Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И.Носова

Т.Г. Кузина
О.С. Андросенко
Т.В. Морозова
О.В. Петрова

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Утверждено Редакционно-издательским советом университета в качестве практикума

МАГНИТОГОРСК
2010

УДК 513. 013 (075)

Рецензенты:

Заведующая кафедрой математического анализа
ГОУ ВПО «Магнитогорский государственный университет»,
профессор, кандидат физико-математических наук
Т.К. Плышевская

Доцент кафедры прикладной математики
и вычислительной техники
ГОУ ВПО «Магнитогорский государственный университет»,
кандидат физико-математических наук
В.В. Дубровский

Кузина Т.Г., Андросенко О.С., Морозова Т.В., О.В. Петрова
Аналитическая геометрия: практикум. – Магнитогорск: ГОУ ВПО «МГТУ», 2010. – 114 с.

Практикум по решению задач аналитической геометрии для студентов экономических специальностей по дисциплине «Математика», изучающих раздел «Аналитическая геометрия», предназначен для выполнения индивидуальных контрольных работ студентами заочной формы обучения и типовых расчетов студентов очной формы обучения.

УДК 513. 013 (075)

ВВЕДЕНИЕ

Практикум предназначен для студентов экономических специальностей, изучающих раздел «Аналитическая геометрия» курса высшей математики, которая служит фундаментальной базой экономического образования. Он может быть использован для закрепления теоретического материала на практических занятиях и для самостоятельной работы студентов.

1. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

1.1. Уравнения прямой на плоскости. Простейшие задачи

Пусть на плоскости задана система координат. Рассмотрим уравнение вида

$$F(x, y) = 0. \qquad (1.1)$$

Это равенство, если оно выполняется не для всех пар чисел x и y, называется уравнением некоторой линии l в заданной системе координат Oxy. Уравнение (1.1) определяет или задает линию l.

Известно, что любое линейное уравнение с двумя переменными определяет прямую линию на плоскости.

Чтобы написать уравнение прямой l, ее надо задать. Существуют разные способы задания прямой, что приводит к различным по форме уравнениям, которые равносильны между собой, так как имеют одно и то же множество решений – координаты точек прямой l.

Зададим прямую l при помощи точки $M_0(x_0, y_0)$, принадлежащей данной прямой, и ненулевого вектора $\overline{N} = (A, B)$, перпендикулярного этой прямой (рис. 1.1).

Эти условия однозначно определяют прямую, так как через точку перпендикулярно вектору можно провести только одну прямую.

Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка прямой l. Так как $M(x, y) \in l$, то $\overline{M_0M} \perp \overline{N}$ и $\overline{M_0M} \cdot \overline{N} = 0$, т.е.

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \;. \qquad (1.2)$$

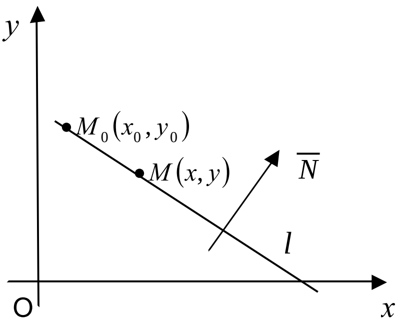


Рис. 1.1

Каждый ненулевой вектор $\overline{N} = (A, B)$, перпендикулярный данной прямой, называется ее *нормальным вектором*.

Уравнение (1.2) называется *уравнением прямой, заданной с помощью нормального вектора и точки*.

Зададим прямую l при помощи двух точек $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, принадлежащих этой прямой (рис.1.2).

Эти условия однозначно определяют прямую, так как через две заданные точки можно провести только одну прямую.

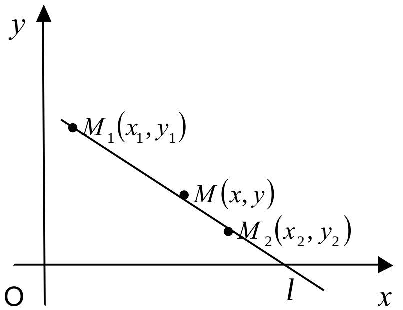


Рис. 1.2

Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка прямой l.

Так как $M(x, y) \in l$, то $\overline{M_0M} \parallel \overline{M_1M_2}$ и

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \qquad (1.3)$$

Уравнение (1.3) называется *«уравнением прямой, проходящей через две заданные точки»*.

Уравнения (1.2) и (1.3) с помощью тождественных преобразований приводятся к равносильному виду

$$Ax + By + C = 0. \qquad (1.4)$$

Уравнение (1.4) называется *общим уравнением* прямой линии. Здесь A, B – координаты нормального вектора $\overline{N}$, C – произвольное число. Некоторые коэффициенты могут равняться нулю, однако, хотя бы одно из чисел A или B должно быть отлично от нуля, иначе в уравнении исчезнут обе текущие координаты x и y.

Если в (1.4) какой-либо из коэффициентов равен нулю, то:

1) при $C=0$ $y=-\dfrac{A}{B}x$ – прямая, проходящая через начало координат;

2) при $B=0\,(A\neq 0)$ $x=-\dfrac{C}{A}=a$ – прямая, параллельная оси Oy;

3) при $A=0$ $(B\neq 0)$ $y=-\dfrac{C}{B}=в$ – прямая, параллельная оси Ox;

4) при $B=C=0$ $x=0$ – ось Oy;

5) при $A=C=0$ $y=0$ – ось Ox.

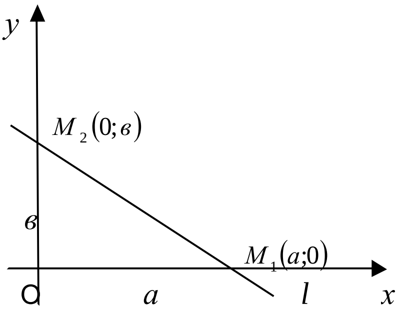


Рис. 1.3

Если ни один из коэффициентов уравнения (1.4) не равен нулю, то его можно преобразовать к виду

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{в}=1, \qquad (1.5)$$

где $a=-\dfrac{C}{A}$ и $в=-\dfrac{C}{B}$ – величины направленных отрезков, которые отсекает прямая на осях координат (рис. 1.3.).

Уравнение (1.5) называется *уравнением прямой «в отрезках»*.

Из уравнения (1.4) можно выразить переменную y как функцию от аргумента x при $B\neq 0$

$$y=kx+в. \qquad (1.6)$$

Уравнение (1.6) известно из элементарной математики, его называют *уравнением с угловым коэффициентом*.

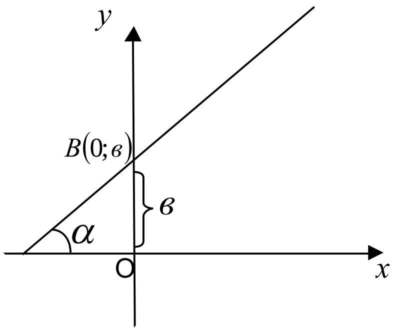


Рис. 1.4

Угловой коэффициент $k = tg\alpha$, где α – меньший из неотрицательных углов, образуемых прямой l с положительным направлением оси Ox $(0 \le \alpha \prec \pi, \alpha \ne \frac{\pi}{2})$.

Ордината точки пересечения прямой с осью Oy равна $в$ (рис. 1.4).

Приведем еще некоторые сведения справочного характера.

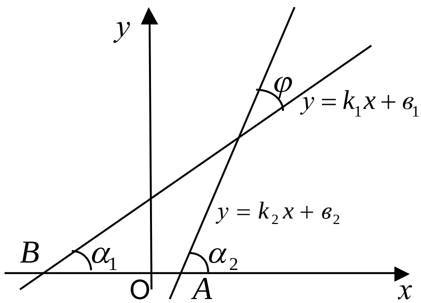


Рис. 1.5

Если известны угловые коэффициенты k_1 и k_2 двух прямых (рис. 1.5), то один из углов φ между этими прямыми определяется по формуле

$$tg\varphi = tg(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}. \quad (1.7)$$

Второй угол равен $\pi - \varphi$.

Условие параллельности двух прямых

$$k_1 = k_2. \quad (1.8)$$

Условие перпендикулярности двух прямых

$$k_2 = -\frac{1}{k_1}. \quad (1.9)$$

Точка пересечения прямых $l_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $l_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$ определяется как решение системы

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0. \end{cases} \quad (1.10)$$

Расстоянием d *от точки* $M_0(x_0, y_0)$ *до прямой* $Ax + By + C = 0$ называется длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на прямую. Расстояние d определяется по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad . \qquad (1.11)$$

1.1. Построить прямые:

а) $3x - y - 6 = 0$; б) $x + 2y = 0$; в) $4x - 3 = 0$; г) $3y + 5 = 0$.

Решение:

а) Для построения прямой достаточно знать координаты двух ее произвольных точек. Полагая в уравнении $x = 3$, получим $y = 3$. Точка $M_1(3;3)$ лежит на прямой. Полагая $x = 1$, получим $y = -3$. Вторая точка $M_2(1;-3)$. Проводим прямую M_1M_2 (рис. 1.6). Задачу можно решить иначе, используя уравнение прямой в отрезках. Приведем уравнение к виду (1.5).

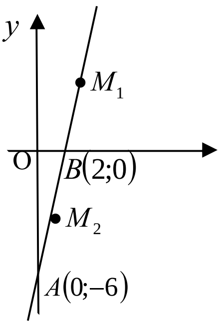


Рис. 1.6

Для этого перенесем свободный член (-6) в правую часть уравнения и обе его части разделим на 6. Получим: $3x - y = 6$; $\frac{3x}{6} - \frac{y}{6} = 1$; $\frac{x}{2} + \frac{y}{(-6)} = 1$.

На оси Ox отложим 2 единицы вправо от точки $O(0;0)$. На оси Oy отложим 6 единиц вниз. Получим точки $A(0;-6)$ и $B(2;0)$ на осях, через которые проведем прямую.

б) Прямая $x + 2y = 0$ проходит через точку $O(0;0)$.

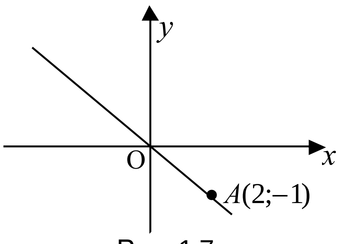


Рис. 1.7

Полагая $x = 2$, получаем $2 + 2y = 0$, $y = -1$. Точка $A(2;-1)$ лежит на прямой. Проводим прямую через точки $O(0;0)$ и $A(2;-1)$ (рис. 1.7).

в) Разрешим уравнение относительно x, получаем $x=\frac{3}{4}$. Это прямая, параллельная оси Oy, отсекает на оси Ox отрезок, равный $\frac{3}{4}$.

г) Запишем уравнение в виде $y=-\frac{5}{3}$. Эта прямая параллельна оси Ox.

1.2. Уравнение прямой $3x-4y+12=0$ представить в различных видах (с угловым коэффициентом, в отрезках).

Решение

Для получения уравнения прямой с угловым коэффициентом разрешим заданное уравнение относительно y. Получим $4y=3x+12$, $y=\frac{3}{4}x+3$ – уравнение прямой с угловым коэффициентом, здесь $k=\frac{3}{4}$; $в=3$.

Для получения уравнения в отрезках на осях координат перенесем свободный член $C=12$ в правую часть и разделим обе части уравнения на (-12). Получим $3x-4y=-12$, $\frac{x}{-4}+\frac{y}{3}=1$ – уравнение в отрезках, здесь $a=-4$; $в=3$.

1.3. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $\mathrm{A}(1;2)$:

а) под углом 135^0 к оси Ox;
б) параллельно оси Oy;
в) перпендикулярно вектору $\overline{N}=(-2,3)$;
г) и точку $B(-5;-2)$.

Решение:

а) Будем искать уравнение прямой с угловым коэффициентом, т.е. уравнение вида (1.6). По условию $k=tg135^0=-1$. Значит $y = -x + в$. Параметр $в$ найдем из условия принадлежности точки A искомой прямой. Подставляя координаты точки A в уравнение, получим $2 = -1 + в$, $в = 3$. Уравнение искомой прямой имеет вид $y = -x + 3$.

б) Уравнение прямой, проходящей через точку $A(1;2)$ параллельно оси Oy имеет вид $x = 1$.

в) Чтобы записать уравнение прямой, заданной точкой $A(1;2)$ и нормальным вектором $\overline{N} = (-2{,}3)$, воспользуемся уравнением (1.2)

$$-2(x-1) + 3(y-2) = 0\,;$$

$$-2x + 3y - 4 = 0\,.$$

г) Используем уравнение (1.3). Полагая $x_1 = 1$, $y_1 = 2$; $x_2 = -5$, $y_2 = -2$, получим $\dfrac{x-1}{-5-1} = \dfrac{y-2}{-2-2}$;

$$-4(x-1) = -6(y-2)\,;$$

$$-4x + 6y - 8 = 0 \qquad \text{или} \qquad y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}\,.$$

1.4. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(-3;0)$:

а) параллельно прямой $y = 6x - 5$;

б) перпендикулярно этой же прямой.

Решение

Будем искать уравнение прямой в виде $y = kx + в$. Прямая проходит через точку $A(-3;0)$, значит $0 = k(-3) + в$, $в = 3k$. Уравнение искомой прямой приобретает вид $y = k(x+3)$. Осталось найти k.

а) Если прямая параллельна прямой $y = 6x - 5$, то $k = 6$, так как угловые коэффициенты параллельных прямых равны (1.8). Значит $y = 6(x+3)$ или $y = 6x + 18$.

б) Если прямая перпендикулярна прямой $y = 6x - 5$, то $k = -\dfrac{1}{6}$ по условию (1.9). Значит $y = -\dfrac{1}{6}(x+3)$ или $y = -\dfrac{1}{6}x - \dfrac{1}{2}$.

1.5. Найти расстояние от точки пересечения двух прямых $x+4y-13=0$ и $4x-y-1=0$ до биссектрисы первого координатного угла.

Решение

Найдем точку M_0 пересечения данных прямых. Для этого решим систему

$$\begin{cases} x+4y-13=0, \\ 4x-y-1=0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x+4y=13, \\ 4x-y=1. \end{cases}$$

По формулам Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -17; \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 13 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -17; \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 13 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -51.$$

$x = \dfrac{-17}{-17} = 1$; $y = \dfrac{-51}{-17} = 3$, т.е. $M_0(1;3)$.

По формуле (1.11) находим расстояние d до прямой $y = x$ или $x - y = 0$ – биссектрисы первого координатного угла

$$d = \frac{|1-3|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|-2|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

1.6. Даны вершины треугольника $A(-1;3)$, $B(3;-2)$, $C(5;3)$. Составить уравнения:

а) стороны AB;

б) медианы, проведенной из вершины B;

в) высоты, опущенной из вершины C на сторону AB. Найти тангенс угла между медианой и высотой.

Решение:

а) Уравнение стороны AB данного треугольника найдем с использованием формулы (1.3): $x_1 = -1$, $y_1 = 3$; $x_2 = 3$, $y_2 = -2$: $\dfrac{x+1}{3+1} = \dfrac{y-3}{-2-3}$; $-5(x+1) = 4(y-3)$;

$$AB:\ 5x + 4y - 7 = 0.$$

б) Чтобы составить уравнение медианы BM , найдем координаты точки M – середины отрезка AC.

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-1+5}{2} = 2,\ y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{3+3}{2} = 3,$$

т.е. $M(2;3)$.

По формуле (1.3) $x_1 = 3$, $y_1 = -2$; $x_2 = 2$, $y_2 = 3$ имеем

$$\frac{x-3}{2-3} = \frac{y+2}{3+2}; \qquad 5(x-3) = -(y+2);$$

$$BM:\ 5x + y - 13 = 0.$$

в) Высота CH из вершины C есть прямая, перпендикулярная AB и проходящая через точку C. Вектор $\overline{AB} = (3+1; -2-3) = (4; -5)$ является нормальным вектором высоты. Воспользуемся уравнением (1.2).

$$4(x-5) - 5(y-3) = 0; \qquad CH:\ 4x - 5y - 5 = 0.$$

Тангенс угла между медианой BM и высотой CH найдем по формуле (1.7). Угловой коэффициент медианы из уравнения медианы $y = -5x + 13$; $k_1 = -5$.

Угловой коэффициент высоты CH из уравнения $y = \frac{4}{5}x - 1$

равен $k_2 = \frac{4}{5}$;

$$tg\varphi = \frac{\frac{4}{5}+5}{1-\frac{4}{5}\cdot(-5)} = \frac{29}{25}.$$

1.7. Задайте функцию $f(x)$ аналитически (рис.1.8).

.

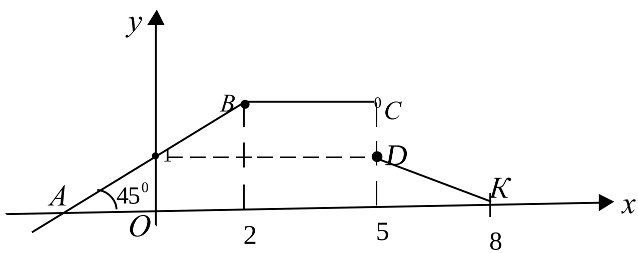


Рис. 1.8

Решение

При $x \le 2$ функция $f(x)$ совпадает с прямой AB, проходящей через точку $(0;1)$ и образующей угол 45^0 с осью Ox. Используем уравнение $y = kx + в$, где $k = tg45^0 = 1$ и $в = 1$. Значит при $x \le 2$ $f(x) = x + 1$. Найдем ординату точки B $f(2) = 2 + 1 = 3$.

При $2 \prec x \prec 5$ $f(x) = 3$.

При $5 \le x \le 8$ функция $f(x)$ совпадает с прямой, проходящей через две точки $D(5;1)$ и $K(8;0)$.

Используем уравнение (1.3):

$$\frac{x-5}{8-5} = \frac{y-1}{0-1}; \quad -(x-5) = 3(y-1); \quad y - 1 = -\frac{1}{3}(x-5); \; y = -\frac{1}{3}x + \frac{8}{3}.$$

При $x \succ 8$ $f(x) = 0$, значит

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & , \quad x \le 2, \\ 3 & , \quad 2 \prec x \prec 5, \\ -\frac{1}{3}x + \frac{8}{3} & , \quad 5 \le x \le 8, \\ 0 & , \quad x \succ 8. \end{cases}$$

1.8. Построить множество решений неравенства $2x - 3y + 6 \le 0$.

Решение

Множеством решений линейного неравенства с двумя переменными x и y является одна из полуплоскостей, на которую делится вся плоскость прямой $2x - 3y + 6 = 0$.

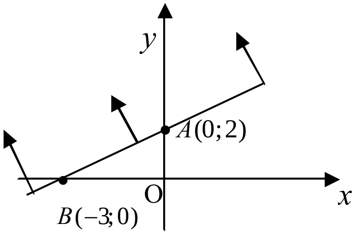


Рис. 1.9

Полагая $x = 0$, получим $-3y + 6 = 0$, y =2.

Полагая $y = 0$, получим $x = -3$.

$A(0;2)$, $B(-3;0)$ – это точки пересечения прямой с осями координат. Построим прямую (рис. 1.9).

Для определения искомой полуплоскости рекомендуется задать произвольную контрольную точку, не лежащую на ее границе – построенной прямой.

Если неравенство выполняется в контрольной точке, то оно выполняется и во всех точках полуплоскости, содержащей контрольную точку, и не выполняется во всех точках другой полуплоскости.

И, наоборот, в случае невыполнения неравенства в контрольной точке, оно не выполняется во всех точках полуплоскости, содержащей контрольную точку, и выполняется во всех точках другой полуплоскости.

В качестве контрольной точки удобно взять начало координат $O(0;0)$, не лежащей на построенной прямой. Координаты точки O не удовлетворяют неравенству $2\cdot 0-3\cdot 0+6\le 0$, следовательно, решением данного неравенства является верхняя полуплоскость, не содержащая контрольную точку O (см. рис. 1.9).

1.9. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A\left(-2;\frac{2}{5}\right)$ и образующей с осью Ox угол, равный $arctg 3$.

1.10. Какой угол образует с положительным направлением оси абсцисс прямая $5x+5y-7=0$?

1.11. Определить при каком значении α прямая $(\alpha^2-\alpha)x+(2+\alpha)y-3\alpha+1=0$

а) параллельна оси Ox;

б) проходит через начало координат?

1.12. Найти угловой коэффициент прямой и ординату точки ее пересечения с осью Oy, зная, что прямая проходит через точки $A(1;1)$ и $B(-2;3)$.

1.13. Прямая проходит через точки $A(-2;-2)$ и $B(-1;6)$. Какую абсциссу имеет точка M, лежащая на прямой и имеющая ординату, равную 22?

1.14. Найти уравнение прямой:

а) образующей с осью Ox угол $\frac{\pi}{3}$ и пересекающей ось Oy в точке (0; -6);

б) параллельной оси Ox и отсекающей на оси Oy отрезок, равный 2;

в) отсекающей на осях координат отрезки, равные 3 и 4.

1.15. Дана прямая $2x+5y-1=0$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(-1;3)$:

а) параллельно данной прямой;

б) перпендикулярно данной прямой.

1.16. Составить уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $x-2y+3=0$ и $2x+y+5=0$ параллельно оси ординат.

1.17. Составить уравнение перпендикуляра к прямой $8x+4y-3=0$ в точке пересечения ее с прямой $x-y=0$.

1.18. Найти угол между прямыми:

а) $y=2x-3$ и $y=-\frac{1}{2}x+5$;

б) $y=5x+1$ и $y=5x-2$;

в) $2x-3y+10=0$ и $5x-y+4=0$.

1.19. Найти расстояние от точки $M_0(2;1)$ до прямой $3x-4y-16=0$.

1.20. Показать, что прямые $15x+36y-105=0$ и $5x+12y+30=0$ параллельны. Найти расстояние между ними.

1.21. Найти длину высоты AD в треугольнике с вершинами $A(5;2)$, $B(2;3)$ и $C(0;-3)$.

