Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова»

В. А. Коротецкая
Ю. А. Извеков

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Утверждено Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия

Магнитогорск
2015

УДК 517

Рецензенты:

Старший преподаватель,
Филиал ФГБОУ ВПО «Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ» в г. Магнитогорске
Е.Ю. Хамутских

Кандидат педагогических наук, доцент кафедры высшей математики №2,
ФГБОУ ВПО «Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова»
Т.А. Бондаренко

Коротецкая В. А., Извеков Ю. А.
Функции нескольких переменных [Электронный ресурс] : учебное пособие / Валентина Александровна Коротецкая, Юрий Анатольевич Извеков ; ФГБОУ ВПО «Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова». – Электрон. текстовые дан. (1,0 Мб). – Магнитогорск : ФГБОУ ВПО «МГТУ», 2015. – 1 электрон. опт. диск (CD-R). –Систем. требования : IBM PC, любой, более l GHz ; 512 Мб RAM ; 10 Мб HDD ; MS Windows XP и выше ; Adobe Reader 8.0 и выше ; CD/DVD-ROM дисковод ; мышь. – Загл. с титул. экрана.

В учебном пособии представлены основные разделы дифференцирования различных функций нескольких переменных, скалярного поля необходимые для дальнейшего освоения студентами основной образовательной программы, как по математике, так и по смежным и специальным дисциплинам.

Приведены варианты индивидуальных заданий для самостоятельной работы студентов.

УДК 517

СОДЕРЖАНИЕ

§1. ОБЛАСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Теоретические вопросы

1.Что называется функцией двух переменных?

2.Что называется областью определения функции двух переменных?

3.Геометрический смысл функции двух переменных.

4.Что называется функцией трех переменных? Как можно графически истолковать ее область определения?

Пример 1.

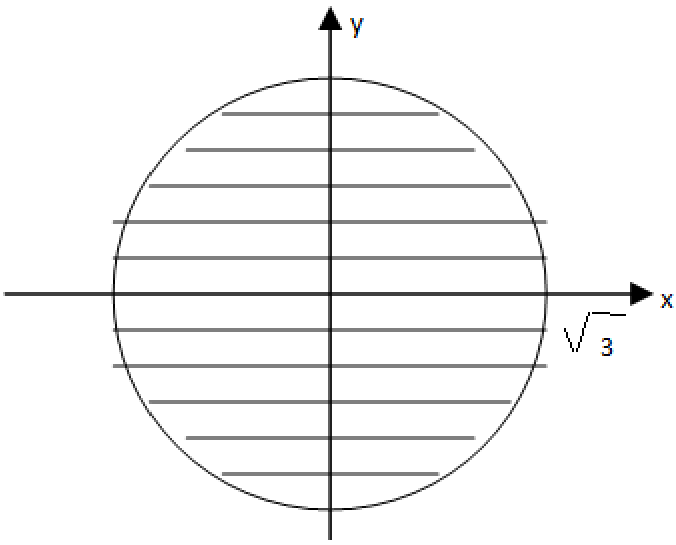
Изобразите область определения функции z = $\sqrt{3-x^2-y^2}$.

Решение

Корень определен при неотрицательных значениях аргумента:

$3-x^2-y^2 \geq 0 \rightarrow x^2+y^2 \leq 3$.

Областью определения данной функции служит круг с центром в начале координат и R= $\sqrt{3}$



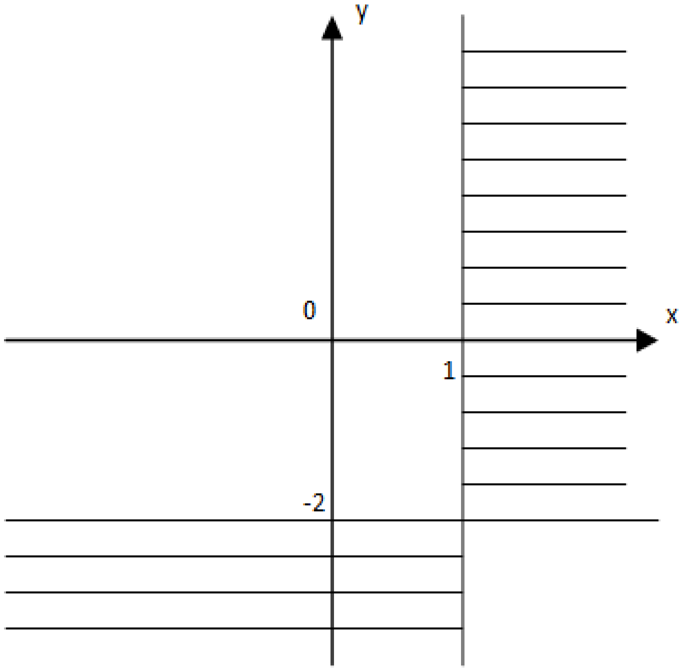
Пример 2.

Найдите область определения функции z = $\sqrt{(x-1)(x+2)}$.

Решение

(x-1)(x+2)≥ 0→ $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ y+2 \geq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x-1 \leq 0 \\ y+2 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \geq -2 \end{cases} \cup \begin{cases} x \leq 1 \\ x \leq -2 \end{cases}$

Проведем две прямые x=1 и y=-2. Область определения состоит из двух квадрантов с общей точкой (1;-2).



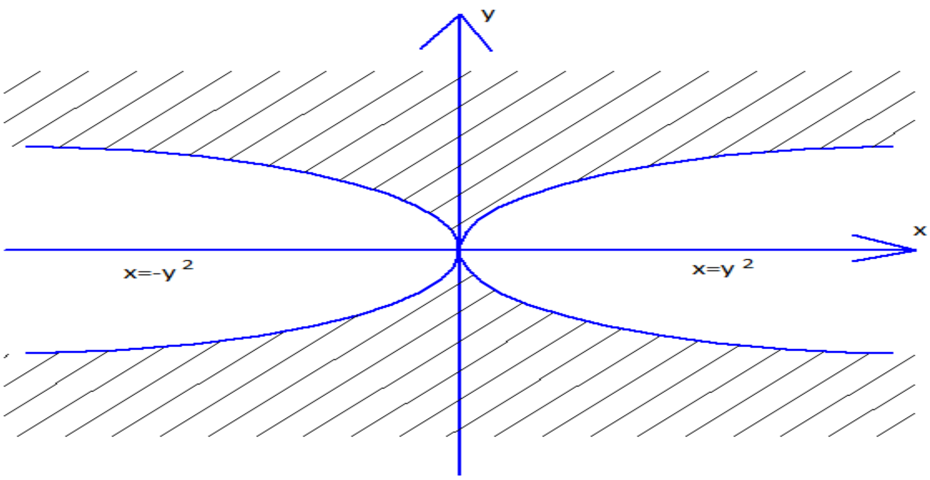
Пример3.

Найдите область определения функции z= arcsin $\frac{x}{y^2}$

Решение

$$-1 \le \frac{x}{y^2} \le 1 \rightarrow \begin{cases} -y^2 \le x \le y^2 \\ y \ne 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \le y^2 \\ x \ge -y^2 \\ y \ne 0 \end{cases}$$

Областью определения являются точки между параболами.



Задачи для самостоятельного решения

1. Найти область определения:

1) z = $\dfrac{3x-y}{x+2y}+\sqrt{y}$

2) z = $\sqrt{x-y}+\sqrt{x+y}$

3) z = $\sqrt{x^2-16}+\sqrt{16-y^2}$

4) z = $\sqrt{1-\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{25}}$

5) z = $\dfrac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2}$

6) u = $\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{y}}+\dfrac{1}{\sqrt{z}}$

2.Придумайте пример функции двух переменных, областью определения которой является следующее множество:

1) Множество всех точек плоскости XOY без точек какого-либо эллипса.
2) Вся плоскость XOY с одной выколотой точкой.
3) Часть плоскости XOY ,ограниченная какой-либо параболой.

§2. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ

Теоретические вопросы

1.Определение частных и полных приращений функции двух переменных.

2.Определение частных производных функции двух переменных.

3.Какой геометрический смысл имеют частные производные функции двух переменных?

4.Сформулируйте правило нахождения частных производных функции нескольких переменных.

