Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова»

Л.А. Грачева
Е.М. Гугина

РЯДЫ: КУРС ЛЕКЦИЙ И ПРАКТИКУМ

*Утверждено Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия*

Магнитогорск
2015

УДК 517

Рецензенты:

Доцент кафедры естественнонаучных и социально-гуманитарных дисциплин,
Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ
Н.А.Квасова

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики №1,
ФГБОУ ВПО «Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова»
В.В. Шеметова

Грачева Л.А., Гугина Е.М.
Ряды: курс лекций и практикум [Электронный ресурс] : учебное пособие / Лилия Александровна Грачева, Екатерина Михайловна Гугина ; ФГБОУ ВПО «Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова». – Электрон. текстовые дан. (1,2 Мб). – Магнитогорск : ФГБОУ ВПО «МГТУ», 2015. – 1 электрон. опт. диск (CD-R). – Систем. требования : IBM PC, любой, более l GHz ; 512 Мб RAM ; 10 Мб HDD ; MS Windows XP и выше ; Adobe Reader 8.0 и выше ; CD/DVD-ROM дисковод ; мышь. – Загл. с титул. экрана.

Предлагаемое учебное пособие является конспектом лекций и практических занятий, сборником задач для самостоятельной работы студентов к учебному модулю «Ряды», входящему в основную образовательную программу всех направлений технического университета.

В него вошли разработки 6 лекций и 4 практических занятий, с подробным решением типовых примеров и заданиями для самостоятельной работы студентов (промежуточными домашними заданиями - с ответами и итоговым индивидуальным заданием) по темам «Числовые ряды» и «Функциональные ряды», в том числе, «Ряды Фурье».

Учебное пособие предназначено для студентов, изучающих высшую математику, и может быть использовано как при очной, так и заочной (дистанционной) форме обучения.

УДК 517

Содержание

Курс лекций

Лекция 1

§1 ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

1.1. Основные понятия

Пусть дана бесконечная числовая последовательность

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots, \qquad (1)$$

где n – натуральное ($n \in N$).

Определение 1. *Числовым рядом* называется сумма бесконечного (счетного) числа слагаемых, являющихся числами:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n . \qquad (2)$$

Числа $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ - члены ряда, а число a_n - общий (n –ый) член ряда.

Если все члены ряда являются положительными числами ($a_n > 0$ для всех $n \in N$), то ряд называется *знакоположительным.* Если каждый следующий член знакопеременного числового ряда имеет знак, противоположный знаку предыдущего члена, то ряд называется *знакочередующимся* (т.е. знакочередующийся ряд имеет вид $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$, где $a_n > 0$ для всех $n \in N$).

Пример 1.

$1 + 2 + 3 + \dots + n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} n$ - знакоположительный числовой ряд;

$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ -знакочередующийся числовой ряд;

$cos\frac{\pi}{4} + cos\frac{\pi}{4^2} + cos\frac{\pi}{4^3} + cos\frac{\pi}{4^4} + \dots + cos\frac{\pi}{4^n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \cos\frac{\pi}{4^n}$ - знакопеременный числовой ряд, так как каждый член ряда является одним из значений функции $y = \cos x$, которые могут быть как положительными, так и отрицательными.

Ряд может быть задан как в развернутом, так и в свернутом виде. Ряды в примерах, рассмотренных выше, записаны сначала в развернутом виде, а затем в свернутом виде.

Для того, чтобы записать ряд в свернутом виде надо постараться найти закон, которому подчиняются все члены ряда:

- иногда это n-ая степень одного и того же числа или одна и та же степень некоторого выражения или последовательности чисел,

- иногда – функция факториал $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$, причем $(n+1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \cdot (n+1) = n! \cdot (n+1)$

- и, наконец, не забывайте о возможности использования арифметической или геометрической прогрессий, которые «легко разглядеть», если помнить их определения: если члены последовательности отличаются друг от друга на одно и то же число (d- разность прогрессии), то перед вами - арифметическая прогрессия с общим членом $a_n = a_1 + d(n-1)$; если же каждое следующее слагаемое отличается от предыдущего в одно и то же число раз (q – знаменатель прогрессии), то перед вами – геометрическая прогрессия с общим членом $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$.

Пример 2. Найти формулу u_n общего члена ряда

$$\frac{5}{(\ln 2+2)^2\cdot 3}+\frac{9}{(\ln 2+3)^2\cdot 9}+\frac{13}{(\ln 2+4)^2\cdot 27}+\frac{17}{(\ln 2+5)^2\cdot 81}+\cdots$$

□ Числители членов данного ряда отличаются друг от друга на одно и то же число d = 9-5 = 13-9 = 17-13 = 4, значит 5, 9, 13, 17,…– арифметическая прогрессия, где первый член a_1 =5, формула общего члена которой $a_n = a_1 + d(n-1) = = 5+4(n-1) = 5+4n-4 = 1+4n$. В знаменателе - выражение в скобках – всегда во второй степени, причем одно из них – ln2, - не меняется, а второе слагаемое в скобках: 2, 3, 4, 5, …- представляет ряд из натуральных чисел, начинающийся со второго. Поэтому формула для выражения в скобках $(\ln 2+n+1)^2$.

Второй множитель в знаменателе 3, 9, 27, 81,… - отличаются друг от друга в одно и то же число раз q=3, то есть это члены геометрической прогрессии с первым членом b_1=3, формула которой $b_n = b_1\cdot q^{n-1} = 3\cdot 3^{n-1} = 3^n$. Следовательно, общий член ряда

$$u_n = \frac{1+4n}{(\ln 2+n+1)^2\cdot 3^n}.$$

■

Иногда нужно, наоборот, по формуле общего члена ряда записать ряд в развернутом виде. Следующий пример показывает образец решения таких задач.

Пример 3. Написать ряд в развернутом виде по формуле общего члена

$$a_n = \frac{2^n\cdot(n+1)}{n!}.$$

□ Пользуясь формулой общего члена ряда, можно написать любой член ряда. Чтобы получить k-ый член ряда, достаточно в формуле общего члена $a_n = \frac{2^n\cdot(n+1)}{n!}$ вместо n подставить число k, т.е. если $n=1$, то $a_1 = \frac{2^1\cdot(1+1)}{1!} = 4$,

если $n=2$, то $a_2 = \frac{2^2\cdot(2+1)}{2!} = \frac{4\cdot 3}{1\cdot 2} = 6$,

если $n=3$, то $a_3 = \frac{2^3\cdot(3+1)}{3!} = \frac{8\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3} = \frac{16}{3}$, ….

Складывая члены этой бесконечной последовательности, получим ряд:

$$\frac{4}{1}+\frac{12}{1\cdot 2}+\frac{32}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{80}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\frac{192}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\ldots+\frac{2^n\cdot(n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-1)\cdot n}+\ldots \text{ или}$$

$$\frac{4}{1!}+\frac{12}{2!}+\frac{32}{3!}+\frac{80}{4!}+\frac{192}{5!}+\ldots+\frac{2^n\cdot(n+1)}{n!}+\ldots$$

■

Определение 2. Пусть задана последовательность чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, $n\in N$. Составим новую последовательность чисел S_n, $n\in N$, следующим образом:

$$S_1 = a_1,$$

$$S_2 = a_1 + a_2,$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \qquad (3)$$

………………..

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \ \ldots$$

Элементы последовательности $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ называются *частичными суммами* ряда (2), при этом сумма n первых слагаемых - S_n называется n*-ой частичной суммой* этого ряда.

Для каждой последовательности (3) всегда можно найти такой ряд, что она будет последовательностью его частичных сумм (его члены определяются по формулам $a_1 = S_1$, $a_n = S_n - S_{n-1}$, $n \in N$).

Если последовательность частичных сумм ряда (2) сходится, то он называется *сходящимся* рядом, а если расходится, то *расходящимся*, то есть задача изучения сходимости рядов равносильна задаче изучения сходимости последовательностей.

Определение 3. Если последовательность $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ имеет конечный предел $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$, то этот предел называют *суммой* ряда (2) и говорят, что ряд *сходится* и пишут

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ .$$

Если же предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует, то есть последовательность (3) расходится, то говорят, что ряд (2) *расходится* (и суммы не имеет).

Определение 4. Ряд, членами которого являются члены ряда (2), начиная с $(n+1)$-го и далее по порядку, называется *n-ым остатком* ряда (2) и обозначается:

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \quad \text{или} \quad a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \ldots \qquad (4)$$

и если *n*-ый остаток (4) сходится, то его сумму будем обозначать через R_n:

$$\boldsymbol{R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k} \qquad (5)$$

и называть остатком ряда.

Примечание 1. Свойства сходящихся числовых рядов вы найдете в Приложении 1 (см. Свойства сходящихся числовых рядов) или в таблице 1 (см. Таблица 1).

1.2. Необходимый признак сходимости ряда

Теорема 1 (необходимое условие сходимости ряда). Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Обратите особое внимание: условие $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ является необходимым, но не достаточным для сходимости ряда, то есть, если о сходимости ряда ничего не известно, а $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то это означает, что ряд **может сходиться, а может – расходиться**. Но если это условие не выполнено, то ряд расходится.

Следствие (достаточное условие расходимости ряда). Условие $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ является *достаточным* для расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Пример 4. Доказать расходимость ряда $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3n^5}{\sqrt{n-1}}$, пользуясь необходимым признаком сходимости.

□ Найдём $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{3n^5}{\sqrt{n^{10}-1}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3n^5}{n^5}}{\sqrt{\frac{n^{10}}{n^{10}}-\frac{1}{n^{10}}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt{1-\frac{1}{n^{10}}}} = 3 \neq 0$,

Следовательно, данный ряд расходится.

■

Сведем полученные знания в Приложение 2 (см. Таблица 1).

С помощью необходимого признака, мы можем исследовать ряд только на расходимость, поэтому нам потребуются другие, достаточные признаки сходимости числовых рядов.

1.3. Достаточные признаки сходимости числовых рядов с положительными членами

Признак Даламбера

Пусть для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (a_n>0) существует предел $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = k$.

Тогда: а) если $k < 1$, то ряд сходится;

б) если $k > 1$, то ряд расходится.

При $k = 1$ вопрос о сходимости ряда остаётся открытым, необходимо применить другой достаточный признак.

Примечание 2. Признак Даламбера <u>удобно применять</u> в том случае, когда общий член a_n ряда содержит факториалы чисел и показательные функции, или то и другое вместе, а также произведение чисел.

Радикальный признак Коши

Пусть для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (a_n>0) существует $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = d$.

Тогда: а) если $d < 1$, то ряд сходится;

б) если $d > 1$, то ряд расходится.

При $l = 1$ вопрос о сходимости ряда остаётся открытым, в нужно применить другой достаточный признак.

Примечание 3. Признак Коши <u>удобно применять</u> в тех случаях, когда выражение, задающее общий член ряда – находится в n-ой, kn-ой или n^2 -ой степени. Однако, если всё выражение, задающее общий член ряда – находится в такой степени, а предел этого выражения дает неопределенность $[1^{\infty}]$, то проверьте сначала выполнение необходимого признака сходимости.

Интегральный признак Коши

Если функция *f(x)* при $x \geq b$ непрерывная, положительная и монотонно убывающая, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$, где $a_n = f(n)$, сходится или расходится одновременно с несобственным интегралом $\int_b^{\infty} f(x)dx$.

Примечание 4. Интегральный признак Коши позволяет сделать заключение о сходимости и расходимости ряда, например, в тех случаях, когда по признаку Даламбера имеем $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{U_{n+1}}{U_n}=1$ или по радикальному признаку Коши имеем $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{U_n}=1$. Применяйте его, если в формуле общего члена ряда «увидели» функцию, от которой «удобно» берется интеграл (по таблице, заменой и проч.).

Признаки сравнения

Пусть даны два ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$,

о сходимости одного из них известно:
ряды, о сходимости которых известно

1. Гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+...+\dfrac{1}{n}+...$ - расходится

2. Обобщенный гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$, при $\begin{cases} p>1-\text{сходится} \\ p\le 1-\text{расходится}\end{cases}$ $(p>0)$

3. Геометрический ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a\cdot q^n$ при $\begin{cases} |q|<1-\text{сходится} \quad S=\dfrac{a}{1-q}(a\ne 0) \\ |q|\ge 1-\text{расходится}\end{cases}$

Признак сравнения №1

Если $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\kappa,\ 0<\kappa<\infty$, тогда ряды сходятся или расходятся одновременно.

Признак сравнения №2

а) Если члены данных рядов связаны неравенством $a_n\le b_n$, при любом $n\in N$ и известно, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ - сходится, тогда сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$;

б) Если члены данных рядов связаны неравенством $a_n\le b_n$, при любом $n\in N$ и известно, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ - расходится, то расходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$.

Поместим сведения о достаточных признаках в таблицу 2 (см. Приложение 3).
Рассмотрим решение типовых примеров.

Пример 5. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n+1)^2}{3^n\cdot n!}$ на сходимость с помощью какого-либо достаточного признака.

□ Общий член ряда содержит показательные функции и факториал, поэтому исследуем на сходимость данный ряд по признаку Даламбера.

Запишем формулу $(n+1)$-го члена ряда, заменяя в формуле общего члена ряда n на $n+1$:

$$a_{n+1} = \frac{((n+1)+1)^2}{3^{n+1}\cdot(n+1)!} = \frac{(n+2)^2}{3^n \cdot 3\cdot n!\cdot(n+1)}.$$

Найдем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)^2\cdot 3^n\cdot n!}{3^{n+1}(n+1)!\cdot(n+1)^2} = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)^2}{(n+1)^3} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(1+\frac{2}{n}\right)}{n^3\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = \left[\tfrac{1}{\infty}\right] = 0 < 1,$$

следовательно, данный ряд сходится.

■

Пример 6. Исследовать ряд на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty}\ln^n(n+1)$.

□ Общий член ряда содержит функцию логарифм в *n*-ой степени, поэтому применим радикальный признак Коши.

Найдем $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\ln^n(n+1)} = \lim_{n\to\infty}\ln(n+1) = \infty > 1$,

следовательно, данный ряд расходится.

■

Пример 7. Исследовать ряд на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^3}\cdot n^2$.

□ Общий член ряда $a_n = e^{-n^3}\cdot n^2$ не содержит факториалов и выражение не находится в *n*-й степени, поэтому попробуем применить интегральный признак Коши, поэтому рассмотрим функцию $f(x) = e^{-x^3}\cdot x^2$.

Проверим условия интегрального признака:

$f(x) > 0$, $\forall x \ge 1$, $f(x)$ - непрерывна для $\forall x \ge 1$.

$f(x)$ - монотонно убывает с возрастанием *x*, т.к. её первая производная $f'(x) = xe^{-x^3}\left(2-3x^2\right) < 0,\ \forall x \ge 1$.

$$\int_1^{\infty} e^{-x^3}x^2\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b e^{-x^3}x^2\,dx = -\frac{1}{3}\lim_{b\to\infty} e^{-x^3}\Big|_1^b = -\frac{1}{3}\lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{e^{b^3}} - \frac{1}{e}\right] = \frac{1}{3e} \ne \infty$$

Результат - конечный, то есть несобственный интеграл, а следовательно, и исходный ряд сходится.

■

Пример 8. Исследовать ряд на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n}}{\ln n}$.

□ Общий член ряда $a_n = \frac{\sqrt[3]{n}}{\ln n}$ не содержит факториалов или показательной функции, то есть не будем применять признак Даламбера; выражение не находится в *n*-й степени, значит не будем применять радикальный признак Коши; функции, от которой виделся бы элементарно берущегося интеграл тоже нет. Попробуем применить признак сравнения, учитывая известное неравенство (при $n \in N$): $\ln n < n$ или $\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$ для обратных величин. Сравним данный ряд с расходящимся обобщенно-гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2/3}}$ с показателем $p = 2/3 < 1$. Итак, так как для любого $n \in N$ справедливо неравенство $\frac{\sqrt[3]{n}}{\ln n} > \frac{\sqrt[3]{n}}{n}$ и ряд с большими членами $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2/3}}$ - расходящийся, то исходный ряд (с меньшими членами) расходится по признаку сравнения 2а).

■

§1 ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

1.4. Знакопеременные числовые ряды

Определение 5. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$ (6)

где числа $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ могут быть как положительными, так и отрицательными, называется *знакопеременным*.

Числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - \ldots + (-1)^{n+1}a_n + \ldots, \quad (7)$$

где $a_n > 0$ для всех $n \in N$, называется *знакочередующимся.*

Пример 9. Ряд $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots$- знакопеременный, а ряд $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \ldots$- знакочередующийся.

Достаточный признак сходимости знакопеременного ряда

Если ряд, составленный из абсолютных величин исходного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (т.е. промодулированный ряд):

$$|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + \ldots, \quad (8)$$

сходится, то сходится и исходный знакопеременный ряд (6).

Достаточный признак сходимости знакочередующегося ряда (Признак Лейбница)

Пусть $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - \ldots$ знакочередующийся числовой ряд, числовая последовательность $\{a_n\}$ убывает, т.е.

1) $a_1 > a_2 > a_3 > \ldots > a_n > \ldots$ (по условию, все a_n>0 (смотри определение 1.5.) для знакочередующихся рядов, но часто это условие пишут как $|a_1| > |a_2| > |a_3| > \ldots$) и

2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Тогда этот ряд сходится, причем его сумма S не превосходит первого члена: $0 < S \le a_1$, а n-ый остаток суммы ряда $|R_n| \le a_{n+1}$ по модулю будет не больше модуля первого своего члена.

Определение 6. Знакопеременный числовой ряд (6) называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$, составленный из абсолютных величин его членов.

Определение 7. Знакопеременный числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *условно сходящимся*, если он сходится, а ряд (8), составленный из абсолютных величин его членов - расходится.

Примечание 5. Для исследования на абсолютную сходимость ряда (6) нужно использовать для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ достаточные признаки сходимости числовых рядов с положительными членами (см. 1.3. Достаточные признаки сходимости числовых рядов с положительными членами.).

Примечание 6. В общем случае из расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ не следует расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\grave{a}_n$. Но если при исследовании ряда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ по признакам Даламбера или Коши, получим $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|>1$ или $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}>1$, то расходится не только $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$, но и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, так как $\lim_{n\to\infty}a_n\neq 0$.

Алгоритм исследования на абсолютную и условную сходимость знакопеременного ряда

1. Составь ряд из абсолютных величин членов данного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ и исследуй его сходимость (примени достаточные признаки сходимости знакоположительных рядов (см. Приложение 3, таблица 2)).

2. а) Если ряд из модулей $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ сходится, то исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ - абсолютно сходится и записываем ответ: «Исходный ряд сходится абсолютно», больше исследовать не надо.

б) Если ряд из модулей $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ расходится, то абсолютной сходимости нет, но может быть условная сходимость, - выполни пункт 3 этого алгоритма.

3. Проверь условия признака Лейбница. Если выполнено:

а) члены чередуются по знаку;

б) $|a_1|>|a_2|>|a_3|>\ldots$;

в) $\lim_{n\to\infty}|a_n|=0$ то $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится, причем условно. Пишем «Ответ: ряд сходится условно».

4. Если же хотя бы одно из условий пункта 3 не выполнено, то исходный ряд – расходится.

Пример 9. Исследовать на сходимость знакопеременные ряды:

а) $\frac{\sin 1}{7}+\frac{\sin 2}{7^2}+\frac{\sin 3}{7^3}+\ldots+\frac{\sin n}{7^n}+\ldots$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty}arctg^n\,\frac{(-1)^n(n^3+4n)}{2n-1}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

□ **а)** Данный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{7^n}$ – знакопеременный, так как $\sin 1>0$, $\sin 2>0$, $\sin 3>0$ (т.к.1,2,3 – углы, записанные в радианной мере, находящиеся в 1 и 2 – ой координатных четвертях $(\pi\approx 3{,}14)$), $\sin 4<0$, $\sin 5<0$, $\sin 6<0$ (т.к.4,5,6 – углы, записанные в радианной мере, находящиеся в 3 и 4 – ой координатных четвертях $(2\pi\approx 6{,}28)$), $\sin 7>0$, … .

Составим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin n}{7^n}\right|$ из абсолютных величин членов данного ряда. Так как $|\sin n| \le 1$, для любого n имеем верное неравенство: $\left|\frac{\sin n}{7^n}\right| \le \frac{1}{7^n}$.

Сравним теперь промодулированный ряд со сходящимся рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{7^n}$ (геометрическая прогрессия со знаменателем $q = \frac{1}{7} < 1$).

Согласно первому признаку сравнения, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin n}{7^n}\right|$ сходится, тогда данный знакопеременный ряд сходится абсолютно.

б) Составим ряд из абсолютных величин членов данного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} arctg^n \frac{n^3+4n}{2n-1}$ и, поскольку выражение общего члена ряда находится в n-ой степени, применим радикальный признак Коши для данного знакоположительного ряда:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{arctg^n\left(\frac{n^3+4n}{2n-1}\right)} = \lim_{n\to\infty} arctg\left(\frac{n^3+4n}{2n-1}\right) = [\tfrac{\infty}{\infty}] =$$

$= arctg\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+4n}{2n-1}\right) = [arctg(+\infty)] = \frac{\pi}{2} \approx 1{,}57 > 1$, то есть ряд из модулей – расходится (абсолютной сходимости нет).

Данный ряд знакочередующийся [функция $y = arctg(x)$ на промежутке [1; ∞] монотонно возрастающая и положительная, а так как она – нечетная, то меняет знак при смене знака аргумента], поэтому применим признак Лейбница. Проверим его условия.

1) $arctg5 < arctg^2\frac{16}{3} < arctg^3\frac{39}{5} < \ldots$, так как $arctg5 \approx 1{,}37$; $arctg^2\frac{16}{3} \approx 1{,}9$; $arctg^3\frac{39}{5} \approx 2{,}99$, … - т.е. не выполнено условие $|a_1| > |a_2| > |a_3| > \ldots$;

Следовательно, признак Лейбница не выполнен и условной сходимости тоже нет, исходный ряд расходится.

Согласно примечанию 6, этот вывод можно было получить, не прибегая к признаку Лейбница.

в) Ряд из абсолютных величин имеет вид: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ - это известный гармонический, расходящийся ряд. Проверим условия признака Лейбница:

$$1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \ldots > \frac{1}{n} > \ldots,$$

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$, следовательно, исходный ряд сходится условно.

■

Лекция 3

§2 ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

2.1. Основные понятия

Пусть дан *функциональный ряд,* то есть ряд, членами которого являются функции $U_n(x)$, $n \in N$

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x) = U_1(x) + U_2(x) + \ldots + U_n(x) + \ldots \ . \tag{9}$$

Зафиксируем $x = x_0$, получим числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x_0) = U_1(x_0) + U_2(x_0) + \ldots + U_n(x_0) + \ldots . \tag{10}$$

Если числовой ряд (10) сходится, то значение x_0 называется *точкой сходимости* функционального ряда (9).

Множество всех точек сходимости функционального ряда называется *областью его сходимости*.

Если числовой ряд (10) расходится, то x_0 называется *точкой расходимости* функционального ряда (9).

Функциональный ряд называется *сходящимся на некотором множестве*, если он сходится в любой точке этого множества.

Функциональный ряд называется *абсолютно сходящимся* на множестве *D*, если на нём сходится ряд из модулей его членов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |U_n(x)| = |U_1(x)| + |U_2(x)| + \ldots + |U_n(x)| + \ldots \tag{11}$$

Каждой точке x_0 сходимости ряда (9) ставится в соответствии определённое число - значение суммы ряда (10), тогда сумма сходящегося на множестве *D* функционального ряда (9) является функцией переменной x. Обозначим эту функцию через $S(x)$, тогда

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) \tag{12}$$

где $S_n(x)$ - n*-я частичная сумма* ряда (9), т.е. $S_n(x) = U_1(x) + U_2(x) + \ldots + U_n(x)$, $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$.

Остатком функционального ряда (9) (или n-ым остатком) называется ряд, полученный из данного отбрасыванием n его первых членов.

Сумму остатка обозначим через $r_n(x)$:

$$r_n(x) = U_{n+1}(x) + U_{n+2}(x) + \ldots . \tag{13}$$

Очевидно, что для всех $x \in X$: $\quad S(x) = S_n(x) + r_n(x) \qquad (14)$

Отсюда следует, что для всех $x \in X$: $\quad \lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0 \qquad (15)$

2.2. Степенные ряды. Теорема Абеля

Определение 1. *Степенным рядом* называется функциональный ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots, \qquad (16)$$

где a_n - вещественные числа, называемые коэффициентами ряда.

Степенным рядом называется также ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots \qquad (17)$$

Теорема (Абеля) Если степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится при некотором значении $x_0 \neq 0$, то он абсолютно сходится при любом x, для которого $|x| < |x_0|$, а если ряд расходится при некотором x_1, то расходится и при любом x, для которого $|x| > |x_1|$.

Определение 2. *Радиусом сходимости* степенного ряда (16) называется число R такое, что при $|x| < R$ ряд сходится, а при $|x| > R$ расходится.

Интервалом сходимости ряда (16) называется интервал $(-R; R)$, где R - радиус сходимости.

Примечание 7. *Радиусом сходимости* степенного ряда (17) называется число R такое, что при $|x - x_0| < R$ ряд сходится, а при $|x - x_0| > R$ расходится. *Интервалом сходимости* ряда (17) называется интервал $(x_0 - R; \, x_0 + R)$, где R - радиус сходимости.

Примечание 8. Если ряд (16) или (17) сходится в единственной точке, то считают $R = 0$; если ряд сходится при любом x, то полагают $R = \infty$.

<u>Найдем радиус сходимости степенного ряда,</u> (16) применяя признак Даламбера (или радикальный признак Коши).

Пусть существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \dfrac{1}{R}$ $(a_n \neq 0)$ (или $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \dfrac{1}{R}$), тогда

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \cdot |x| = \dfrac{|x|}{R}$ (или $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n| \cdot |x|^n} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} \cdot |x| = \dfrac{|x|}{R}$).

Следовательно, ряд сходится при всех x для которых $\dfrac{|x|}{R} < 1$ или $|x| < R$ и расходится при $|x| > R$, то есть R - радиус сходимости данного ряда.

Примечание 9. Итак, радиус сходимости степенного ряда (16) определяется формулой $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$, если этот предел существует.

Пример 1. Найти интервал сходимости ряда и исследовать сходимость на концах:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x-4)^n}{5n+2}.$$

□ Найдем интервал сходимости данного степенного ряда, используя признак Даламбера:

Запишем $(n+1)$-й член ряда: $\mathrm{U}_{n+1}=\dfrac{(n+1)(x-4)^{n+1}}{5\cdot(n+1)+2}=\dfrac{(n+1)(x-4)^n(x-4)}{5n+7}$,

а теперь найдем

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)(x-4)^n\cdot(x-4)\cdot(5n+2)}{(5n+7)\cdot n\cdot(x-4)^n}\right|=|x-4|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(5n+2)}{(5n+7)\cdot n}=$$

$$=|x-4|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2+7n+2}{5n^2+7n}=[\tfrac{\infty}{\infty}]=|x-4|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{5+\frac{7}{n}+\frac{2}{n^2}}{5+\frac{7}{n}}=|x-4|.$$

При $|x-4|<1$ ряд сходится по признаку Даламбера. Запишем это неравенство в виде интервала $-1<x-4<1$ или $3<x<5$.

