариантов расчета процентов, различающихся выбором временной базы К и способом измерения срока пользования ссудой.

Часто за базу измерения времени берут год, условно состоящий из 360 дней (12 месяцев по 30 дней в каждом).

Если К= 365 (366), то получают точный процент, если $K=12\cdot30=360$, получают обыкновенный процент.

Определение числа дней пользования ссудой также может быть точным либо приближенным. В первом случае вычисляют фактическое число дней между двумя датами, во втором - продолжительность ссуды определяется числом месяцев и дней ссуды, приближенно считая все месяцы равными, содержащими по 30 дней. В обоих случаях счет дней 12, начинается со следующего дня после открытия операции.

$t_{точн.}$ рассчитывают с помощью таблицы с указанием порядковых номеров дней года по формуле

$$t_{точн} = \quad номер\ последнего\ дня\ операции - номер\ первого\ дня\ операции\ .$$

$t_{прибл}$ определяют по формуле

$$t_{прибл} = число\ целых\ месяцев \cdot 30 +$$

$$+\ последние\ \ дни\ \ первого\ месяца\ \ операции +$$

$$+\ первые\ \ дни\ \ последнего\ месяца\ \ операции.$$

Комбинируя различные варианты временной базы и методов подсчета дней ссуды, получаем три варианта расчета процентов, применяемые в практике (цифры в скобках обозначают соответственно величину t и K):

1) (365/365) – точные проценты с точным числом дней. Британский метод. Используют в России, США, Великобритании;

2) (365/360) – обыкновенные проценты с точной длительностью операции – французский метод;

3) (360/360) – обыкновенные проценты с приближенной длительностью операции – германский метод.

Задачи

1.Ссуда в размере 1 млн руб. выдана 20.01. до 05.10. того же года под простую процентную ставку 18% годовых. Какую суму должен заплатить должник в конце срока при начислении простых процентов британским, французским и германским методами.

2.Рассчитать простую годовую процентную ставку, если за 3 квартала 80 тыс. руб. увеличились до 100 тыс. руб. и применяется германская методика.

3.Определите, за какой срок удвоится сумма долга, если используется простая процентная ставка 10% годовых.

4.Банк за использование в течение двух месяцев 800 тыс. руб. должен выплатить 60 тыс. руб. Определите стоимость привлеченных средств в виде простой годовой процентной ставки в условиях начисления обыкновенных процентов (45%).

1.2. Переменные простые ставки

При начислении процентов в периоды времени $n_1, n_2, ..., n_к$ при изменяющихся простых процентных ставках $i_1, i_2, ..., i_к$ наращенная сумма к концу срока операции составит величину

$$S = P(1 + i_1 \cdot n_1 + i_2 \cdot n_2 + ... + i_k \cdot n_k) = P(1 + \sum_{t=1}^{k} i_t \cdot n_t), \qquad (1.3)$$

где $(1 + \sum_{t=1}^{k} i_t \cdot n_t)$ – множитель наращения.

Пример. Пусть в договоре, рассчитанном на год, принята ставка простых процентов на первый квартал в размере 10% годовых, а на каждый последующий на 1% меньше, чем в предыдущий. Определим множитель наращения за весь срок договора.

$1+\Sigma n_t i_t = 1+0,25•0,10+0,25•0,09+025•0,08+0,25•0,07 = 1,085.$

Задачи

1. Рассчитать множитель наращения за 2,5 года, если за 1-й год начисляются простые проценты по ставке 16% годовых, а в каждом следующем полугодии ставка повышается на 1%.
2. Определите за какой срок удвоится сумма долга, если первый год простая процентная ставка составляет 8% годовых, а за каждый следующий год она увеличивается на 2%.

1.3. Реинвестирование

Реинвестирование проводится на сроки $n_1, n_2, ..., n_к$ при изменяющихся простых процентных ставках $i_1, i_2, ..., i_к$, тогда наращенная сумма к концу срока операции составит величину

$$S = P(1+i_1 \cdot n_1)(1+i_2 \cdot n_2)...(1+i_k \cdot n_k) = P\prod_{t=1}^{k}(1+i_t \cdot n_t)\ . \quad (1.4)$$

При постоянных $n_t = n,\ i_t = i$ формула примет вид

$$S = P(1+i \cdot n)^k\ .$$

Задача

Банк принимает вклад на 3 месяца под простую процентную ставку 20% годовых, а на 6 месяцев под 20,25%. Сравните варианты и выберете наиболее выгодный вкладчику (1 вариант).

1.4. Дисконтирование и учет по простым ставкам

В практике часто приходится решать задачу, обратную наращению процентов, когда по заданной сумме S, соответствующей концу финансовой операции, требуется найти исходную сумму P. Расчет P по S называется **дисконтированием** суммы S. Величину P, найденную дисконтированием, называют **современной величиной** (**текущей стоимостью**) суммы S. Проценты в виде разности D=S-P называются дисконтом или скидкой. Процесс начисления и удержания процентов вперед (в виде дисконта) называют **учетом**. Дисконт как скидка с конечной суммы долга может определяться через процентную ставку или в виде абсолютной величины.

Таким образом, в практике используются два принципа расчета процентов: путем наращения суммы ссуды и устанавливая скидку с конечной суммы долга.

В большинстве случаев фактор времени учитывается в финансовых контрактах именно с помощью дисконтирования. Величина P эквивалентна сумме S в том смысле, что через определенный период времени и при заданной ставке процентов она в результате наращения станет равной S. Поэтому операцию дисконтирования называют также приведением. Но понятие «приведение» шире, чем дисконтирование.

Приведение – это определение любой стоимостной величины на некоторый момент времени. Если некоторая сумма приводится к более ранней дате чем текущая, то применяется дисконтирование, если же речь идет о более поздней дате, то – наращение.

Известны два вида дисконтирования: математическое дисконтирование и банковский (коммерческий) учет.

Математическое дисконтирование. Этот вид дисконтирования представляет собой решение задачи, обратной наращению первоначальной ссуды. Если в прямой задаче

$$S=P(1+ni),$$

то в обратной

$$P=\frac{S}{1+in}. \tag{1.5}$$

Дробь в правой части равенства при величине S называется **дисконтным множителем**. Этот множитель показывает, какую долю составляет первоначальная сумма ссуды в окончательной величине долга.

Дисконт суммы S равен

$$D=S-P. \tag{1.6}$$

Банковский или коммерческий учет. Операция учета (учета векселей) заключается в том, что банк до наступления срока платежа по векселю или другому платежному обязательству покупает его у владельца (являющегося кредитором) по цене ниже той суммы, которая должна быть выплачена по нему в конце срока, т.е. приобретает (учитывает) его с дисконтом.

Для расчета процентов при учете векселей применяется учетная ставка, которую мы обозначим символом d.

По определению простая годовая учетная ставка находится как

$$d=\frac{S-P}{Sn}. \tag{1.7}$$

Размер дисконта или учета, удерживаемого банком, равен

$$D=Snd,$$

откуда

$$P=S-D=S-Snd=S(1-nd). \tag{1.8}$$

Множитель (1-nd) называется **дисконтным множителем.** Срок n измеряет период времени от момента учета векселя до даты его погашения в годах. Дисконтирование по учетной ставке производится чаще всего при условии, что год равен 360 дням.

Наращение по учетной ставке. Учетная ставка может использоваться для наращения, т.е. для расчета S по P. В этом случае формула имеет вид

$$S=P\frac{1}{1-nd}. \tag{1.9}$$

Сравнение ставки наращения и учетной ставки. Операции наращения и дисконтирования по своей сути противоположны, но ставка наращения и учетная ставка могут использоваться для решения обеих задач. В этом случае, в зависимости от применяемой ставки, можно различать прямую и обратную задачи.

Прямая и обратная задачи

Ставка	Прямая задача	Обратная задача
Наращения i	Наращение $S=P(1+ni)$	Дисконтирование $P=S/(1+ni)$
Учетная d	Дисконтирование $P=S(1-nd)$	Наращение $S=P/(1-nd)$

Совмещение начисления процентов по ставке наращения и дисконтирования по учетной ставке. В том случае, когда учету подлежит долговое обязательство, предусматривающее начисление простых процентов на первоначальную сумму долга, необходимо решить две задачи:

– определить конечную сумму долга на момент его погашения;

– рассчитать сумму, получаемую при учете, путем дисконтирования конечной суммы долга, применяя учетную ставку, действующую в момент учета.

Решение двух этих задач можно записать в виде одной формулы, содержащей наращение по ставке простых процентов, фигурирующей в долговом обязательстве, и дисконтирование по учетной ставке

$$P_2=P_1(1+n_1i)(1-n_2d), \qquad (1.10)$$

где P_1 – первоначальная сумма ссуды;

P_2 – сумма, получаемая при учете обязательства;

n_1 – общий срок платежного обязательства, в течение которого начисляются проценты;

n_2 – срок от момента учета до погашения долга.

Пример. Платежное обязательство уплатить через 100 дней 2 млн руб. с процентами, начисляемыми по ставке простых процентов i=20% годовых, было учтено за 40 дней до срока погашения по учетной ставке d=15%. Требуется определить сумму, получаемую при учете.

Решение

$$P_2 = 2(1+\frac{100}{365}0{,}2)(1-\frac{40}{360}0{,}15) = 2{,}074 \text{ млн. руб.}$$

Отметим, что при наращении здесь использовалась временная база 365 дней, а при дисконтировании – 360.

Определение продолжительности ссуды. Иногда задача ставится таким образом, что требуется найти временной интервал, за который исходная сумма при заданной ставке процентов вырастет до нужной величины, или срок, обеспечивающий определенный дисконт с заданной величины.

При использовании простой ставки наращения i из получаем

$$n = \frac{S - P}{Pi}, \tag{1.11}$$

а при учетной ставке d из имеем

$$n = \frac{S - P}{Sd}. \tag{1.12}$$

Формулы дают срок, измеряемый в годах, но простые ставки, в основном, используются в краткосрочных операциях, когда срок исчисляется днями. В этом случае срок финансовой операции в днях выражается как

$$t = nK,$$

где K – временная база.

Определение уровня процентной ставки. Уровень процентной ставки может служить мерой доходности операции, критерием сопоставления альтернатив и выбора наиболее выгодных условий. Из формул (1.1) и (1.8) получаем ставку наращения i и учетную ставку d.

$$i = \frac{S - P}{Pn}, \tag{1.13}$$

$$d = \frac{S - P}{Sn}, \tag{1.14}$$

где использовалось соотношение.

Напомним, что срок n в двух формулах имеет разный смысл: в первом случае это весь срок операции, а во втором – оставшийся срок до погашения.

Пример. Определить доходность операции для кредитора, если им предоставлена ссуда в размере 2 млн руб. на 100 дней и контракт предусматривает сумму погашения долга 2,5 млн руб. Доходность выразить в виде простой ставки процентов i и учетной ставки d. Временную базу принять равной K=360 дней.

Решение

$$i=\frac{S-P}{Pt}K=\frac{2{,}5-2}{2\cdot100}360=0{,}9\text{ , т.е. }90\%.$$

$$d=\frac{S-P}{St}K=\frac{2{,}5-2}{2{,}5\cdot100}360=0{,}72,\quad\text{т.е. }72\%.$$

Иногда размер **дисконта в контрактах фиксируется за весь срок ссуды в виде доли** (или процента) от суммы погасительного платежа. Таким образом, уровень процентной ставки здесь задается в неявном виде. Но нетрудно вывести формулы, с помощью которых значения этих ставок можно вычислить.

Пусть S – размер погасительного платежа, d_n – доля этого платежа, определяющая величину дисконта за весь срок ссуды n. Требуется определить каким уровням годовых ставок i и d эквивалентны такие условия.

Итак, S – сумма возврата в конце срока ссуды, $P=S(1-d_n)$ – реально выдаваемая ссуда в момент заключения договора.

$$i=\frac{S-P}{Pn}=\frac{S-S(1-d_n)}{S(1-d_n)n}=\frac{d_n}{(1-d_n)n}, \qquad (1.15)$$

$$d=\frac{S-P}{Sn}=\frac{S-S(1-d_n)}{Sn}=\frac{d_n}{n}. \qquad (1.16)$$

Пример. Кредитор и заемщик договорились, что из суммы кредита, выданного на 200 дней, сразу удерживается дисконт в размере 25% указанной суммы. Требуется определить цену кредита в виде простой годовой учетной ставки d и годовой ставки простых процентов i. Считать временную базу K равной 365 дням.

Решение

$$d=\frac{d_n}{n}=\frac{0{,}25}{200/365}=0{,}45625,\text{ т.е. }45{,}625\%.$$

$$i=\frac{d_n}{(1-d_n)n}=\frac{0{,}25}{(1-0{,}25)200/365}=0{,}60833,\text{ т.е. }60{,}833\%.$$

Задачи

1.Через 150 дней наступает срок платежа в размере 500 тыс. руб. Какую сумму мы должны оставить, если ее можно положить в банк под простую процентную ставку 40% годовых? (429,412 тыс. руб.).

2.Вам 27 декабря будет нужна сумма 15 тыс. руб. Какую сумму 10 июня этого же года Вы должны положить в банк под простую процентную ставку 36% годовых, если в расчете применяется обыкновенный процент с точным числом дней? (12,529 тыс. руб.).

3.Переводной вексель (тратта) выдан на сумму 1450 руб. с уплатой 31.12. Владелец тратты учел её в банке 26.10 того же года по простой учетной ставке 40% годовых (метод учета французский). Сколько получит владелец тратты? (1343,667 руб.).

4.Приобрели 3-месячные ГКО на сумму 950 руб. номинальной стоимостью 1000 руб. Какова доходность этой операции, если её измерять i? d? (21,05%; 20%)?

5.Вексель на сумму 9 тыс. руб. учитывается по простой учетной ставке за 120 дней до погашения с дисконтом 600 руб. в пользу банка. Определите величину этой годовой учетной ставки при временной базе 360 дней в году (0,20).

6.За вексель, учтенный за 5 лет по простой учетной ставке 14% годовых, заплачено 4 тыс. руб. Определите номинальную величину векселя (13,33 тыс. руб.).

7. В банк предъявлен вексель на сумму 50 тыс. руб. за полтора года до срока его погашения. Банк согласен учесть вексель по переменной простой учетной ставке, установленной следующим образом: первые полгода – 30% годовых, следующие полгода – 36% годовых, затем каждый квартал ставка повышается на 2%. Определите дисконт банка и сумму, которую получит векселедержатель (26,25 тыс. руб.; 23,75 тыс. руб.).

8.Обязательство уплатить через 220 дней 450 тыс. руб. с процентами в 25% годовых было учтено через 10 дней по учетной ставке d=22% годовых. Рассчитать полученную при учете сумму и дисконт, полученный банком, если временная база при использовании ставки наращения 365, при учете – 360 (31,63 тыс. руб.).

9.Вексель на сумму 15 тыс. руб., выданный 3 апреля со сроком погашения 10 августа, был учтен 11 июля по учетной ставке 26% годовых способом 365/360. На номинальную стоимость векселя предусматривалось начисление простых процентов по процентной ставке 32% годовых способом 365/365. Найдите сумму, полученную векселедержателем (16,334 тыс. руб.).

