



Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова»

**А.А. Кальченко**  
**К.Г. Пащенко**

## **МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ИНЖЕНЕРИИ**

*Утверждено Редакционно-издательским советом университета  
в качестве учебного пособия*

Магнитогорск  
2017

**Рецензенты:**

кандидат технических наук, доцент,  
директор,  
ООО «Магнитогорсквнешэкономсервис»  
**Б.И. Губанов**

кандидат технических наук,  
доцент кафедры механики,  
ФГБОУ ВО «Магнитогорский государственный  
технический университет им. Г.И. Носова»  
**Ф.Г. Ибрагимов**

**Составители: Кальченко А.А., Пащенко К.Г.**

**Математические методы в инженерии** [Электронный ресурс] : учебное пособие / Александр Андреевич Кальченко, Константин Георгиевич Пащенко ; ФГБОУ ВО «Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова». – Электрон. текстовые дан. (1,52 Мб). – Магнитогорск : ФГБОУ ВО «МГТУ им. Г.И. Носова», 2017. – 1 электрон. опт. диск (CD-R). – Систем. требования : IBM PC, любой, более 1 GHz ; 512 Мб RAM ; 10 Мб HDD ; MS Windows XP и выше ; Adobe Reader 8.0 и выше ; CD/DVD-ROM дисковод ; мышь. – Загл. с титул. экрана.

В представленном учебном пособии отражены основные цели и задачи изучаемой дисциплины. Включает лабораторные работы и задания для практических занятий, посвященные применению математических методов для решения инженерных задач в области машиностроения. В качестве программного обеспечения выбрана система компьютерной математики MATLAB. Представлены приемы работы с указанной системой, встроенные функции и примеры их использования. Описаны принципы создания и использования алгоритмов решения задач оптимизации на базе современного пакета прикладных программ MATLAB.

Данное пособие рекомендуется при изучении спецдисциплин, выполнения курсовых проектов (работ), НИР, а также специалистам, работающим в области обработки металлов давлением.

Учебное пособие соответствует учебной программе и требованиям квалификационной характеристики выпускника. Учебное пособие отличается от существующих изданий комплексным представлением изучаемого материала. Материалы учебного пособия соответствуют высокому научному уровню. Пособие посвящено актуальной прикладной теме – восстановлению и упрочнению деталей машин. Материал учебного пособия изложен доступным для студентов техническим языком.

УДК 51-74

- © Кальченко А.А., Пащенко К.Г., 2017
- © ФГБОУ ВО «Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова», 2017

## Содержание

АЛГОРИТМЫ ПОИСКА РЕШЕНИЙ ПРОЕКТНЫХ ЗАДАЧ ПО ТАБЛИЦАМ СООТВЕТСТВИЙ.....	4
СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ДЛЯ ОЦЕНКИ НАДЕЖНОСТИ.....	8
Теория надежности.....	8
Теория надежности.....	8
Надежность изделия.....	8
Надёжность изделия.....	8
Количественные показатели надёжности.....	9
Способы определения количественных показателей надёжности.....	10
МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ.....	11
Теория моделирования.....	11
Основные понятия.....	11
Классификация видов моделирования.....	12
Классификация моделей.....	14
Свойства модели.....	15
Этапы создания модели.....	17
Моделирование объектов управления. Классификация моделей.....	18
ГРАФЫ.....	20
Типы графов и способы их задания.....	22
Характеристики графов.....	25
Полюсные графы.....	26
ДИСКРЕТНЫЕ МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ.....	27
ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ.....	32
Основные понятия линейного программирования.....	32
Двойственная задача линейного программирования.....	35
Симплекс-таблицы.....	38
ЭКОНОМЕТРИКА.....	42
РАСЧЕТ И ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОЦЕССОВ ВОЛОЧЕНИЯ.....	43
ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ.....	43
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	49

## АЛГОРИТМЫ ПОИСКА РЕШЕНИЙ ПРОЕКТНЫХ ЗАДАЧ ПО ТАБЛИЦАМ СООТВЕТСТВИЙ

Для моделирования задач в системах автоматизированного проектирования используют таблицы соответствий. Проанализированы возможные варианты поиска решений по таким таблицам

При разработке САПР различного назначения для моделирования рассматриваемых объектов используют таблицы соответствий, в которых показывают существующие связи между рассматриваемыми объектами. Эти данные необходимы для построения алгоритмов решения задач выбора, являющихся наиболее распространенным типом проектных задач.

Сущность формы таблицы соответствий (ТС), предложенной Г.К. Горанским [1], можно пояснить на примере табличной модели, взятой из работы [2] (табл.1).

Таблица 1

**Типичный вид и структура таблицы соответствий**

Y	X <sub>1</sub>			X <sub>2</sub>					X <sub>3</sub>				X <sub>4</sub>			
	1	2	3	1	2	3	4	5	1	2	3	4	1	2	3	4
Решение 1 – Y <sub>1</sub>	1	1	1		1	1			1	1	1		1	1	1	1
Решение 2 – Y <sub>2</sub>	1			1	1	1	1		1	1	1	1	1	1	1	1
Решение 3 – Y <sub>3</sub>	1	1	1			1	1	1				1	1			
Решение 4 – Y <sub>4</sub>	1	1						1			1	1		1		

Y = { Y<sub>1</sub>, Y<sub>2</sub>, Y<sub>3</sub>, Y<sub>4</sub> } – вектор выходных параметров  
X = { X<sub>1</sub>, X<sub>2</sub>, X<sub>3</sub>, X<sub>4</sub> } – вектор входных параметров  
Значения входных параметров условно обозначены цифрами 1, 2, ..., n

В таблице соответствий имеется три области различного вида и функций. В строках левого столбца, называемого областью прибытия (терминология теории множеств), размещают варианты решений, из которых производится выбор. В двух верхних строках таблицы (области отправления) записывают условия или факторы, влияющие на выбор, и их значения. В клетках основной части таблицы – матрицы соответствий единицами указывают наличие связей между возможными решениями и значениями входных параметров.

Алгоритм решения задачи по ТС заключается в поиске строки матрицы, в которой указаны соответствия для всех элементов заданного кортежа данных. Если такая строка имеется, то делают левое сечение и в той же строке области прибытия находят искомое решение.

Форма ТС, как никакая другая, обеспечивает сжатие первичной информации. Во многих случаях одна ТС способна концентрировать в себе информацию о сотнях и тысячах вариантов решения однотипных по постановке задач. Принципиальный алгоритм поиска решений универсален и не зависит от содержания задач, все атрибуты модели формализованы с помощью кодирования, что облегчает использование компьютерных технологий.

Вместе с тем опять моделирования задач выбора на основе традиционных ТС показал, что их применение не эффективно для сложных многопараметрических задач. Часто некоторым наборам значений входных параметров (т.е. конкретным условиям задач) соответствуют не одно, а несколько возможных решений. Понятно, что неоднозначность получаемых рекомендаций не может устроить пользователя.

Проблема оказалась настолько серьезной, что потребовало проведения специальных исследований. В результате были разработаны методы и приемы преодоления

неоднозначности решений, генерируемых табличными моделями [2]. В частности, автором предложен новый тип моделей – таблицы соответствий со степенями принадлежности ( $\mu$ ), введенными в теории нечетких множеств [3]. Это означает отказ от указания соответствий бинарными значениями нулевой функции (1-соответствие имеется, 0-соответствия нет) и переход к использованию любых значений  $\mu$  в интервале от нуля до единицы.

В табл.2 показано, какой вид приняла предыдущая табличная модель после указания в ней соответствий степенями принадлежности. Значения  $\mu$  были определены по построенным графикам функций принадлежности для факторов  $X_2$  и  $X_3$  и по результатам бинарных сравнений по столбцам таблицы (подробности можно найти в работе [2]).

В случае использования ТС предложенного вида необходимо определиться с методикой поиска по ним оптимального решения. Непосредственный визуальный анализ таблиц исключается из-за множественности вариантов и отсутствия правила предпочтения. Также неприемлем анализ вариантов решений путем построения минимизированных граф-схем алгоритмов [1], поскольку такие схемы удастся построить только для небольших по размерам моделей.

Таблица 2

Таблица соответствий со степенями принадлежности

Y	X <sub>1</sub>			X <sub>2</sub>					X <sub>3</sub>				X <sub>4</sub>			
	1	2	3	1	2	3	4	5	1	2	3	4	1	2	3	4
Y <sub>1</sub>	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	1	1
Y <sub>2</sub>	1	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	0	1	1	1	0
Y <sub>3</sub>	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0
Y <sub>4</sub>	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	0

Представляется единственно возможным упростить поиск, делая выборки из исходной ТС применительно к конкретным условиям задач, и тем самым уменьшить размеры анализируемых таблиц.

Проиллюстрируем данный подход на следующем примере. Пусть с помощью модели табл.2 предлагается найти оптимальное решение задачи выбора для условий, заданных коротжем данных

$$\alpha_p = \langle X_{12}, X_{25}, X_{33}, X_{43} \rangle.$$

Сначала в исходной таблице оставим только столбцы, соответствующие элементам заданного условия, остальные исключим как ненужные. Затем исключим все строки, содержащие нулевые решения. Результаты этих преобразований показаны на рис.1. Таким образом, оптимальное решение задачи предстоит находить по данным нормализованной частичной таблицы (рис.1б), размеры которой многократно меньше, чем исходной ТС (матрица 4x3 против 16x4).

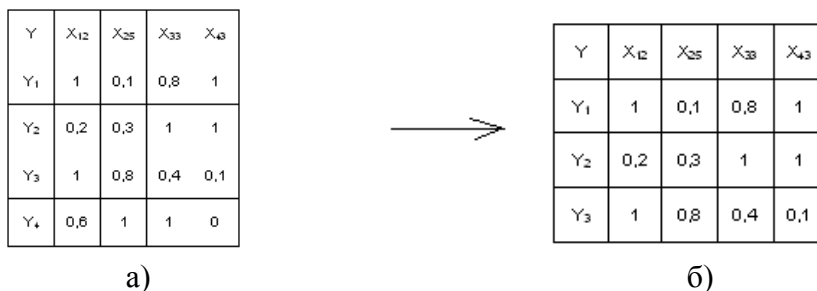


Рис.1 Частичные таблицы: а – после исключения ненужных столбцов; б – после исключения строки с нулевым решением

Обзор литературы показал существование двух подходов к поиску оптимальных решений по ТС со степенями принадлежности. Согласно принципу обобщения Л.Заде множество выходных параметров  $Y$  можно рассматривать как некоторое нечеткое множество  $B$ , функция принадлежности которого  $\mu_B(Y)$  связана с функцией принадлежности  $\mu_A(X)$  множества  $A(X)$  входных параметров через максимальный критерий [3]

$$\mu_B(Y) = \max \min(\mu_{A_1}(X_1), \mu_{A_2}(X_2), \dots). \quad (1)$$

Применительно к ТС это означает, что оптимальное решение следует искать по минимальным значениям  $\mu_A(X)$ , имеющимся во всех строках матрицы ТС. Максимальное из этих значений будет указывать на оптимальное решение из области прибытия ТС. Такой подход соответствует крайне осторожной, пессимистической позиции в принятии решения, исходящей из соображений получения гарантированного результата.

Другой подход к поиску оптимального решения предложил автор теории таблиц соответствий Г.К. Горанский, который ввел понятие о баллах эффективности, близких к понятию степени принадлежности [4]. Средний балл эффективности  $q_{yj}^{cp}$  подсчитывается по сторонам для каждого  $j$ -го решения в ТС по формуле:

$$q_{yj}^{cp} = \frac{\sum_1^n \mu_A(X_i)_j}{n}. \quad (2)$$

Здесь в числителе сумма всех степеней принадлежности  $\mu_A(X) > 0$  в  $j$ -ой строке,  $n$  – количество указанных степеней.

Оптимальному решению будет соответствовать максимальное значение  $q_{yj}^{cp}$ .

Результаты расчета вышеуказанных критериев оптимальности по формулам 1 и 2 применительно к данным таблицы рис. 1б показаны в столбцах 6 и 7 табл.3. Дополнительно в столбце 8 приведены подсчитанные нами значения произведений степеней принадлежности, также по строкам:

$$\mu(Y) = \prod_1^n (\mu(X_1) \cdot \mu(X_2) \cdot \dots), \quad (3)$$

которые могут использоваться в тех же целях. Оптимальные значения рассмотренных критериев выделены рамками.

Как видно из таблицы, расчеты по методикам Л. Заде и Г.К. Горанского привели к разным результатам – оптимальными признаны соответственно решения  $Y_3$  и  $Y_1$ . По нашему мнению методика Л.Заде, ориентированная только на минимальные значения  $\mu_A(X)$  по строкам, не учитывает остальные значения и с этой точки зрения методика Г.К. Горанского представляется более предпочтительной.

Таблица 3

Указатели оптимальных решений по трем методикам расчетов

$Y$	$X_{12}$	$X_{25}$	$X_{33}$	$X_{43}$	$\mu_B(Y)$	$q_{yj}^{cp}$	$\Pi(\mu_j(X_i))$
1	2	3	4	5	6	7	8
$Y_1$	1	0,1	0,8	1	0,1	0,97	0,080
$Y_2$	0,2	0,3	1	1	0,2	0,83	0,060
$Y_3$	1	0,8	0,4	0,1	0,4	0,77	0,032

Подсчет произведений степеней принадлежности по строкам (формула 3) приводит к качественно аналогичным результатам, но позволяет более четко оценивать варианты решений, что видно из сравнения данных столбцов 7 и 8.

## **Литература**

1. Автоматизированные системы технологической подготовки производства в машиностроении / под. ред. Г.К. Горанского. – М.: Машиностроение, 1976. – 240с.
2. Лазарсон Э.В. Теория и методы решения многовариантных неформализованных задач выбора (с примерами из области сварки). – Пермь: Изд-во Перм. гос. техн. ун-та, 2008. – 270с.
3. Заде Л. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. – М.: Мир, 1976. - 165с.

# СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ДЛЯ ОЦЕНКИ НАДЕЖНОСТИ

## Теория надежности

*Теория надежности* – научная дисциплина, в которой разрабатываются и изучаются методы обеспечения эффективности работы объектов (изделий, устройств, систем и т.п.) в процессе эксплуатации. В теории надежности вводятся показатели надёжности объектов, обосновываются требования к надёжности с учётом экономических и других факторов, разрабатываются рекомендации по обеспечению заданных требований к надёжности на этапах проектирования, производства, хранения и эксплуатации.

Количественные показатели надёжности вводят в теорию на основе построения математических моделей рассматриваемых объектов. В Надежности теории используются разнообразные математические методы; особое место занимают методы теории вероятностей и математической статистики. Это связано с тем, что события, описывающие показатели надёжности (моменты появления отказов, длительность ремонта и т.д.), часто являются случайными. Для расчёта вероятности безотказной работы объекта в течение некоторого времени используются аналитические методы теории случайных процессов. Расчёт количественных показателей надёжности объектов с учётом возможности восстановления отказавших устройств во многом аналогичен расчёту систем массового обслуживания теории. Аналитические методы расчёта надёжности сочетаются с методами моделирования на ЭВМ.

## Надёжность изделия

*Надёжность изделия* – свойство изделия сохранять значения установленных параметров функционирования в определённых пределах, соответствующих заданным режимам и условиям использования, технического обслуживания, хранения и транспортирования. Надёжность – комплексное свойство, которое в зависимости от назначения изделия и условий его эксплуатации может включать безотказность, долговечность, ремонтпригодность и сохраняемость в отдельности или определённое сочетание этих свойств как изделия в целом, так и его частей. Основное понятие, используемое в теории надёжности, – понятие отказа, т.е. утраты работоспособности, наступающей либо внезапно, либо постепенно. Работоспособность – такое состояние изделия, при котором оно соответствует всем требованиям, предъявляемым к его основным параметрам. К числу основных параметров изделия относятся: быстродействие, нагрузочная характеристика, устойчивость, точность выполнения производственных операций и т.д. Вместе с другими показателями (масса, габариты, удобство в обслуживании и др.) они составляют комплекс показателей качества изделия. Показатели качества могут изменяться с течением времени. Изменение их, превышающее допустимые значения, приводит к возникновению отказового состояния (частичного или полного отказа изделия). Показатели Надёжность нельзя противопоставлять другим показателям качества: без учёта Надёжность все другие показатели качества изделия теряют свой смысл, точно так же и показатели Надёжность становятся полноценными показателями качества лишь в сочетании с др. характеристиками изделия. Понятие «Надёжность изделия» давно используется в инженерной практике. Любые технические устройства – машины, инструменты или приспособления – всегда изготавливались в расчёте на некоторый достаточный для практических целей период использования. Однако долгое время Надёжность не измерялась количественно, что значительно затрудняло её объективную оценку. Для оценки Надёжность использовались такие понятия, как высокая Надёжность, низкая Надёжность и др. качественные определения. Установление количественных показателей Надёжность и способов их измерения и расчёта положило начало научным методам в исследовании Надёжность. На первых этапах развития теории Надёжность основное внимание сосредоточивалось на сборе и обработке статистических данных об отказах изделий. В оценке Надёжность преобладал характер констатации степени надёжности на основании этих статистических данных. Развитие теории надёжности сопровождалось

совершенствованием вероятностных методов исследования, как-то: определение законов распределения наработки до отказа, разработка методов расчёта и испытаний изделий с учётом случайного характера отказов и т.п. Вместе с тем возникали новые направления исследований: поиск принципиально новых способов повышения надёжности, прогнозирование отказов и прогнозирование надёжности, анализ физико-химических процессов, оказывающих влияние на надёжность, установление количественных связей между характеристиками этих процессов и показателями. Надёжность, совершенствование методов расчёта Надёжность изделий, обладающих всё более сложной структурой, с учётом всё большего числа действующих факторов (достоверность исходных данных, контроль и профилактика, условия работы и обслуживания и т.д.). Испытания на Надёжность совершенствовались главным образом в направлении проведения ускоренных и неразрушающих испытаний. Наряду с совершенствованием натуральных испытаний широкое распространение получили математическое моделирование и сочетание натуральных испытаний с моделированием. В результате к 50-м гг. 20 в. сформировались основы общей теории Надёжность и её частных направлений по отдельным видам техники.

Увеличивающаяся сложность технических устройств; возрастающая ответственность функций, которые выполняют технические устройства; повышение требований к качеству изделий и условиям их работы; возросшая роль автоматизации, которая сокращает возможность непрерывного наблюдения за состоянием устройства, – основные факторы, определившие главные направления в развитии науки о надёжности. Технические средства и условия их работы становятся всё более сложными. Количество элементов в отдельных видах устройств исчисляется сотнями тысяч. Если не принимать специальных мер по обеспечению Надёжность, то любое современное сложное устройство практически будет неработоспособным. Так, например, в современной ЭВМ средней производительности за 1 с происходит около 5 млн. смен состояний в результате переключений её двоичных элементов, число которых достигает нескольких десятков тыс. За 5 ч непрерывной работы ЭВМ, требуемых на решение типовой задачи, происходит свыше  $10^{12}$ – $10^{14}$  смен состояний машины. Вероятность возникновения хотя бы одного отказа при этом становится достаточно большой, а следовательно, необходимы специальные меры, обеспечивающие работоспособность ЭВМ.

Техническим средствам отводят всё более ответственные функции на производстве и в сфере управления. Отказ технического устройства зачастую может привести к катастрофическим последствиям. Надёжность в эпоху научно-технической революции стала важнейшей проблемой.

### **Количественные показатели надёжности**

Надёжность изделий определяется набором показателей; для каждого из типов изделий существуют рекомендации по выбору показателей Надёжность. Для оценки Надёжность изделий, которые могут находиться в двух возможных состояниях – работоспособном и отказовом, применяются следующие показатели: среднее время работы до возникновения отказа  $T_{cp}$  – наработка до первого отказа; среднее время работы, приходящееся на один отказ,  $T$  – наработка на отказ; интенсивность отказов  $l(t)$ ; параметр потока отказов  $w(t)$ ; среднее время восстановления работоспособного состояния  $t_b$ ; вероятность безотказной работы за время  $t$  [ $P(t)$ ]; готовности коэффициент  $K_r$ .

Закон распределения наработки до отказа определяет количественные показатели Надёжность невозстанавливаемых изделий. Закон распределения записывается либо в дифференциальной форме плотности вероятности  $f(t)$ , либо в интегральной форме  $F(t)$ . Существуют следующие соотношения между показателями Надёжность и законом распределения:

$$P(t) = 1 - F(t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda(t) dt\right);$$

$$T_{cp} = \int_0^{\infty} t \cdot f(t) dt = \int_0^{\infty} P(t) dt; \quad \lambda(t) = \frac{f(t)}{P(t)}.$$

Для восстанавливаемых изделий вероятность появления  $n$  отказов за время  $t$  в случае простейшего потока отказов определяется законом Пуассона:

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}.$$

Из него следует, что вероятность отсутствия отказов за время  $t$  равна  $P(t) = \exp(-\lambda t)$  (экспоненциальный закон надёжности).

Технические системы, состоящие из конструктивно независимых узлов, обладающие способностью перестраивать свою структуру для сохранения работоспособности при отказе отдельных частей, в теории Надёжность принято называть сложными техническими системами (в отличие от сложных кибернетических систем, называются также большими системами). Число работоспособных состояний таких систем – два и более. Каждое из работоспособных состояний характеризуется своей эффективностью работы, которая может измеряться производительностью, вероятностью выполнения поставленной задачи и т.д. Показателем Надёжность сложной системы может быть суммарная вероятность работоспособности системы – сумма вероятностей всех работоспособных состояний системы.

### Способы определения количественных показателей надёжности

Показатели Надёжность определяются из расчётов, проведением испытаний и обработкой результатов (статистических данных) эксплуатации изделий, моделированием на ЭВМ, а также в результате анализа физико-химических процессов, обуславливающих Надёжность изделия. Расчёты Надёжность основаны на том, что при определенной структуре изделия и имеющемся законе распределения наработки до отказа изделий этого типа существуют вполне определенные зависимости между показателями Надёжность отдельных элементов и Надёжность изделия в целом. Для установления таких зависимостей используются следующие приемы: решение уравнений, составленных на основании структурной схемы Надёжность (использование последовательно-параллельных структур) или на основании логических связей между состояниями изделия (использование алгебры логики); решение дифференциальных уравнений, описывающих процесс перехода изделия из одного состояния в другие (использование графов состояний); составление функций, описывающих состояния сложного изделия. Расчёты надёжности производятся главным образом на этапе проектирования изделий с целью прогнозирования для данного варианта изделия ожидаемой Надёжность. Это позволяет выбрать наиболее подходящий вариант конструкции и методы обеспечения Надёжность, выявить «слабые места», обоснованно назначить рабочие режимы, форму и порядок обслуживания изделия.

Испытания на надёжность производятся на этапах разработки опытного образца и серийного производства изделия. Существуют испытания на надёжность определительные, в результате которых определяют показатели надёжность; контрольные, имеющие целью контроль качества технологического процесса, обеспечивающего с некоторым риском Надёжность не ниже заданной; ускоренные, в ходе которых используют факторы, ускоряющие процесс возникновения отказов; неразрушающие, основанные на применении методов дефектоскопии и интроскопии, а также на изучении косвенных признаков (шумов, тепловых излучений и т.п.), сопутствующих возникновению отказов.

Моделирование на ЭВМ является наиболее эффективным средством анализа надёжности сложных систем. Широко распространены два алгоритма моделирования:

первый, основанный на моделировании физических процессов, происходящих в исследуемом объекте (оценка Надёжность при этом определяется по числу выходов параметров объекта за пределы допуска); второй, основанный на решении систем уравнений, описывающих состояния исследуемого объекта.

Анализ физико-химических процессов также позволяет получить оценку Надёжность исследуемого изделия, т. к. часто удаётся установить зависимость Надёжность от состояния и характера протекания физико-химических процессов (соотношение показателей прочности и нагрузки, износостойкость, наличие примесей в материалах, изменение электрических и магнитных характеристик, шумовые эффекты и т.д.). Наиболее часто анализ физико-химических процессов применяется при оценке Надёжность элементов радиоэлектронной аппаратуры.

## МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ

Моделирование — инструмент анализа и синтеза объектов (систем, процессов, явлений), используемый в самых различных областях жизнедеятельности человека: науке, технике, медицине, химии, в военном деле и др. Невозможно представить себе современную науку без широкого применения *математического моделирования*. Сущность этой методологии состоит в замене исходного объекта его "образом" — *математической моделью* — и дальнейшем изучении модели с помощью реализуемых на компьютерах вычислительно-логических алгоритмов. Этот метод познания, конструирования, проектирования сочетает в себе многие достоинства как теории, так и эксперимента. Работа не с самим объектом (явлением, процессом), а с его моделью дает возможность безболезненно, относительно быстро и без существенных затрат исследовать его свойства и поведение в любых мыслимых ситуациях (преимущества теории). В то же время вычислительные (компьютерные, симуляционные, имитационные) эксперименты с моделями объектов позволяют, опираясь на мощь современных вычислительных методов и технических инструментов информатики, подробно и глубоко изучать объекты в достаточной полноте, недоступной чисто теоретическим подходам (преимущества эксперимента). Неудивительно, что методология математического моделирования бурно развивается, охватывая все новые сферы - от разработки технических систем и управления ими до анализа сложнейших экономических и социальных процессов. Возникли такие новые дисциплины, как «математическая экономика», «математическая химия», «математическая лингвистика» и т. д., изучающие математические модели соответствующих объектов и явлений, а также методы исследования этих моделей.

К настоящему времени развитие информационных технологий привело к появлению высоко-эффективных методов моделирования, рассчитанных на современные компьютеры. Прежде всего имеется ввиду применение профессиональных программ Matlab, Labview, Scilab.

### Теория моделирования

#### Основные понятия

Модель и моделирование – это универсальные понятия, атрибуты одного из наиболее мощных методов познания в любой профессиональной области, познания объекта, процесса, явления. Модели и моделирование объединяют специалистов различных областей, работающих над решением межпредметных проблем, независимо от того, где эта модель и результаты моделирования будут применены.

Слово "модель" (лат. *modulus*) означает "мера", "способ", "сходство с какой-то вещью". Первоначально моделью называли некое вспомогательное средство, объект, который в определенных ситуациях заменял другой объект. Например, манекен в определенном смысле заменяет человека, являясь моделью человеческой фигуры. Древние философы считали, что отобразить природу можно только с помощью логики и правильных рассуждений, т.е. по современной терминологии с помощью языковых моделей. Через несколько столетий девизом английского Научного общества стал лозунг: «Ничего

словами!», признавались только выводы, подкрепленные экспериментально или математическими выкладками.

Моделью называется объект-заместитель, который при определенных предположениях, гипотезах о поведении оригинала позволяет замещать оригинал для его лучшего исследования, воспроизводя интересующие нас свойства и характеристики оригинала, причем имеет существенные преимущества:

- дешевизну;
- наглядность;
- легкость оперирования и т.п.

Проблема моделирования состоит из трех взаимосвязанных задач:

- построение новой (или адаптация известной) модели;
- исследование модели (разработка метода исследования или адаптация, применение известного);
- использование (на практике или теоретически) модели.

Схема построения модели  $M$  системы  $S$  с входными сигналами  $X$  и выходными сигналами  $Y$  изображена на рис. 2.