1.2. Примеры применения аналитической геометрии в экономике

1.2.1. Линейная модель амортизации

Существуют различные модели начисления амортизации на купленное предприятием оборудование. Наиболее простая из них – линейная. Согласно этой модели, предприятие относит стоимость купленного оборудования на затраты производства равными долями. Если p_0 – начальная стоимость оборудования, s – его остаточная стоимость, а срок службы T, то ежегодная амортизация

$$\alpha = \frac{p_0 - s}{T}. \qquad (1.12)$$

Стоимость оборудования после t лет эксплуатации

$$p(t) = p_0 - \frac{p_0 - s}{T} \cdot t = p_0 - \alpha t. \qquad (1.13)$$

Это уравнение определяет прямую.

1.22. Цена телевизора 10 тыс. рублей, остаточная стоимость равна нулю, а срок службы составляет 5 лет. Построить график функции, определяющей стоимость телевизора в зависимости от времени t. За сколько нужно продать телевизор после трех с половиной лет эксплуатации, чтобы получить прибыль 1 тыс. рублей.

Решение

С учетом линейной модели амортизации, необходимо построить прямую линию, проходящую через точки $A(5;0)$ и $B(0;10)$ (рис. 1.10).

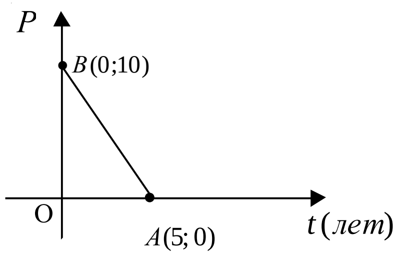


Рис. 1.10

Используя уравнение прямой в отрезках (1.5), имеем $\frac{p}{10} + \frac{t}{5} = 1$, откуда $p(t) = 10 - 2t$.

Найденную зависимость стоимости телевизора можно было получить из уравнения (1.13), если подставить в него значения $p_0 = 10$ и $\alpha = \frac{p_0}{T} = \frac{10}{5} = 2$.

Определим стоимость телевизора через 3,5 года эксплуатации $p(3{,}5) = 10 - 2 \cdot 3{,}5 = 3$ *тыс. руб.*

Следовательно, чтобы получить прибыль 1 тыс. рублей, после 3,5 лет эксплуатации необходимо продать его за 4 тыс. рублей.

1.2.2. Линейные функции спроса и предложения, определение равновесной цены

Рассмотрим какой-нибудь товар. При данной цене p за единицу товара обозначим $D(p)$ число единиц товара, которые покупатели на рынке желают купить. Эта функция $D(p)$ называется функцией спроса на товар. С другой стороны, пусть $s(p)$ – число единиц товара, которые предлагают продавцы для продажи на рынке. Эта функция называется функцией предложения товара.

Цена, при которой спрос и предложение равны, называется *равновесной*. Итак, $D(p^*) = s(p^*)$ при равновесной цене p^*.

Предположим, что функции спроса $D(p)$ и предложения $s(p)$ линейны (это допущение может быть справедливым в некоторых границах), рис. 1.11.

Например, пусть $D(p) = 50 - p$, $s(p) = 10 + 4p$.

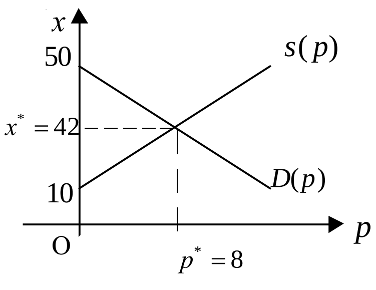


Рис. 1.11

Тогда равновесная цена находится из решения уравнения $50 - p = 10 + 4p$, $\quad p = 8$.

При этом равновесный объем спроса $D(8) = 50 - 8 = 42$, равновесный объем предложения

$$s(8) = 10 + 4 \cdot 8 = 42.$$

Точка пересечения кривых спроса и предложения $(x^*; p^*)$ называется точкой рыночного равновесия (см. рис. 1.11).

1.23. Спрос на некоторый товар равен 10 единицам при цене 300 рублей за штуку и 20 единицам при цене 280 рублей. Поставщик согласен продать 8 единиц товара по цене 84 рубля и 5 единиц по цене 60 рублей. Найти точку рыночного равновесия.

Решение

Пусть x – количество товара (шт.), p – цена этого товара (руб.). Линейные уравнения спроса и предложения можно составить, используя уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1, p_1)$ и $M_2(x_2, p_2)$

$$\frac{p-p_1}{p_2-p_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}.$$

Для уравнения спроса $M_1(10;300)$ и $M_2(20;280)$, тогда

$$\frac{p-300}{280-300}=\frac{x-10}{20-10}; \qquad x-10=-\frac{1}{2}(p-300);$$

$$D(p): x=160-\frac{p}{2}.$$

Для уравнения предложения $M_1(8;84)$ и $M_2(5;60)$, тогда

$$\frac{p-84}{60-84}=\frac{x-8}{5-8}, \qquad x-8=\frac{3}{24}(p-84); \qquad x=\frac{1}{8}p-\frac{5}{2}.$$

Найдем точку рыночного равновесия $\begin{cases} x=160-\dfrac{p}{2}, \\ x=\dfrac{1}{8}p-\dfrac{5}{2}. \end{cases}$

Приравнивая правые части уравнений, получим

$$160-\frac{p}{2}=\frac{1}{8}p-\frac{5}{2},$$

откуда $p=260$ рублей – равновесная цена, $x=160-260\cdot\frac{1}{2}=30$.

Значит (30; 260) – точка рыночного равновесия.

1.2.3. Бюджетное множество

Рассмотрим множество наборов товаров $\overline{X}=(x_1; x_2; ...; x_n)$, где x_i – количество i-го товара, поступившего в продажу в определенное время и в определенном месте.

Рассматривается, как правило, только неотрицательное количество товаров, т.е. $x_i \geq 0$ или $\overline{X} \geq 0$. Множество всех наборов товаров называется *пространством товаров*.

Каждый товар имеет цену. Все цены предполагаются строго положительными. Пусть цена единицы i-го товара есть p_i, тогда вектор $\overline{P} = (p_1; p_2; ...; p_n)$ есть вектор цен.

Рассмотрим пространство двух товаров $\overline{X} = (x_1; x_2)$. Пусть вектор цен есть $\overline{P} = (p_1; p_2)$, тогда стоимость набора товаров $\overline{X}$ есть $\overline{P} \cdot \overline{X} = p_1 x_1 + p_2 x_2$.

Наборы товаров одной и той же стоимости C образуют часть прямой линии с уравнением $p_1 x_1 + p_2 x_2 = C$, расположенной в первом квадранте. Эта прямая перпендикулярна вектору цен.

Пусть фиксирована какая-то денежная сумма Q – она также называется доходом. Множество всех наборов товаров стоимостью не более Q называется бюджетным множеством и обозначается B.

Бюджетное множество можно определить с помощью обычных или векторных неравенств

$$B(\overline{P}, Q) = \left\{\overline{X} = (x_1; x_2) : x_1 \geq 0,\, x_2 \geq 0,\, p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq Q\right\}$$

или $B(\overline{P}, Q) = \left\{\overline{X} : \overline{P} \cdot \overline{X} \leq Q\right\}$.

Границей бюджетного множества называется множество наборов товаров, которые стоят ровно Q, т.е.

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = Q.$$

На рис. 1.12 изображены бюджетные множества при различных ценах P и доходах Q.

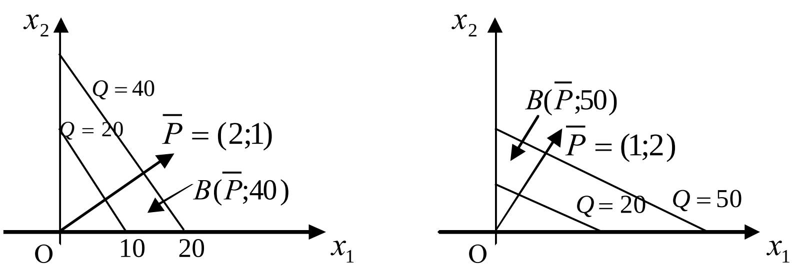


Рис. 1.12

Бюджетное множество $B(\overline{P};Q)$ зависит от цен P и дохода Q. При увеличении дохода граница множества параллельно отодвигается дальше от начала координат, при уменьшении цен – увеличивается, т.е. точки пересечения его границы с осями координат отодвигаются от начала координат.

1.24. В пространстве двух товаров с ценами (2; 5) укажите множества наборов, которые стоят:

а) ровно 40 ден. ед.;

б) не более 40 ден. ед.;

в) не менее 30 и не более 40 ден. ед.

Сделайте чертеж.

Решение:

а) Множество товаров $\overline{X}=(x_1;x_2)$ стоимостью 40 ден. ед. задается уравнением прямой с нормальным вектором $\overline{P}=(2;5)$:

$$2x_1+5x_2=40.$$

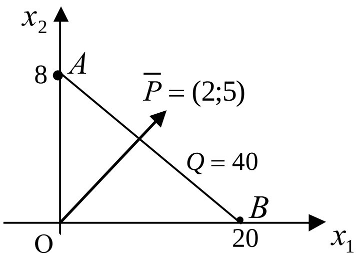


Рис. 1.13

Для построения прямой линии приводим это уравнение к виду $\dfrac{x_1}{20}+\dfrac{x_2}{8}=1$,

$a=20$, $в=8$.

б) Множество наборов товаров $(x_1;x_2)$ стоимостью не более 40 ден. ед. задается с помощью неравенства

$$B(\overline{P},40)=\left\{\overline{X}=(x_1;x_2): x_1\geq 0, x_2\geq 0, 2x_1+5x_2\leq 40\right\}.$$

Геометрически $B(\overline{P};40)$ представляет собой ΔOAB, ограниченный осями координат и прямой AB $(Q=40)$ (рис. 1.13).

в)

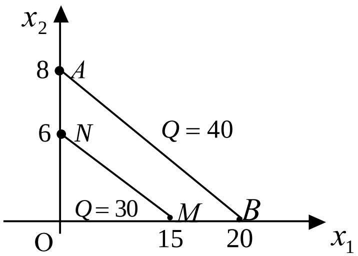


Рис. 1.14

Строим границу бюджетного множества $B(\overline{P};30)$ прямую MN (рис.1.14)

$$2x_1 + 5x_2 = 30$$

или

$$\frac{x_1}{15} + \frac{x_2}{6} = 1.$$

Искомая область – четырехугольник $ABMN$, включая границы.

1.3. Кривые второго порядка

Любое линейное уравнение $Ax + By + C = 0$ задает на плоскости прямую. Линии, задаваемые уравнениями вида

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Дx + Ey + T = 0, \qquad (1.14)$$

называются кривыми второго порядка. За исключением вырожденных случаев имеется всего 3 кривых второго порядка: эллипс (частный случай – окружность), гипербола и парабола, они имеют следующие канонические уравнения и вид (рис.1.15):

1. Эллипс $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{в^2} = 1$; $a \succ в$,

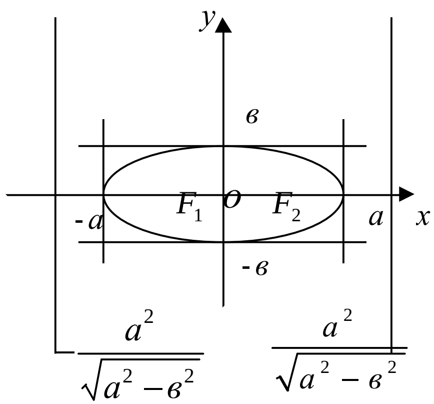


Рис. 1.15

$a, в$ – полуоси эллипса; О – центр; точки $F_1\left(-\sqrt{a^2-в^2},0\right)$ и $F_2\left(\sqrt{a^2-в^2},0\right)$ называются фокусами эллипса, они обладают следующими свойствами: сумма расстояний от любой точки эллипса до фокусов есть величина постоянная, равная $2a$.

Прямые $x=\pm\dfrac{a^2}{\sqrt{a^2-в^2}}$ называются директрисами эллипса.

(Выясните свойства директрис.)

Если в каноническом уравнении эллипса $a \prec в$, то фокусы располагаются на оси ОУ, а директрисы параллельны ОХ $y=\pm\dfrac{в^2}{\sqrt{в^2-a^2}}$. Как запишутся координаты фокусов?

2. Гипербола $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{в^2}=1$,

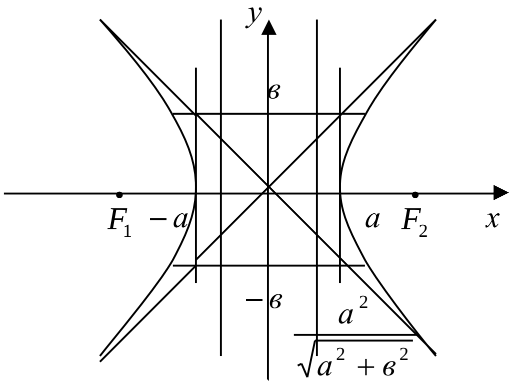


Рис. 1.16

$a, в$ – полуоси гиперболы; O – центр; точки $F_1\left(-\sqrt{a^2+в^2},0\right)$ и $F_2\left(\sqrt{a^2+в^2},0\right)$ называются фокусами гиперболы, а прямые $x=\pm\dfrac{a^2}{\sqrt{a^2+в^2}}$ – директрисами гиперболы.

(Выясните свойства фокусов и директрис.)

Прямые $y=\pm\dfrac{в}{a}x$, на которых лежат диагонали прямоугольника, называются асимптотами гиперболы; вдали от начала координат ветви гиперболы неограниченно приближаются к асимптотам (рис.1.16).

Гипербола $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{в^2}=-1$ называется сопряженной к рассмотренной выше, имеет фокусы на оси $OУ$ и директрисы $y=\pm\frac{в^2}{\sqrt{a^2+в^2}}$, параллельные OX.

3. Парабола $2px=y^2$

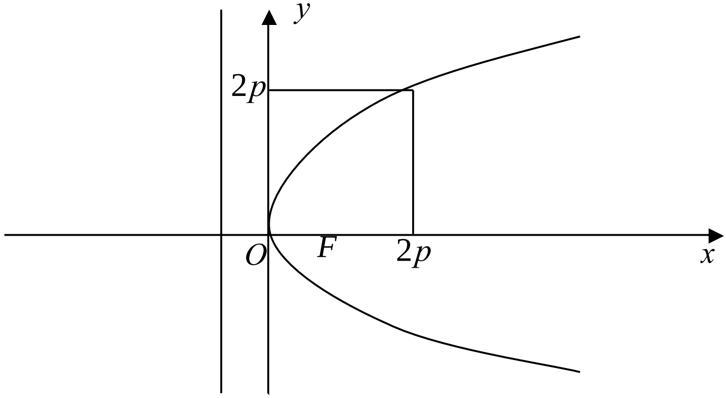


Рис. 1.17.

p – параметр, O – вершина, $F\left(\frac{p}{2},0\right)$ – фокус, $x=-\frac{p}{2}$ – директриса. Для параболы расстояния от любой точки ее до фокуса и до директрисы совпадают.

Парабола $2py=x^2$ располагается симметрично относительно оси $OУ$ (рис. 1.17).

Если в уравнении (1.14) кривой второго порядка $B=0$, то каноническое уравнение можно получить с помощью параллельного переноса системы координат (рис. 1.18), при котором начало $O^/$ новой системы $x^/O^/y^/$ помещается в точку (x_0, y_0), а «старые» и «новые» координаты связаны формулами:

$$\begin{cases} x^/ = x - x_0, \\ y^/ = y - y_{0.} \end{cases} \qquad (1.15)$$

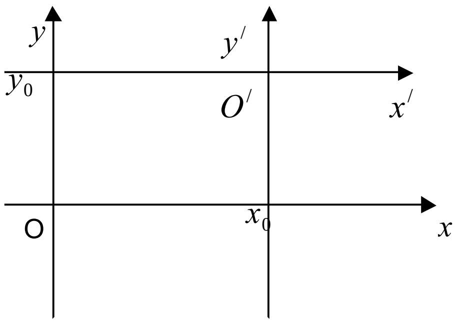


Рис. 1.18

1.24. Используя параллельный перенос системы координат, построить линию $4x^2 - 9y^2 - 24x - 18y + 63 = 0$.

Решение

Преобразуем уравнение линии, группируя члены с x и члены с y, и вынося за скобки коэффициенты при квадратах:

$\left(4x^2 - 24x\right) + \left(-9y^2 - 18y\right) + 63 = 0$,

$4\left(x^2 - 6x\right) - 9\left(y^2 + 2y\right) + 63 = 0$;

выделим в скобках полные квадраты:

$4\left(x^2 - 2 \cdot 3x + 9 - 9\right) - 9\left(y^2 + 2 \cdot 1y + 1 - 1\right) + 63 = 0$,

$4(x-3)^2 - 36 - 9(y+1)^2 + 9 + 63 = 0$,

$4(x-3)^2 - 9(y+1)^2 + 36 = 0$.

Выполним параллельный перенос

$$\begin{cases} x' = x - 3, \\ y' = y + 1; \end{cases} \qquad (1.16)$$

$4x'^2 - 9y'^2 = -36, \quad /\div 36$

$$\frac{x'^2}{9} - \frac{y'^2}{4} = -1,$$

получили уравнение гиперболы в системе $x'O'y'$, где $O'(3;-1)$ – новое начало.

Построение линии (рис. 1.19) можно начать с новой системы координат, указав затем старые оси x и y и старое начало O, для которого по формулам (1.16) $x=0$, $y=0$, а значит $x^{/}=-3$, $y^{/}=1$.

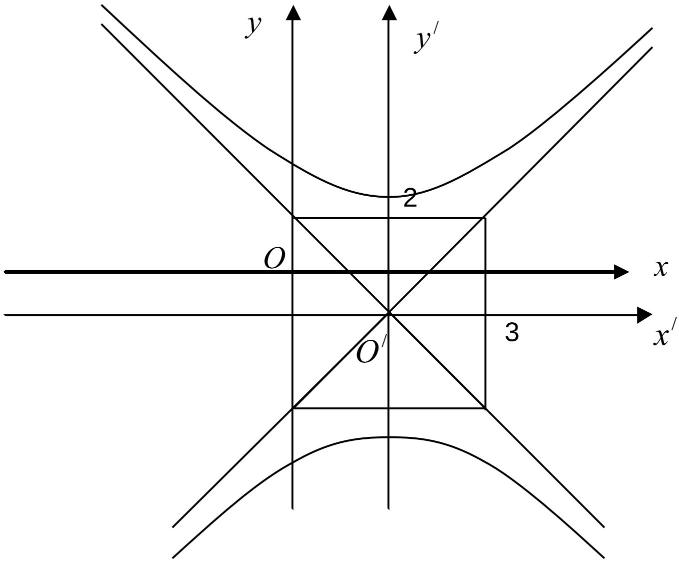


Рис. 1.19

Если «стереть» новые оси, то останется изображение линии в заданной системе координат.

2. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

Уравнение $F(x;y;z)=0$, связывающее три переменные x, y, z, задает в пространстве некоторую поверхность S.

Основная задача: на основании некоторой информации о данной поверхности S (обычно геометрического смысла) составить уравнение, которому удовлетворяют координаты любой точки поверхности S и только они.

Рассмотрим простейшую поверхность – плоскость.

2.1. Плоскость в пространстве

Плоскость в пространстве можно задать различными способами; соответственно получим различные виды уравнений плоскости:

1) *Уравнение плоскости, проходящей через точку* $M_0(x_0, y_0, z_0)$ *перпендикулярно нормальному вектору* $\overline{N} = (A, B, C)$ (рис.2.1).

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0, \qquad (2.1)$$

где $\overline{N} = (A, B, C)$ – нормаль.

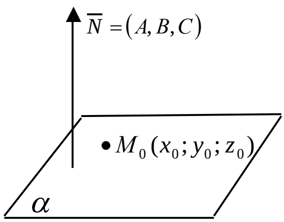


Рис. 2.1

Уравнение (2.1) получено из следующих соображений. Если $M(x, y, z)$ – произвольная точка плоскости α, то вектор $\overline{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ перпендикулярен нормали $\overline{N}$, т.е. $\overline{M_0M} \perp \overline{N} \Rightarrow \overline{M_0M} \cdot \overline{N} = 0$, откуда следует, что $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$.

2) *Общее уравнение плоскости*

$$Ax + By + Cz + D = 0, \qquad (2.2)$$

где коэффициенты A, B, C – координаты нормального вектора $\overline{N}$.

Уравнение (2.2) следует из уравнения (2.1), если в нем раскрыть скобки и число $(-Ax_0 - By_0 - Cz_0)$ обозначить за D. Таким образом, плоскость задается уравнением первой степени относительно x, y и z.

Верно и обратное утверждение: всякое уравнение первой степени вида (2.2) определяет в заданной прямоугольной системе координат плоскость.

3) *Уравнение плоскости «в отрезках»* (рис.2.2)

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{в}+\frac{z}{c}=1, \tag{2.3}$$

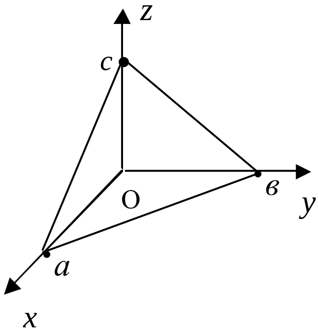


Рис. 2.2

где a, $в$ и c – величины направленных отрезков, отсекаемых плоскостью α на координатных осях Ox, Oy и Oz соответственно.

Уравнение (2.3) может быть получено из общего уравнения плоскости (2.2) переносом числа D (если $D \neq 0$) в правую часть равенства и делением уравнения на число $(-D)$.