10. Какой величины прибыль получит банк в результате учета 5 февраля по простой учетной ставке 30% годовых трех векселей, каждый из которых на сумму 15 тыс. руб., а сроки их погашения 5 мая, 7 июня и 1 августа того же високосного года (4887,5 руб.).

11. Банк учитывает вексель за 180 дней до срока по простой учетной ставке 34% годовых, используя временную базу в 360 дней. Определите доходность такой операции в виде простой годовой процентной ставки при временной базе, равной 365.

Вопросы для самопроверки

1. В чем сущность финансовой математики?
2. Прокомментируйте принцип «неравноценности денег».
3. Раскройте сущность процентов в финансовых расчетах.
4. Каковы единицы измерения процентов в финансовых расчетах?
5. В чем сущность процентной ставки?
6. Как измеряется процентная ставка?
7. Какие виды процентных ставок вы знаете?
8. Какая сумма больше и почему: 100 рублей сегодня или 100 рублей через неделю?
9. В чем особенности начисления процентов при использовании простых ставок?
10. Как определяются наращенная сумма и коэффициент наращения при использовании простых процентов?
11. Объясните разницу между точными и обыкновенными процентами.
12. В чем особенности различных практик начисления процентов.
13. Зависит ли результат финансовой операции от выбранного способа начисления простых процентов?
14. Определение наращенной суммы при дискретно изменяющейся во времени процентной ставке.
15. Чем отличается реинвестирование от наращения по переменной ставке?
16. Зависит ли результат финансовой операции от выбранного способа начисления простых процентов?
17. Что означает дисконтирование и для чего оно применяется?
18. Укажите сущность величин, входящих в формулы для определения приведенной величины по простой ставке процентов.
19. Что такое дисконт и как он определяется?
20. В чем сущность операции учета векселя?
21. Раскройте сущность величин, входящих в формулу для определения суммы, полученной предъявителем векселя при его учете в банке.

22. Вы располагаете данными о сумме, которую возможно получить через три года и хотите продать этот контракт немедленно. Какими расчетными формулами целесообразно воспользоваться и почему?

23. Проанализируйте формулу коэффициента дисконтирования. Определите, в каких численных пределах может теоретически изменяться этот коэффициент. Может ли он принимать значения 2, -1 и т.д.?

2. НАЧИСЛЕНИЕ СЛОЖНЫХ ПРОЦЕНТОВ

2.1. Сложные проценты

Сложные проценты применяются в долгосрочных финансово-кредитных операциях, если проценты не выплачиваются периодически, сразу после их начисления за прошедший интервал времени, а присоединяются к сумме долга. Присоединение начисленных процентов к сумме, которая служила базой для их определения, часто называют **капитализацией** процентов.

Формула наращения по сложным процентам

Пусть первоначальная сумма долга равна P, тогда через один год сумма долга с присоединенными процентами составит P(1+i), через 2 года P(1+i)(1+i)=P(1+i)2, через n лет - P(1+i)n. Таким образом, получаем формулу наращения для сложных процентов

$$S = P(1+i)^n , \qquad (2.1)$$

где S – наращенная сумма; i – годовая ставка сложных процентов; n – срок ссуды; (1+i)n – множитель наращения.

В практических расчетах в основном применяют дискретные проценты, т.е. проценты, начисляемые за одинаковые интервалы времени (год, полугодие, квартал и т.д.). Наращение по сложным процентам представляет собой рост по закону геометрической прогрессии, первый член которой равен P, а знаменатель (1+i).

Отметим, что при сроке n<1 наращение по простым процентам дает больший результат, чем по сложным, а при n>1 – наоборот. В этом нетрудно убедиться на конкретных числовых примерах. Наибольшее превышение суммы, наращенной по простым процентам, над суммой, наращенной по сложным процентам, (при одинаковых процентных ставках) достигается в средней части периода.

Формула наращения по сложным процентам, когда ставка меняется во времени

В том случае, когда ставка сложных процентов меняется во времени, формула наращения имеет следующий вид:

$$S = P(1+i_1)^{n_1}(1+i_2)^{n_2} \cdot \ldots \cdot (1+i_k)^{n_k}, \qquad (2.2)$$

где $i_1, i_2, \ldots, i_k$ – последовательные значения ставок процентов, действующих в периоды $n_1, n_2, \ldots, n_k$ соответственно.

Пример. В договоре зафиксирована переменная ставка сложных процентов, определяемая как 20% годовых плюс маржа 10% в первые два года, 8% в третий год, 5% в четвертый год. Определить величину множителя наращения за 4 года.

Решение

$$(1+0,3)^2(1+0,28)(1+0,25)=2,704$$

Формула удвоения суммы

В целях оценки своих перспектив кредитор или должник может задаться вопросом: через сколько лет сумма ссуды возрастет в N раз при данной процентной ставке. Обычно это требуется при прогнозировании своих инвестиционных возможностей в будущем. Ответ получим, приравняв множитель наращения величине N:

а) для простых процентов

$$(1+ni_{прост.}) = N, \text{ откуда } n = \frac{N-1}{i_{прост}};$$

б) для сложных процентов

$$(1+i_{сложн})^n = N, \text{ откуда } n = \frac{\ln N}{\ln(1+i_{сложн})}.$$

Особенно часто используется N=2. Тогда формулы называются формулами удвоения и принимают следующий вид:

а) для простых процентов

$$n = \frac{1}{i_{прост}};$$

б) для сложных процентов

$$n = \frac{\ln 2}{\ln(1 + i_{сложн})}.$$

Пример. Рассчитать, за сколько лет долг увеличится вдвое при простых и сложных процентах по ставке, равной 10%. Для сложной ставки процентов расчеты выполнить по точной и приближенной формулам. Результаты сравнить.

Решение:

а) При простых процентах

$$n = \frac{1}{i_{прост.}} = \frac{1}{0{,}1} = 10 \text{ лет.}$$

б) При сложных процентах и точной формуле

$$n = \frac{\ln 2}{\ln(1 + i_{сложн.})} = \frac{0{,}693147}{\ln(1 + 0{,}1)} = \frac{0{,}693147}{0{,}09531018} = 7{,}27 \text{ года.}$$

Выводы:

1) Одинаковое значение ставок простых и сложных процентов приводит к совершенно различным результатам.

2) При малых значениях ставки сложных процентов точная и приближенная формулы дают практически одинаковые результаты.

Начисление годовых процентов при дробном числе лет

При дробном числе лет проценты начисляются разными способами:

1) По формуле сложных процентов

$$S=P(1+i)^n. \tag{2.3}$$

2) На основе смешанного метода, согласно которому за целое число лет начисляются сложные проценты, а за дробное – простые

$$S=P(1+i)^a(1+bi), \tag{2.4}$$

где n=a+b, a–целое число лет; b–дробная часть года.

3) В ряде коммерческих банков применяется правило, в соответствии с которым за отрезки времени меньше периода начисления проценты не начисляются, т.е.

$$S=P(1+i)^a. \tag{2.5}$$

Номинальная и эффективная ставки процентов

Номинальная ставка. Пусть годовая ставка сложных процентов равна j, а число периодов начисления в году m. Тогда каждый раз проценты начисляют по ставке j/m. Ставка j называется номинальной. Начисление процентов по номинальной ставке производится по формуле

$$S=P(1+j/m)^{N}, \qquad (2.6)$$

где N – число периодов начисления.

Если срок ссуды измеряется дробным числом периодов начисления, то при m разовом начислении процентов в году наращенную сумму можно рассчитывать несколькими способами, приводящими к различным результатам:

1) По формуле сложных процентов

$$S=P(1+j/m)^{N/\tau}, \qquad (2.7)$$

где N/τ – число (возможно дробное) периодов начисления процентов; τ – период начисления процентов.

2) По смешанной формуле

$$S=P(1+j/m)^{a}(1+b\cdot j/m), \qquad (2.8)$$

где a – целое число периодов начисления (т.е. $a=[N/\tau]$ – целая часть от деления всего срока ссуды N на период начисления τ); b – оставшаяся дробная часть периода начисления ($b=N/\tau-a$).

Пример. Размер ссуды 20 млн. руб. Предоставлена на 28 месяцев. Номинальная ставка равна 60% годовых. Начисление процентов ежеквартальное. Вычислить наращенную сумму в трех ситуациях: 1) когда на дробную часть начисляются сложные проценты; 2) когда на дробную часть начисляются простые проценты; 3) когда дробная часть игнорируется. Результаты сравнить.

Решение

Начисление процентов ежеквартальное. Всего имеется 28/3 кварталов.

1) $S=20(1+0{,}6/4)^{9\frac{1}{3}}=73{,}713$ млн. руб.

2) $S=20(1+\frac{0{,}6}{4})^{9}(1+\frac{0{,}6}{4}\cdot\frac{1}{3})=73{,}875$ млн. руб.

3) $S=20(1+0{,}6/4)^{9}=70{,}358$ млн. руб.

Из сопоставления наращенных сумм видим, что наибольшего значения она достигает во втором случае, т.е. при начислении на дробную часть простых процентов.

Эффективная ставка показывает, какая годовая ставка сложных процентов дает тот же финансовый результат, что и m-разовое наращение в год по ставке j/m.

Если проценты капитализируются m раз в год, каждый раз со ставкой j/m, то, по определению, можно записать равенство для соответствующих множителей наращения

$$(1+i_э)^n = (1+ j/m)^{mn}, \tag{2.9}$$

где $i_э$ – эффективная ставка; а j – номинальная. Отсюда получаем, что связь между эффективной и номинальной ставками выражается соотношением

$$i_э = (1+ j/m)^{mn} - 1. \tag{2.10}$$

Обратная зависимость имеет вид

$$j = m((1+i_э)^{1/m} - 1). \tag{2.11}$$

Пример. Вычислить эффективную ставку процента, если банк начисляет проценты ежеквартально, исходя из номинальной ставки 10% годовых.

Решение

$$i_э=(1+0,1/4)^4-1=0,1038, \quad \text{т.е. } 10,38\%.$$

Пример. Определить какой должна быть номинальная ставка при ежеквартальном начислении процентов, чтобы обеспечить эффективную ставку 12% годовых.

Решение

$$j=4[(1+0,12)^{1/4}-1]=0,11495, \qquad \text{т.е. } 11,495\%.$$

Учет (дисконтирование) по сложной ставке процентов

Здесь так же, как и в случае простых процентов, будут рассмотрены два вида учета – математический и банковский.

Математический учет. В этом случае решается задача обратная наращению по сложным процентам. Запишем исходную формулу для наращения

$$S=P(1+i)^n$$

и решим ее относительно P

$$P = S\frac{1}{(1+i)^n} = Sv^n, \tag{2.12}$$

где

$$v^n = \frac{1}{(1+i)^n} = (1+i)^{-n} \quad (2.13)$$

учетный или дисконтный множитель.

Если проценты начисляются m раз в году, то получим

$$P = S\frac{1}{(1+j/m)^{mn}} = Sv^{mn}, \quad (2.14)$$

где

$$v^{mn} = \frac{1}{(1+j/m)^{mn}} = (1+j/m)^{-mn} \quad (2.15)$$

учетный или дисконтный множитель.

Величину P, полученную дисконтированием S, называют **современной или текущей стоимостью или приведенной величиной S.** Суммы P и S эквивалентны в том смысле, что платеж в сумме S через n лет равноценен сумме P, выплачиваемой в настоящий момент.

Разность D=S-P называют **дисконтом.**

Банковский учет. В этом случае предполагается использование сложной учетной ставки. Дисконтирование по сложной учетной ставке осуществляется по формуле

$$P=S(1-d_{сл})^n, \quad (2.16)$$

где $d_{сл}$ – сложная годовая учетная ставка.

Дисконт в этом случае равен

$$D=S-P=S-S(1-d_{сл})^n=S[1-(1-d_{сл})^{n]}. \quad (2.17)$$

При использовании сложной учетной ставки процесс дисконтирования происходит с прогрессирующим замедлением, так как учетная ставка каждый раз применяется к сумме, уменьшенной за предыдущий период на величину дисконта.

Номинальная и эффективная учетные ставки процентов

Номинальная учетная ставка. В тех случаях, когда дисконтирование применяют m раз в году, используют номинальную учетную ставку f. Тогда в каждом периоде, равном 1/m части года, дисконтирование осуществляется по сложной учетной ставке f/m.

Процесс дисконтирования по этой сложной учетной ставке m раз в году описывается формулой

$$P=S(1-f/m)^N, \qquad (2.18)$$

где N – общее число периодов дисконтирования (N=mn).

Дисконтирование не один, а m раз в году, быстрее снижает величину дисконта.

Эффективная учетная ставка. Под эффективной учетной ставкой понимают сложную годовую учетную ставку, эквивалентную (по финансовым результатам) номинальной, применяемой при заданном числе дисконтирований в году m.

В соответствии с определением эффективной учетной ставки найдем ее связь с номинальной из равенства дисконтных множителей

$$(1-f/m)^{mn}=(1-d_{сл})^n,$$

из которого следует, что

$$d_{сл}=1-(1-f/m)^m. \qquad (2.19)$$

Отметим, что эффективная учетная ставка всегда меньше номинальной.

Наращение по сложной учетной ставке. Наращение является обратной задачей для учетных ставок. Формулы наращения по сложным учетным ставкам можно получить, разрешая соответствующие формулы для дисконтирования (2.16) и (2.18) относительно S. Получаем из 2.16

$$S=P\frac{1}{(1-d_{сл})^n}, \qquad (2.20)$$

а из (2.18)

$$S=P\frac{1}{(1-f/m)^N}. \qquad (2.21)$$

Пример. Какую сумму следует проставить в векселе, если реально выданная сумма равна 20 млн руб., срок погашения 2 года. Вексель рассчитывается, исходя из сложной годовой учетной ставки 10%.

Решение

$$S=\frac{20}{(1-0{,}1)^2}=24{,}691358 \text{ млн. руб.}$$

Пример. Решить предыдущую задачу при условии, что наращение по сложной учетной ставке осуществляется не один, а 4 раза в год.

Решение

$$S = \frac{20}{(1-0{,}1/4)^8} = 24{,}490242 \text{ млн. руб.}$$

2.2. Непрерывные проценты. Наращение и дисконтирование

Наращенная сумма при дискретных процентах определяется по формуле

$$S=P(1+j/m)^{mn},$$

где j – номинальная ставка процентов; m – число периодов начисления процентов в году.

Чем больше m, тем меньше промежутки времени между моментами начисления процентов. В пределе при $m \to \infty$ имеем

$$S = \lim_{m\to\infty} P(1+j/m)^{mn} = Pe^{\lim\limits_{m\to\infty} mn\cdot j/m} = Pe^{jn}. \qquad (2.22)$$

Для того, чтобы отличать ставку непрерывных процентов j от ставок дискретных процентов, ее называют силой роста и обозначают символом δ. Тогда

$$S = Pe^{\delta n}. \qquad (2.23)$$

Сила роста δ представляет собой номинальную ставку процентов при $m \to \infty$.