Пример 1**.**

Найдите частные производные функции z=$x^5 - 8x^3y^2 + y^6$

Решение

При нахождении частной производной по x будем рассматривать y= const.

Тогда получим:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 5x^4 - 8y^2 3x^2 = 5x^4 - 24y^2x^2$$

Аналогично, при нахождении $\frac{\partial z}{\partial y}$, полагаем x=const.

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -8x^3 2y + 6y^5 = -16x^3y + 6y^5$$

Пример 2 .

u= x^{yz^2} . Найти $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$.

Решение

Функция U-функция трех переменных x,y,z. При определении частной производной по каждой из этих переменных , две другие следует считать постоянными величинами .

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y\, z^2 x^{yz^2-1} \quad ; \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = x^{yz^2} (\ln x)\, z^2 ;$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = x^{yz^2} (\ln x) 2yz .$$

Задачи для самостоятельного решения

1.Найдите частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции двух переменных.

1.) z = $x^2y - xy^2 + \sqrt{3}$

2.) z = $\sqrt{xy} - \frac{y}{x}$

3.) z = $\frac{x+y}{x-y}$

4.) z = $(3x^2y^3 - 4\ln x)^{10}$

5.) z = x^y

6.) z =arctg $\frac{x}{y}$

7.) z = xy sin(x+y)

8.) z = $e^x \cos y$

9.) z = $\cos^2(2x + y)$

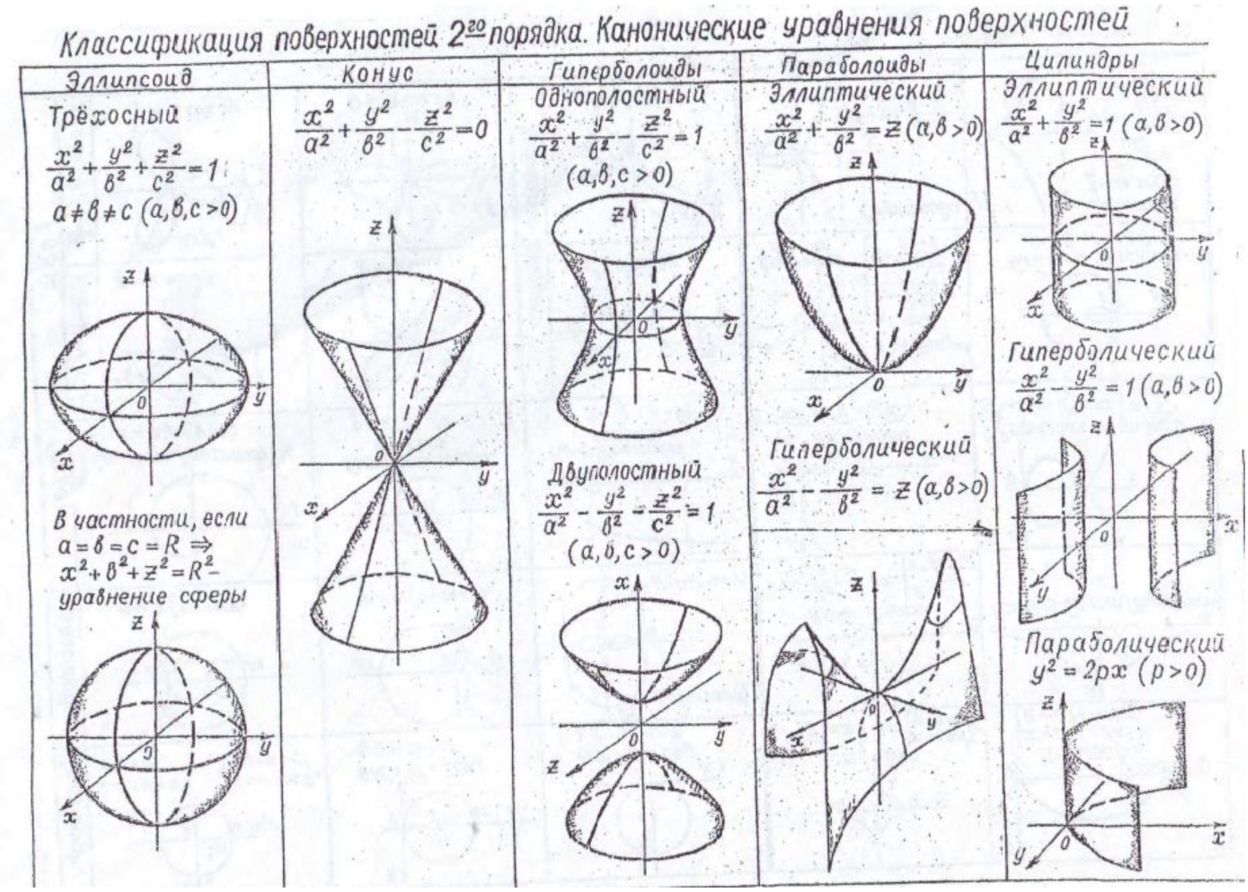
10.) z =ln($x^2y + y^3$)

2.Найдите частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$ функции трех переменных

1.) u= $3xyz^3 + \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$

2.) u= $(xy)^2 - y\ln x - \frac{z}{\ln y}$

§3. ПОВЕРХНОСТИ



§4. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

Теоретические вопросы

1. Когда функция z = f(x,y) называется дифференцируемой в данной точке?

2. Что называется полным приращением и полным дифференциалом функции z = f(x,y) в данной точке?

3. Как выражается полный дифференциал функции z = f(x,y) через ее частные производные?

4. Как применяется полный дифференциал функции для приближенного вычисления ее значения?

Пример 1.

Найдите дифференциал функции z = arcsin $\frac{y}{x}$.

Решение

Дифференциал функции dz=$\frac{\partial z}{\partial x}\cdot dx+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot dy$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}}\cdot\left(\frac{-y}{x^2}\right);\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}}\cdot\frac{1}{x}$$

$$\partial z=-\frac{ydx}{x\cdot\sqrt{x^2-y^2}}+\frac{dy}{\sqrt{x^2-y^2}}$$

Пример 2.

Вычислите приближенно arctg $\frac{4{,}02}{3{,}97}$.

Решение

Воспользуемся формулой:

$$z(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)\approx z(x_0 y_o)+\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$$

и рассмотрим функцию z = arctg $\frac{x}{y}$.

Надо вычислить значение функции в точке (4,02;3,97), т.е.

$x_0=4;\Delta x=0{,}02$

$y_0=4;\Delta y=-0{,}03$

z(4, 4) = arctg 4/4 = arctg 1= П/4.

Найдем частные производные в точке (4,4).

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\frac{1}{y}}{1+\frac{x^2}{y^2}}=\left.\frac{y}{x^2+y^2}\right|_{(4,4)}=\frac{4}{4^2+4^2}=\frac{4}{32}=\frac{1}{8}=0{,}125$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-\frac{x}{y^2}}{1+\frac{x^2}{y^2}}=\left.-\frac{x}{y^2+x^2}\right|_{(4,4)}=-\frac{4}{32}=-0{,}125$$

По формуле получим:

$$\text{Arctg}\,\frac{4{,}02}{3{,}97}\approx z(4,4)+\frac{\partial z}{\partial x}(4,4)\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}(4,4)\Delta y=\frac{\pi}{4}+0{,}125\cdot 0{,}02-0{,}125\cdot(-0{,}03)=$$

=0,785+0,0025+0,00375=0,79125$\approx$0,791

Задачи для самостоятельного решения

1. Найдите дифференциал функции:

а) z =$\sqrt{x^2-y^2}$

в.) z =x^2+xy+y^2

б) z =x^y

г.) u = x^{yz}

2. Вычислите приближенно:

а.)$1{,}08^{3{,}95}$

в.)$(1{,}03)^3\cdot(0{,}98)^2$

б.)$\sqrt{(4{,}02)^2+(2{,}99)^2}$

г.) $\dfrac{0.98^3}{\sqrt{1{,}02}}$

§ 5. ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Теоретические вопросы

1. Как определяются частные производные высших порядков для функции нескольких переменных?
2. При каком условии смешанные частные производные высших порядков функции нескольких переменных равны между собой?