4) *Уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и $M_3(x_3, y_3, z_3)$*, не лежащие на одной прямой, может быть записано в виде (рис.2.3):

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0. \tag{2.4}$$

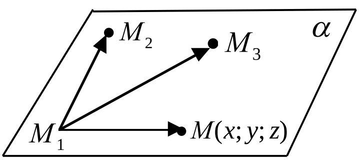


Рис. 2.3

Уравнение (2.4) получено из следующих соображений. Если $M(x;y;z)$– произвольная точка плоскости α, то три вектора $\overline{M_1M}=(x-x_1, y-y_1, z-z_1)$, $\overline{M_1M_2}=(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$, $\overline{M_1M_3}=(x_3-x_1, y_3-y_1, z_3-z_1)$, лежащие на плоскости α, компланарны, а следовательно, их смешанное произведение равно нулю, т.е. $\overline{M_1M}\cdot\overline{M_1M_2}\cdot\overline{M_1M_3}=0$. Используя выражение смешанного произведения в координатной форме, получим уравнение (2.4).

Если в уравнении (2.4) раскрыть определитель (лучше всего разложением по первой строке) и привести подобные члены, то получим уравнение вида (2.2).

5) *Расстояние от точки* $M_1(x_1, y_1, z_1)$ *до плоскости* α, заданной общим уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, вычисляется по формуле

$$d = \rho(M_1, \alpha) = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} . \qquad (2.5)$$

6) *Угол между двумя плоскостями*

Пусть даны две плоскости:

$\alpha_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ с нормалью $\overline{N_1} = (A_1, B_1, C_1)$ и

$\alpha_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ с нормалью $\overline{N_2} = (A_2, B_2, C_2)$.

В качестве угла φ между плоскостями α_1 и α_2 принимается угол между их нормалями $\cos\varphi = \dfrac{\overline{N_1} \cdot \overline{N_2}}{|\overline{N_1}| \cdot |\overline{N_2}|}$ или в координатной форме

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} . \qquad (2.6)$$

7) *Условие параллельности* двух плоскостей α_1 и α_2

$\overline{N_1} \parallel \overline{N_2}$ или в координатной форме

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2} . \qquad (2.7)$$

Если $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} = \dfrac{D_1}{D_2}$, то обе плоскости α_1 и α_2 совпадают.

8) *Условие перпендикулярности* двух плоскостей α_1 и α_2

$\overline{N_1} \cdot \overline{N_2} = 0$ или в координатной форме

$$A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2 = 0 . \qquad (2.8)$$

9) *Неполные уравнения плоскости*

Общее уравнение плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ называется полным, если все его коэффициенты A, B, C и D отличны от нуля. Если хотя бы один из коэффициентов равен нулю, то уравнение (2.2) называется неполным.

Рассмотрим различные виды неполных уравнений:

а) Если $D = 0$, то плоскость $Ax + By + Cz = 0$ проходит через начало координат (поскольку координаты $O(0;0;0)$ удовлетворяют этому уравнению).

б) Если $A = 0$, то плоскость $By + Cz + D = 0$ параллельна оси Ox.

в) Если $B = 0$, то плоскость $Ax + Cz + D = 0$ параллельна оси Oy.

г) Если $C = 0$, то плоскость $Ax + By + D = 0$ параллельна оси Oz.

Признак параллельности плоскости координатной оси:

- если в уравнении нет переменной x, то плоскость параллельна оси Ox;
- если в уравнении нет переменной y, то плоскость параллельна оси Oy;
- если в уравнении нет переменной z, то плоскость параллельна оси Oz,

т.е. плоскость параллельна той координатной оси, наименование которой отсутствует в уравнении плоскости.

д) Если $A = B = 0$, то плоскость $Cz + D = 0$ параллельна координатной плоскости Oxy (так как эта плоскость одновременно параллельна оси Ox и оси Oy).

е) Если $A = C = 0$, то плоскость $By + D = 0$ параллельна координатной плоскости Oxz (так как эта плоскость одновременно параллельна оси Ox и оси Oz).

ж) Если $B = C = 0$, то плоскость $Ax + D = 0$ параллельна координатной плоскости Oyz (так как эта плоскость одновременно параллельна оси Oy и оси Oz).

з) Если $A = B = D = 0$, то уравнение $Cz = 0$ $(z = 0)$ задает координатную плоскость xOy (так как плоскость параллельна плоскости Oxy и проходит через начало координат).

и) Если $B = C = D = 0$, то уравнение $Ax = 0$ $(x = 0)$ задает координатную плоскость Oyz (так как плоскость параллельна плоскости Oyz и проходит через начало координат).

к) Если $A = C = D = 0$, то уравнение $By = 0$ $(y = 0)$ задает координатную плоскость xOz (так как плоскость параллельна плоскости Oxz и проходит через начало координат).

2.1. Построить плоскость $3x + 2y + 5z - 15 = 0$.

Решение

I способ. Чтобы построить плоскость α , необходимо задать три точки, принадлежащие данной плоскости. Найдем координаты точек пересечения плоскости с координатными осями:

С осью Ox : Пусть $y = 0$ и $z = 0$, тогда $3x - 15 = 0$, $x = 5$.

Получим точку $A(5;0;0)$.

С осью Oy : Пусть $x = 0$ и $z = 0$, тогда $2y - 15 = 0$, $y = 7{,}5$.

Получим точку $B(0;7{,}5;0)$.

С осью Oz : Пусть $x = 0$ и $y = 0$, тогда $5z - 15 = 0$, $z = 3$.

Получим точку $C(0;0;3)$.

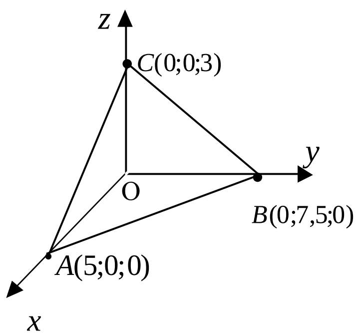


Рис. 2.4

Построим точки A, B, C. Плоскость α имеет две общие точки A и B с плоскостью Oxy, следовательно, пересекается с ней по прямой (AB). Аналогично плоскость α пересекается с плоскостью Oxz по прямой (AC) и с плоскостью Oyz – по прямой (BC).

Условным изображением плоскости является треугольник ABC (рис. 2.4).

II способ. Так как в уравнении плоскости $D=-15\neq 0$, то приведем его к уравнению «в отрезках» (2.3). Для этого запишем уравнение в виде

$$3x+2y+5z=15$$

и разделим обе части уравнения на число 15, получим

$$\frac{x}{5}+\frac{y}{7{,}5}+\frac{z}{3}=1,$$

где $a=5$ – отрезок, отсекаемый на оси Ox;

$в=7{,}5$ – отрезок, отсекаемый на оси Oy;

$c=3$ – отрезок, отсекаемый на оси Oz.

Откладываем соответствующие отрезки на осях Ox, Oy, Oz и получим плоскость α (см. рис. 2.4).

2.2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2;-3;1)$ и:

а) перпендикулярно вектору $\overline{N}=(3;2;-4)$;

б) параллельно плоскости $7x-3y+5z-1=0$;

в) параллельно плоскости Oxy;

г) точку $M_1(0;2;1)$ и параллельно оси Oz;

д) проходящую через ось Oy.

Решение:

а) Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2;-3;1)$, перпендикулярно нормали $\overline{N}=(3;2;-4)$, по формуле (2.1) имеет вид

$$3(x-2)+2(y+3)-4(z-1)=0, \qquad (A=3; B=2; C=-4)$$

или

$$3x+2y-4z+4=0.$$

б) Так как искомая плоскость и плоскость $7x-3y+5z-1=0$ параллельны, то у них общий нормальный вектор $\overline{N}=(7;-3;5)$. Таким образом, задача сводится к предыдущей (см. п. а)): через точку M_0 провести плоскость, перпендикулярную вектору $\overline{N}$.

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0;$$

$$7(x-2)-3(y+3)+5(z-1)=0$$

или

$$7x-3y+z-28=0.$$

в) **I способ.** Уравнение плоскости Oxy имеет вид $z=0$, откуда нормальный вектор $\overline{N}=(0;0;1)$. Так как искомая плоскость параллельна плоскости Oxy, то и ее нормалью служит вектор $\overline{N}=(0;0;1)$, а следовательно, уравнение искомой плоскости примет вид

$$1\cdot(z-1)=0 \quad \text{или} \quad z=1.$$

II способ. Возьмем за основу уравнение плоскости (2.1) и точку $M_0(2;-3;1)$, получим

$$A(x-2)+B(y+3)+C(z-1)=0.$$

Так как искомая плоскость параллельна плоскости Oxy, значит она параллельна одновременно осям Ox и Oy и в ее уравнении отсутствуют переменные x и y (по признаку параллельности координатным осям), следовательно, $A=0$ и $B=0$.

Уравнение плоскости примет вид

$$C\cdot(z-1)=0 \quad \text{или} \quad z=1.$$

г) Используя уравнение (2.1) и координаты точки M_0, получаем

$$A(x-2)+B(y+3)+C(z-1)=0.$$

Так как плоскость параллельна оси Oz, то в уравнении будет отсутствовать переменная z, а значит $C=0$.

Искомое уравнение примет вид

$$A(x-2)+B(y+3)=0.$$

Подставляя в полученное уравнение координаты второй точки $M_1(0;2;1)$, имеем

$$-2A+5B=0 \text{, откуда} \quad B=0{,}4A.$$

Следовательно, искомое уравнение плоскости

$A(x-2)+0{,}4A(y+3)=0$ или (после сокращения на $A\neq 0$)

$$x+0{,}4y-0{,}8=0.$$

д) **I способ.** Аналогично, используя уравнение (2.1) и координаты точки M_0, получаем $A(x-2)+B(y+3)+C(z-1)=0$.

Искомая плоскость проходит через ось Oy, что означает, во-первых, что она параллельна оси Oy (следовательно, $B=0$) и во-вторых, проходит через начало координат $O(0;0;0)$.

Подставляя в исходное уравнение $B=0$, получим искомое уравнение плоскости $A(x-2)+C(z-1)=0$.

Подставим в полученное уравнение координаты начала координат $O(0;0;0)$: $A(0-2)+C(0-1)=0$, $-2A-C=0$, откуда $C=-2A$.

Подставляя найденное C в полученное ранее уравнение плоскости, получим $A(x-2)-2A(z-1)=0$, и сокращая на $A\neq 0$, искомое уравнение плоскости будет иметь вид

$$x-2z=0.$$

II способ. Так как плоскость проходит через ось Oy, то в общем уравнении плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ коэффициенты $C=0$ и $D=0$, т.е. уравнение плоскости примет вид $Ax+Cz=0$.

Подставляя в данное уравнение координаты точки $M_0(2;-3;1)$, лежащей на плоскости, получим $2A+C=0$, откуда $C=-2A$.

Искомое уравнение плоскости после подстановки $C=-2A$ и сокращения на $A\neq 0$ примет вид $x-2z=0$.

2.3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(5;4;3)$ и отсекающей равные отрезки на осях координат.

Решение

Используем уравнение «в отрезках» (2.3), в котором $a=в=c$.

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{a}+\frac{z}{a}=1$$

или

$$x+y+z=a.$$

Координаты точки M_0 удовлетворяют уравнению искомой плоскости и подставив их в уравнение, получим

$$5+4+3=a \text{, откуда } a=12.$$

Искомое уравнение имеет вид $x+y+z-12=0$.

2.4. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки $A(3;4;-1)$, $B(5;-2;0)$, $C(3;3;-3)$.

Решение

Возьмем на плоскости еще одну произвольную точку $M(x;y;z)$ и построим три вектора (рис.2.5):

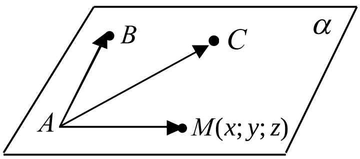


Рис. 2.5

$$\overline{AM}=(x-3;\ y-4;\ z+1),$$

$\overline{AB}=(2;-6;1)$ и

$$\overline{AC}=(0;-1;-2).$$

Векторы $\overline{AM}$, $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ – компланарны, а следовательно, определитель, составленный из координат этих векторов, равен 0.

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-4 & z+1 \\ 2 & -6 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix}=0.$$

Фактически здесь использовано уравнение вида (2.4). Разложим определитель по первой строке

$$(x-3)\begin{vmatrix} -6 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}-(y-4)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}+(z+1)\begin{vmatrix} 2 & -6 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}=0,$$

$$13(x-3)+4(y-4)-2(z+1)=0 \quad \text{или} \quad 13x+4y-2z-57=0.$$

2.5. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(2;-3;1)$, $M_2(1;2;1)$ параллельно вектору $\overline{a}=(3;4;-1)$.

Решение

Отложим вектор $\overline{a}$ и произвольную точку $M(x;y;z)$ в плоскости, проходящей через точки M_1 и M_2 (рис.2.6).

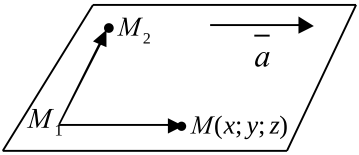


Рис. 2.6

Получим три компланарных вектора:

$\overline{M_1M}=(x-2;\, y+3;\, z-1)$,

$\overline{M_1M_2}=(-1;5;0)$ и

$\overline{a}=(3;4;-1)$.

По условию компланарности трех векторов

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+3 & z-1 \\ -1 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix}=0 \quad \text{или}$$

$$-5(x-2)-(y+3)-19(z-1)=0,$$

откуда

$$5x+y+19z-26=0.$$

2.6. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(-1;-1;2)$ перпендикулярно плоскостям $x-2y+z-4=0$ и $x+2y-2z+4=0$.

Решение

I способ. Так как искомая плоскость перпендикулярна плоскостям $x-2y+z-4=0$ и $x+2y-2z+4=0$, то их нормали $\overline{N_1}=(1;-2;1)$, $\overline{N_2}=(1;2;-2)$ и вектор $\overline{M_0M}=(x+1;\, y+1;\, z-2)$ – компланарны ($M(x;y;z)$– произвольная точка плоскости). Следовательно,

$$\begin{vmatrix} x+1 & y+1 & z-2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}=0$$

или

$$2(x+1)+3(y+1)+4(z-2)=0\,,$$

откуда

$$2x+3y+4z-3=0\,.$$

II способ. Используя уравнение (2.1) и точку $M_0(-1;-1;2)$, получим $A(x+1)+B(y+1)+C(z-2)=0$, где $\overline{N}=(A;B;C)$ – нормальный вектор. Найдем $\overline{N}$.

Так как искомая плоскость перпендикулярна плоскостям $x-2y+z-4=0$ и $x+2y-2z+4=0$, то их нормали $\overline{N_1}=(1;-2;1)$ и $\overline{N_2}=(1;2;-2)$ параллельны нашей плоскости, а следовательно, ее нормаль $\overline{N}=(A;B;C)$ перпендикулярна каждому из данных векторов, а значит, их скалярные произведения равны нулю

$$\overline{N_1}\cdot\overline{N}=0 \quad \text{и} \quad \overline{N_2}\cdot\overline{N}=0\,.$$

Получим систему уравнений

$$\begin{cases} A-2B+C=0, \\ A+2B-2C=0 \end{cases} \Rightarrow\ 2A-C=0, \quad C=2A.$$

Значение A можно взять любое, например, $A=2$, тогда $C=4$, а B найдем из первого уравнения $B=3$. Искомое уравнение плоскости имеет вид $2(x+1)+3(y+1)+4(z-2)=0$,

откуда

$$2x+3y+4z-3=0\,.$$

2.7. Найти угол между плоскостями $3y-z=0$ и $2y+z=0$.

Решение

Из уравнений плоскостей найдем нормальные векторы $\overline{N_1}=(0;3;-1)$ и $\overline{N_2}=(0;2;1)$.

По формуле (2.6) косинус угла между плоскостями

$$\cos\varphi=\frac{\overline{N_1}\cdot\overline{N_2}}{\left|\overline{N_1}\right|\cdot\left|\overline{N_2}\right|}=\frac{0+6-1}{\sqrt{0^2+3^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{0^2+2^2+1^2}}=\frac{5}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\,,$$

тогда $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$.

2.8. Найти расстояние от точки $A(1;3;-2)$ до плоскости $2x - 3y - 4z + 28 = 0$.

Решение

По формуле (2.5) искомое расстояние

$$d = \frac{|2 \cdot 1 - 3 \cdot 3 - 4 \cdot (-2) + 28|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + (-4)^2}} = 1.$$

2.9. Найти расстояние между параллельными плоскостями $4x + 3y - 5z - 8 = 0$ и $4x + 3y - 5z + 12 = 0$.

Решение

Задача сводится к отысканию расстояния от произвольной точки одной плоскости до другой плоскости.

Найдем координаты какой-нибудь точки, лежащей, например, на плоскости $4x + 3y - 5z - 8 = 0$. Для этого двум переменным можно придать произвольные значения, например, $y = 0$ и $z = 0$, тогда $4x - 8 = 0$, откуда $x = 2$.

Получим точку $M_0(2;0;0)$ и найдем расстояние от нее до плоскости $4x + 3y - 5z + 12 = 0$ по формуле (2.5)

$$d = \frac{|4 \cdot 2 + 3 \cdot 0 - 5 \cdot 0 + 12|}{\sqrt{4^2 + 3^2 + (-5)^2}} = 2\sqrt{2}.$$

2.10. Дано уравнение плоскости $x - 4y - 8z - 3 = 0$. Определить координаты нормального вектора данной плоскости и найти координаты какой-либо точки M_0, лежащей на данной плоскости.

2.11. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(-2;3;1)$ перпендикулярно вектору $\overline{M_1M_2}$, если $M_2(1;-2;4)$.

2.12. Составить уравнение плоскости α, проходящей через точку $M_0(1;1;1)$ параллельно плоскости $\beta: -2x + y - z + 1 = 0$. Найти расстояние между плоскостями α и β.

2.13. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2;-1;4)$ перпендикулярно: а) оси Ox; б) оси Oy; в) оси Oz.

2.14. Определить положение заданных плоскостей в пространстве:

а) $3z+4=0$; б) $3y+3=0$; в) $2x-9=0$;

г) $z=0$; д) $2x-3y-2=0$; е) $x-2z+3=0$;

ж) $-3y+5z+1=0$; з) $x+3z=0$;

и) $y-7z=0$; к) $-3x+y=0$.

2.15. Исследовать взаимное положение двух плоскостей α и β. При этом, в случае параллельности плоскостей α и β, найти расстояние между ними; в противном случае – найти угол между данными плоскостями:

а) $\alpha: x-y+1=0$, $\beta: y-z+1=0$;

б) $\alpha: 2x-y+z-1=0$, $\beta: -4x+2y-2z-1=0$;

в) $\alpha: 3x+y-z+1=0$, $\beta: 9x+3y-3z+3=0$;

г) $\alpha: 2x-2y-2z+5=0$, $\beta: x-2y+3z+8=0$.

2.16. Определить, при каких значениях l и m плоскости $\alpha: 2x+ly+3z-5=0$ и $\beta: mx-6y-6z=0$ будут параллельны.

2.17. Определить, при каком значении m плоскости $\alpha: 3x-5y+mz-3=0$ и $\beta: x+3y+2z+5=0$ будут перпендикулярны.

2.18. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2;3;4)$ и отсекающей на осях Ox и Oy отрезки $a=1$; $в=-1$.

2.19. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2;-3;3)$ и отсекающей на осях Oy и Oz вдвое большие отрезки, чем на оси Ox.

2.20. Вычислить объем пирамиды, ограниченной плоскостью $\alpha: 2x-3y+6z-12=0$ и координатными плоскостями.

2.21. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(1;2;0)$, $M_2(2;1;1)$, $M_3(3;0;1)$.

2.22. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(-3;4;1)$ параллельно двум векторам $\overline{a_1}=(2;-1;4)$ и $\overline{a_2}=(0;1;-3)$.

2.23. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1;1;1)$ и $M_2(3;3;-1)$ параллельно вектору $\overline{a}=(0;-1;2)$.

2.24. Составить уравнение плоскости α , проходящей:

а) через точку $A(1;-1;3)$ и ось Ox ;

б) через точку $B(2;1;-1)$ и ось Oy ;

в) через точку $C(-1;2;3)$ и ось Oz .

2.25. Составить уравнение плоскости, проходящей:

а) через точки $M_1(3;1;0)$ и $M_2(1;3;0)$ параллельно оси Oz ;

б) через точки $M_1(-2;0;3)$ и $M_2(0;3;1)$ параллельно оси Oy ;

в) через точки $M_1(3;-1;4)$ и $M_2(2;1;3)$ параллельно оси Ox .

2.26. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1;1;1)$ и $M_2(3;3;-1)$ перпендикулярно плоскости $x+2y-3z+8=0$.

2.27. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(3;-1;-5)$ и перпендикулярно плоскостям $3x-2y+2z+7=0$ и $5x-4y+3z+1=0$.

2.28. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(0;2;0)$, $M_2(2;0;0)$ и образующей угол 60^0 с плоскостью $x=0$.

2.29. Плоскость проходит через ось Oz и составляет с плоскостью $2x+y-\sqrt{5}z=0$ угол $\dfrac{\pi}{3}$. Составить уравнение этой плоскости.

2.30. Вычислить угол между плоскостями, проходящими через точку $M_0(1;-1;-1)$, одна из которых содержит ось Ox, а другая – ось Oz.

2.31. Установить, что три плоскости $x-2y+z-7=0$, $2x+y-z+2=0$, $x-3y+2z-11=0$ имеют одну общую точку и вычислить ее координаты.

2.32. Доказать, что три плоскости $2x-y+3z-5=0$, $3x+y+2z-1=0$, $4x+3y+z+2=0$ пересекаются по трем различным параллельным прямым.

2.33. Определить, при каких значениях a и $в$ плоскости $2x-y+3z-1=0$, $x+2y-z+в=0$, $x+ay-6z+10=0$:

а) имеют одну общую точку;
б) проходят через одну прямую;
в) пересекаются по трем различным параллельным прямым.

2.34. Доказать, что три плоскости $2x-y-z+2=0$, $x+2y+3z-1=0$, $7x+4y+7z+1=0$ проходят через одну прямую.