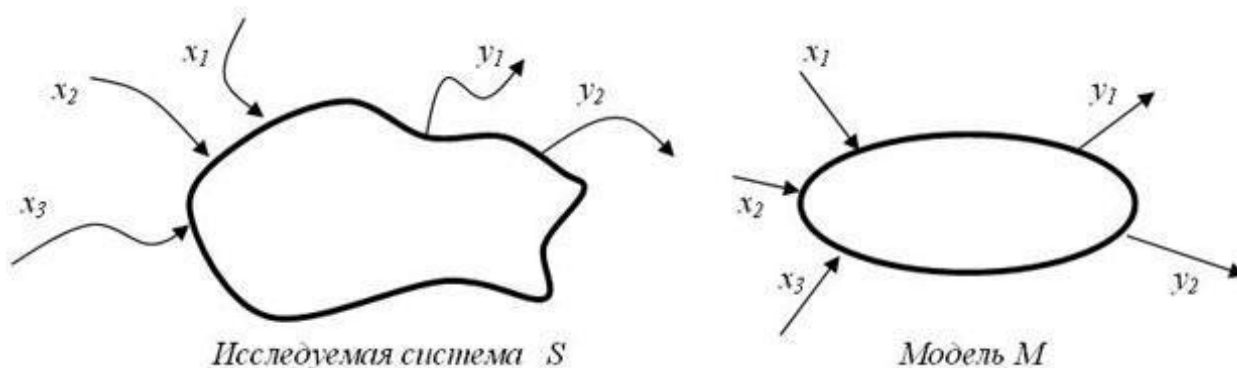


Рис. 2. Схема построения модели

Если на вход  $M$  поступают сигналы из  $X$  и на выходе появляются сигналы из  $Y$ , то задан закон  $Y=F(X)$  функционирования модели, системы.

### **Классификация видов моделирования**

В силу многозначности понятия «модель» в науке и технике не существует единой класси-

фикации видов моделирования: классификацию можно проводить по характеру моделей, по характеру моделируемых объектов, по сферам приложения моделирования. В данном пособии приводится классификация наиболее применимых, по мнению авторов, видов моделирования в оплотехнике и тепловидении.

В зависимости от характера изучаемых процессов в системе  $S$  виды моделирования могут быть разделены на: детерминированные и стохастические; статические и динамические; дискретные, непрерывные и дискретно-непрерывные.

**Детерминированное** моделирование отображает детерминированные процессы, то есть процессы, в которых предвидится отсутствие всяких случайных влияний.

**Стохастическое** моделирование отображает вероятностные процессы и случаи. Анализируются ряд реализаций случайного процесса и оцениваются средние характеристики, то есть набор однородных реализаций.

**Статическое** моделирование описывает поведение объекта в данный момент времени.

**Динамическое** моделирование отображает поведение объекта во времени.

**Дискретное** моделирование отображает дискретные процессы, **непрерывное** моделирование

- непрерывные процессы, **дискретно-непрерывное** моделирование - оба процесса.

В зависимости от формы представления объекта (системы S) выделяют: вымышленное и реальное.

**Вымышленное (абстрактное)** моделирование применяется, когда невозможно или слишком дорогостояще материальное создание. Делится на:

- наглядное;
- символическое.

Наглядное моделирование - на базе представления человека об объекте создаются гипотетические модели, аналоги и макеты. Гипотетическое моделирование - выбирается гипотеза о реальном объекте, гипотеза, которая отображает уровень знаний об объекте, когда знаний не хватает для формализации. Аналоговое моделирование использует аналогии разных уровней (полная, неполная, приближительная). Макетирование - в основе выполненного макета лежит аналогия причинно-наследственных связей.

Символическое моделирование - искусственный процесс создания логического объекта- заместителя реального с помощью системы знаков и символов. Знаковое моделирование - вводятся знаки, условные обозначения отдельных понятий, составляются из знаков слова и предложения; операции объединения, пересечения и дополнения теории множеств дают описание объекта. Языковое моделирование - в основе лежит словарь однозначных понятий.

**Реальное (натурное)** моделирование - исследование на реальном объекте и обработке результатов экспериментов на основе теории подобия. Научный эксперимент, комплексные исследования, производственный эксперимент (исследуется широкая автоматизация, вмешательство в управление реальным процессом, создание критических ситуаций).

**Физическое** моделирование - на установках, которые сохраняют природу явлений при физическом подобии.

**Кибернетическое** моделирование - нет непосредственно физического подобия. Отображается S как "черный ящик" рядом входов и выходов.

При моделировании сложных объектов (систем) рассматривают: **макромоделирование** - моделирование системы в целом на уровне подсистем; **микромоделирование** - моделирование систем или подсистем на уровне элементов.

**Математическое моделирование** - замена реального объекта моделью, свойства которой описаны математическими формулами. Делится на аналитическое, имитационное и комбинированное.

Приведем примеры применения математического моделирования в различных областях: энергетика: управление ядерными реакторами, моделирование термоядерных процессов,

прогнозирование энергетических процессов, управление энергоресурсами и т.д.;

экономика: моделирование, прогнозирование экономических и социально-экономических процессов, межбанковские расчеты, автоматизация работ и т.д.;

космонавтика: расчет траекторий и управления полетом космических аппаратов, моделирование конструкций летательных аппаратов, обработка спутниковой информации и т.д.;

медицина: моделирование, прогнозирование эпидемий, инфекционных процессов, управление процессом лечения, диагностика болезней и выработка оптимальных стратегий лечения и т.д.;

производство: управление техническими и технологическими процессами и системами, ресурсами (запасами), планирование, прогнозирование оптимальных процессов производства и т.д.;

экология: моделирование загрязнения экологических систем, прогноз причинно-следственных связей в экологической системе, откликов системы на те или иные воздействия экологических факторов и т.д.;

### Классификация моделей

Виды моделей можно классифицировать следующим способом (см. рис.2.2):



Рис.3. Классификация моделей

Модели могут быть относительно полными и неполными. **Полная** модель характеризует все основные свойства объекта во времени и в пространстве. **Неполная** модель характеризует ограниченную часть свойств объекта. Теория подобия утверждает, что абсолютное подобие может иметь место лишь при замене объекта точно таким же. Но тогда теряется смысл моделирования.

Модель **детерминированная**, если для каждой допустимой совокупности входных параметров она позволяет определять однозначно набор выходных параметров; в противном случае модель недетерминированная, **стохастическая** (вероятностная).

Модель **статическая**, если среди параметров описания модели нет (явно) временного параметра. Модель **динамическая**, если среди параметров модели явно выделен временной параметр.

Модель **дискретная**, если описывает поведение оригинала лишь дискретно, в определенные моменты времени. Модель **непрерывная**, если описывает поведение оригинала на всем промежутке времени.

Есть и другие виды моделей:

Модель **функциональная**, если представима системой функциональных соотношений (на- пример, уравнений).

Модель **теоретико-множественная**, если представима некоторыми множествами и отношениями их и их элементов.

Модель **логическая**, если представима предикатами, логическими функциями и отношениями.

Модель **информационно-логическая**, если она представима информацией о составных элементах, подмоделях, а также логическими отношениями между ними.

Модель **игровая**, если она описывает, реализует некоторую игровую ситуацию между элементами (объектами и субъектами игры).

Модель *алгоритмическая*, если она описана некоторым алгоритмом или комплексом алгоритмов, определяющим ее функционирование, развитие. *Вычислительная* модель – про-грамма, реализующая алгоритмическую модель.

Модель *графовая*, если она представима графом (отношениями вершин и соединяющих их ребер) или графами и отношениями между ними.

Модель *языковая*, лингвистическая, если она представлена некоторым лингвистическим объектом, формализованной языковой системой или структурой. Иногда такие модели называют вербальными, синтаксическими и т.п.

Модель *визуальная*, если она позволяет визуализировать отношения и связи моделируемой системы, особенно в динамике.

Модель *натурная*, если она есть материальная копия оригинала.

Модель *имитационная*, если она построена для испытания или изучения, проигрывания возможных путей развития и поведения объекта путем варьирования некоторых или всех параметров модели.

Пример. Модель  $F = am$  – статическая модель движения тела по наклонной плоскости. Динамическая модель типа закона Ньютона:  $F(t) = a(t)m(t)$  или, еще более точно и лучше,  $F(t) = s''(t)m(t)$ . Если рассматривать только  $t = 0.1, 0.2, \dots, 1$  (с), то модель  $S_t = gt^2/2$  или числовая последовательность  $S_0 = 0, S_1 = 0.01g/2, S_2 = 0.04g, \dots, S_{10} = g/2$  может служить дискретной моделью движения свободно падающего тела. Модель  $S = gt^2/2, 0 < t < 10$  непрерывна на промежутке времени  $(0;10)$ . Если в модели  $S = gt^2/2, 0 < t < 10$  мы учтем случайный параметр

– порыв ветра с силой  $p$  при падении тела, например, просто так:  $S(p) = g(p)t^2/2, 0 < t < 10$ , то мы получим стохастическую модель (уже не свободного!) падения.

Пусть модель экономической системы производства товаров двух видов 1 и 2, соответственно, в количестве  $x_1$  и  $x_2$  единиц и стоимостью каждой единицы товара  $a_1$  и  $a_2$  на предприятии описана в виде соотношения  $a_1x_1 + a_2x_2 = S$ , где  $S$  – общая стоимость произведенной предприятием всей продукции (вида 1 и 2). Можно ее использовать в качестве имитационной модели, определяя общую стоимость  $S$  в зависимости от тех или иных значений объемов производимых товаров. Приведенные выше модели – детерминированные.

Вид модели зависит от связей и отношений его подсистем и элементов, окружения, а не от его физической природы. Математические описания (модели) динамики эпидемии инфекционной болезни, радиоактивного распада, усвоения второго иностранного языка, выпуска изделий производственного предприятия и т.д. являются одинаковыми с точки зрения их описания, хотя процессы различны.

### Свойства модели

Основные свойства любой модели: подобие; адекватность; приближенность; упрощенность; целенаправленность; конечность; информативность; полнота; замкнутость и др.

Чтобы некоторая материальная конструкция могла быть моделью, т.е. замещала в каком-то отношении оригинал, между оригиналом и моделью должно быть установлено *отношение подобия*. Существуют разные способы установления такого подобия, что придает моделям особенности, специфичные для каждого способа.

Прежде всего, это подобие, устанавливаемое в процессе создания модели. Назовем такое *подобие прямым*. Примером такого подобия являются фотографии, масштабированные модели самолетов, кораблей, макеты зданий, выкройки, куклы и т.д.

Следует помнить, что как бы хороша ни была модель, она все-таки лишь заместитель оригинала только в определенном отношении. Даже тогда, когда модель прямого подобия

выполнена из того же материала, что и оригинал, т.е. подобна ему субстратно, возникают проблемы переноса результатов моделирования на оригинал. Например, при испытании уменьшенной модели самолета в аэродинамической трубе задача пересчета данных модельного эксперимента становится нетривиальной и возникает разветвленная, содержательная теория подобия, позволяющая привести в соответствие масштабы и условия эксперимента, скорость потока, вязкость и плотность воздуха. Трудно достигается взаимозаменяемость модели и оригинала в фотокопиях произведений искусства, голографических изображениях предметов искусства.

Второй тип подобия между моделью и оригиналом называется *косвенным*. Косвенное подобие между оригиналом и моделью объективно существует в природе и обнаруживается в виде достаточной близости или совпадения их абстрактных математических моделей и вследствие этого широко используется в практике реального моделирования. *Наиболее характерным примером может служить электромеханическая аналогия между маятником и электрическим контуром.*

Оказалось, что многие закономерности электрических и механических процессов описываются одинаковыми уравнениями, различие состоит в разной физической интерпретации переменных, входящих в это уравнение. Роль моделей, обладающих косвенным подобием, очень велика и роль аналогий (моделей косвенного подобия) в науке и практике трудно переоценить. Аналоговые вычислительные машины позволяют найти решение почти всякого дифференциального уравнения, представляя собой, таким образом, модель, аналог процесса, описываемого этим уравнением. Использование электронных аналогов в практике определяется тем, что электрические сигналы легко измерить и зафиксировать, что дает известные преимущества модели.

Третий, особый класс моделей составляют модели, подобие которых оригиналу не является ни прямым, ни косвенным, а *устанавливается в результате соглашения*. Такое подобие называется *условным*. С моделями условного подобия приходится иметь дело очень часто, поскольку они являются способом материального воплощения абстрактных моделей.

Примерами условного подобия служат деньги (модель стоимости), удостоверение личности (модель владельца), всевозможные сигналы (модели сообщения).

Например, сигналом наступления кочевников у древних славян служили костры на курганах. Бумажные денежные знаки могут играть роль модели стоимости только до тех пор, пока в среде их обращения существуют правовые нормы, поддерживающие их функционирование. Керенки в настоящее время имеют только историческую ценность, но это не деньги, в отличие от царских золотых монет, которые представляют материальную ценность из-за наличия благородного металла. Особенно наглядна условность знаковых моделей: цветок в окне явочной квартиры Штирлица означал провал явки, ни сорт, ни цвет не имели никакого отношения к знаковой функции цветка.

**Адекватность** означает, что требования полноты, точности и правильности (истинности) модели выполнены не вообще, а лишь в той мере, которая достаточна для достижения поставленной цели.

В ряде случаев удается ввести меру адекватности некоторых целей, т.е. указать способ сравнения двух моделей по степени успешности достижения цели с их помощью. Если к тому же есть способ количественно выразить меру адекватности, то задача улучшения модели существенно облегчается. Именно в таких случаях можно количественно ставить вопросы об идентификации модели, т.е. о нахождении в заданном классе моделей наиболее адекватной, об исследовании чувствительности и устойчивости моделей, т.е. зависимости меры адекватности модели от ее точности, об адаптации моделей, т.е. подстройке параметров модели с целью повышения ее точности.

**Приближенность** модели не следует путать с адекватностью. Приближенность модели может быть очень высокой, но во всех случаях модель - это другой объект и

различия неизбежны (единственной совершенной моделью любого объекта является сам объект). Величину, меру, степень приемлемости различия можно ввести, только соотнося его с целью моделирования. Так некоторые подделки произведений искусства даже эксперты не могут отличить от оригинала, но все-таки это всего лишь подделка, и с точки зрения вложения капитала не представляет никакой ценности, хотя для любителей искусства ничем не отличается от оригинала. У английского фельдмаршала Монтомгери во время войны был двойник, появление которого на разных участках фронта намеренно дезинформировало разведку немцев. **Упрощенность** является сильным средством для выявления главных эффектов в исследуемом явлении: это видно на примере таких явлений физики, как идеальный газ, абсолютно упругое тело, математический маятник и абсолютно твердый рычаг.

Есть еще один, довольно загадочный, аспект упрощенности модели. Почему-то оказывается, что из двух моделей, одинаково хорошо описывающих систему, та модель, которая проще, ближе к истине. Геоцентрическая модель Птолемея позволяла рассчитать движение планет, хотя и по очень громоздким формулам, с переплетением сложных циклов. Переход к гелиоцентрической модели Коперника значительно упростил расчеты. Древние говорили, что про- стога - печать истины.