Дисконтирование на основе непрерывных процентных ставок осуществляется по формуле

$$P = Se^{-\delta n}.$$

Связь дискретных и непрерывных процентных ставок

Дискретные и непрерывные процентные ставки находятся в функциональной зависимости, благодаря которой можно осуществлять переход от расчета непрерывных процентов к дискретным и наоборот. Формулу эквивалентного перехода от одних ставок к другим можно получить путем приравнивания соответствующих множителей наращения

$$(1+i)^n = e^{\delta n}. \qquad (2.24)$$

Из записанного равенства следует, что

$$\delta = \ln(1+i)\ . \qquad (2.25)$$

$$1 = e^{\delta} - 1. \qquad (2.26)$$

Пример. Годовая ставка сложных процентов равна 15%, чему равна эквивалентная сила роста?

Решение

Воспользуемся формулой (2.25)

$$\delta = ln(1+i) = ln(1+0,15) = 0,13976,$$

т.е. эквивалентная сила роста равна 13,976%.

2.3. Расчет срока ссуды и процентных ставок

В ряде практических задач начальная (P) и конечная (S) суммы заданы контрактом, требуется определить либо срок платежа, либо процентную ставку, которая в данном случае может служить мерой сравнения с рыночными показателями и характеристикой доходности операции для кредитора. Указанные величины нетрудно найти из исходных формул наращения или дисконтирования. По сути дела, в обоих случаях решается в известном смысле обратная задача.

Срок ссуды

При разработке параметров соглашения и оценивании сроков достижения желательного результата требуется определить продолжительность операции (срока ссуды) через остальные параметры сделки. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

А) При наращивании по сложной годовой ставке i. Из исходной формулы наращения

$$S = P(1+i)^n$$

следует, что

$$n = \frac{\ln(S/P)}{\ln(1+i)}\ . \qquad (2.27)$$

Б) При наращивании по номинальной ставке процентов m раз в году. Из формулы $S=P(1+j/m)^{mn}$ получаем

$$n = \frac{\ln(S/P)}{m\ln(1+j/m)}\ . \qquad (2.28)$$

В) При дисконтировании по сложной годовой учетной ставке d. Из формулы $P=S(1-d)^n$ имеем

$$n = \frac{\ln(P/S)}{\ln(1-d)}. \qquad (2.29)$$

Г) При дисконтировании по номинальной учетной ставке m раз в году. Из $P=S(1-f/m)^{mn}$ приходим к формуле

$$n = \frac{\ln(P/S)}{m\ln(1+f/m)}. \qquad (2.30)$$

Д) При наращивании по постоянной силе роста. Исходя из $S = Pe^{\delta n}$, получаем

$$n = \frac{\ln(S/P)}{\delta}. \qquad (2.31)$$

Расчет процентных ставок

Из тех же исходных формул, что и выше, получим выражения для процентных ставок.

А) При наращивании по сложной годовой ставке i. Из исходной формулы наращения $S=P(1+i)^n$ следует, что

$$i = (S/P)^{1/n} - 1. \qquad (2.32)$$

Б) При наращивании по номинальной ставке процентов m раз в году. Из формулы $S=P(1+j/m)^{mn}$ получаем

$$i = m((S/P)^{1/(mn)} - 1). \qquad (2.33)$$

В) При дисконтировании по сложной годовой учетной ставке d. Из формулы $P=S(1-d)^n$ имеем

$$d = 1 - (P/S)^{1/n}. \qquad (2.34)$$

Г) При дисконтировании по номинальной учетной ставке m раз в году. Из $P=S(1-f/m)^{mn}$ приходим к формуле

$$f = m(1 - (P/S)^{1/(mn)}). \qquad (2.35)$$

Д) При наращивании по постоянной силе роста. Исходя из $S = Pe^{\delta n}$, получаем

$$n = \frac{\ln(S/P)}{n}. \qquad (2.36)$$

Вопросы для самопроверки

1. В чем отличие начисления процентов по сложной ставке от начисления по простой ставке?
2. Условия применения сложных процентов.
3. Почему проценты, определяемые по сложной процентной ставке выше (ниже) процентов по простой ставке?
4. Сделайте сравнительный анализ графиков изменения наращения капитала при реализации схем простых и сложных процентов.
5. Что такое номинальная ставка процентов и когда она применяется?
6. Раскройте сущность эффективной ставки процентов.
7. Какое начисление процентов (более или менее частое) выгодно и почему?
8. Расчет наращенной суммы при дискретно меняющейся во времени сложной ставке процентов.
9. Определение наращенной суммы за срок с дробным числом лет.
10. Непрерывное начисление процентов.
11. Понятие эквивалентности процентных ставок и их использование при количественном финансовом анализе.
12. Формула для определения эквивалентных значений простой ставки процентов и простой учетной ставки, простых и сложных процентных ставок, эффективной и номинальной ставок сложных процентов.

3. ПРАКТИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ

Рассмотрим некоторые практические приложения рассмотренной нами теории. Покажем, как полученные выше формулы применяются при решении реальных задач по расчету эффективности некоторых финансовых операций, сравним различные методы расчетов.

3.1. Начисление процентов и инфляция

Следствием инфляции является падение покупательной способности денег, которое за период n характеризуется индексом J_n. Индекс покупательной способности равен обратной величине индекса цен J_p, т.е.

$$J_n=1/J_p.$$

Индекс цен показывает, во сколько раз выросли цены за указанный промежуток времени.

Наращение по простым процентам

Если наращенная за n лет сумма денег составляет S, а индекс цен равен J_p, то реально наращенная сумма денег, с учетом их покупательной способности, равна

$$C=S/Jp. \tag{3.1}$$

Пусть ожидаемый средний годовой темп инфляции (характеризующий прирост цен за год) равен h. Тогда годовой индекс цен составит (1+h).

Если наращение производится **по простой ставке** в течение n лет, то реальное наращение при темпе инфляции h составит

$$C=\frac{P(1+ni)}{J_p}, \tag{3.2}$$

где в общем случае

$$J_p=\prod_{t=1}^{n}(1+h_t), \tag{3.3}$$

и, в частности, при неизменном темпе роста цен h

$$J_p=(1+h)^n. \tag{3.4}$$

Процентная ставка, которая при начислении простых процентов компенсирует инфляцию, равна

$$i=\frac{J_p-1}{n}. \tag{3.5}$$

Один из способов компенсации обесценения денег заключается в увеличении ставки процентов на величину так называемой **инфляционной премии**. Скорректированная таким образом ставка называется **брутто-ставкой**. Брутто-ставка, которую мы будем обозначать символом r, находится из равенства, скорректированного на инфляцию множителя наращения по брутто-ставке множителя наращения по реальной ставке процента

$$\frac{1+nr}{J_p}=1+ni, \tag{3.6}$$

откуда

$$r=\frac{(1+ni)J_p-1}{n}. \tag{3.7}$$

Наращение по сложным процентам

Наращенная *по сложным процентам* сумма к концу срока ссуды, с учетом падения покупательной способности денег (т.е. в неизменных рублях), составит

$$C = \frac{P(1+i)^n}{J_p}. \tag{3.8}$$

В этом случае падение покупательной способности денег компенсируется при ставке i=h, обеспечивающей равенство C=P.

Применяются **два способа компенсации** потерь от снижения покупательной способности денег при начислении сложных процентов.

А) *Корректировка ставки процентов*, по которой производится наращение, на величину **инфляционной премии**. Ставка процентов, увеличенная на величину инфляционной премии, называется брутто-ставкой. Будем обозначать ее символом r. Считая, что годовой темп инфляции равен h, можем написать равенство соответствующих множителей наращения

$$\frac{1+r}{1+h} = 1+i,$$

где i – реальная ставка.

Отсюда получаем формулу Фишера

$$r=i+h+ih. \tag{3.9}$$

То есть **инфляционная премия** равна h+ih.

Б) **Индексация первоначальной суммы P.** В этом случае сумма P корректируется согласно движению заранее оговоренного индекса. Тогда

$$S=PJ_p(1+i)^n. \tag{3.10}$$

Нетрудно заметить, что и в случае А) и в случае Б) в итоге мы приходим к одной и той же формуле наращения. В ней первые два сомножителя в правой части отражают индексацию первоначальной суммы, а последние два – корректировку ставки процента.

Измерение реальной ставки процента

На практике приходится решать и обратную задачу – находить реальную ставку процента в условиях инфляции. Из тех же соотношений между множителями наращения нетрудно вывести формулы, определяющие реальную ставку i по заданной (или объявленной) брутто-ставке r.

При начислении простых процентов годовая реальная ставка процентов равна

$$i = \frac{1}{n}\left(\frac{1+nr}{J_p} - 1\right). \tag{3.11}$$

При начислении сложных процентов реальная ставка процентов определяется следующим выражением

$$i = \frac{1+r}{1+h} - 1 = \frac{r-h}{1+h}. \tag{3.12}$$

Задачи

1.Найти годовой рост цен, если известно, что в месяц темп инфляции равен 5% (1,796).

2.Найти темп инфляции за 3 месяца, если приросты цен по месяцам составляют 1,5, 1,2 и 0,5% (3,23%).

3.Найти реальную простую годовую ставку, если годовой темп инфляции составляет 20%, брутто-ставка 25%, срок операции полгода (0,054).

4.Найти реальную сложную годовую ставку, если индекс цен за 5 лет 1,7, брутто-ставка 25%, срок операции 5 лет (0,124).

3.2. Конвертация валюты и начисление процентов

Рассмотрим совмещение конвертации (обмена) валюты и наращение **простых процентов**, сравним результаты от непосредственного размещения имеющихся денежных средств в депозиты или после предварительного обмена на другую валюту. Всего возможны 4 варианта наращения процентов:

1. Без конвертации. Валютные средства размещаются в качестве валютного депозита, наращение первоначальной суммы производится по валютной ставке путем прямого применения формулы простых процентов.

2. С конвертацией. Исходные валютные средства конвертируются в рубли, наращение идет по рублевой ставке, в конце операции рублевая сумма конвертируется обратно в исходную валюту.

3. Без конвертации. Рублевая сумма размещается в виде рублевого депозита, на который начисляются проценты по рублевой ставке по формуле простых процентов.

4. С конвертацией. Рублевая сумма конвертируется в какую-либо конкретную валюту, которая инвестируется в валютный депозит. Проценты начисляются по валютной ставке. Наращенная сумма в конце операции обратно конвертируется в рубли.

Операции без конвертации не представляют сложности. В операции наращения с двойной конвертацией имеются два источника дохода: начисление процента и изменение курса. Причем начисление процента является безусловным источником (ставка фиксирована, инфляцию пока не рассматриваем). Изменение же обменного курса может быть как в ту, так и в другую сторону, и оно может быть как источником дополнительного дохода, так и приводить к потерям. Далее мы конкретно остановимся на двух вариантах (2 и 4), предусматривающих двойную конвертацию.

Предварительно введем следующие ОБОЗНАЧЕНИЯ:

P_v – сумма депозита в валюте;
P_r – сумма депозита в рублях;
S_v – наращенная сумма в валюте;
S_r – наращенная сумма в рублях;
K_0 – курс обмена в начале операции (курс валюты в руб.);
K_1 – курс обмена в конце операции;
n – срок депозита;
i – ставка наращения для рублевых сумм (в виде десятичной дроби);
j – ставка наращения для конкретной валюты.

ВАРИАНТ: ВАЛЮТА→ РУБЛИ → РУБЛИ →ВАЛЮТА

Операция состоит из трех этапов: обмена валюты на рубли, наращения рублевой суммы, обратное конвертирование рублевой суммы в исходную валюту. Наращенная сумма, получаемая в конце операции в валюте, составит

$$S_v = P_v K_0 (1 + ni) \frac{1}{K_1}.$$

Как видим, три этапа операции нашли свое отражение в этой формуле в виде трех сомножителей.

Множитель наращения с учетом двойной конвертации равен

$$m = \frac{K_0}{K_1}(1 + ni) = \frac{(1 + ni)}{k},$$

где $k = K_1/K_0$ – **темп роста обменного курса за срок операции.**

Мы видим, что множитель наращения m связан линейной зависимостью со ставкой i и обратной – с обменным курсом в конце операции K_1 (или с темпом роста обменного курса k).

Исследуем теоретически зависимость общей доходности операции с двойной конвертацией по схеме ВАЛЮТА → РУБЛИ → РУБЛИ → ВАЛЮТА от соотношения конечного и начального курсов обмена k.

Простая годовая ставка процентов, характеризующая доходность операции в целом, равна

$$i_{эфф} = \frac{S_v - P_v}{P_v n}.$$

Подставим в эту формулу записанное ранее выражение для S_v.

$$i_{эфф} = \frac{\frac{K_0}{K_1}(1+ni) - 1}{n} = \frac{1}{k}\frac{(1+ni)}{n} - \frac{1}{n}.$$

Таким образом, с увеличением k доходность $i_{эфф}$ падает по гиперболе с асимптотой -1/n (рис. 3.1).

Исследуем особые точки этой кривой. Отметим, что при k=1 доходность операции равна рублевой ставке, т.е. $i_{эфф}$=i. При k>1 $i_{эфф}$<i, а при k<1 $i_{эфф}$>i. На рис. 3.1 видно, что при некотором критическом значении k, которое мы обозначим как k*, доходность (эффективность) операции оказывается равной нулю. Из равенства iэфф=0 находим, что k*=1+ni, что, в свою очередь, означает $K^*_1=K_0(1+ni)$.

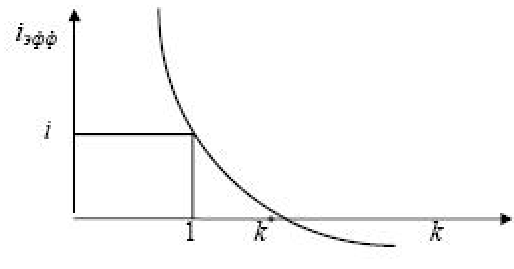


Рис 3.1. График зависимости доходности от отношения обменных курсов

ВЫВОД 1. Если ожидаемые величины k или K1 превышают свои критические значения, то операция явно убыточна ($i_{эфф}$<0).

Теперь определим **максимально допустимое значение курса обмена** в конце операции K1, при котором эффективность будет равна существующей ставке по депозитам в валюте, и применение двойной конвертации не дает никакой дополнительной выгоды. Для этого приравняем множители наращения для двух альтернативных операций

$$1 + nj = \frac{K_0}{K_1}(1 + ni) = \frac{(1 + ni)}{k} .$$

Из записанного равенства следует, что

$$\max K_1 = K_0 \frac{(1 + ni)}{(1 + nj)} \Rightarrow \max k = \frac{K_1}{K_0} = \frac{(1 + ni)}{(1 + nj)} .$$

ВЫВОД 2. Депозит валюты через конвертацию в рубли выгоднее валютного депозита, если обменный курс в конце операции ожидается меньше max K_1.