2.2. Прямая в пространстве

Для задания прямой в пространстве одного уравнения недостаточно. Это объясняется тем, что всякое уравнение $F(x,y,z)=0$ с тремя переменными x,y,z задает в пространстве некоторую поверхность S, а не линию.

Рассмотрим различные виды уравнений прямой в пространстве.

1) *Уравнения прямой (рис.2.7), проходящей через точку* $M_0(x_0,y_0,z_0)$ *параллельно направляющему вектору* $\overline{S}=(m,n,p)$.

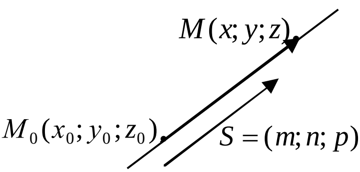


Рис. 2.7

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}. \qquad (2.9)$$

Уравнения (2.9) называются *каноническими уравнениями прямой*.

Уравнения (2.9) получены из следующих соображений.

Если $M(x, y, z)$ – произвольная точка прямой, то вектор $\overline{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ коллинеарен вектору $\overline{S}$, а значит их координаты пропорциональны, из чего и следуют уравнения (2.9).

2) *Уравнения прямой (рис.2.8), проходящей через две точки* $M_1(x_1, y_1, z_1)$ *и* $M_2(x_2, y_2, z_2)$.

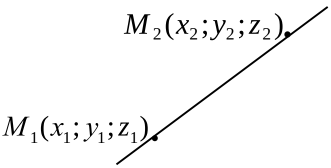


Рис. 2.8

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \qquad (2.10)$$

Уравнения (2.10) также являются *каноническими уравнениями* прямой, так как числа, стоящие в знаменателях, есть координаты вектора $\overline{M_1M_2}$, являющегося направляющим для данной прямой.

3) *Параметрические уравнения прямой в пространстве*

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \quad \text{где } t \in R. \\ z = z_0 + pt, \end{cases} \qquad (2.11)$$

Уравнения (2.11) получаются из канонических уравнений (2.9), если все три отношения в них приравнять к некоторому параметру t, а затем выразить x, y и z через t.

При этом (x_0, y_0, z_0) – координаты точки M_0, через которую проходит прямая параллельно направляющему вектору $\overline{S} = (m, n, p)$.

Замечание. Если какая-либо координата вектора $\overline{S}$ равна 0, то равен 0 и знаменатель соответствующей дроби в уравнениях

(2.9). Не следует воспринимать такую дробь как деление на 0. Если, например, $\overline{S}=(0,n,p)$, то уравнения (2.9) примут вид $\dfrac{x-x_0}{0}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$.

Перейдем к параметрическим уравнениям прямой. Получим

$$\begin{cases}\dfrac{x-x_0}{0}=t,\\ \dfrac{y-y_0}{n}=t,\\ \dfrac{z-z_0}{p}=t,\end{cases}\quad \text{где } t\in R, \qquad \text{или} \quad \begin{cases}x-x_0=0,\\ y=y_0+nt,\\ z=z_0+pt.\end{cases}$$

Первое уравнение $x=x_0$ означает, что прямая лежит на плоскости $x=x_0$, перпендикулярной оси OX.

4) *Общие уравнения прямой в пространстве*

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.\end{cases} \tag{2.12}$$

Уравнения (2.12) задают прямую, как линию пересечения двух плоскостей. Общие уравнения прямой могут быть преобразованы к каноническому или параметрическому виду.

5) Пусть даны две прямые, заданные каноническими уравнениями

$$l_1:\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1},$$

$$l_2:\frac{x_1-x_2}{m_2}=\frac{y_1-y_2}{n_2}=\frac{z_1-z_2}{p_2}.$$

Угол φ между прямыми l_1 и l_2 определяется как угол между направляющими векторами данных прямых $\bar{S}_1 = (m_1, n_1, p_1)$ и $\bar{S}_2 = (m_2, n_2, p_2)$

$$\cos\varphi = \frac{\overline{S_1} \cdot \overline{S_2}}{\left|\overline{S_1}\right| \cdot \left|\overline{S_2}\right|}$$ или в координатной форме

$$\cos\varphi = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}. \qquad (2.13)$$

6) *Условие параллельности двух прямых* l_1 *и* l_2

$$\bar{S}_1 \parallel \bar{S}_2 \qquad \text{или} \qquad \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}. \qquad (2.14)$$

7) *Условие перпендикулярности двух прямых* l_1 *и* l_2

$$\bar{S}_1 \perp \bar{S}_2 \qquad \text{или} \qquad m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0. \qquad (2.15)$$

2.35. Составить канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(-2;3;1)$ параллельно вектору $\bar{S} = (2;5;3)$.

Решение

Используя уравнения вида (2.9), получим канонические уравнения прямой

$$\frac{x+2}{2} = \frac{y-3}{5} = \frac{z-1}{3}.$$

Приравняем отношения к параметру t и решим полученную систему относительно x, y и z.

$$\begin{cases} \dfrac{x+2}{2} = t, \\ \dfrac{y-3}{5} = t, \\ \dfrac{z-1}{3} = t \end{cases} \quad \text{где } t \in R \qquad \text{или} \qquad \begin{cases} x = -2 + 2t, \\ y = 3 + 5t, \\ z = 1 + 3t. \end{cases}$$

Получили параметрические уравнения прямой.

2.36. Составить уравнения прямой, проходящей через две точки $M_1(2;-3;4)$ и $M_2(1;-3;6)$.

Решение

Используя уравнения вида (2.10), получим

$$\frac{x-2}{1-2}=\frac{y+3}{-3+3}=\frac{z-4}{6-4};$$

$$\frac{x-2}{-1}=\frac{y+3}{0}=\frac{z-4}{2};$$

где $\overline{S}=(-1;0;2)$.

Перейдем к параметрическим уравнениям

$$\begin{cases} \dfrac{x-2}{-1}=t, \\ y+3=0, \\ \dfrac{z-4}{2}=t, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x=2-t \\ y=-3 \\ z=4+2t, \end{cases} \quad \text{где } t\in R.$$

Данная прямая лежит на плоскости $y=-3$, перпендикулярной оси OY, т.е. параллельна плоскости XOZ.

2.37. Прямая задана, как пересечение двух плоскостей

$$\begin{cases} x-2y+z=5, \\ 2x+y-z=0. \end{cases}$$

Записать канонические уравнения данной прямой.

Решение

I способ. Для того, чтобы получить канонические уравнения прямой, необходимо найти:

1) хотя бы одну точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$, принадлежащую данной прямой;

2) направляющий вектор $\overline{S}=(m;n;p)$.

Найдем точку M_0, принадлежащую данной прямой.

Полагая в системе $\begin{cases} x-2y+z=5, \\ 2x+y-z=0 \end{cases}$ одну из переменных, например z , равной 0, $(z=0)$, получим систему

$$\begin{cases} x-2y=5, \\ 2x+y=0. \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение $x=1,\ y=-2.$ Следовательно, прямая проходит через точку $M_0(1;-2;0)$.

Найдем направляющий вектор $\overline{S}$ данной прямой.

Так как прямая задается как пересечение двух плоскостей $x-2y+z=5$ и $2x+y-z=0$, то ее направляющий вектор одновременно перпендикулярен нормальному вектору первой плоскости $\overline{N_1}=(1;-2;1)$ и нормальному вектору второй плоскости $\overline{N_2}=(2;1;-1)$, а значит его можно определить как векторное произведение $\overline{N_1}$ и $\overline{N_2}$, т.е.

$$\overline{S}=\overline{N_1}\times\overline{N_2}=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}=$$

$$=\bar{i}\cdot\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}-\bar{j}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}+\bar{k}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=\bar{i}+3\bar{j}+5\bar{k}=(1;3;5).$$

Используя уравнение (2.9), получим

$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z-0}{5}$ – канонические уравнения искомой прямой.

II способ. Для того, чтобы получить канонические уравнения прямой, можно найти какие-либо две точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$ и $M_1(x_1,y_1,z_1)$, лежащие на данной прямой и использовать уравнение (2.10). Поскольку одну точку $M_0(1;-2;0)$ мы нашли, подумайте, как найти вторую точку и решите задачу указанным способом самостоятельно.

2.38. Составить уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(2;0;3)$, и:

а) параллельной прямой $\dfrac{x-2}{5}=\dfrac{y+3}{3}=\dfrac{z}{-3}$;

б) параллельной оси OZ;

в) образующей с осями координат углы $\alpha=\dfrac{\pi}{3};\beta=\dfrac{\pi}{4};\ \gamma=\dfrac{2\pi}{3}$.

Решение

а) В качестве направляющего вектора искомой прямой возьмем направляющий вектор данной прямой, т.е. $\overline{S}=(5;3;-3)$.

По формуле (12.9) получим

$$\frac{x-2}{5}=\frac{y-0}{3}=\frac{z-3}{-3}$$ – канонические уравнения прямой.

б) В качестве направляющего вектора искомой прямой возьмем орт оси OZ, т.е. вектор $\overline{k}=(0;0;1)$. Тогда канонические уравнения искомой прямой примут вид

$$\frac{x-2}{0}=\frac{y-0}{0}=\frac{z-3}{1}.$$

Перейдем к параметрическим уравнениям

$$\begin{cases}\dfrac{x-2}{0}=t,\\ \dfrac{y}{0}=t,\\ \dfrac{z-3}{1}=t,\end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases}x=2\\ y=0\\ z=3+t,\end{cases} \quad \text{где } t\in R.$$

Из них следует, что прямая является пересечением плоскостей $x=2$ и $y=0$.

в) В качестве направляющего вектора искомой прямой рассмотрим вектор $\overline{S}$ единичной длины и образующий углы

$$\alpha=\frac{\pi}{3};\ \beta=\frac{\pi}{4};\ \gamma=\frac{2\pi}{3}$$

с координатными осями OX, OY, OZ соответственно. Такой вектор имеет вид

$$\overline{S}=(\cos\alpha;\ \cos\beta;\ \cos\gamma),$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – направляющие косинусы.

Следовательно, в нашем случае

$$\overline{S}=\left(\cos\frac{\pi}{3};\ \cos\frac{\pi}{4};\ \cos\frac{2\pi}{3}\right)=\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{1}{2}\right).$$

По формуле (2.9) получим $\dfrac{x-2}{\frac{1}{2}}=\dfrac{y-0}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{z-3}{-\frac{1}{2}}$ или

$\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y}{\sqrt{2}}=\dfrac{z-3}{-1}$ – канонические уравнения искомой прямой.

2.39. Составить канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(-1;2;-4)$ параллельно вектору $\overline{s}=(2;-7;1)$.

2.40. Составить канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через заданные точки M_1 и M_2, если

а) $M_1(1;-2;1)$, $M_2(3;1;-1)$;

б) $M_1(3;-1;-3)$, $M_2(1;0;-3)$.

2.41. Составить канонические и параметрические уравнения прямой, заданной как пересечение двух плоскостей

$$\begin{cases}3x-y+2z-1=0,\\ x+3y-2z+3=0.\end{cases}$$

2.42. Составить уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(2;0;-3)$ параллельно:

а) прямой $\frac{x-1}{5}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+1}{-1}$;

б) оси Ox;

в) оси Oy;

г) прямой $\begin{cases} x=-2+t, \\ y=2t, \\ z=1-\frac{1}{2}t; \end{cases}$

д) прямой $\begin{cases} 2x-y+2z-3=0, \\ x+2y-z-1=0. \end{cases}$

2.43. Составить уравнение прямой, проходящей через точку точки $M_0(1;-3;5)$ и образующей с осями координат углы

$$\alpha=\frac{\pi}{4},\ \beta=\frac{\pi}{3},\ \gamma=\frac{2\pi}{3}.$$

2.44. Найти угол между прямыми l_1 и l_2, если:

а) $l_1: \frac{x}{2}=\frac{y-3}{4}=\frac{z+1}{3}$, $\quad l_2: \frac{x-1}{0}=\frac{y+7}{3}=\frac{z-1}{4}$;

б) $l_1: \begin{cases} x=2t-3, \\ y=3t+1, \\ z=t-4; \end{cases}$ $\quad l_2: \begin{cases} x-y-4z-5=0, \\ 2x+y-2z-4=0. \end{cases}$

2.45. Найти угол между прямой $\begin{cases} x-2z=-1, \\ y+2z=1 \end{cases}$ и прямой, проходящей через начало координат и точку $M_0(1;-1;-1)$.

2.46. При каком значении параметра α прямые

$$l_1: \frac{x-1}{6}=\frac{y+2}{\alpha}=\frac{z-1}{3} \quad \text{и} \quad l_2: \begin{cases} x=2t-3, \\ y=-t+4, \\ z=2 \end{cases}$$

будут перпендикулярны?

2.47. При каких значениях параметров α и β прямые

$$l_1: \frac{x}{\alpha} = \frac{y-2}{6} = \frac{z+1}{2} \quad \text{и} \quad l_2: \begin{cases} x = -2t + 3, \\ y = 3t, \\ z = 5 + \beta t \end{cases}$$

будут параллельны?

2.3. Прямая и плоскость в пространстве

Рассмотрим смешанные задачи на прямую и плоскость в пространстве.

Пусть дана прямая $l: \dfrac{x-x_0}{m} = \dfrac{y-y_0}{n} = \dfrac{z-z_0}{p}$ с направляющим вектором $\overline{S} = (m, n, p)$ и плоскость $\alpha: Ax + By + Cz + D = 0$ с нормалью $\overline{N} = (A, B, C)$.

1) *Угол φ между прямой l и плоскостью α* определяется формулой

$$\sin\varphi = \frac{\overline{N} \cdot \overline{S}}{\overline{N} \cdot \overline{S}} = \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \qquad (2.16)$$

2) *Условие параллельности прямой и плоскости (рис. 2.9)*

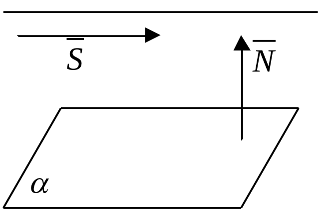


Рис. 2.9

$\overline{N} \perp \overline{S}$, или

$$Am + Bn + Cp = 0. \qquad (2.17)$$

3) *Условие перпендикулярности прямой и плоскости (рис. 2.10)*:

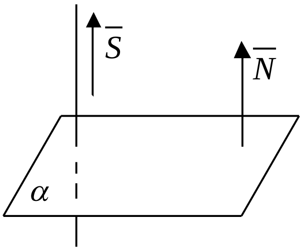


Рис. 2.10

$$\overline{N} \parallel \overline{S} \text{ или}$$

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}. \qquad (2.18)$$

2.48. Найти угол между плоскостью $2x+2y+z-4=0$ и прямой $\begin{cases} 2x+y+z-2=0, \\ 2x-y-3z+6=0. \end{cases}$

Решение

Найдем направляющий вектор $\overline{S}$ заданной прямой

$$\overline{S} = \overline{N_1} \times \overline{N_2} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -2\bar{i} + 8\bar{j} - 4\bar{k} = (-2;8;-4).$$

Нормаль к плоскости $\overline{N} = (2;2;1)$.

Синус угла между прямой и плоскостью по формуле (2.16)

$$\sin\varphi = \frac{\overline{N} \cdot \overline{S}}{|\overline{N}| \cdot |\overline{S}|} = \frac{2\cdot(-2) + 2\cdot 8 + 1\cdot(-4)}{\sqrt{2^2+2^2+1^2} \cdot \sqrt{(-2)^2+8^2+(-4)^2}} = \frac{4}{3\sqrt{21}},$$

откуда $\varphi = \arcsin\dfrac{4}{3\sqrt{21}}$.

2.49. Показать, что прямая $\dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-3}{5}$:

а) параллельна плоскости $2x+y-z=0$;

б) лежит на плоскости $2x+y-z+8=0$.

Решение

Если прямая параллельна плоскости, то ни одна точка прямой не принадлежит плоскости, а если прямая лежит в плоскости, то каждая точка прямой принадлежит плоскости. Воспользуемся этим подходом при решении данной задачи.

Перейдем к параметрическим уравнениям прямой:

$$\begin{cases} \dfrac{x+2}{2} = t, \\ \dfrac{y+1}{1} = t, \\ \dfrac{z-3}{5} = t, \end{cases} \qquad \text{или} \qquad \begin{cases} x = 2t-2, \\ y = t-1, \\ z = 5t+3. \end{cases}$$

а) Подставим полученные равенства в уравнение плоскости $2x + y - z = 0$ и получим

$2(2t-2) + t - 1 - (5t+3) = 0$ или, раскрывая скобки, $-8 \neq 0,$ что означает, что ни одна точка прямой не лежит на плоскости, а значит прямая параллельна данной плоскости.

б) Подставим полученные равенства

$$x = 2t-2, \quad y = t-1, \quad z = 5t+3$$

в уравнение плоскости $2x + y - z + 8 = 0$

$$2(2t-2) + t - 1 - 5t - 3 + 8 = 0,$$

в результате получим тождество $0 \equiv 0,$ что означает, что каждая точка прямой лежит на данной плоскости, а следовательно, плоскость проходит через данную прямую.

2.50. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(-2;1;3)$ перпендикулярно плоскости $3x - 2y + 5z + 1 = 0.$

Решение

Так как прямая перпендикулярна данной плоскости, то в качестве направляющего вектора $\overline{S}$ следует взять нормаль $\overline{N} = (3;-2;5)$ к данной плоскости.

Используя уравнение прямой (2.9), получим

$$\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-3}{5}$$ – канонические уравнения искомой прямой.

2.51. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2;3;-4)$ перпендикулярно прямой $\begin{cases} x=2t-3, \\ y=-t+1, \\ z=3t-5. \end{cases}$

Решение

Из уравнения данной прямой получим направляющий вектор $\overline{S}=(2;-1;3)$. Так как плоскость перпендикулярна прямой, то в качестве нормального вектора плоскости $\overline{N}$ следует взять вектор $\overline{S}=(2;-1;3)$. Известны точка M_0 и нормаль $\overline{N}$, следовательно, уравнение плоскости имеет вид

$$2(x-2)-(y-3)+3(z+4)=0$$

или

$$2x-y+3z+11=0.$$

2.52. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-4}{3}$ и точку $M_1(3;4;5)$ (рис. 2.11).

Решение

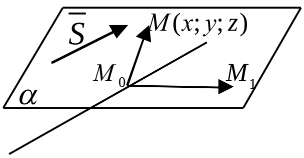


Рис. 2.11

Из уравнений прямой определим направляющий вектор $\overline{S}=(1;2;3)$ и координаты точки $M_0(2;3;4)$, лежащей на данной прямой.

Так как плоскость проходит через прямую, то точка M_0 принадлежит плоскости, а направляющий вектор $\overline{S}$ параллелен плоскости. Если $M(x,y,z)$ – произвольная точка искомой плоскости, то три вектора $\overline{M_0M}=(x-2;y-3;z-4)$, $\overline{M_0M_1}=(1;1;1)$ и

$\overline{S} = (1;2;3)$ компланарны, а следовательно, определитель, составленный из их координат, равен 0, т.е.

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \text{ или } \quad x - 2y + z = 0 .$$

2.53. Найти точку пересечения прямой $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-1}{-1}$ с плоскостью $3x - 2y + z = 0$.

Решение

Получим параметрические уравнения прямой

$$\begin{cases} x = 2t - 1, \\ y = t + 2, \\ z = -t + 1 \end{cases}$$

и решим совместно с уравнением плоскости $3x - 2y + z = 0$.

Получим $3(2t-1) - 2(t+2) - t + 1 = 0,$ откуда $t = 2.$

Определим координаты точки пересечения M_0, подставив $t = 2$ в параметрические уравнения прямой $x = 3; y = 4; z = -1.$

Итак, $M_0(3;4;-1)$ – точка пересечения прямой и плоскости.

2.54. Найти проекцию точки $M(3;1;-1)$ на плоскости $x + 2y + 3z - 30 = 0$

Решение

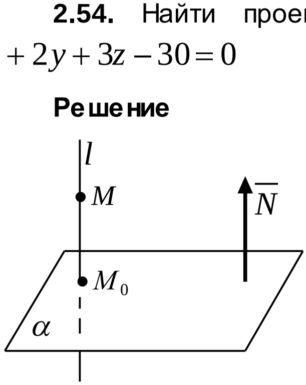


Рис. 2.12

Необходимо найти координаты точки M_0, являющейся основанием перпендикуляра, опущенного из точки M на плоскость α (рис.2.12).

Составим уравнения перпендикуляра, проходящего через точку $M(3;1;-1)$, взяв в качестве направляющего вектора $\overline{S}$ нормальный вектор плоскости $\overline{N} = (1;2;3).$

Итак, $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+1}{3}$ – уравнения перпендикуляра.

Перейдем к параметрическим уравнениям $\begin{cases} x=t+3, \\ y=2t+1, \\ z=3t-1 \end{cases}$

и найдем точку пересечения с плоскостью α. Для этого решим систему уравнений

$$\begin{cases} x+2y+3z-30=0, \\ x=t+3, \\ y=2t+1, \\ z=3t-1. \end{cases}$$

Получим $t=2$. Тогда $x=5$, $y=5$, $z=5$, т.е. точка $M_0(5;5;5)$ – проекция точки M на плоскость α.

2.55. Найти проекцию точки $M(1;-1;-2)$ на прямую

$$\frac{x+3}{3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-8}{-2}.$$

Решение

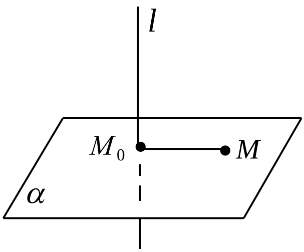


Рис. 2.13

Сведем решение данной задачи к рассмотренным выше.

Для этого проведем через точку M плоскость α, перпендикулярную к данной прямой, тогда точка пересечения M_0 прямой и плоскости и будет являться проекцией точки M на данную прямую (рис.2.13).