Пример 1.

Найдите частные производные второго порядка функции:

Z $=x^3+2x^2y^3+6x^4+7y+100$. Проверьте, что $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial z}$.

Решение

Найдем частные производные первого порядка:

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=3x^2+4xy^3+24x^3$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}=6x^2y^2+7$.

Дифференцируя каждую из полученных производных по x и y , получим вторые частные производные:

$=6x+4y^3+72x^2$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=12xy^2$

$=12x^2y$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=12xy^2$

Сравниваем значения для смешанных производных, заключаем, что $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

Пример 2.

Покажите, что функция Z=sin (x+3y) удовлетворяет уравнению

$9\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

Решение

Найдем частные производные второго порядка, содержащиеся в этом уравнении:

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\cos(x+3y)$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\cos(x+3y)\cdot 3$

$=-\sin(x+3y)$; $=-\sin(x+3y)\cdot 9$

Подставим это в данное уравнение:

$9(-\sin(x+3y))+9\sin(x+3y)=0$, $0=0$

Тождество доказано.

Задачи для самостоятельного решения

Покажите, что функция удовлетворяет указанному уравнению.

1. Z= $x^6+y^6+x^6y^6$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$

2. Z= $\ell^x\cos y$; + =0

3. Z= $\ell^y\operatorname{tg}x$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$

4. Z = ℓ^{xy}; $x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$

§ 6. СЛОЖНЫЕ ФУНКЦИИ

Теоретические вопросы

1. Записать формулу дифференцирования сложной функции $Z = f(x,y)$, где $x= x()$, $y = y(t)$.
2. Записать формулу дифференцирования сложной функции $Z = f(x,y)$, где $y=\varphi(x)$.
3. Записать формулу дифференцирования сложной функции $Z = f(x,y)$, где $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$.

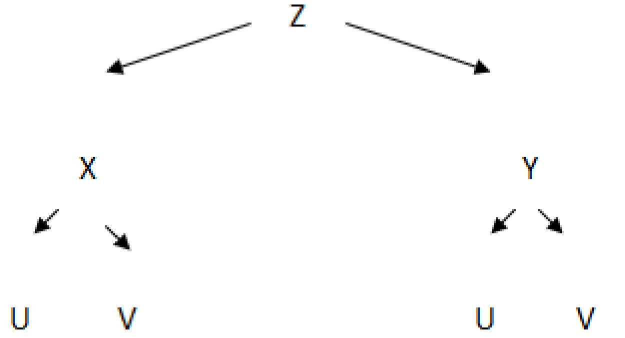
Примеры. Найдите частные производные сложной функции:

1) $Z=x^3e^y$, где $x= u^2-v^2$, $y= uv$

Решение

Изобразим схему зависимости.

Z-функция двух переменных U и V

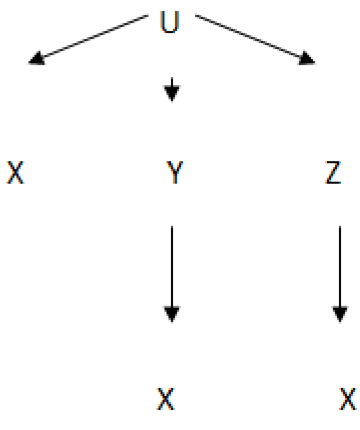


$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}=3x^2e^y\cdot 2u+x^3e^y v=6(u^2-v^2)e^{uv}\cdot u+(u^2-v^2)^3e^{uv}\cdot v$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}=3x^2(-2v)+x^3e^y\cdot u=-6(u^2-v^2)e^{uv}\cdot v+(u^2-v^2)^3e^{uv}\cdot u.$$

2) $u= \mathrm{ctg}\,(x^2+4y-z)$, где $y=\sqrt{x}$, $z=\dfrac{1}{x}$.

Схема зависимости



U- функция одной переменной.

$$\frac{du}{dx}=\frac{\partial u}{\partial x}+\ \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}= -\ \frac{1\cdot 2x}{\sin^2(x^2+4y-z)} -\ \frac{1\cdot 4}{\sin^2(x^2+4y-z)}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} -$$

$$\frac{1\cdot(-1)}{\sin^2(x^2+4y-z)}\cdot = -\ \frac{1}{\sin^2(x^2+4\cdot\sqrt{x}-x}\cdot(-\frac{1}{x^2})=-(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x^2})\ .$$

Задачи для самостоятельного решения

Продифференцировать сложную функцию.

1. Z= $x^3\cdot y^5$, где X=t sint, y=t cost

2. Z= ln(x-y²), где y= x·e^x

3. Z= cos $\frac{x}{y}$, где x=u²+v², y=uv.

§ 7. НЕЯВНЫЕ ФУНКЦИИ

Теоретические вопросы

1. Как найти производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ неявной функции F(X,Y,Z)=0?

2. Дать определение и сформулировать теорему существования неявной функции одной, двух переменных.

2)Как найти производную $\frac{\partial y}{\partial x}$ неявной функции F(X,Y)=0?

Пример.

Найти частные производные функции, заданной неявно $x^4 + y^4 + z^4 = 4xyz$

Решение

F(x,y,z)= $x^4 + y^4 + z^4 - 4xyz$,поэтому $F'_x(x, y, z)=4x^3-4yz$;

$F'_y(x,y,z)=4y^3-4xz$; $F'_z=4z^3-4xy$

По формулам $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F`x(x,y,z)}{F`z(x,y,z)}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F`y(x,y,z)}{F`z(x,y,z)}$

имеем: $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{4x^3-4yz}{4z^3-4xy} = \frac{yz-x^3}{xy-z^3}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{4y^3-4xz}{4z^3-4xy} = \frac{xz-y^3}{xy-z^3}$.

Замечание: Если переменная y есть неявная функция одной переменной x, заданной уравнением F(x,y)=0 , то $\frac{dy}{dx} = -\frac{F`x(x,y)}{F`y(x,y)}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Функция y=f(x) задано неявно уравнением F(x,y)=0. Найти производную $\frac{dz}{dx}$ и $\frac{dy}{dx}$.

a) $\sin(x-3y)=x^y$ b) $x^2\ln Y - y^2\ln X+5=0$

2. функция Z=f(x,y) задано неявно уравнением F(x,y,z)=0 .Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

a) $x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz = 0$ b) $xe^y + ye^z + ze^x = 0$

§ 8. КАСАТЕЛЬНАЯ ПЛОСКОСТЬ И НОРМАЛЬ К ПОВЕРХНОСТИ

Теоретические вопросы

1. Какая плоскость называется касательной плоскостью к поверхности z=f(x,y) в данной точке?
2. Что такое нормаль к поверхности в данной точке?
3. Напишите уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности Z=f(x,y) в точке A (X_0,Y_0).
4. Напишите уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности F(x,y,z)=0 в точке A (X_0,Y_0,Z_0).

Пример 1.

Составьте уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $Z=\frac{X^2}{2}+y^2$ в точке A(2,-1).

Решение

Уравнение поверхности задано явно z=f(x,y). Тогда уравнение касательной плоскости:

$z=z_0+f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)$.

Уравнение нормали:

$\frac{x-x_0}{f'_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f'_x(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}$.

$Z_0=f(x_0,y_0)=f(2,-1)=\frac{2^2}{2}+(-1)^2=3$.

$f'_x(x,y)=x$; $f'_x(2,-1)=2$;

$f'_y(x,y)=2y$; $f'_y(2,-1)=-2$.

Тогда касательная плоскость:

$Z=3+2(x-2)-2(y+1)$, $Z=3+2x-4-2y-2$, $2x-2y-z-3=0$.

Нормаль: $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-3}{-1}$.

Пример 2.

Составьте уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $\frac{X^2}{16}+\frac{Y^2}{9}-\frac{Z^2}{8}=0$ в точке (4,3,4).

Решение

Поверхность задана неявно F(X,Y,Z)=0. Применим формулы:

касательная плоскость –

$F'_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F'_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F'_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$,

нормаль-

$\frac{x-x_0}{F'_X(X_0,Y_0,Z_0)}=\frac{Y-Y_0}{F'_Y(X_0,Y_0,Z_0)}=\frac{Z-Z_0}{F'_Z(X_0,Y_0,Z_0)}$.