#### Этапы создания модели

Этапы создания модели приведены на рис.4. При конструировании модели любого физического объекта в начале разрабатывается его физическая модель, в которой описывается принцип действия. Затем разрабатывается математическая модель, в которой устанавливаются количественные зависимости между входными и выходными параметрами объекта. На основе математической модели разрабатывается вычислительная модель, представляющая собой программу для ЭВМ. Имея вычислительную модель, можно проводить вычислительный эксперимент - исследование характеристик объекта путём многократного выполнения программы вычислительной модели при разных исходных данных.

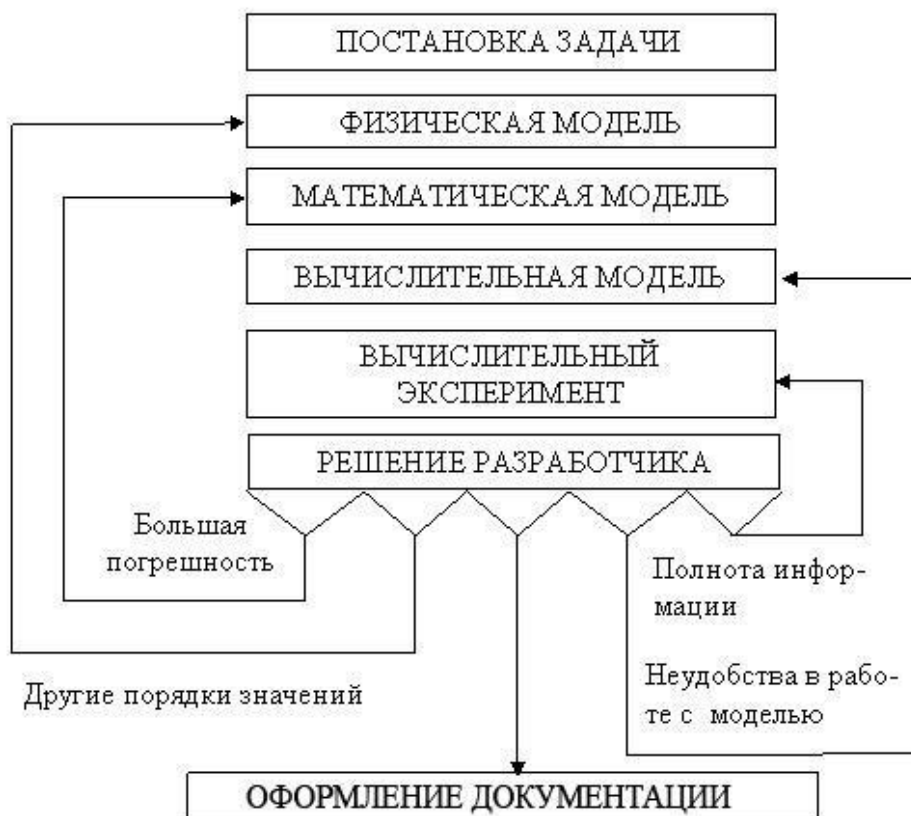


Рис.4. Этапы создания модели

Если движение и преобразование информации в рамках вычислительной модели имитирует физические процессы в объекте моделирования, то вычислительный эксперимент называется имитационным моделированием.

Итерационный процесс разработки моделирования отражён на рисунке 5. Если результаты вычислительного эксперимента радикально не согласуются с результатами физического эксперимента, то выдвигается новая гипотеза физической модели. Если результаты вычислительного эксперимента согласуются с результатами физического эксперимента, но погрешность превышает допустимые нормы, то корректируется математическая модель. Если же процесс моделирования недостаточно робастный и требует от пользователя много трудовых затрат, а от ЭВМ - больших ресурсов, то требуется корректировка вычислительной модели. При работе с моделью проектировщик задаёт как входные воздействия, так и внутренние параметры системы, определяющие преобразовательные свойства последней.

Процесс анализа некоторой системы с помощью вычислительной модели показан на рисунке 2.4.

Математически этот процесс можно представить в виде выражения:  $Y = F\{X\}$

где  $X$  - вектор входных воздействий, т. е. набор числовых значений различных параметров сигналов, поступающих на вход системы;

$Y$  - вектор отклика системы, т.е. набор числовых значений, характеризующих реакцию системы на заданные входные воздействия;

$F$  - обобщённый оператор, характеризующий процессы преобразования информации в модели.



Рис.5. Процесс анализа системы с помощью вычислительной модели

### Моделирование объектов управления. Классификация моделей

Аппаратное управление является следующим разделом теоретической кибернетики:

- вероятностные методы;
- методы оптимизации;
- численные методы;
- методы дискретной математики.

В основе исследований ОУ лежат вероятностные методы (теория вероятности, аппроксимация, теория Марковских цепей).

Все модели делятся на 3 группы:

- 1) Модель, в основе которой лежит вероятностная природа модели теории массового обслуживания (надежность, существование закономерности устранения отказов).
- 2) Объединенные кибернетические модели, поведение которых описывается дифференциально-разностными уравнениями.
- 3) Дискретные кибернетические модели (время не используется как выходная величина).

В основе моделирования лежит теория подобия, которая утверждает, что абсолютное подобие может быть лишь при замене одного объекта другим точно таким же.

## Классификация видов моделирования систем:



В зависимости от характера изучаемых процессов все виды моделирования могут быть разделены на детерминированные и стохастические, статические и динамические, дискретные, непрерывные и дискретно-непрерывные.

**Детерминированное** моделирование отображает детерминированные процессы, т.е. процессы, в которых предполагается отсутствие всяких случайных воздействий; стохастическое моделирование отображает вероятностные процессы и события.

**Статическое** моделирование служит для описания поведения объекта в какой-либо момент времени, а динамическое моделирование отражает поведение объекта во времени.

**Дискретное** моделирование служит для описания процессов, которые являются дискретными, соответственно **непрерывное** моделирование позволяет отразить непрерывные процессы в системах, а **дискретно-непрерывное** моделирование используется для случаев, когда хотят выделить наличие как дискретных, так и непрерывных процессов.

В зависимости от формы представления объекта выделяют **мысленное** и **реальное** моделирование. **Мысленное** моделирование часто является единственным способом моделирования объектов, которые либо практически реализуемы в заданном интервале времени, либо существуют вне условий, возможных для их физического создания.

При **наглядном** моделировании создаются различные наглядные модели, отображающие явления и процессы, протекающие в объекте.

В основе **гипотетического** моделирования исследователем закладывается некоторая гипотеза о закономерностях протекания процесса в реальном объекте, которая отражает уровень знаний исследователя об объекте и базируется на причинно-следственных связях между входом и выходом изучаемого объекта.

**Аналоговое** моделирование основывается на применении аналогий различных уровней.

**Макетирование** - мысленный макет может применяться в случаях, когда протекающие в реальном объекте процессы не поддаются физическому моделированию.

Под **математическим** моделированием будем понимать процесс установления соответствия данному реальному объекту некоторого математического объекта, называемого математической моделью, и исследование этой модели. Любая математическая модель, как и всякая другая, описывает реальный объект лишь с некоторой степенью приближения.

Для **аналитического** моделирования характерно то, что процессы функционирования элементов системы записываются в виде некоторых функциональных соотношений или логических условий.

При **имитационном** моделировании алгоритм, реализующий модель, воспроизводит процесс функционирования системы во времени, имитируются элементарные явления, составляющие процесс, с сохранением их логической структуры и последовательности протекания во времени.

**Комбинированное** моделирование систем позволяет объединить достоинства аналитического и имитационного моделирования.

При **реальном** моделировании используется возможность исследования различных характеристик либо на реальном объекте целиком, либо на его части.

**Натурным** моделированием называют проведение исследования на реальном объекте с последующей обработкой результатов эксперимента на основе теории подобия.

**Производственный эксперимент** и комплексные испытания проводят на реальном объекте, и они обладают высокой степенью достоверности.

**Научный эксперимент** связан с использованием средств автоматизации, применением разнообразных средств обработки информации.

**Физическое.** Исследование проводится на установках, которые сохраняют природу явлений и обладают физическим подобием (протекает в реальном и нереальном времени).

## ГРАФЫ

Теория графов служит математической моделью для всякой системы, содержащей бинарное отношение. В теоретико-графовых терминах формулируется большое число задач, связанных с дискретными объектами. Они являются универсальной структурной моделью различных физических систем, при изучении которых на первый план выступает характер соединений различных ее компонентов, т.е. связи и отношения между объектами (электрическими, механическими, пневматическими, химическими, биологическими, биофизическими, социологическими и др.). Они используются в задачах проектирования и конструирования, анализе надежности сетей связи, электронных схем, коммуникационных сетей, при решении транспортных задач о перевозках, планировании и управлении, при составлении оптимальных маршрутов доставки грузов, при моделировании сложных технологических процессов, генетике, психологии, социологии, экономике и т.д.

Преимущество графов следует из того, что они однозначно описывают структуру системы, на их основе просто записываются канонические уравнения, фиксируются физические свойства и причинная зависимость между переменными. Их особенностью является геометрический подход к изучению объектов, т.е. представление в виде диаграмм.

Граф – форма моделирования структур. В инженерной практике рассматриваются технические системы, которые представляют собой комплекс взаимосвязанных технических средств, обеспечивающих преобразование массы, энергии и информации. Существенным элементом при этом является установление отношений между входами и выходами технических средств. Комплекс этих отношений и образует систему.

Выделяют два типа отношений: отношения преобразования и отношения связей. Отношения преобразования включают отношения переработки (информации, массы, с изменением свойств материала (внутренней и внешней структуры), преобразование энергии) и отношения перемещения (изменение положения предмета по отношению к другим предметам). Отношение связи – это то, что объединяет функциональные элементы технической системы в одно целое. Они бывают только жесткими, т.е. не изменяющимися, в процессе функционирования системы. Через связи проходит интенсивный обмен веществом, энергией и информацией с окружающей средой и между элементами технической системы. Отношения связи отражают все взаимоотношения в технической системе и не обладают собственной материальной основой.

Под элементом системы будем понимать пару элементов  $I \rightarrow^F O$ , где F характеризует

преобразование.

Рассмотрим блок-схему комплекса, в котором имеется несколько элементов, обеспечивающих ее действие в соответствии с отношением преобразований (при одновременном существовании отношения связей).

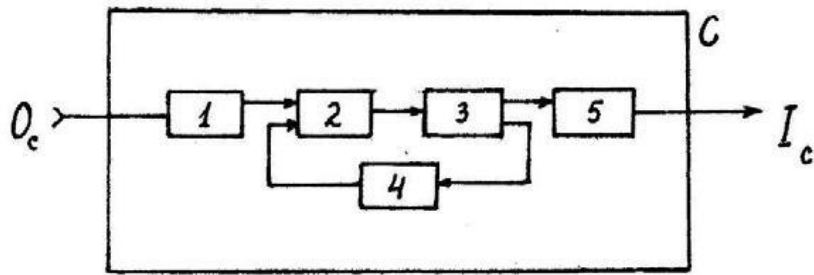


Рис. 6.

Элементы от 1 до 5 образуют комплекс, входящий как составная часть в совокупность С. Между действующим комплексом и этой совокупностью имеется отношение связи, которое обусловлено тем что вход  $O_c$  совокупности одновременно представляет собой и  $I$ .

Отношение между комплексом и совокупностью раскрывает связь  $O_5 = I_c$ . Аналитическая запись отношений преобразований и отношений связей как комплекса, образующего систему выглядит следующим образом:

$$O_c = I_1 \rightarrow O_1 = I_2 \rightarrow O_2 = I_3 \rightarrow O_3 = I_5 \rightarrow O_5 = I_c$$

$$\uparrow \downarrow$$

$$I_1 = O_4 \leftarrow I_4 = O_1$$

Рассмотренная система представляет собой последовательно-итерационный комплекс, т.к. включает преобразование  $I_4 \xrightarrow{F} O_4$ , дающее основу действия элемента 4 (случай обратной связи), характерного для автоматизированных комплексов.

Действие элементов 2 и 4 оказывается сложным, поскольку в элементе 2 действие осуществляется на основе отношений  $I_2 \xrightarrow{F} O_2$  и  $I_1 \xrightarrow{F} O_2$ , где  $I_2 = O_1$ ;  $I_1 = O_4$ .

Для элемента 3 существует обратное явление  $I_3 \xrightarrow{F} O_3$  и  $I_3 \xrightarrow{F} O_1$ , где  $O_3 = I_5$ ;  $O_1 = I_4$ .

Для рассмотренной выше блок-схемы (рис. 6) используется еще одна форма записи – граф. В этой форме записи блоки соответствуют вершинам графа и

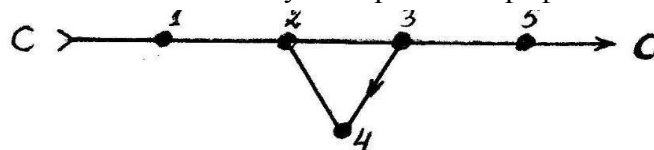


Рис. 7. обозначают отношения преобразований. Второй элемент графа - ребра (отрезки, соединяющие вершины) обозначают отношения связей.

Можно построить обратный граф (рис. 8), в котором отношения

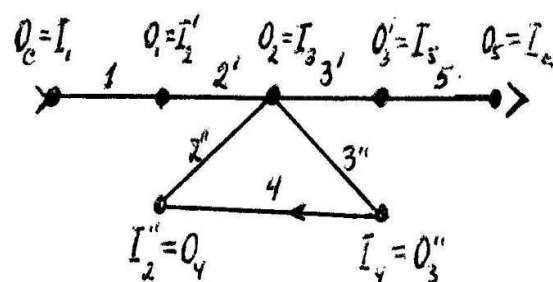


Рис. 8.

Преобразования обозначены ребрами, а отношения связей – вершинами. В этом случае вершинам соответствуют тождественные пары входов и выходов потоков энергии, массы или информации.