1) Составим уравнение плоскости α, проходящей через точку $M(1;-1;-2)$ перпендикулярно прямой $\dfrac{x+3}{3}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-8}{-2}$. В

качестве нормального вектора $\overline{N}$ возьмем направляющий вектор прямой $\overline{S} = (3;2;-2)$. Итак, уравнение плоскости α примет вид

$$3(x-1)+2(y+1)-2(z+2)=0 \text{ или}$$

$$3x+2y-2z-5=0.$$

2) Перейдем к параметрическим уравнениям прямой

$x = 3t-3; y = 2t-2; z = -2t+8$ и найдем точку пересечения прямой с плоскостью, решив систему

$$\begin{cases} 3x+2y-2z-5=0; \\ x = 3t-3; \\ y = 2t-2; \\ z = -2t+8, \end{cases} \quad \text{получим } t = 2.$$

Тогда $x = 3, y = 2, z = 4$, т.е. $M_0(3;2;4)$ – проекция точки M на данную прямую.

2.56. В условиях задачи 2.55 найти расстояние от точки M до данной прямой.

Решение

Расстояние от точки M до прямой l равно расстоянию от точки M до проекции M_0 на данную прямую, следовательно,

$$d = |MM_0| = \sqrt{(3-1)^2+(2-(-1))^2+(4-(-2))^2} = 7.$$

2.57. Найти угол между плоскостью $x+y-z+1=0$ и прямой l, если:

а) $l: \begin{cases} x=1, \\ y=2t, \\ z=t-1, \end{cases}$ б) $l: \dfrac{x+2}{4} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z+1}{-1}$;

в) $l: \begin{cases} x-y+3z=0, \\ 2x+y-z+3=0. \end{cases}$

2.58. Показать, что прямая $\begin{cases} x = 3t-2, \\ y = -4t+1, \\ z = 4t-5 \end{cases}$ параллельна плоскости $4x-3y-6z-5=0$.

2.59. Показать, что прямая $\begin{cases} 5x-3y+2z-5=0, \\ 2x-y-z-1=0 \end{cases}$ лежит в плоскости $4x-3y+7z-7=0$.

2.60. При каком значении a прямая $\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{a} = \frac{z+3}{-2}$ параллельна плоскости $x-3y+6z+7=0$?

2.61. При каких значениях a и $в$ прямая $\frac{x-2}{a} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-5}{-3}$ перпендикулярна к плоскости $3x-2y+вz+1=0$?

2.62. При каких значениях A и B плоскости $Ax+By+3z-5=0$ перпендикулярна к прямой $\begin{cases} x = 2t+3, \\ y = -3t+5, \\ z = -2t-2 \end{cases}$

2.63. Найти точку пересечения плоскости α и прямой l:

а) $\alpha: 2x+3y+z-1=0$, $\quad l: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{6}$;

б) $\alpha: x-2y+z-15=0$, $\quad l: \frac{x+3}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{-5}$;

в) $\alpha: x+2y-2z+6=0$, $\quad l: \frac{x+2}{-2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-3}{2}$;

г) $\alpha: x-2y+z-7=0$, $\quad l: \begin{cases} 2x+y-z+2=0, \\ x-3y+2z-11=0. \end{cases}$

2.64. Составить уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(2;-3;-5)$ перпендикулярно к плоскости $6x-3y-5z+2=0$.

2.65. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(1;-1;-1)$ перпендикулярно к прямой:

а) $\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y-1}{-3}=\dfrac{z+2}{4}$; б) $\begin{cases} x-2y+z-3=0, \\ x+y-z+2=0. \end{cases}$

2.66. Найти проекцию точки $M(5;2;-1)$ на плоскость $2x-y+3z+23=0$.

2.67. Найти точку Q, симметричную точке $P(1;3;-4)$ относительно плоскости $3x+y-2z=0$.

2.68. Найти проекцию точки $M(2;-1;3)$ на прямую

$$\begin{cases} x=3t, \\ y=5t-7, \\ z=2t+2. \end{cases}$$

2.69. Найти точку Q, симметричную точке $P(4;1;6)$ относительно прямой $\begin{cases} x-y-4z+12=0, \\ 2x+y-2z+3=0. \end{cases}$

2.70. Найти проекцию точки $M(2;-5;7)$ на прямую, проходящую через две точки $M_1(5;4;6)$ и $M_2(-2;-17;-8)$.

2.71. Вычислить расстояние от точки $P(2;3;-1)$ до прямой:

а) $\dfrac{x-5}{3}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+25}{-2}$; б) $\begin{cases} x=t+1, \\ y=t+2, \\ z=4t+13; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x-2y+z+3=0, \\ 3x-2y+2z+17=0. \end{cases}$

2.72. Составить уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $M(2;1;0)$ на прямую $\begin{cases} x-3z+1=0, \\ y-2z=0. \end{cases}$

(***Указание:*** найти предварительно проекцию точки M на прямую.)

2.73. Составить уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $M(1;0;-1)$ на прямую $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-3}$.

2.74. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2;-2;1)$ и прямую:

а) $\begin{cases} x=2t+1, \\ y=-3t+2, \\ z=2t-3, \end{cases}$ б) $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+2}{-1}$;

в) $\begin{cases} x+y+z-1=0, \\ 2x-y-z+4=0. \end{cases}$

2.75. Показать, что прямые l_1 и l_2 лежат в одной плоскости и составить уравнение этой плоскости:

а) $l_1: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z-5}{4}$; $l_2: \dfrac{x-7}{3}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-1}{-2}$;

б) $l_1: \dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-3}{-2}$; $l_2: \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+3}{-2}$.

3. КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

Вариант 1

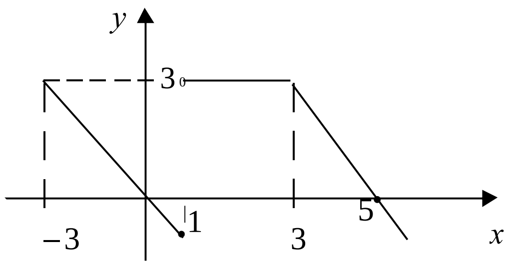
1. Построить прямые. Определить параметры k и b для каждой из прямых:

а) $3x - y + 6 = 0$; б) $5x + 7y = 0$; в) $3x - 4 = 0$; г) $5y + 4 = 0$.

2. Написать общие уравнения прямых, проходящих через:
   1) Точку $M_1(3;1)$ под углом $\varphi = 135^0$ к оси OX .
   2) Точки $M_1(3;1)$ и $M_2(-1;\ 2)$.
   3) Точку $M_2(-1;\ 2)$ параллельно оси абсцисс.
   4) Точку $M_1(3;1)$ перпендикулярно вектору $\overline{N} = (1;5)$.
   5) Точку $M_1(3;1)$ и отсекающую на осях равные отрезки.
   6) Найти расстояние от точки $M_1(3;1)$ до прямой
   $$l: x + 3y - 4 = 0 .$$
   7) Найти тангенс острого угла между прямыми, найденными в пунктах 1 и 2.

3. Написать уравнение прямой, проходящей через точку M пересечения прямых l_1: $5x - y + 10 = 0$ и l_2: $x + y + 2 = 0$ параллельно прямой l: $x + 3y = 0$.

4. Задайте функцию аналитически.



5. Построить множество решений системы неравенств

$$\begin{cases} 3x+2y\ge 11, \\ -2x+y\le 2, \\ x-3y\le 0, \\ x\ge 0, \\ y\ge 0. \end{cases}$$

6. Построить кривые по заданным уравнениям. Найти фокусы, эксцентриситет, уравнение директрис:

а) $(x-2)^2+(y-3)^2=9$; б) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$;

в) $\dfrac{x^2}{49}-\dfrac{y^2}{25}=1$; г) $y^2=9x$;

д) $x^2+y^2+x=0$.

7. Составить уравнение плоскости α, проходящей через точку $M_0(1;-2;4)$, перпендикулярно вектору $\overline{N}=(2;3;-5)$. Найти расстояние от точки M_0 до заданной плоскости $\beta: 3x-5z=2$ и угол между плоскостями α и β.

8. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки M_1(-1;3;4), M_2(0;1;7), M_3(5;-1;4).

9. Записать канонические и параметрические уравнения прямой

$$\begin{cases} x-3y+2z+z=0, \\ x+3y+z+14=0. \end{cases}$$

10. Найти угол между прямой $l: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$ и плоскостью α, проходящей через три точки $M_1(1;-3;4)$, $M_2(0;-1;1)$, $M_3(2;0;1)$.

Вариант 2

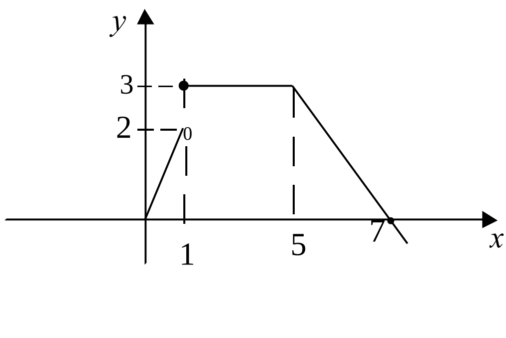
1. Построить прямые. Определить параметры k и b для каждой из прямых:

а) $x-5y+3=0$, б) $2x-3y=0$, в) $5-2x=0$, г) $3y-4=0$.

2. Написать общие уравнения прямых, проходящих через:
   1) Точку $M_1(0;-1)$ под углом $\varphi=60^0$ к оси OX .
   2) Точки $M_1(0;-1)$ и $M_2(2;-2)$.
   3) Точку $M_2(2;-2)$ параллельно оси абсцисс.
   4) Точку $M_1(0;-1)$ перпендикулярно вектору $\overline{N}=(-4;3)$.
   5) Точку $M_1(0;-1)$ и отсекающую на осях равные отрезки.
   6) Найти расстояние от точки $M_1(0;-1)$ до прямой
   $$l: -x+2y-5=0 .$$
   7) Найти тангенс острого угла между прямыми, найденными в пунктах 1 и 2.

3. Написать уравнение прямой, проходящей через точку M пересечения прямых $l_1:\ 2x-3y+5=0$ и $l_2:\ 3x+y-7=0$ параллельно прямой $l:\ y=2x$.

4. Задайте функцию аналитически.



5. Построить множество решений системы неравенств

$$\begin{cases} x+2y \le 10, \\ x+2y \ge 2, \\ x-2y \le 0, \\ x \ge 0, \\ y \ge 0. \end{cases}$$

6. Построить кривые по заданным уравнениям. Найти фокусы, эксцентриситет, уравнение директрис:

а) $(x+3)^2+(y-5)^2=4$; б) $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{4}=1$;

в) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$; г) $y^2=7x$;

д) $4x^2+y^2+24x-2y+1=0$.

7. Составить уравнение плоскости α, проходящей через точку $M_0(-4;3;0)$, перпендикулярно вектору $\overline{N}=(0;\,2;\,\text{-}\,3)$. Найти расстояние от точки M_0 до заданной плоскости $\beta: 2\mathrm{x}-3\mathrm{y}+2\mathrm{z}-4=0$ и угол между плоскостями α и β.

8. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(2;3;-1)$, $M_2(4;2;-3)$, $M_3(0;2;5)$.

9. Записать канонические и параметрические уравнения прямой

$$\begin{cases} 2x+3y+z+6=0, \\ x-3y-2z+3=0. \end{cases}$$

10. Найти угол между прямой $l: \begin{cases} x=2t-1, \\ y=-t+3, \\ z=3t+5 \end{cases}$ и плоскостью α, проходящей через три точки $M_1(-1;4;0)$, $M_2(3;0;1)$, $M_3(2;1;3)$.

Вариант 3

1. Построить прямые. Определить параметры k и b для каждой из прямых:

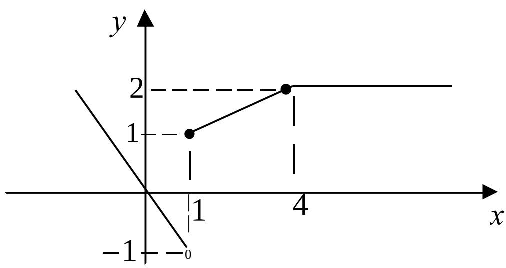
а) $2x - y + 5 = 0$, б) $2x + 7y = 0$, в) $5x - 3 = 0$, г) $7y + 5 = 0$.

2. Написать общие уравнения прямых, проходящих через:

1) Точку $M_1(-1;2)$ под углом $\varphi = 30^0$ к оси OX.
2) Точки $M_1(-1;2)$ и $M_2(4;-3)$.
3) Точку $M_2(4;-3)$ параллельно оси абсцисс.
4) Точку $M_1(-1;2)$ перпендикулярно вектору $\overline{N} = (-1;2)$.
5) Точку $M_1(-1;2)$ и отсекающую на осях равные отрезки.
6) Найти расстояние от точки $M_1(-1;2)$ до прямой
$$l:\ x - 4y + 3 = 0.$$
7) Найти тангенс острого угла между прямыми, найденными в пунктах 1 и 2.

3. Написать уравнение прямой, проходящей через точку M пересечения прямых $l_1:\ 3x - y - 1 = 0$ и $l_2:\ x + 5y - 11 = 0$ параллельно прямой $l:\ x = 2y$.

4. Задайте функцию аналитически.



5. Построить множество решений системы неравенств

$$\begin{cases} -2x + y \le 2, \\ 3x - 4y \le 11, \\ 3x + 4y \ge 19, \\ x \ge 0, \\ y \ge 0. \end{cases}$$

6. Построить кривые по заданным уравнениям. Найти фокусы, эксцентриситет, уравнение директрис:

а) $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 16$; б) $\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{25} = 1$;

в) $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$; г) $y^2 = 5x$;

д) $9x^2 - y^2 - 18x - 2y + 89 = 0$.

7. Составить уравнение плоскости α , проходящей через точку $M_0(2;0;3)$, перпендикулярно вектору $\overline{N} = (3;\ -1;\ 4)$. Найти расстояние от точки M_0 до заданной плоскости $\beta : \mathrm{x} + 4\mathrm{y} - \mathrm{z} + 2 = 0$ и угол между плоскостями α и β .

8. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(3;0;-5)$, $M_2(0;1;2)$, $M_3(4;0;1)$.

9. Записать канонические и параметрические уравнения прямой

$$\begin{cases} 3x + y - z - 6 = 0, \\ 3x - y + 2z = 0. \end{cases}$$

10. Найти угол между прямой $l : \begin{cases} x + 2y - 3z + 5 = 0, \\ 2x - y + z + 2 = 0 \end{cases}$ и плоскостью α , проходящей через три точки $M_1(0;1;4)$, $M_2(-1;3;1)$, $M_3(4;5;1)$.

Вариант 4

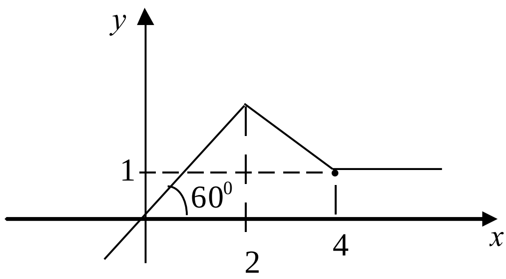
1. Построить прямые. Определить параметры k и b для каждой из прямых:

а) $6x-3y-12=0$, б) $3x-2y=0$, в) $8-3x=0$, г) $5y-2=0$.

2. Написать общие уравнения прямых, проходящих через:
   1) Точку $M_1(2;-2)$ под углом $\varphi=45^0$ к оси OX.
   2) Точки $M_1(2;-2)$ и $M_2(4;-3)$.
   3) Точку $M_2(-4;1)$ параллельно оси абсцисс.
   4) Точку $M_1(2;-2)$ перпендикулярно вектору $\overline{N}=(-3;2)$.
   5) Точку $M_1(2;-2)$ и отсекающую на осях равные отрезки.
   6) Найти расстояние от точки $M_1(2;-2)$ до прямой
   $$l:\ 2x-3y+5=0.$$
   7) Найти тангенс острого угла между прямыми, найденными в пунктах 1 и 2.

3. Написать уравнение прямой, проходящей через точку M пересечения прямых $l_1:\ 3x+2y-7=0$ и $l_2:\ x+2y-5=0$ параллельно прямой $l:\ y+3x=0$.

4. Задайте функцию аналитически.



5. Построить множество решений системы неравенств

$$\begin{cases} x+y\le 4, \\ x+3y\ge 4, \\ 5x+y\ge 4, \\ 0\le x\le 3, \\ 0\le y\le 3. \end{cases}$$

6. Построить кривые по заданным уравнениям. Найти фокусы, эксцентриситет, уравнение директрис:

а) $(x-3)^2+(y+4)^2=25$; б) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$;

в) $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{25}=1$; г) $y^2=16x$;

д) $y^2-2x+2y+7=0$.

7.Составить уравнение плоскости α, проходящей через точку $M_0(-3;4;7)$, перпендикулярно вектору $\overline{N}=(2;0;3)$. Найти расстояние от точки M_0 до заданной плоскости $\beta: 3\mathrm{x}-5\mathrm{y}+3\mathrm{z}=0$ и угол между плоскостями α и β.

8. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(0;-1;3)$, $M_2(2;1;6)$, $M_3(3;5;-1)$.

9. Записать канонические и параметрические уравнения прямой

$$\begin{cases} x+5y+2z+11=0, \\ x-y-z-1=0. \end{cases}$$

10. Найти угол между прямой $l: \frac{x}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+2}{-1}$ и плоскостью α, проходящей через три точки $M_1(2;-3;4)$, $M_2(1;3;1)$, $M_3(0;1;1)$.

Вариант 5

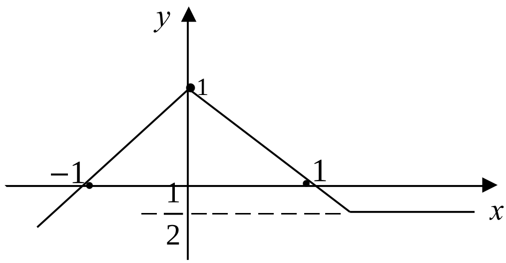
1. Построить прямые. Определить параметры k и b для каждой из прямых:

а) $x-4y+8=0$, б) $3y-2x=0$, в) $6x-15=0$, г) $4-3y=0$.

2. Написать общие уравнения прямых, проходящих через:
   1) Точку $M_1(-3;2)$ под углом $\varphi=120^0$ к оси OX.
   2) Точки $M_1(-3;2)$ и $M_2(4;0)$.
   3) Точку $M_2(4;0)$ параллельно оси абсцисс.
   4) Точку $M_1(-3;2)$ перпендикулярно вектору $\overline{N}=(-1;3)$.
   5) Точку $M_1(-3;2)$ и отсекающую на осях равные отрезки.
   6) Найти расстояние от точки $M_1(-3;2)$ до прямой
   $$l: x+4y-25=0.$$
   7) Найти тангенс острого угла между прямыми, найденными в пунктах 1 и 2.

3. Написать уравнение прямой, проходящей через точку M пересечения прямых $l_1: \ 2x-y+4=0$ и $l_2: \ x+3y-5=0$ параллельно прямой $l: \ x+4y-1=0$.

4. Задайте функцию аналитически.



5. Построить множество решений системы неравенств

$$\begin{cases} 4x-3y\ge -3, \\ x+y\le 8, \\ 2x+y\ge 4, \\ x-3y\le 0, \\ x\ge 0, \\ y\ge 0. \end{cases}$$

6. Построить кривые по заданным уравнениям. Найти фокусы, эксцентриситет, уравнение директрис:

а) $(x+3)^2+(y+3)^2=4$; б) $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{25}=1$;

в) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{9}=1$; г) $y^2=3x$;

д) $x^2+y^2+5x-8y+2=0$.

7. Составить уравнение плоскости α, проходящей через точку $M_0(-2;3;0)$, перпендикулярно вектору $\overline{N}=(5;4;-1)$. Найти расстояние от точки M_0 до заданной плоскости $\beta: \mathrm{x}+7\mathrm{y}-\mathrm{z}+3=0$ и угол между плоскостями α и β.

8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(4;-1;0)$, параллельно векторам $\overline{a}_1=2\overline{i}-3\overline{j}+5\overline{k}$ и $\overline{a}_2=3\overline{i}+\overline{j}-\overline{k}$.

9. Записать канонические и параметрические уравнения прямой

$$\begin{cases} 3x+4y-2z+1=0, \\ 2x-4y+3z+4=0. \end{cases}$$

10. Найти угол между прямой $l: \begin{cases} x=-2t+1, \\ y=5t-1, \\ z=-3t+2 \end{cases}$ и плоскостью α, проходящей через три точки $M_1(4;-1;3)$, $M_2(0;-1;4)$, $M_3(2;-3;1)$.

Вариант 6

1. Построить прямые. Определить параметры k и b для каждой из прямых:

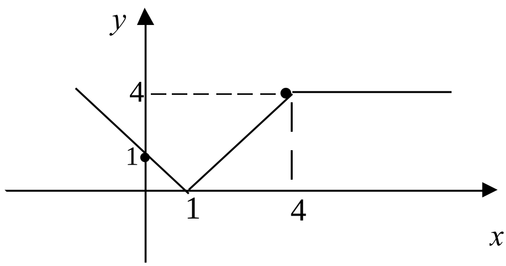
а) $2x+3y+6=0$, б) $4x-10y=0$, в) $5-4x=0$, г) $7y+12=0$.

2. Написать общие уравнения прямых, проходящих через:

1) Точку $M_1(-1;3)$ под углом $\varphi=30^0$ к оси OX.
2) Точки $M_1(-1;3)$ и $M_2(0;5)$.
3) Точку $M_2(0;5)$ параллельно оси абсцисс.
4) Точку $M_1(-1;3)$ перпендикулярно вектору $\overline{N}=(4;3)$.
5) Точку $M_1(-1;3)$ и отсекающую на осях равные отрезки.
6) Найти расстояние от точки $M_1(-1;3)$ до прямой
$$l:\ -2x+3y-14=0.$$
7) Найти тангенс острого угла между прямыми, найденными в пунктах 1 и 2.