Так как признак Даламбера не дает ответа на вопрос о сходимости ряда при $|x-4|=1$, т.е. при $x_1=3$ и $x_2=5$ (концы интервала сходимости), то для этих значений составим числовые ряды и исследуем на сходимость.

а) $x_1=3$ подставим это значение вместо x в исходный степенной ряд, получим: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n(3-4)^n}{5n+2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\cdot n}{5n+2}$ - знакочередующийся ряд, предел абсолютной величины общего члена которого $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{5n+2}=\dfrac{1}{5}\neq 0$, т.е. не выполняется необходимый признак сходимости ряда, составленного из абсолютных величин, следовательно, ряд расходится, а это значит, что значение $x_1=3$ не входит в область сходимости ряда.

б) Исследуем сходимость ряда при $x_2=5$. После подстановки этого значения в исходный ряд, получаем знакоположительный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n(5-4)^n}{5n+2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{5n+2}$, для которого предел общего члена $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{5n+2}=\dfrac{1}{5}\neq 0$, то есть опять не выполнен необходимый признак сходимости ряда, поэтому ряд расходится. Значит, и $x_2=6$ не входит в область сходимости ряда.

Значит, (3; 5) – интервал сходимости ряда.

(Центром интервала сходимости является точка $x_0=4$, радиус сходимости R = 1).

■

Пример 2. Найти интервал сходимости ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+1)^n}{n!}$.

□ Найдем интервал сходимости данного степенного ряда, пользуясь признаком Даламбера:

Запишем $(n+1)$-й член ряда: $\mathrm{U}_{n+1}(\tilde{o})=\dfrac{(x+1)^{n+1}}{(n+1)!}=\dfrac{(\tilde{o}+1)(x+1)^n}{n!\cdot(n+1)}$,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x+1)^n\cdot(x+1)\cdot n!}{n!\cdot(n+1)\cdot(x+1)^n}\right|=|x+1|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0<1 \text{ для любого } x,$$

значит для любого x ряд сходится. Область сходимости $(-\infty,\infty)$, радиус сходимости $R=\infty$.

■

Пример 3. Найти интервал сходимости ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \cdot tg^n(n+1)$.

□ Найдем интервал сходимости данного ряда, используя радикальный признак Коши (так как выражение общего члена ряда в n – ой степени):

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n| \cdot |x|^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|tg^n(n+1)|} \cdot |x| = |x| \cdot \lim\limits_{n\to\infty} |tg(n+1)|$, последний предел не существует, значит область сходимости – это одна точка $x_0 = 0$, радиус сходимости R =0.

■

2.3. Разложение функций в степенные ряды

Ряд Тейлора

Определение 3. Будем говорить, что функция $f(x)$ *разлагается в степенной ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$$

на интервале $(x_0 - R;\, x_0 + R)$, если указанный ряд сходится и его сумма равна $f(x)$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n .$$

(Это выполняется, например, если остаточный член формально построенного ряда Тейлора данной функции стремится к нулю: $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!} \cdot (x-x_0)^{n+1} = 0$, где $R_n(x)$ - остаточный член формулы Тейлора, а $c = x_0 + \theta(x-x_0)$, $0 < \theta < 1$).

Определение 4. Пусть функция $f(x)$ при $x = x_0$ имеет производные всех порядков (т.е. является бесконечно дифференцируемой в точке x_0). *Рядом Тейлора* функции $f(x)$ относительно точки x_0 называется сходящийся к ней на интервале $(x_0 - R;\, x_0 + R)$ степенной ряд вида

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \ldots \qquad (18)$$

При $x_0 = 0$:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \ldots \qquad (19)$$

получаем ряд, который называется *рядом Маклорена*.

Приведём разложения в ряды следующих элементарных функций:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots;\ x \in (-\infty; +\infty) \qquad (20)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots;\ x \in (-\infty; +\infty) \qquad (21)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots;\ x \in (-\infty; +\infty) \qquad (22)$$

$$\arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \ |x| < 1; \qquad (23)$$

$$arctg\ x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, |x| < 1; \qquad (24)$$

$$\cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \ldots, \ |x| < 1. \qquad (25)$$

Замечание. С помощью последней формулы можно получить разложение, например, следующих функций:

$$f_1(x) = (1+x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1+x};$$

$$f_2(x) = (1+x)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x}};$$

заменив x на x^2, то и разложение в ряды следующих функций:

$\varphi_1(x) = \sqrt{1+x^2}$; $\qquad \varphi_2(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ и многих других.

Пример 4. Разложить в ряд по степеням $(x+1)$ функцию $y = \dfrac{1}{5x+3}$. Определить область сходимости полученного ряда.

□ Первый способ решения такого рода примеров: найти несколько первых производных, вывести формулу n-ой производной («уловив» закономерность) и, наконец, найти область сходимости (см. Разложение функции в степенной ряд).

Итак, $(x - x_0) = (x+1) = (x - (-1))$, значит, $x_0 = -1$, $y(-1) = -\dfrac{1}{2}$. Найдем производные в этой точке (чтобы составить коэффициенты ряда Тейлора).

$$y' = -\frac{5}{(5x+3)^2}; \ y'(-1) = -\frac{5}{2^2};$$

$$y'' = -5\left((5x+3)^{-2}\right)' = 1 \cdot 2 \cdot 5^2 \cdot (5x+3)^{-3}; \ y''(-1) = -\frac{2! \cdot 5^2}{2^3};$$

$$y''' = -1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot (5x+3)^{-4}; \ y'''(-1) = -\frac{3! \cdot 5^3}{2^4}.$$

. . . .

$$y^{(n)} = (-1)^n \cdot n! \cdot 5^n \cdot (5x+3)^{-(n+1)}; \quad y^{(n)}(-1) = -\frac{n! \cdot 5^n}{2^{n+1}};$$

Составим формальный ряд Тейлора для данной функции (формальный, т.к. не доказана ещё его сходимость, поэтому пока не ставим и знак равенства)

$$\frac{1}{5x+3} \sim -\frac{1}{2} - \frac{5}{2^2}(x+1) - \frac{5^2}{2^3}(x+1)^2 - \frac{5^3}{2^4}(x+1)^2 - \cdots = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{2^{n+1}}(x+1)^n$$

Найдем область сходимости ряда по признаку Даламбера:

$U_n = -\frac{5^n}{2^{n+1}}(x+1)^n$; $U_{n+1} = -\frac{5^{n+1}}{2^{(n+1)+1}}(x+1)^{n+1}$, вычисляем предел

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{5^{n+1}(x+1)^{n+1}\cdot 2^{n+1}}{2^{n+2}\cdot 5^n(x+1)}\right| = \frac{5}{2}|x+1| < 1,$$

решаем неравенство $|x+1| < \frac{2}{5}$, или $-\frac{2}{5} < x+1 < \frac{2}{5}$, получаем, окончательно, область сходимости $-\frac{7}{5} < x < -\frac{3}{5}$.

Исследуем сходимость ряда на концах этого интервала.

а) $x = -\frac{3}{5}$; $-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{2^{n+1}}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n\cdot 2^n}{2^{n+1}\cdot 5^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}.$

Ряд расходится, так как предел n-го члена отличен от нуля (не выполнен необходимый признак сходимости).

б) $x = -\frac{7}{5}$; $-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{2^{n+1}}\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2}$ этот ряд тоже расходится, так как не выполнен необходимый признак сходимости ряда.

Таким образом, область сходимости $-\frac{7}{5} < x < -\frac{3}{5}$.

Ответ: при $-\frac{7}{5} < x < -\frac{3}{5}$ данная функция разлагается в ряд

$$\frac{1}{5x+3} = -\frac{1}{2} - \frac{5}{2^2}(x+1) - \frac{5^2}{2^3}(x+1)^2 - \frac{5^3}{2^4}(x+1)^2 - \dots = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5^n}{2^{n+1}}(x+1)^n.$$

■

Покажем теперь другой способ решения подобных примеров – с использованием разложений известных функций (20) - (25)

□ Второй способ. Выполним преобразования.

$$\frac{1}{5x+3} = \frac{1}{5(x+1)-2} = \frac{1}{-2\left(1-\frac{5(x+1)}{2}\right)} = \frac{-\frac{1}{2}}{\left(1+\left(-\frac{5(x+1)}{2}\right)\right)} =$$
$$= -\frac{1}{2}\left(1+\left(-\frac{5(x+1)}{2}\right)\right)^{-1}$$

Теперь подставим в степенной ряд (биномиальный) (25) вместо x - $\left(-\frac{5(x+1)}{2}\right)$, а вместо α – (-1), получим прежний результат:

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{1}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dots;$$

$$\frac{1}{5x+3} = -\frac{1}{2}\left(1+\left(-\frac{5(x+1)}{2}\right)\right)^{-1} = -\frac{1}{2}\left(1+\frac{-1}{1!}\left(-\frac{5(x+1)}{2}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{-1(-1-2)}{2!}\left(-\frac{5(x+1)}{2}\right)^2+\cdots\right) == -\frac{1}{2} - \frac{5}{2^2}(x+1) - \frac{5^2}{2^3}(x+1)^2 - \frac{5^3}{2^4}(x+1)^2 - \cdots$$

Третий способ. Рассмотреть данную дробь как сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым слагаемым $b_1 = -\frac{1}{2}$, и знаменателем прогрессии $q = -\frac{5(x+1)}{2}$, при условии $|q| < 1$ прогрессия будет бесконечно убывающей и её сумма равна $\frac{1}{5x+3}$.

■

Еще один пример на применение «известных разложений» - разложений основных элементарных функций (известных) в степенной ряд.

Пример 5. Разложить функцию $f(x) = (1-x)e^x$ в ряд Тейлора по степеням $(x-1)$ и найти область сходимости полученного ряда.

□ В данном примере $x_0 = 1$. Воспользуемся известным разложением $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ (20).

Предварительно преобразуем исходную функцию так, чтобы переменная x входила только в выражение $(x-1)$, поскольку именно по степеням этого выражения требуется построить разложение.

$$(1-x)\cdot e^x = -(x-1)\cdot e^{(x-1)+1} = -(x-1)\cdot e^{x-1}\cdot e = -e\cdot(x-1)\cdot\left(1+\frac{x-1}{1!}+\frac{(x-1)^2}{2!}+\ldots+\frac{(x-1)^n}{n!}+\ldots\right) =$$

$$= -e\left((x-1)+\frac{(x-1)^2}{1!}+\frac{(x-1)^3}{2!}+\ldots+\frac{(x-1)^{n+1}}{n!}+\ldots\right) = -e\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^{n+1}}{n!}$$

Определим радиус интервала сходимости

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!} = [\tfrac{\infty}{\infty}] = \lim_{n\to\infty}\frac{n!\cdot(n+1)}{n!} = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty,$$

т.е. ряд сходится на всей числовой оси.

■

Пример 6. Разложить функцию $f(x) = \ln(x+3) + \sin^2 2x$ в ряд Маклорена. Определить область сходимости полученного ряда.

□ Итак, $x_0 = 0$. В данном случае, необходимо предварительно воспользоваться известным тригонометрическим тождеством: $\sin^2 2x = \frac{1}{2}(1-\cos 4x)$, а также свойствами логарифмической функции: $\ln(x+3) = \ln 3(1+\frac{x}{3}) = \ln 3 + \ln(1+\frac{x}{3})$, необходимо воспользоваться следующими разложениями

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \ldots + (-1)^n\frac{t^{n+1}}{n+1} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{n+1}}{n+1}; \text{ при } -1 < t \le 1$$

и $\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots + (-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots$; при $z \in (-\infty; +\infty)$,

Подставим вместо $t = \frac{x}{3}$, а вместо $z = 4x$.

Совместная область сходимости этих рядов является решением системы $\begin{cases} -1 < \dfrac{x}{3} \le 1, \\ x \in (-\infty, \infty) \end{cases}$, то есть интервал $(-3;\,3]$.

Итак, преобразовав $f(x)$ к виду $f(x) = \ln(x+3) + \sin^2 2x =$

$= \ln 3 + \ln(1 + \dfrac{x}{3}) + \dfrac{1}{2}(1 - \cos 4x)$, окончательно получаем

$$f(x) = \ln 3 + \frac{x}{3} - \frac{\left(x/3\right)^2}{2} + \frac{\left(x/3\right)^3}{3} - \ldots + (-1)^n \frac{\left(x/3\right)^n}{n+1} +$$

$$+ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{(4x)^2}{2!} + \frac{(4x)^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{(4x)^{2n}}{(2n)!} + \ldots\right) =$$

$$= \ln 3 + \frac{1}{3}\cdot x + \left(\frac{4^2}{2\cdot 2!} - \frac{1}{2\cdot 3^2}\right)\cdot x^2 + \frac{1}{3\cdot 3^3}\cdot x^3 - \left(\frac{4^4}{2\cdot 4!} + \frac{1}{4\cdot 3^4}\right)\cdot x^4 + \ldots ,$$

с областью сходимости $(-3;\,3]$.

■

§2 ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

2.4. Применение степенных рядов

Ряды часто применяются для приближенного вычисления значений функций, интегралов и решения дифференциальных уравнений. Для решения этих задач нужно знать разложение функций в степенные ряды. При вычислении приближенного значения функции *f(x)* с использованием ее разложения в ряд сохраняются первые *n* членов (*n* – конечная величина), а остальные члены отбрасываются. Для оценки погрешности найденного приближенного значения нужно оценить сумму отброшенных членов. Если ряд знакопостоянный, то ряд, составленный из отброшенных членов, сравнивают с бесконечно убывающей геометрической прогрессией. Для знакопеременного ряда, члены которого удовлетворяют признаку Лейбница, используется оценка

$\left|R_n\right| < \left|U_{n+1}\right|$, где U_{n+1} - первый из отброшенных членов ряда.

Вычисление определённых интегралов

Пример 7. Вычислить $\int_0^1 x^3 \sin x dx$ с точностью до 0,0001, разложив подынтегральную функцию в степенной ряд и затем проинтегрировав его почленно.

□ Заменим в подынтегральном выражении $\sin x$ его разложением в степенной ряд:

$$\int_0^1 x^3 \sin x dx = \int_0^1 x^3\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots\right)dx =$$

$$= \int_0^1 \left(x^4 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{5!} - \frac{x^{10}}{7!} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+4}}{(2n-1)!} + \ldots\right)dx =$$

$$= \left(\frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7\cdot 3!} + \frac{x^9}{9\cdot 5!} - \frac{x^{11}}{11\cdot 7!} + \frac{x^{13}}{13\cdot 9!} - \ldots\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= 0{,}2 - \frac{1}{7\cdot 3!} + \frac{1}{9\cdot 5!} - \frac{1}{11\cdot 7!} + \frac{1}{13\cdot 9!} - \ldots = 0{,}2 - \frac{1}{7\cdot 6} + \frac{1}{9\cdot 120} - \frac{1}{11\cdot 5040} +$$

$$+ \frac{1}{13\cdot 362880} - \ldots = 0{,}2 - 0{,}02381 + 0{,}000926 - 0{,}000018 + 0{,}0000002 - \cdots$$

Получили числовой знакочередующийся ряд, сходящийся, т.к. интервал сходимости степенного ряда для $\sin x - (-\infty;\infty)$. Чтобы вычислить его сумму приближенно, с точностью до 0,0001, нужно применить следствие теоремы Лейбница для оценки остатка ряда (для оценки суммы отброшенных членов). Сумма отброшенных членов в знакочередующемся ряде не превышает по абсолютной величине 1-го отброшенного члена.

Таким образом,

$$\int_0^1 x^3 \sin x dx \approx 0{,}2 - 0{,}02381 + 0{,}000926 = 0{,}1771$$

Все остальные члены, начиная с 4-го, можно отбросить и ошибка не будет превышать 0,0001, т.к. $0{,}000018 < 0{,}0001$.

■

Пример 8. Используя ряды, вычислить приближенное значение интеграла $\int\limits_{0,2}^{0,6} \frac{dx}{1+x^4}$ с точностью $E_2 = 10^{-6}$.

□ Для вычисления разложим подынтегральную функцию в ряд по степеням x, используя формулу суммы убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $q = -x^4$

$$\frac{1}{1+x^4} = 1 - x^4 + x^8 - x^{12} + \ldots + (-1)^n \cdot x^{4n} + \ldots \ .$$

Ряд сходится, причем абсолютно на любом отрезке, принадлежащем интервалу сходимости: $\left|-x^4\right| < 1$, $|x|^4 < 1$, $|x| < 1$, т.е. $x \in (-1;1)$. Поэтому его можно почленно интегрировать на любом отрезке $[a;b] \in (-1;1)$

$$\int\limits_{0,2}^{0,6} \frac{dx}{1+x^4} = \left(x - \frac{x^5}{5} + \frac{x^9}{9} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{4n+1}}{4n+1} + \ldots \right)\Bigg|_{0,2}^{0,6}.$$

Осталось вычислить сумму ряда на верхнем и на нижних пределах с заданными допустимыми погрешностями.

По следствию из теоремы Лейбница о знакочередующемся ряде погрешность вычисления $n-й$ частичной суммы не превышает по модулю первого отброшенного члена.

На верхнем пределе $x = 0,6$ требуем $\frac{0,6^{4n+1}}{4n+1} < 10^{-t} \Rightarrow 6^{4n+1} < (4n+1) \cdot 10^{4n+1-t}$.

Прологарифмируем неравенство. Получим

$$(4n+1)\lg 6 < 4n + 1 - t + \lg(4n+1) \Rightarrow (4n+1)(1 - \lg 6) > t - \lg(4n+1)$$

$$4n + 1 > \frac{t}{1 - \lg 6}.$$

При $t = 6$ $E = 10^{-6}$, получим $n > 5$, значит первый отброшенный член имеет номер 5 и сумма $S(0,6) = 0,5854762$.

Заметим, что числа имеют “запасные” цифры. Дело в том, что нам еще предстоит находить разность значений при верхнем и нижнем значениях пределов интегрирования. А, как известно, абсолютная погрешность суммы или разности не меньше суммы абсолютных погрешностей слагаемых. Поэтому при заданной погрешности 10^{-6} значения на верхнем и на нижнем пределах надо вычислять с “запасной” значащей цифрой. На нижнем пределе $x = 0,2$ аналогичная оценка показывает, что при $E = 10^{-6}$ достаточно ограничиться одним первым слагаемым.

Значение членов ряда на верхнем и нижнем пределах

1) $\kappa = 1$ $\quad U_1 = -0,0155552$

2) $\kappa = 2$ $\quad U_2 = 0,001119744$

3) $\kappa = 3$ $\quad U_3 = -1,0046688 \cdot 10^{-4}$

4) $\kappa = 4$ $\quad U_4 = 9,9568584497 \cdot 10^{-6}$

5) $\kappa = 5$ $\quad U_5 = -1,044616697 \cdot 10^{-6}$

6) $\kappa = 6$ $\quad U_6 = 1,1372115221 \cdot 10^{-7}$

Итак, окончательный ответ: значение искомого интеграла при $E = 10^{-6}$

$\int_{0,2}^{0,6} \frac{dx}{1+x^4} = 0,385540$ (обратите внимание на то, сколько цифр после запятой).

■

Приближенное вычисление значения выражений

Пример 9. Пользуясь формулой разложения в ряд Маклорена $(1+x)^m$, вычислить $\sqrt{27}$ с точностью до 0,001.

□ Разложение в ряд Маклорена $(1+x)^m$:

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}\cdot x + \frac{m\cdot(m-1)}{2!}\cdot x^2 + \frac{m\cdot(m-1)\cdot(m-2)}{3!}\cdot x^3 + \ldots .$$

Ряд сходится на $(-1;1)$.

Так как 5^2 является ближайшим к числу 27 квадратом целого числа, то 27 можно представить в виде суммы двух слагаемых: $27 = 25 + 2$.

Тогда

$$\sqrt{27} = \sqrt{5^2 \cdot \left(1 + \frac{2}{25}\right)} = 5 \cdot \sqrt{1 + 0,08} =$$

$$= 5 \cdot \left[1 + \frac{1}{2}\cdot 0,08 + \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}\cdot(0,08)^2 + \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}\cdot(0,08)^3 + \ldots\right] =$$

$$= 5 \cdot \left(1 + 0,04 - \frac{0,08^2}{8} + \frac{1\cdot 3\cdot 0,08^3}{6\cdot 2^3} - \ldots\right) = 5\cdot(1 + 0,04 - 0,0008 + 0,000032 - \ldots) =$$

$$= 5,0000 + 0,2000 - 0,0040 + 0,0002 - \ldots = 5,1962 \approx 5,196$$

Все остальные члены, начиная с 0,0002, отбрасываем, так как они не превышают 0,001.

■

Применение рядов при решении дифференциальных уравнений

В некоторых случаях, когда проинтегрировать дифференциальное уравнение $y' = f(x,y)$ с заданным начным условием $y(x_0) = y_0$ в элементарных функциях невозможно, то решение такого уравнения ищут в виде приближенной суммы степенного ряда (формула Тейлора): $y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$.

Итак, если для уравнения $y' = f(x,y)$ требуется решить задачу Коши при начальных условиях $y|_{x=x_0} = y_0$, то решение можно искать при помощи ряда Тейлора

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,$$

где $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$, а дальнейшие производные $y^n(x)$ находятся последовательным дифференцированием исходного уравнения и подстановкой в результате дифференцирования вместо $x, y, y', \ldots$ значений x_0, y_0, y'_0, … .

Аналогично можно находить решения и дифференцированных уравнений высших порядков.

Пример 10. Найти 3 первых ненулевых члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $y'' + xy = 0$, удовлетворяющего заданным начальным условиям: $y\big|_{x=0} = 1$, $y'\big|_{x=0} = 0$

□ Будем искать решение уравнения в виде ряда:

$$y = y(0) + \frac{y'(0)}{1!} \cdot x + \frac{y''(0)}{2!} \cdot x^2 + \ldots + \frac{y^n(0)}{n!} \cdot x^n + \ldots \ .$$

Определим $y''(0)$, подставим в заданное первоначально уравнение значения $x = 0$, $y = 1$, получим $y'' = 0$.

Найдем $y'''(0)$. Продифференцируем уравнение по x, вычислим $y'''(0)$.

$(*)$ $\qquad y''' + y + xy' = 0$.

$\qquad y''' + 1 + 0 \cdot 0 = 0 \Rightarrow y'''(0) = -1$.

Таким образом, имеем два отличных от нуля разложения в ряд.

$$y = 1 - \frac{x^3}{3!} + \ldots \ .$$

Нужно получить еще один отличный от нуля член разложения в ряд. Продифференцируем равенство $(*)$ по x.

$$y^{v} + y' + y' + x \cdot y'' = 0 \ .$$

$y^{IV} + 2y' + x \cdot y'' = 0$. $\qquad$ Вычислим $y^{IV}(0)$

$y^{IV}(0) + 0 + 0 + 0 \cdot 0 = 0$. $\qquad$ $y^{IV}(0) = 0$

Продифференцируем это равенство еще раз по x.

$y^{V} + 2y'' + y'' + x \cdot y''' = 0$.

$(**)$. $\qquad y^{V} + 3y'' + x \cdot y''' = 0$. $\qquad$ Вычислим $y^{V}(0)$

$y^{V}(0) + 3 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) = 0$. $\qquad$ $y^{V}(0) = 0$

Равенство $(**)$ продифференцируем еще раз по x, получим

$y^{VI} + 3y''' + y''' + x \cdot y^{IV} = 0$.

$y^{VI} + 4y''' + x \cdot y^{IV} = 0$. $\qquad$ Вычислим $y^{VI}(0)$

$y^{VI}(0) + 4 \cdot (-1) + 0 \cdot 0 = 0$. $\qquad$ $y^{VI}(0) = 4$

Запишем решение задачи Коши: $y = 1 - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{1 \cdot 4}{6} \cdot x^6 - \ldots$.

■

Лекция 5

§3 РЯДЫ ФУРЬЕ

Определение 1. Ряд вида

$$\frac{a_0}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right),$$

где a_0, a_n, b_n $(n=1,2,...)$ - вещественные числа, называется тригонометрическим рядом Фурье.

Если сумма этого ряда на промежутке $(-l;l)$ равна функции $f(x)$, то говорят, что функция $f(x)$ разлагается в тригонометрический ряд на промежутке $(-l;l)$, т.е. в ряд Фурье. В этом случае коэффициенты ряда определяются однозначно по формулам:

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx\ , \qquad a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx\ , \qquad (n=1,2,...)\ ,$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx\ , \qquad (n=1,2,...).$$

Теорема (Дирихле)

Если на отрезке $[-l;l]$ функция $f(x)$ удовлетворяет условиям:

на $[-l;l]$ $f(x)$ непрерывна или имеет конечное число точек разрыва первого рода;

отрезок $[-l;l]$ можно разбить на конечное число отрезков так, что внутри каждого из них $f(x)$ монотонна, то:

а) ряд Фурье этой функции сходится на всей числовой оси;

б) сумма ряда Фурье – функция периодическая с периодом $T=2l$;

в) сумма ряда Фурье равна $f(x)$ во всех точках непрерывности $f(x)$ в интервале $(-l;l)$

г) если x_0 - точка разрыва 1-го рода функции $f(x)$, принадлежащая интервалу $(-l;l)$, то сумма ряда Фурье в точке x_0 равна $S(x_0)=\dfrac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$;

д) в точках $x=\pm l$ сумма ряда Фурье равна $S(\pm l)=\dfrac{f(-l+0)+f(l-0)}{2}$.

3.1. Разложение в ряд Фурье четных и нечетных функций

Пусть $y=f(x)$ - четная функция на $[-l;l]$, то

$b_n=0$, $n=1,2,...$,

$$a_0=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx,$$

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx$$

и тогда ряд Фурье четной функции содержит только косинусы

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}.$$

Пусть $f(x)$ - нечетная функция на $[-l;l]$, тогда

$a_0 = 0$,

$a_n = 0$,

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$$

и ряд Фурье нечетной функции содержит только синусы и имеет вид

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}.$$

Пример 11. Функцию $f(x) = \begin{cases} 1, \text{ при } -2 \le x < 0 \\ 2x, \text{ при } \ 0 \le x \le 2 \end{cases}$, разложить в ряд Фурье.

□ Построим график функции $f(x)$ (рис.1).