### Типы графов и способы их задания

Многие прикладные задачи сводятся к рассмотрению совокупностей некоторых объектов, находящихся во взаимной связи и взаимодействии. Например, при изучении электрических цепей существенным может оказаться характер соединений различных ее компонентов; органические молекулы образуют структуры, характерными свойствами которых являются связи между атомами; различные связи и отношения между людьми, событиями, также могут представлять интерес.

В подобных случаях принято, рассматриваемые объекты изображать точками, называемыми **вершинами**, а связи между ними – линиями (произвольной конфигурации), соединяющими их и называемыми **ребрами**. **Графом** называют множество вершин  $V$ , связи между которыми определены множеством ребер  $E$ . Таким образом, граф  $G$ , обозначенный как  $G=(V,E)$ , представляет собой пару  $(V, E)$ , где  $V$  – непустое множество элементов,  $E$  – некоторое подмножество множества  $V^{(2)}$  всех его двухэлементных подмножеств.

Будем рассматривать только **конечные** графы, т.е. предполагаем множество  $V$  конечным. Множество вершин графа  $G$  обозначим символом  $V_G$ , а множество ребер графа  $G$  – символом  $E_G$ . Вершины и ребра графа называются его элементами. Число  $|V_G|$  вершин графа  $G$  называется его порядком и обозначается через  $|G|$ . Если  $|G|=n$ ,  $|E_G|=m$ , то  $G$  называют  $(n, m)$  – графом.

Две вершины  $u$  и  $v$  графа называются **смежными**, если множество  $\{u,v\}$  является ребром; в противном случае вершины называются не смежными. Если  $e=\{u,v\}$  – ребро, то вершины  $u$  и  $v$  называют его **концами**, а также, что ребро  $e$  соединяет вершины  $u$  и  $v$ . Такое ребро обозначается символом  $uv$ .

Два ребра называются смежными, если они имеют общий конец. Вершина  $v$  и ребро  $e$  называются **инцидентными**, если  $v$  является концом ребра  $e$  (т.е.  $e=uv$ ), и **не инцидентными** в противном случае.

Следует иметь в виду, что смежность есть отношение между однородными элементами графа, тогда как инцидентность является отношением между разнородными элементами.

Множество всех вершин графа  $G$ , смежных с некоторой вершиной  $v$ , называется окружением вершины  $v$  и обозначается  $N_G(v)$  или  $N(v)$ .

Обычно граф представляется диаграммой, состоящей из точек и линий, соединяющих некоторые из этих точек. При этом точки соответствуют вершинам графа, а соединяющие пары точек линии – ребрам. Часто эту диаграмму и называют графом.

В качестве примера рассмотрим (5,6) граф (рис. 9). Для него множество вершин  $V_G = \{1,2,3,4,5\}$  и множество ребер  $E_G = \{\{1,2\}, \{1,5\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{4,5\}\}$ . Вершины 1 и 2 смежны, а 1 и 3 не смежны. Вершина 1 и ребро  $\{1,2\}$  инцидентны. Окружение вершины 2 есть  $N(2)=\{1,3,4,5\}$ .

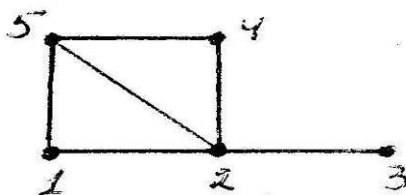


Рис. 9.

Граф  $G$  называется **полным**, если (соединены ребром). Полный граф порядка  $n$  обозначается символом  $K_n$ , число ребер в таком

графе равно  $C_n = \frac{2n(n-1)}{2}$ . На рис. 10 изображены полные графы  $K_1, K_2, K_3, K_4, K_5$ .

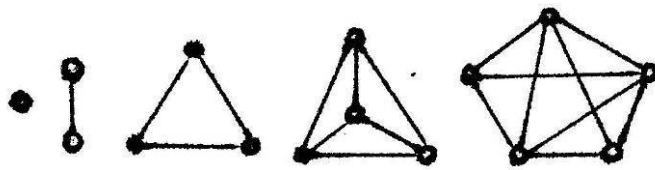


Рис. 10

Граф называется **пустым**, если в нем нет ребер. Пустой граф порядка  $n$  обозначается  $O_n$ . Для задания полного графа достаточно знать число его вершин. Набор подмножеств множества  $S$  называется **покрытием** множества  $S$ , если объединение этих подмножеств совпадает с  $S$ . Покрытие называется **разбиением**, если никакие два из входящих в него подмножеств не пересекаются. Граф называется **двудольным**, если существует такое разбиение множества его вершин на две части, что концы каждого ребра принадлежат разным частям. Если при этом любые две вершины, входящие в разные доли, смежны, то граф называется **полным двудольным**. Полный двудольный граф, доли которого состоят из  $p$  и  $q$  вершин, обозначается символом  $K_{p,q}$ . При  $p=1$  получаем звезду  $K_{1,q}$ . На рис. 11 изображены звезда  $K_{1,5}$  и полный двудольный граф  $K_{3,3}$ .

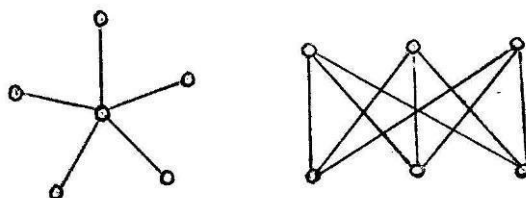


Рис. 11

Аналогично двудольным определяются  $K$ -дольный и полный  $K$ -дольный графы.

Поскольку в приложениях теории графов существенным является то, что есть объекты (вершины графа) и связи между объектами (ребра), граф является не геометрической, а **топологической фигурой**, определенные свойства которой инвариантны при взаимнонепрерывном и взаимнооднозначном пространственном преобразовании. Существенные инвариантные свойства графа отражают только число вершин, число ребер (дуг) и характер связей между вершинами. Так как граф является топологической фигурой, то один и тот же граф может быть изображен различными способами: вершины можно располагать в произвольном порядке, а соединяющие их ребра проводить в виде прямых или ломаных линий, информация, содержащаяся в графе, остается одной и той же. Оформим эти соображения в виде следующего определения:

Пусть  $G$  и  $H$  – графы, а  $\phi: VG \rightarrow VH$  – биекция. Если для любых вершин  $u$  и  $v$  графа  $G$  их образы  $\phi(u)$  и  $\phi(v)$  смежны в  $H$ , тогда и только тогда, когда  $u$  и  $v$  смежны в  $G$ , то эта биекция называется **изоморфизмом** графа  $G$  на граф  $H$ . Иначе говоря два графа называются **изоморфными**, если они имеют одинаковое число вершин и каждой паре вершин, соединенных ребром в одном графе, соответствует такая же пара вершин, которые соединены ребром в другом графе. Если существенные свойства графа не связаны со способом его изображения или нумерацией вершин и ребер, то изоморфные графы, обычно, не различают между собой. Изоморфизм графов  $G$  и  $H$  обозначают следующим образом:  $G \cong H$ . Например, три графа, представленные на рис. 12 изоморфны между собой, так же как и два графа на рис. 13, а графы на рис. 14 не изоморфны.

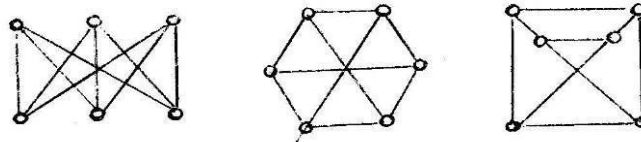


Рис. 12

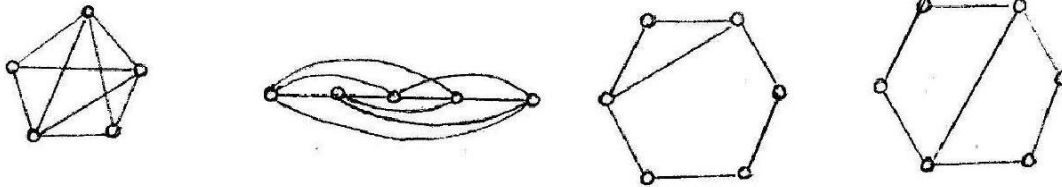


Рис. 13

Рис. 14

Вопрос о том, изоморфны ли два данных графа, в общем случае оказывается сложным. Очевидно, что отношение изоморфизма графов является эквивалентностью, т.е. оно симметрично, транзитивно и рефлексивно. Следовательно, множество всех графов разбивается на классы так, что графы из одного класса попарно изоморфны, а графы из разных классов не изоморфны. Изоморфные графы естественно отождествлять, т.е. считать совпадающими и изображать одним рисунком. В некоторых ситуациях приходится различать изоморфные графы и тогда вводится понятие «**помеченный граф**». Граф порядка  $n$  называется помеченным, если его вершинам присвоены некоторые метки. Например, номера  $1, 2, \dots, n$ . Отождествив каждую из вершин графа с ее номером, определим равенство помеченных графов  $G$  и  $H$  одного и того же порядка условием:  $G=H$  тогда, когда  $EG=EH$ . На рис. 5 изображены два равных помеченных графа. На рис. 15 изображены три разных помеченных графа. Чтобы подчеркнуть, что рассматриваемые графы различаются с точностью до изоморфизма, говорят: «абстрактный граф».

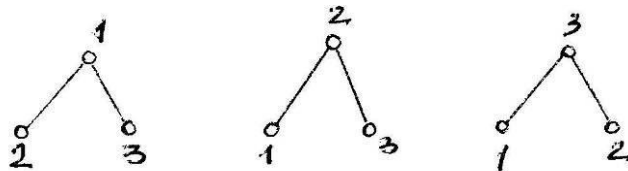


Рис. 15

Справедливо утверждение: число  $I_n$  помеченных графов порядка  $n$  равно  $2^{C_n}$ . **Дополнительным графом** (или дополнением)  $\bar{G}$  для произвольного графа  $G$  называется граф с теми же вершинами, что и  $G$ , и с теми и только теми ребрами, которые необходимо добавить к графу  $G$ , чтобы получился полный граф. На рис. 16 изображен граф  $G$  (слева) и дополнительный к нему (справа).

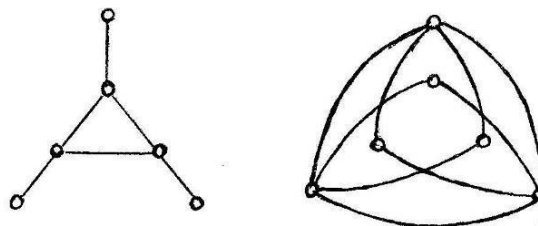


Рис. 16

Очевидно, что  $G = \bar{\bar{G}}$  и  $G \cong \bar{H}$ , если  $G \cong H$ . Граф, изоморфный своему дополнению, называется **самодополнительным**. Иногда приходится рассматривать более общие объекты, чем определенный выше граф, в которых две вершины могут соединяться более

чем одним ребром. **Мультиграф** – это пара  $(V, E)$ , где  $V$  – непустое множество (вершин), а  $E$  – семейство подмножества  $V^{(2)}$  (ребер). В этом определении допускается существование кратных ребер. Дальнейшее обобщение состоит в том, что кроме кратных ребер допускаются еще **петли**, т.е. ребра, соединяющие вершину саму с собой. **Псевдограф** – это пара  $(V, E)$ , где  $V$  – непустое множество (вершин), а  $E$  – некоторое семейство неупорядоченных пар вершин (ребер), не обязательно различных. На рис. 17 приведены мультиграф (слева) и псевдограф (справа), в основе которых лежит один и тот же граф – треугольник.

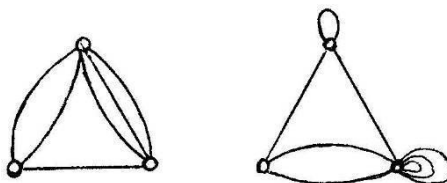


Рис. 17

Часто связи между объектами характеризуются вполне определенной ориентацией. Например, на некоторых улицах допускается только одностороннее автомобильное движение, в соединительных проводах электрической цепи задаются положительные направления токов, отношения между людьми могут определяться подчиненностью или старшинством. Ориентированные связи характеризуют переход системы из одного состояния в другое, различные отношения между числами (неравенство, делимость). Для указания направления связи между вершинами графа соответствующее ребро отмечается стрелкой. Ориентированное таким образом ребро называют **дугой**, а граф с ориентированными ребрами – **ориентированным графом (орграфом)**. Итак, ориентированный граф – это пара  $(V, A)$ , где  $V$  – множество вершин,  $A$  – множество ориентированных ребер (дуг),  $A \subseteq V^2$  ( $V^2$  – декартов квадрат, состоящий из упорядоченных пар элементов множества  $V$ ). Если  $a=(v_1, v_2)$  – дуга, то вершины  $v_1$  ее начало, а  $v_2$  – конец. Аналогично определяется **ориентированный мультиграф**. Рассматриваются также **смешанные графы**, у которых есть и дуги и неориентированные ребра.

Для всех этих видов графов вводится понятие изоморфизма как биекции между множествами вершин, сохраняющей смежность, кратности ребер, петли и направления дуг. **Направленный граф** – это орграф, не имеющий симметричных пар ориентированных ребер, т.е. дуг вида  $(u, v)$  и  $(v, u)$ . На рис. 18 приведены все орграфы с тремя вершинами и тремя дугами; два последних из них – направленные графы.

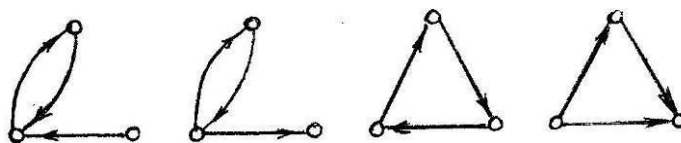


Рис. 18

### Характеристики графов

Рассмотрим некоторые важнейшие характеристики графов, полезные для их приложений, так как решение многих технических задач методами теории графов сводится к определению тех или иных характеристик графов.

**Циклическое число.** Пусть  $G$  – неориентированный граф, имеющий  $n$  вершин,  $m$  ребер и  $g$  компонент связности. Циклическим числом графа  $G$  называют число  $v=m-n+g$

Физический смысл этого числа заключается в том, что оно равно наибольшему числу независимых циклов в графе. При расчете электрических цепей цикломатическое число используется для определения числа независимых контуров.