ВАРИАНТ: РУБЛИ → ВАЛЮТА → ВАЛЮТА → РУБЛИ

Рассмотрим теперь вариант с двойной конвертацией, когда имеется исходная сумма в рублях. В этом случае трем этапам операции соответствуют три сомножителя следующего выражения для наращенной суммы:

$$S_r = \frac{P_r}{K_0}(1 + nj)K_1 .$$

Здесь также множитель наращения линейно зависит от ставки, но теперь от валютной ставки процентов. От конечного курса обмена он также зависит линейно.

Проведем теоретический анализ эффективности этой операции с двойной конвертацией и определим критические точки.

Доходность операции в целом определяется по формуле

$$i'_{эфф} = \frac{S_r - P_r}{P_r n} .$$

Отсюда, подставив выражение для S_r, получаем

$$i'_{эфф} = \frac{\frac{K_1}{K_0}(1 + nj) - 1}{n} = \frac{k(1 + nj) - 1}{n} .$$

Зависимость показателя эффективности $i_{эфф}$ от k линейная, она представлена на рис. 3.2.

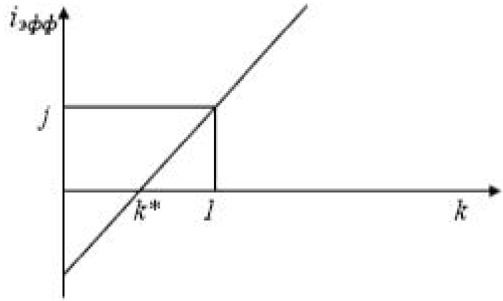


Рис. 3.2. График зависимости доходности
от отношения обменных курсов

При k=1 $i_{эфф}$=j, при k>1 $i_{эфф}$>j, при k<1 $i_{эфф}$<j.

Найдем теперь критическое значение k*, при котором $i_{эфф}$=0. Оно оказывается равным

$$k^* = \frac{1}{1+nj} \quad или \quad K_1{}^* = \frac{K_0}{1+nj}.$$

ВЫВОД 3. Если ожидаемые величины k или K1 меньше своих критических значений, то операция явно убыточна ($i_{эфф}$<0).

Минимально допустимая величина k (темпа роста валютного курса за весь срок операции), обеспечивающая такую же доходность, что и прямой вклад в рублях, определяется путем приравнивания множителей наращения для альтернативных операций (или из равенства $i_{эфф}$=i).

$$\frac{K_1}{K_0}(1+nj) = (1+ni).$$

Откуда

$$\min K_1 = K_0\frac{(1+ni)}{(1+nj)} \Rightarrow \min k = \frac{K_1}{K_0} = \frac{(1+ni)}{(1+nj)}.$$

ВЫВОД 4. Депозит рублевых сумм через конвертацию в валюту выгоднее рублевого депозита, если обменный курс в конце операции ожидается больше min K_1.

Теперь рассмотрим совмещение конвертации валюты и наращение **сложных процентов**. Ограничимся одним вариантом.

ВАРИАНТ: ВАЛЮТА → РУБЛИ → РУБЛИ → ВАЛЮТА

Три этапа операции записываются в одной формуле для наращенной суммы

$$S_v = P_v K_0 (1+i)^n \frac{1}{K_1},$$

где i – ставка сложных процентов.

Множитель наращения

$$m = \frac{K_0}{K_1}(1+i)^n = \frac{(1+i)^n}{k},$$

где $k=K_1/K_0$ – темп роста валютного курса за период операции.

Определим доходность операции в целом в виде годовой ставки сложных процентов $i_э$.

Из формулы наращения по сложным процентам

$$S=P(1+i)^n$$

следует, что

$$i_э = \sqrt[n]{\frac{S_v}{P_v}} - 1.$$

Подставив в эту формулу значение S_v, получим

$$i_э = \sqrt[n]{\frac{P_v (1+i)^n \dfrac{K_0}{K_1}}{P_v}} - 1 = \frac{1+i}{\sqrt[n]{л}} - 1.$$

Из этого выражения видно, что с увеличением темпа роста k эффективность $i_э$ падает. Это показано на графике рис. 3.3.

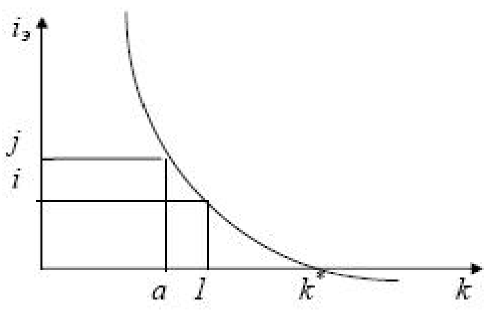


Рис. 3.3. График зависимости доходности от отношения обменных курсов

Анализ показывает, что при k=1 $i_э$=i, при k>1 $i_э$<i, а при k<1 э>i.

Критическое значение k, при котором эффективность операции равна нулю, т.е. $i_э$=0, определяется как $k^*=(1+i)^n$, что означает равенство среднегодового темпа роста курса валюты годовому темпу наращения по рублевой ставке.

$$\sqrt[n]{k} = 1 + i \, .$$

ВЫВОД 5. Если ожидаемые величины k или K_1 больше своих критических значений, то рассматриваемая операция с двойной конвертацией явно убыточна ($i_э$<0).

Максимально допустимое значение k, при котором доходность операции будет равна доходности при прямом инвестировании валютных средств по ставке j (рис. 3.3, т. *а*), находится из равенства соответствующих множителей наращения

$$(1 + j)^n = \frac{(1+i)^n}{k_{\max}} \, ,$$

откуда

$$k_{\max} = \left(\frac{1+i}{1+j} \right)^n \, .$$

ВЫВОД 6. Депозит валюты через конвертацию в рубли выгоднее валютного депозита, если обменный курс в конце операции ожидается меньше *max* K_1.

Задачи

1. Имеется 10 млн руб. Определить наиболее выгодный способ размещения вклада на депозите, если текущее значение обменного курса составляет 28, 4 руб. за долл., прогнозируемое значение обменного курса 29 руб. за долл., используется по депозитам в рублях простая годовая процентная ставка 22%, по депозитам в валюте простая годовая процентная ставка 8%, срок операции 3 месяца (операция с конвертацией).
2. Имеется 10 млн долл. Определить диапазон значений курса валюты в конце депозитной операции, при котором двойная конвертация выгодна, если текущее значение обменного курса составляет 28, 4 руб. за долл., используется по депозитам в рублях простая годовая процентная ставка 22%, по депозитам в валюте простая годовая процентная ставка 8%, срок операции 3 месяца (до 29, 37 руб. за долл.).

3. Курс доллара составляет 28 руб. Ставка по рублевому трехмесячному депозиту составляет 25%, по депозиту в валюте 6%. Определить форвардный обменный курс (29,81 руб. за долл.).

3.3. Влияние колебаний обменного курса на эффективность внешнеторговых операций

Рассматривается ситуация, когда курс валюты изменяется скачком с k_0 до k_1. Период исследования принимается n лет.

Экспортная операция

Экспортер экспортирует товар на сумму P руб. и реализует его на сумму S долл., налог на экспорт составляет q (в дол. ед.).

При курсе k_0 руб./долл. экспортер конвертирует полученную сумму S долл. в (S k_0) руб., тогда доходность с учетом налога составит

$$i_0 = \frac{Sk_0 - P}{Pn}(1-q)\,. \tag{3.13}$$

При курсе k_0 руб./долл. доходность составит

$$i_1 = \frac{Sk_1 - P}{Pn}(1-q)\,. \tag{3.14}$$

Если выразить S из выражения (3.13) и подставить в (3.14), получим доходность при изменении курса валюты.

$$i_1 = \frac{\left(P + i_0\dfrac{Pn}{1-q}\right)\dfrac{1}{k_0}k_1 - P}{Pn}(1-q) = \left(\frac{1-q}{n} + i_0\right)\frac{k_1}{k_0} - \frac{1-q}{n}\,.$$

При $k_1 = k_0$ доходность операции не изменится, $i_1 = i_0$.

При $k_1 > k_0$ доходность операции увеличится (девальвация рубля).

При $k_1 < k_0$ доходность операции уменьшится.

Импортная операция

Импортируется товар на сумму P долл. и реализуется на сумму S руб., налог на экспорт составляет q (в дол. ед.).

При курсе k_0 руб./долл. импортер конвертирует полученную сумму S руб. в (S/k_0) долл., тогда доходность с учетом налога составит

$$i_0 = \frac{S/k_0 - P}{Pn}(1-q). \qquad (3.15)$$

При курсе k_0 руб./долл. доходность составит

$$i_1 = \frac{S/k_1 - P}{Pn}(1-q). \qquad (3.16)$$

Если выразить S из выражения (3.15) и подставить в (3.16), получим доходность при изменении курса валюты.

$$i_1 = \frac{\left(P + i_0 \dfrac{Pn}{1-q}\right)\dfrac{k_0}{k_1} - P}{Pn}(1-q) = \left(\frac{1-q}{n} + i_0\right)\frac{k_0}{k_1} - \frac{1-q}{n}.$$

При $k_1 = k_0$ доходность операции не изменится $i_1 = i_0$.

При $k_1 > k_0$ доходность операции падает.

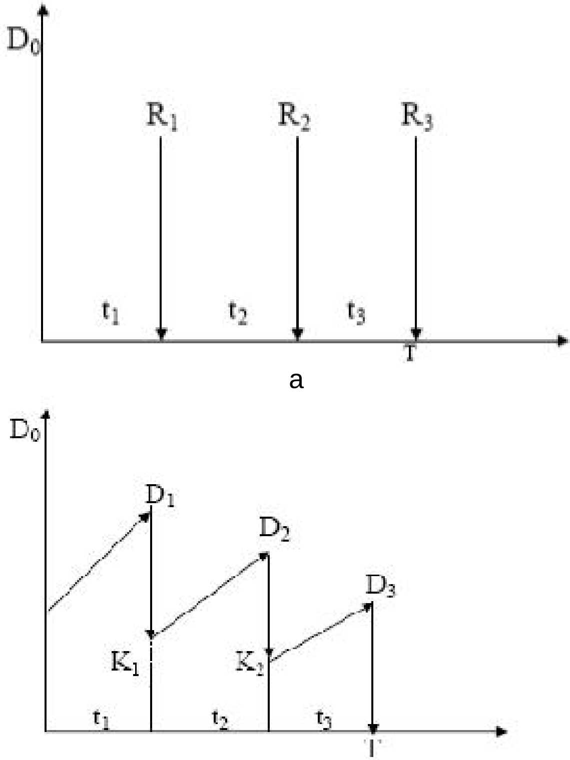
При $k_1 < k_0$ доходность операции растет.

Задача

Обменный курс вырос от 29 руб. за долл. до 30 руб. за долл. Как изменится доходность экспортной операции, если до изменения обменного курса доходность операции составляла 30%, на реализацию операции требуется 1 месяц, налог на прибыль составляет 25%?

3.4. Погашение задолженности частями

Контур финансовой операции «Финансовая или кредитная операция» предполагает сбалансированность вложений и отдачи. Понятие сбалансированности можно пояснить на графике (рис.3.4).



б

Рис. 3.4. Понятие сбалансированности:
а – график платежей; б – контур финансовой операции

Пусть ссуда в размере D_0 выдана на срок T. На протяжении этого срока в счет погашения задолженности производятся, допустим, два промежуточных платежа R_1 и R_2, а в конце срока выплачивается остаток задолженности R_3, подводящий баланс операции.

На интервале времени t_1 задолженность возрастает до величины D_1. В момент t_1 долг уменьшается до величины $K_1=D_1-R_1$ и т.д. Заканчивается операция получением кредитором остатка задолженности R_3. В этот момент задолженность полностью погашается.

Назовем график (см. рис. 3.4, б) **контуром финансовой операции**. Сбалансированная операция обязательно имеет замкнутый контур, т.е. последняя выплата полностью покрывает остаток задолженности. Контур операции обычно применяется при погашении задолженности частичными промежуточными платежами.

С помощью последовательных частичных платежей иногда погашаются краткосрочные обязательства. В этом случае существуют два метода расчета процентов и определения остатка задолженности. Первый называется **актуарным** и применяется в основном в операциях со сроком более года. Второй метод назван **правилом торговца.** Он обычно применяется коммерческими фирмами в сделках со сроком не более года.

Замечание. При начислении процентов, как правило, используются обыкновенные проценты с приближенным числом дней временных периодов.

Актуарный метод

Актуарный метод предполагает последовательное начисление процентов на фактические суммы долга. Частичный платеж идет, в первую очередь, на погашение процентов, начисленных на дату платежа. Если величина платежа превышает сумму начисленных процентов, то разница идет на погашение основной суммы долга. Непогашенный остаток долга служит базой для начисления процентов за следующий период и т.д. Если же частичный платеж меньше начисленных процентов, то никакие зачеты в сумме долга не делаются. Такое поступление приплюсовывается к следующему платежу.

Для случая, показанного на рис. 3.4, б, получим следующие расчетные формулы для определения остатка задолженности

$$K_1=D_0(1+t_1i)-R_1;\ K_2=K_1(1+t_2i)-R_2;\ K_2(1+t_3i)-R_3=0,$$

где периоды времени t_1, t_2, t_3 – заданы в годах, а процентная ставка i – годовая.

Правило торговца

Правило торговца является другим подходом к расчету частичных платежей. Здесь возможны две ситуации.

1) Если срок ссуды не превышает 1 года, сумма долга с начисленными за весь срок процентами остается неизменной до полного погашения. Одновременно идет накопление частичных платежей с начисленными на них до конца срока процентами.

2) В случае, когда срок превышает год, указанные выше расчеты делаются для годового периода задолженности. В конце года из суммы задолженности вычитается наращенная сумма накопленных частичных платежей. Остаток погашается в следующем году.

При общем сроке ссуды T≤1 алгоритм можно записать следующим образом:

$$S = D - K = P(1 + Ti) - \sum_{j=1}^{m} R_j (1 + t_j i),$$

где S – остаток долга на конец срока;

D – наращенная сумма долга;

K – наращенная сумма платежей;

R_j – сумма частичного платежа;

t_j – интервал времени от момента платежа до конца срока;

m – число частичных (промежуточных) платежей.

Задача

Долг в сумме 100 млн руб. требуется погасить в течение 1,5 лет с 17.10.09 по 17.04.11. Кредитор согласен получать частичные платежи. Процент начисляется по простой годовой ставке 40%. Рассчитать и построить контур финансовой операции, сравнить результаты, применяя германскую практику: а) для актуарного метода; б) для метода торговца. График частичных платежей: 17.01.10 – 30 млн руб.; 17.07.10 – 10 млн руб.; 1.09.10 – 20 млн руб.

3.5. Начисление простых процентов при движении денежных средств на расчетном счете

Рассмотрим ситуацию, когда в банке открыт сберегательный счет и сумма счета в течение срока хранения изменяется: денежные средства снимаются, делаются дополнительные взносы.

Если меняется сумма на расчетном счете, то при расчете процентов по сумме за весь период при простом проценте применяется формула

$$I = \sum_{j} P_j \cdot n_j \cdot i.$$

где P_j – остаток средств в j-м периоде;

n_j – длительность j-го периода (в годах).