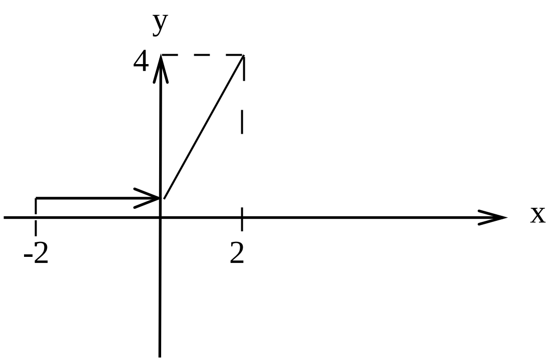

Рис.1

1) $x = 0$ - точка разрыва 1-го рода

2) на $[-2;0]$ функция постоянна, а на $[0;2]$ возрастает.

Функция не является ни четной, ни нечетной.

Коэффициенты Фурье вычисляем по общим формулам при $l = 2$.

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)dx = \frac{1}{2}\left(\int_{-2}^{0} 1dx + \int_0^2 2xdx\right) = \frac{1}{2}\left(x\Big|_{-2}^{0} + x^2\Big|_0^2\right) = \frac{1}{2}(2+4) = 3$$

$$a_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}dx = \frac{1}{2}\left(\int_{-2}^{0} 1\cos\frac{n\pi x}{2}dx + \int_0^2 2x\cos\frac{n\pi x}{2}dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(\left.\frac{\sin\frac{n\pi x}{2}}{\frac{n\pi}{2}}\right|_{-2}^{0} + 2\cdot\left(\left.\frac{x\sin\frac{n\pi x}{2}}{\frac{n\pi}{2}} + \frac{\cos\frac{n\pi x}{2}}{\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2}\right|_0^2\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{n\pi}\sin 0 + \frac{2}{n\pi}\sin n\pi + 2\cdot\left(\frac{4}{n\pi}\sin n\pi + \frac{4}{n^2\pi^2}\cos n\pi - 0 - \frac{4}{n^2\pi^2}\cos 0\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{8}{n^2\pi^2}\cos n\pi - \frac{8}{n^2\pi^2}\right) =$$

$$= \frac{4}{n^2\pi^2}\left((-1)^n - 1\right).$$

$$b_n=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx=\frac{1}{2}\left(\int_{-2}^{0}1\sin\frac{n\pi x}{2}dx+\int_{0}^{2}2x\sin\frac{n\pi x}{2}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\left.\frac{-\cos\frac{n\pi x}{2}}{\frac{n\pi}{2}}\right|_{-2}^{0}+2\cdot\left(\left.\frac{-x\cos\frac{n\pi x}{2}}{\frac{n\pi}{2}}+\frac{\sin\frac{n\pi x}{2}}{\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2}\right|_{0}^{2}\right)\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{n\pi}\cos 0+\frac{2}{n\pi}\cos n\pi+2\cdot\left(\frac{4}{n\pi}\cos n\pi+\frac{4}{n^2\pi^2}\sin\pi-0-\frac{4}{n^2\pi^2}\cos 0\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{2}{n\pi}+\frac{2(-1)^n}{n\pi}-\frac{8(-1)^n}{n\pi}\right)=-\frac{1}{n\pi}-\frac{3(-1)^n}{n\pi}=\frac{1}{n\pi}\left(3(-1)^{n+1}-1\right)\sin\frac{n\pi x}{2}$$

Запишем ряд Фурье:

$$f(x)=\frac{3}{2}+\sum\left(\frac{4}{n^2\pi^2}\left((-1)^n-1\right)\cos\frac{n\pi x}{2}+\frac{1}{n\pi}\left(3(-1)^{n+1}-1\right)\sin\frac{n\pi x}{2}\right).$$

Полученное равенство будет справедливо в точках непрерывности функции $f(x)$.

В точке разрыва $x_0=0$ $\quad S(0)=\frac{1+0}{2}=\frac{1}{2}$.

На концах отрезка $[-2;2]$ $\quad S(\pm 2)=\frac{4+1}{2}=\frac{5}{2}$.

■

Пример 12. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию с периодом $T=4$. Аналитическое выражение на этом отрезке

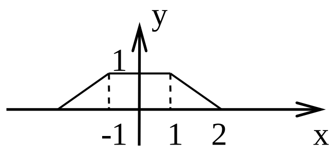

Рис.2

$$f(x)\begin{cases}x+2, & \text{при } -2\le x\le -1,\\ 1, & \text{при } -1\le x\le 1,\\ -x+2, & \text{при } 1\le x\le 2.\end{cases}$$

$f(x)$ - <u>четная</u> функция, поэтому вычисление коэффициентов Фурье существенно облегчается.

$$a_0=\frac{2}{2}\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1 1dx+\int_1^2(-x+2)dx=\left(x\Big|_0^1+\left.\frac{x^2}{2}\right|_1^2+2x^2\Big|_1^2\right)=$$

$$=1-2+4+\frac{1}{2}-2=1{,}5;$$

$$a_n=\frac{2}{2}\int_{-2}^{2}f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}dx=\left(\int_0^1 1\cos\frac{n\pi x}{2}dx+\int_1^2(2-x)\cos\frac{n\pi x}{2}dx\right)=$$

$$=\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}-\frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}-\frac{4}{n^2\pi^2}\cos n\pi+\frac{4}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{2}=$$

$$=-\frac{4}{n^2\pi^2}\cos n\pi+\frac{4}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{2};$$

$$f(x)=\frac{3}{4}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{2}-\cos n\pi}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{2}.$$

■

3.2. Разложение в ряд Фурье функций, заданных на промежутке $[0;l]$

Пример 13. Функцию, заданную на промежутке $[0;l]$, продолжая ее четным или нечетным образом, разложить в ряд Фурье. Построить график суммы полученного ряда

$$f(x)=\begin{cases}0,\ 0\le x\le\dfrac{\pi}{2},\\ 1,\ \dfrac{\pi}{2}<x\le\pi.\end{cases}$$

□ 1. Продолжим $f(x)$ на $[-\pi;0)$так, чтобы составная функция $F(x)$ была <u>четной</u>.

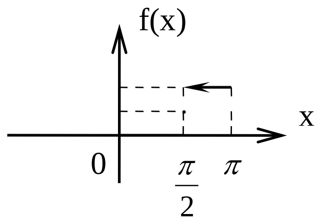

Рис.3

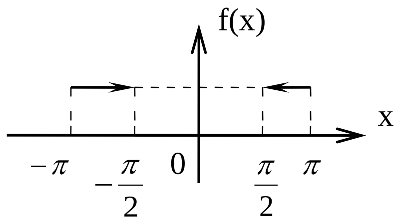

Рис.4

$F(x)$ на $[-\pi;\pi]$удовлетворяет условиям теоремы Дирихле.

$F(x)$ - четная, то $b_n=0$, $n=1,2,...$.

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}F(x)dx=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}0\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}1dx\right)=\frac{2}{\pi}\left(x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right)=\frac{1}{\pi},$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}F(x)\cos dx=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}0\cos xdx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}1\cos xdx\right)=\frac{2}{\pi}\frac{\sin nx}{n}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\frac{2\sin nx}{n\pi}-\frac{2\sin\frac{n\pi}{2}}{n\pi}=-\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2},$$

тогда разложение данной функции в ряд Фурье четным образом (по косинусам):

$$f(x)=\frac{1}{2}-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n\pi}\cos nx.$$

Из теоремы Дирихле следует, что полученное равенство справедливо для всех x из $\left[0;\frac{\pi}{2}\right)\bigcup\left(\frac{\pi}{2};\pi\right]$.

Отсюда, график суммы полученного ряда построен, включая точку $S\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2}$.

Продолжим $f(x)$ на $[-\pi;0)$ <u>нечетным</u> образом.

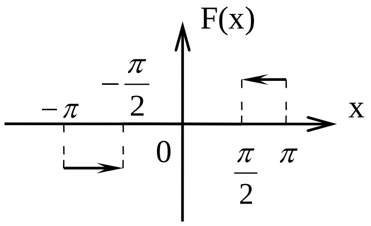

Рис.5

$a_0 = 0$, $a_n = 0$, $n = 1,2,...$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} F(x)\sin nx dx = \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 1\sin nx dx = \left.\frac{-2\cos nx}{n\pi}\right|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{-2\cos n\pi}{n\pi} + \frac{-2\cos\frac{n\pi}{2}}{n\pi}, \text{тогда}$$

$$f(x) = \frac{-2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\cos n\pi - \cos\frac{n\pi}{2}\right)\sin nx$$

$$\forall x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right)\bigcup\left(\frac{\pi}{2};\pi\right]$$

■

3.3. Ряд Фурье для функций с произвольным периодом

Мы видели, что ряды вида

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad (26)$$

являются хорошим аналитическим аппаратом для представления функций, заданных на промежутке длины 2π.

Рассмотрим теперь функции $f(x)$, заданные на отрезке длины $2l$. Пусть для определённости речь идёт о функции $f(x)$, заданной и дифференцируемой на отрезке $[-l, l]$. Положим

$$\phi(z) = f\left(\frac{lz}{\pi}\right).$$

Тогда $\phi(x)$ будет заданной и дифференцируемой уже на отрезке $[-\pi, \pi]$. Значит, к $\phi(z)$ применима теория, изложенная выше, и потому при $-\pi < z < \pi$ будет

$$\phi(z) = f\left(\frac{lz}{\pi}\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nz + b_n \sin nz).$$

Положим в этом равенстве $z = \frac{\pi x}{l}$.

Тогда для $-l < x < l$ получаем равенство

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right). \qquad (27)$$

В точках $x = \pm l$ сумма ряда равна

$$\frac{f(-l) + f(l)}{2}.$$

Остановимся на коэффициентах ряда (27). Например,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\phi(z)\cos nz\,dz = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{lz}{\pi}\right)\cos nz\,dz.$$

Подстановка $z = \frac{\pi x}{l}$ даёт

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx.$$

Аналогично,

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx; \quad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx.$$

Что касается функций, заданных и дифференцируемых на отрезке [0, *l*], то они допускают бесчисленное множество разложений вида (27). В частности, их можно разлагать по косинусам и по синусам. Последнее разложение имеет вид

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l} \qquad (0 < x < l).,$$

где

$$b_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx. \tag{28}$$

Пример 14. Найти разложение в ряд Фурье функции:

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & -2 < x < 0; \\ 2, & 0 \le x < 2. \end{cases}$$

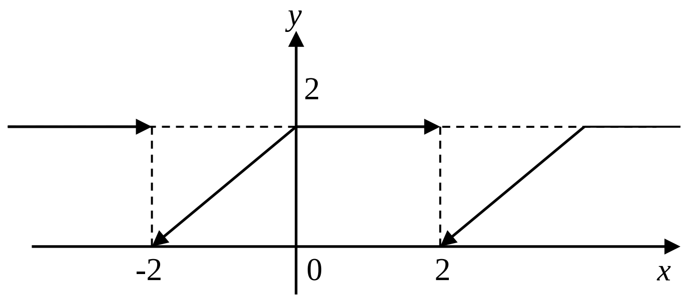

Рис. 9

□ Найдём коэффициенты Фурье. $l = 2$, тогда

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\left(\int_{-2}^{0}(x+2)\,dx + \int_{0}^{2} 2\,dx\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{(x+2)^2}{2}\Big|_{-2}^{0} + 2x\Big|_{0}^{2}\right) = \frac{1}{2}(2-0+4-0) = 3.$$

$a_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}dx = \frac{1}{2}\left(\int_{-2}^{0}(x+2)\cos\frac{n\pi\ x}{2}dx + \int_{0}^{2} 2\cos\frac{n\pi x}{2}dx\right) =$ Для первого интеграла применим формулу интегрирования по частям;

$$[\ u = x+2; \quad du = dx; \quad dv = \cos\frac{n\pi x}{2}dx; \quad v = \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\ ].$$

$$= \frac{1}{2}\left((x+2)\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_{-2}^{0} - \int_{-2}^{0}\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}dx + \frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_{0}^{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(0 + \frac{4}{(n\pi)^2}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_{-2}^{0} + 0\right) = \frac{2}{(n\pi)^2}\,(1-(-1)^n).$$

$b_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\left(\int_{-2}^{0}(x+2)\sin\frac{n\pi\, x}{2}dx + \int_{0}^{2} 2\sin\frac{n\pi x}{2}dx\right) =$ Для первого интеграла применим формулу интегрирования по частям;

$[\ u = x+2;\quad du = dx;\quad dv = \sin\frac{n\pi x}{2}dx;\quad v = -\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\ ].$

$$= \frac{1}{2}\left((x+2)\frac{-2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_{-2}^{0} + \int_{-2}^{0}\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}dx - \frac{4}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_{0}^{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{4}{n\pi} - 0 + \frac{4}{(n\pi)^2}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_{-2}^{2} - \frac{4}{n\pi}(\,(-1)^n - 1)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{4}{n\pi} - \frac{4}{n\pi}(-1)^n + \frac{4}{n\pi}\right) = \frac{2}{n\pi}(-1)^{n+1}.$$

Следовательно, на промежутке $(-2,\,2)$ ряд Фурье имеет вид

$$f(x) = \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\ \frac{2}{(n\pi)^2}\,(1-(-1)^n)\cos\frac{n\pi x}{2} + \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}.$$

■

3.4. Ряд Фурье в комплексной форме

Пусть дан ряд Фурье для функции $f(x)$ на отрезке $[-\pi,\,\pi]$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx + b_n\sin nx, \tag{29}$$

с коэффициентами

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx;\quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx; \tag{30}$$
$$n = 0, 1, 2, \ldots .$$

По известной формуле Эйлера:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi;\quad e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi.$$

Отсюда можно записать

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2};\quad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}. \tag{31}$$

Используя формулы (31), получаем;

$$\cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2};\quad \sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}.$$

Подставим данные выражения в ряд (29)

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cdot\frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2}+b_n\cdot\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i}=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cdot\frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2}-ib_n\cdot\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2}=$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n-ib_n}{2}\cdot e^{inx}+\frac{a_n+ib_n}{2}\cdot e^{-inx}=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} c_n\cdot e^{inx}+c_{-n}\cdot e^{-inx}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\cdot e^{inx}.$$

Полученный ряд и является *рядом Фурье в комплексной форме*. При этом коэффициенты данного ряда вычисляются по формулам:

$$c_n=\frac{a_n-ib_n}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x)\cos nx-i\,f(x)\sin nx\right]dx=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\left[\cos nx-i\sin nx\right]dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot e^{-inx}dx,$$

аналогично,

$$c_{-n}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot e^{inx}dx,\quad n=0,1,2,\ldots .$$

Такие же формулы можно получить, преобразовав ряд Фурье для случая произвольного промежутка $[-l,l]$:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l})=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\cdot e^{\frac{in\pi x}{l}}, \qquad (32)$$

где

$$c_n=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\cdot e^{-\frac{in\pi x}{l}}dx;\quad c_{-n}=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\cdot e^{\frac{in\pi x}{l}}dx,$$

$n=0,1,2,\ldots .$

Или

$$c_n=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\cdot e^{-\frac{in\pi x}{l}}dx;\quad n=0,\pm1,\pm2,\ldots .$$

Очевидно, что ряд Фурье в комплексной форме имеет более компактный вид.

В электротехнике и радиотехнике элементы ряда Фурье в комплексной форме

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\cdot e^{\frac{in\pi x}{l}}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\cdot e^{i\omega_n x}$$

называются гармониками, коэффициенты c_n - комплексными амплитудами, $\omega_n=\frac{n\pi}{l}$, $n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots$ - волновыми числами функции $f(x)$.

Пример 15. Построить ряд Фурье в комплексной форме для функции:

$$f(x)=\begin{cases}1, & -1<x<0,\\ 1-x, & 0\le x<1.\end{cases}$$

□ Для данной функции $l=1$.

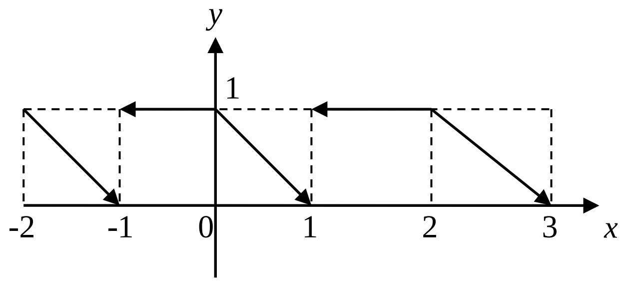

Рис. 12

При $n \neq 0$,

$$c_n = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)\cdot e^{-in\pi x}dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} e^{-in\pi x}dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{1} (1-x)\cdot e^{-in\pi x}dx =$$

для второго интеграла

$$[\,1-x = u, \quad e^{-in\pi x}dx = dv; \quad du = -dx, \quad v = -\frac{1}{in\pi}\cdot e^{-in\pi x}\,]$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{in\pi}\cdot e^{-in\pi x}\Big|_{-1}^{0}\right) + \frac{1}{2}\cdot\left(-(1-x)\cdot\frac{1}{in\pi}\cdot e^{-in\pi x}\Big|_{0}^{1} - \frac{1}{in\pi}\int_{0}^{1} e^{-in\pi x}dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{i}{n\pi}\cdot(1-e^{in\pi})\right) + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{in\pi} + \frac{1}{(in\pi)^2}\cdot e^{-in\pi x}\Big|_{0}^{1}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{i}{n\pi}\cdot(1-e^{in\pi})\right) + \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{i}{n\pi} - \frac{1}{(n\pi)^2}\cdot(e^{-in\rho}-1)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{i}{n\pi} + \frac{1}{(n\pi)^2}\cdot(1-e^{-in\pi})\right).$$

При $n = 0$

$$c_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{1} (1-x)\,dx = \frac{1}{2}(0+1) - \frac{1}{2}\frac{(1-x)^2}{2}\Big|_{0}^{1} = \frac{1}{2}\cdot(1+\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}.$$

Следовательно, для всех точек непрерывности функции $f(x)$ имеет место равенство:

$$f(x) = \frac{3}{4} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n\neq 0)}} \left(\frac{1}{2(n\pi)^2}\cdot(1-e^{-in\pi}) - \frac{i}{n\pi}\right)\cdot e^{-in\pi x}.$$

§ 4 ПРИЛОЖЕНИЯ РЯДОВ ФУРЬЕ

4.1. Задача о колебании струны

Ряды Фурье находят многочисленные применения. Здесь мы покажем, как они используются при решении задачи о *колебании струны.* Струной называется гибкая нить, не оказывающая сопротивления изгибу.

Рассмотрим струну, которая в начальный момент совмещена с отрезком $0 \le x \le l$ оси Ox (см. рис. 13). Мы будем считать, что концы струны $x = 0$ и $x = l$ закреплены на оси Ox.

Пусть струна растягивается силами F и $-F$, приложенными к её концам в направлении вдоль оси Ox. Если струну вывести из состояния равновесия и затем предоставить себе самой, то под влиянием растягивающих сил точки струны придут в движение, стремясь вернуться в исходное положение. Однако, придя в это положение, каждая точка струны будет обладать уже некоторой скоростью и по инерции пройдёт дальше своего равновесного положения. При этом дальнейшем движении точек они будут тормозиться растягивающими силами и т.д. Таким образом, струна будет совершать некоторое колебательное движение. Задача состоит в исследовании этого движения.

Сделаем ряд предположений. Прежде всего, мы считаем, что, выводя струну из состояния равновесия, мы придаём ей форму некоторой линии $y = f(x)$, лежащей на плоскости xOy и не сообщаем точкам струны никаких начальных скоростей. Тогда во всё ремя движения струна будет находиться в плоскости xOy. Мы будем предполагать, что каждая точка струны совершает только *поперечные* колебания, перпендикулярные оси Ox. Это колебание мы предположим столь малым, что *квадратами* отклонений точек струны от оси Ox можно пренебречь. Кроме того, будем считать, что во всё время движения струна будет сохранять *пологую* форму. Это означает, что угол α образуемый касательной к струне с осью Ox, достаточно мал, чтобы можно было считать

$$\sin\alpha = a, \quad \cos\alpha = 1. \qquad (1)$$

Наконец, мы считаем струну *однородной*, причём массу единицы длины струны в её нерастянутом состоянии обозначим ρ.

Возьмём какую - либо точку струны, имеющую в начальный момент $t = 0$ абсциссу x. Так как эта точка будет двигаться перпендикулярно оси Ox, то во время движения её абсцисса x не будет меняться. Однако же её y будет зависеть от времени, а также от того, о какой точке идёт речь, т.е. от абсциссы x этой точки. Таким образом, эта ордината является функцией от x и от времени t. Эту функцию мы будем обозначать через $y(x, t)$. Итак, дело сводится к нахождению функции $y(x, t)$. Ясно, что эта неизвестная функция должна удовлетворять *граничным условиям*

$$y(0, t) = y(l, t) = 0, \qquad (2)$$

выражающим то, что концы струны $x = 0, \quad x = l$ в любой момент времени находятся на оси Ox, и удовлетворяют *начальным условиям*

$$y(x, 0) = f(x), \quad y'_t(x, 0) = 0, \qquad (3)$$

первое из которых выражает то, что в начальный момент $t = 0$ струне придана заданная форма $y = f(x)$, а второе означает, что точки струны не имеют начальных скоростей.

Выведем теперь дифференциальное уравнение, которому должна удовлетворять неизвестная функция $y(x, t)$. Для этого выделим из струны элементарный отрезок, который в начальный момент $t = 0$ совпадает с отрезком $[x, x + dx]$ оси Ох. В момент t этот отрезок представляет собой элементарную дугу линии $y = y(x, t)$. Длина этой дуги равна

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + (\frac{\partial y}{\partial x})^2}\, dx.$$

Пренебрегая членом $(\frac{\partial y}{\partial x})^2$, (это основано в предположении пологой формы струны однако, $\frac{\partial y}{\partial x} = tg\alpha$ и значит, $(\frac{\partial y}{\partial x})^2 = tg^2\alpha = \sec^2\alpha - 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} - 1,$ а мы считаем, что $\cos\alpha = 1$.) получим $ds = dx$.

Масса выделенного элемента равна $\rho\, dx$. К этому элементу будут приложены растягивающие его силы. Пусть натяжение струны в точке x будет равно F_x.

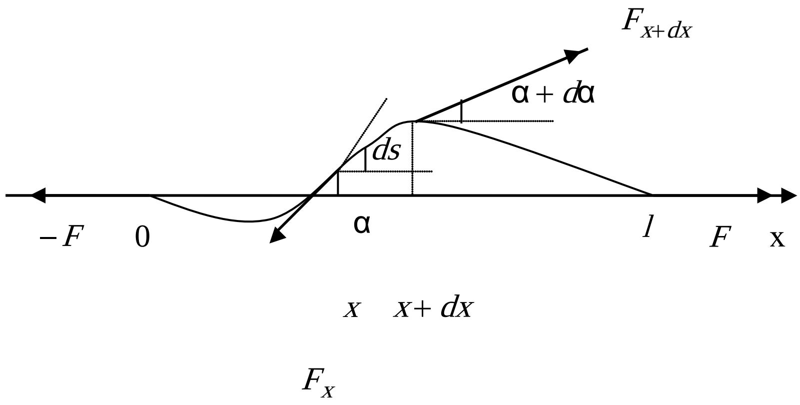

Рис. 13

Тогда к концам нашего элемента будут приложены силы F_x и F_{x+dx}. Они направлены по касательным, проведённым к струне в точках x и $x + dx$. Обозначим через α угол между осью Ох и касательной к струне в точке x. В точке $x + dx$ этот угол пусть будет равен $\alpha + d\alpha$ (Рис. 13).

Обозначим равнодействующую сил, приложенных к концам элемента, через $\overline{\omega}$. Тогда векторное уравнение движения элемента имеет вид

$$(\rho\, dx)\, \overline{\omega} = \overline{R}. \tag{4}$$

Проектируя это уравнение на ось Ох, находим

$$(\rho\, dx)\, \omega_x = R_x. \tag{5}$$

(Предостерегаем от недоразумений: символ R_x означает *проекцию* силы $\overline{R}$ на ось Ох, а F_x - численное значение натяжения в точке x).

Поскольку точки струны движутся перпендикулярно оси Ох, то $\omega_x = 0$. Стало быть и $R_x = 0$. Но

$$R_x = F_{x+dx}\cos(\alpha + d\alpha) - F_x \cos\alpha.$$

В силу (33), будет $\cos(\alpha + d\alpha) = \cos\alpha = 1$ и потому $R_x = F_{x+dx} - F_x$. Сопоставляя это с равенством $R_x = 0$, находим, что $F_{x+dx} = F_x$. Это значит, что *величина натяжения струны не ме-*

няется вдоль струны. Поскольку же на концах струны это натяжение равно F, то и во всех точках струны оно равно F, и, вместо F_x и F_{x+dx}, можно писать F. Спроектируем теперь уравнение (4) на ось Оу

$$(\rho\, dx)\,\omega_y = R_y. \qquad (6)$$

Так как $\omega_y = \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}$, а (см. (1))

$$R_y = F\sin(\alpha + d\alpha) - F\sin\alpha = F(\alpha + d\alpha) - F\alpha = Fd\alpha,$$

то (6) даёт

$$\rho\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}dx = Fdx..$$

(dx означает приращение угла α, когда в закреплённый момент времени t абсцисса x получает приращение $x+ dx$. Поэтому отношение $\dfrac{d\alpha}{dx}$ есть, строго говоря, частная производная $\dfrac{\partial\alpha}{\partial x}$). Или

$$\rho\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = F\,\frac{dy}{dx}. \qquad (7)$$

Вспомним теперь, что $tg\alpha = y'_x = \dfrac{\partial y}{\partial x}$. Отсюда

$$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{1}{1+(\frac{\partial y}{\partial x})^2}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} .$$

Как и выше, членом $(\dfrac{\partial y}{\partial x})^2$ можно пренебречь, откуда

$$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

Положив для краткости $\dfrac{F}{\rho} = a^2$, приводим уравнение (7) к виду

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2\,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \qquad (8)$$

Это знаменитое ***уравнение колебания струны.*** Мы видим, что это дифференциальное уравнение *с частными производными*. Такие уравнения до сих пор мы ещё не изучали.

Таким образом, наша механическая задача свелась к чисто математической: найти такое решение уравнения (8), которое удовлетворяет условиям (2) и (3).

Существуют разные способы решить задачу, к которой мы пришли.

Один из способов был предложен в 18 веке Д. Бернулли. Позже, уже в 19 веке, этот способ систематически применялся Фурье для решения целого ряда термодинамических задач, почему он и получил название *метода Фурье*. Этот способ мы и изложим. Он заключается в том, что сначала решается следующая задача.