**Хроматическое число.** Пусть  $p$  – натуральное число. Граф  $G$  называют  $p$ -хроматическим, если его вершины можно раскрасить  $p$  различными цветами так, чтобы никакие две смежные вершины не были раскрашены одинаково. Наименьшее число  $p$ , при котором граф является  $p$ -хроматическим, называют хроматическим числом графа и обозначают  $\chi(G)$ .

Если  $\chi(G)=2$ , то граф называют бихроматическим. Необходимым и достаточным условием бихроматичности графа является отсутствие в нем циклов нечетной длины. Хроматическое число играет важную роль при решении задачи наиболее экономичного использования ячеек памяти при программировании. За исключением случая бихроматического графа, определение хроматического числа представляет собой довольно трудную задачу.

**Множество внутренней устойчивости.** Множество  $S \subseteq V$  графа  $G=(V, E)$

называют внутренне устойчивым, если никакие две вершины из  $S$  несмежны, т.е. для любых  $u, v \in S$  имеет место  $(u, v) \notin E$ .

Множество внутренней устойчивости, содержащее наибольшее число элементов, называют наибольшим внутренне устойчивым множеством, а число элементов этого множества – числом внутренней устойчивости графа  $G$ . Наибольшее внутренне устойчивое множество играет важную роль в теории связи.

**Множество внешней устойчивости.** Множество  $T \subset V$  графа  $G=(V, E)$

называют внешне устойчивым, если любая вершина не принадлежащая  $T$ , соединена дугами с вершинами из  $T$ . Множество внешней устойчивости, содержащее наименьшее число элементов называют наименьшим внешне устойчивым множеством, а число элементов этого множества – числом внешней устойчивости графа  $G$ .

Пример. Задача о пяти ферзях.

Сколько ферзей достаточно расставить на шахматной доске так, чтобы каждая клетка доски находилась под ударом хотя бы одного из них? Эта задача сводится к отысканию наименьшего внешне устойчивого множества в графе с 64 вершинами (клетки доски), у которого  $(u, v) \in T$  тогда и только тогда, когда клетки  $u$  и  $v$  расположены на одной и той же горизонтали, вертикали или диагонали. Число внешней устойчивости  $\beta=5$  для ферзей,  $\beta=8$  для ладей,  $\beta=12$  для коней,  $\beta=8$  для слонов. Задача о восьми ферзях, которые нужно расставить на шахматной доске так, чтобы ни один из них не находился под ударом другого, сводится к нахождению наибольшего внутренне устойчивого множества, графа из предыдущей задачи.

Существуют алгоритмы нахождения внутренне устойчивого множества и наименьшего внешне устойчивого множества (см. К.Берж. Теория графов и ее применения. М. 1962).

## Полюсные графы

Физические системы с сосредоточенными компонентами.

Для физических систем, допускающих идеализированное представление в виде схем с сосредоточенными компонентами широко используются структурные модели в форме графов. Соединение между собой компонентов таких систем осуществляется путем объединения их полюсов, образующих узлы схемы. В зависимости от числа полюсов различают двухполюсные и многополюсные компоненты, которые так и называют двухполюсниками и многополюсниками. Например, схема на рис. 19 представляет собой соединение двух трехполюсников (А и В), четырехполюсника (С) и трех двухполюсников (Д, Е, F).

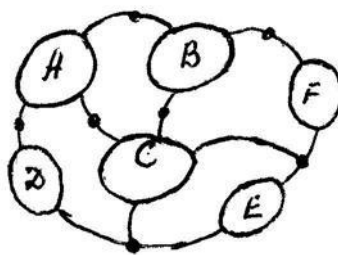


Рис. 19

Типичными представителями физических систем такого типа могут служить электрические и электронные цепи, в которых резисторы, конденсаторы и катушки индуктивности являются двухполюсниками, а трансформаторы, электронные лампы, транзисторы – многополюсниками. Аналогичные компоненты можно выделить в системах различной физической природы: механических, акустических, гидравлических, тепловых и т.д.

Для математического описания состава и структуры физической системы используются два типа соотношений:

- 1) **полюсные уравнения**, характеризующие индивидуальные свойства каждой компоненты вне возможных соединений с другими компонентами;
- 2) **уравнения связей**, отражающие характер соединения различных компонент в схеме вне зависимости к их индивидуальным свойствам.

### ДИСКРЕТНЫЕ МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ

Во многих случаях модель может быть представлена в виде численно-математической конструкции, то есть математических формул, описывающих моделируемый объект. С развитием имитационного моделирования область применения численно-математических моделей сократилась. Однако актуальность такого моделирования сохраняется для систем, особенно тех, в которых протекают так называемые процессы без последействия, то есть отсутствуют обратные связи, (см. иерархическую классификацию моделей). Процессы без последействия находят место при функционировании многих технических систем. Впервые один из типов такого процесса ввел в научный обиход и исследовал российский математик А. А. Марков, поэтому процессы без последействия и системы, в которых они протекают, названы *марковскими*, а один из типов такого процесса назван *цепью Маркова*.

В настоящее время теория марковских процессов разработана широко и детально, в основном, благодаря отечественным ученым А. Я. Хинчину, Б. В. Гнеденко, А. Н. Колмогорову и другим. Популярность этой теории состоит еще и в том, что она может быть применена и к системам с последействием, которые с помощью некоторых ухищрений можно трактовать как марковские.

В этой теме рассматриваются элементы теории марковских процессов и ряд численных моделей, в основе которых лежит допущение о марковости протекающих в моделируемых объектах процессов. К таковым, в первую очередь, относится широкий класс самых разнообразных объектов, имеющих общее название систем массового обслуживания (СМО). Для ряда стандартных структур СМО численные модели, связывающие показатели эффективности СМО с характеристиками элементов СМО, приведены в соответствующих справочниках. Здесь же приводятся классификация СМО и приемы построения графов состояний СМО, позволяющих строить или применять готовые численные модели.

Заметим, что для ряда современных сложных СМО численное моделирование неприемлемо в силу недостаточности адекватных математических средств. В этих случаях следует применять имитационное моделирование, которое детально рассматривается в следующих темах.

В многоэлементных системах с большим числом состояний численное моделирование на основе теории марковских процессов становится весьма громоздким. В этом случае используется так называемый метод динамики средних, который в основе имеет также марковость процесса. Этот метод существенно упрощает численное моделирование для случаев определения средних характеристик состояний моделируемой системы. В этой теме дано обоснование метода и приводятся примеры его применения.

Наиболее полное исследование процесса функционирования систем получается, если известны явные математические зависимости, связывающие искомые показатели с начальными условиями, параметрами и переменными исследуемой системы. Для многих современных систем, являющихся объектами моделирования, такие математические зависимости отсутствуют или малоприспособны, и следует применять другое моделирование, как правило, имитационное.

Однако есть ряд конкретных математических схем, проверенных практикой и доказавших эффективность моделированием. Целью изучения настоящей темы является освоение таких математических моделей.

В инженерной практике часто возникает задача моделирования процессов случайной смены состояний в исследуемом объекте. В рамках нашей профессии нас интересуют дискретные состояния. Например, техническое состояние объекта может характеризоваться дискретными состояниями: исправен - неисправен, загружен - находится в простое и т. п. Численность персонала изменяется дискретно, количество объектов, ожидающих обслуживания в очереди, и многое другое.

Вид очередного состояния может определяться случайным образом, смена состояний может происходить в случайные или не случайные моменты времени.

Большой класс случайных процессов составляют процессы без последствия, которые в математике называют марковскими процессами в честь Андрея Андреевича Маркова - старшего (1856 - 1922), выдающегося русского математика, разработавшего основы теории таких процессов.

Сущность процесса без последствия понятна из определения.

**Марковский случайный процесс** - это такой процесс, в котором вероятность перехода системы в новое состояние зависит только от состояния системы в настоящий момент и не зависит от того, когда и каким образом система перешла в это состояние.

Простые случайные процессы, процессы в физических системах без памяти являются марковскими или могут быть сведены к марковским, если даже имеют память. В последнем случае достаточно в понятие состояния включить всю предысторию смен состояний системы (правда, в этом случае математические сложности численного моделирования таких процессов возрастают на порядки).

А. А. Марков имеет дополнение к фамилии "старший" потому, что его сын - тоже Андрей Андреевич Марков - выдающийся математик, специалист в области теории алгоритмов и др.

А. А. Марков - старший известен также как давший вероятностное обоснование метода наименьших квадратов (МНК), приведший одно из доказательств предельной теоремы теории вероятностей и многое другое.

Дальнейшее развитие теория марковских процессов получила в работах выдающегося отечественного математика Андрея Николаевича Колмогорова.

Марковские процессы делятся на два класса:

- дискретные марковские процессы (марковские цепи);
- непрерывные марковские процессы.

**Дискретная марковская цепь, дискретный марковский процесс** - это случайный процесс, при котором смена дискретных состояний происходит в определенные моменты времени.

**Непрерывный марковский процесс** - это случайный процесс, при котором смена дискретных состояний происходит в случайные моменты времени.

Таким образом, любой марковский процесс на самом деле - дискретный процесс, но происходящий либо в дискретном времени (в искусственной числовой сетке времени), либо в непрерывном (физическом) времени.

Рассмотрим ситуацию, когда моделируемый процесс обладает следующими особенностями.

Система  $S$  имеет  $n$  возможных состояний:  $S_1, S_2, \dots, S_n$ . Вообще говоря, число состояний может быть бесконечным. Однако модель, как правило, строится для конечного числа состояний.

Смена состояний происходит, будем считать, мгновенно и в строго определенные моменты времени  $t_l, l = 1, 2, \dots$ . В дальнейшем будем называть временные точки  $t_l$  шагами.

Известны вероятности перехода  $P_{ij}$  системы за один шаг из состояния  $S_i$  в состояние  $S_j$ . **Цель моделирования:** определить вероятности состояний системы после  $k$ -го шага.

Обозначим эти вероятности  $p_j(k), j = \overline{1, n}$  (не путать с вероятностями  $P_{ij}$ ).

Если в системе отсутствует последствие, то есть вероятности  $P_{ij}$  не зависят от предыстории нахождения системы в состоянии  $S_i$ , а определяются только этим состоянием, то описанная ситуация соответствует модели дискретной марковской цепи.

Марковская цепь называется **однородной**, если переходные вероятности  $P_{ij}$  от времени не зависят, то есть от шага к шагу не меняются. В противном случае, то есть если переходные вероятности  $P_{ij}(t)$  зависят от времени, марковская цепь называется **неоднородной**.

Значения  $P_{ij}$  обычно сводятся в матрицу переходных вероятностей:

$$\|P_{ij}\| = \begin{pmatrix} P_{11} & \dots & P_{1n} \\ P_{21} & \dots & P_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n1} & \dots & P_{nn} \end{pmatrix}, \sum_{j=1}^n P_{ij} = 1.$$

Значения  $P_{ij}$  могут также указываться на графе состояний системы. На рис. 1 показан размеченный граф для четырех состояний системы. Обычно вероятности переходов "в себя" -  $P_{11}, P_{22}$  и т. д. на графе состояний можно не проставлять, так как их значения дополняют до 1 сумму переходных вероятностей, указанных на ребрах (стрелках), выходящих из данного состояния.

Не указываются также нулевые вероятности переходов. Например, на рис. 20 это вероятности  $P_{21}, P_{43}$  и др.

Математической моделью нахождения вероятностей состояний однородной марковской цепи является рекуррентная зависимость

$$p_j(k) = \sum_{i=1}^n p_i(k-1)P_{ij}$$

где  $p_j(k)$  - вероятность  $j$ -го состояния системы после  $k$ -го шага,  $j = \overline{1, n}$ ;

$p_i(k-1)$  - вероятность  $i$ -го состояния системы после  $(k-1)$ -го шага,  $i = \overline{1, n}$ ;

$n$  - число состояний системы;  
 $P_{ij}$  - переходные вероятности.

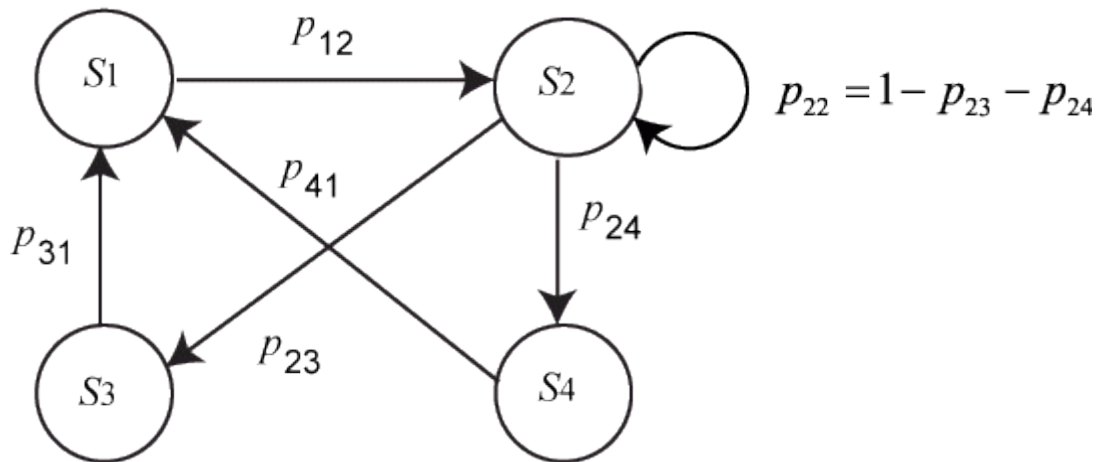


Рис. 20. Размеченный граф состояний системы

Для неоднородной марковской цепи вероятности состояний системы находятся по формуле:

$$p_j(k) = \sum_{i=1}^n p_i(k-1) p_{ij}^{(k)}$$

где  $p_{ij}^{(k)}$  - значения переходных вероятностей для  $k$ -го шага.

**Пример 1.** По группе из четырех объектов производится три последовательных выстрела. Найти вероятности состояний группы объектов после третьего выстрела.