3. Написать уравнение прямой, проходящей через точку M пересечения прямых $l_1:\ x+4y-7=0$ и $l_2:\ 2y-x-5=0$ параллельно прямой $l:\ 2x-3y=0$.

4. Задайте функцию аналитически.



5. Построить множество решений системы неравенств

$$\begin{cases} -x+y\le 1, \\ 2x+y\ge 2, \\ x-2y\le 1, \\ x\ge 0, \\ 0\le y\le 4. \end{cases}$$

6. Построить кривые по заданным уравнениям. Найти фокусы, эксцентриситет, уравнение директрис:

а) $(x-1)^2+(y+1)^2=1$; б) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$;

в) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$; г) $y^2=4x$;

д) $x^2+2y^2+4x-8y+12=0$.

7. Составить уравнение плоскости α, проходящей через точку $M_0(5;-1;4)$, перпендикулярно вектору $\overline{N}=(2;-3;0)$. Найти расстояние от точки M_0 до заданной плоскости $\beta: 3x-y+5z-10=0$ и угол между плоскостями α и β.

8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(-2;1;1)$, параллельно векторам $\overline{a}_1=\overline{i}+5\overline{j}+2\overline{k}$ и $\overline{a}_2=2\overline{i}-\overline{j}+3\overline{k}$.

9. Записать канонические и параметрические уравнения прямой

$$\begin{cases} x+5y+2z-5=0, \\ 2x-5y-z+5=0. \end{cases}$$

10. Найти точку пересечения прямой $l: \frac{x-2}{-1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+1}{4}$ и плоскости $\alpha: x+2y+3z-14=0$.

.

Вариант 7

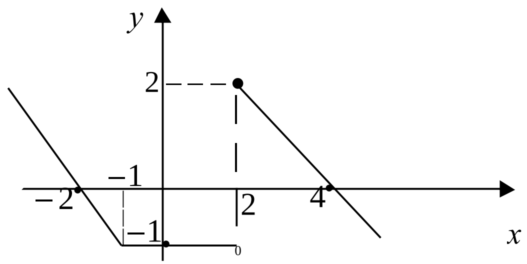
1. Построить прямые. Определить параметры k и b для каждой из прямых:

а) $4x-3y+12=0$, б) $5x-3y=0$, в) $2x+3=0$, г) $\frac{1}{3}y+4=0$.

2. Написать общие уравнения прямых, проходящих через:
   1) Точку $M_1(-3;-2)$ под углом $\varphi=60^0$ к оси OX.
   2) Точки $M_1(-3;-2)$ и $M_2(0;2)$.
   3) Точку $M_2(0;2)$ параллельно оси абсцисс.
   4) Точку $M_1(-3;-2)$ перпендикулярно вектору $\overline{N}=(-1;-2)$.
   5) Точку $M_1(-3;-2)$ и отсекающую на осях равные отрезки.
   6) Найти расстояние от точки $M_1(-3;-2)$ до прямой $$l:\ x-12y-25=0.$$
   7) Найти тангенс острого угла между прямыми, найденными в пунктах 1 и 2.

3. Написать уравнение прямой, проходящей через точку M пересечения прямых $l_1:\ 2x-3y-3=0$ и $l_2:\ x-3y=0$ параллельно прямой $l:\ \frac{x}{5}-\frac{y}{2}=1$.

4. Задайте функцию аналитически.



5. Построить множество решений системы неравенств

$$\begin{cases} x+y\ge 2, \\ x-y\ge 0, \\ x\ge 0{,}5, \\ 0\le y\le 4. \end{cases}$$

6. Построить кривые по заданным уравнениям. Найти фокусы, эксцентриситет, уравнение директрис:

а) $(x-3)^2+(y-2)^2=9$; б) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{25}=1$;

в) $\dfrac{y^2}{25}-\dfrac{x^2}{49}=1$; г) $y^2=-4x$;

д) $x^2-9y^2+2x+18y+73=0$.

7. Составить уравнение плоскости α, проходящей через точку $M_0(3;-5;2)$, перпендикулярно вектору $\overline{N}=(2;\,-1;\,4)$. Найти расстояние от точки M_0 до заданной плоскости $\beta: 3\mathrm{x}+2\mathrm{z}+5=0$ и угол между плоскостями α и β.

8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(3;-4;2)$, параллельно векторам $\overline{a}_1=3\overline{i}-\overline{j}-\overline{k}$ и $\overline{a}_2=5\overline{i}+4\overline{k}$.

9. Записать канонические и параметрические уравнения прямой

$$\begin{cases} 3x+4y+3z+1=0, \\ 2x-4y-2z+4=0. \end{cases}$$

10. Найти точку пересечения прямой $l: \begin{cases} x=3t-1, \\ y=-4t+3, \\ z=5t-1 \end{cases}$ и плоскости $\alpha: x+2y-5z+20=0$.

Вариант 8

1. Построить прямые. Определить параметры k и b для каждой из прямых:

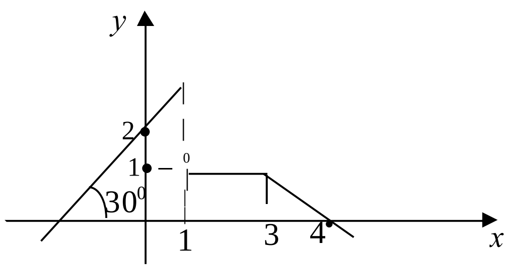
а) $-3x+4y-1=0$, б) $7x+y=0$, в) $\frac{7}{3}x-2=0$, г) $6-7y=0$.

2. Написать общие уравнения прямых, проходящих через:

1) Точку $M_1(-4;3)$ под углом $\varphi=135^0$ к оси OX.
2) Точки $M_1(-4;3)$ и $M_2(-1;2)$.
3) Точку $M_2(-1;2)$ параллельно оси абсцисс.
4) Точку $M_1(-4;3)$ перпендикулярно вектору $\overline{N}=(2;-2)$.
5) Точку $M_1(-4;3)$ и отсекающую на осях равные отрезки.
6) Найти расстояние от точки $M_1(-4;3)$ до прямой
$$l: 7x-y-14=0.$$
7) Найти тангенс острого угла между прямыми, найденными в пунктах 1 и 2.

3. Написать уравнение прямой, проходящей через точку M пересечения прямых $l_1: 4x-3y-9=0$ и $l_2: x-4y+1=0$ параллельно прямой $l: x+5y=0$.

4. Задайте функцию аналитически.



5. Построить множество решений системы неравенств

$$\begin{cases} 4x+3y \ge 18, \\ x+2y \le 18, \\ -x+4y \le 24, \\ 0 \le x \le 6, \\ y \ge 0. \end{cases}$$

6. Построить кривые по заданным уравнениям. Найти фокусы, эксцентриситет, уравнение директрис:

а) $(x-5)^2+(y+3)^2=4$; б) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{49}=1$;

в) $\dfrac{y^2}{16}-\dfrac{x^2}{25}=1$; г) $y^2=-2x$;

д) $x^2+6x-2y+7=0$.

7. Составить уравнение плоскости α, проходящей через точку $M_0(-5;0;3)$, перпендикулярно вектору $\overline{N}=(1;7;-2)$. Найти расстояние от точки M_0 до заданной плоскости $\beta: 5y+3z-10=0$ и угол между плоскостями α и β.

8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(-3;1;-1)$, параллельно векторам $\overline{a}_1=\overline{i}+3\overline{j}-5\overline{k}$ и $\overline{a}_2=2\overline{i}-\overline{j}+\overline{k}$.

9. Найти угол между прямыми

$$l_1: \frac{x-3}{4}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-5}{3} \quad \text{и} \quad l_2: \begin{cases} x=3t-1, \\ y=t+5, \\ z=-2t+1. \end{cases}$$

10. Найти точку пересечения прямой $l: \dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+5}{4}=\dfrac{z-1}{2}$ и плоскости $\alpha: x-3y+7z-24=0$.

Вариант 9

1. Построить прямые. Определить параметры k и b для каждой из прямых:

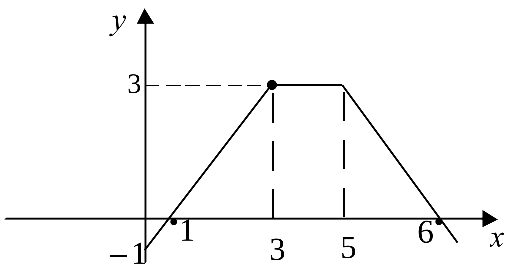
а) $4x - y - 8 = 0$, б) $3x - \frac{2}{5}y = 0$, в) $\frac{4}{3}x - 3 = 0$, г) $\frac{3}{5} + 2y = 0$.

2. Написать общие уравнения прямых, проходящих через:

1) Точку $M_1(-4;2)$ под углом $\varphi = 150^0$ к оси OX.
2) Точки $M_1(-4;2)$ и $M_2(3;-5)$.
3) Точку $M_2(3;-5)$ параллельно оси абсцисс.
4) Точку $M_1(-4;2)$ перпендикулярно вектору $\overline{N} = (3;-1)$.
5) Точку $M_1(-4;2)$ и отсекающую на осях равные отрезки.
6) Найти расстояние от точки $M_1(-4;2)$ до прямой
$$l: 7x - 11y + 3 = 0.$$
7) Найти тангенс острого угла между прямыми, найденными в пунктах 1 и 2.

3. Написать уравнение прямой, проходящей через точку M пересечения прямых l_1: $2x - y + 5 = 0$ и l_2: $x - y + 4 = 0$ параллельно прямой l: $y = 2x$.

4. Задайте функцию аналитически.



5. Построить множество решений системы неравенств

$$\begin{cases} 5x + 7y \le 49, \\ x - y \le 5, \\ 4x + y \ge 5, \\ y \ge 1, \\ x \ge 0. \end{cases}$$

6. Построить кривые по заданным уравнениям. Найти фокусы, эксцентриситет, уравнение директрис:

а) $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 16$; б) $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{36} = 1$;

в) $\dfrac{y^2}{9} - \dfrac{x^2}{16} = 1$; г) $y^2 = -6x$;

д) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$.

7. Составить уравнение плоскости α, проходящей через точку $M_0(4;-2;5)$, перпендикулярно вектору $\overline{N} = (2;0;-3)$. Найти расстояние от точки M_0 до заданной плоскости $\beta : \mathrm{x} - 3\mathrm{y} + 7\mathrm{z} - 1 = 0$ и угол между плоскостями α и β.

8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(-3;0;4)$ и $M_2(1;2;-3)$, параллельно вектору $\overline{a} = 3\overline{i} - 5\overline{j} + \overline{k}$.

9. Найти угол между прямыми

$$l_1 : \frac{x+3}{0} = \frac{y-1}{5} = \frac{z}{4} \quad \text{и} \quad l_2 : \frac{x-1}{4} = \frac{y}{3} = \frac{z-3}{1}.$$

10. Найти точку пересечения прямой $l : \begin{cases} x = t + 1, \\ y = 0, \\ z = 2t - 3 \end{cases}$ и плоскости $\alpha : 2x - y + 4z = 0$.

Вариант 10

1. Построить прямые. Определить параметры k и b для каждой из прямых:

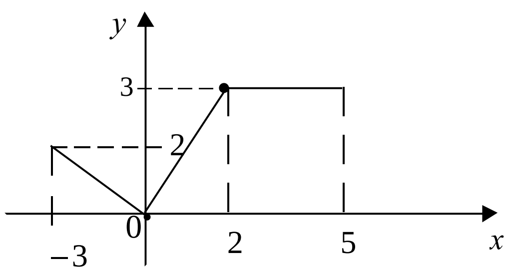
а) $-2x+5y-10=0$, б) $2x-7y=0$, в) $\frac{1}{3}x+4=0$, г) $5y+2=0$.

2. Написать общие уравнения прямых, проходящих через:

1) Точку $M_1(10;1)$ под углом $\varphi=45^0$ к оси OX .
2) Точки $M_1(10;1)$ и $M_2(0;3)$.
3) Точку $M_2(0;3)$ параллельно оси абсцисс.
4) Точку $M_1(10;1)$ перпендикулярно вектору $\overline{N}=(2;-4)$.
5) Точку $M_1(10;1)$ и отсекающую на осях равные отрезки.
6) Найти расстояние от точки $M_1(10;1)$ до прямой
$$l: 2x+3y-13=0.$$
7) Найти тангенс острого угла между прямыми, найденными в пунктах 1 и 2.

3. Написать уравнение прямой, проходящей через точку M пересечения прямых $l_1: 3x+y=0$ и $l_2: 4x+y+1=0$ параллельно прямой l: $\frac{x}{3}+2y=1$.

4. Задайте функцию аналитически.



5. Построить множество решений системы неравенств

$$\begin{cases} x+4y\ge 4, \\ x+y\le 6, \\ 4x-3y\ge -12, \\ x\ge 0, \\ y\ge 0. \end{cases}$$

6. Построить кривые по заданным уравнениям. Найти фокусы, эксцентриситет, уравнение директрис:

а) $(x+4)^2+(y-3)^2=25$;

б) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{25}=1$;

в) $\dfrac{y^2}{25}-\dfrac{x^2}{64}=1$;

г) $y^2=-x$;

д) $4x^2+y^2-24x+2y+1=0$.

7. Составить уравнение плоскости α, проходящей через точку $M_0(-4;3;0)$, перпендикулярно вектору $\overline{N}=(7;\,-1;\,2)$. Найти расстояние от точки M_0 до заданной плоскости $\beta: 4\mathrm{x}+3\mathrm{y}-\mathrm{z}+2=0$ и угол между плоскостями α и β.

8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(0;2;-4)$ и $M_2(1;3;2)$, параллельно вектору $\overline{a}=\overline{i}-2\overline{j}+3\overline{k}$.

9. Найти угол между прямыми

$$l_1:\frac{x+1}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{3} \quad \text{и} \quad l_2:\begin{cases} x+5y-z-5=0, \\ 2x-5y+2z+5=0. \end{cases}$$

10. Найти точку пересечения прямой $l:\dfrac{x-5}{1}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z-2}{0}$ и плоскости $\alpha: 3x+y-5z-12=0$.

Вариант 11

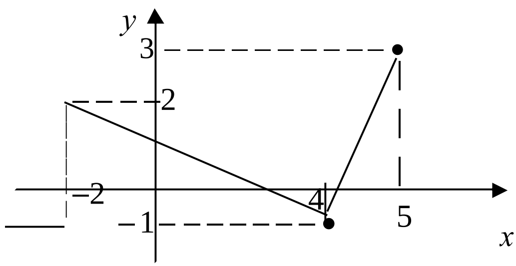
1. Построить прямые. Определить параметры k и b для каждой из прямых:

а) $7x-2y+14=0$, б) $3y+5x=0$, в) $5x-2=0$, г) $7y-12=0$.

2. Написать общие уравнения прямых, проходящих через:
   1) Точку $M_1(5;-1)$ под углом $\varphi=60^0$ к оси OX .
   2) Точки $M_1(5;-1)$ и $M_2(4;3)$.
   3) Точку $M_2(4;3)$ параллельно оси абсцисс.
   4) Точку $M_1(5;-1)$ перпендикулярно вектору $\overline{N}=(-2;3)$.
   5) Точку $M_1(5;-1)$ и отсекающую на осях равные отрезки.
   6) Найти расстояние от точки $M_1(5;-1)$ до прямой
   $$l: x+4y-12=0.$$
   7) Найти тангенс острого угла между прямыми, найденными в пунктах 1 и 2.

3. Написать уравнение прямой, проходящей через точку M пересечения прямых $l_1: 4x+3y-1=0$ и $l_2: 5x-y-6=0$ параллельно прямой $l: \dfrac{x}{2}-y=0$.

4. Задайте функцию аналитически.



5. Построить множество решений системы неравенств

$$\begin{cases} 3x - y \geq 0, \\ x + 7y \geq 22, \\ 5x + y \leq 42, \\ x - 5y \geq -28, \\ x \geq 0, \\ y \geq 0. \end{cases}$$

6. Построить кривые по заданным уравнениям. Найти фокусы, эксцентриситет, уравнение директрис:

а) $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 4$;

б) $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{49} = 1$;

в) $\dfrac{y^2}{9} - \dfrac{x^2}{36} = 1$;

г) $y^2 = -8x$;

д) $9x^2 - y^2 + 18x + 2y + 89 = 0$.

7. Составить уравнение плоскости α, проходящей через точку $M_0(6;-1;2)$, перпендикулярно вектору $\overline{N} = (3;2;-1)$. Найти расстояние от точки M_0 до заданной плоскости $\beta : 5\mathrm{x} - 7\mathrm{z} + 3 = 0$ и угол между плоскостями α и β.

8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1;-2;1)$ и $M_2(0;4;2)$, параллельно вектору $\overline{a} = 2\overline{i} - 3\overline{j} + 2\overline{k}$.

9. Найти угол между прямыми

$$l_1 : \begin{cases} x = -t + 4, \\ y = 5t - 3, \\ z = 2t + 1 \end{cases} \quad \text{и} \quad l_2 : \begin{cases} 2x + y - 3z - 2 = 0, \\ 2x - y + z + 6 = 0. \end{cases}$$

10. Найти проекцию точки $M_0(1;0;1)$ на плоскость $\alpha : 4x + 6y + 4z - 25 = 0$.

Вариант 12

1. Построить прямые. Определить параметры k и b для каждой из прямых:

а) $-2x+3y-18=0$, б) $5y-\frac{3}{2}x=0$, в) $3-4x=0$, г) $1-\frac{y}{7}=0$.

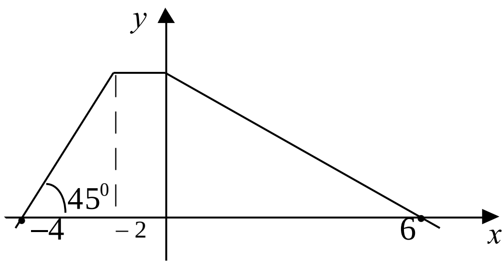
2. Написать общие уравнения прямых, проходящих через:
   1) Точку $M_1(-2;2)$ под углом $\varphi=120^0$ к оси OX.
   2) Точки $M_1(-2;2)$ и $M_2(1;4)$.
   3) Точку $M_2(1;4)$ параллельно оси абсцисс.
   4) Точку $M_1(-2;2)$ перпендикулярно вектору $\overline{N}=(-1;3)$.
   5) Точку $M_1(-2;2)$ и отсекающую на осях равные отрезки.
   6) Найти расстояние от точки $M_1(-2;2)$ до прямой

$$l: x+15y-20=0.$$

   7) Найти тангенс острого угла между прямыми, найденными в пунктах 1 и 2.

3. Написать уравнение прямой, проходящей через точку M пересечения прямых $l_1: 7x+5y-2=0$ и $l_2:\ x+3y+2=0$ параллельно прямой $l:\ \frac{y}{4}+x=0$.

4. Задайте функцию аналитически.



5. Построить множество решений системы неравенств

$$\begin{cases} 2x+3y \ge 11, \\ x-2y \le 2, \\ 3x-y \ge 0, \\ x \ge 0, \\ y \ge 0. \end{cases}$$

6. Построить кривые по заданным уравнениям. Найти фокусы, эксцентриситет, уравнение директрис:

а) $(x+1)^2+(y-1)^2=1$; б) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$;

в) $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{9}=1$; г) $x^2=9y$;

д) $y^2-3x-4y-2=0$.

7. Составить уравнение плоскости α, проходящей через точку $M_0(-2;6;3)$, перпендикулярно вектору $\overline{N}=(5;-3;0)$. Найти расстояние от точки M_0 до заданной плоскости $\beta: y+5z-5=0$ и угол между плоскостями α и β.

8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(2;1;3)$ и $M_2(5;1;2)$, параллельно вектору $\overline{a}=3\overline{i}+\overline{j}-2\overline{k}$.

9. Найти угол между прямыми

$$l_1: \begin{cases} x=2, \\ y=-2t+3, \\ z=3t-1 \end{cases} \quad \text{и} \quad l_2: \frac{x-1}{5}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{2}.$$

10. Найти проекцию точки $M_0(-1;0;-1)$ на плоскость $\alpha: 2x+6y-2z+11=0$.

Вариант 13

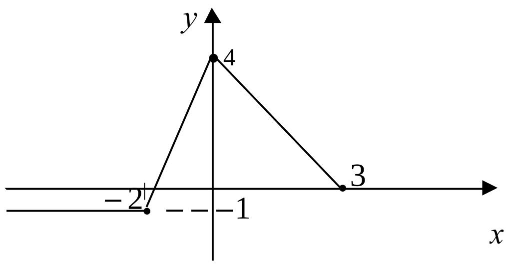
1. Построить прямые. Определить параметры k и b для каждой из прямых:

а) $5x-2y+10=0$, б) $-3x+5y=0$, в) $6-7x=0$, г) $2-\frac{1}{5}y=0$.

2. Написать общие уравнения прямых, проходящих через:
   1) Точку $M_1(-3;-1)$ под углом $\varphi=150^0$ к оси OX.
   2) Точки $M_1(-3;-1)$ и $M_2(2;3)$.
   3) Точку $M_2(2;3)$ параллельно оси абсцисс.
   4) Точку $M_1(-3;-1)$ перпендикулярно вектору $\overline{N}=(2;-3)$.
   5) Точку $M_1(-3;-1)$ и отсекающую на осях равные отрезки.
   6) Найти расстояние от точки $M_1(-3;-1)$ до прямой
   $$l: x-5y-40=0.$$
   7) Найти тангенс острого угла между прямыми, найденными в пунктах 1 и 2.

3. Написать уравнение прямой, проходящей через точку M пересечения прямых $l_1:\ -x+y+1=0$ и $l_2:\ 4x+3y-4=0$ параллельно прямой $l: \frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$.

4. Задайте функцию аналитически.