Вспомогательная задача: Найти функцию $y = y(x, t)$, удовлетворяющую требованиям:

1) $y(x,t) \neq 0,$ тождественно, (9)

2) $\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2},$ (10)

3) $y(0,t) = y(l,t) = 0,$ (11)

4) $y(x,t) = X(x) \cdot T(t).$ (12)

Отличие вспомогательной задачи от той, которую нам на самом деле нужно решить, состоит в том, что от искомой функции $y(x, t)$ мы уже не требуем, чтобы она удовлетворяла начальным условиям (3), но зато требуем, чтобы она имела специальный вид $X(x) \cdot T(t)$, т.е. представлялась в виде произведения функции $X(x)$ от одного только x на функцию $T(t)$ одного только t. Кроме того, мы налагаем на функцию $y(x, t)$ естественное условие, а именно она не должна быть тождественным нулём.

Оказывается, что изменённая таким образом задача, решается довольно легко и что она имеет бесконечное множество решений, из которых удаётся составить и решение нашей основной задачи.

Займёмся же поставленной вспомогательной задачей.

Из (9) вытекает существование такой точки (x_0, t_0), что $y(x_0, t_0) \neq 0$. Тогда $X(x_0) \cdot T(t_0) \approx 0,$ т.е. $T(t_0) \neq 0$. Подставим значение $t = t_0$ в граничные условия (11):

$X(0) \cdot T(t_0) = X(l) \cdot T(t_0) = 0.$

Отсюда видно, что искомая функция $X(x)$ должна удовлетворять условиям:

$$X(0) = X(l) = 0. \qquad (13)$$

Подставляя (12) в (10) получим

$X \cdot T'' = a^2 X'' \cdot T,$

т.е.

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{a^2 T}. \qquad (14)$$

Но (внимание!) правая часть равенства (14) не зависит от x. Значит и левая часть (14) от x не должна зависеть. С другой стороны, эта левая часть может быть функцией только одного x, так как $X = X(x)$. Значит, левая (а с ней и правая) часть равенства должна быть постоянной величиной. Обозначим эту (неизвестную нам) постоянную через μ.

Допустим сначала, что $\mu = 0$. Тогда из (14) следует,

$X'' = 0$.

Отсюда $X' = C_1$, и $X = C_1 x + C_2$, т.е., X должна быть линейной функцией. Подставляя найденное значение X в условие (13), получим $C_1 \cdot 0 + C_2 = 0,$ $C_1 \cdot l + C_2 = 0.$ Но тогда $C_1 = C_2 = 0$, т.е. $X \equiv 0$, а с ним и $y(x, t) \equiv 0$, что противоречит (9). Таким образом, не существует решения вспомогательной задачи, у которой было бы $\mu = 0$.

Допустим теперь, что $\mu > 0$, т.е. что $\mu = \lambda^2$, где λ можно считать положительным. Тогда

$\dfrac{X''}{X} = \lambda^2$, т.е. $X'' - \lambda^2 X = 0$.

Общее решение этого линейного уравнения имеет вид

$X = C_1 \cdot e^{\lambda x} + C_2 \cdot e^{-\lambda x}.$

Подставляя найденное значение X в (13), получим

$$C_1 + C_2 = 0, \quad C_1 e^{\lambda l} + C_2 e^{-\lambda l} = 0.$$

Решая эту систему, находим $C_1 = C_2 = 0$. Это снова приводит к соотношению $X \equiv 0$, противоречащему условию (9). Итак, неравенство $\mu > 0$ тоже оказывается невозможным. Стало быть, вспомогательную задачу можно рассматривать, только предполагая, что неизвестное $\mu < 0$, т.е., что $\mu = -\lambda^2$, где $\lambda > 0$. Таким образом,

$$\frac{X''}{X} = -\lambda^2 \qquad \text{или} \qquad X'' + \lambda^2 X = 0.$$

Решение этого уравнения есть

$$X = C_1 \sin \lambda x + C_2 \cos \lambda x$$

Первое из граничных условий (13) даёт $C_2 = 0$. Значит (заменяя C_1, на C),

$$X = C \sin \lambda x.$$

Если бы было $C = 0$, то мы не пришли бы к решению нашей вспомогательной задачи, ибо получилось бы противоречие с (9). Стало быть $C \neq 0$. Но тогда второе из условий (13) даёт $\sin \lambda l = 0$. Это возможно лишь при

$$\lambda l = n\pi \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Значит для λ возможны лишь значения

$$\lambda = \frac{n\pi}{l} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

что приводит к следующим выражениям для X_n:

$$X_n = C_n \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

причём C_n при каждом n может принять любое (отличное от 0) значение.

Выберем какое-либо из возможных значений λ и подставим в (14):

$$\frac{T''}{a^2 T} = -\lambda^2 = -\frac{n^2\pi^2}{l^2}.$$

Отсюда

$$T'' + \frac{a^2 n^2 \pi^2}{l^2} T = 0,$$

т.е.

$$T = M \sin \frac{an\pi t}{l} + N \cos \frac{an\pi t}{l},$$

где M и N - произвольные постоянные. Обозначая это T через T_n и полагая $C_n M = A_n, \quad C_n N = B_n$ получаем бесконечное множество решений вспомогательной задачи

$$y_n(x, t) = (A_n \sin \frac{an\pi t}{l} + B_n \cos \frac{an\pi t}{l}) \sin \frac{n\pi x}{l}. \tag{15}$$

Здесь $n = 1, 2, 3, \ldots$, а A_n и B_n - произвольные постоянные.

Любая функция (15) удовлетворяет уравнению (10) и граничным условиям (11), причём это верно уже и без ограничений $A_n \neq 0, \quad B_n \neq 0$.

Заметим теперь, что и уравнение (10) и условия (11) *линейны и однородны*, т.е. таковы, что сумма функций, удовлетворяющих им, также будет удовлетворять и уравнению и граничным условиям. Поэтому функция

$$y(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\sin\frac{an\pi t}{l}+B_n\cos\frac{an\pi t}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l} \qquad (16)$$

при условии сходимости выписанного ряда, также будет удовлетворять уравнению (10) и граничным условиям (11). Отметим, что A_n и B_n остаются при этом *произвольными* постоянными (при условии, что не нарушается сходимость полученного ряда). Чтобы функция (16) была решением интересующей нас (уже не вспомогательной, а основной) задачи, нужно подобрать A_n и B_n так, чтобы выполнялись начальные условия (3).

Первое условие (3) даёт

$$\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{n\pi x}{l}=f(x). \qquad (17)$$

Дифференцируя (16), получим

$$y'_t(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{an\pi}{l}\left(A_n\cos\frac{an\pi t}{l}-B_n\sin\frac{an\pi t}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

Полагая $t=0$ и учитывая второе из условий (3), получим

$$\frac{a\pi}{l}\sum_{n=1}^{\infty}nA_n\sin\frac{n\pi x}{l}=0. \qquad (18)$$

Чтобы удовлетворить соотношение (18) нужно принять, $A_n=0$ ($n=1,2,3,\ldots,$) Соотношение же (17) показывает, что коэффициенты B_n должны быть коэффициентами разложения функции $f(x)$, заданной на $[0,l]$ по функциям $\sin\frac{n\pi x}{l}$, т.е.

$$B_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\ \sin\frac{n\pi x}{l}\ dx. \qquad (19)$$

Следовательно, искомое решение имеет вид

$$y(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\cos\frac{an\pi t}{l}\sin\frac{n\pi x}{l},$$

где B_n определяется из (19).

Задача 16. Пусть $a=l=1,\quad f(x)=\frac{\sin^3\pi x}{1000}$. Найти $y(\frac{1}{3},1)$.

□ Найдём сначала разложение (17). Это гораздо проще сделать без использования формул (19), непосредственно. Действительно,

$$\sin^3\alpha=\sin\alpha\cdot\sin^2\alpha=\sin\alpha\cdot\frac{1-\cos2\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{2}-\frac{\sin(\alpha+2\alpha)+\sin(\alpha-2\alpha)}{4}=\frac{3}{4}\cdot\sin\alpha-\frac{1}{4}\cdot\sin3\alpha.$$

Значит, $\frac{\sin^3\pi x}{1000}=\frac{3\sin\pi x-\sin3\pi x}{4000}$,

откуда $y(x,t)=\frac{1}{4000}(3\cos\pi t\cdot\sin\pi x-\cos3\pi t\cdot\sin3\pi x)$ $y(\frac{1}{3},1)=-\frac{3\sqrt{3}}{8000}$.

■

4.2. Распространение тепла в стержне

В качестве другого применения рядов Фурье рассмотрим задачу о распространении тепла в стержне. Пусть стержень длины l весь, кроме своих концов, помещён в теплоизолирующую оболочку и нагрет до некоторой температуры, различной в различных его очках. Если этот стержень предоставить самому себе, то заключённое в нём тепло будет перетекать от более нагретых точек к менее нагретым, и температура стержня с течением времени станет выравниваться, причём на этот процесс будет влиять также и режим, который поддерживается на концах стержня. Задача состоит в том, чтобы, зная упомянутый режим, и распределение температур вдоль стержня в начальный момент $t=0$, найти это распределение в последующие моменты $t>0$. Для этого естественно надо задать и термические характеристики стержня: его теплоёмкость c и коэффициент теплопроводности k. Напомним, что c - это количество калорий, которое нужно подать, чтобы единицу массы стержня (мы считаем его однородным с линейной плотностью ρ нагреть на 1^0. Коэффициент k представляет собой количество тепла (в калориях), которое будет протекать за единицу времени через сечение стержня, если температура стержня падает на 1^0 при перемещении вдоль стержня на единицу длины. Мы будем обозначать температуру стержня в точке x (один из концов стержня (назовём его «левым») фиксируется и точкой x называется точка, отстоящая от этого конца на расстояние x) в момент времени t через $u(x,t)$. Это и есть та величина, которую нужно найти. Температуру же $u(x,0)$ стержня в начальный момент мы считаем известной и обозначаем через $f(x)$

$$u(x,0)=f(x). \tag{20}$$

Что касается температурного режима на концах стержня, этот режим может быть весьма разнообразен. Можно, например, на концах отрезка поддерживать температуру, изменяющуюся по заданным законам $u(0,t)=\phi(t)$, $u(l,t)=\psi(t)$ и т.п.), то мы рассмотрим два случая:

A) концы погружены в тающий лёд, т.е. в них поддерживается постоянная температура

$$u(0,t)=u(l,t)=0; \tag{21}$$

B) концы погружены в ту же теплоизолирующую оболочку, что и весь стержень. Это означает, что через концы не происходит протекание тепла. Математическое выражение этой закономерности мы найдём несколько позже.

Рассмотрим сечение x нашего стержня и найдём какое количество Q тепла протечёт (слева направо) через это сечение за элементарный промежуток времени $[t,t+\Delta t]$. В момент t температура стержня в точке x будет равна $u(x,t)$.

Возьмём отличную от x точку $x+\Delta x$ стержня. Пусть, для определённости, $\Delta x>0$, т.е. новая точкалежит правее старой. В ней температура стержня в момент t будет равна $u(x+\Delta x,t)$. Таким образом, падение температуры при перемещении из x в $x+\Delta x$ оказывается равным $u(x,t)-u(x+\Delta x,t)$.

Следовательно, на единицу длины стержня (на участке $[x,x+\Delta x]$) приходится падение температуры, равное

$$\frac{u(x,t)-u(x+\Delta x,t)}{\Delta x}.$$

Если Δx весьма мало, то найденную величину можно принять за $-\frac{\partial u}{\partial x} = -u'_x(x, t).$ Такое падение температуры заставило бы за единицу времени перейти сечение x количество тепла, равное $-k\frac{\partial u}{\partial x}$ калорий. За время же $[t, t+\Delta t]$ через наше сечение перейдёт (слева направо)

$$Q = -k\frac{\partial u}{\partial x}dt \tag{22}$$

калорий. (Если $u(x+\Delta x, t) < u(x, t),$ то температура падает при перемещении слева направо. В этом случае тепло потечёт через сечение x также слева направо, т.е. окажется $Q > 0$. Это вполне согласуется с тем, что в нашем случае $\frac{\partial u}{\partial x} < 0.$ Если же $u(x+\Delta x), t) > u(x, t),$ то тепло потечёт справа налево, т.е. будет $Q < 0.$ Но тогда $\frac{\partial u}{\partial x} > 0,$ и формула (22) снова будет справедливой.)

Если концы стержня теплоизолированы, то количество тепла, протекающее через них, равно 0, и потому

$$u'_x(0, t) = u'_x(l, t) = 0. \tag{23}$$

Это и есть то выражение режима B, о котором мы упомянули выше.

Выделим из нашего стержня элементарный отрезок $[x, x+dx].$ За время $[t, t+dt]$ через сечение x в наш отрезок войдёт (из расположенной левее x части стержня)

$Q_1 = -ku'_x(x, t)dt$

калорий. За это же время из нашего отрезка через его конец $x+\Delta x$ уйдёт направо

$Q_2 = -ku'_x(x+dx, t)dt$

калорий. Стало быть, в рассматриваемом отрезке за время $[t, t+dt]$ накопится количество тепла, равное

$\Delta Q = Q_1 - Q_2 = k[u'_x(x+dx, t) - u'_x(x, t)]dt$

калорий. Поскольку малое приращение функции можно заменить её дифференциалом, то

$\Delta Q = ku''_{xx}(x, t)dxdt = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dxdt.$

Подача такого количества тепла должна повысить температуру единицы массы стержня на

$\frac{k}{c}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dxdt$

градусов. Поскольку же масса отрезка $[x, x+dx].$ равна $\rho\, dx,$ то соответствующее повышение температуры будет

$$\frac{k}{c\rho}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dt. \tag{24}$$

С другой стороны, это повышение температуры $u(x, t)$ в точке x за время $[t, t+dt]$ равно

$$u(x, t+dt) - u(x, t) = \frac{\partial u}{\partial t}dt. \tag{25}$$

Приравнивая друг к другу выражения (23) и (24), и, полагая для краткости, $\frac{k}{c\rho} = a^2$, получим *уравнение теплопроводности*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \qquad (26)$$

Таким образом, мы приходим к двум математическим задачам:

А) Найти то решение уравнения (26), которое удовлетворяет начальному условию (20) и граничным условиям (21).

В) То же с заменой условий (21) на (23).

Применим к задаче А) метод Фурье. Для этого сначала решим вспомогательную задачу: найти функцию $u(x, t)$ не равную нулю тождественно, удовлетворяющую уравнению (26) и граничным условиям (21) и имеющую специальный вид

$$u(x, t) = X(x) \cdot T(t). \qquad (27)$$

Как и при решении уравнения колебания струны, легко показать, что из (21) следует

$$X(0) = X(l) = 0. \qquad (28)$$

Подставляя (26) в (27), получим

$$XT' = a^2 X'' T,$$

т.е.

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{a^2 T}. \qquad (29)$$

Соотношение (29) возможно лишь тогда, когда обе его части представляют одну и ту же *постоянную*. Обозначим её через μ. На основании (28), допущения $\mu = 0$, $\mu > 0$ невозможны. Следовательно, $\mu < 0$. Полагая $\mu = -\lambda^2$, и, буквально повторяя рассуждения из 1, по формуле (29) получаем, что

$$X = C \sin \lambda x.$$

Более того, как и в 1, устанавливаем, что λ может иметь только одно из значений $\lambda = \frac{n\pi}{l}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Следовательно, X может иметь любое из выражений

$$X_n = C_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

где C_n - произвольные постоянные. Выбирая какое – либо из возможных значений λ и приравнивая правую часть равенства (29) величине $\mu = -\lambda^2$, находим

$$\frac{T'}{a^2 T} = -\frac{n^2 \pi^2}{l^2},$$

т.е.

$$\frac{dT}{T} = -\frac{a^2 n^2 \pi^2}{l^2} dt,$$

откуда,

$$T = M\, e^{-\frac{a^2 n^2 \pi^2}{l^2} t},$$

где M - произвольная постоянная. Полагая $C_n M = A_n$, находим бесконечное множество решений вспомогательной задачи

$$u_n(x,t) = A_n \cdot e^{-\frac{a^2 n^2 \pi^2}{l^2} t} \sin\frac{n\pi x}{l}. \qquad (30)$$

Каждая из этих функций при любых A_n удовлетворяет уравнению (26) и граничным условиям (21). Ввиду линейности уравнения и граничных условий, сумма

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\frac{a^2 n^2 \pi^2}{l^2} t} \cdot \sin\frac{n\pi x}{l} \qquad (31)$$

при любом выборе A_n, сохраняющем сходимость написанного ряда, также будет решением (26), удовлетворяющим (21). Постараемся же подобрать A_n так, чтобы удовлетворить и начальному условию $u(x,0) = f(x)$. Ясно, что это приводит к равенству

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi x}{l} = f(x),$$

откуда

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx. \qquad (32)$$

Итак задача А) решена. Её решение даётся формулой (31), в которой A_n нужно вычислять по (32).

Полезно заметить, что из (31) следует, что

$$u(x,\infty) = 0.$$

Физический смысл этого соотношения ясен: всё тепло из стержня вытечет и в нём установится температура льда, в который погружены его концы.

Перейдём к задаче В). Для неё вспомогательная задача состоит в нахождении функции $u(x,t) = X(t)\cdot T(t)$ не равной нулю тождественно, удовлетворяющей уравнению (26) и условиям (23) Последние дают:

$$X'(0) = X'(l) = 0. \qquad (33)$$

Подстановка $u = XT$ в (26) снова приводит к уравнению

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{a^2 T} = \mu, \qquad (34)$$

где $\mu = const$. Случай $\mu > 0$ исключается, как и выше. Но соотношение $\mu = 0$ уже возможно. Оно даёт: $X' = 0,$ откуда

$X' = C_1, \quad X = C_1 X + C.$ Согласно (33), будет $C_1 = 0$ и потому $X = C$, где C - произвольная постоянная. Кроме того, при $\mu = 0$ уравнение (34) даёт $T' = 0$, т.е. и $T = C*$, где $C*$ - постоянная. Следовательно, одним из решений вспомогательной задачи будет

$$u(x,t) = A_0.$$

При любом выборе A_0 (хотя бы и $A_0 = 0$) эта функция удовлетворяет соотношениям (26) и (23).

Предположим теперь, что $\mu = -\lambda^2 < 0$. Это даёт уравнение

$$X'' + \lambda^2 X = 0,$$

решение которого имеет вид:

$X = C_1 \cos\lambda x + C_2 \sin\lambda x.$

Но тогда

$X' = \lambda(-C_1 \sin\lambda x + C_2 \cos\lambda x).$

и первое из соотношений (33) даёт $C_0 = 0,$ так что (после замены C_1 на C) принимает вид

$X = C\cos\lambda x.$

Отсюда и из второго условия (69) получим

$X'(t) = -\lambda C \sin\lambda t = 0$.

Значит, $\lambda l = \pi n$

$$\lambda = \frac{\pi n}{l} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{35}$$

Таким образом, найдено бесконечное множество выражений функции X:

$X_n = C_n \cos\frac{\pi n x}{l} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$

Подставив в (34) одно из значений (35), получим

$\frac{T'}{a^2 T} = -\lambda^2 = -\frac{\pi^2 n^2}{l^2}$.

Отсюда

$T = M \cdot e^{-\frac{a^2\pi^2 n^2}{l^2}\cdot t}$.

Положив $C_n M = A_n$, находим бесконечное множество функций

$u_n(x,t) = A_n \cdot e^{-\frac{a^2 n^2 \pi^2}{l^2}\cdot t} \cos\frac{n\pi x}{l}$,

удовлетворяющих (26) и (23). Но тогда и

$$u(x,t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot e^{-\frac{a^2 n^2 \pi^2}{l^2}\cdot t} \cdot \cos\frac{n\pi x}{l} \tag{36}$$

будет решением (26), удовлетворяющим (23). Остаётся подобрать $A_o, A_1, A_2, \ldots$ так, чтобы оказалось $u(x, o) = f(x)$, т.е.

$A_o + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \cos\frac{n\pi x}{l} = f(x).$

Для этого необходимо взять

$$A_0 = \frac{1}{l}\int_0^l f(x)\,dx, \quad A_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx. \tag{37}$$

Замечание. Из (36) видим, что

$u(x, \infty) = A_0.$

Этим выражен физически очевидный факт, что с течением времени температура в изолированном стержне выравнивается. Более того, ясно и значение этой выровненной температуры. Именно, найдём общее количество тепла, содержащегося в нашем стержне. Для этого выделим из него элемент $[x, x + dx]$. В начальный момент температура этого элемента равна $f(x)$. Поскольку масса элемента равна ρdx, то для получения указанной температуры нужно было накопить в элементе $c\,\rho\, f(x)\,dx$ калорий.

Стало быть, общее количество тепла в стержне будет равно

$$Q = c\rho \int_0^l f(x)\,dx.$$

Поскольку стержень изолирован, то это же количество тепла сохранится в нём и при $t = \infty$. На единицу массы стержня придётся

$$\frac{Q}{\rho l} = \frac{c}{l} \int_0^l f(x)\,dx$$

калорий. Это количество тепла и создаёт в стержне температуру

$$\frac{1}{l} \int_0^l f(x)\,dx,$$

найденную выше.

Приложение 1

Свойства сходящихся числовых рядов

Теорема 1. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$, сходится то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} cU_n$, где $c \in R$, $c = const$, также сходится и $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot U_n = c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} U_n$.

Теорема 2. Пусть ряды $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$ сходятся, тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (U_n + V_n)$, называемый суммой данных рядов, также сходится и $\sum_{n=1}^{\infty} (U_n + V_n) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n + \sum_{n=1}^{\infty} V_n$ (то есть сходящиеся ряды, можно почленно складывать).

Теорема 3. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ сходится, то любой его остаток сходится. Если какой-либо остаток ряда сходится, то и сам ряд сходится. При этом, если $S = \sum_{k=1}^{n} U_k$, $S_m = \sum_{k=1}^{m} U_k$, $R_m = \sum_{k=m+1}^{n} U_k$, то $S = S_m + R_m$.

Из теоремы 3 следует:

- что отбрасывание или добавление конечного числа членов к данному ряду не влияет на его сходимость.

- из того, что сумма сходящегося ряда $S = S_m + R_m$ следует, что его остаток стремится к нулю:

$$\lim_{m \to \infty} R_m = \lim_{m \to \infty} (S - S_m) = 0$$

Приложение 2

Числовые ряды. Основные понятия

Таблица 1

№ п/п	Понятие	Определение и обозначение
1.	Ряд	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$
2.	Члены ряда, общий (n – ый) член ряда	$a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$
3.	Частичные суммы ряда	$S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, $S_3 = a_1 + a_2 + a_3$, …., $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n, \cdots$
4.	Последовательность частичных сумм	$S_1, S_2, S_3, ... S_n, ...$
5.	Сходящиеся ряды	$\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, где S – сумма ряда $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$
6.	Расходящиеся ряды	$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$ или не существует
7.	Остаток ряда	$\underbrace{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n}_{S_n} + \underbrace{a_{n+1} + a_{n+2} + ... +}_{R_n}$ $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + ...$

Основные свойства сходящихся рядов		
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - сходится	$\Leftrightarrow$	Остаток ряда R_n - сходится
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - сходится, S – его сумма	$\Rightarrow$	$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda \cdot a_n$ сходится, λS - его сумма
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся, S и σ – суммы этих рядов	$\Rightarrow$	$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ - сходится и $S + \sigma$ - его сумма
Необходимый признак сходимости ряда		
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - сходится	$\Rightarrow$	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$
<u>Следствие</u>: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$	$\Rightarrow$	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - расходится

Приложение 3

Достаточные признаки сходимости знакоположительных числовых рядов

Таблица 2

<table>
<tr><th>Признаки сравнения</th><th>Интегральный признак Коши</th><th>Признак Даламбера</th><th>Радикальный признак Коши</th></tr>
<tr>
<td rowspan="2">Пусть даны два ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$,
о сходимости одного из них известно (см. ниже таблицы).
Если $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \kappa, (0 < \kappa < \infty)$
Тогда ряды ведут себя одинаково в смысле сходимости (сходятся или расходятся одновременно).
2)
а) $a_n \le b_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ - сходится, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$;
б) $a_n \le b_n,$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - расходится, то расходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$</td>
<td rowspan="2">Пусть $a_n = f(n)$ и функция $f(x)$, при $x \ge b$
-непрерывная
-положительная
-монотонная.
Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится или расходится одновременно с несобственным интегралом $\int_b^{\infty} f(x)dx = $
$= \lim_{c\to\infty} \int_b^c f(x)dx$</td>
<td>$\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$</td>
<td>$\exists \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Тогда: а) если $l < 1$, то ряд сходится;
б) если $l > 1$, то ряд расходится.
При $l = 1$ вопрос о сходимости ряда остаётся открытым, возможно нужно применить другой достаточный признак или исследовать сходимость по определению.</td>
</tr>
</table>

Ряды, сходимость которых известна (применяются в признаках сравнения)

Гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} -$ расходится;

Обобщенно гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} - \left[\begin{array}{l} \text{при } p \le 1 - \text{расходится,} \\ \text{при } p > 1 - \text{сходится;} \end{array} \right.$

Геометрический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} q^n - \left[\begin{array}{l} \text{при } q \ge 1 - \text{расходится,} \\ \text{при } q < 1 - \text{сходится;} \end{array} \right.$

При этом, сумма ряда (сумма бесконечно убывающей прогрессии) вычисляется по формуле $S = \frac{b_1}{1-q}$.

Приложение 4

Знакопеременные числовые ряды

Таблица 3

<table>
<tr><td>Определение</td><td colspan="2">Числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$, где действительные числа $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ - произвольного знака, -<u>знакопеременный</u>
$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - ... + (-1)^{n+1} a_n + ...$, где $a_n > 0$ для всех $n \in N$, - <u>знакочередующийся</u>.</td></tr>
<tr><td>Абсолютная и условная сходимость знакопеременных рядов</td><td colspan="2">1. Данный знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и ряд из модулей $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходятся $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - <u>абсолютно сходится</u>
2. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а ряд из модулей $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - <u>условно сходится</u></td></tr>
<tr><td colspan="3">Достаточные признаки сходимости знакопеременных рядов</td></tr>
<tr><td colspan="2">Признак абсолютной сходимости</td><td>Признак Лейбница</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - знакопеременный и $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - абсолютно сходится</td><td>Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - ...$ -знакочередующийся ряд, числовая последовательность $\{a_n\}$ обладает свойствами:
1) убывает, т.е. $a_1 > a_2 > a_3 > ... > a_n > ...$ и
2) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Тогда данный <u>ряд сходится</u>, причем его сумма $0 < S \le a_1$,
а n-ый остаток ряда $|R_n| = |S - S_n| < a_{n+1}$.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Замечание:
1. Для приближенных вычислений. В сходящемся знакочередующемся ряде $\underbrace{a_1 - a_2 + a_3 - ... + (-1)^{n-1} \cdot a_n}_{S_n} + \underbrace{(-1)^n a_{n+1} + ...}_{R_n}$ сумма S может быть заменена n-ой частичной суммой ряда $S_n (S \approx S_n)$. Получаемая абсолютная <u>погрешность</u> $|S - S_n| = |R_n| \le |a_{n+1}|$ не превосходит модуля первого отброшенного члена ряда.
2. Убывание модулей членов знакопеременного ряда можно доказать с помощью производной. Если $|a_n|' < 0$ с некоторого номера, то члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ убывают с этого номера.
3. Если расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ установлена признаком Даламбера или признаком Коши, то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, т. к. если $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$ или $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, то $\lim_{n\to\infty} a_n \ne 0$ (да и члены ряда не убывают).</td></tr>
</table>

Продолжение таблицы 3

<u>Алгоритм исследования знакопеременного</u> ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ на сходимость.
1. Составь ряд из абсолютных величин членов данного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \lvert a_n \rvert$ и исследуй его сходимость (примени достаточные признаки сходимости знакоположительных рядов). 2. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \lvert a_n \rvert$ сходится $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ абсолютно сходится; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \lvert a_n \rvert$ расходится $\Rightarrow$ выполни пункт 3 3. Проверь условия признака Лейбница. Если выполнено: а) члены чередуются по знаку; б) $\lvert a_1 \rvert > \lvert a_2 \rvert > \lvert a_3 \rvert > \ldots$; в) $\lim_{n \to \infty} \lvert a_n \rvert = 0$ то 1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится по признаку Лейбница, причем условно (т. к. $\sum_{n=1}^{\infty} \lvert a_n \rvert$ расходится); 2) Если же хотя бы одно из условий пункта 3 не выполнено, то данный ряд – расходится.