Матрица переходных вероятностей имеет вид:

$$||P_{ij}|| = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,25 & 0,2 & 0,1 & 0,05 \\ 0 & 0,35 & 0,3 & 0,25 & 0,1 \\ 0 & 0 & 0,45 & 0,4 & 0,15 \\ 0 & 0 & 0 & 0,4 & 0,6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Размеченный граф состояний приведен на рис. 21.

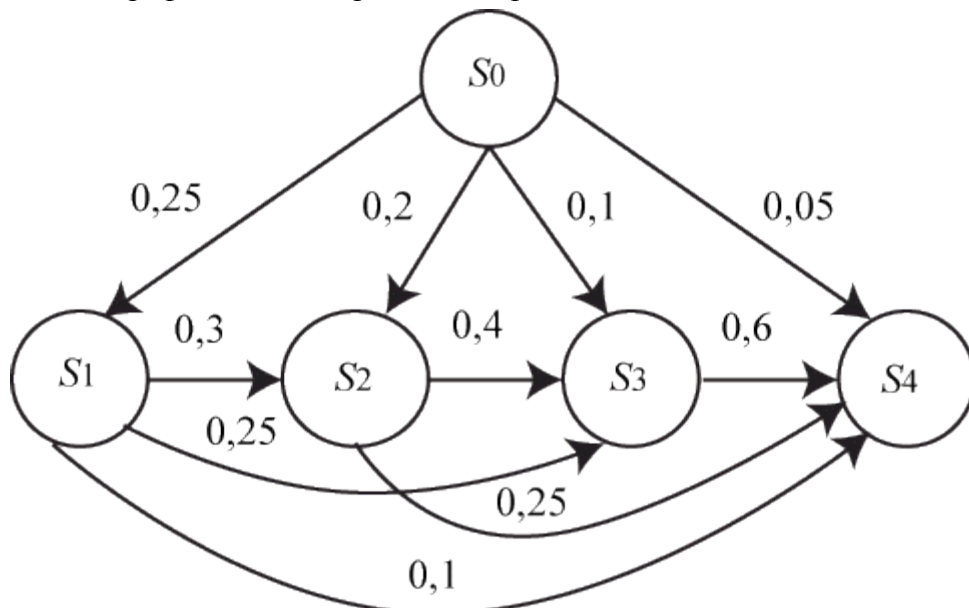


Рис. 21. Размеченный граф состояний четырех объектов

Прежде чем приступить к вычислениям необходимо, ответить на следующие вопросы.

1. Является ли рассматриваемый процесс поражения целей марковским? Да, так как степень поражения объекта (смена его состояния) не зависит от того - когда и каким образом объект был приведен в настоящее состояние, а зависит только от его текущего состояния.

2. Подходит ли рассматриваемая задача под схему марковской цепи? Да, так как время представляет собой дискретные отрезки - время между выстрелами (шаги).

3. Процесс однородный или неоднородный? Есть основания полагать, что процесс однородный, так как переходные вероятности не зависят от времени. Кроме этого, мы полагаем, что объекты - неподвижные и во времени обстрела менять свое положение не могут (что привело бы к изменениям  $P_{ij}$  после каждого выстрела).

4. И, наконец, надо правильно определить начальное состояние системы, так как от этого могут существенно зависеть результаты моделирования. В нашем случае вполне естественно считать начальным состояние  $S_0$  - все объекты целы.

Следовательно, есть все основания для применения ранее введенного рекуррентного выражения.

Решение. Так как до первого выстрела все объекты целы, то  $p_1(0) = 1$ .

После первого выстрела все значения вероятностей  $p_j(1)$  соответствуют первой строке матрицы переходных вероятностей. Рассчитаем вероятности остальных состояний.

$$P_1(2) = P_1(1) \cdot p_{11} + P_2(1) \cdot p_{21} + P_3(1) \cdot p_{31} + P_4(1) \cdot p_{41} + P_5(1) \cdot p_{51} = 0,16;$$

$$P_2(2) = P_1(1) \cdot p_{12} + P_2(1) \cdot p_{22} + P_3(1) \cdot p_{32} + P_4(1) \cdot p_{42} + P_5(1) \cdot p_{52} = 0,19;$$

$$P_3(2) = P_1(1) \cdot p_{13} + P_2(1) \cdot p_{23} + P_3(1) \cdot p_{33} + P_4(1) \cdot p_{43} + P_5(1) \cdot p_{53} = 0,245;$$

$$P_4(2) = P_1(1) \cdot p_{14} + P_2(1) \cdot p_{24} + P_3(1) \cdot p_{34} + P_4(1) \cdot p_{44} + P_5(1) \cdot p_{54} = 0,22;$$

$$P_5(2) = P_1(1) \cdot p_{15} + P_2(1) \cdot p_{25} + P_3(1) \cdot p_{35} + P_4(1) \cdot p_{45} + P_5(1) \cdot p_{55} = 0,185;$$

$$P = 0,16 + 0,19 + 0,245 + 0,22 + 0,185 = 1.$$

$$P_1(3) = P_1(2) \cdot p_{11} = 0,16 \cdot 0,4 = 0,064;$$

$$P_2(3) = P_1(2) \cdot p_{12} + P_2(2) \cdot p_{22} = 0,16 \cdot 0,25 + 0,19 \cdot 0,35 = 0,11;$$

$$P_3(3) = P_1(2) \cdot p_{13} + P_2(2) \cdot p_{23} + P_3(2) \cdot p_{33} = 0,16 \cdot 0,2 + 0,19 \cdot 0,3 + 0,245 \cdot 0,45 = 0,2;$$

$$P_4(3) = P_1(2) \cdot p_{14} + P_2(2) \cdot p_{24} + P_3(2) \cdot p_{34} + P_4(2) \cdot p_{44} = 0,25;$$

$$P_5(3) = P_1(2) \cdot p_{15} + P_2(2) \cdot p_{25} + P_3(2) \cdot p_{35} + P_4(2) \cdot p_{45} + P_5(2) \cdot p_{55} = 0,38;$$

$$P = 0,064 + 0,11 + 0,2 + 0,25 + 0,38 = 1.$$

Сформулируем методику моделирования по схеме дискретных марковских процессов (марковских цепей).

1. Зафиксировать исследуемое свойство системы. Определение свойства зависит от цели исследования. Например, если исследуется объект с целью получения характеристик надежности, то в качестве свойства следует выбрать исправность. Если исследуется загрузка системы, то - занятость. Если, как в примере 2.1, состояния объектов, то - поражен или непоражен.

2. Определить конечное число возможных состояний системы и убедиться в правомерности моделирования по схеме дискретных марковских процессов.

3. Составить и разметить граф состояний.

4. Определить начальное состояние.

5. По рекуррентной зависимости (1) определить искомые вероятности.

В рамках изложенной методики моделирования исчерпывающей характеристикой поведения системы является совокупность вероятностей  $p_j(k)$ .

При неоднородном марковском процессе переходная вероятность  $P_{ij}$  представляет собой условную вероятность перехода

$P_{ij}^{(k)} = p(S_j^{(k)} / S_i^{(k)})$ , зависящую от  $k$  - очередного временного шага. В этом случае должны быть указаны более одной матрицы значений  $P_{ij}$  (для некоторых шагов матрицы могут быть одинаковыми).

Например, при нанесении ударов по объектам, которые могут перемещаться (танковая группировка, корабли и т. п.), последние будут принимать меры по рассредоточению средств или другому защитному маневру, вплоть до активного противодействия атакующей стороне. Очевидно, все эти меры приведут к уменьшению поражающих возможностей стороны, наносящей удары, т. е. к соответствующему изменению переходных вероятностей. Процесс становится неоднородным, то есть теряет свойство "марковости". Естественно, это ведет к тому, чтобы применять модели иных, высших иерархических типов, учитывающих обратные связи.

Оптимальный план - это план, доставляющий максимум целевой функции, отражающей выбранный критерий эффективности функционирования объекта планирования при соблюдении требований, заданных в форме системы уравнений и неравенств. Оптимальный план не обязательно является наилучшим планом, подлежащим утверждению и последующему выполнению, поскольку учитывает только те условия хозяйственной деятельности, которые удалось описать в математической форме. Во многих случаях процесс планирования требует использования информации, содержащейся во множестве разнообразных оптимальных планов.

## ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

### Основные понятия линейного программирования

Задачи оптимального планирования, связанные с отысканием оптимума заданной целевой функции (линейной формы) при наличии ограничений в виде линейных уравнений или линейных неравенств относятся к задачам линейного программирования.

Линейное программирование - наиболее разработанный и широко применяемый раздел математического программирования. Это объясняется следующим:

- математические модели очень большого числа экономических задач линейны относительно искомых переменных;
- эти типы задач в настоящее время наиболее изучены;
- для них разработаны специальные конечные методы, с помощью которых эти задачи решаются, и соответствующие стандартные программы для их решения на ЭВМ;
- многие задачи линейного программирования, будучи решенными, нашли уже сейчас широкое практическое применение в народном хозяйстве;
- некоторые задачи, которые в первоначальной формулировке не являются линейными, после ряда дополнительных ограничений и допущений могут стать линейными или могут быть приведены к такой форме, что их можно решать методами линейного программирования.

Итак, **Линейное программирование** – это направление математического программирования, изучающее методы решения экстремальных задач, которые характеризуются линейной зависимостью между переменными, и линейным критерием.

Необходимым условием постановки задачи линейного программирования являются ограничения на наличие ресурсов, величину спроса, производственную мощность предприятия и другие производственные факторы.

Сущность линейного программирования состоит в нахождении точек наибольшего или наименьшего значения некоторой функции при определенном наборе ограничений,

налагаемых на аргументы и образующих **систему ограничений**, которая имеет, как правило, бесконечное множество решений. Каждая совокупность значений переменных (аргументов функции  $F$ ), которые удовлетворяют системе ограничений, называется **допустимым планом** задачи линейного программирования. Функция  $F$ , максимум или минимум которой определяется, называется **целевой функцией** задачи. Допустимый план, на котором достигается максимум или минимум функции  $F$ , называется **оптимальным планом** задачи.

Система ограничений, определяющая множество планов, диктуется условиями производства. Задачей линейного программирования (**ЗЛП**) является выбор из множества допустимых планов наиболее выгодного (оптимального).

В общей постановке задача линейного программирования выглядит следующим образом:

Имеются какие-то переменные  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  и функция этих переменных  $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , которая носит название **целевой** функции. Ставится задача: найти экстремум (максимум или минимум) целевой функции  $f(x)$  при условии, что переменные  $x$  принадлежат некоторой области  $G$ :

$$\begin{cases} f(x) \Rightarrow \text{extr} \\ x \in G \end{cases}$$

В зависимости от вида функции  $f(x)$  и области  $G$  и различают разделы математического программирования: квадратичное программирование, выпуклое программирование, целочисленное программирование и т.д. Линейное программирование характеризуется тем, что

- а) функция  $f(x)$  является линейной функцией переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$
- б) область  $G$  определяется системой **линейных** равенств или неравенств.

Математическая модель любой задачи линейного программирования включает в себя:

- максимум или минимум целевой функции (критерий оптимальности);
- систему ограничений в форме линейных уравнений и неравенств;
- требование неотрицательности переменных.

В других ситуациях могут возникать задачи с большим количеством переменных, в систему ограничений которых, кроме неравенств, могут входить и равенства. Поэтому в наиболее общей форме задачу линейного программирования формулируют следующим образом:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \{ \leq, \geq, = \} b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \{ \leq, \geq, = \} b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \{ \leq, \geq, = \} b_m. \end{cases} \quad (4)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0 \quad (5)$$

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max(\min) \quad (6)$$

Коэффициенты  $a_{ij}, b_i, c_j, j = 1, 2, \dots, n, i = 1, 2, \dots, m$  – любые действительные числа (возможно 0).

Итак, решения, удовлетворяющие системе ограничений (4) условий задачи и требованиям неотрицательности (5), называются **допустимыми**, а решения, удовлетворяющие одновременно и требованиям минимизации (максимализации) (6) целевой функции, - **оптимальными**.

Выше описанная задача линейного программирования (ЗЛП) представлена в общей форме, но одна и та же (ЗЛП) может быть сформулирована в различных эквивалентных формах. Наиболее важными формами задачи линейного программирования являются **каноническая** и **стандартная**.

В **канонической форме** задача является задачей на максимум (минимум) некоторой линейной функции  $F$ , ее система ограничений состоит только из равенств (уравнений). При этом переменные задачи  $x_1, x_2, \dots, x_n$  являются неотрицательными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \quad (7)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0 \quad (8)$$

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max(\min) \quad (9)$$

К канонической форме можно преобразовать любую задачу линейного программирования.

#### Правило приведения ЗЛП к каноническому виду:

1. Если в исходной задаче некоторое ограничение (например, первое) было неравенством, то оно преобразуется в равенство, введением в левую часть некоторой неотрицательной переменной, при чем в неравенства « $\leq$ » вводится дополнительная неотрицательная переменная со знаком «+»; в случаи неравенства « $\geq$ » - со знаком «-»

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \quad (10)$$

Вводим переменную

$$x_{n+1} = b_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n.$$

Тогда неравенство (2.10) запишется в виде:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + x_{n+1} \quad (11)$$

В каждое из неравенств вводится своя “**уравнивающая**” переменная, после чего система ограничений становится системой уравнений.

2. Если в исходной задаче некоторая переменная не подчинена условию неотрицательности, то ее заменяют (в целевой функции и во всех ограничениях) разностью неотрицательных переменных

$$\begin{cases} x_k = x_k - x_l \\ x_k \geq 0, x_l \geq 0 \end{cases}, \quad l - \text{свободный индекс}$$

3. Если в ограничениях правая часть отрицательна, то следует умножить это ограничение на (-1)

4. Наконец, если исходная задача была задачей на минимум, то введением новой целевой функции  $F_l = -F$  мы преобразуем нашу задачу на минимум функции  $F$  в задачу на максимум функции  $F_l$ .

Таким образом, всякую задачу линейного программирования можно сформулировать в канонической форме.