5. Построить множество решений системы неравенств

$$\begin{cases} 3x-9\ge 0, \\ x+y\ge 4, \\ 3x-y\le 18, \\ 0\le y\le 7, \\ x\ge 0. \end{cases}$$

6. Построить кривые по заданным уравнениям. Найти фокусы, эксцентриситет, уравнение директрис:

а) $(x+2)^2+(y-1)^2=36$;

б) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$;

в) $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{4}=1$;

г) $y^2=2x$;

д) $3x^2+3y^2+2x+4y=0$.

7. Составить уравнение плоскости α, проходящей через точку $M_0(7;0;1)$, перпендикулярно вектору $\overline{N}=(1;-5;3)$. Найти расстояние от точки M_0 до заданной плоскости $\beta: \mathrm{x}+2\mathrm{y}-3\mathrm{z}+6=0$ и угол между плоскостями α и β.

8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(-4;1;3)$ и $M_2(0;3;5)$, параллельно оси OX.

9. Найти угол между прямой, проходящей через точки $M_1(2;-3;4)$, $M_2(-1;4;0)$, и прямой $l: \begin{cases} x=-t+3, \\ y=t+1, \\ z=2t-4. \end{cases}$.

10. Найти проекцию точки $M_0(0;2;1)$ на плоскость $\alpha: 2x+4y-3=0$.

Вариант 14

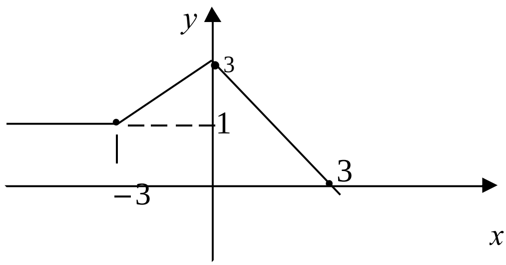
1. Построить прямые. Определить параметры k и b для каждой из прямых:

а) $2y-9x+18=0$, б) $15x-\frac{3}{2}y=0$, в) $\frac{5}{3}-2x=0$, г) $2y-\frac{3}{4}=0$.

2. Написать общие уравнения прямых, проходящих через:
   1) Точку $M_1(-2;2)$ под углом $\varphi=30^0$ к оси OX.
   2) Точки $M_1(-2;2)$ и $M_2(7;-3)$.
   3) Точку $M_2(7;-3)$ параллельно оси абсцисс.
   4) Точку $M_1(-2;2)$ перпендикулярно вектору $\overline{N}=(-1;1)$.
   5) Точку $M_1(-2;2)$ и отсекающую на осях равные отрезки.
   6) Найти расстояние от точки $M_1(-2;2)$ до прямой
   $$l: 4x+3y-12=0.$$
   7) Найти тангенс острого угла между прямыми, найденными в пунктах 1 и 2.

3. Написать уравнение прямой, проходящей через точку M пересечения прямых $l_1: 3x+5y-3=0$ и l_2: $7y+x-1=0$ параллельно прямой l: $x+3y=0$.

4. Задайте функцию аналитически.



5. Построить множество решений системы неравенств

$$\begin{cases} 3x - y \le 9, \\ 3x + 2y \le 18, \\ x - 2y \ge -10, \\ x \ge 0, \\ y \ge 0. \end{cases}$$

6. Построить кривые по заданным уравнениям. Найти фокусы, эксцентриситет, уравнение директрис:

а) $(x-4)^2 + (y+2)^2 = 49$; б) $\dfrac{x^2}{49} + \dfrac{y^2}{36} = 1$;

в) $\dfrac{x^2}{25} - \dfrac{y^2}{9} = 1$; г) $y^2 = 6x$;

д) $x^2 + 4y^2 - 6x + 8y - 23 = 0$.

7. Составить уравнение плоскости α, проходящей через точку $M_0(-1;7;3)$, перпендикулярно вектору $\overline{N} = (1;0;-7)$. Найти расстояние от точки M_0 до заданной плоскости $\beta: 5y - 6z + 7 = 0$ и угол между плоскостями α и β.

8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(2;-3;5)$ и $M_2(3;-1;4)$, параллельно оси OY.

9. Найти угол между прямой, проходящей через точки $M_1(-1;4;1)$, $M_2(0;1;3)$, и прямой $l: \begin{cases} x + y - 2z - 2 = 0, \\ x - y + z + 2 = 0. \end{cases}$.

10. Найти проекцию точки $M_0(2;1;0)$ на плоскость $\alpha: y + z + 2 = 0$.

Вариант 15

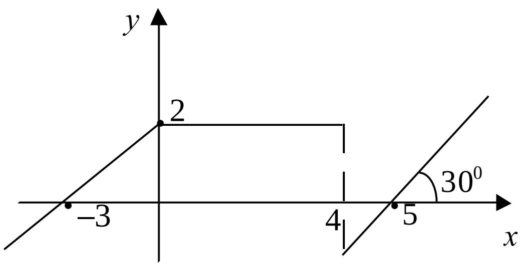
1. Построить прямые. Определить параметры k и b для каждой из прямых:

а) $-4x+3y-12=0$, б) $8x-\dfrac{1}{2}y=0$, в) $\dfrac{3}{5}+2x=0$, г) $7y+6=0$.

2. Написать общие уравнения прямых, проходящих через:
   1) Точку $M_1(7;-3)$ под углом $\varphi=60^0$ к оси OX .
   2) Точки $M_1(7;-3)$ и $M_2(0;-2)$.
   3) Точку $M_2(0;-2)$ параллельно оси абсцисс.
   4) Точку $M_1(7;-3)$ перпендикулярно вектору $\overline{N}=(-1;3)$.
   5) Точку $M_1(7;-3)$ и отсекающую на осях равные отрезки.
   6) Найти расстояние от точки $M_1(7;-3)$ до прямой
   $$l: 5x-4y+6=0.$$
   7) Найти тангенс острого угла между прямыми, найденными в пунктах 1 и 2.

3. Написать уравнение прямой, проходящей через точку M пересечения прямых l_1: $14x-3y+3=0$ и l_2: $5x+y-1=0$ параллельно прямой l: $3y+2x=0$.

4. Задайте функцию аналитически.



5. Построить множество решений системы неравенств

$$\begin{cases} x+y\le 6, \\ 3x+y\ge 6, \\ 0\le x\le 4, \\ 0\le y\le 4. \end{cases}$$

6. Построить кривые по заданным уравнениям. Найти фокусы, эксцентриситет, уравнение директрис:

а) $(x+4)^2+(y-4)^2=9$;

б) $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{9}=1$;

в) $\dfrac{x^2}{36}-\dfrac{y^2}{16}=1$;

г) $y^2=x$;

д) $x^2-9y^2-2x-18y+73=0$.

7. Составить уравнение плоскости α, проходящей через точку $M_0(3;-2;4)$, перпендикулярно вектору $\overline{N}=(2;5;-6)$. Найти расстояние от точки M_0 до заданной плоскости $\beta:\mathrm{x}-3\mathrm{y}+7\mathrm{z}+1=0$ и угол между плоскостями α и β.

8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(-3;0;1)$ и $M_2(4;2;-3)$, параллельно оси OZ.

9. Найти угол между прямой, проходящей через точки $M_1(-2;3;0)$, $M_2(1;-3;2)$, и прямой $l:\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z+4}{-1}$.

10. Найти проекцию точки $M_0(1;2;3)$ на плоскость $\alpha:2x+10y+10z-1=0$.

Вариант 16

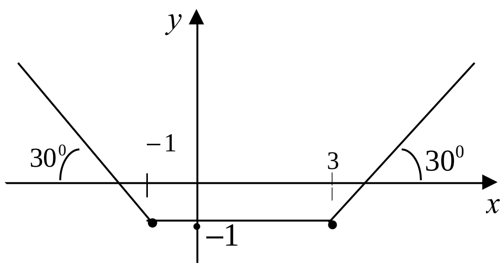
1. Построить прямые. Определить параметры k и b для каждой из прямых:

а) $-4x+3y-12=0$, б) $8x-\frac{1}{2}y=0$, в) $\frac{3}{5}+2x=0$, г) $7y+6=0$.

2. Написать общие уравнения прямых, проходящих через:
   1) Точку $M_1(7;-7)$ под углом $\varphi=45^0$ к оси OX.
   2) Точки $M_1(7;-7)$ и $M_2(3;-4)$.
   3) Точку $M_2(3;-4)$ параллельно оси абсцисс.
   4) Точку $M_1(7;-7)$ перпендикулярно вектору $\overline{N}=(-1;2)$.
   5) Точку $M_1(7;-7)$ и отсекающую на осях равные отрезки.
   6) Найти расстояние от точки $M_1(7;-7)$ до прямой
   $$l: x-13y+5=0.$$
   7) Найти тангенс острого угла между прямыми, найденными в пунктах 1 и 2.

3. Написать уравнение прямой, проходящей через точку M пересечения прямых $l_1: 3x-y+1=0$ и $l_2:\ 5y+x-5=0$ параллельно прямой $l:\ x-2y=0$.

4. Задайте функцию аналитически.



5. Построить множество решений системы неравенств

$$\begin{cases} 2x + y \le 10, \\ 2x + y \ge 2, \\ x + 2y \le 10, \\ x \ge 0, \\ y \ge 0. \end{cases}$$

6. Построить кривые по заданным уравнениям. Найти фокусы, эксцентриситет, уравнение директрис:

а) $(x-5)^2 + (y+1)^2 = 4$; б) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$;

в) $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{9} = 1$; г) $y^2 = 8x$;

д) $x^2 + 3y^2 + 18x + 57 = 0$.

7. Составить уравнение плоскости α, проходящей через точку $M_0(0;3;-4)$, перпендикулярно вектору $\overline{N} = (6;-1;2)$. Найти расстояние от точки M_0 до заданной плоскости $\beta: 7x + y - z + 2 = 0$ и угол между плоскостями α и β.

8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1;-3;4)$ и $M_2(7;2;1)$, параллельно оси OY.

9. Найти угол между прямой, проходящей через точки $M_1(1;0;3)$, $M_2(3;2;1)$, и прямой $l: \begin{cases} x = 3, \\ y = 2t - 5, \\ z = 3t + 1. \end{cases}$

10. Найти проекцию точки $M_0(0;-3;-2)$ на прямую $l: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1,5}{-1} = \frac{z}{1}$.

Вариант 17

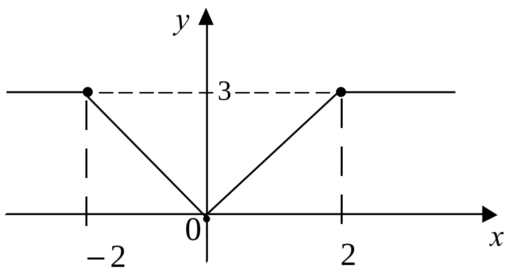
1. Построить прямые. Определить параметры k и b для каждой из прямых:

а) $-7x+3y-6=0$, б) $12x-\dfrac{4}{3}y=0$, в) $7x-12=0$, г) $3y-5=0$.

2. Написать общие уравнения прямых, проходящих через:
   1) Точку $M_1(3;1)$ под углом $\varphi=120^0$ к оси OX.
   2) Точки $M_1(3;1)$ и $M_2(5;-2)$.
   3) Точку $M_2(5;-2)$ параллельно оси абсцисс.
   4) Точку $M_1(3;1)$ перпендикулярно вектору $\overline{N}=(4;3)$.
   5) Точку $M_1(3;1)$ и отсекающую на осях равные отрезки.
   6) Найти расстояние от точки $M_1(3;1)$ до прямой
   $$l: y-4x-25=0.$$
   7) Найти тангенс острого угла между прямыми, найденными в пунктах 1 и 2.

3. Написать уравнение прямой, проходящей через точку M пересечения прямых $l_1:\ 2x-5y+7=0$ и $l_2:\ x-3y+4=0$ параллельно прямой $l:\ x+4y-1=0$.

4. Задайте функцию аналитически.



5. Построить множество решений системы неравенств

$$\begin{cases} 2x+3y \ge 10, \\ x+y \le 12, \\ 2x-y \ge 0, \\ 0 \le x \le 7, \\ y \ge 0. \end{cases}$$

6. Построить кривые по заданным уравнениям. Найти фокусы, эксцентриситет, уравнение директрис:

а) $(x+5)^2+(y-6)^2=16$; б) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{4}=1$;

в) $\dfrac{x^2}{36}-\dfrac{y^2}{25}=1$; г) $y^2=-9x$;

д) $x^2+y^2-4x+2y-3=0$.

7. Составить уравнение плоскости α, проходящей через точку $M_0(-1;0;5)$, перпендикулярно вектору $\overline{N}=(2;3;1)$. Найти расстояние от точки M_0 до заданной плоскости $\beta: 3x+5y-2z=0$ и угол между плоскостями α и β.

8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(-1;2;-3)$, перпендикулярно двум плоскостям $\alpha: 2x-3y+5z=0$ и $\beta: x+y+z-2=0$.

.

9. Найти угол между прямой, проходящей через точки $M_1(3;-1;4)$, $M_2(0;-1;4)$, и прямой $l: \begin{cases} 2x-3y-2z+6=0, \\ x-3y+z+3=0. \end{cases}$

10. Найти проекцию точки $M_0(2;-1;1)$ на прямую $l: \dfrac{x-4{,}5}{1}=\dfrac{y+3}{-0{,}5}=\dfrac{z-2}{1}$.

Вариант 18

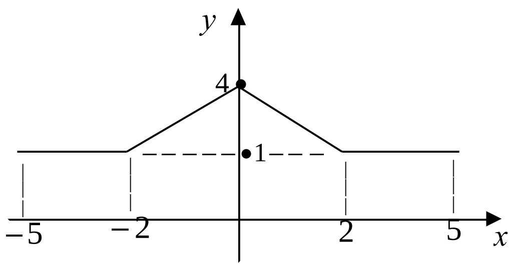
1. Построить прямые. Определить параметры k и b для каждой из прямых:

а) $3x+2y+18=0$, б) $x-\frac{2}{3}y=0$, в) $-5x+\frac{3}{2}=0$, г) $5y-\frac{1}{2}=0$.

2. Написать общие уравнения прямых, проходящих через:
   1) Точку $M_1(3;0)$ под углом $\varphi=150^0$ к оси OX.
   2) Точки $M_1(3;0)$ и $M_2(-4;2)$.
   3) Точку $M_2(-4;2)$ параллельно оси абсцисс.
   4) Точку $M_1(3;0)$ перпендикулярно вектору $\overline{N}=(-1;3)$.
   5) Точку $M_1(3;0)$ и отсекающую на осях равные отрезки.
   6) Найти расстояние от точки $M_1(3;0)$ до прямой
   $$l: 2y+3x-15=0.$$
   7) Найти тангенс острого угла между прямыми, найденными в пунктах 1 и 2.

3. Написать уравнение прямой, проходящей через точку M пересечения прямых $l_1: 4x+y-1=0$ и $l_2: 8x+3y-1=0$ параллельно прямой $l: 2x-3y=0$.

4. Задайте функцию аналитически.



5. Построить множество решений системы неравенств

$$\begin{cases} 2x + y \geq 4, \\ x - 2y \geq 0, \\ 3x + 2y \leq 14, \\ x \geq 0, \\ y \geq 0. \end{cases}$$

6. Построить кривые по заданным уравнениям. Найти фокусы, эксцентриситет, уравнение директрис:

а) $(x-1)^2 + (y+5)^2 = 1$; б) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$;

в) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{4} = 1$; г) $y^2 = -7x$;

д) $2x^2 + 5y^2 - 12x + 10y + 13 = 0$.

7. Составить уравнение плоскости α, проходящей через точку $M_0(8;-1;0)$, перпендикулярно вектору $\overline{N} = (1;-2;3)$. Найти расстояние от точки M_0 до заданной плоскости $\beta: 4x - 5z + 7 = 0$ и угол между плоскостями α и β.

8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(2;-2;-3)$, перпендикулярно двум плоскостям $\alpha: 3y + 2z - 10 = 0$ и $\beta: 2x - 3y + 5 = 0$.

9. Найти угол между прямой, проходящей через точки $M_1(0;-3;4)$, $M_2(2;4;3)$, и прямой $l: \frac{x-3}{-3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{1}$.

10. Найти проекцию точки $M_0(1;1;1)$ на прямую $l: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1{,}5}{-2} = \frac{z-1}{1}$.

Вариант 19

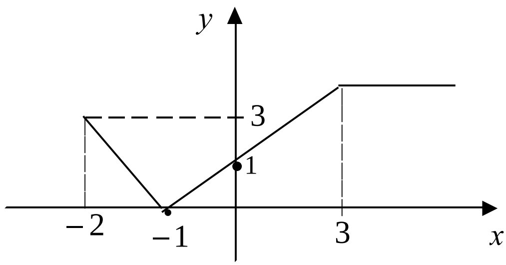
1. Построить прямые. Определить параметры k и b для каждой из прямых:

а) $x-3y+6=0$, б) $x-3y=0$, в) $-\dfrac{x}{7}+1=0$, г) $5y+\dfrac{3}{4}=0$.

2. Написать общие уравнения прямых, проходящих через:
   1) Точку $M_1(-2;5)$ под углом $\varphi=60^0$ к оси OX.
   2) Точки $M_1(-2;5)$ и $M_2(4;-4)$.
   3) Точку $M_2(4;-4)$ параллельно оси абсцисс.
   4) Точку $M_1(-2;5)$ перпендикулярно вектору $\overline{N}=(2;-3)$.
   5) Точку $M_1(-2;5)$ и отсекающую на осях равные отрезки.
   6) Найти расстояние от точки $M_1(-2;5)$ до прямой
   $$l: x-3y+12=0.$$
   7) Найти тангенс острого угла между прямыми, найденными в пунктах 1 и 2.

3. Написать уравнение прямой, проходящей через точку M пересечения прямых $l_1:\ 3x+8y-1=0$ и $l_2:\ 5x+2y-4=0$ параллельно прямой $l:\ \dfrac{x}{3}+y=2$.

4. Задайте функцию аналитически.



5. Построить множество решений системы неравенств

$$\begin{cases} x-y\geq 0, \\ 2x+3y\leq 14, \\ 2x-y\leq 0, \\ x+2y\geq 4, \\ x\geq 0, \\ y\geq 0. \end{cases}$$

6. Построить кривые по заданным уравнениям. Найти фокусы, эксцентриситет, уравнение директрис:

а) $(x+2)^2+(y-4)^2=49$; б) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{49}=1$;

в) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{25}=1$; г) $x^2=5y$;

д) $4x^2-y^2-16x-2y+31=0$.

7. Составить уравнение плоскости α, проходящей через точку $M_0(-8;0;4)$, перпендикулярно вектору $\overline{N}=(-1;8;3)$. Найти расстояние от точки M_0 до заданной плоскости $\beta: 2x-3y+4z-3=0$ и угол между плоскостями α и β.

8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(3;-1;4)$, перпендикулярно двум плоскостям $\alpha: x-y+2z+1=0$ и $\beta: 5x+y-z+2=0$.

9. Составить канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(2;-1;3)$, параллельно прямой

$$l:\begin{cases} x+y-2z-2=0, \\ x-y+z+2=0. \end{cases}$$

10. Найти проекцию точки $M_0(1;2;3)$ на прямую

$$l: \frac{x-0{,}5}{0}=\frac{y+1{,}5}{-1}=\frac{z-1{,}5}{1}.$$

Вариант 20

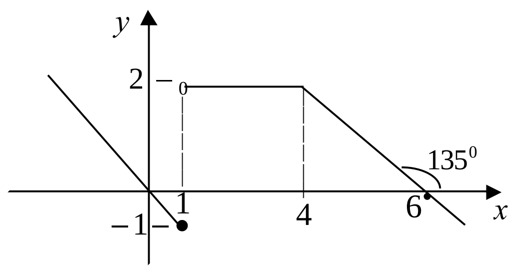
1. Построить прямые. Определить параметры k и b для каждой из прямых:

а) $-3x+2y-18=0$, б) $6x-y=0$, в) $2-\frac{1}{5}x=0$, г) $3-2y=0$.

2. Написать общие уравнения прямых, проходящих через:
   1) Точку $M_1(0;-4)$ под углом $\varphi=45^0$ к оси OX.
   2) Точки $M_1(0;-4)$ и $M_2(-5;3)$.
   3) Точку $M_2(-5;3)$ параллельно оси абсцисс.
   4) Точку $M_1(0;-4)$ перпендикулярно вектору $\overline{N}=(1;5)$.
   5) Точку $M_1(0;-4)$ и отсекающую на осях равные отрезки.
   6) Найти расстояние от точки $M_1(0;-4)$ до прямой
   $$l: 5x-3y-16=0.$$
   7) Найти тангенс острого угла между прямыми, найденными в пунктах 1 и 2.

3. Написать уравнение прямой, проходящей через точку M пересечения прямых $l_1: 3x+y=0$ и $l_2:\ x-3y=10$ параллельно прямой $l:\ 2x-5y+4=0$.

4. Задайте функцию аналитически.



5. Построить множество решений системы неравенств

$$\begin{cases} 7x+5y \le 49, \\ x-y \ge 5, \\ x+4y \ge 5, \\ x \ge 1, \\ y \ge 0. \end{cases}$$

6. Построить кривые по заданным уравнениям. Найти фокусы, эксцентриситет, уравнение директрис:

а) $(x-4)^2+(y+4)^2=9$; б) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{36}=1$;

в) $\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{36}=1$; г) $x^2=16y$;

д) $y^2-5x+8y+21=0$.

7. Составить уравнение плоскости α, проходящей через точку $M_0(5;-1;4)$, перпендикулярно вектору $\overline{N}=(4;-3;0)$. Найти расстояние от точки M_0 до заданной плоскости $\beta: 7y+5z-10=0$ и угол между плоскостями α и β.

8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(1;4;-1)$, перпендикулярно двум плоскостям $\alpha: x+3y-z+4=0$ и $\beta: 5y+3z-1=0$.