Приложение 5

Функциональные ряды. Основные понятия

Таблица 4

Понятие	Определение и обозначение
1. Функциональный ряд	$U_1(x)+U_2(x)+...+U_n(x)+...=\sum_{n=1}^{\infty}U_n(x)$
2. Члены ряда	$U_1(x),U_2(x),...,U_n(x),...$ - функции от x
3. Сходимость ряда в точке x_0	$\sum_{n=1}^{\infty}U_n(x_0)$ сходится $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty}U_n(x)$ сходится в т. x_0 $\sum_{n=1}^{\infty}U_n(x_0)$ расходится, то $\sum_{n=1}^{\infty}U_n(x)$ расходится в т. x_0
4. Область сходимости ряда	$\sum_{n=1}^{\infty}U_n(x)$ сходится $\forall x\in D \Rightarrow D$ - область сходимости; находится из условия: $\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)}\right\|=\|l(x)\|<1$ или $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|U_n(x)\|}=\|l(x)\|<1$,
5. Последовательность частичных сумм	$S_1(x),S_2(x),...,S_n(x),...$, где $S_n(x)=U_1(x)+U_2(x)+...+U_n(x)$, $n=1,2,3...$
6. Сумма сходящегося ряда	$\lim_{n\to\infty}S_n(x)=S(x),\ \forall x\in D\Rightarrow S(x)$ - сумма ряда
7. Остаток ряда	$R_n(x)=S(x)-S_n(x)$
8. Равномерная сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}U_n(x)$ на D	$\forall\varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon)\ \ \forall x\in D\ (n\ge N(\varepsilon)\Rightarrow\|R_n(x)\|<\varepsilon)$
9. Абсолютная и равномерная сходимость ряда (признак Вейерштрасса)	1. $\|U_n(x)\|\le a_n,\ \forall n$ и $\forall x\in D$ 2. числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ - сходится $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty}U_n(x)$ - сходится абсолютно и равномерно на D

Продолжение таблицы 4

Свойства равномерно сходящихся рядов		
1. $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x) = U_1(x) + U_2(x) + \ldots + U_n(x) + \ldots$ - равномерно сходится на D 2. $U_n(x)$ - непрерывна $\forall n$ и $\forall x \in D$ 3. $S(x)$ - его сумма $\left(S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x) \right)$	$\Rightarrow$	1. $S(x)$ - непрерывна на D 2. $\int_a^b U_1(x)dx + \ldots + \int_a^b U_n(x)dx + \ldots = \int_a^b S(x)dx$, где $[a,b] \in D$ <u>(почленное интегрирование)</u> 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x U_n(x)dx$ - равномерно сходится на D, где $[a,x] \in D$
1. $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x) = U_1(x) + \ldots + U_n(x) + \ldots$ - сходится на D, $S(x)$ - его сумма 2. $U_n(x)$ - дифференцируемые $\forall n$ и $x \in D$ 3. $U_n'(x)$ - непрерывны $\forall n$ и $x \in D$ 4. $\sum_{n=1}^{\infty} U_n'(x) = U_1'(x) + \ldots + U_n'(x) + \ldots$ - равномерно сходится на D	$\Rightarrow$	1. $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$ - равномерно сходится на D 2. $\sum_{n=1}^{\infty} U_n'(x) = U_1'(x) + \ldots + U_n'(x) + \ldots = S'(x) \forall x \in D$ (почленное дифференцирование)

Приложение 6

Степенные ряды

Таблица 5

Определение и обозначение	(1) $a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + ... + a_n \cdot x^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$
	(2) $a_0 + a_1 \cdot (x - x_0) + a_2 \cdot (x - x_0)^2 + ... + a_n \cdot (x - x_0)^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n$, где $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ - постоянные коэффициенты
Радиус сходимости	Для рядов (1) и (2) $\exists$ число R $(0 \le R \le \infty)$ - радиус сходимости, такое что
	1) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ при $\lvert x \rvert < R$ - ряд абсолютно сходится  при $\lvert x \rvert > R$ ряд расходится
	2) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n$ при $\lvert x - x_0 \rvert < R$ - ряд абсолютно сходится;  при $\lvert x - x_0 \rvert > R$ ряд расходится
Свойства степенных рядов	1. Если степенной ряд $a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + ... + a_n \cdot x^n + ... = S(x)$,- абсолютно сходится при $\lvert x \rvert < R$, и его сумма $S(x)$ - непрерывна в области сходимости, то 2. Продифференцированный почленно ряд также сходится в той же области, причем его сумма равна производной от $S(x)$: $a_1 + 2a_2 \cdot x + ... + n \cdot a_n \cdot x^{n-1} + ... = S'(x)$ - сходится $\forall x \quad (\lvert x \rvert < R)$ 3. Проинтегрированный почлнно ряд также сходится в той же области, причем его сумма равна первообразной от $S(x)$: $\int_0^x S(x)dx = a_0 \cdot x + \frac{a_1}{2} \cdot x^2 + \frac{a_2}{3} \cdot x^3 + ... + \frac{a_n}{n+1} \cdot x^{n+1} + ...$ - сходится $\forall x \quad (\lvert x \rvert < R)$
Алгоритм определения интервала сходимости	1.Найти $\lim_{n\to\infty} \left\lvert \frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)} \right\rvert = l\lvert (x - x_0) \rvert$ или $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\lvert U_n(x) \rvert} = \lvert l(x - x_0) \rvert$ 2.Решить неравенство $\lvert l(x - x_0) \rvert < 1$, получить интервал сходимости $x_0 - R < x < x_0 + R$ 3.Исследовать сходимость ряда на концах полученного интервала (подставить граничные точки в исходный ряд и исследовать на сходимость полученные таким образом числовые ряды).

Разложение функции в степенной ряд

Таблица 6

Ряд Тейлора (по степеням $(x-x_0)$)	$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}\cdot(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots$
Ряд Маклорена (по степеням x)	$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^n(0)}{n!}x^n+\ldots$
Алгоритм разложения функции в степенной ряд.	1. Найти все производные $f(x)$ в точке x_0: $f(x_0), f'(x_0), f''(x_0),\ldots, f^{(n)}(x_0),\ldots$ 2. записать ряд Тейлора для $f(x)$: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n$ 3. Найти интервал сходимости $\lvert x-x_0\rvert<R$ полученного ряда 4. Найти $\lim_{n\to\infty}R_n(x)$, где $R_n(x)=\frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}\cdot(x-x_0)^{n+1}$ - остаточный член формулы Тейлора $(x_0<c<x)$ 5.Если $\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0\ \forall x\in\lvert x-x_0\rvert<R\Rightarrow f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n$

Разложение некоторых элементарных функций в степенной ряд

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\ |x|<\infty$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},\ |x|<\infty$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!},\ |x|<\infty$$

$$arctg\,x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\ |x|<1$$

$$(1+x)^m=1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n+\ldots,|x|<1$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1},-1<x\le 1$$

Практикум

Занятие 1

ЗНАКОПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ. ПРИЗНАКИ СХОДИМОСТИ

Сумма ряда. Сходимость ряда

Ряд – это выражение вида

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ..., \qquad (1)$$

составленное из бесконечного множества слагаемых - чисел $a_1; a_2; a_3; ...; a_n; ...,$ называемых *членами* ряда: a_1 - первый член, a_2 - второй член и т.д.; a_n называют *n*-ым или *общим членом* ряда. Ряд (1) можно сокращенно записать как $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Конечные суммы вида

$$S_1 = a_1,$$
$$S_2 = a_1 + a_2,$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3,$$
……………………..
$$S_{n-1} = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1},$$
$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} + a_n,$$

называются *частичными суммами* ряда (1): S_1 – первая частичная сумма, S_2 - вторая частичная сумма,.., S_n - *n*-ая частичная сумма ряда (1).

Если существует конечный предел последовательности частичных сумм ряда (1) $S = \lim_{n\to\infty} S_n$, то говорят, что этот ряд *сходится*, а число *S* называют суммой ряда (1). При этом можно записать:

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... = S.$$

Если же последовательность частичных сумм ряда не имеет конечного предела, то говорят, что этот ряд *расходится*.

k-ым остаточным рядом ряда (1) называется ряд, который получается из ряда (1) в результате отбрасывания первых *k* его членов:

$$a_{k+1} + a_{k+2} + a_{k+3} + ... + a_n + ... \qquad (2)$$

Основные свойства сходяихся рядов

1. Если ряд (1) сходится, т.е. существует $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, то сходится и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n, \qquad (3)$$

где *c* - любое число, причем сумма ряда (3) равна *cS*.

2. Если сходится ряд (1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и его сумма равна *S*, и сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \qquad (4)$$

и его сумма равна S^*, то сходится и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) \qquad (5)$$

и его сумма равна $S + S^*$.

Задача 1. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=7}^{\infty}\frac{6}{n^2-10n+24}$.

□ Воспользуемся следующими преобразованиями: знаменатель дроби, стоящей под знаком суммы, разложим на простые множители, а затем – разложим дробь на сумму простейших дробей.

$$\sum_{n=7}^{\infty}\frac{6}{n^2-10n+24} = \sum_{n=7}^{\infty}\frac{6}{(n-4)(n-6)} = \left[\begin{array}{l}\text{разложим дробь на сумму}\\ \text{простейших дробей:}\\ \dfrac{6}{(n-4)(n-6)} = \dfrac{A}{n-6}+\dfrac{B}{n-4};\\ 6 = A(n-4)+B(n-6);\\ n=4 \Rightarrow B=-3;\\ n=6 \Rightarrow A=3.\end{array}\right] = 3\sum_{n=7}^{\infty}\left(\frac{1}{n-6}-\frac{1}{n-4}\right).$$

Сумма ряда $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$, где S_n - сумма n первых членов ряда.

$$S_n = 3\cdot\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n-8}-\frac{1}{n-6}\right)+\left(\frac{1}{n-7}-\frac{1}{n-5}\right)+\left(\frac{1}{n-6}-\frac{1}{n-4}\right)\right\} =$$

$$= 3\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n-5}-\frac{1}{n-4}\right).$$

Сумма ряда $S = 3\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n-5}-\frac{1}{n-4}\right) = 3\cdot\frac{3}{2} = \frac{9}{2}.$

■

Задача 2. Исследовать сходимость ряда по определению

$$\frac{2}{5}+\frac{4}{25}+\frac{8}{125}+\ldots$$

□ Если сумма ряда $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n < \infty$, (где S_n - сумма n первых членов ряда), то ряд называется сходящимся.

Заметим, что члены ряда представляют геометрическую прогрессию со знаменателем $q = \frac{2}{5} < 1$, то есть прогрессия – бесконечно убывающая, поэтому для данного ряда мы можем найти не только n-ую частичную сумму ряда по формуле $S_n = \frac{b_1(q^n-1)}{q-1}$, но и вычислить всю сумму бесконечно убывающей прогрессии: $S = \frac{b_1}{1-q}$, что мы сделаем.

$S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{2/5}{1-2/5} = \frac{2}{3} < \infty$, т.е. ряд сходится по определению.

■

Признаки сходимости рядов

1. Необходимый признак сходимости числового ряда

Теорема 1. Если ряд (1) сходится, то его общий член a_n стремится к нулю, т.е. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Следствие. Если общий член a_n ряда (1) не стремится к нулю, то данный ряд расходится.

2. Критерий сходимости ряда

Теорема 2. Для того, чтобы сходился ряд (1) необходимо и достаточно, чтобы сходился его k- ый остаточный ряд (2).

3. Признаки сравнения положительных рядов.

Теорема 3. Пусть даны два ряда с положительными членами:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = c_1 + c_2 + \ldots + c_n + \ldots, \quad c_n \geq 0, \quad \forall n \qquad (6)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n = d_1 + d_2 + \ldots + d_n + \ldots, \quad d_n \geq 0, \quad \forall n \qquad (7)$$

и пусть, начиная с некоторого номера n, выполняется неравенство:

$$c_n \leq d_n, \qquad (8)$$

Тогда:

1) из сходимости ряда (7) следует сходимость ряда (6);

2) из расходимости ряда (6) следует расходимость ряда (7).

Теорема 4 (Предельный признак сравнения). Если для рядов (6) и (7) существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{d_n} = A \quad \left(0 < A < +\infty, \quad d_n \neq 0\right), \qquad (9)$$

то ряды (6) и (7) ведут себя одинаково, т. е. либо сходятся, либо расходятся одновременно.

4. Признаки сходимости положительных рядов

Теорема 5 (*Признак Даламбера*). Пусть задан положительный ряд (6), члены которого отличны от 0, и существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = l \qquad (10)$$

Тогда:

1) Если $l<1$, то ряд (6) сходится;

2) Если $l>1$, то ряд (6) расходится;

3) Если $l=1$, то теорема не дает ответа на вопрос о поведении ряда (6).

Теорема 6 (*признак Коши*). Пусть задан положительный ряд (6) и существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n} = l \qquad (11)$$

Тогда:

1) Если $l < 1$, то ряд (6) сходится;

2) Если $l > 1$, то ряд (6) расходится;

3) Если $l = 1$, то теорема не дает ответ на вопрос о поведении ряда (6).

Теорема 7. (***Интегральный признак Коши***). Пусть члены положительного ряда (6) не возрастают, т.е. $c_1 \ge c_2 \ge \ldots \ge c_n \ge \ldots$, и пусть $f(x)$- функция, заданная на промежутке $[1,+\infty)$, положительная, непрерывная и невозрастающая функция на этом промежутке, такая, что $f(1)=c_1$, $f(2)=c_2$, … , $f(n)=c_n$,

Тогда:

1) Если несобственный интеграл

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx \qquad (12)$$

сходится, то и ряд (6) сходится;

2) Если несобственный интеграл (12) расходится, то расходится и ряд (6).

Задача 3. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\ln\sqrt{n^2+3n}}{\sqrt{n^2-n}}$.

□ При любых достаточно больших значениях n выполняется неравенство ($\ln\sqrt{n^2+3n} \Leftrightarrow \ln(n) > 1$ при $n \ge 3$, $\sqrt{n^2+3n} \Leftrightarrow n$ при $n\to\infty$): $\dfrac{\ln\sqrt{n^2+3n}}{\sqrt{n^2-n}} > \dfrac{1}{n}$.

Ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ является расходящимся (известный гармонический ряд, см. Приложение 3, табл.2), значит по признаку сравнения (теореме 3), расходится и исследуемый ряд.

■

Задача 4. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\underbrace{\left(1-\cos\dfrac{\pi}{n}\right)}_{a_n}$.

□ Применим предельный признак сравнения (теорема 4) - сравним этот ряд с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\underbrace{\dfrac{1}{n^2}}_{b_n}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos\frac{\pi}{n}}{1/n^2}=\left[\begin{array}{l}\text{по таблице эквивалентных}\\ \text{бесконечно малых}\\ (n\to\infty,\dfrac{\pi}{n}\to 0):\\ 1-\cos\dfrac{\pi}{n}\Leftrightarrow\dfrac{\left(\frac{\pi}{n}\right)^2}{2}=\dfrac{\pi^2}{2n^2}\end{array}\right]=\frac{\pi^2}{2}\ne 0,\ \ne\infty.$$

Значит ряды ведут себя одинаково в смысле сходимости.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ - известный обобщенно гармонический (с показателем $p = 2 > 1$, см. Приложение 3, табл.2) сходящийся ряд, значит, сходится и исследуемый ряд.

■

Задача 5. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4^n}{n!}$.

□ Воспользуемся признаком Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{4^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{4^n}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4\cdot 4^n n!}{4^n (n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{4\cdot 4^n n!}{4^n n!(n+1)}=4\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0<1.$$

Таким образом, ряд сходится по признаку Даламбера.

■

Задача 6. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 7\left(\frac{n-2}{2n+1}\right)^{3n}$.

□ Воспользуемся радикальным признаком Коши

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{7\left(\frac{n-2}{2n+1}\right)^{3n}}=\lim_{n\to\infty}7^{\frac{1}{n}}\left(\frac{n-2}{2n+1}\right)^{3}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-\frac{2}{n}}{2+\frac{1}{n}}\right)^{3}=\frac{1}{8}<1.$$

Значит, ряд сходится.

■

Задача 7. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$.

□ Так как $\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e\neq 0$ (второй замечательный предел), то в силу следствия из необходимого признака сходимости ряда (теорема 1) получаем, что данный ряд расходится.

■

Задача 8. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$.

□ Применим к данному ряду интегральный признак Коши. Имеем:

$$\frac{1}{n\sqrt{\ln n}}>\frac{1}{(n+1)\sqrt{\ln(n+1)}}\quad \forall n\geq 2,$$

что означает, что члены данного ряда убывают. В качестве функции $f(x)$ возьмем функцию $f(x)=\frac{1}{x\sqrt{\ln x}}$, $x\geq 2$. Эта функция положительная, непрерывная и убывает в области определения, причем $f(n)=\frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$. Рассмотрим несобственный интеграл

$$\int_2^{\infty}\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}=\lim_{b\to\infty}\int_2^{b}\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}=\lim_{b\to\infty}2\sqrt{\ln x}\Big|_2^b=\infty$$

Следовательно, несобственный интеграл расходится. Тогда в силу интегрального признака Коши расходится и данный ряд.

■

Задачи для самостоятельного решения

1.Исследовать ряды на сходимость по определению сходящегося ряда:

а) $\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+...$ б) $\frac{4}{3}+\frac{16}{9}+\frac{64}{27}+...$

2. Выяснить сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}$.3. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{4n-5}$.

4. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n}$. 5. Выяснить сходимость ряда $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{3n\ln n}$.

6. Выяснить сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$. 7. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-2}{2n^2+1}$.

Ответы:

1. а) $S=\frac{1}{2}<\infty$, т.е ряд сходится;   б) $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{4}{3}\left(\left(\frac{4}{3}\right)^n-1\right)}{\frac{4}{3}-1}=\infty$, т.е. ряд расходится.

2. сходится (признак Даламбера);
3. расходится (предельный признак сравнения);
4. сходится (предельный признак сравнения)
5. расходится (интегральный признак Коши);
6. сходится (признак Коши)
7. расходится (необходимый признак)

Занятие 2

ЗНАКОПЕРЕМЕННЫЕ РЯДЫ. АБСОЛЮТНАЯ И УСЛОВНАЯ СХОДИМОСТЬ

Ряд (13) называется *знакопеременным*, если среди его членов имеются как положительные, так и отрицательные члены.

Теорема 1 (достаточный признак сходимости знакопеременного ряда) Пусть задан знакопеременный ряд

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots \tag{13}$$

Если ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда

$$|a_1| + |a_2| + |a_3| + \ldots + |a_n| + \ldots \tag{14}$$

сходится, то сходится и данный ряд (13).

Ряд (13) называется *абсолютно сходящимся,* если сходится ряд (14), составленный из абсолютных величин членов ряда (13). Если же знакопеременный ряд (13) сходится, а ряд (14) расходится, то ряд (13) называется *условно* или *неабсолютно сходящимся*.

Ряд вида

$$a_1 - a_2 + a_3 - \ldots + (-1)^{n+1} a_n + \ldots, \tag{15}$$

где $a_n \geq 0,\ \forall n$, называется *знакочередующимся.*

Теорема 2 (*признак Лейбница*) Знакочередующийся ряд (15) сходится, если абсолютные величины его членов не возрастают, а общий член стремится к нулю, т.е. если выполняются следующие два условия:

1) $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n \ldots$ (16)

2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ (17)

Замечание 1. При решении задач на исследование сходимости ряда полезно знать особенности поведения следующих рядов (см. Приложение 3, таблица 2):

1. Ряд, составленный из членов геометрической прогрессии $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^n$: сходится при $|q| < 1$ и расходится при $|q| \geq 1$, q – знаменатель прогрессии;

2. Обобщенный гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$: сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leq 1$. В частном случае ($\alpha = 1$) получаем гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, который расходится.

Замечание 2. Если ряд (15) удовлетворяет условиям признака Лейбница, то ошибка (погрешность), совершаемая при замене S на S_n, не превосходит по абсолютной величине первого из отброшенных членов. Это свойство используется для приближенных вычислений.

Задача 1. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin\left(n\sqrt{n}\right)}{n\sqrt{n}}$.

□ Рассмотрим ряд из модулей $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\left|\sin\left(n\sqrt{n}\right)\right|}{n\sqrt{n}}$.

При любых значениях n (в силу ограниченности функции $y = \sin x$) выполняется неравенство $\dfrac{\sin(n\sqrt{n})}{n\sqrt{n}} \le \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$. (*)

Воспользуемся для исследования его сходимости интегральным признаком Коши:

$\int\limits_1^{\infty} \dfrac{dx}{\sqrt{x^3}} = \lim\limits_{D\to\infty} \int\limits_1^{D} \dfrac{dx}{\sqrt{x^3}} = -2 \lim\limits_{D\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} \Big|_1^D = -2 \lim\limits_{D\to\infty} \left(\dfrac{1}{\sqrt{D}} - 1 \right) = 2 < \infty$, т.е. несобственный интеграл сходится.

Тогда и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n\sqrt{n}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{1,5}}$ сходится (второй способ доказательства сходимости ряда (*) заключается в том, что он является обобщенно гармоническим с показателем $p = 1,5 > 1$, см. Приложение 3, таблица 2).

Теперь применим признак сравнения к ряду из модулей и (*), получим, что ряд из модулей тоже сходится, а значит исходный знакопеременный ряд сходится абсолютно.

■

Задача 2. Вычислить сумму ряда с точностью α : $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{(2n)^3}$, $\alpha = 0,001$.

□ Сумма ряда: $S = S_n + R_n$, где R_n – остаток ряда. По условию задачи $R_n < 0,001$. Для знакопеременных рядов остаток ряда по модулю меньше первого отброшенного слагаемого.

$|R_n| < \dfrac{1}{(2n+2)^3} < 0,001.$

Последнее неравенство выполняется при $n \ge 5$, значит достаточно оставить первые пять членов ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)^3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{64} + \frac{1}{216} - \frac{1}{512} + \frac{1}{1000} \approx 0,488.$$

■

Задача 3. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{1}{2n-1}$.

□ Данный ряд является знакочередующимся. Ряд, составленный из абсолютных величин $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2n-1}$ эквивалентен в смысле сходимости ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ (т.е. применяя предельный признак сходимости, будем иметь $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1/(2n-1)}{1/n} = 1$). Последний ряд расходится, следовательно, расходится и ряд, составленный из абсолютных величин исходного ряда. Таким образом, если исходный ряд и сходится, то только условно.

Для исследования исходного ряда на условную сходимость применим к нему признак Лейбница. Имеем:

1) $a_n = \dfrac{1}{2n-1}$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{2n+1}$ и очевидно, что $\dfrac{1}{2n-1} > \dfrac{1}{2n+1} \quad \forall n$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2n-1} = 0$

Следовательно, условия признака Лейбница выполнены. Таким образом, исходный ряд сходится условно.

■

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ. ИНТЕРВАЛ СХОДИМОСТИ

Ряд, члены которого являются функциями переменной *x*, т.е. ряд вида

$a_1(x)+a_2(x)+a_3(x)+...+a_n(x)+...$

называется *функциональным* рядом.

Степенной ряд – это функциональный ряд вида

$$c_0+c_1\left(x-x_0\right)+c_2\left(x-x_0\right)^2+...+c_n\left(x-x_0\right)^n+...=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\left(x-x_0\right)^n \quad , \qquad (18)$$

где $c_0, c_1, c_2, ..., c_n, ...$ - числа, называемые *коэффициентами* степенного ряда. Говорят, что степенной ряд (18) сходится в точке x^*, если сходится числовой ряд

$$c_0+c_1\left(x^*-x_0\right)+c_2\left(x^*-x_0\right)^2+...+c_n\left(x^*-x_0\right)^n+...;$$

при этом x^* называют *точкой сходимости* ряда (18), а совокупность всех точек сходимости называют *областью сходимости* данного ряда.

Теорема 3 (***об области сходимости степенного ряда***). Если для степенного ряда (18) с коэффициентами $c_n \neq 0, \forall n$, существует $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\frac{1}{R}$, то:

ряд (18) сходится во всех точках *x*, для которых $|x-x_0|<R$;

ряд (18) расходится во всех точках *x*, для которых $|x-x_0|>R$;

в точках *x*, для которых $|x-x_0|=R$, теорема не дает ответ на вопрос о сходимости ряда (18).

Число $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$ называют *радиусом сходимости*, а интервал $|x-x_0|<R$-*интервалом сходимости* степенного ряда (18).

Замечание 1. В области сходимости по отношению к степенным рядам справедливы все правила действий с многочленами. В частности, их можно почленно складывать, умножать на число, дифференцировать, интегрировать.

Замечание 2. (**Частные случаи области сходимости):** а) $R=0$, в этом случае область сходимости состоит из одной точки $x=x_0$; б) $R=\infty$, в этом случае область сходимости – вся числовая ось: $x\in(-\infty;\infty)$.

Алгоритм нахождения области сходимости степенного ряда

1.Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)}\right|=l\left|(x-x_0)\right|$ или $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|U_n(x)\right|}=\left|l(x-x_0)\right|$

2.Решить неравенство $\left|l(x-x_0)\right|<1$, получить интервал сходимости $x_0-R<x<x_0+R$.

3.Исследовать сходимость ряда на концах полученного интервала (подставить граничные точки в исходный ряд и исследовать на сходимость полученные таким образом числовые ряды).