В банковской практике при расчете процентов часто используют методику расчета с вычислением так называемых **процентных чисел**. Каждый раз, когда сумма на счете изменяется, вычисляется процентное число C_j за прошедший период j, в течение которого сумма на счете оставалась неизменной, по формуле

,

$$C_j = \frac{P_j t_j}{100},$$

где t_j – длительность j-го периода в днях.

Для определения суммы процентов, начисленной за весь срок, все процентные числа складываются и их сумма делится на постоянный делитель D.

$$D = \frac{K}{i},$$

где K – временная база (число дней в году, т.е. 360 либо 365 или 366); i – годовая ставка простых процентов (в %).

Таким образом

$$I = \sum_j \frac{P_j \cdot t_j}{100} \Bigg/ \frac{K}{i}.$$

При закрытии счета владелец получит сумму равную последнему значению суммы на счете плюс сумму процентов.

Пример. Пусть 20 февраля был открыт счет до востребования в размере P1=3000 руб., процентная ставка по вкладу равнялась i=20% годовых. Дополнительный взнос на счет составил R_1=2000 руб. и был сделан 15 августа. Снятие со счета в размере R_2=-4000 руб. зафиксировано 1 октября, а 21 ноября счет был закрыт. Требуется определить сумму процентов и общую сумму, полученную вкладчиком при закрытии счета.

Решение

Расчет будем вести по схеме (360/360). Здесь имеются три периода, в течение которых сумма на счете оставалась неизменной: с 20 февраля по 15 августа (P_1=3000, t_1=10+5*30+15=175), с 15 августа по 1 октября ($P_2=P_1+R_1$=3000+2000=5000 руб., t_2=15+30+1=46), с 1 октября по 21 ноября ($P_3=P_2+R_2$=5000-4000 = =1000 руб., t_3=29+21=50).

Найдем процентные числа:

$$C_1 = \frac{P_1 * t_1}{100} = \frac{3000*175}{100} = 5250,$$

$$C_2 = \frac{P_2 * t_2}{100} = \frac{5000*46}{100} = 2300,$$

$$C_3 = \frac{P_3 * t_3}{100} = \frac{1000*50}{100} = 500.$$

Постоянный делитель

$$D=K/i=360/20=18.$$

Сумма процентов равна

$$I = (C_1 + C_2 + C_3)/D = \frac{5250+2300+500}{18} = 447 \text{ руб. } 22 \text{ коп.}$$

Сумма, выплачиваемая при закрытии счета, равна

$$P_3+I=1000+447.22=1447 \text{ руб. } 22 \text{ коп.}$$

Теперь покажем связь этой методики с формулой простых процентов. Рассмотрим в алгебраическом виде представленный выше пример.

Сумму, выплачиваемую при закрытии счета, найдем следующим образом:

$$P_3 + I = P_1 + R_1 + R_2 + \frac{P_1t_1 + (P_1+R_1)t_2 + (P_1+R_1+R_2)t_3}{100}\frac{i}{K} =$$

$$= P_1\left(1+\frac{t_1+t_2+t_3}{K}\frac{i}{100}\right) + R_1\left(1+\frac{t_2+t_3}{K}\frac{i}{100}\right) + R_2\left(1+\frac{t_3}{K}\frac{i}{100}\right)$$

Таким образом, мы получили выражение, из которого следует, что на каждую сумму, добавляемую или снимаемую со счета, начисляются проценты с момента совершения соответствующей операции до закрытия счета. Эта схема соответствует правилу торговца.

Задача

Имеется график движения денежных средств на расчетном счете: 2.03. поступило 2 млн руб.; 14.07 поступило 2 млн руб.; 28.09 сняли 1,5 млн руб. Найти сумму на счете на момент закрытия счета 19.12, если используют простую процентную ставку 2% годовых (360/360).

3.6. Изменение условий контракта

В практике часто возникает необходимость в изменении условий контракта: например, должник может попросить об отсрочке срока погашения долга или, напротив, изъявить желание погасить его досрочно, в ряде случаев может возникнуть потребность объединить (консолидировать) несколько долговых обязательств в одно и т.д. Во всех этих случаях применяется принцип финансовой эквивалентности старых (заменяемых) и новых (заменяющих) обязательств. Для решения задач по изменению условий контракта разрабатывается так называемое уравнение эквивалентности, в котором сумма заменяемых платежей, приведенных к какому-либо одному моменту времени, приравнивается сумме платежей по новому обязательству, приведенных к той же дате. Для краткосрочных контрактов применяются простые процентные ставки, а для средне- и долгосрочных – сложные ставки.

Задачи

1.Можно ли считать эквивалентными обязательства выплатить 400 тыс. руб. через 4 месяца и 450 тыс. руб. через 8 месяцев при использовании: а) простой годовой ставки 20%; б) простой годовой ставки 50%.

2.Определить простую процентную ставку, при которой можно считать эквивалентными обязательства выплатить 400 тыс. руб. через 4 месяца и 450 тыс. руб. через 8 месяцев.

3.Объединить три платежа: 150 тыс. руб. со сроком выплаты 3 марта; 100 тыс. руб со сроком выплаты 1 августа; 50 тыс. руб со сроком выплаты 1 октября. Срок консолидированного платежа 1 июня, применяется годовая сложная процентная ставка 18%, временная база 365 (305 тыс. руб.).

4.Платежи в 1 и 2 млн руб. сроками уплаты через 2 и 3 года объединяются в один со сроком 2,5 года. Определить размер консолидированного платежа, если при консолидации используется сложная процентная ставка 20% (2,921 млн руб.).

5.Требуется объединить два платежа 1,6 млн руб. со сроком выплаты через 1 год и 2,7 млн руб. со сроком выплаты через 2 года одним платежом 5 млн руб. Определить срок платежа, если применяется: а) простая; б) сложная процентная ставка 17% годовых (2,8 года; 2,56 года).

6.Две суммы 10 и 5 млн руб. должны быть выплачены 1 ноября и 1 января следующего года. Но порядок выплат был пересмотрен: 1 декабря выплачивается 6 млн руб., а остаток гасится 1 марта. Найти сумму остатка, если применяется временная база

365 дней, сложная процентная ставка 20% годовых. За базовую дату принять 1 января (9,531 млн руб.).

7.Существует обязательство уплатить 100 тыс. руб. через 5 лет. Условия были изменены: выплачивается 30 тыс. руб. через 2 года, а через 4 года после предыдущей выплаты – остаток. Определить сумму последнего платежа при сложной процентной ставке 20% годовых. За базовую дату принять начальный момент времени (57,8 тыс. руб).

Вопросы для самопроверки

1. Сущность инфляции и необходимость ее учета в финансовых расчетах.
2. Какими показателями характеризуется инфляция?
3. К каким методам прибегают владельцы денег для компенсации потерь от снижения их покупательной способности?
4. Определение инфляционной премии:
   – при начислении простых процентов;
   – при начислении сложных процентов.
5. Сущность брутто-ставки и методы ее определения.
6. Что такое "Процентные числа". В каких задачах они применяются?
7. В каких ситуациях применяют актуарный метод и метод торговца? В чем отличие методов?
8. Объясните принцип финансовой эквивалентности платежей и его применение при изменении условий контрактов.
9. Что такое консолидация платежей?
10. Запишите формулу для расчета суммы консолидированного платежа.

4. АНАЛИЗ ФИНАНСОВЫХ ПОТОКОВ

Многие финансовые, кредитные и коммерческие операции предполагают выплату одной из сторон регулярных периодических платежей, которые образуют поток платежей. Такие потоки характеризуются рядом параметров, совокупность которых существенно влияет на доходность операции. К таким параметрам относятся: сумма платежа (размер регулярных инвестиций, взносов, выплат и т.п.), периодичность поступлений или выплат, способы начисления процентов, срок операции и т.д. Важнейшими задачами при этом являются расчет конечных финансовых результатов, определение их чувствительности к значениям параметров, разработка условий соглашений, эквивалентное изменение условий контрактов и т.д.

В данной теме рассматриваются методы количественного анализа последовательности (потоков) платежей, в частности финансовых рент (аннуитетов). Такие методы имеют важное значение в практике финансовых расчетов при разработке планов выполнения ряда операций. Например, в анализе долгосрочных кредитных операций, сопоставлении инвестиционного потока платежей и потока возврата, в разработке планов формирования фонда или погашения долга, в оценке и сравнении эффективности инвестиционных проектов, расчете лизинга, ипотеки, страховых операций и т.д.

В первой части пособия были рассмотрены основные понятия, которыми оперируют в финансовых вычислениях, такие, как процент, ставка процента, учетная ставка, современная (текущая) стоимость платежа и т.д., методы наращения и дисконтирования платежей, принципы, лежащие в основе финансовых вычислений, современная практика расчетов.

Данное пособие предполагает, что систематизированное изложение основных понятий и методов финансовых вычислений, данное нами в первой части, в курсе «Основы финансовых расчетов», читателю уже известно.

В «Анализе финансовых потоков» будут даны основы количественного анализа последовательности (потоков) платежей, в частности – финансовых рент (аннуитетов). Потоки денежных платежей часто встречаются в практике. Например, регулярные взносы для формирования какого-либо фонда (инвестиционного, страхового, пенсионного, для погашения долга), периодическая уплата процентов, доходы по облигациям или ценным бумагам, выплата пенсий, поступление доходов от коммерческой или предпринимательской деятельности, налоговые платежи и т.д. Такие методы имеют важное значение в практике финансовых расчетов и позволяют определить как обобщающие характеристики рент (наращенную сумму, текущую стоимость), так и отдельные их параметры.

4.1. Потоки платежей

Очень часто в контрактах финансового характера предусматриваются не отдельные разовые платежи, а серия платежей, распределенных во времени. Примерами могут быть регулярные выплаты с целью погашения долгосрочного кредита вместе с начисленными на него процентами, периодические взносы на расчетный счет, на котором формируется некоторый фонд различного назначения (инвестиционный, пенсионный, страховой, резервный, накопительный и т.д.), дивиденды, выплачиваемые по ценным бумагам, выплаты пенсий из пенсионного фонда и пр. Ряд последовательных выплат и поступлений называют **потоком платежей**. Выплаты представляются отрицательными величинами, а поступления – положительными.

Обобщающими характеристиками потока платежей являются наращенная сумма и современная величина. Каждая из этих характеристик является числом.

Наращенная сумма потока платежей – это сумма всех членов последовательности платежей с начисленными на них процентами к концу срока ренты.

Под **современной величиной потока платежей** понимают сумму всех его членов, дисконтированных (приведенных) на некоторый момент времени, совпадающий с началом потока платежей или предшествующий ему.

Конкретный смысл этих обобщающих характеристик определяется природой потока платежей, причиной, его порождающей. Например, наращенная сумма может представлять собой итоговый размер формируемого инвестиционного или какого-либо другого фонда, общую сумму задолженности. Современная величина может характеризовать приведенную прибыль, приведенные издержки.

4.1.1. Финансовые ренты (аннуитеты)

Поток платежей, все члены которого положительные величины, а временные интервалы постоянны, называют финансовой рентой или аннуитетом.

Финансовая рента имеет следующие параметры:

член ренты – величина каждого отдельного платежа, период ренты – временной интервал между двумя соседними платежами;

срок ренты – время, измеренное от начала финансовой ренты до конца ее последнего периода;

процентная ставка – ставка, используемая при наращении или дисконтировании платежей, образующих ренту;

число платежей в году, **число начислений процентов в году**, **моменты платежа внутри периода** ренты.

4.1.2. Виды финансовых рент

Классификация рент может быть произведена по различным признаками. Рассмотрим их.

В зависимости от продолжительности периода, ренты делят на **годовые** и **р-срочные**, где р – число выплат в году.

По числу начислений процентов различают ренты с **начислением один в году, m раз** или **непрерывно**. Моменты начисления процентов могут не совпадать с моментами рентных платежей.

По величине членов различают **постоянные** (с равными членами) и **переменные** ренты. Если размеры платежей изменяются по какому-либо математическому закону, то часто появляется возможность вывести стандартные формулы, значительно упрощающие расчеты.

По вероятности выплаты членов различают ренты **верные** и **условные**. Верные ренты подлежат безусловной выплате, например, при погашении кредита. Выплата условной ренты ставится в зависимость от наступления некоторого случайного события. Поэтому число ее членов заранее неизвестно. Например, число выплат пенсий зависит от продолжительности жизни пенсионера.

По числу членов различают ренты с конечным числом членов или **ограниченные** и **бесконечные** или вечные. В качестве вечной ренты можно рассматривать выплаты по облигационным займам с неограниченными или не фиксированными сроками.

В зависимости от наличия сдвига момента начала ренты по отношению к началу действия контракта или какому-либо другому моменту, ренты подразделяются на **немедленные** и **отложенные** или отсроченные. Срок немедленных рент начинается сразу, а у отложенных запаздывает.

Ренты различают по моменту выплаты платежей. Если платежи осуществляются в конце каждого периода, то такие ренты называются **обычными** или **постнумерандо**. Если же выплаты производятся в начале каждого периода, то ренты называются пренумерандо. Иногда предусматриваются платежи в середине каждого периода.

Анализ потоков платежей в большинстве случаев предполагает расчет **наращенной суммы** или **современной величины** ренты.

Задача

Контракт предусматривает периодическое погашение задолженности путем выплаты в конце каждого полугодия одинаковых погасительных платежей на протяжении 5 лет. Классифицировать ренту.

4.1.3. Формулы наращенной суммы

Обычная годовая рента. Пусть в конце каждого года в течение n лет на расчетный счет вносится по R рублей, проценты начисляются один раз в год по ставке i. В этом случае первый взнос к концу срока ренты возрастет до величины $R(1+i)^{n-1}$, так как на сумму R проценты начислялись в течение n-1 года. Второй взнос увеличится до $R(1+i)^{n-2}$ и т.д. На последний взнос проценты не начисляются. Таким образом, в конце срока ренты ее наращенная сумма будет равна сумме членов геометрической прогрессии

$$S=R+R(1+i)+R(1+i)^2+\dots+R(1+i)^{n-1},$$

в которой первый член равен R, знаменатель (1+i), число членов n. Эта сумма равна

$$S = R\frac{(1+i)^n-1}{(1+i)-1} = R\frac{(1+i)^n-1}{i} = Rs_{n;i}, \qquad (4.1)$$

где
$$s_{n;i} = \frac{(1+i)^n-1}{i} \qquad (4.2)$$

называется **коэффициентом наращения ренты**. Он зависит только от срока ренты n и уровня процентной ставки i. Поэтому его значения могут быть представлены в таблице с двумя входами.

Пример. В течение 3 лет на расчетный счет в конце каждого года поступает по 10 млн руб., на которые начисляются проценты по сложной годовой ставке 10%. Требуется определить сумму на расчетном счете к концу указанного срока.

Решение

$$S = 10\frac{(1+0{,}1)^3-1}{0{,}1} = 33{,}1\,.$$

Годовая рента, начисление процентов m раз в году

Посмотрим, как усложнится формула, если предположить теперь, что платежи делают один раз в конце года, а проценты начисляют m раз в году. Это означает, что применяется каждый раз ставка j/m, где j – номинальная ставка процентов. Тогда члены ренты с начисленными до конца срока процентами имеют вид

$$R(1+j/m)^{m(n-1)},\ R(1+j/m)^{m(n-2)},\dots,\ R.$$

Если прочитать предыдущую строку справа налево, то нетрудно увидеть, что перед нами опять геометрическая прогрессия, первым членом которой является R, знаменателем $(1+j/m)^m$, а число членов n.