В задаче $F(x,y,z)=\frac{X^2}{16}+\frac{Y^2}{9}-\frac{Z^2}{8}$. Тогда

$F'_x=\frac{x}{8}$; $F'_x(4,3,4)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$;

$F'_y=\frac{2y}{9}$; $F'_y(4,3,4)=\frac{2*3}{9}=\frac{2}{3}$;

$F'_z=-\frac{z}{4}$; $F'_z(4,3,4)=-\frac{4}{4}=-1$.

Касательная плоскость:

$\frac{1}{2}(x-4)+\frac{2}{3}(y-3)-1(z-4)=0$,

$3(x-4)+4(y-3)-6(z-4)=0$,

$3x+4y-6z=0$.

Нормаль : $\frac{x-4}{\frac{1}{2}}=\frac{y-3}{\frac{2}{3}}=\frac{z-4}{-1}$ или $\frac{x-4}{3}=\frac{y-3}{4}=\frac{z-4}{-6}$.

Задачи для самостоятельного решения

Составить уравнения касательных плоскостей и нормалей к заданным поверхностям в указанных точках.

1. $z=x^2-y^2$, $M(2,1,3)$;
2. $x^3+y^3+z^3+xyz=6$, $M(1,2,-1)$;
3. $x^2+y^2+z^2=2Rz$, $M(R\cos\alpha, R\sin\alpha, R)$;
4. $z=xy$, $M(1,1,1)$.

§ 9. ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ

Теоретические вопросы

1. Какие точки называются точками экстремума функции z = f(x,y)?
2. Какие точки называются стационарными точками функции z = f(x,y)?
3. Сформулируйте необходимые условия экстремума для функции двух переменных.
4. Сформулируйте достаточные условия экстремума функции двух переменных.

Пример.

Найдите экстремум функции $Z=x^2+8y^3-6xy+1$

Решение

1) Находим стационарные точки , в которых выполняется необходимое условие экстремума:

$$\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=0\\ \frac{\partial z}{\partial y}=0\end{cases}\quad \begin{cases}3x^2-6y=0\\ 24y^2-6y=0\end{cases}\begin{cases}x^2=2y\\ 4y^2=x\end{cases}\begin{cases}16y^4=2y\\ 4y^2=x\end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y_1=0\\ 4y^2=x\end{cases}\\ \begin{cases}y_2=\frac{1}{2}\\ 4y^2=x\end{cases}\end{array}\right.\qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x_1=0\\ y_1=0\end{cases}\\ \begin{cases}x_2=1\\ y_2=\frac{1}{2}\end{cases}\end{array}\right.$$

$p_1(0;0)$ $p_2(1;\frac{1}{2})$ искомые стационарные точки.

2) Проверим выполнение достаточных условий экстремума. Для этого существует теорема:

если в стационарной точке $p_0(x_0,y_0)$ и некоторой её окрестности функция z = f(x,y) имеет непрерывные частные производные второго порядка:

$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x_0, y_0)$, $B=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x_0, y_0)$, $C=\frac{\partial^2 z}{\partial_x \partial_y}(x_0, y_0)$ и если $\Delta = AB-C^2$,то

а) $\Delta > 0$,то в точке P_0 функция имеет экстремум , причем при A<0 -максимум, при A>0 - минимум.

б) Если $\Delta < 0$, то в P_0 нет экстремума.

в) Если $\Delta = 0$, то вопрос об экстремуме открыт.

В точке P_1 (0;0): A=0, B=0, C=-6

$\Delta = AB-C^2=0-(-6)^2 = -36 < 0$ –нет экстремума.

В точке $P_2(1;\frac{1}{2})$: A=6, B=24, C=-6

$\Delta = 6\cdot 24-(-6)^2>0$ – есть экстремум, A>0 –минимум.

$Z\ (1;\frac{1}{2}) =1+8*\frac{1}{8} -6*\frac{1}{2}+1 =0$ – минимум.

Задачи для самостоятельного решения

Найти экстремум функции двух переменных:

1. $z= x^2+3y^2+6y$
2. $z= x^3+8y^3-6xy+5$
3. $z= 3-3x^2-y^2-xy+5x-y$

§10. НАИБОЛЬШЕЕ И НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ

Теоретические вопросы

1. Правило нахождения наибольшего и наименьшего значений функции z=f(x,y) в замкнутой ограниченной области.

Пример.

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$Z=2x^3-6xy+3y^2$ в замкнутой области, ограниченной осью оу, прямой y=2 и параболой $y=\frac{1}{2}x^2$ при $x\geq0$.

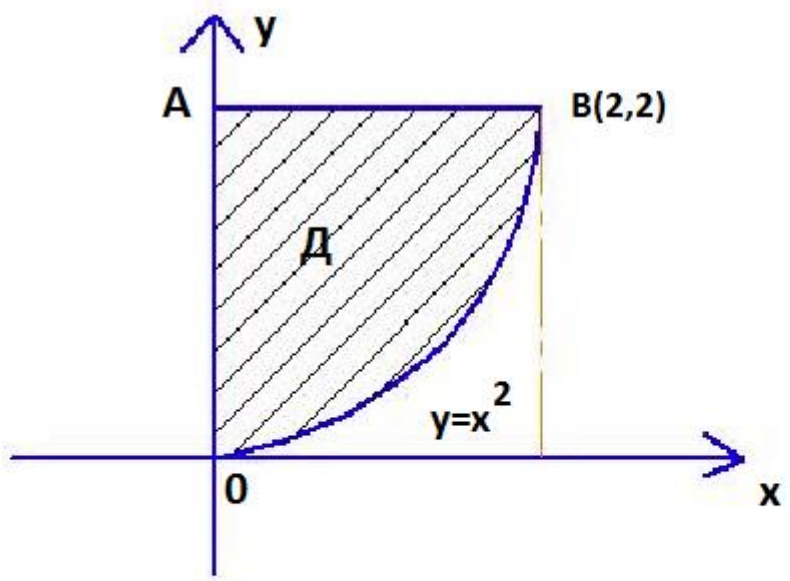
Решение

Наибольшее M и наименьшее m значения ищут среди стационарных точек и на границе области Д.

1) Стационарные точки:

$$\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=6x^2-6y=0\\ \frac{\partial z}{\partial y}=-6x+6y=0\end{cases}\begin{cases}x^2-y=0\\ x-y=0\end{cases}\begin{cases}x^2-x=0\\ x-y=0\end{cases}$$

$\begin{cases}x_1=0\\ y_1=0\end{cases}\begin{cases}x_2=1\\ y_2=1\end{cases}$ Итак, O(0,0); M(1,1) ∈ Д.



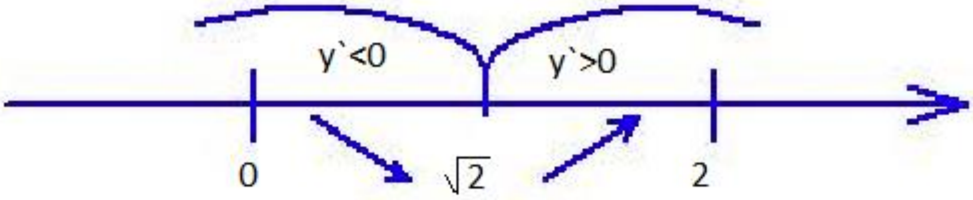
2) Отрезок OA: x = 0=> $z=3y^2(0\leq y\leq2)$ – парабола. Наибольшее и наименьшее значения она принимает на концах отрезка OA:

O(0,0), A(0,2).

3) Отрезок AB: y= 2=> $z=2x^3-12x+12$ $(0\leq x\leq2)$

$Z'=6x^2-12=6(x^2-2)=6(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})=0$.

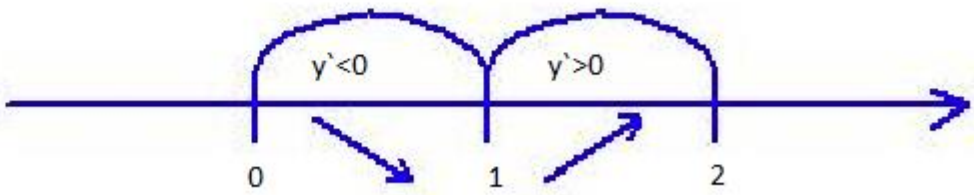
Внутри отрезка одна критическая точка $Q(0,\sqrt{2})$.