Задача 4. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$.

□ Сначала найдем радиус сходимости данного ряда:

$$R=\lim_{n\to\infty}|\frac{c_n}{c_{n+1}}|=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$$.

Следовательно, по теореме 3, для всех *x,* удовлетворяющих условию $|x|<1$, или $-1<x<1$, данный ряд сходится; а для всех *x*, удовлетворяющих условию $|x|>1$, или $x\in(-\infty;-1)\cup(1;\infty)$, данный ряд расходится. Исследуем сходимость нашего ряда при *x* = -1 и *x*=1.

а). Рассмотрим точку *x* = -1 и подставим значение *x* = -1 в выражение данного ряда. Получим числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$$.

Этот ряд является знакочередующимся, удовлетворяющим условиям признака Лейбница. Следовательно, он сходится, а потому сходится и данный ряд при *x* = -1.

б). Рассмотрим точку *x* = 1 и подставим значение *x* = 1 в выражение данного ряда. Получим числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$.

Это - гармонический ряд. Он расходится, а потому расходится и данный ряд при *x* = 1.

Таким образом, областью сходимости данного степенного ряда является промежуток $x\in[-1,1)$.

■

Задача 5. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^{\ln(1+x)}}$.

□ Данный ряд – знакочередующийся, он сходится абсолютно, если $\ln(1+x)>1$ (в этом случае соответствующий знакоположительный ряд является обобщенно гармоническим с показателем $p>1$).

Следовательно, интервал сходимости: $1+x>e\Rightarrow x>e-1$. Выясним его сходимость при $x=e-1$: после подстановки, получим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$, который сходится условно.

Таким образом, бласть сходимости $x\in[e-1;+\infty)$.

■

Задача 6. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(x+4)^n}{(n+1)!}$

□ По признаку Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1+1}(x+4)^{n+1}\cdot(n+1)!}{((n+1)+1)!\cdot(-1)^{n+1}(x+4)^n}\right|=|(x+4)|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0<1,\ \forall x$$.

Таким образом, радиус сходимости ряда $R=\infty$, значит область сходимости – вся числовая ось: $x\in(-\infty;\infty)$.

■

Задача 7. Найти радиус сходимости и область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(x-2)^n\cdot n^n$.

□ По признаку Коши

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|U_n(x)|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|(-1)^{n+1}(x-2)^n\cdot n^n\right|}=|(x-2)|\lim_{n\to\infty}n=\infty>1,\ \ \forall x.$$

Получили, что радиус сходимости данного ряда $R=0$, а область сходимости состоит из одной точки $x=2$.

■

Задача 8. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n+3}}{n(n+1)}$.

□ Выполним преобразования и введем обозначение суммы ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+3}}{n(n+1)}=x^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}=x^2S(x).$$

Согласно свойствам сходящихся степенных рядов, их можно почленно дифференцировать и интегрировать. Заметим, что после двукратного дифференцирования, исходный ряд будет представлять собой геометрическую прогрессию с известной суммой, если прогрессия - убывающая (при $|x|<1$, - знаменатель прогрессии)

$$\frac{dS}{dx}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n};$$

$$\frac{d^2S}{dx^2}=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{1-x}=\frac{1}{1-x}\ \ (\text{сходится при } |x|<1).$$

Теперь обратно, проинтегрировав сумму ряда и сам ряд дважды, получим сумму данного ряда $S(x)$:

$$\frac{dS}{dx}=\int\frac{dx}{1-x}=-\ln(1-x).$$

$$S(x)=-\int\ln(1-x).dx=-\left(x\ln|1-x|+\int\frac{x}{1-x}dx\right)=-x\ln(1-x)+\int\left(1-\frac{1}{1-x}\right)dx=$$

$$=-x\ln|1-x|+x+\ln|1-x|=x+(1-x)\ln|1-x|.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+3}}{n(n+1)}=x^3+(x^2-x^3)\ln(1-x)\qquad(|x|<1).$$

■

Задачи для самостоятельного решения

1.Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряды:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}n}{6n-5}$. б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{4^n(n^2+2)}$. в) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(2n-3)}{\sqrt{n^3-4n+8}}$.

2. Вычислить сумму ряда с точностью α : $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n!}$, $\alpha=0{,}001$.

3. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+5)^n}{3^n}$.

4. Найти радиус сходимости и область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-1)^n\cdot n!}{(n+3)^2}$.

5. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} 4^{\frac{n}{x-2}}$.

6. Найти сумму ряда $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^{6n}$.

Ответы

1. а) расходится; б) сходится абсолютно; в) сходится условно.
2. 0,632.
3. $x \in (-8;-2)$
4. $R = 0$, а область сходимости - одна точка $x = 1$.
5. $x \in (-\infty;2)$.
6. Указание: Преобразовать данный ряд к виду $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^{6n} = x^{-5} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^{6n+5} = x^{-5} S(x)$. Затем один раз проинтегрировать, найти сумму полученного ряда (геометрическая прогрессия со знаменателем $q = x^6$), затем продифференцировать. Ответ: $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^{6n} = \frac{1}{(1-x^6)^2} \left(|x| < 1\right)$.

Занятие 3

ПРИЛОЖЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ РЯДОВ

Рядом Тейлора для данной функции $f(x)$ в окрестности точки x_0 называется степенной ряд, коэффициенты которого определяются формулой:

$$c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \quad n=0,\ 1,\ \ldots$$

Таким образом, ряд Тейлора – это ряд вида:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \qquad (19)$$

В частном случае, если $x_0=0$, ряд Тейлора (19) называют *рядом Маклорена.*

Теорема 1 (*критерий представимости функции рядом Тейлора*). Для того, чтобы функцию $f(x)$ можно было представить в окрестности точки x_0 рядом Тейлора:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,$$

необходимо и достаточно, чтобы *остаточный член формулы Тейлора*

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \quad \xi \in (x, x_0)$$

стремился к нулю при $n \to \infty$, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0. \qquad (20)$$

Замечание. Если в некотором интервале, содержащем точку x_0, при любом n выполняется неравненство

$$\left| f^{(n)}(x) \right| < M, \qquad (*)$$

где M – положительная постоянная, то условие (20) выполняется и функция $f(x)$ разложима в ряд Тейлора.

Алгоритм разложения функции в ряд Тейлора

1. Найти все производные $f(x)$ в точке x_0: $f(x_0),\ f'(x_0),\ f''(x_0), \ldots, f^{(n)}(x_0), \ldots$
2. Записать «формальный» (пока не доказана его сходимость на некотором промежутке) ряд Тейлора для $f(x)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

3. Найти интервал сходимости $|x-x_0| < R$ полученного ряда.
4. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)$, где $R_n(x) = \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}\cdot(x-x_0)^{n+1}$ - остаточный член формулы Тейлора $(x_0 < c < x)$ или проверить условие (*).

5.Если условие (20) или (*) выполняется, то функция $f(x)$ разложима в ряд Тейлора:

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0 \ \forall x \in \left|x - x_0\right| < R \Rightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n.$$

Замечание. При решении многих задач рекомендуется пользоваться следующими разложениями:

1) $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}, \quad \forall x \in (-\infty, \infty)$; (21)

2) $\cos x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad \forall x \in (-\infty, \infty)$; (22)

3) $\sin x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \forall x \in (-\infty, \infty)$; (23)

4) $\ln(1+x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{n+1}}{n+1}, \quad \forall x \in (-1, 1]$; (24)

5) $arctgx = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad \forall x \in (-1, 1)$; (25)

6) $(1+x)^{\mu} = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n+1)x^n}{n!}, \quad \forall x \in (-1, 1)$ (26)

Покажем, как можно получить разложение функций в ряд Тейлора.

Задача 1. Разложить в ряд Маклорена элементарные функции $y = e^x$, и $y = \arcsin x$.

1). □ а. Найдем все производные $f(x) = e^x$ в точке $x_0 = 0$:

$f(x_0) = f(0) = e^0 = 1,$

$f'(x) = e^x, \ f'(x_0) = f'(0) = e^0 = 1,$

$f''(x) = e^x, \ f''(x_0) = f''(0) = e^0 = 1, ...,$

$f^{(n)}(x) = e^x, \ f^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(0) = e^0 = 1, ...$

б. Запишем «формальный» (пока не доказана его сходимость на некотором промежутке) ряд Тейлора для $f(x)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x - 0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot x^n.$$

в. Найдем интервал сходимости полученного ряда.

По признаку Даламбера

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1} \cdot n!}{(n+1)! \cdot x^n} \right| = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1, \ \forall x$$

Таким образом, интервал сходимости ряда $|x| < \infty$

г. Найдем $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)$, где $R_n(x) = \dfrac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}$ - остаточный член формулы Тейлора

$(x_0 < c < x)$, $x_0 = 0$, x - из окрестности нуля:

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^c}{(n+1)!} \cdot x^{n+1} = 0$$

(Очевидно также, что условие (*) также выполнено: для любой точки x из окрестности нуля и для любого n верно, что

$\left|f^{(n)}(x)\right| = \left|e^x\right| < e,\ \forall x \in (-\varepsilon, \varepsilon),\ \varepsilon$ близко к нулю.

Условие (20) теоремы 1 (критерия разложимости функции в ряд Тейлора) выполнены, значит,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \forall x \in (-\infty, \infty)$$

■

2). □ Разложение $f(x) = \arcsin x$ в точке $x_0 = 0$ получим другим способом – с помощью известного разложения в биномиальный ряд функции

$$(1+x)^{\mu} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n+1)x^n}{n!}, \quad \forall x \in (-1,1)$$

и свойства равномерно сходящихся рядов о почленном интегрировании.

Запишем известное равенство: $\arcsin x = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, разложим подынтегральную функцию в степенной ряд и проинтегрируем почленно.

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1+(-x^2))^{-1/2} = 1 + \frac{-1/2}{1!}(-x^2) + \frac{-1/2(-1/2-1)}{2!}(-x^2)^2 + \frac{-1/2(-1/2-1)(-1/2-2)}{3!}(-x^2)^3 +$$

$$+\frac{-1/2(-1/2-1)(-1/2-2)(-1/2-3)}{4!}(-x^2)^4 + \ldots = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2^2\cdot 2!}x^4 + \frac{3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}x^6 + \frac{3\cdot 5\cdot 7}{2^4\cdot 4!}x^8 + \ldots.$$

Область сходимости: $|x| < 1$.

$$\arcsin x = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int (1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2^2\cdot 2!}x^4 + \frac{3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}x^6 + \frac{3\cdot 5\cdot 7}{2^4\cdot 4!}x^8 + \ldots)dx =$$

$$x + \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{3x^5}{2^2\cdot 5\cdot 2!} + \frac{3\cdot 5x^7}{2^3\cdot 7\cdot 3!} + \frac{3\cdot 5\cdot 7x^9}{2^4\cdot 9\cdot 4!} + \ldots, \quad x \in (-1, 1).$$

■

Задача 2. Разложить функцию $y = \cos x$ в ряд Тейлора по степеням (x+1).

□ Воспользуемся алгоритмом. Найдем производные данной функции, по возможности, уловив закономерность, и значения производных в точке x_0=-1:

$$f(x_0) = f(-1) = \cos(-1) = \cos 1,$$
$$f'(x) = -\sin x,\ f'(x_0) = f'(-1) = -\sin(-1) = \sin 1,$$
$$f''(x) = -\cos x,\ f''(x_0) = f''(-1) = -\cos(-1) = -\cos 1,$$
$$f'''(x) = \sin x,\ f'''(x_0) = f'''(-1) = \sin(-1) = -\sin 1, \ldots,$$
$$f^{(2n)}(x) = (-1)^n \cos x,\ f^{(2n)}(x_0) = f^{(2n)}(-1) = (-1)^n \cos 1, \ldots.$$
$$f^{(2n+1)}(x) = (-1)^n \sin x,\ f^{(2n+1)}(x_0) = f^{(2n+1)}(-1) = (-1)^n \sin 1, \ldots.$$

Запишем «формальный» (пока не доказана его сходимость на некотором промежутке) ряд Тейлора для $f(x)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(-1)}{n!}(x+1)^n = \cos 1 + \frac{\sin 1}{1!}(x+1) - \frac{\cos 1}{2!}(x+1)^2 - \ldots$$

Предлагаем читателю найти интервал сходимости полученного ряда по признаку Даламбера, с учетом ограниченности тригонометрических функций, записанных выше.

Таким образом, интервал сходимости ряда $|x| < \infty$

Нетрудно доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0,$ исходя из условия (*), что в окрестности точки $x_0 = -1$:

$\exists M = 1,$ такое что $\forall n \ (\left|f^{(n)}(x)\right| < M)$.

Условие (20) теоремы 1 (критерия разложимости функции в ряд Тейлора) выполнены, значит, в окрестности точки $x_0 = -1$ функция $y = \cos x$ раскладывается в ряд Тейлора:

$$cosx = \cos 1 + \frac{\sin 1}{1!}(x+1) - \frac{\cos 1}{2!}(x+1)^2 - \frac{\sin 1}{3!}(x+1)^3 + \frac{\cos 1}{4!}(x+1)^4 + \ldots$$

■

Задача 3. Разложить функцию $y = \dfrac{1}{x}$ в ряд Тейлора по степеням (x-2).

□ Воспользуемся равенством $\dfrac{1}{x} = \dfrac{1/2}{1 + \dfrac{x-2}{2}}$.

Правую часть последнего равенства можно рассматривать как сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом $b_1 = \dfrac{1}{2}$ и знаменателем $q = -\dfrac{x-2}{2}$. Тогда

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{x-2}{2} + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x-2}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x-2}{2}\right)^3 + \ldots = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\cdot(x-2) + \frac{1}{8}\cdot(x-2)^2 - \frac{1}{16}\cdot(x-2)^3 + \ldots$$

с областью сходимости $|q| = \left|\dfrac{x-2}{2}\right| < 1,$ т.е. $0 < x < 4$.

■

Задача 4. Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням x: $\sqrt[4]{16 - 5x} = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{5}{16}x\right)^{\frac{1}{4}}$.

□ Воспользуемся известным разложением.

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots$$

Тогда

$$\left(1 - \frac{5}{16}x\right)^{\frac{1}{4}} = 1 + \frac{1}{4}\left(\frac{5}{16}x\right) + \frac{\left(-3/16\right)}{2!}\left(\frac{5}{16}x\right)^2 + \frac{21/64}{3!}\left(\frac{5}{16}x\right)^3 + \ldots = 1 + \frac{5}{64}x - \frac{75}{8192}x^2 + \frac{875}{2^{19}}x^3 + \ldots$$

$$\sqrt[4]{16 - 5x} = \frac{1}{2} + \frac{5}{2^7}x - \frac{75}{2^{14}}x^2 + \frac{875}{2^{20}}x^3 + \ldots$$

Область сходимости: $\left|\dfrac{5}{16}x\right| < 1,$ или $|x| < \dfrac{16}{5}$.

■

Покажем применение степенных рядов для приближенных вычислений значений элементарных функций.

Замечание. Для вычисления приближенного значения функции $f(x)$ в её разложении в степенной ряд сохраняют первые n членов (n – конечное число), а остальные члены ряда отбрасывают. Для оценки погрешности найденного приближенного значения необходимо оценить бесконечную сумму отброшенных слагаемых. Если ряд знакоположительный, то ряд, составленный из отброшенных членов, сравнивают с бесконечно убывающей геометрической прогрессией. В случае знакопеременного ряда, удовлетворяющего признаку Лейбница, используется оценка:

$|R_n| < u_{n+1}$,

где u_{n+1} – первый из отброшенных членов ряда.

Задача 5. Вычислить приближенно $\sqrt[3]{130}$ с точностью до 0,001.

□ Выполним предварительно преобразования

$$\sqrt[3]{130} = \sqrt[3]{5^3+5} = 5\sqrt[3]{1+\frac{1}{25}} = 5(1+0{,}04)^{\frac{1}{3}}.$$

С помощью биномиального ряда получаем разложение:

$$\sqrt[3]{130} = 5(1+0{,}04)^{\frac{1}{3}} = 5\left[1+\frac{1}{3}\cdot 0{,}04+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}\cdot 0{,}04^2+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{3!}\cdot 0{,}04^3+\ldots\right]=$$

$$=5\left[1+\frac{1}{3}\cdot 0{,}04-\frac{1}{9}\cdot 0{,}008+\frac{1}{81}\cdot 0{,}00032-\ldots\right].$$

Четвертое слагаемое меньше 0,001, поэтому его и следующие за ним слагаемые можно отбросить. Окончательно,

$$\sqrt[3]{130} \approx 5+0{,}0667-0{,}0009 = 5{,}066.$$

■

Задача 6. Вычислить приближенно $\ln 1{,}06$ с точностью до 0,0001.

□ Воспользуемся разложением $\ln(1+x)$ в ряд.

$$\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots,\quad |x|<1.$$

$$\ln 1{,}06 = \ln(1+0{,}06) = 0{,}06-\frac{0{,}06^2}{2}+\frac{0{,}06^3}{3}-\frac{0{,}06^4}{4}+\ldots = 0{,}06-0{,}0018+0{,}000072-\ldots \approx 0{,}0583.$$

■

Покажем применение степенных рядов для приближенного вычисления значений определенного интеграла от элементарных функций.

Задача 7. Вычислить интеграл $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$ с точностью до 0,001.

□ Воспользуемся разложением (23). Выполнив почленное деление, получим

$$\frac{\sin x}{x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}.$$

Следовательно,

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\int_0^1 x^{2n}dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!(2n+1)} = 1 - \frac{1}{3!\cdot 3} + \frac{1}{5!\cdot 5} - \frac{1}{7!\cdot 7} + \ldots.$$

Вычислим несколько последовательных первых членов полученного знакочередующегося ряда (с одним лишним знаком после запятой):

$$a_1 = 1{,}0000; \quad a_2 \approx 0{,}0555; \quad a_3 \approx 0{,}0016; \quad a_4 \approx 0{,}0000; \ldots$$

Согласно свойству знакочередующегося сходящегося ряда, ошибка вычислений, совершаемая при отбрасывании членов ряда, не превосходит по абсолютной величине первого из отброшенных членов. Следовательно, для вычисления данного интеграла с точностью 0,001 достаточно взять сумму трех первых членов ряда. Таким образом, получаем

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx \approx 0{,}946$$
.

■

Еще одно применение степенных рядов – нахождение решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Алгоритм решения дифференциальных уравнений с помощью рядов

Записать искомое решение в виде ряда

$$y(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \ldots.$$

Найти $y(x_0),\ y'(x_0),\ y''(x_0), \ldots, y^{(n)}(x_0), \ldots.$

Подставить в степенной ряд полученные числовые коэффициенты и записать искомое частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданному начальному условию.

Задача 8. Найти первые два отличные от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего начальным условиям:

$$y'' + 2x^2 y = x, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

□ Так как $y(0) = y'(0) = 0,$ выразим $y''(0)$ и последующие производные.

$$y''(x) = x - 2x^2 y, \quad y''(0) = 0,$$

$$y'''(x) = (x - 2x^2 y)' = 1 - 2(2xy + x^2 y'), \quad y'''(0) = 1,$$

$$y^{IV}(x) = -4y - 8xy' - 2x^2 y'', \quad y^{IV}(0) = 0,$$

$$y^{V}(x) = -12y' - 12xy'' - 2x^2 y''', \quad y^{V}(0) = 0,$$

$$y^{VI}(x) = -24y'' - 16xy''' + 2x^2 y^{IV}, \quad y^{VI}(0) = 0,$$

$$y^{VII}(x) = -40y''' - 12xy^{IV} + 2x^2 y^{V}, \quad y^{VII}(0) = -40.$$

Таким образом, два отличных от нуля коэффициента ряда Тейлора найдены, и решение данного дифференциального уравнения можем записать в виде:

$$y(x) = \frac{1}{3!}x^3 - \frac{40}{7!}x^7 + \ldots.$$

■

Задачи для самостоятельного решения

Разложить в ряд Тейлора функцию $f(x)=x^4-x^3+4x-2$ по степеням $(x-1)$

Разложить в ряд Тейлора функцию $f(x)=\cos^2 x$ по степеням x.

Вычислить приближенно с точностью до 0,00001 значение $\frac{1}{\sqrt[5]{e}}$.

Вычислить приближенно с точностью до 0,0001 значение $\cos 18^0$.

Вычислить интеграл $\int\limits_0^{0,2}\frac{1-e^{-x}}{x}dx$ с точностью до 0,001.

Вычислить интеграл $\int\limits_0^{0,5}x\ln(1+x^2)dx$ с точностью до 0,001.

Найти первые четыре члена разложения в ряд решения дифференциального уравнения $y'=xy+y^2$, удовлетворяющего начальному условию $y(0)=1$.

Ответы

$$f(x)=2+\frac{5}{1!}(x-1)+\frac{6}{2!}(x-1)^2+\frac{24}{3!}(x-1)^3+\frac{24}{4!}(x-1)^4+0+0+\dots$$

$$\cos^2 x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^4}{4!}-\frac{(2x)^6}{6!}+\dots\right)=\frac{3}{2}-\frac{2}{2!}x^2+\frac{2^3}{4!}x^4-\dots,\ |x|<\infty.$$

0,81873.

0,9511.

0,190.

0,015.

$$y(x)=1+x+\frac{3}{2}x^2+\frac{5}{3}x^3+\dots.$$

Занятие 4

РЯДЫ ФУРЬЕ

Функциональный ряд вида

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)$$

называется *тригонометрическим* рядом. Постоянные числа a_0, a_n и b_n (n=1,2,...) называются *коэффициентами* тригонометрического ряда.

Рядом Фурье для функции $f(x)$ на промежутке $[-\pi,\pi]$ называется тригонометрический ряд:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos kx+b_k\sin kx\right), \qquad (27)$$

коэффициенты которого определяются формулами:

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x\right)\cos kxdx,\quad k=0,1,2,...,$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x\right)\sin kxdx,\quad k=1,2,3,.... \qquad (28)$$

В общем случае, *рядом Фурье* для функции $f(x)$ на промежутке $[a,a+T]$ называется тригонометрический ряд:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{2k\pi}{T}x+b_k\sin\frac{2k\pi}{T}x\right), \qquad (29)$$

коэффициенты которого определяются формулами:

$$a_k=\frac{2}{T}\int_{a}^{a+T}f\left(x\right)\cos\frac{2k\pi}{T}xdx,\quad k=0,1,2,...,$$

$$b_k=\frac{2}{T}\int_{a}^{a+T}f\left(x\right)\sin\frac{2k\pi}{T}xdx,\quad k=1,2,3,.... \qquad (30)$$

Функция $f(x)$ называется *кусочно-монотонной* на промежутке $[a,a+T]$, если она имеет на данном промежутке конечное число участков монотонности.

Функция $f(x)$ называется *кусочно-непрерывной* на промежутке $[a,a+T]$, она имеет на данном промежутке конечное число точек разрыва и все они 1-го рода.

Теорема Дирихле (*достаточный признак представимости функции рядом Фурье*). Если функция $f(x)$ кусочно-монотонна и кусочно-непрерывна на промежутке $[a,a+T]$, то для $\forall x\in\left[a,a+T\right]$ ряд Фурье (29), составленный для функции $f(x)$ на $[a,a+T]$, сходится, причем:

в точках непрерывности функции $f(x)$ сумма $S(x)$ ряда Фурье равна значению функции в точке x: $S(x) = f(x)$;

в точках разрыва функции $f(x)$ сумма $S(x)$ ряда Фурье вычисляется по формуле:

$$S\left(x\right)=\frac{f\left(x-\right)+f\left(x+\right)}{2},$$

где $f(x-)$ и $f(x+)$ – это соответственно левосторонний и правосторонний пределы функции $f(x)$ в точке x;

на концах промежутка $[a,a+T]$ сумма $S(x)$ ряда Фурье вычисляется по формуле:

$$S(a)=S(a+T)=\frac{f(a-)+f((a+T)+)}{2}$$

Задача 1. Разложить функцию $f(x)=\dfrac{x}{2}$ в ряд Фурье на промежутке $[0,2\pi]$.

□ В нашем случае $a=0,\quad T=2\pi$. Находим коэффициенты ряда Фурье по формулам (30):

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{x}{2}dx=\left(\frac{x^2}{4\pi}\right)\Bigg|_0^{2\pi}=\pi,$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{x}{2}\cos kx dx=\frac{1}{2\pi}\left[\left(\frac{x}{k}\sin kx\right)\Bigg|_0^{2\pi}-\frac{1}{k}\int_0^{2\pi}\sin kx dx\right]=\frac{1}{2\pi k^2}(\cos kx)\Big|_0^{2\pi}=0,$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{x}{2}\sin kx dx=\frac{1}{2\pi}\left[\left(-\frac{x}{k}\cos kx\right)\Bigg|_0^{2\pi}+\frac{1}{k}\int_0^{2\pi}\cos kx dx\right]=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{-2\pi\cos 2k\pi}{k}\right)=-\frac{1}{k}.$$

Подставляя значения коэффициентов a_0, a_k, b_k, k=1,2,3,… в (29), получим разложение данной функции $f(x)=\dfrac{x}{2}$ в ряд Фурье на промежутке $[0,2\pi]$:

$$\frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k}.$$

Поскольку заданная функция (линейная) непрерывна и монотонна на $[0,2\pi]$, то это разложение справедливо $\forall x: 0<x<2\pi$. На концах промежутка, т.е. в точках $x=0$ и $x=2\pi$, сумма полученного ряда равна $\dfrac{\pi}{2}$.

Задача 2. Найти ряд Фурье для чётной функции:

$$f(x)=3-|x|,\quad -3\le x\le 3.$$

□ Нарисуем график функции на данном отрезке и продолжим периодически с полупериодом T=3.

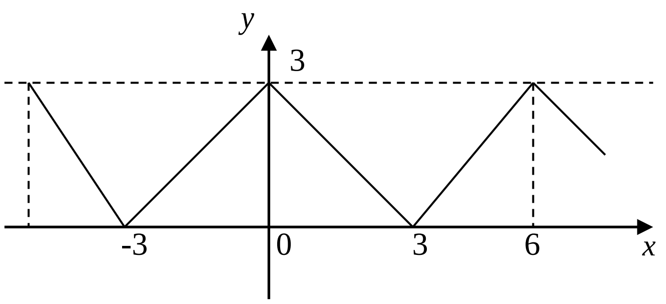

Рис. 10

Функция чётная, поэтому $b_n=0$.