Сумма членов этой прогрессии и будет наращенной суммой ренты. Она равна

$$S = R\frac{(1+j/m)^{mn}-1}{(1+j/m)^{m}-1}. \qquad (4.3)$$

Рента p-срочная, m=1

Найдем наращенную сумму при условии, что рента выплачивается p раз в году равными платежами, а проценты начисляются один раз в конце года. Если R – годовая сумма платежей, то размер отдельного платежа равен R/p. Тогда последовательность платежей с начисленными до конца срока процентами также представляет собой геометрическую прогрессию, записанную в обратном порядке,

$$\frac{R}{p}(1+i)^{n-1/p},\ \ \frac{R}{p}(1+i)^{n-2/p},\ ...,\frac{R}{p}, \quad ,$$

у которой первый член R/p, знаменатель $(1+i)^{1/p}$, общее число членов np. Тогда наращенная сумма рассматриваемой ренты равна сумме членов этой геометрической прогрессии

$$S = \frac{R}{p}\frac{(1+i)^{(1/p)np}-1}{(1+i)^{1/p}-1} = R\frac{(1+i)^{n}-1}{p((1+i)^{1/p}-1)} = Rs_{n;j}^{(p)}, \qquad (4.4)$$

где $s_{n;j}^{(p)} = \dfrac{(1+i)^{n}-1}{p((1+i)^{1/p}-1)}$ – **коэффициент наращения** (4.5) **p-срочной ренты** при m=1.

Рента p-срочная, p=m

В контрактах часто начисление процентов и поступление платежа совпадают во времени. Таким образом, число платежей p в году и число начислений процентов m совпадают, т.е. p=m. Тогда для получения формулы расчета наращенной суммы можно воспользоваться аналогией с годовой рентой и одноразовым начислением процентов в конце года, для которой

$$S = R\frac{(1+i)^{n}-1}{i}.$$

Различие будет лишь в том, что все параметры теперь характеризуют ставку и платеж за период, а не за год.

Таким образом получаем

$$S = \frac{R}{m}\frac{(1+j/m)^{mn}-1}{j/m} = R\frac{(1+j/m)^{mn}-1}{j}. \qquad (4.6)$$

Рента p-срочная, p≥1, m≥1

Это самый общий случай p-срочной ренты с начислением процентов m раз в году, причем, возможно p≥m.

Первый член ренты R/p, уплаченный спустя 1/p года после начала, составит к концу срока вместе с начисленными на него процентами

$$\frac{R}{p}(1+\frac{j}{m})^{m(n-1/p)} \quad .$$

Второй член ренты к концу срока возрастет до

$$\frac{R}{p}(1+\frac{j}{m})^{m(n-2/p)},$$

и т.д. Последний член этой, записанной в обратном порядке геометрической прогрессии, равен R/p, ее знаменатель $(1+j/m)^{m/p}$, число членов nm.

В результате получаем наращенную сумму

$$S=\frac{R}{p}\frac{(1+j/m)^{(m/p)np}-1}{(1+j/m)^{m/p}}=R\frac{(1+j/m)^{mn}-1}{p((1+j/m)^{m/p}-1)}. \quad (4.7)$$

Отметим, что из нее легко получить все рассмотренные выше частные случаи, задавая соответствующие значения p и m.

Задачи

1. Средства в фонд поступают в виде постоянной годовой ренты постнумерандо в течение 5 лет. Размер разового платежа составляет 4 млн руб. На взносы начисляются проценты по сложной процентной ставке 15,8%. Определить величину фонда на конец срока.

2. В условиях примера 1 платежи выплачиваются поквартально.

3. В условиях примера 1 проценты начисляются непрерывно, при силе роста 18,5%.

4. В условиях примера 1 платежи выплачиваются поквартально и проценты начисляются непрерывно, при силе роста 18,5%.

4.1.4. Формулы современной величины

Обычная годовая рента

Пусть член годовой ренты равен R, процентная ставка i, проценты начисляются один раз в конце года, срок ренты n. Тогда дисконтированная величина первого платежа равна

$$R\frac{1}{1+i}=Rv ,$$

где $v=\dfrac{1}{1+i}$ – дисконтный множитель.

Приведенная к началу ренты величина второго платежа равна Rv^2 и т.д. В итоге приведенные величины образуют геометрическую прогрессию: Rv, Rv^2, Rv^3,..., Rv^n, сумма которой равна

$$A=Rv\frac{v^n-1}{v-1}=R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}=Ra_{n;i} , \qquad (4.8)$$

где $a_{n;i}=\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ – **коэффициент приведения ренты.** (4.9)

Как видим, коэффициент приведения ренты зависит только от двух параметров: срока ренты n и процентной ставки i. Поэтому его значения могут быть представлены в табличном виде. Такие таблицы можно найти в книгах или построить самим на компьютере.

Рента p-срочная, p≥1, m≥1

Аналогичные рассуждения позволяют получить формулу для расчета современной величины ренты в самом общем случае для произвольных значений p и m

$$A=R\frac{1-(1+j/m)^{-mn}}{p((1+j/m)^{m/p}-1)} , \qquad (4.10)$$

от которой нетрудно перейти к частным случаям при различных p и m.

Задачи

1. Найти современную стоимость 200 млн долл. выплачиваемы равными долями ежемесячно в течение 35 лет. Использовать сложную ставку 10% годовых, платежи относятся к концу периодов.

2. Принц Чарльз при разводе с принцессой Дианой выплатил ей 17 млн фунтов стерлингов в расчете, что она проживет еще 50 лет. Определите размер выплат, которые могла бы получать ежемесячно принцесса Диана. Процентную ставку принять в размере 10%.

4.1.5. Зависимость между современной величиной и наращенной суммой ренты

Пусть A – современная величина годовой ренты постнумерандо, а S – ее наращенная стоимость к концу срока n, p=1, m=1.

Покажем, что наращение процентов на сумму A за n лет дает сумму, равную S.

$$A(1+i)^n = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}(1+i)^n = R\frac{(1+i)^n - 1}{i} = S\,. \quad (4.11)$$

Отсюда же следует, что дисконтирование S дает A

$$Sv^n=A, \quad (4.12)$$

а коэффициенты дисконтирования и наращения ренты связаны соотношениями

$$a_{n;i}(1+i)^n = s_{n;i}, \quad (4.13)$$

$$s_{n;i}v^n = a_{n;i}\,. \quad (4.14)$$

4.1.6. Определение параметров финансовой ренты

Иногда при разработке контрактов возникает задача определения по заданной наращенной сумме ренты S или ее современной стоимости A остальных параметров ренты: R, n, i, p, m. Такие параметры как m и p обычно задаются по согласию двух подписывающих сторон. Остаются параметры R, n, i. Два из них задаются, а третий рассчитывается. Такие расчеты могут быть неоднократно повторены при различных значениях задаваемых параметров, пока не будет достигнуто согласие сторон.

Определение размера ежегодной суммы платежа R

В зависимости от того, какая обобщающая характеристика постоянной ренты задана S или A, возможны два варианта расчета

$$R = S / s_{n;i} \quad (4.15)$$

или

$$R = A / a_{n;i}\,. \quad (1.16)$$

Определение срока постоянной ренты

Рассмотрим решение этой задачи на примере обычной годовой ренты с постоянными заданными платежами. Решая исходные формулы для S и A,

$$S = R\frac{(1+i)^n - 1}{i} \quad и \quad A = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

относительно срока n, получаем соответственно следующие два выражения

$$n = \frac{\ln(\frac{S}{R}i + 1)}{\ln(1+1)} \quad и \quad n = \frac{-\ln(1-\frac{A}{R}i)}{\ln(1+1)}. \qquad (4.17)$$

Последнее выражение, очевидно, имеет смысл только при R>Ai.

Определение ставки процентов

Для того, чтобы найти ставку i, необходимо решить одно из нелинейных уравнений (опять предполагаем, что речь идет о постоянной годовой ренте постнумерандо) следующего вида:

$$S = R\frac{(1+i)^n - 1}{i} \quad и \quad A = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i},$$

которые эквивалентны двум другим

$$\frac{S}{R} = \frac{(1+i)^n - 1}{i} = s_{n;i} \quad и \quad \frac{S}{R} = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = a_{n;i}. \quad (4.18)$$

В этих уравнениях единственным неизвестным является процентная ставка i. Решение нелинейных уравнений может быть найдено лишь приближенно. Известно несколько методов решения таких уравнений: метод линейной интерполяции, метод Ньютона-Рафсона и др.

Задачи

1. Какой срок необходим для накопления 100 млн руб. при условии, что ежемесячно вносится на счет по 1 млн руб. и на накопления начисляются проценты по ставке 25% годовых.
2. Предполагается путем ежегодных взносов постнумерандо по 100 тыс. руб. в течение 7 лет. Создать фонд в размере 1 млн руб. Какова должна быть сложная процентная ставка?

4.1.7. Другие виды постоянных рент

Вечная рента

Под вечной рентой понимается последовательность платежей, число членов которой не ограничено, т.е. она выплачивается бесконечное число лет (например, выплаты по бессрочным облигационным займам). В этом случае наращенная сумма с течением времени возрастает бесконечно. А вот современная величина имеет вполне определенное конечное значение.

Рассмотрим, например, бесконечную постоянную годовую ренту постнумерандо (p=1, m=1). При $n\to\infty$

$$\lim A = \lim R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{R}{i}.$$

В общем случае, когда $p\geq 1$, $m\geq 1$ при $n\to\infty$

$$\lim A = \lim R\frac{1-(1+j/m)^{-mn}}{p((1+j/m)^{m/p}-1)} = \frac{R}{p((1+j/m)^{m/p}-1)}.$$

Если же $p\geq 1$, $m\geq 1$ и $p=m$, то при $n\to\infty$

$$\lim A = \lim R\frac{1-(1+j/m)^{-mn}}{p((1+j/m)^{m/p}-1)} = \frac{R}{j}.$$

Отложенная рента

Начало отложенной (или отсроченной) ренты отодвигается от момента заключения сделки на какой-то момент в будущем. Наращенная сумма такой ренты может быть подсчитана по тем формулам, которые нам уже известны. А ее современную величину можно определить в два этапа: сначала найти современную величину соответствующей немедленной ренты (эта сумма характеризует ренту на момент начала ее срока), а затем, с помощью дисконтирования этой величины, по принятой ставке в течение срока задержки привести ее к моменту заключения договора.

Например, если современная величина годовой немедленной ренты равна A, то современная величина отложенной на t лет ренты составит

$$A_t=Av^t,$$

где v^t – дисконтный множитель за t лет, $v=1/(1+i)<1$.

Рента пренумерандо

Рассмотрим теперь ренту, когда платежи производятся в начале каждого периода, – ренту пренумерандо. Различие между рентой постнумерандо и рентой пренумерандо заключается лишь в том, что у последней на один период начисления процентов больше. В остальном структура потоков с одинаковыми параметрами одинакова. Поэтому наращенные суммы обоих видов рент (с одинаковой периодичностью платежей и начисления процентов и размером выплат) тесно связаны между собой.

Если обозначить через $\ddot{S}$ наращенную сумму ренты пренумерандо, а через S, как и раньше, наращенную сумму соответствующей ренты постнумерандо, то в самом общем случае получим

$$\ddot{S} = S(1 + j/m)^{m/p}.$$

Точно так же для современной величины ренты пренумерандо и соответствующей ей ренты постнумерандо имеем следующее соотношение:

$$\ddot{A} = A(1 + j/m)^{m/p}.$$

Рента с платежами в середине периодов

Наращенная сумма ($S_{1/2}$) и современная стоимость ($A_{1/2}$) ренты с платежами в середине периодов и соответствующей ренты постнумерандо связаны так

$$S_{1/2}=S(1+j/m)^{m/p} \text{ и } A_{1/2}=A(1+j/m)^{m/(2p)}.$$

Задачи

1. Работник заключает с фирмой пенсионный контракт на 20 лет, согласно которому на счет работника в банке в конце каждого двухлетнего периода будет поступать по 1,5 тыс. руб. Определить наращенную сумму к концу действия контракта, если на поступающие суммы будут ежегодно начисляться сложные проценты по ставке 18% годовых.

2. Фирма собирается учредить фонд для ежегодной (в конце года) выплаты пособий своим работникам. Определите сумму, которую фирма должна поместить на депозит в банк, чтобы обеспе-

чить получение неограниченно долго в конце каждого года 12 тыс. руб., если: а) банк начисляет ежегодно сложные проценты по ставке 28%; б) ежеквартально сложные проценты по ставке 28%; в) непрерывные проценты с силой роста 28%.

3. Работник заключает с фирмой контракт, согласно которому в случае его постоянной работы на фирме до выхода на пенсию (в 56 лет) фирма обязуется перечислять в конце каждого года в течение 25 лет на счет работника в банке одинаковые суммы, которые обеспечат работнику после выхода на пенсию в конце каждого года дополнительные выплаты в размере 8000 руб. в течение 18 лет. Какую сумму ежегодно должна перечислять фирма, если работнику 40 лет и предполагается, что банк гарантирует годовую процентную ставку 20%?

4. Вы имеете возможность инвестировать одинаковую сумму денег в один из двух проектов. Первый проект позволит получить бессрочную ренту постнумерандо с ежегодными выплатами в размере 20 тыс. руб. Второй проект в течение двух лет принесет соответственно 40 тыс. руб. и 100 тыс. руб. Какой из проектов лучше, если процентная ставка составляет 25% годовых?

4.1.8. Анализ переменных потоков платежей

Нерегулярный поток платежей

Временные интервалы между последовательными платежами в нерегулярном потоке могут быть любыми, не постоянными, любыми могут быть также и члены потока. Обобщающие характеристики в этом случае получают только путем прямого счета:

наращенная сумма $S = \sum_t R_t (1+i)^{n-t}$;

современная величина $A = \sum_t R_t v^t$,

где t – время от начала потока платежей до момента выплаты; R_t – сумма платежа.

Переменная рента с разовыми изменениями размеров платежа

Пусть общая продолжительность ренты n и этот срок разбит на k участков продолжительностью n_1, n_2, … , n_k, в каждом из которых член ренты постоянен и равен R_t, t=1, 2, …, k, но изменяется от участка к участку.

Тогда наращенная сумма для годовой ренты постнумерандо (p=1, m=1) вычисляется по формуле

$$S = R_1 s_{n_1;i}(1+i)^{n-n_1} + R_2 s_{n_2;i}(1+i)^{n-(n_1+n_2)} + \ldots + R_k s_{n_k;i}\,,$$

а современная величина как

$$S = R_1 a_{n_1;i} + R_2 a_{n_2;i} v^{n_1} + \ldots + R_k a_{n_k;i} v^{n-n_k}\,.$$

Рента с постоянным абсолютным приростом платежей

Пусть размер платежей изменяется с постоянным приростом a (положительным или отрицательным). Если рента годовая постнумерандо, то размеры последовательных платежей составят R, R+ a, R+2 a,…, R+(n-1) a. Величина t-го члена равна Rt=R+(t-1) a.