M и m на AB могут быть среди точек A, B, Q.

4) На дуге OB: $y=\frac{1}{2}x^2 => z=2x^3-6x\cdot\frac{1}{2}x^2+3(\frac{1}{2}x^2)^2=\frac{3}{4}x^4-x^3$

$(0\leq x \leq 2)$. Z`=$3x^3-3x^2=3x^2(x-1)=0$.



$P(1,\frac{1}{2})$-критическая точка

M и m на дуге OB находятся среди точек O,P,B.

5) Следовательно , M и m находятся среди точек O, A, B, Q, P, M. Сравним значения функции в этих точках.

Z(O)=Z(0;0)=0 ,	$Z(Q)=Z(\sqrt{2};2)=12-8\sqrt{2}$,
Z(A)=Z(0;2)=12,	$Z(P)=Z(1;\frac{1}{2})=-\frac{1}{4}$,
Z(B)=Z(2;2)=4,	Z(M)=Z(1;1)= -1.

Итак, M=Z(0,2)=12; m =Z(1;1)=-1

Задачи для самостоятельного решения

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции z=f(x,y) в замкнутой ограниченной области Д.

1. $z=y^3-3xy+3x$

Д:$\begin{cases} x\geq -1 \\ y\geq 0 \\ x+y\leq 3\end{cases}$

2. $z=2x^2+y^2-8x$

Д:$\begin{cases} x^2+y^2\leq 25 \\ y\geq -x\end{cases}$

3. $z=x^2y-xy^2+12y$

Д:$\begin{cases} y\geq -5 \\ y\leq x \\ y\leq -x\end{cases}$

4. $Z=x^3+y^3-3xy$

Д:$\begin{cases} 0\leq x\leq 2 \\ -1\leq y\leq 2\end{cases}$.

§11. СКАЛЯРНОЕ ПОЛЕ

Теоретические вопросы

1. Дать определение скалярного поля.
2. Приведите примеры плоских и пространственных скалярных полей.
3. Что называется линией уровня?
4. Что называется поверхностью уровня?
5. Что называется производной функции u=u(x,y,z)?
по направлению вектора $\vec{l} = (a, b, c)$?
6. Что называется градиентом скалярного поля u=u(x,y,z) в данной точке?
7. Как выражается производная по направлению через градиент и единичный вектор?
8. Сформулируйте известные вам свойства градиента.

Пример 1.

Изобразите линии уровня для поверхности $Z = \sqrt{X^2+Y^2}$.

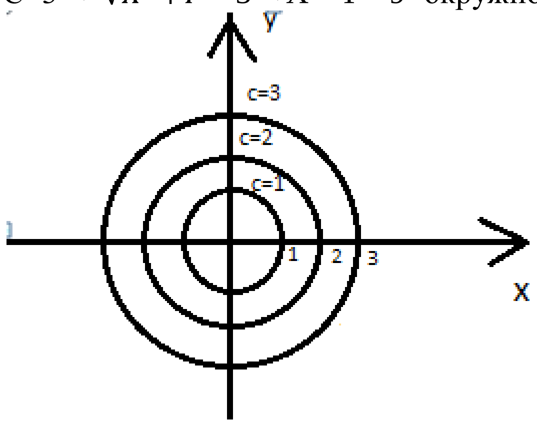
Решение

Равенство $\sqrt{X^2+Y^2}$=C представляет собой уравнение линии уровня поля, т.е линия уровня- это линия на плоскостиOXY , в точках которой функция $Z = \sqrt{X^2+Y^2}$ сохраняет постоянное значение.

C=1 → $\sqrt{X^2+Y^2}$=1 →X^2+Y^2=1- окружность радиуса 1

C=2 → $\sqrt{X^2+Y^2}$=2 →X^2+Y^2=4- окружность радиуса 2

C=3 → $\sqrt{X^2+Y^2}$=3 →X^2+Y^2=9- окружность радиуса 3



Пример 2.

Найдите производную скалярного поля $U = x\sqrt{y} + y\sqrt{z}$ в точке $M_0(2,4,4)$ по направлению к точке $M_1(6,-4,8)$.

Решение

Запишем формулу для вычисления производной по направлению:

$\frac{\partial u}{\partial e} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma.$

Находим вектор $\overrightarrow{M_0M_1}$,и его направляющие косинусы:

$\overrightarrow{M_0M_1} = (6-2, -4-4, 8-4) = (4, -8, 4),$

$$\cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{4^2+8^2+4^2}} = \frac{4}{\sqrt{96}} = \frac{1}{\sqrt{6}};\cos\beta = \frac{8}{\sqrt{96}} = \frac{-2}{\sqrt{6}};\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sqrt{y}|_{M_0} = \sqrt{4} = 2;\frac{du}{dy} = \frac{x}{2\sqrt{y}} + \sqrt{z}\,|_{M_0} = \frac{2}{2\sqrt{4}} + \sqrt{4} = \frac{5}{2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{y}{2\sqrt{z}}|_{M_0} = \frac{4}{2\sqrt{4}} = 1.$$

$$\frac{\partial u}{\partial e} = 2\cdot\frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{5}{2}\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}\right) + 1\cdot\frac{1}{\sqrt{6}} = -\frac{2}{\sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Поскольку $\frac{\partial u}{\partial e} < 0$, то заданная функция в данном направлении убывает.

Пример 3.

Найдите угол между градиентами функции U=arctg $\frac{x}{y}$ в точках $M_1(1,1)$ и $M_2(-1,-1)$.

Решение

Градиентом скалярного поля в данной точке M называется вектор, обозначаемый символом grad U и определяемый равенством

$$\text{gradU}=\frac{\partial u}{\partial x}\bar{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\bar{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\bar{k}.$$

В данном случае поле U плоское, поэтому grad U содержит две координаты

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{1+(\frac{x}{y})^2}\cdot\frac{1}{y};\ \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{1+(\frac{x}{y})^2}(-\frac{x}{y^2})$$

В точке $M_1(1,1)$: $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{2};\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{2};$

$\text{gradU}(M_1)=\frac{1}{2}\bar{i}-\frac{1}{2}\bar{j}$.

В точке $M_2(-1,-1)$: $\frac{du}{dx}=-\frac{1}{2};\ \frac{du}{dy}=\frac{1}{2};$

$\text{gradU}(M_2)=-\frac{1}{2}\bar{i}+\frac{1}{2}\bar{j}$.

Угол между градиентами:

$$cos\alpha=\frac{\text{gradU}(M_1)\cdot \text{gradU}(M_2)}{|\text{gradU}(M_1)|\cdot|\text{gradU}(M_2)|}=\frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}\cdot\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}}=-1\ =>\ \alpha=\pi.$$

Пример 4.

Найдите направление наибольшего изменения скалярного поля

U=xy=yz=xzв точке $M_0(1,1,1)$. Вычислите величину этого наибольшего изменения в указанной точке.

Решение

Известно, что направление наибольшего изменения скалярного поля указывается вектором $\text{gradU}(M_0)$.

$\frac{\partial u}{\partial x}=y+z|_{M_0}=2$; $\frac{\partial u}{\partial y}=x+z|_{M_0}=2$;

$\frac{\partial u}{\partial z}=y+x|_{M_0}=2$; $\text{gradU}(M_0)=2\bar{i}+2\bar{j}+2\bar{k}$.

Этот вектор определяет наибольшее возрастание поля в точке $M_0(1,1,1)$.Величина наибольшего изменения поля в этой точке равна:

$$|\text{gradU}|=\sqrt{(\frac{\partial u}{\partial x})^2+(\frac{\partial u}{dy})^2+(\frac{\partial u}{\partial z})^2}.\qquad max\frac{\partial u}{\partial e}.$$

$$max\frac{\partial u}{\partial e}=\sqrt{2^2+2^2+2^2}=2\sqrt{3}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Изобразите линии уровня для поверхности z=xy.
2. Найдите производную скалярного поля $u=x^2+y^2+z^2$ в точке M (1,1,1) по направлению вектора $\bar{l}=\bar{i}-\bar{j}+\bar{k}$.
3. Найдите угол между градиентами скалярных полей $U=x^2+9y^2+6z^2$ и $V=\frac{1}{xyz}$ в точке $M(1,\frac{1}{2},\frac{1}{\sqrt{6}})$.

ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

Условия к задачам

1. Изобразить область определения.
2. Найти частные производные первого порядка.
3. Изобразить тело ограниченное поверхностями.
4. Вычислить приближенно с помощью полного дифференциала.
5. Показать, что данная функция удовлетворяет указанному уравнению.
6. Продифференцировать сложную функцию.
7. Найти частные производные функции, заданной неявно.
8. Составить уравнения касательных плоскостей и нормалей к заданным поверхностям в указанных точках.
9. Найти экстремум функции двух переменных.
10. Найти наибольшее и наименьшее значение функции Z=Z(X,Y) в замкнутой ограниченной области Д.
11. а) Изобразить линии уровня скалярного поля;

 б) найти производную скалярного поля U(X,Y,Z) в точке M_0 по направлению вектора $\bar{L}$ и градиент поля в точке M_0.

Вариант 1

1. z=$\frac{x+y}{\sqrt{(x^2+y^2-4)}}$

2. z=$x^3\ln\frac{x}{y}$

3. z=x^2+y^2, z=25

4. z=$\frac{0{,}99^2}{\sqrt[3]{1{,}03}}$

5. u= $e^{-3t}\sin x$, $\frac{\partial u}{\partial t}=3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

6. z=e^{x^2+y}, где x=$\sin t$, y=$\cos t$

7. $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z=0$

8. z= x^2-y^2, A(2,1)

9. z=$(x-2)^2+(y+5)^2-xy+5$

10 z=x^2-xy+y^2-4x

D: x=0; y=0; 2x+3y−12=0

11. а) z= $(x+2)^2+(y-1)^2$

б) u=e^{xy-2z} , M_0(-1,2,-1)

$\bar{e}=\bar{i}+2\bar{j}+2\bar{k}$

Вариант 2

1. $z = y\sqrt{1-x^2-y^2}$

2. $U = x^2 + xy^3 + x^2yz^4$

3. $x^2 + y^2 = 4$

Z=0; z=2

x≥0; y≥0

4. $\sqrt{1{,}02^3 + 1{,}97^3}$

5. $z = \ln\sqrt{x^2+y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$

6. Z=xe^y, где x=uv, y=u+v

7. $\sin(xy) + \sin(yz) + \sin(xz) = 0$

8. Z=xy, A (1,1)

9. Z=x^2+y^2 - xy + 9x – 3y

10. Z = xy (4 – x – y)

Д: x=0; y=0; x+y=8

11. а) Z = y^2 - 2x

б) U = e^{xy+2z} , M_0 (-1,2, 1)

$\bar{e} = \bar{\imath} - 2\bar{j} + 2\bar{k}$

Вариант 3

1. $z = y\sqrt{4-x^2-y^2}$

2. Z = x $\mathrm{t}g(xy)$

3. x + y = 1

z = 0, z = 2

x = 0, y = 0

4. $1{,}02^{3{,}05}$

5. $z = \cos(3x+4y)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

6. $z = \frac{x^2-y}{x^2+y^2}$, где y = 6z-7.

7. $x^3 + y^3 + z^3 + x + y + z = 0$

8. $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, A (0, 0,1)

9. $z = 3x^2 + y^2 + xy - 5x + y + 3$

10. Z=10+2xy-x^2

Д $\begin{cases} y \geq 0 \\ y \leq 4 - x^2 \end{cases}$

11. а) Z = y - $\frac{1}{2}x^2$

б) U = e^{xy-2z} M_0 (-1,2, 1)

$\bar{e} = \bar{\imath} - 2\bar{j} - 2\bar{k}$

Вариант 4

1. Z = $\frac{3x-y}{x+2y} + \sqrt{y}$

2. U = $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

3. $\frac{x^2}{9}$ + $\frac{y^2}{4}$ = 1

$z = 0, z = 3$

4. $(0{,}95)^2(1{,}92)^3$

5. $z = \frac{x}{\sqrt[3]{y}}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

6. $z = x^2 e^y$, где x = u^2-v, y = u - 4v

7. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 6z = 0$

8. $\frac{x^2}{4}$ + $\frac{y^2}{9}$ - $\frac{z^2}{25}$ = 1, A (2, 3, 5)

9. $z = (x-5)^2 + (y+1)^2 - 4xy$

10. Z = xy + x + y

Д: x=1, x=2, y=2, y=3

11. а) Z = $(x-1)^2$ + $(y+2)^2$

б) U = e^{xy+2z} M_0 (-1,2, 1)

$\bar{e} = \bar{\imath} + 2\bar{j} - 2\bar{k}$

Вариант 5

1. z = $\sqrt{(x+2)(y-3)}$
2. z = $e^{xy} + x$
3. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$

$z = 0; z = 2$

4. $1{,}002*2{,}003^2$
5. z = $\sqrt{2x+3y}$ $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$
6. z = $x^3y - 2x - y$, где $y = \sin x$
7. x$\ln y$ + y$\ln z$ + z$\ln x$ = 1
8. z = $\sin(xy)$, A (1, π)
9. z = $x^2 + y^2 - xy - 9x - 6y + 20$
10. z = $x^2 + 3y^2 + x + y$

Д: x = 1, x + y = 1, y = 1

11. а) Z = $9 - x^2 - y^2$

б) U = x^2 - 3yz + 5, M_0 (1,2,-1)

ē = (1, 2, 2)

Вариант 6

1. z = $\sqrt{xy}$

2. z = e^{xy}+y^2

3. x + y + z = 4,

x = 2, y = 2,

x = 0, y = 0, z = 0

4. 0,97^{1,03}

5. $z = x^2 \ln y$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$

6. $z = x^2 y^3$, где x = t^2-1, y = t^2+1

7. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{25} = 1$

8. $z = \frac{x^2}{2} - y^2$; $A\ (2, -1)$

9. z = $x^2 + y^2 - xy - 3x - 6y + 10$

10. z = $2xy - 2x - 4y$

Д: $\begin{cases} 0 \le x \le 3 \\ 0 \le y \le 2 \end{cases}$

11. а) Z = $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

б) U = x^2 + y^2 + z^2 M_0 (1,2, 1)

$\bar{l}$ = (2, 4, 4)

Вариант 7

1. z = $\sqrt{x+1}$ + $\sqrt{4-y}$

2. z = xe^{-xy}

3. $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}+\frac{z}{4}$= 1,

x = 0, y = 0, z = 0

4. $1{,}04^{2{,}02}$

5. $z = x^3y^5+xy$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ = $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$

6. $z = x\ln y$, где x = $u+v$, y = $\frac{u}{v}$

7. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}$ = 1

8. $4x^2+4y^2+z^2=21$; A (1,2,1)

9. z = $-3x^2 - y^2 - xy + 5x - y + 3$

10. z = $x^2-2y^2+4xy-6x-1$

Д: x = 0, y = 0, x+y=3

11. а) Z = $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

б) U = $x^2y\,z^3$ M_0 (3,2,1)

$\bar{l}$ = (4,2,4)

Вариант 8

1. z = $\sqrt{x}$ + $\sqrt{y}$

2. z = ye^{-xy}

3. x + y + z = 1,

x = 0, y = 0, z = 0

4. $\sqrt{1{,}02^4 + 1{,}98^3}$

5. $z = x^3 + y^3 + 3xy$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$

6. $z = x^2y^3$, где x = t^3-1, y = t^4

7. $x^2 + 5y^2 + 4z^2 - y - 2xz = 0$

8. $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$; A (1,1,1)

9. z = $-x^2 - y^2 + xy - 3(x - y) + 5$

10. z = x^2 +$2xy - 4x + 8y$

Д: x = 0, y = 0, x+y=-3

11. а) Z = $\frac{2}{x^2+y^2}$

б) U = x + y^2 + z^2 M_0 (1,1, 1)