Найдём остальные коэффициенты ряда, учитывая, что при $x\ge 0,\quad f(x)=3-x.$

$$a_0 = \frac{2}{3}\int_0^3 (3-x)\,dx = \frac{2}{3}\cdot(3x - \frac{x^2}{2})\Big|_0^3 = \frac{2}{3}(9-\frac{9}{2}) = 3.$$

$$a_n = \frac{2}{3}\int_0^3 (3-x)\cos\frac{n\pi x}{3}\,dx = \begin{bmatrix} (3-x)=u, & \cos\frac{n\pi x}{3}dx = dv, \\ du = -dx. & v = \frac{3}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{2}{3}\left((3-x)\frac{3}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}\Big|_0^3 - \int_0^3 \frac{3}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}(-dx)\right) = \frac{2}{3}\left(-\frac{9}{(n\pi)^2}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^3\right) =$$

$$= -\frac{6}{(n\pi)^2}(\,(-1)^n - 1) = \frac{6\cdot(1-(-1)^n)}{(n\pi)^2}.$$

Тогда получаем:

$$3 - |\,x\,| = \frac{3}{2} + \sum_{n=1} \frac{6\cdot(1-(-1)^n)}{(n\pi)^2}\cos\frac{n\pi x}{3}.$$

■

Задача 3.

Разложить функцию $f(x) = x^2, \quad x \in [0,1)$ в ряд Фурье по синусам (т.е. нечетным образом).

□ Нарисуем график на зданном промежутке [0; 1] и дополним график функции нечётным образом.

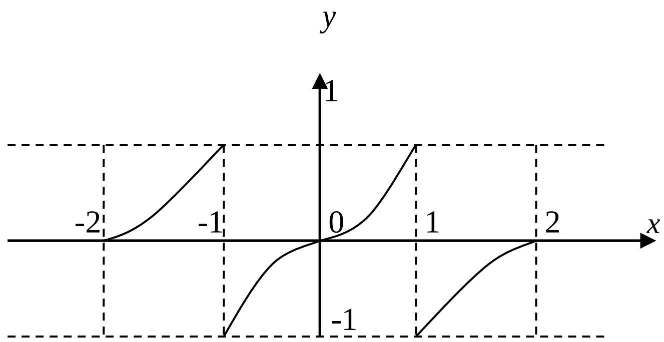

Рис. 11

В данном примере $a_0 = a_n = 0. \quad l = 1$. Коэффициенты b_n находим по формуле:

$$b_n = \frac{2}{1}\int_0^1 x^2 \sin n\pi x\,dx = \begin{bmatrix} x^2 = u, & du = 2x\,dx, \\ \sin n\pi x\,dx = dv, & v = -\frac{1}{n\pi}\cos n\pi x \end{bmatrix} =$$

$$= 2\cdot\left(x^2(-\frac{1}{n\pi}\cos n\pi x)\Big|_0^1 + \frac{2}{n\pi}\int_0^1 x\cos n\pi x\,dx \right) =$$

Второй интеграл берем по частям:

$$\left[\; u = x, \quad du = dx, \quad dv = \cos nx\,dx, \quad v = \frac{1}{n\pi}\sin n\pi x. \right]$$

$$= 2\cdot\left(-\frac{(-1)^n}{n\pi}+\frac{2}{n\pi}\left(x\,\frac{1}{n\pi}\sin n\pi x\Big|_0^1-\frac{1}{n\pi}\int_0^1 \sin n\pi x\,dx\right)\right)=$$

$$= 2\cdot\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}+\frac{2}{n\pi}\left(0+\frac{1}{(n\pi)^2}\cos n\pi x\Big|_0^1\right)\right)= 2\cdot\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}+\frac{2}{(n\pi)^3}((-1)^n-1)\right).$$

Тогда:

$$x^2 = \sum_{n=1}^{\infty} 2\cdot\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}+\frac{2\,((-1)^n-1)}{(n\pi)^3}\right)\sin n\pi x.$$

■

Задачи для самостоятельного решения

1. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x)=\begin{cases} 2, \ -\pi < x < 0, \\ -4, 0 < x < \pi. \end{cases}$$

2. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию, заданную на полупериоде [0, 2] четным и нечетным образом

$$f(x) = x - \frac{x^2}{2}.$$

3. Разложить в ряд Фурье по косинусам функцию, заданную на полупериоде [0, π]

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}.$$

4. Разложить в ряд Фурье по синусам на отрезке [-π, π] функцию $f(x) = \cos 2x.$

Ответы

1. $f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx = -1 - \dfrac{12}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(2n-1)x}{2n-1}.$

2. Четным образом: $f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos\dfrac{n\pi x}{l} = \dfrac{1}{3} - \dfrac{8}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1+(-1)^n}{n^2}\cos\dfrac{n\pi x}{2}.$

   Нечетным образом: $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin\dfrac{n\pi x}{l} = \dfrac{8}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1-(-1)^n}{n^3}\sin\dfrac{n\pi x}{2}.$

3. $f(x) = \dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}.$

4. $f(x) = -\dfrac{4}{\pi}\left[\dfrac{\sin x}{2^2-1} + \dfrac{3\sin 3x}{2^2-3^2} + \dfrac{5\sin 5x}{2^2-5^2} + \ldots\right].$

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ

Сходимость и сумма ряда. Необходимое условие сходимости ряда.

Теоремы сравнения.

Признаки Даламбера и Коши.

Интегральный признак сходимости ряда.

Теорема Лейбница. Оценка остатка знакочередующегося ряда.

Теорема о сходимости абсолютно сходящегося ряда. Свойства абсолютно сходящихся рядов.

Понятие равномерной сходимости. Признак Вейерштрасса.

Теорема о непрерывности суммы функционального ряда.

Теоремы о почленном интегрировании и почленном дифференцировании функционального ряда.

Теорема Абеля. Интервал и радиус сходимости степенного ряда.

Теорема о равномерной сходимости степенного ряда. Непрерывность суммы ряда.

Почленное интегрирование и дифференцирование степенных рядов.

Разложение функции в степенной ряд. Ряд Тейлора.

Разложение по степеням x бинома $(1+x)^m$.

Условия разложимости функции в ряд Тейлора.

Разложение по степеням x функций $e, \cos x, \sin x, \ln(1+x)$.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ

1) Ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится, если $a_n \le c_n \le b_n$.

Указание. Рассмотреть неравенства $0 \le c_n - a_n \le b_n - a_n$.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (a_n \ge 0)$ сходится. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a^2{}_n$ тоже сходится. Показать, что обратное утверждение неверно.

Ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a^2{}_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b^2{}_n$ сходятся. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n||b_n|$ тоже сходится.

Указание. Доказать и использовать неравенство $|ab| \le a^2 + b^2$.

4) Ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a^2{}_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b^2{}_n$ сходятся. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2$ тоже сходится.

5) Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$. Можно ли утверждать, что сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$?

Рассмотреть пример

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \right).$$

Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|f_n(x)\right|$ сходится равномерно на отрезке $[a;b]$. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ также сходится равномерно на этом отрезке.

Может ли функциональный ряд на отрезке:

а) сходиться равномерно и не сходиться абсолютно,

б) сходиться абсолютно не сходиться равномерно?

Рассмотреть примеры:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+x^2}$, отрезок $[a;b]$ произвольный;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x(1-x)^n$ отрезок $[0;1]$

Показать, что функция

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{10^n}$$

всюду непрерывна.

9) Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n^2 x}{n^2}$ сходится равномерно в интервале $(-\infty;+\infty)$.Можно ли его почленно дифференцировать в этом интервале?

10) Доказать, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-nx}$ сходится в точке x_0; то он сходится абсолютно $\forall x > x_0$.

РАСЧЕТНЫЕ ЗАДАНИЯ

(взято из [Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике])

Задача 1. Найти сумму ряда.

1. $\sum_{n=9}^{\infty}\frac{2}{n^2-14n+48}$.

2. $\sum_{n=9}^{\infty}\frac{18}{n^2-13n+40}$.

3. $\sum_{n=8}^{\infty}\frac{4}{n^2-12n+35}$.

4. $\sum_{n=8}^{\infty}\frac{36}{n^2-11n+28}$.

5. $\sum_{n=7}^{\infty}\frac{6}{n^2-10n+24}$.

6. $\sum_{n=7}^{\infty}\frac{54}{n^2-9n+18}$.

7. $\sum_{n=6}^{\infty}\frac{8}{n^2-8n+15}$.

8. $\sum_{n=6}^{\infty}\frac{72}{n^2-7n+10}$.

9. $\sum_{n=5}^{\infty}\frac{10}{n^2-6n+8}$.

10. $\sum_{n=5}^{\infty}\frac{90}{n^2-5n+4}$.

11. $\sum_{n=4}^{\infty}\frac{12}{n^2-4n+3}$.

12. $\sum_{n=4}^{\infty}\frac{18}{n^2-n-2}$.

13. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{16}{n^2+4n+3}$.

14. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{36}{n^2+7n+10}$.

15. $\sum_{n=10}^{\infty}\frac{30}{n^2-14n+48}$.

16. $\sum_{n=9}^{\infty}\frac{54}{n^2-11n+28}$.

17. $\sum_{n=9}^{\infty}\frac{36}{n^2-12n+35}$.

18. $\sum_{n=8}^{\infty}\frac{72}{n^2-9n+18}$.

19. $\sum_{n=8}^{\infty}\frac{12}{n^2-10n+24}$.

20. $\sum_{n=7}^{\infty}\frac{18}{n^2-7n+10}$.

21. $\sum_{n=7}^{\infty}\frac{60}{n^2-8n+15}$.

22. $\sum_{n=6}^{\infty}\frac{36}{n^2-5n+4}$.

23. $\sum_{n=6}^{\infty}\frac{48}{n^2-6n+8}$.

24. $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{54}{n^2+n-2}$.

25. $\sum_{n=5}^{\infty}\frac{6}{n^2-4n+3}$.

26. $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{18}{n^2-n-2}$.

27. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{24}{n^2+4n+3}$.

28. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{36}{n^2+n-2}$.

29. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{72}{n^2+6n+8}$.

30. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{54}{n^2+5n+4}$.

31. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{72}{n^2+5n+4}$.

Задача 2. Исследовать на сходимость ряд.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}.$

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{arctg^2 n}{n^3}.$

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{arctgn^2}{n(n+1)(n+2)}.$

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt[3]{n^7}}.$

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3-\sin n}{n-\ln n}.$

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos n}{n^3+2}.$

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n(2+\cos n\pi)}{2n^2-1}.$

8. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{3+\sin n}{\sqrt[3]{n^3-n}}.$

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^2+1}.$

10. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\ln\sqrt{n^2+3n}}{\sqrt{n^2-n}}.$

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1+\cos n}{n^2+2}.$

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\cos^2 n}{n^3+5}.$

13. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n\ln n}{n^2-3}.$

14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+3}{n^3(2+\cos n\pi)}.$

15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3-\cos n}{\sqrt[4]{n^3}}.$

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^3+n+1}.$

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^2}.$

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{arctg^3 n}{n^4+3}.$

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2+\cos n\pi)\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^7+5}}.$

20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1-\sin n}{(n+1)(n+2)}.$

21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 2^n}{n^2}.$

22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt{n^5+n}}.$

23. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2\ln n+\sqrt[3]{\ln^2 n}}.$

24. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{2-\cos n}{\sqrt{n^2-n}}.$

25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{arcctg^2 n}{n(n+1)}.$

26. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{2+\cos n}{\sqrt[4]{n^4-1}}.$

27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1+\sin n}{n(n+2)}.$

28. $\sum\limits_{n=}^{\infty}\frac{\sin^2 n\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}.$

29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{arctgn}{\sqrt{n(2+n^2)}}.$

30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n^2}{n^3+n}.$

31. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^3+2}}{n^2(2+\sin n)}.$

Задача 3. Исследовать на сходимость ряд.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\left(1-\cos\dfrac{1}{n+1}\right).$

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n+4}\,tg\,\dfrac{1}{\sqrt{n}}.$

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\dfrac{n^2+5}{n^2+4}.$

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+4}}\sin\dfrac{1}{n+1}.$

5. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n-1}\,arctg\,\dfrac{1}{\sqrt[3]{n-1}}.$

6. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\ln\dfrac{n^2+3}{n^2-n}.$

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(e^{\frac{\sqrt{n}-1}{n^3}}-1\right).$

8. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\sqrt{n}\arcsin\dfrac{n+1}{n^3-2}.$

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\left(e^{\frac{1}{\pi^2}}-1\right).$

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt[5]{n+1}}\sin\dfrac{1}{\sqrt{n}}.$

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}\,arctg\,\dfrac{\pi}{4\sqrt{n}}.$

12. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\sqrt[3]{n}\cdot tg\,\dfrac{n-1}{n^3-n}.$

13. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt[3]{n+5}}\sin\dfrac{1}{n-1}.$

14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}+2}\,arctg\,\dfrac{n+3}{n^2+5}.$

15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+3}}\left(e^{\frac{1}{\sqrt{\pi}}}-1\right).$

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\dfrac{n^2+1}{n^2-n+2}.$

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[3]{n}\cdot arctg\,\dfrac{1}{n^3}.$

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^3+2}{n^3+1}.$

19. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}n^3 tg^5\,\dfrac{\pi}{n}.$

20. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{n+1}{\left(\sqrt[3]{n}-1\right)\left(n\cdot\sqrt[4]{n^3}-1\right)}.$

21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\dfrac{\pi}{n}\right).$

22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^5+2}}.$

23. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(e^{\frac{\sqrt{n}}{n^3-1}}-1\right).$

24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2}.$

25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\sin\dfrac{2\pi}{2n+1}.$

26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3+7n}{5^n+n}.$

27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\sin\dfrac{1}{\sqrt[3]{n^4}}.$

28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)^2.$

29. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}arctg\,\dfrac{1}{(n-1)\sqrt[5]{n^2+1}}.$

30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{n}{n^2\sqrt[3]{n}+5}.$

31. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}arcsi\,\dfrac{n}{\left(n^2+3\right)^{5/2}}.$

Задача 4. Исследовать на сходимость ряд.

1. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n+1}{2^n(n-1)!}$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{(n)!}$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}(n^3+1)}{(n+1)!}$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n n!}{(2n)!}$.

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+2)!}{2^n(3n+5)}$.

6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+5}{n!}\sin\frac{2}{3^n}$.

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}arctg\frac{5}{n}$.

8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{3^n n!}$.

9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(2n)!}tg\frac{1}{5^n}$.

10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6^n(n^2-1)}{n!}$.

11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n n^2}{(n+2)!}$.

12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}$.

13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^{2n}}{(2n-1)!}$.

14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n n!}{(3n)!}$.

15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{3^n(n+1)!}$.

16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^{n-1}}$.

17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(3^n+1)(2n)!}$.

18. $\sum_{n=1}^{\infty}n!\sin\frac{\pi}{2^n}$.

19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{n^n}$.

20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n\sqrt[3]{n^2}}{(n+1)!}$.

21. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$.

22. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n(n+1)!}{(2n)!}$.

23. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{4^n(n+2)!}$.

24. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2n+1)}{2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3n-1)}$.

25. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n-2)}{7\cdot 9\cdot 11\cdot\ldots\cdot(2n+5)}$.

26. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{2^n+3}$.

27. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n+2)!}{10^n n^2}$.

28. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{4^{n-1}\sqrt{n^2+5}}{(n-1)!}$.

29. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\sqrt[3]{n}}{3^n+2}$.

30. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!(2n+1)!}{(3n)!}$.

31. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n-2)}{2^{n+1}n!}$.

Задача 5. Исследовать ряд на сходимость.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{-n^2}$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} n^4\left(\frac{2n}{3n+5}\right)^{n}$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2+1}{n^2+1}\right)^{n^2}$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \cdot \frac{1}{4^n}$.

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n-2}\right)^{n^2}$.

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+2}{3n+1}\right)^{n} \cdot n^3$.

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n-3}{5n+1}\right)^{n^2}$.

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{10n+5}\right)^{n^2}$.

9. $\sum_{n=1}^{\infty} n \arcsin^n \frac{\pi}{4n}$.

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{3n-1}\right)^{n^2}$.

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n} \frac{n}{5^n}$.

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{n+1}\right)^{n^2}$.

13. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2\left(\frac{3n+2}{4n-1}\right)^{n}$.

14. $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n-3}\right)^{n^2}$.

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n+1}\right)^{2n+1}$.

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$.

17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{n^n}$.

18. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin^n \frac{\pi}{2n}$.

19. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^3}{(\ln n)^n}$.

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n-1}\right)^{n^3}$.

21. $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 arctg^n \frac{\pi}{3n}$.

22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n^5}{(2n+1)^n}$.

23. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} e^{-n}$.

24. $\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{3n-1}{4n+2}\right)^{2n}$.

25. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{4n+3}\right)^{n^2}$.

26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+2}}{(2n^2+1)^{n/2}}$.

27. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n}$.

28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$.

29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n3^{n+2}}{5^n}$.

30. $\sum_{n=2}^{\infty} \sqrt[3]{n}\left(\frac{n-2}{2n+1}\right)^{3n}$.

31. $\sum_{n=1}^{\infty} n^4 arctg^{2n} \frac{\pi}{4n}$.

Задача 6. Исследовать на сходимость ряд.

1. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2(3n+1)}$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2(2n+1)}$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+3)\ln^2(2n+1)}$.

4. $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(3n-5)\ln^2(4n-7)}$.

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+4)\ln^2(5n+2)}$.

6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)\ln^2(n\sqrt{5}+2)}$.

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(n\sqrt{2}+1\right)\ln^2(n\sqrt{3}+1)}$.

8. $\sum_{n=5}^{\infty}\frac{1}{(n-2)\ln(n-3)}$.

9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\ln(2n)}$.

10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln(2n)}$.

11. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)\ln n}$.

12. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\ln(n+1)}$.

13. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(2n-3)\ln(3n+1)}$.

14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)\ln^2 n}$.

15. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n+3)\ln^2(2n)}$.

16. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(2n+3)\ln^2(n+1)}$.

17. $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln(n-1)}$.

18. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2n\sqrt{\ln(3n-1)}}$.

19. $\sum_{n=5}^{\infty}\frac{1}{(n-2)\sqrt{\ln(n-3)}}$.

20. $\sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)\sqrt{\ln(n-2)}}$.

21. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n+5)\ln^2(n+1)}$.

22. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n+3)\ln^2(n+7)}$.

23. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2}{\left(n^3+1\right)\ln n}$.

24. $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{n}{\left(n^2-3\right)\ln^2 n}$.

25. $\sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{(n-3)\ln^2(n/2)}$.

26. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\left(n^2+5\right)\ln n}$.

27. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3n}{\left(2n^2+3\right)\ln n}$.

28. $\sum_{n=4}^{\infty}\frac{n+1}{\left(5n^2-9\right)\ln(n-2)}$.

29. $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{2n+1}{\left(3n^2+2\right)\ln(n/2)}$.

30. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{\left(n^2-1\right)\ln n}$.

31. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3n}{\left(n^2-2\right)\ln(2n)}$.

Задача 7. Исследовать на сходимость ряд.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}.$

2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n}.$

3. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)}.$

4. $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n\ln n(\ln\ln n)}.$

5. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{2n^2}{n^4-n^2+1}.$

6. $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{(n+1)\ln n}.$

7. $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n\ln(n+1)}.$

8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\sqrt[4]{2n+3}}.$

9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{\sqrt{3n+1}}\sin\frac{\pi}{2\sqrt{n}}.$

10. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\left(\frac{3n-1}{n}\right)^{n}.$

11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n!}.$

12. $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n\ln(2n)}.$

13. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}tg\frac{1}{n}.$

14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n^2}.$

15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n}(n+1)}.$

16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{\sqrt[3]{3n}cso(\pi/3n)}.$

17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(3/2)^{n}(n+1)}.$

18. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{2n-1}{3n}.$

19. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{(n+3)!}{2^n}.$

20. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n+1}{\sqrt{n^3}}.$

21. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{\sqrt{5n-1}}tg\frac{\pi}{4\sqrt{n}}.$

22. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{2^{2n+1}(2n+1)}.$

23. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\sin(n\sqrt{n})}{n\sqrt{n}}.$

24. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n+\cos(2/\sqrt{n+4})}.$

25. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\sin\frac{\pi}{2^n}.$

26. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\sin^{n}\frac{\pi}{2n}.$

27. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\sin 3^n}{3^n}.$

28. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right).$

29. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\sin\frac{1}{n}\cdot tg\frac{1}{n}.$

30. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$

31. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n^3}{(n+1)!}.$

Задача 8. Вычислить сумму ряда с точностью α.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3n^2}, \alpha = 0{,}01.$

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n!}, \alpha = 0{,}01.$

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n)^3}, \alpha = 0{,}001.$

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n!(2n+1)}, \alpha = 0{,}001.$

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{n^3(n+1)}, \alpha = 0{,}01.$

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{(2n+1)!}, \alpha = 0{,}0001.$

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{2^n}, \alpha = 0{,}1.$

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2}{3^n}, \alpha = 0{,}1.$

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}, \alpha = 0{,}001.$

10. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{(2n+1)!!}, \alpha = 0{,}0001.$

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{(2n)!!}, \alpha = 0{,}001.$

12. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{5}\right)^n, \alpha = 0{,}01.$

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{7^n}, \alpha = 0{,}0001.$

14. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^n, \alpha = 0{,}1.$

15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{(2n)!}, \alpha = 0{,}001.$

16. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{3n!}, \alpha = 0{,}01.$

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{(2n)!2n}, \alpha = 0{,}00001.$

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{(2n)!n!}, \alpha = 0{,}001.$

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{2^n n!}, \alpha = 0{,}001.$

20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{3^n n!}, \alpha = 0{,}0001.$

21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{(2n)!n!}, \alpha = 0{,}00001.$

22. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{3^n(n+1)}, \alpha = 0{,}001.$

23. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{4^n(2n+1)}, \alpha = 0{,}001.$

24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n^3}, \alpha = 0{,}01.$

25. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{(n+1)^n}, \alpha = 0{,}001.$

26. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{(n+1)^n}, \alpha = 0{,}001.$

27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n^3+1}, \alpha = 0{,}01.$

28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2}{n^2(n+3)}, \alpha = 0{,}01.$

29. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{(n^3+1)^2}, \alpha = 0{,}001.$

30. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{2+n^3}, \alpha = 0{,}01.$

31. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{(1+n^3)^2}, \alpha = 0{,}001.$

Задача 9. Найти область сходимости ряда.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{x^n+1}$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^{\ln(1+x)}}$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\left(\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}+1\right)^{x+2}}$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{4}{n}\right)^n e^{n\left(x^2-4\right)+x\sqrt{n}}$.

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n}}{x^2+n^2}$.

6. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{n^2\sin\frac{x^2+1}{n}}$.

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+5}{n^{3x-x^2}}$.

8. $\sum_{n=1}^{\infty} n\arcsin 3^{-nx}$.

9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+x^{2n}}$.

10. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 arctg\, 2^{nx}$.

11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^{x^2+1}+4}$.

12. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)^n 4^{\frac{n^2}{x}}$.

13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{e^{nx}+1}$.

14. $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{n\left(x^2-4x+3\right)+x\sqrt{n}}$.

15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+e^{-nx}}$.

16. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\sin\frac{x^2+1}{n}}$

17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+x^n}{1-x^n}$.

18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^{\ln\left(1+x^2\right)}}$.

19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\left(\sqrt{n^3}+n\right)^{x+1}}$.

20. $\sum_{n=1}^{\infty} n\arcsin 3^{nx}$.

21. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{n\left(n+e^x\right)}$.

22. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 arctg\, 2^{-nx}$.

23. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^{2+3x-x^2}}$.

24. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n e^{-\frac{n}{1+x^2}+x\sqrt{n}}$

25. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x|^n+|x|^{-n}}{2}$.

26. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(3+\frac{1}{n}\right)^n 4^{-\frac{n^2}{x}}$

27. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{n^{x^2+2}+3}$.

28. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^{\ln|x|}}$.

29. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\left(n+e^x\right)\left(n^2+1\right)}$.

30. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(x\sqrt{n}-1\right)^2}$

31. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{\left(n^2+\sqrt{n}+1\right)^{x+1}}$.

Задача 10. Найти область сходимости ряда.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-2)^3}{2n+3}(x+3)^{2n}.$

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)5^n}(x-3)^n.$

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n}}{n9^n}.$

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{(n+3)^2 2^{n-1}}(x+7)^n.$

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n}(x-2)^{2n}.$

6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-5)^{2n+1}}{3n+8}.$

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+3)\ln(n+3)}(x+6)^n.$

8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-6)^n}{(n+2)3^n}.$

9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^{2n-1}}{(2n-1)4^n}.$

10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-7)^{2n-1}}{(2n^2-5n)4^n}.$

11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{(3n+1)2^n}.$

12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n}{(5n-8)^3}(x-2)^{3n}.$

13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^n}{3^n}.$

14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}(x-2)^n.$

15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(3n+1)3^n}(x+6)^n.$

16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{(3n+1)^3}(x-4)^{2n}.$

17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-6)^n}{(n+3)2^n}.$

18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{(n+1)!}(x+5)^{2n+1}.$

19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-2}{(n+1)^2 2^n}(x-3)^n.$

20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{(n+4)\ln(n+4)}.$

21. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(4n+1)3^n}(x+4)^n.$

22. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(n+2)!}(x+1)^{2n-1}.$

23. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(3n-1)2^n}(x+3)^n.$

24. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{(3n+1)^3}(x-1)^{3n}.$

25. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{(n+3)!}(x+4)^{2n+1}.$

26. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(4n-1)2^n}(x+2)^n.$

27. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(4n-1)^3}(x-4)^{3n}.$

28. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+2)\ln(n+2)}(x+1)^n.$

29. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{(2n+1)3^n}.$

30. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(n^4+1)^2}(x-3)^n.$

31. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^5}{2n+1}x^{2n}.$

Задача 11. Найти область сходимости ряда.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n(x^2-6x+13)^n}.$

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8^n}{n^2}\sin^{3n}x.$

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n 3^{\frac{n}{x-1}}.$

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{3^n}\left(x^2-4x+6\right)^n.$

5. $\sum_{n=1}^{\infty}8^n n^2\sin^{3n}x.$

6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}2^{\frac{n}{4-x}}.$

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{n(x^2-5x+10)^n}.$

8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{\sqrt{n}}\sin^{2n}(2x).$

9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^n(x+e)}{n+e}.$

10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(x^2-6x+12\right)^n}{4^n\left(n^2+1\right)}.$

11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n}tg^{2n}x.$

12. $\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-\frac{n}{\cos x}}.$

13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^2(x^2+2)^n}.$

14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^4}\sin^4(3x).$

15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}4^{\frac{n}{x-2}}.$

16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(x^2-5x+11\right)^n}{5^n\left(n^2+5\right)}.$

17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{n^2}\sin^{2n}x.$

18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^n x}{2^n n^2}.$

19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n(x^2-2x+3)^n}.$

20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}tg^n(2x).$

21. $\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-n\sin x}.$

22. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(x^2+1\right)^n}{2^n(n+1)}.$

23. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}tg^n x.$

24. $\sum_{n=1}^{\infty}n5^{\frac{n}{3-x}}.$

25. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2(x^2-4x+5)^n}.$

26. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n3^{n/2}}tg^n x.$

27. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^n(x-e)}{n-e}.$

28. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(x^2-2x+2\right)^n}{2^n\left(n^2+2\right)}.$

29. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n/2}}{\sqrt{n}}tg^n(2x).$

30. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}e^{n\sin x}.$

31. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{n^3(x^2-4x+7)^n}.$

Задача 12. Найти сумму ряда.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n(n-1)}.$

2. $\sum_{n=}^{\infty} \frac{5^n}{(n+1)x^n}.$

3. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(1-x^2\right)^n}{n+1}.$

4. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)(n+2)}.$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{nx^{4n-4}}.$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1-x^5\right)^{n-1}}{n}.$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}.$

8. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{(n+1)x^{3n}}.$

9. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(1-x^4\right)^n}{n+1}.$

10 . $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+2)}.$

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n(n-1)}.$

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1-x^2\right)^{n-1}}{n}.$

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n(n+1)}.$

14. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)x^{5n}}.$

15. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin^n x}{n+1}.$

16. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+3}}{(n+1)(n+2)}.$

17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{nx^{3n-3}}.$

18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1-x^4\right)^{n-1}}{n}.$

19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+3}}{n(n+1)}.$

20. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{(n+1)x^{2n}}.$

21. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(1-x^3\right)^n}{n+1}.$

22. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+4}}{(n+1)(n+2)}.$

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nx^{5n-5}}.$

24. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos^n x}{n+1}.$

25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+5}}{n(n+1)}.$

26. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)x^{4n}}.$

27. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(1-x^5\right)^n}{n+1}.$

28. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+6}}{(n+1)(n+2)}.$

29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n-1}}{nx^{2n-2}}.$

30. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1-x^3\right)^{n-1}}{n}.$

31. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^{n-1} x}{n}.$

Задача 13. Найти сумму ряда.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(n+5)x^{n-1}$.