Тогда современная стоимость такой ренты равна

$$A = \left(R + \frac{a}{i} \right) a_{n;i} - \frac{nav^n}{i}\,,$$

а наращенная сумма

$$S = \left(R + \frac{a}{i} \right) s_{n;i} - \frac{na}{i}\,.$$

В случае p-срочной ренты с постоянным приростом платежей (m=1) последовательные выплаты равны

$$R,\ \ R + \frac{a}{i},\ \ R + 2\frac{a}{i}, \ldots, R + (pn-1)\frac{a}{i}\,,$$

где a – прирост платежей за год; R – первый платеж, т.е.

$$R_t = R + (t-1)\frac{a}{p}\,,$$

где t – номер члена ряда, t=1, 2, … , np.

Современная величина

$$A = \sum_{t=1}^{pn} \left(R + \frac{a(t-1)}{p} \right) v^{t/p}\,,$$

а наращенная сумма

$$S = \sum_{t=1}^{pn} \left(R + \frac{a(t-1)}{p} \right) (1+i)^{n-t/p}\,.$$

Ренты с постоянным относительным изменением платежей

Если платежи годовой ренты изменяются с постоянным темпом роста q, то члены ренты будут представлять собой ряд: R, Rq, … , Rq^{n-1}. Величина t-го члена равна $R_t=Rq^{t-1}$.

Для того, чтобы получить современную величину, дисконтируем эти величины Rv, Rqv^2,.., $Rq^{n-1}v^n$. Мы получили геометрическую прогрессию.

Сумма этих величин равна

$$A = Rv\frac{q^n v^n - 1}{qv - 1} = R\frac{q^n v^n - 1}{q - (1+i)}.$$

Наращенная сумма

$$S = A(1+i)^n = R\frac{q^n - (1+i)^n}{q - (1+i)}.$$

Для p-срочной ренты (m=1):

$$A = R\frac{q^{np} v^n - 1}{q - (1+i)^{1/p}},$$

$$S = R\frac{q^{np} - (1+i)^n}{q - (1+i)^{1/p}}.$$

4.1.9. Конверсия аннуитетов

В практике иногда возникает необходимость изменить условия финансового соглашения, предусматривающего выплату аннуитетов, т.е. конвертировать ренту. Рассмотрим некоторые типичные ситуации.

Выкуп ренты

Выкуп ренты представляет собой замену предстоящей последовательности выплат единовременным платежом. Из принципа финансовой эквивалентности следует, что в этом случае вместо ренты выплачивается ее современная величина.

Рассрочка платежей

Это замена единовременного платежа аннуитетом. Для соблюдения принципа финансовой эквивалентности современную величину ренты следует приравнять величине заменяемого платежа. Далее задача обычно сводится к определению члена ренты или ее срока при остальных заданных параметрах.

Замена немедленной ренты на отсроченную

Пусть имеется годовая немедленная рента с параметрами R_1, n_1, i и ее необходимо заменить на отсроченную на t лет ренту, т.е. начало ренты сдвигается на t лет. Обозначим параметры отложенной ренты как R_2, n_2, i. Ставку процентов при этом будем считать неизменной. Тогда могут быть два типа расчетных задач.

1. Задан срок n_2, требуется определить размер R_2.

Исходим из принципа финансовой эквивалентности результатов, т.е. из равенства современных стоимостей заменяемого и заменяющего потоков: $A_1=A_2$. Раскрывая это равенство, получаем

$$R_1 a_{n_1;i} = R_2 a_{n_2;i} \nu^{-t},$$

т.е.

$$R_2 = R_1 \frac{a_{n_1;i}}{a_{n_2;i}} (1+i)^t .$$

В частном случае, когда $n_1=n_2=n$, решение упрощается и принимает следующий вид:

$$R_2=R_1(1+i)t.$$

2. Размеры платежей заданы, требуется определить срок n2. Рассмотрим частный случай, когда платежи годовой ренты остаются теми же $R_2=R_1=R$.

Исходя из равенства современных стоимостей,

$$Ra_{n_1;i} = Ra_{n_2;i} \nu^{-t},$$

где

$$a_{n,i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i},$$

последовательно приходим к выражению

$$n_2 = \frac{-\ln\left[1-\left(1-(1+i)^{-n_1}\right)(1+i)^t\right]}{\ln(1+i)}.$$

Изменение продолжительности ренты

Пусть имеется годовая обычная рента и у партнеров есть договоренность об изменении срока ренты, т.е. вместо срока n_1, принят новый срок n_2. Тогда для эквивалентности финансовых результатов требуется изменение и размера платежа. Найдем его из равенства

$$R_1 a_{n_1;i} = R_2 a_{n_2;i},$$

из которого следует, что

$$R_2 = R_1 \frac{a_{n_1;i}}{a_{n_2;i}} = R_1 \frac{1-(1+i)^{-n_1}}{1-(1+i)^{-n_2}}.$$

Общий случай изменения параметров ренты

В случае одновременного изменения нескольких параметров ренты, исходим из равенства $A_1=A_2$. Если рассматривается годовая рента, то приводится к виду

$$A_1 = R_2 \frac{1-\left(1+\dfrac{j_2}{m_2}\right)^{-m_2 n_2}}{p_2\left[\left(1+\dfrac{j_2}{m_2}\right)^{-m_2 n_2}-1\right]},$$

где A_1 подсчитывается заранее, ряд параметров задается по согласованию сторон, и один параметр находится из этого уравнения.

Объединение рент

В случае объединения (консолидации) нескольких рент в одну, из принципа финансовой эквивалентности обязательств до и после операции следует, что

$$A = \sum_k A_k,$$

где A– современная величина заменяющей ренты;

A_k – современная величина k-й объединяемой ренты.

Задачи

1. Найти поправочный множитель для расчета современной стоимости ренты с платежами: а) в середине периода; б) в начале периода. Условия ренты: p=12, m=1, i=10%.

2. Срок годовой ренты постнумерандо 10 лет. Пусть рента делится между двумя участниками во времени на условиях: а) каждый участник получает 50% капитализированной стоимости ренты; б) рента выплачивается сначала первому участнику, затем второму (2,98 года, 7 лет).

3. Рассчитайте современную стоимость годовой ренты, если процентная ставка 20% годовых, размер годового платежа 1 тыс.руб., срок ренты: а) 100 лет; б) бессрочная.

4. Выкупить вечную ренту с параметрами R=5 млн руб., p=2, постнумерандо, i=25%. (21,180 млн руб.).

5. Сравнить два варианта строительства объекта. Первый вариант: разовое вложение 6 млн.руб. и капитальный ремонт стоимостью 0,8 млн руб. каждые 5 лет. Второй вариант: разовые затраты 7 млн руб. и капитальный ремонт стоимостью 0,4 млн руб. каждые 10 лет. Временной горизонт 50 лет. Процентная ставка: а) 10% годовых; б) 20%.

4.2. Кредитные операции

Доходы от финансово-кредитных операций и различных коммерческих сделок могут быть представлены в виде: процентов, комиссионных, дисконта при учете векселей, дохода от ценных бумаг (дивиденда, платежа по купону, курсовой разности). Причем в одной операции может быть предусмотрено несколько видов дохода.

Отметим, что при получении кредита должник может оплачивать комиссионные или другие разовые расходы (посреднику), которые увеличивают цену кредита, но не меняют доходность кредитора.

4.2.1. Долгосрочные кредиты

Рассмотрим баланс долгосрочной финансово-кредитной операции, используя контур финансовой операции (начисление процентов по сложной ставке) (рис.4.1).

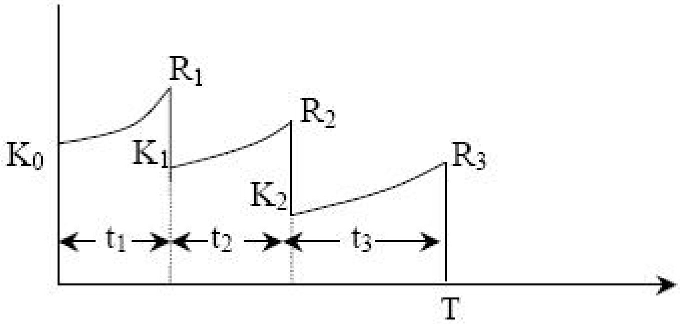


Рис. 4.1. Контур кредитной операции

Для контура, показанного на рис.4.1, получим следующие расчетные формулы:

$$K_1 = K_0\,(1+i)^{t1} - R_1;$$
$$K_2 = K_1\,(1+i)^{t2} - R_2;$$
$$K_2(1+i)^{t3} - R_3 = 0,$$

где K_0 – первоначальная сумма долга; R_1 и R_2 –промежуточные платежи; R_3 – последний платеж. Последнее уравнение является балансовым. Выразим K_2 через K_0 и подставим его в балансовое уравнение

$$[(K_0\, q^{t1} - R_1)\, q^{t2} - R_2\,]q^{t3} - R_3 = 0,$$

которое нетрудно привести к следующему виду:

$$K_0\, q^T - (R_1\, q^{t2+t3} + R_2\, q^{t3} + R_3) = 0\ ,$$

где T=Σtj, q=1/(1+i).

В этом уравнении методологически ясно представлены два процесса: наращение первоначальной задолженности за весь период и наращение погасительных платежей за срок от момента платежа до конца срока операции. Таким образом, полученное уравнение отражает баланс сумм, наращенных на момент времени T. Умножим это уравнение на дисконтный множитель v^T.

$$K_0 - (R_1\, v^{t1} + R_2\, v^{t1+t2} + R_3\, v^T) = 0.$$

В этом виде уравнение выражает равенство суммы современных величин погасительных платежей сумме кредита, т.е. баланс современных величин.

Эти уравнения нетрудно обобщить на случай n погасительных платежей. Методы оценки показателей доходности для разных видов ссудно-кредитных операций основываются на соответствующем балансовом уравнении. Если погасительные платежи осуществляются периодически постоянными или переменными суммами, то они образуют постоянную или переменную ренту, параметры которых могут быть рассчитаны обычным образом.

4.2.2. Доходность ссудных и учетных операций, предполагающих удержание комиссионных

Ссудные операции. За открытие кредита, учет векселей и другие операции кредитор часто взимает комиссионные, которые повышают доходность операций, так как размер фактически выданной ссуды сокращается.

Пусть ссуда в размере D выдана на срок n, и при ее выдаче из нее удерживаются комиссионные в размере G. Фактически выданная ссуда равна D-G.

Рассмотрим сначала сделки с начислением простых процентов по ставке i. Обозначим через $i_{э,пр}$ фактическую доходность, выраженную через ставку простых процентов, и пусть g – относительная величина комиссионных в сумме кредита, т.е. G=Dg. Тогда из балансового уравнения

$$D(1-g)(1+n\,i_{э,пр})=D(1+ni)$$

находим

$$i_{э,пр} = \frac{1+ni}{(1-g)n} - \frac{1}{n}.$$

Теперь рассмотрим долгосрочную операцию, когда ссуда с удержанием комиссионных выдается под сложные проценты. Тогда балансовое уравнение имеет вид

$$(D-G)(1+i_{э,\,сл})^n=D(1+i)^n,$$

так как G=Dg, то

$$D(1-g)(1+i_{э,\,сл})^n=D(1+i)^n.$$

Откуда

$$i_{э,сл} = \frac{1+ni}{\sqrt[n]{(1-g)}} - 1.$$

Учетные операции. Рассмотрим полную доходность банка при осуществлении операции учета с удержанием комиссионных.

Пусть при учете применяется простая учетная ставка. После удержания комиссионных и дисконта заемщик получает сумму

D-Dnd-G. Если G=Dg, то эта сумма составит D(1-nd-g). Балансовое уравнение принимает вид

$$D(1-nd-g)(1+ni_{э,\ пр})=D,$$

откуда полная доходность

$$i'_{э,сл} = \frac{1+ni}{(1-nd-g)n} - \frac{1}{n}.$$

4.2.3. Форфейтная кредитная операция

Эта операция получила распространение во внешней торговле, но может применяться и во внутренней торговле страны. Потребность в такой операции возникает, когда покупатель приобретает товар не имея соответствующих денежных средств, а продавец также не может продать товар в кредит. Тогда в рамках форфейтной операции покупатель выписывает комплект векселей на сумму, равную стоимости товара плюс проценты за кредит, который формально предоставляется покупателю продавцом. Сроки векселей равномерно распределены во времени обычно через равные интервалы (полугодия). Продавец сразу же после получения портфеля векселей учитывает его в банке без права оборота на себя, получая полностью деньги за свой товар. Банк, форфетируя сделку, берет весь риск на себя. Иногда в качестве четвертого агента сделки может выступать банк покупателя, гарантирующий погашение задолженности по векселям. Поскольку платежи по векселям представляют собой постоянную ренту, то и расчет таких операций опирается на уже полученные нами результаты.

4.2.4. Ипотечные ссуды

Ссуды под залог недвижимости являются одним из важных источников долгосрочного финансирования. В такой сделке владелец имущества получает ссуду у залогодержателя и в качестве обеспечения возврата долга передает последнему право на преимущественное удовлетворение своего требования из стоимости заложенного имущества в случае отказа от погашения или неполного погашения задолженности. Сумма ссуды обычно несколько меньше оценочной стоимости закладываемого имущества. В США, например, запрещено, за некоторыми исключениями, выдавать ссуды, превышающие 80% оценочной стоимости имущества. Наиболее распространенными объектами залога являются жилые дома, фермы, земля, другие виды недвижимости. Ипотечные ссуды выдаются коммерческими банками и специальными ипотечными банками, ссудно-сберегательными ассоциациями. Характерной особенностью ипотечных ссуд является длительный срок погашения – в США до 30 и более лет. Поскольку платежи по обслуживанию долга, т.е. по уплате процентов и погашению предоставленного кредита, являются регулярными, то и расчет ипотеки сводится к расчету параметров того или иного вида ренты. Основной задачей расчета является разработка планов погашения и остатка задолженности на любой момент времени.

Существует несколько видов ипотечных ссуд, различающихся в основном методами погашения задолженности.

Стандартная ипотека

Наиболее распространена стандартная или типовая ипотечная ссуда, существо которой сводится к тому, что заемщик получает от залогодержателя, т.е. кредитора, некоторую сумму под залог недвижимости. Этот кредит он погашает вместе с процентами, равными, обычно ежемесячными, взносами.

Ссуды с ростом платежей

В этом случае предусматривается постоянный рост расходов по обслуживанию долга в первые 5–10 лет. Затем погашение производится постоянными взносами. Расчет сводится к применению формул для рент с переменными и постоянными платежами в соответствующие интервалы времени.

Ссуды с периодическим увеличением взносов

По согласованному графику каждые 3–5 лет сумма взносов увеличивается. Таким образом поток платежей представляет собой последовательность постоянных рент.

Ссуда с льготным периодом

В такой ипотеке предполагается наличие льготного периода, в течение которого выплачиваются только проценты по долгу.