$\bar{l}$ = (2, 1, 2)

Вариант 9

1. z = $\ln(x - y^2)$

2. z = $x^4 \cos y$

3. $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{3}$= 1,

x = 0, y = 0, z = 0

4. $\sqrt{4{,}05^2 + 2{,}93^2}$

5. $z = x^4y + xy^4$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$

6. $z = arctg\frac{y}{x}$, где y = $\sqrt{1 - x}$

7. $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy - z - 9 = 0$

8. $x^2 + y^2 + x + 2y + 4z - 13$; A (2,1,2)

9. z = $x^2 - 4y^2 - 6xy - 2x + 2y + 1$

10. z = $x^2 + y^2 - xy + x + y$

Д: x = 0, y = 0, x+y=-3

11. а) Z = -$x^2 + y$

б) z = xy + yz + zk M_0 (1,2, 3)

$\bar{l}$ = (1, -2, 2)

Вариант 10

1. z = $\ln(y - x^2)$
2. z = $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$
3. x= y^2

x = 4, z = 0, z = 2

4. $1{,}94^2 * e^{0,12}$
5. $z = \sin x * \cos y$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$
6. $z = \frac{x^4}{y^2}$, где x=u-v; y=u^2+v
7. $x + y + z = e^{-xyz}$
8. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 8z - 1 = 0$, A (1,2,2)
9. z = $x^2 + y^2 + xy - 2x - y$
10. z = $xy - 2x - y$

Д: $\begin{cases} 0 \le x \le 3 \\ 0 \le y \le 4 \end{cases}$

11. а) Z = -$x^2 - y$

б) u = $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, M_0 (0,0, 1)

$\bar{l}$ = (12, -3, 4)

Вариант 11

1. z = $\ln(1 - x^2 - y^2)$
2. z = $\frac{x}{y} + \frac{y}{x}$
3. x= y^2

x = 1, z = 0, z = 1

4. $0{,}97^{2{,}02}$
5. $U = x^2y + y^2x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$
6. $z = e^{x^2 - 2y^2}$, где x = cost; y = sint
7. $x^3 + y^3 + z^3 + xyz = 3$
8. $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 12; \quad A\ (1,2,1)$
9. z = $x^2 + y^2 + xy - 3x - 6y$
10. z = $\frac{1}{2}x^2 - xy$

Д: y=$\frac{1}{3}x^2$, y=3

11. a) Z = $x^2 + y$

б) u = $xy + yz + 2x$, M_0 (1,2,3)

$\overline{e}$ = (4,-3,12)

Вариант 12

1. z = $\sqrt{y - x^2}$
2. z = $e^x \cos y$
3. y= x^2

y = 2, z = 0, z = 2

4. $\sqrt{1{,}01^3 + 1{,}98^3}$
5. $U = e^{-5t} \sin x$; $\frac{\partial u}{\partial t} = 5\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$
6. $z = x^y$, где x = sint; y = cost
7. x$\cos y + y\cos z + z\cos x = 1$
8. $x^2 + y^2 - z^2 - 2x = 0$; A (1,1,0)
9. z = $2xy - 2x - 4y + 10$
10. z = xy - 2x - y

Д: x=0, x=3, y=0, y=4

11. а) Z = $x + 3y$

б) u = $x^2 + y^2 - z^2$, M_0 (1,2,1)

$\overline{e}$ = (2,4,-4)

Вариант 13

1. z = $\sqrt{x - y^2}$

2. z = $\sqrt[3]{x^2 * y^5}$

3. y= x^2

y = 1, z = 0, z = 1

4. $1{,}04^{4{,}01}$

5. $z = e^x \operatorname{tg} y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial x} . \frac{\partial z}{\partial y} = 0$

6. Z = $x^2 \ln y + 5,$ где $x = \frac{u}{v}$, y=uv

7. $x^2 + y^2 + z^2 = 25$

8. Z = 1 + $x^2 + y^2$, A (1,2)

9. $z = 3x^2 + y^2 + 6x - 8y + 5$

10. z = $2x$ + y - xy

Д: $\begin{cases} 0 \le x \le 4 \\ 0 \le y \le 4 \end{cases}$

11. а) Z = $\frac{y}{x}$

б) u = $xy^2 + z^3 - xyz,$ M_0 (1,1,2)

$\overline{e}$ = (2,-2,1)

Вариант 14

1. z = $\sqrt{4y - x^2}$

2. z = $\frac{y-2x}{x+2y}$

3. y= x^2

y = 4, z = 0, z = 2

4. $2{,}04^2 * \ln 0{,}98$

5. $z = e^{xy}$, $x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ - $y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ = 0

6. $z = x^2 + y^2 + xy$, где x = $\sin t$, y = e^t

7. xyz = $x^2 + y^2 + z^2$

8. $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, A (1,2,2)

9. z = $3x^2 + y^2 - 6x + 8y + 1$

10. z = $x^2 + 3y^2 + x - y$

Д: $\begin{cases} y - x \le 1 \\ x \le 0, y \ge 0 \end{cases}$

11. а) Z = $\frac{x}{y}$

б) u = xy + z + xyz, M_0 (1,1, 1)

$\bar{\bar{e}}$ = (-2, 1, 2)

Вариант 15

1. z = $\sqrt{4x - y^2}$

2. z = $\cos x \sin y$

3. $x^2 + y^2 = 16$

x = 0, z = 3,

4. $1{,}03^3 * 0{,}99^2$

5. $z = \sqrt{x^2 - y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$

6. Z = $\ln(x^2 + y^2)$, где $x = u^2$v; y=u – v

7. $x^2 \sin y + y^2 \sin z + z^2 \sin x = 0$

8. $x^2 + 2y^2 - 4z^2 = 5$, A (1,2,1)

9. $z = 2x^2 + 3y^2 - x - 8y + 10$

10. z = $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 2$

Д: $\begin{cases} 1 \le x \le 4 \\ -3 \le y \le 2 \end{cases}$

11. а) Z = $\sqrt{xy}$

б) u = $xy^2 + z^2$, M_0 (1,2,1)

$\overline{e}$ = (2,1,-2)

Вариант 16

1. z = $\sqrt{x^2-9}$ + $\sqrt{16-y^2}$

2. z = $\frac{x^2-y}{x^2+y}$

3. $x^2 + y^2$ = 9

z = 0, z = 2,

4. $\sqrt{8{,}03^2+6{,}04^2}$

5. $z = e^y \operatorname{tg} x,$ $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ - $\frac{\partial z}{\partial x}$*$\frac{\partial z}{\partial y}$ = 0

6. Z = $x^3 + y^3 + 3xy$, где $x = \sin 2t,$ y = e^t

7. $xyz + \ln(x^2 + y^2 + z^2) = 1$

8. $z = x^2 - y^2$, A (1,1)

9. $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$

10. z = $x^2 + 2y^2 + 1$

Д: $\begin{cases} x + y \le 3 \\ x \ge 0, y \ge 0 \end{cases}$

11. а) Z = $\frac{2-x}{y}$

б) u = $xy - z^2$, M_0 (1,2,3)

$\overline{e}$ = (2,-2,1)

Вариант 17

1. $z = \sqrt{x^2 - 16} + \sqrt{9 - y^2}$

2. $U = \frac{x^2 + y^3}{z}$

3. $x^2 + y^2 = 4$

x = 0, z = 1,

4. $\sqrt{4{,}03^2 + 2{,}98^2}$

5. $z = e^x \cos y$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$

6. $Z = 5 + \ln(x^2 - y^2)$, где $x = uv^2$, $y = u + v$

7. $\cos(5x + 3y + 2z) = 5x + 3y + 2z$

8. $x^2 - y^2 + z^2 = 1$, A (1,1,1)

9. $z = x^2 + y^2 + 2x - 4y + 5$

10. $z = 3 - 2x^2 - xy - y^2$

Д: $\begin{cases} y \le x \\ x \le 1, y \ge 0 \end{cases}$

11. а) $Z = x^2 y$

б) $u = x^2 + y^2 + z^2$, M_0 (1,2,3)