2. $\sum_{n=0}^{\infty}(n+5)x^{2n}$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty}(n+4)x^{n-1}$.

4. $\sum_{n=0}^{\infty}(n+4)x^{3n}$.

5. $\sum_{n=1}^{\infty}(n+3)x^{n-1}$.

6. $\sum_{n=0}^{\infty}(n+3)x^{4n}$.

7. $\sum_{n=1}^{\infty}(n+2)x^{n-1}$.

8. $\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)x^{5n}$.

9. $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^{n-1}$.

10. $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{6n}$.

11. $\sum_{n=2}^{\infty}nx^{n-2}$.

12. $\sum_{n=1}^{\infty}nx^{6n}$.

13. $\sum_{n=2}^{\infty}(n+4)x^{n-2}$.

14. $\sum_{n=1}^{\infty}nx^{5n}$.

15. $\sum_{n=2}^{\infty}(n+3)x^{n-2}$.

16. $\sum_{n=2}^{\infty}nx^{4n}$.

17. $\sum_{n=2}^{\infty}(n+2)x^{n-2}$.

18. $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{3n+3}$.

19. $\sum_{n=2}^{\infty}(n+1)x^{n-2}$.

20. $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{2n+2}$.

21. $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{2n}$.

22. $\sum_{n=3}^{\infty}(n+1)x^{n-3}$.

23. $\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)x^{3n}$.

24. $\sum_{n=3}^{\infty}(n+2)x^{n-3}$.

25. $\sum_{n=0}^{\infty}(n+3)x^{4n}$.

26. $\sum_{n=3}^{\infty}(n+3)x^{n-3}$.

27. $\sum_{n=0}^{\infty}(n+4)x^{5n}$.

28. $\sum_{n=3}^{\infty}(n+4)x^{n-3}$.

29. $\sum_{n=0}^{\infty}(n+5)x^{6n}$.

30. $\sum_{n=3}^{\infty}(n+5)x^{n-3}$.

31. $\sum_{n=0}^{\infty}(n+6)x^{7n}$.

Задача 14. Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням x.

1. $\dfrac{9}{20-x-x^2}$.

2. $\dfrac{x^2}{\sqrt{4-5x}}$.

3. $\ln\left(1-x-6x^2\right)$

4. $2x\cos^2\left(\dfrac{x}{2}\right)-x$

5. $\dfrac{sh2x}{x}-2$.

6. $\dfrac{7}{12+x-x^2}$.

7. $\dfrac{x}{\sqrt[3]{27-2x}}$.

8. $\ln\left(1+x-6x^2\right)$

9. $(x-1)\sin 5x$

10. $\dfrac{ch3x-1}{x^2}$.

11. $\dfrac{6}{8+2x-x^2}$.

12. $\dfrac{1}{\sqrt[4]{16-3x}}$.

13. $\ln\left(1-x-12x^2\right)$

14. $\left(3+e^{-x}\right)^2$

15. $\dfrac{\arcsin x}{x}-1$.

16. $\dfrac{7}{12-x-x^2}$.

17. $x^2\sqrt{4-3x}$

18. $\ln\left(1+2x-8x^2\right)$

19. $2x\sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right)-x$

20. $(x-1)shx$

21. $\dfrac{5}{6+x-x^2}$.

22. $x\sqrt[3]{27-2x}$

23. $\ln\left(1+x-12x^2\right)$

24. $\dfrac{\sin 3x}{x}-\cos 3x$.

25. $\dfrac{arctgx}{x}$.

26. $\dfrac{5}{6-x-x^2}$.

27. $\sqrt[4]{16-5x}$

28. $\ln\left(1-x-20x^2\right)$

29. $\left(2-e^x\right)^2$

30. $(x-1)chx$

31. $\dfrac{3}{2-x-x^2}$.

Задача 15. Вычислить интеграл с точностью до 0,001

1. $\int\limits_0^{0,1} e^{-6x^2}dx.$

2. $\int\limits_0^{0,1} \sin\left(100x^2\right)dx.$

3. $\int\limits_0^{1} \cos x^2 dx.$

4. $\int\limits_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}.$

5. $\int\limits_0^{0,1} \frac{1-e^{-2x}}{x}dx.$

6. $\int\limits_0^{1} \frac{\ln\left(1+x/5\right)}{x}dx.$

7. $\int\limits_0^{1,5} \frac{dx}{\sqrt[3]{27+x^3}}.$

8. $\int\limits_0^{0,2} e^{-3x^2}dx.$

9. $\int\limits_0^{0,2} \sin\left(25x^2\right)dx.$

10. $\int\limits_0^{0,5} \cos\left(4x^2\right)dx.$

11. $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{\sqrt[4]{16+x^4}}.$

12. $\int\limits_0^{0,2} \frac{1-e^{-x}}{x}dx.$

13. $\int\limits_0^{0,4} \frac{\ln\left(1+x/2\right)}{x}dx.$

14. $\int\limits_0^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{64+x^3}}.$

15. $\int\limits_0^{0,3} e^{-2x^2}dx.$

16. $\int\limits_0^{0,4} \sin\left(\frac{5x}{2}\right)^2 dx.$

17. $\int\limits_0^{0,2} \cos\left(25x^2\right)dx.$

18. $\int\limits_0^{1,5} \frac{d}{\sqrt[4]{81+x^4}}x.$

19. $\int\limits_0^{0,4} \frac{1-e^{-x/2}}{x}dx.$

20. $\int\limits_0^{0,1} \frac{\ln\left(1+2x\right)}{x}dx.$

21. $\int\limits_0^{2,5} \frac{dx}{\sqrt[3]{125+x^3}}.$

22. $\int\limits_0^{0,4} e^{-3x^2/4}dx.$

23. $\int\limits_0^{0,5} \sin\left(4x^2\right)dx.$

24. $\int\limits_0^{0,4} \cos\left(\frac{5x}{2}\right)^2 dx.$

25. $\int\limits_0^{2} \frac{dx}{\sqrt[4]{256+x^4}}.$

26. $\int\limits_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^2}}.$

27. $\int\limits_0^{2,5} \frac{dx}{\sqrt[4]{625+x^4}}.$

28. $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{8+x^3}}.$

29. $\int\limits_0^{0,5} e^{-3x^2/25}dx.$

30. $\int\limits_0^{1} \sin x^2 dx.$

31. $\int\limits_0^{0,1} \cos\left(100x^2\right)dx.$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

Вариант 1

Задание 1. Исследовать на сходимость данный числовой ряд.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}\left(2n^3+1\right)}{\left(n+1\right)!}$$

Задание 2. Исследовать на сходимость данный числовой ряд.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^{n+1}\frac{2n+1}{n\left(n+1\right)}$$

Задание 3. Найти область сходимости данного степенного ряда.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n\left(n+1\right)}x^n$$

Задание 4. Вычислить интеграл с точностью до 0,001.

$$\int_0^1\frac{\sin\left(x^2\right)}{x}dx$$

Задание 5. Разложить данную функцию $f(x)$ в ряд Фурье на промежутке $[a, b]$.

$$f\left(x\right)=\left|x\right|+1,\quad\left[-\pi,\pi\right]$$

Вариант 2

Задание 1. Исследовать на сходимость данный числовой ряд.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)\ln^2\left(2n+1\right)}$$

Задание 2. Исследовать на сходимость данный числовой ряд.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^{n}\frac{2n-1}{3n}$$

Задание 3. Найти область сходимости данного степенного ряда.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(x-5\right)^{2n}}{3n+8}$$

Задание 4. Вычислить интеграл с точностью до 0,001.

$$\int_0^1\cos\left(x^2\right)dx$$

Задание 5. Разложить данную функцию $f(x)$ в ряд Фурье на промежутке $[a, b]$.

$$f\left(x\right)=\frac{\pi-x}{2},\quad\left[0,2\pi\right]$$

Вариант 3

Задание 1. Исследовать на сходимость данный числовой ряд.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-2\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$$

Задание 2. Исследовать на сходимость данный числовой ряд.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)\ln(n+1)}$$

Задание 3. Найти область сходимости данного степенного ряда.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n x^n$$

Задание 4. Вычислить интеграл с точностью до 0,001.

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$$

Задание 5. Разложить данную функцию $f(x)$ в ряд Фурье на промежутке $[a, b]$.

$$f(x)=x^2-1, \quad [-2,2]$$

Вариант 4

Задание 1. Исследовать на сходимость данный числовой ряд.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{arctg\ n}{n^3+1}$$

Задание 2. Исследовать на сходимость данный числовой ряд.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{5^{n+1}\,n!}$$

Задание 3. Найти область сходимости данного степенного ряда.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^5}{2n+1}x^{2n}$$

Задание 4. Вычислить интеграл с точностью до 0,001.

$$\int_0^{0,2} e^{-3x^2}dx$$

Задание 5. Разложить данную функцию $f(x)$ в ряд Фурье на промежутке $[a, b]$.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+\pi}{\pi}, -\pi\le x\le 0\\ 1, 0<x\le\pi\end{cases}, \ [-\pi,\pi]$$

Вариант 5

Задание 1. Исследовать на сходимость данный числовой ряд.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n2^n}}{n^2+3}$$

Задание 2. Исследовать на сходимость данный числовой ряд.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2n+1}{n+2}\right)^n$$

Задание 3. Найти область сходимости данного степенного ряда.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{(n+1)^n}x^n$$

Задание 4. Вычислить интеграл с точностью до 0,001.

$$\int_0^{0,4}\frac{\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)}{x}dx$$

Задание 5. Разложить данную функцию $f(x)$ в ряд Фурье на промежутке $[a, b]$.

$$f(x)=\begin{cases} x, 0\le x<1 \\ 2-x, 1\le x\le 2\end{cases},\ [0,2]$$

Вариант 6

Задание 1. Исследовать на сходимость данный числовой ряд.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{-n^2}$$

Задание 2. Исследовать на сходимость данный числовой ряд.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^3}{(n+1)!}$$

Задание 3. Найти область сходимости данного степенного ряда.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n\,9^n}$$

Задание 4. Вычислить интеграл с точностью до 0,001.

$$\int_0^{1}\frac{\ln\left(1+\frac{x}{5}\right)}{x}dx$$

Задание 5. Разложить данную функцию $f(x)$ в ряд Фурье на промежутке $[a, b]$.

$$f(x)=x+1,\quad [-\pi,\pi]$$

Вариант 7

Задание 1. Исследовать на сходимость данный числовой ряд.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n+1}{n^3+2}$$

Задание 2. Исследовать на сходимость данный числовой ряд.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin\frac{\pi}{2^n}$$

Задание 3. Найти область сходимости данного степенного ряда.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n(n+1)}x^n$$

Задание 4. Вычислить интеграл с точностью до 0,001.

$$\int_0^{0,2}\frac{1-e^{-x}}{x}dx$$

Задание 5. Разложить данную функцию $f(x)$ в ряд Фурье на промежутке $[a, b]$.

$$f(x)=|x|, \quad [-1,1]$$

Вариант 8

Задание 1. Исследовать на сходимость данный числовой ряд.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n+3}{\sqrt{n^3+1}}$$

Задание 2. Исследовать на сходимость данный числовой ряд.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$$

Задание 3. Найти область сходимости данного степенного ряда.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n(x+1)^{2n}}{n}$$

Задание 4. Вычислить интеграл с точностью до 0,001.

$$\int_0^1 \sin\left(x^2\right)dx$$

Задание 5. Разложить данную функцию $f(x)$ в ряд Фурье на промежутке $[a, b]$.

$$f(x)=x, \quad [-\pi,\pi]$$

Вариант 9

Задание 1. Исследовать на сходимость данный числовой ряд.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{2\pi}{n^2+3}$$

Задание 2. Исследовать на сходимость данный числовой ряд.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n-1}{3^n\,n}$$

Задание 3. Найти область сходимости данного степенного ряда.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^{2n}}{(2n+3)\,5^n}$$

Задание 4. Вычислить интеграл с точностью до 0,001.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{16+x^2}}$$

Задание 5. Разложить данную функцию $f(x)$ в ряд Фурье на промежутке $[a, b]$.

$$f(x)=\pi^2-x^2,\quad [-\pi,\pi]$$

Вариант 10

Задание 1. Исследовать на сходимость данный числовой ряд.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\left(e^{\frac{2}{n}}-1\right)^{3n}$$

Задание 2. Исследовать на сходимость данный числовой ряд.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{\pi}{2n}$$

Задание 3. Найти область сходимости данного степенного ряда.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2(x-3)^n}{\left(n^4+1\right)^2}$$

Задание 4. Вычислить интеграл с точностью до 0,001.

$$\int_0^{0,4}\frac{1-e^{-\frac{x}{2}}}{x}dx$$

Задание 5. Разложить данную функцию $f(x)$ в ряд Фурье на промежутке $[a, b]$.

$$f(x)=|x|,\quad [-\pi,\pi]$$

Вариант 11

Задание 1. Исследовать на сходимость данный числовой ряд.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}\left(2n^3+1\right)}{(n+1)!}$$

Задание 2. Исследовать на сходимость данный числовой ряд.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$$

Задание 3. Найти область сходимости данного степенного ряда.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n(n+1)}x^n$$

Задание 4. Вычислить интеграл с точностью до 0,001.

$$\int_0^1 \frac{\sin\left(x^2\right)}{x}dx$$

Задание 5. Разложить данную функцию $f(x)$ в ряд Фурье на промежутке $[a, b]$.

$$f\left(x\right)=\left|x\right|+1, \quad \left[-\pi,\pi\right]$$

Вариант 12

Задание 1. Исследовать на сходимость данный числовой ряд.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)\ln^2\left(2n+1\right)}$$

Задание 2. Исследовать на сходимость данный числовой ряд.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^n\frac{2n-1}{3n}$$

Задание 3. Найти область сходимости данного степенного ряда.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(x-5\right)^{2n}}{3n+8}$$

Задание 4. Вычислить интеграл с точностью до 0,001.

$$\int_0^1 \cos\left(x^2\right)dx$$

Задание 5. Разложить данную функцию $f(x)$ в ряд Фурье на промежутке $[a, b]$.

$$f\left(x\right)=\frac{\pi-x}{2}, \quad \left[0,2\pi\right]$$

Вариант 13

Задание 1. Исследовать на сходимость данный числовой ряд.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-2\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$$

Задание 2. Исследовать на сходимость данный числовой ряд.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n}{\left(n+1\right)\ln\left(n+1\right)}$$

Задание 3. Найти область сходимости данного степенного ряда.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n x^n$$

Задание 4. Вычислить интеграл с точностью до 0,001.

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$$

Задание 5. Разложить данную функцию $f(x)$ в ряд Фурье на промежутке $[a, b]$.

$$f(x)=x^2-1,\quad [-2,2]$$

Вариант 14

Задание 1. Исследовать на сходимость данный числовой ряд.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{arctg\,n}{n^3+1}$$

Задание 2. Исследовать на сходимость данный числовой ряд.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{5^{n+1}\,n!}$$

Задание 3. Найти область сходимости данного степенного ряда.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^5}{2n+1}x^{2n}$$

Задание 4. Вычислить интеграл с точностью до 0,001.

$$\int_0^{0,2}e^{-3x^2}dx$$

Задание 5. Разложить данную функцию $f(x)$ в ряд Фурье на промежутке $[a, b]$.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+\pi}{\pi}, -\pi\le x\le 0\\ 1, 0<x\le\pi\end{cases},\ [-\pi,\pi]$$

Вариант 15

Задание 1. Исследовать на сходимость данный числовой ряд.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n2^n}}{n^2+3}$$

Задание 2. Исследовать на сходимость данный числовой ряд.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2n+1}{n+2}\right)^n$$

Задание 3. Найти область сходимости данного степенного ряда.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{(n+1)^n}x^n$$

Задание 4. Вычислить интеграл с точностью до 0,001.

$$\int_0^{0,4}\frac{\ln\left(1+\dfrac{x}{2}\right)}{x}dx$$

Задание 5. Разложить данную функцию $f(x)$ в ряд Фурье на промежутке $[a, b]$.

$$f(x)=\begin{cases} x, 0\le x<1 \\ 2-x, 1\le x\le 2 \end{cases}, \ [0,2]$$

Вариант 16

Задание 1. Исследовать на сходимость данный числовой ряд.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{-n^2}$$

Задание 2. Исследовать на сходимость данный числовой ряд.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^3}{(n+1)!}$$

Задание 3. Найти область сходимости данного степенного ряда.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n\,9^n}$$

Задание 4. Вычислить интеграл с точностью до 0,001.

$$\int_0^1\frac{\ln\left(1+\frac{x}{5}\right)}{x}dx$$

Задание 5. Разложить данную функцию $f(x)$ в ряд Фурье на промежутке $[a, b]$.

$$f(x)=x+1, \quad [-\pi,\pi]$$

Вариант 17

Задание 1. Исследовать на сходимость данный числовой ряд.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n+1}{n^3+2}$$

Задание 2. Исследовать на сходимость данный числовой ряд.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{\pi}{2^n}$$

Задание 3. Найти область сходимости данного степенного ряда.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n(n+1)}x^n$$

Задание 4. Вычислить интеграл с точностью до 0,001.

$$\int_0^{0,2}\frac{1-e^{-x}}{x}dx$$

Задание 5. Разложить данную функцию $f(x)$ в ряд Фурье на промежутке $[a, b]$.

$$f(x)=|x|, \quad [-1,1]$$

Вариант 18

Задание 1. Исследовать на сходимость данный числовой ряд.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n+3}{\sqrt{n^3+1}}$$

Задание 2. Исследовать на сходимость данный числовой ряд.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$$

Задание 3. Найти область сходимости данного степенного ряда.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n(x+1)^{2n}}{n}$$

Задание 4. Вычислить интеграл с точностью до 0,001.

$$\int_0^1\sin\left(x^2\right)dx$$

Задание 5. Разложить данную функцию $f(x)$ в ряд Фурье на промежутке $[a, b]$.

$$f(x)=x,\quad [-\pi,\pi]$$

Вариант 19

Задание 1. Исследовать на сходимость данный числовой ряд.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{2\pi}{n^2+3}$$

Задание 2. Исследовать на сходимость данный числовой ряд.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n-1}{3^n\,n}$$

Задание 3. Найти область сходимости данного степенного ряда.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^{2n}}{(2n+3)\,5^n}$$

Задание 4. Вычислить интеграл с точностью до 0,001.

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt[4]{16+x^2}}$$

Задание 5. Разложить данную функцию $f(x)$ в ряд Фурье на промежутке $[a, b]$.

$$f(x)=\pi^2-x^2,\quad [-\pi,\pi]$$

Вариант 20

Задание 1. Исследовать на сходимость данный числовой ряд.

$$\sum_{n=1}^{\infty}n\left(e^{\frac{2}{n}}-1\right)^{3n}$$

Задание 2. Исследовать на сходимость данный числовой ряд.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin\frac{\pi}{2n}$$

Задание 3. Найти область сходимости данного степенного ряда.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2(x-3)^n}{\left(n^4+1\right)^2}$$

Задание 4. Вычислить интеграл с точностью до 0,001.

$$\int_0^{0,4}\frac{1-e^{-\frac{x}{2}}}{x}dx$$

Задание 5. Разложить данную функцию $f(x)$ в ряд Фурье на промежутке $[a, b]$.

$$f(x)=|x|, \quad [-\pi,\pi]$$

ВАРИАНТЫ ЗАЩИТЫ ТИПОВОГО РАССЧЕТА «РЯДЫ»

Вариант 1

Записать общий член ряда и исследовать ряд на сходимость:

$$\frac{3}{2}+\frac{5}{4}+\frac{7}{8}+\frac{9}{16}+\frac{11}{32}+\dots$$

Найти область сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\,(x-1)^n}{2^n\,(n-1)}.$$

Вычислить $\sin 0{,}1$ с точностью $\varepsilon=0{,}001$, используя разложение функции в степенной ряд.

Вариант 2

Исследовать ряд на сходимость: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{6^n\,(n^2-1)}{n\,!}$.

Найти область сходимости ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\,(x-2)^n}{n+2}$.

Вычислить $\ln 1{,}2$ с точностью $\varepsilon=0{,}001$, используя разложение функции в ряд Маклорена.

Вариант 3.

Найти общий член ряда и исследовать данный ряд на сходимость:

$$\frac{2}{3},\ \frac{4}{5},\ \frac{6}{7},\ \frac{8}{9},\ \frac{10}{11},\dots.$$

Найти область сходимости ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\dfrac{(x+1)^{2n}\,2^n}{n+1}$.

Вычислить с точностью $\varepsilon=0{,}01$, используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд: $\int\limits_{0}^{0,1}\cos 2x\,dx.$

Вариант 4

Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимость: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\,\dfrac{1}{n\ln n}$.

Найти область сходимости ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2x-2)^n\,n}{4^n\,(n^3-1)}$.

Вычислить $\int_0^{0,1}\sin x^2dx$ с точностью $\varepsilon=0{,}001$, используя разложение функции $f(x)=\sin x$ в степенной ряд.

Вариант 5

Исследовать ряд на сходимость: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2n+1}{3n-2}\right)^n$.

Найти область сходимости ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\,2^n\,(x+2)^{n-1}}{n+1}$.

Вычислить: $\int\limits_0^{0,1} \ln(1-x^2)dx$ с точностью $\varepsilon - 0,001$, используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд.

Вариант 6

1. Записать общий член ряда: $\frac{3}{2}+\frac{5}{4}+\frac{7}{8}+\frac{9}{16}+\ldots$ и исследовать ряд на сходимость.

2. Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимость:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n-1}{2^n(n^2+1)}$.

3. Разложить функцию в ряд по степеням $(x-1)$: $f(x)=x^3-3x^2+8x+2$.

Вариант 7

Исследовать ряд на сходимость: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^2}$.

Найти область сходимости степенного ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n\cdot(x-1)^n}{2^n(n+1)}$.

Вычислить с точностью $\varepsilon = 0,001$ e^{-x^2}, используя разложение функции в степенной ряд.

Вариант 8

Исследовать ряд на сходимость: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{arctgn}{n^2+1}$.

Найти область сходимости степенного ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-3x)^n}{(2n-1)!}$.

Вычислить $\int\limits_0^{0,2}\frac{\sin x^2}{x}dx$ с точностью $\varepsilon = 0,001$ с помощью разложения подынтегральной функции в степенной ряд.

Вариант 9

Найти общий член ряда: $-1+\frac{2}{3}-\frac{4}{9}+\frac{8}{27}-\frac{16}{81}+\ldots$ и исследовать данный ряд на сходимость.

Найти область сходимости ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n+1)\cdot(x+1)^n}{4n-1}$.

Вычислить интеграл $\int\limits_0^{0,3}\ln(1+x^3)dx$ с точностью $\varepsilon = 0,001$, используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд.

Вариант 10

Исследовать ряд на условную и абсолютную сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\sqrt{\ln n}}$$

Найти область сходимости ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}(x-2)^n$.

Разложить функцию $f(x)=(x^2-2)\cdot(x^3+2x)$ по степеням $(x-1)$.

Вариант 11

Исследовать ряд на сходимость: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{3^n(n^2+1)}\cdot 2^n$.

Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2^2(n+2)!}\cdot(x+4)^n$.

Вычислить приближённо $\sqrt[5]{33}$, используя разложение функции $(1+x)^m$ в степенной ряд, с точностью $\varepsilon=0{,}001$.

Вариант 12

Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(n+1)!}{10^n}.$$

Найти область сходимости ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot(x-2)^n}{n^2+3}$.

Найти разложение функции $f(x)=(x^3+3x)(x-1)$ по степеням $(x-2)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Натансон И.П. Краткий курс высшей математики [Текст]: Учебное пособие. – СПб.: Лань, 2009. – 728 с.

2. Владимирский Б.М. Математика. Общий курс [Электронный ресурс]: Учебное пособие. - СПб.: Издательство "Лань", 2008. - 960 с. / издательство «Лань» Электронно-библиотечная система. – Режим доступа: http://www.magtu.ru// .- http://e.lanbook.com/ . – Загл. с экрана.

3. Туганбаев А.А. Основы высшей математики [Электронный ресурс]: Учебное пособие.- СПб.: Изд-во «Лань», 2011. – 496 с. / издательство «Лань» Электронно-библиотечная система. – Режим доступа: http://www.magtu.ru// .- http://e.lanbook.com/ . – Загл. с экрана

Словарь основных терминов

Учебное текстовое электронное издание

Грачева Лилия Александровна
Гугина Екатерина Михайловна

РЯДЫ: КУРС ЛЕКЦИЙ И ПРАКТИКУМ

Учебное пособие

Издается полностью в авторской редакции
1,2 Мб
1 электрон. опт. диск

г. Магнитогорск, 2015 год
ФГБОУ ВПО «МГТУ»
Адрес: 455000, Россия, Челябинская область, г. Магнитогорск,
пр. Ленина 38

ФГБОУ ВПО «Магнитогорский государственный
технический университет им. Г.И. Носова»
Кафедра высшей математики №2
Центр электронных образовательных ресурсов и
дистанционных образовательных технологий
e-mail: ceor_dot@mail.ru