9. Составить канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(-1;4;1)$, параллельно прямой

$$l: \begin{cases} x=3t-1, \\ y=5t+1, \\ z=-t+3. \end{cases}$$

10. Найти проекцию точки $M_0(1;0;-1)$ на прямую

$$l: \frac{x-3{,}5}{2}=\frac{y-1{,}5}{2}=\frac{z}{0}.$$

Вариант 21

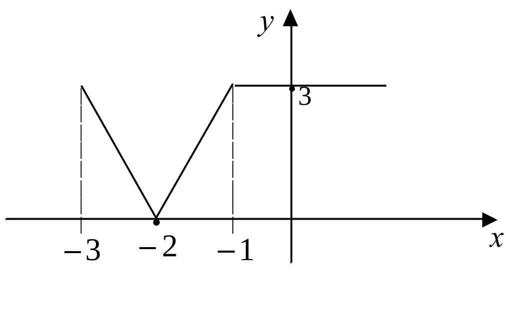
1. Построить прямые. Определить параметры k и b для каждой из прямых:

а) $2x+5y+10=0$, б) $3y-\dfrac{4}{3}x=0$, в) $2x-\dfrac{3}{4}=0$, г) $15-6y=0$.

2. Написать общие уравнения прямых, проходящих через:
   1) Точку $M_1(-7;2)$ под углом $\varphi=30^0$ к оси OX.
   2) Точки $M_1(-7;2)$ и $M_2(2;-2)$.
   3) Точку $M_2(2;-2)$ параллельно оси абсцисс.
   4) Точку $M_1(-7;2)$ перпендикулярно вектору $\overline{N}=(2;7)$.
   5) Точку $M_1(-7;2)$ и отсекающую на осях равные отрезки.
   6) Найти расстояние от точки $M_1(-7;2)$ до прямой $$l: x+4y-20=0.$$
   7) Найти тангенс острого угла между прямыми, найденными в пунктах 1 и 2.

3. Написать уравнение прямой, проходящей через точку M пересечения прямых l_1: $x+3y-7=0$ и l_2: $4x-y-2=0$ параллельно прямой l: $x+5y=0$.

4. Задайте функцию аналитически.



5. Построить множество решений системы неравенств

$$\begin{cases} 3x+2y \geq 14, \\ x+2y \leq 24, \\ 5x-8y \leq 12, \\ x \geq 0, \\ y \geq 0. \end{cases}$$

6. Построить кривые по заданным уравнениям. Найти фокусы, эксцентриситет, уравнение директрис:

а) $(x+1)^2+(y-5)^2=4$; б) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}=1$;

в) $\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{x^2}{49}=1$; г) $x^2=3y$;

д) $x^2+y^2+2x-16y+6=0$.

7. Составить уравнение плоскости α, проходящей через точку $M_0(4;-3;2)$, перпендикулярно вектору $\overline{N}=(2;5;1)$. Найти расстояние от точки M_0 до заданной плоскости $\beta: 3\mathrm{x}+5\mathrm{y}+\mathrm{z}+6=0$ и угол между плоскостями α и β.

8. Составить уравнение плоскости, проходящей через две точки $M_1(-1;3;4)$, $M_2(0;4;3)$, перпендикулярно плоскости $\beta: 2\mathrm{x}+3\mathrm{y}-\mathrm{z}+2=0$.

9. Составить канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(-2;-1;3)$, параллельно прямой

$$l: \frac{x}{2}=\frac{y-7}{3}=\frac{z+3}{-2}.$$

10. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2;-3;1)$ и прямую $l: \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-2}{1}$.

Вариант 22

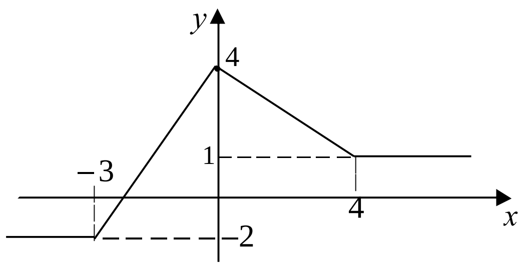
1. Построить прямые. Определить параметры k и b для каждой из прямых:

а) $7x + y - 14 = 0$, б) $4x - 3y = 0$, в) $5x + \dfrac{10}{3} = 0$, г) $5 + 2y = 0$.

2. Написать общие уравнения прямых, проходящих через:
   1) Точку $M_1(-7;2)$ под углом $\varphi = 45^0$ к оси OX .
   2) Точки $M_1(-7;2)$ и $M_2(0;-4)$.
   3) Точку $M_2(0;-4)$ параллельно оси абсцисс.
   4) Точку $M_1(-7;2)$ перпендикулярно вектору $\overline{N} = (1;-4)$.
   5) Точку $M_1(-7;2)$ и отсекающую на осях равные отрезки.
   6) Найти расстояние от точки $M_1(-7;2)$ до прямой
   $$l: x + 4y + 17 = 0.$$
   7) Найти тангенс острого угла между прямыми, найденными в пунктах 1 и 2.

3. Написать уравнение прямой, проходящей через точку M пересечения прямых $l_1: 3x - 2y + 1 = 0$ и $l_2: 2x + 5y - 12 = 0$ параллельно прямой $l: 6x + 4y + 9 = 0$.

4. Задайте функцию аналитически.



5. Построить множество решений системы неравенств

$$\begin{cases} 2x + y \le 24, \\ 2x + 3y \ge 14, \\ 8x - 5y \ge -12, \\ x \ge 0, \\ y \ge 0. \end{cases}$$

6. Построить кривые по заданным уравнениям. Найти фокусы, эксцентриситет, уравнение директрис:

а) $(x-6)^2 + (y+5)^2 = 16$; б) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{25} = 1$;

в) $\dfrac{y^2}{25} - \dfrac{x^2}{36} = 1$; г) $x^2 = -4y$;

д) $x^2 + 4y^2 - 6x + 8y = 3$.

7. Составить уравнение плоскости α, проходящей через точку $M_0(-2;7;1)$, перпендикулярно вектору $\overline{N} = (0;3;-4)$. Найти расстояние от точки M_0 до заданной плоскости $\beta: 5x - 2y - z - 5 = 0$ и угол между плоскостями α и β.

8. Составить уравнение плоскости, проходящей через две точки $M_1(2;-3;0)$ и $M_2(2;-1;4)$, перпендикулярно плоскости $\beta: 3y + 5z - 10 = 0$.

9. Составить канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(1;-1;4)$, параллельно прямой

$$l: \begin{cases} x + y - 3z - 2 = 0, \\ x - y + z + 2 = 0. \end{cases}$$

10. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(-1;4;1)$ и прямую $l: \dfrac{x}{-1} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z+3}{2}$.

Вариант 23

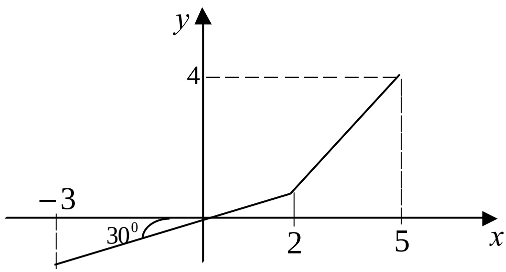
1. Построить прямые. Определить параметры k и b для каждой из прямых:

а) $-9x+2y-18=0$, б) $10y-3x=0$, в) $7x-\frac{1}{2}=0$, г) $3y+4=0$.

2. Написать общие уравнения прямых, проходящих через:
   1) Точку $M_1(-1;3)$ под углом $\varphi=30^0$ к оси OX .
   2) Точки $M_1(-1;3)$ и $M_2(-2;3)$.
   3) Точку $M_2(-2;3)$ параллельно оси абсцисс.
   4) Точку $M_1(-1;3)$ перпендикулярно вектору $\overline{N}=(-2;5)$.
   5) Точку $M_1(-1;3)$ и отсекающую на осях равные отрезки.
   6) Найти расстояние от точки $M_1(-1;3)$ до прямой $$l:2x-6y-13=0.$$
   7) Найти тангенс острого угла между прямыми, найденными в пунктах 1 и 2.

3. Написать уравнение прямой, проходящей через точку M пересечения прямых l_1: $x-4y+14=0$ и l_2: $x+y-1=0$ параллельно прямой l: $2x-3y=0$.

4. Задайте функцию аналитически.



5. Построить множество решений системы неравенств

$$\begin{cases} 2x+y\le 13, \\ 2x+y\ge 5, \\ 2x-y\ge 1, \\ x\ge 0, \\ y\ge 0. \end{cases}$$

6. Построить кривые по заданным уравнениям. Найти фокусы, эксцентриситет, уравнение директрис:

а) $(x+5)^2+(y-1)^2=1$; б) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{36}=1$;

в) $\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{x^2}{25}=1$; г) $x^2=-2y$;

д) $4x^2-y^2+16x-2y+31=0$.

7. Составить уравнение плоскости α, проходящей через точку $M_0(5;-3;2)$, перпендикулярно вектору $\overline{N}=(3;\,0;\,5)$. Найти расстояние от точки M_0 до заданной плоскости $\beta:\mathrm{x}-5\mathrm{y}+2\mathrm{z}+4=0$ и угол между плоскостями α и β.

8. Составить уравнение плоскости, проходящей через две точки $M_1(4;-1;2)$ и $M_2(5;3;-1)$, перпендикулярно плоскости

$$\beta:2\mathrm{x}-3\mathrm{y}+2\mathrm{z}-1=0.$$

9. Составить канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(-2;1;3)$, параллельно прямой

$$l:\begin{cases} 5x+y+2z+4=0, \\ x-y-3z+2=0. \end{cases}$$

10. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(0;-1;4)$ и прямую $l:\begin{cases} x=2t+5, \\ y=-t+1, \\ z=-3t-1. \end{cases}$

Вариант 24

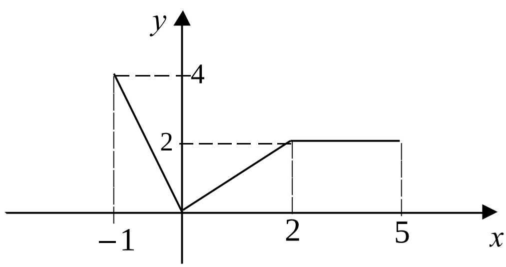
1. Построить прямые. Определить параметры k и b для каждой из прямых:

а) $5x+3y-1=0$, б) $5y+2x=0$, в) $5x-\dfrac{3}{2}=0$, г) $4y-7=0$.

2. Написать общие уравнения прямых, проходящих через:
   1) Точку $M_1(-3;3)$ под углом $\varphi=60^0$ к оси OX.
   2) Точки $M_1(-3;3)$ и $M_2(2;6)$.
   3) Точку $M_2(2;6)$ параллельно оси абсцисс.
   4) Точку $M_1(-3;3)$ перпендикулярно вектору $\overline{N}=(5;-3)$.
   5) Точку $M_1(-3;3)$ и отсекающую на осях равные отрезки.
   6) Найти расстояние от точки $M_1(-3;3)$ до прямой
   $$l: x+8y-15=0.$$
   7) Найти тангенс острого угла между прямыми, найденными в пунктах 1 и 2.

3. Написать уравнение прямой, проходящей через точку M пересечения прямых l_1: $5x-3y+19=0$ и l_2: $2x-y+7=0$ параллельно прямой l: $x=6y$.

4. Задайте функцию аналитически.



5. Построить множество решений системы неравенств

$$\begin{cases} x+y\le 12, \\ 3x+2y\ge 10, \\ x-y\le 0, \\ 0\le y\le 7, \\ x\ge 0. \end{cases}$$

6. Построить кривые по заданным уравнениям. Найти фокусы, эксцентриситет, уравнение директрис:

а) $(x+1)^2+(y-3)^2=25$; б) $\dfrac{x^2}{49}+\dfrac{y^2}{9}=1$;

в) $\dfrac{x^2}{49}-\dfrac{y^2}{16}=1$; г) $y^2=-5x$;

д) $2x^2+y\ \ -4x-3=0$.

7. Составить уравнение плоскости α, проходящей через точку $M_0(\text{-}5;0;3)$, перпендикулярно вектору $\overline{N}=(1;5;\text{-}3)$. Найти расстояние от точки M_0 до заданной плоскости $\beta: 2\mathrm{x}+4\mathrm{y}\text{-}15=0$ и угол между плоскостями α и β.

8. Составить уравнение плоскости, проходящей через две точки $M_1(1;3;\text{-}1)$ и $M_2(3;4;2)$, перпендикулярно плоскости

$$\beta: 3\mathrm{x}+\mathrm{y}\text{-}3\mathrm{z}+5=0.$$

9. Составить канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(0;-3;4)$, параллельно прямой

$$l: \begin{cases} 3x+y-z-6=0, \\ 3x-y+2z=0. \end{cases}$$

10. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(-3;1;-2)$ и прямую $l: \begin{cases} x=-2t, \\ y=5t+1, \\ z=3t-1. \end{cases}$

Вариант 25

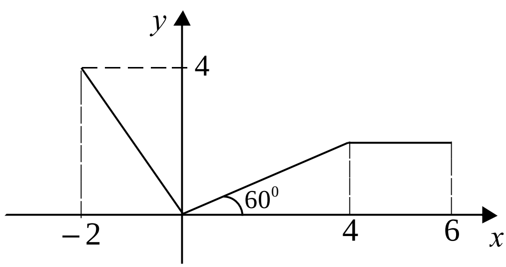
1. Построить прямые. Определить параметры k и b для каждой из прямых:

а) $-3x+4y+24=0$, б) $12x-\dfrac{3}{4}y=0$, в) $4x+6=0$, г) $8-3y=0$.

2. Написать общие уравнения прямых, проходящих через:
   1) Точку $M_1(-5;2)$ под углом $\varphi=120^0$ к оси OX.
   2) Точки $M_1(-5;2)$ и $M_2(1;8)$.
   3) Точку $M_2(1;8)$ параллельно оси абсцисс.
   4) Точку $M_1(-5;2)$ перпендикулярно вектору $\overline{N}=(-3;3)$.
   5) Точку $M_1(-5;2)$ и отсекающую на осях равные отрезки.
   6) Найти расстояние от точки $M_1(-5;2)$ до прямой $$l:-x+5y-10=0.$$
   7) Найти тангенс острого угла между прямыми, найденными в пунктах 1 и 2.

3. Написать уравнение прямой, проходящей через точку M пересечения прямых l_1: $8x+3y-18=0$ и l_2: $2x+y-4=0$ параллельно прямой l: $4y+3x=0$.

4. Задайте функцию аналитически.



5. Построить множество решений системы неравенств

$$\begin{cases} x+y\le 8, \\ 3x+8y\ge 24, \\ 4x+y\ge 8, \\ 0\le x\le 6, \\ 0\le y\le 6. \end{cases}$$

6. Построить кривые по заданным уравнениям. Найти фокусы, эксцентриситет, уравнение директрис:

а) $(x-3)^2+(y-2)^2=36$; б) $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{25}=1$;

в) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{4}=1$; г) $y^2=-16x$;

д) $x^2+y^2-x-y=0$.

7. Составить уравнение плоскости α, проходящей через точку $M_0(9;\text{-}1;1)$, перпендикулярно вектору $\overline{N}=(0;2;5)$. Найти расстояние от точки M_0 до заданной плоскости $\beta: 4\mathrm{x}-\mathrm{y}+2\mathrm{z}+3=0$ и угол между плоскостями α и β.

8. Составить уравнение плоскости, проходящей через две точки $M_1(\text{-}1;\text{-}3;1)$ и $M_2(0;4;1)$, перпендикулярно плоскости

$$\beta: 2\mathrm{x}+3\mathrm{y}-\mathrm{z}+3=0.$$

9. Составить канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(-4;0;1)$, параллельно прямой

$$l: \begin{cases} x+5y-z-5=0, \\ 2x-5y+2z+5=0. \end{cases}$$

10. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(0;-1;4)$ и прямую $l: \begin{cases} x-2y-z+1=0, \\ 3x+y+z+4=0. \end{cases}$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Практикум по решению задач аналитической геометрии состоит из введения и двух разделов, имеет четкую и логично выстроенную структуру. Первый раздел посвящен аналитической геометрии на плоскости, включая уравнение прямой на плоскости и кривые второго порядка, во втором разделе рассматривается аналитическая геометрия в пространстве, включая плоскость, прямую в пространстве и взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве. Практикум содержит необходимый для решения задач теоретический материал, изложенный в сжатой форме.

Следует отметить, что данный практикум содержит раздел, посвященный приложению аналитической геометрии в экономике. В нем рассматриваются следующие задачи: линейная модель амортизации, линейные функции спроса и предложения, определение равновесной цены, бюджетное множество, в которых используются уравнение прямой на плоскости и графическое решение систем линейных неравенств. Приведенные решения примеров достаточно подробны и допускают самостоятельное изучение данного раздела математики.

Контрольные задания для студентов содержат 25 вариантов, каждый из которых включает 10 задач.

ОТВЕТЫ

1. Аналитическая геометрия на плоскости

Номер задания	Ответ
1.9	$15x-5y+32=0$
1.10	135^0
1.11	а) $\alpha=0$; $\alpha=1$ б) $\alpha=\frac{1}{3}$
1.12	$k=-\frac{2}{3}$; $в=\frac{5}{3}$
1.13	1
1.14	а) $y=\sqrt{3}x-6$; б) $y=2$; в) $4x+3y-12=0$
1.15	а) $2x+5y-13=0$; б) $5x-2y+11=0$
1.16	$5x+13=0$
1.17	$4x-8y+1=0$
1.18	а) 90^0; б) 0^0; в) 45^0
1.19	2,8
1.20	5
1.21	$\sqrt{10}$

2. Аналитическая геометрия в пространстве

2.1. Плоскость в пространстве

Номер задания	Ответ
2.11	$3x-5y+3z-18=0$
2.12	$-2x+y-z+2=0$; $d=\frac{\sqrt{6}}{6}$
2.13	а) $x=2$; б) $y=-1$; в) $z=4$
2.15	а) $\cos\alpha=-\frac{1}{2}$; б) $d=\frac{3}{2\sqrt{6}}$; в) $\alpha=\beta$; г) $\alpha\perp\beta$
2.16	$m=-4$; $l=3$
2.17	$m=6$

Окончание таблицы

Номер задания	Ответ
2.18	$x - y + \frac{z}{2} = 1$
2.19	$\frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{4} = 1$
2.20	$V = 8\,ед.куб.$
2.21	$x + y - 3 = 0$
2.22	$x - 6y - 27 + 29 = 0$
2.23	$x - 2y - z + 2 = 0$
2.24	а) $3y + z = 0$; б) $x + 2z = 0$; в) $2x + y = 0$
2.25	а) $x + y - 4 = 0$; б) $x + z - 1 = 0$; в) $y + 2z - 7 = 0$
2.26	$x - 2y - z + 2 = 0$
2.27	$2x + y - 2z - 15 = 0$
2.28	$x + y + \sqrt{2}\,z - 2 = 0$ или $x + y - \sqrt{2}\,z - 2 = 0$
2.29	$x + 3y = 0$ или $3x - y = 0$
2.30	60^0
2.31	$(1;-2;2)$
2.33	а) $a \neq 7$; б) $a = 7$; $в = 3$; в) $a = 7$; $в \neq 3$

2.2. Прямая в пространстве

Номер задания	Ответ
2.39	$\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-7} = \frac{z+4}{1}$
2.40	а) $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{-2}$; б) $\frac{x-3}{-2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+3}{0}$
2.41	$\frac{x}{-2} = \frac{y+1}{4} = \frac{z}{5}$; $\begin{cases} x = -2t, \\ y = -1 + 4t, \\ z = 5t \end{cases}$

Окончание таблицы

Номер задания	Ответ
2.42	а) $\frac{x-2}{5}=\frac{y}{2}=\frac{z+3}{-1}$; б) $\frac{x-2}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z+3}{0}$; в) $\frac{x-1}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z+3}{0}$; г) $\frac{x-2}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z+3}{-\frac{1}{2}}$; д) $\frac{x-2}{-3}=\frac{y}{4}=\frac{z+3}{5}$
2.43	$\frac{x-1}{\sqrt{2}}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-5}{-1}$
2.44	а) $\cos\varphi=\frac{24}{5\sqrt{29}}$; б) $\cos\varphi=-\frac{1}{3\sqrt{14}}$
2.45	$\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{3}}$
2.46	$\alpha=12$
2.47	$\alpha=-4$, $\beta=1$

2.3. Прямая и плоскость в пространстве

Номер задания	Ответ
2.57	а) $\sin\varphi=\frac{1}{\sqrt{15}}$ б) $\sin\varphi=\frac{\sqrt{7}}{3}$ в) $\sin\varphi=\sqrt{\frac{2}{93}}$
2.60	$a=-3$
2.61	$a=-6$; $в=\frac{3}{2}$
2.62	$A=-3$; $B=\frac{9}{2}$
2.63	а) $(2;-3;6)$; б) $l \parallel \alpha$; в) $l \in \alpha$; г) $(1;-2;2)$
2.65	а) $2x-3y+4z-1=0$; б) $x+2y+3z+4=0$
2.66	$(1;4;-7)$

Окончание таблицы

Номер задания	Ответ
2.67	$Q(-5;1;0)$
2.68	$(3;-2;4)$
2.69	$Q(2;-3;2)$
2.70	$(7;10;10)$
2.71	а) $d=21$; б) $d=6$; в) $d=15$
2.72	$\begin{cases} x=9t+2, \\ y=-8t+1, \\ z=-11t \end{cases}$
2.73	$\begin{cases} x=5t+1, \\ y=-4t, \\ z=-t-1 \end{cases}$
2.74	а) $4x+6y+5z-1=0$; б) $3x-11y-13z-15=0$; в) $x+y+z-1=0$
2.75	а) $2x-16y-13z+31=0$; б) $6x-20y-11z+1=0$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Вся высшая математика / Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Т.И. и др. М.: Эдиториал УРСС, 2000. Т.1. 328 с.
2. Бугров Я. С., Никольский С. М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. М.: Наука, 1980. 176 с.
3. Данко П.Е., Попов А. Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Т. 1. М.: Наука, 1982.

СОДЕРЖАНИЕ