Ссуда с залоговым счетом

В этой схеме предполагается, что клиент в начале операции вносит на специальный (залоговый) счет некоторую сумму денег. На начальных этапах он выплачивает кредитору погасительные взносы, которые меньше тех, что необходимы по стандартной ипотеке. Недостающие суммы добавляются путем списания с залогового счета, пока он не иссякнет. Таким образом кредитор все время получает постоянные взносы, как и в стандартной ипотеке. А взносы должника характеризуются ростом во времени.

Ссуды с периодическим изменением процентной ставки

Эта схема предполагает, что стороны каждые 3–5 лет пересматривают уровень процентной ставки с целью адаптации к условиям рынка.

Ссуда с переменной процентной ставкой

Здесь уровень ставки привязывается к какому-либо распространенному финансовому показателю или индексу. Пересмотр обычно осуществляется по полугодиям. Чтобы избежать чрезмерных скачков, предусматриваются верхняя и нижняя границы разовых корректировок (например не более 2%).

Ипотека с обратным аннуитетом

Предназначена для заклада домов пожилыми владельцами (продажа в рассрочку с правом дожития). Цель такого залога – получение систематического дохода владельцем жилища.

4.2.5. Льготные займы и кредиты

В ряде случаев долгосрочные займы и кредиты выдаются на льготных для заемщика условиях. Низкая процентная ставка, по сравнению с рыночной, в сочетании с большим сроком и наличием льготного периода, дают должнику существенную выгоду, которую можно рассматривать как субсидию. Такая субсидия оказывается как на международном уровне в рамках финансовой помощи развивающимся странам, так и внутри страны для поддержки отдельных отраслей или производств. Проблема определения размера этой помощи сводится к оценке грант-элемента.

Грант-элемент – это условная субсидия кредитора, связанная с применением более низкой процентной ставки. Грант-элемент определяется в двух видах: в виде абсолютной и относительной величины.

Абсолютный грант-элемент рассчитывается как разность суммы займа и современной величины платежей по погашению займа. Проблема здесь состоит в выборе ставки процентов для расчета современной величины платежей. Обычно используют ставку, применяемую на рынке долгосрочных кредитов.

Абсолютный грант-элемент находится как

$$W=D-G,$$

а относительный грант-элемент как

$$w=\frac{W}{D}=1-\frac{G}{D},$$

где W – абсолютный грант-элемент;

w – относительный грант-элемент;

D – сумма кредита;

G – современная величина платежей, рассчитанная по реальной ставке рынка кредитов.

Вопросы для самопроверки

1. Сущность финансовой ренты.

2. Какими параметрами характеризуется финансовая рента?

3. Какие виды финансовых рент вы знаете? Коротко раскройте их сущность. Назовите обобщающие характеристики финансовых рент и укажите способы их определения.

4. Укажите сущность величин, входящих в формулы для определения:

– наращенной величины постоянной финансовой ренты с выплатами в конце каждого года;

– современной величины годовой обычной ренты.

5. Модификация формул финансовых рент с выплатами несколько раз в год.

6. Определение члена ренты: при заданном значении наращенной суммы; при заданном значении современной величины.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Несмотря на кажущуюся простоту расчетов, методы финансовых вычислений исключительно важны для решения практических задач. Умение ориентироваться в методах, привлекаемых для получения ряда оценок финансовых операций, можно использовать для обоснования принимаемых решений в области кредитования и финансирования. Рассмотренные методы позволяют обдуманно составлять договор финансовой операции (определить ставку, частоту, схему начисления процентов, сделать поправку на инфляцию и др.), что поможет избежать значительных финансовых потерь.

Необходимость введения данного курса также вызвана тем, что в ряде дисциплин (финансовый менеджмент, математические методы финансового анализа, инвестиционный анализ, инвестиционное проектирование, рынок ценных бумаг и пр.) необходимы знания теоретических основ финансовых расчетов. Выделение курса "Финансовой математики" позволит не только более глубоко и последовательно изучить теоретические основы финансовых расчетов и получить практические навыки по решению задач, излагаемых в смежных курсах, но и тем самым увеличивает долю времени на изучение конкретной экономической дисциплины

ГЛОССАРИЙ

Аннуитет – см. **финансовая рента.**

Актуарный метод расчета – один из двух методов расчета процентов и определения остатка долга при погашении краткосрочной задолженности частичными платежами (см. *правило торговца*).

Брутто-ставка – ставка процентов, скорректированная на инфляцию.

Дисконт или **скидка** – проценты в виде разности $D=S-P$, где S – сумма на конец срока; P – сумма на начало срока.

Дисконтирование суммы S – расчет ее текущей стоимости P.

Дисконтный множитель – коэффициент, показывающий, какую долю составляет первоначальная сумма ссуды в окончательной величине долга (наращенной сумме).

Индекс покупательной способности денег – равен обратной величине индекса цен.

Индекс цен показывает во сколько раз выросли цены за указанный промежуток времени.

Инфляционная премия – корректировка ставки процентов для компенсации обесценения денег.

Капитализация процентов – присоединение начисленных процентов к сумме, которая служила базой для их определения.

Контур финансовой операции – графическое изображение процесса погашения краткосрочной задолженности частичными (промежуточными) платежами.

Коэффициент наращения ренты – отношение наращенной суммы ренты к сумме ее годовых платежей или к размеру отдельного платежа.

Коэффициент приведения ренты – отношение современной стоимости ренты к сумме ее годовых платежей или к размеру отдельного платежа.

Математическое дисконтирование – вид дисконтирования, представляющий собой решение задачи, обратной наращению первоначальной ссуды.

Множитель наращения – коэффициент, который показывает во сколько раз наращенная сумма больше первоначальной.

Наращение или **рост** первоначальной суммы – процесс увеличения денег в связи с присоединением процентов к сумме долга.

Наращенная сумма потока платежей – сумма всех членов последовательности платежей с начисленными на них процентами к концу срока ренты.

Наращенная сумма ссуды (долга, депозита, других видов инвестированных средств) – первоначальная ее сумма вместе с начисленными на нее процентами к концу срока.

Переменная рента – рента с изменяющимися членами.

Период начисления – интервал времени, к которому относится (применяется) процентная ставка.

Период ренты – временной интервал между двумя соседними платежами.

Постоянная рента – рента с равными членами.

Поток платежей – ряд последовательных выплат и поступлений.

Правило торговца – один из двух методов расчета процентов и определения остатка долга при погашении краткосрочной задолженности частичными платежами (см*. актуарный метод расчета*).

Практика расчета простых процентов различает три варианта расчета: 1) точные проценты с точным числом дней ссуды (британская практика); 2) обыкновенные проценты с точным числом дней ссуды (французская практика); 3) обыкновенные проценты с приближенным числом дней ссуды (германская практика).

Приведение – это определение любой стоимостной величины на некоторый момент времени. Если некоторая сумма приводится к более ранней дате, чем текущая, то применяется дисконтирование, если же речь идет о более поздней дате, то – наращение.

Принцип неравноценности денег – деньги, относящиеся к разным моментам времени, имеют различную текущую стоимость.

Процент обыкновенный или **коммерческий** получают, когда за базу измерения времени берут год, условно состоящий из 360 дней (12 месяцев по 30 дней в каждом).

Процент точный получают, когда за базу измерения времени берут действительное число дней в году: 365 или 366.

Процентная ставка – отношение суммы процентных денег, выплачиваемых за фиксированный отрезок времени к величине ссуды. Ставка измеряется в процентах, в виде десятичной или натуральной дроби.

Процентные деньги или, кратко, **проценты** в финансовых расчетах это абсолютная величина дохода от предоставления денег в долг в любой форме.

Проценты дискретные предполагают, что начисление процентов производится дискретно, т.е. в отдельные (обычно равноотстоящие) моменты времени, причем, в качестве периодов начисления принимают год, полугодие, квартал, месяц.

Проценты непрерывные предполагают непрерывное начисление процентов во времени.

Реинвестирование – неоднократное повторение процесса инвестирования суммы депозита вместе с начисленными на нее в предыдущем периоде процентами.

Рента финансовая – см. **финансовая рента.**

Рента верная – рента, члены которой подлежат безусловной выплате.

Рента немедленная – рента, срок которой начинается немедленно.

Рента отложенная или **отсроченная** – рента, начало срока которой запаздывает.

Рента постнумерандо (или **обычная рента**) – рента, платежи которой осуществляются в конце каждого периода.

Рента пренумерандо – рента, платежи которой осуществляются в начале каждого периода.

Рента *p*-срочная – рента, предусматривающая *p* равных платежей в году.

Рента условная – рента, выплата членов которой ставится в зависимость от наступления некоторого случайного события.

Сила роста δ представляет собой номинальную ставку процентов при $m \to \infty$, где *m* – число начислений процентов в году.

Современная величина (**текущая стоимость**) суммы *S* – величина *P*, найденная дисконтированием.

Современная величина потока платежей – сумма всех его членов, дисконтированных (приведенных) на некоторый момент времени, совпадающий с началом потока платежей или предшествующий ему.

Срок ренты – время, измеренное от начала финансовой ренты до конца ее последнего периода.

Ставка номинальная – годовая ставка u1089 сложных процентов *j* при числе периодов начисления в году *m*. Тогда за каждый период проценты начисляют по ставке *j/m.*

Ставка процентов номинальная учетная – сложная годовая учетная ставка *f*, применяется при дисконтировании *m* раз в году. Тогда в каждом периоде, равном *1/m* части года, дисконтирование осуществляется по сложной учетной ставке *f/m.*

Ставка процентов простая – это ставка, которая применяется к одной и той же начальной сумме на протяжении всего срока ссуды.

Ставка процентов сложная – это ставка, которая применяется к сумме с начисленными в предыдущем периоде процентами.

Ставка процентов сложная учетная – дисконтирование по сложной годовой учетной ставке осуществляется по формуле $P=S(1-d_{сл})n$, где $d_{сл}$ – сложная годовая учетная ставка; *S* – дисконтируемая величина; *P* – современная стоимость *S*; *n* – срок дисконтирования.

Ставка учетная – ставка, применяемая для расчета процентов при учете векселей.

Ставка эффективная – годовая ставка сложных процентов, приводящая к тому же финансовому результату, что и *m* –разовое наращение в год по ставке *j/m*, где *j* – номинальная ставка.

Ставка эффективная учетная – сложная годовая учетная ставка, эквивалентная (по финансовым результатам) номинальной учетной ставке, применяемой при заданном числе дисконтирований в году *m.*

Уравнение эквивалентности – уравнение, в котором сумма заменяемых платежей, приведенных к какому-либо одному моменту времени, приравнивается сумме платежей по новому обязательству, приведенных к той же дате. Разрабатывается при изменении условий контракта.

Учет, банковский или коммерческий учет – учет (покупка) векселей заключается в том, что банк до наступления срока платежа по векселю или др. платежному обязательству покупает его у владельца (кредитора) по цене ниже той суммы, которая должна быть выплачена по нему в конце срока, т.е. приобретает (учитывает) его с дисконтом.

Член ренты – величина каждого отдельного платежа ренты.

Финансовая рента или **аннуитет** – поток платежей**,** все члены которого положительные величины, а временные интервалы постоянны.

Формула наращения по простым процентам или, кратко, формула простых процентов $S=P(1+ni)$, где *S* – наращенная сумма; *P* – первоначальная сумма (ссуда); *n* – срок начисления процентов (срок ссуды); *i* – ставка процентов за единицу времени.

Форфейтная кредитная операция (операция а форфэ) – операция, в которой участвуют продавец, покупатель и банк-кредитор. Покупатель выписывает продавцу комплект векселей на сумму стоимости товара плюс проценты за кредит, сроки векселей равномерно распределены во времени. Продавец сразу же учитывает портфель векселей в банке без права оборота на себя. Банк, форфетируя сделку, берет весь риск на себя.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Порядковые номера дней невисокосного года

Ден	Янв	Фев	Мар	Апр	Май	Июнь	Июль	Авг	Сен	Окт	Ноя	Дек
1	1	32	60	91	121	152	182	213	244	274	305	335
2	2	33	61	92	122	153	183	214	245	275	306	336
3	3	34	62	93	123	154	184	215	246	276	307	337
4	4	35	63	94	124	155	185	216	247	277	308	338
5	5	36	64	95	125	156	186	217	248	278	309	339
6	6	37	65	96	126	157	187	218	249	279	310	340
7	7	38	66	97	127	158	188	219	250	280	311	341
8	8	39	67	98	128	159	189	220	251	281	312	342
9	9	40	68	99	129	160	190	221	252	282	313	343
10	10	41	69	100	130	161	191	222	253	283	314	344
11	11	42	70	101	131	162	192	223	254	284	315	345
12	12	43	71	102	132	163	193	224	255	285	316	346
13	13	44	72	103	133	164	194	225	256	286	317	347
14	14	45	73	104	134	165	195	226	257	287	318	348
15	15	46	74	105	135	166	196	227	258	288	319	349
16	16	47	75	106	136	167	197	228	259	289	320	350
17	17	48	76	107	137	168	198	229	260	290	321	351
18	18	49	77	108	138	169	199	230	261	291	322	352
19	19	50	78	109	139	170	200	231	262	292	323	353
20	20	51	79	110	140	171	201	232	263	293	324	354
21	21	52	80	111	141	172	202	233	264	294	325	355
22	22	53	81	112	142	173	203	234	265	295	326	356
23	23	54	82	113	143	174	204	235	266	296	327	357
24	24	55	83	114	144	175	205	236	267	297	328	358
25	25	56	84	115	145	176	206	237	268	298	329	359
26	26	57	85	116	146	177	207	238	269	299	330	360
27	27	58	86	117	147	178	208	239	270	300	331	361
28	28	59	87	118	148	179	209	240	271	301	332	362
29	29		88	119	149	180	210	241	272	302	333	363
30	30		89	120	150	181	211	242	273	303	334	364
31	31		90		151		212	243		304		365

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Четыркин Е.М. Финансовая математика: учебник. 4-е изд. – М.: Дело, 2004.

3. Лукашин Ю.П. Финансовая математика. – М.: Московская финанс.-промышл. академия, 2004.

2. Четыркин Е.М. Методы финансовых и коммерческих расчетов. – 2-изд. испр. и доп. – М.: Дело Лтд, 1995. – 320 с.

3. Кочович Е. Финансовая математика: Теория и практика финансово-банковских расчетов / Пер. с серб.; Предисл. Е.М.Четыркина. – М.: Финансы и статистика, 1995.

4. Ковалев В.В. Сборник задач по финансовому анализу: учеб. пособие. – М.: Финансы и статистика, 1997. – 128 с.

5. Ковалев В.В. Методы оценки инвестиционных проектов. – М.: Финансы и статистика, 1998. – 144 с.

6. Балабанов И.Т. Сборник задач по финансам и финансовому менеджменту. – М.: Финансы и статистика, 1997. – 78 с.

7. Уланов В.А. Сборник задач по курсу финансовых вычислений / Под ред. проф. В.В. Ковалева. – М.: Финансы и статистика, 2000.

СОДЕРЖАНИЕ