$\overline{e} = \overline{i} - \overline{j} + \overline{k}$

Вариант 18

1. z = $\sqrt{x^2-4}$ + $\sqrt{4-y^2}$

2. z = $\frac{xy}{x+y}$

3. $x^2+\ y^2$ = 1

z = 0, z = 1,

4. $0{,}97^{3{,}01}$

5. $z = x^7 + y^7 + x^7 * y^7$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$

6. Z = $x^2y -\ y^2x,$ где $x =\ u\cos v$; y=u$\sin v$

7. $x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + xz = 0$

8. $4z = x^2 + y^2$, A ($\sqrt{3}$,1,1)

9. $z = x^2 + y^2 - 2x + 4y + 3$

10. z = $xy - 2x - y$

Д: $\begin{cases} 0\ \leq x \leq 3 \\ 0 \leq\ y \geq 3 \end{cases}$

11. а) Z = x+$y - 2$

б) u = x+$z^2 + y^2$, M_0 (2,1,1)

$\overline{e}$ = $\overline{-2i} -\ \overline{j} -\ \overline{k}$

Вариант 19

1. z = $\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{1 - y^2}$

2. z = $arctg\,\frac{x}{y}$

3. $z = \sqrt{x^2 +}\, y^2$

z = 9

4. $3{,}05e^{0{,}09}$

5. $z = \ln(x^2 + y^2)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial yz}$ =0

6. Z = $x^2 + y^2 + xy$, где $x = \sin t$, y= e^t

7. $x^2 - 2y^2 + z^2 + 4x - 5y + 3z - 8 = 0$

8. $x^2 + 2y^2 - z^2 = 5$, A (2,-1,1)

9. $z = x^2 + y^2 - 3x + 4y + 5$

10. z = $x^2 + 4xy - y^2 - 6x - 2y$

Д: 2x+3y=6, x=0, y=0

11. а) Z = $\frac{\sqrt{x}}{y}$

б) u = $x^2 y - xy + z^2$; M_0 (1,1,-2)

$\overline{e} = \overline{2j} - 2\overline{k}$

Вариант 20

1. z = $\sqrt{y-x}$ + $\sqrt{x+y}$

2. z = $\frac{x^2}{y^2}$ = 4x – 6y

3. $z = \sqrt{x^2+y^2}$

z = 4

4. $\sqrt{4{,}02^2 + 2{,}97^2}$

5. $z = \ln\frac{x}{y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$

6. Z = x^y, где $x = \cos t$, y= $\sin t$

7. $xe^y + ye^z + ze^x = 2$

8. $z = 2x^2 + 4y^2$, A (2,1)

9. $z = x^2 + y^2 + 3x - 4y + 2$

10. z = $x^2 - xy + 2y^2 + 2y + 1$

Д: x+y=-5, x=0, y=0

11. а) Z = $\sqrt{x^2+y^2}$

б) u = $y(1+x^2) - z^2$, M_0 (0,1,1)

$\bar{l}$= $2\bar{\imath} + \bar{\jmath} - 2\bar{k}$

Вариант 21

1. z = $\sqrt{x-y}$ + $\sqrt{x+y}$

2. z = $\frac{xy}{2x-3y}$

3. $z = \sqrt{x^2 +} y^2$

z = 1

4. $\frac{0{,}97^2}{\sqrt{1{,}02}}$

5. $z = e^{\frac{x}{y}}$, y $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ = $\frac{\partial z}{\partial y}$ - $\frac{\partial z}{\partial x}$

6. Z = $\frac{x^2}{y}$, где $x = \sqrt{uv}$, y = $\frac{u}{v}$

7. $x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz = 2$

8. $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21,$ A (4,1,1)

9. $z = x^2 + 2xy + 3y^2$

10. z = $x^2 + y^2 - 6x - y$

Д: $\begin{cases} 0 \le x \le 3 \\ 0 \le y \le 2 \end{cases}$

11. а) Z = xy

б) u = x(y-z); M_0 (-2,1,-1)

$\overline{e}$= $8\bar{\imath} + 4\bar{\jmath} + 8\bar{k}$

Вариант 22

1. z = $\sqrt{1-x^2-y^2}$

2. z = $\ln(x+y)+x^3+y^2$

3. $z = 1-x^2-y^2$

z = 0

4. $\sqrt{0{,}99^3+2{,}02^3}$

5. $z = x^3+3x^2y-2y^3$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$

6. Z = $\frac{y}{\sqrt{x}}$, где $x = 3u - v$, y = u^2+v

7. $x\sqrt{y}+yz+z\sqrt{x} = 9$

8. $z^2 = x^2+y^2$, A (3,4,5)

9. $z = x^2 - y^2+6x+3y$

10. z = x^2+xy

Д: $\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 3 \end{cases}$

11. а) Z = y – 2x

б) u = xy^2z , M_0 (1,3,2)

$\overline{e} = -\overline{\imath} + 2\overline{\jmath} - 2\overline{k}$

Вариант 23

1. z = $\sqrt{1-\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}}$

2. z = $\sqrt{1-x^2-y^2}$

3. $z = 4-x^2-y^2$

z = 0

4. $0{,}99^{3{,}04}$

5. $z = ln(x^2+y^2)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$

6. Z = $\frac{x}{\sqrt{y}}$, где $x = 4u+v$; y = $u+v^2$

7. $x^2y+y^2z+z^2x = 6$

8. $3z = xy$, A (3,3,3)

9. $z = x^2+3xy-6y$

10. z = $x^2+2xy+2y^2$

Д: $\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 2 \end{cases}$

11. а) Z = $\frac{y}{x^2}$

б) u = x^2y^2z; M_0 (1,1,2)

$\overline{e} = \overline{\imath}+2\overline{\jmath}-2\overline{k}$

Вариант 24

1. z = $\sqrt{1-\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}}$

2. z = yln(x^2-y^2)

3. $z = x^2+y^2$

z = 4

4. $(0{,}99)^2(2{,}02)^3$

5. $z = e^{\frac{x}{y}}$, $\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}$ + y $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ = 0

6. Z = $y^3\ln x$, где $x = \frac{u}{v}$, y = u+v

7. $x\cos y + y\sin z$ + zcos $x = 1$

8. $z = x^2-y^2$, A (2,1)

9. $z = 3x^2-xy+x+y$

10. z = $x^2+2xy-y^2+4x$

Д: $\begin{cases} x+y+2 \geq 0 \\ x \leq 0, y \leq 0 \end{cases}$

11. а) Z = $\frac{y}{\sqrt{x}}$

б) u = x^2+y^2+yz, M_0 (1,-1,2)

$\bar{e}$ =4$\bar{\imath}+4\bar{\jmath}+2\bar{k}$

Вариант 25

1. z = $\sqrt{1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{25}}$
2. z = $x\ln(x^2+y^2)$
3. $z = x^2+y^2$

z = 1

4. $1{,}02 * 2{,}03^2$
5. $u = e^{-2t}\sin x,\quad \frac{\partial u}{\partial t} = 2\,\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$
6. Z = $x^2\ln y$, где $x = uv$, y = u + v
7. $x^3+y^3+z^3+6xyz=0$
8. $4x^2-y^2+8z^2=16$, A $(2,4,\sqrt{2})$
9. $z = x^2+xy+y^2$
10. z = $6x^2-3xy+y^2+4$

Д: $\begin{cases} x+y \le 1 \\ x \ge 0, y \ge 0 \end{cases}$

11. а) Z = x^2+y^2

б) u = $x+\sqrt{y^2+z^2}$; M_0 (1,-3,4)

$\overline{e} = -2\overline{\imath}+\overline{\jmath}+2\overline{k}$

Учебное текстовое электронное издание

Коротецкая Валентина Александровна
Извеков Юрий Анатольевич

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Учебное пособие

1,0 Мб
1 электрон. опт. диск

г. Магнитогорск, 2015 год
ФГБОУ ВПО «МГТУ»
Адрес: 455000, Россия, Челябинская область, г. Магнитогорск,
пр. Ленина 38

ФГБОУ ВПО «Магнитогорский государственный
технический университет им. Г.И. Носова»
Кафедра высшей математики № 2
Центр электронных образовательных ресурсов и
дистанционных образовательных технологий
e-mail: ceor_dot@mail.ru