В стандартной форме задача линейного программирования является задачей на максимум (минимум) линейной целевой функции. Система ограничений ее состоит из одних линейных неравенств типа « $\leq$ » или « $\geq$ ». Все переменные задачи неотрицательны.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m. \end{cases} \quad (12)$$

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max(\min)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$$

Всякую задачу линейного программирования можно сформулировать в **стандартной форме**. Преобразование задачи на минимум в задачу на максимум, а также обеспечение не отрицательности переменных производится так же, как и раньше. Всякое равенство в системе ограничений равносильно системе взаимоположных неравенств:

$$\begin{aligned} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i, \\ -a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \dots - a_{in}x_n \leq -b_i, \end{cases} \end{aligned}$$

Существует и другие способы преобразования системы равенств в систему неравенств, т.е. всякую задачу линейного программирования можно сформулировать в стандартной форме.

### Двойственная задача линейного программирования

Важную роль в линейном программировании имеет понятие *двойственности*. Рассмотрим две **задачи линейного программирования**:

$$\max \{F(x) = C^T x \mid Ax \leq B, x_i \geq 0, i = 1, n\} \quad (1)$$

и

$$\min \{F(y) = B^T y \mid A^T y \geq C, y_j \geq 0, j = 1, m\}. \quad (2)$$

Задачу (1) называют прямой, а связанную с ней задачу (2) – двойственной. Вместе они образуют симметрическую пару двойственных задач. Число переменных двойственной задачи равно количеству ограничений прямой. Кроме того, при переходе от прямой задачи к двойственной вектора  $B$  и  $C$  меняют местами, матрица  $A$  коэффициентов системы ограничений прямой задачи транспонируется, а знак неравенств в ограничениях меняют на противоположный. Смысл экстремума  $F(x)$  противоположен смыслу экстремума  $F(y)$ . Связь между задачами (1) и (2) взаимна, т.е. если прямой считать задачу (2), то в качестве двойственной ей будет соответствовать задача (1). Возможность перехода от прямой задачи к двойственной (и наоборот) устанавливается **теоремой двойственности**: *если одна из задач (1) или (2) имеет оптимальное решение, то и другая также имеет оптимальное решение, причем оптимальные значения функции цели прямой и двойственной задач совпадают, т.е.  $\max F(x) = \min F(y)$ .*

Если среди ограничений прямой задачи имеются равенства или на некоторые переменные не наложено условие неотрицательности, то построив двойственную ей задачу, получим пару несимметричных двойственных задач:

$$\begin{array}{l|l}
 F(x) = \sum_{i=1}^n c_i x_i \text{ (max)} & F(y) = \sum_{j=1}^m b_j y_j \text{ (min)}; \\
 \sum_{i=1}^n a_{ji} x_i \leq b_j, j = \overline{1, m_1} & \sum_{j=1}^m a_{ij} y_j \geq c_i, i = \overline{1, n_1}; \\
 \sum_{i=1}^n a_{ji} x_i = b_j, j = \overline{m_1 + 1, m} & \sum_{j=1}^m a_{ij} y_j = c_i, i = \overline{n_1 + 1, n}; \\
 x_i \geq 0, i = \overline{1, n_1}, n_1 \leq n & y_j \geq 0, j = \overline{1, m_1}, m_1 \leq m.
 \end{array}$$

При этом выполняются следующие правила:

1. Если на переменную  $x_i$  прямой задачи наложено условие неотрицательности, то  $i$ -е условие системы ограничений двойственной задачи является неравенством и наоборот.
2. Если на переменную  $x_i$  прямой задачи не наложено условие неотрицательности, то  $i$ -е ограничение двойственной задачи записывается в виде строгого равенства.
3. Если в прямой задаче имеются ограничения равенства, то на соответствующие переменные двойственной задачи не накладывается условие неотрицательности.

Линейное программирование находит широкое применение при решении многих практических задач организационно-экономического управления. Цель, как правило, заключается в том, чтобы максимизировать прибыль либо минимизировать расходы.

Рассмотрим задачу **рационального использования ресурсов**.

Пусть предприятие располагает ресурсами  $b_1, b_2, \dots, b_m$ , которые могут использоваться для выпуска  $n$  видов продукции. Известны нормы потребления  $j$ -го ресурса на производство единицы  $i$ -й продукции –  $a_{ij}$ , а также прибыль от реализации единицы  $i$ -го вида продукции  $c_i$  ( $i = 1, n; j = 1, m$ ). Найти объем производства продукции каждого вида  $x^*_i$ , максимизирующий суммарную прибыль предприятия  $F(x) = \sum c_i x_i$ , при этом расход ресурсов не должен превышать их наличия. Математическая модель задачи имеет вид

$$\max \{F(x) = \sum c_i x_i \mid \sum a_{ji} x_i \leq b_j, j = 1, m; x_i \geq 0, i = 1, n\} \quad (3)$$

**Метод искусственного базиса** используется для нахождения допустимого базисного решения задачи линейного программирования, когда в условии присутствуют ограничения типа равенств. Рассмотрим задачу:

$$\max \{F(x) = \sum c_i x_i \mid \sum a_{ji} x_i = b_j, j = 1, m; x_i \geq 0\}.$$

Под **чувствительностью** модели понимается зависимость оптимального решения от изменения параметров исходной задачи. Выполняя анализ модели на чувствительность, можно выяснить:

- а) насколько можно увеличить запас некоторого ресурса, чтобы улучшить оптимальное значение  $F$ ;
- б) насколько можно сократить запас некоторого ресурса, чтобы сохранить при этом оптимальное значение  $F$ ;
- в) увеличение объема какого из ресурсов наиболее выгодно;
- г) какому из ресурсов отдать предпочтение при вложении дополнительных средств;
- д) в каких пределах допустимо изменять коэффициенты целевой функции, чтобы не произошло изменение оптимального решения.

Ограничения, проходящие через точку оптимума, называются **активными**, или **связывающими**. Ресурсы, с которыми ассоциируются эти ограничения, относятся к разряду дефицитных. Остальные ресурсы недефицитны, а соответствующие им ограничения – неактивные или несвязывающие. Сокращение объема дефицитного ресурса никогда не улучшает значения целевой функции. Анализ на чувствительность придает модели динамичность, свойственную реальным процессам.

Сформулируем задачу, двойственную к рассматриваемой задаче рационального использования ресурсов. Пусть некоторая организация может закупить все ресурсы  $b_j$ ,

которыми располагает предприятие. Необходимо определить оптимальные цены  $y^*_j$  ( $j = 1, m$ ) на единицу этих ресурсов при условии, что покупатель стремится минимизировать общую оценку ресурсов. При этом общая ценность ресурсов должна быть не меньше прибыли, которую может получить предприятие при организации собственного производства. Математическая модель задачи имеет вид

$$\min \{F(y) = \sum b_j y_j \mid \sum a_{ij} y_j \geq c_i, i=1, n; y_j \geq 0, j=1, m\} \quad (4)$$

Пока прибыль предприятия (задача 3) меньше общей ценности ресурсов (задача 4), решение обеих задач будет неоптимальным. Оптимум достигается в случае, когда прибыль становится равной общей ценности ресурсов, т.е.  $\max F(x) = \min F(y)$ .

**Пример 1.** Построить двойственную задачу к следующей задаче, заданной в общей форме:

$$F(x) = 3x_1 + 2x_2 \text{ (min) ;}$$

$$x_1 + x_2 \leq 5$$

$$2x_1 - x_2 \leq 3$$

$$x_1 + 0.5x_2 \geq 2$$

$$x_{1,2} \geq 0$$

Приведем условие к стандартной форме (2). Так как требуется найти минимум целевой функции, то неравенства в системе ограничений должны быть вида  $\geq$ . Первое и второе неравенства умножим на  $(-1)$ , тогда

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \\ 1 & 0,5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -5 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad C^T = [3 \quad 2].$$

Двойственная задача будет иметь 3 переменные, так как прямая содержит три ограничения. В соответствии с указанными выше правилами запишем двойственную задачу в виде

$$F(y) = B^T Y = [-5 \quad -3 \quad 2] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = -5y_1 - 3y_2 + 2y_3 \text{ (max) ;}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0,5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix};$$

тогда условие  $A^T y \leq C$  примет следующий вид:

$$-y_1 - 2y_2 + y_3 \leq 3$$

$$-y_1 + y_2 + 0.5y_3 \leq 2$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0.$$

Составим начальные **симплекс-таблицы** для прямой и двойственной задач (табл. 1 и 2).

Таблица 1

базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные	
		$x_1$	$x_2$
$x_3$	5	1	1
$x_4$	3	2	-1
$x_5$	-2	-1	0.5
F	0	3	2

базисные переменные	Свободные члены	Небазисные переменные		
		y <sub>1</sub>	y <sub>2</sub>	y <sub>3</sub>
y <sub>4</sub>	3	-1	-2	1
y <sub>5</sub>	2	-1	1	0.5
F	0	5	3	-2

В общем виде при минимизации  $F(x)$  в прямой задаче начальные симплекс-таблицы для прямой и двойственной задач можно представить в виде табл. 3 и 4.

Таблица 3

$x$	$-B$	$-A$
$F_{\min}$	0	$C^T$

Таблица 4

$y$	$C$	$A^T$
$F_{\max}$	0	$-B^T$

Если в прямой задаче находится максимальное значение  $F(x)$ , то начальные симплекс-таблицы прямой и двойственной задач можно представить в виде табл. 5 и 6.

Таблица 5

$x$	$B$	$A$
$F_{\max}$	0	$-C^T$

Таблица 6

$y$	$-C$	$-A^T$
$F_{\min}$	0	$B^T$

### Симплекс-таблицы

Процесс **нахождения экстремума с помощью симплекс-метода** оформляется в виде специальных **симплекс-таблиц**. Симплекс-таблица составляется для каждой итерации по определенным правилам, что облегчает перебор базисных решений и позволяет избежать случайных ошибок.

Рассмотрим следующую задачу линейного программирования:

$$\max\{F(x) = \sum_{i=1}^n c_i x_i \mid \sum_{i=1}^n a_{ji} x_i \leq b_j, j = \overline{1, m}, x_i \geq 0\}. \quad (1)$$

Если в условии задачи есть ограничения со знаком  $\geq$ , то их можно привести к виду  $\sum a_{ji} b_j$ , умножив обе части неравенства на  $-1$ . Введем  $m$  дополнительных переменных  $x_{n+j} \geq 0$  ( $j = \overline{1, m}$ ) и преобразуем ограничения к виду равенств

$$\sum_{i=1}^n a_{ji} x_i + x_{n+j} = b_j. \quad (2)$$

Предположим, что все исходные переменные задачи  $x_1, x_2, \dots, x_n$  – небазисные. Тогда дополнительные переменные будут базисными, и частное решение системы ограничений имеет вид

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0, x_{n+j} = b_j, j = \overline{1, m}. \quad (3)$$

Так как при этом значение функции цели  $F_0 = 0$ , можно представить  $F(x)$  следующим образом:

$$F(x) = \sum c_i x_i + F_0 = 0 \quad (4)$$

Начальная симплекс-таблица (симплекс-табл. 1) составляется на основании уравнений (2) и (4). Если перед дополнительными переменными  $x_{n+j}$  стоит знак «+», как в (2), то все коэффициенты перед переменными  $x_i$  и свободный член  $b_j$  заносятся в симплекс-таблицу без изменения. Коэффициенты функции цели при ее максимизации заносятся в нижнюю строку симплекс-таблицы с противоположными знаками. Свободные члены в симплекс-таблице определяют решение задачи.

Алгоритм решения задачи следующий:

**1-й шаг.** Просматриваются элементы столбца свободных членов. Если все они положительные, то допустимое базисное решение найдено и следует перейти к шагу 5 алгоритма, соответствующему нахождению оптимального решения. Если в начальной симплекс-таблице есть отрицательные свободные члены, то решение не является допустимым и следует перейти к шагу 2.

**2-й шаг.** Для нахождения допустимого решения осуществляется **пересчет симплекс-таблицы**, при этом нужно решать, какую из небазисных переменных включить в базис и какую переменную вывести из базиса.

Таблица 1.

базисные переменные	Свободные члены в ограничениях	Небазисные переменные					
		x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	...	x <sub>l</sub>	...	x <sub>n</sub>
x <sub>n+1</sub>	b <sub>1</sub>	a <sub>11</sub>	a <sub>12</sub>	...	a <sub>1l</sub>	...	a <sub>1n</sub>
x <sub>n+2</sub>	b <sub>2</sub>	a <sub>21</sub>	a <sub>22</sub>	...	a <sub>2l</sub>	...	a <sub>2n</sub>
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
x <sub>n+r</sub>	b <sub>2</sub>	a <sub>r1</sub>	a <sub>r2</sub>	...	a <sub>rl</sub>	...	a <sub>rn</sub>
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
x <sub>n+m</sub>	b <sub>m</sub>	a <sub>m1</sub>	a <sub>m2</sub>	...	a <sub>ml</sub>	...	a <sub>mn</sub>
F(x) <sub>max</sub>	F <sub>0</sub>	-c <sub>1</sub>	-c <sub>2</sub>	...	-c <sub>l</sub>	...	-c <sub>n</sub>

Для этого выбирают любой из отрицательных элементов столбца свободных членов (пусть это будет  $b_2 < 0$ ) и просматривают элементы строки, в которой он находится. В этой строке выбирают любой отрицательный элемент и соответствующий ему столбец определит переменную (например  $x_l$ ), которую следует исключить из небазисных и ввести в базис на следующем шаге. Столбец, соответствующий переменной  $x_l$ , называется **ведущим, или разрешающим**. Если в строке с отрицательным свободным членом нет отрицательных элементов, то система ограничений несовместна и задача не имеет решения.

Одновременно из БП исключается та переменная, которая первой изменит знак при увеличении выбранной НП  $x_l$ . Это будет  $x_{n+r}$ , индекс  $r$  которой определяется из условия

$$\frac{b_r}{a_{re}} = \min \left\{ \frac{b_j}{a_{jl}} \right\}, \quad j = \overline{1, m},$$

т.е. та переменная, которой соответствует наименьшее отношение свободного члена к элементу выбранного ведущего столбца. Это отношение называется **симплексным отношением**. Следует рассматривать только положительные симплексные отношения.

Строка, соответствующая переменной  $x_{n+r}$ , называется **ведущей, или разрешающей**. Элемент симплекс-таблицы  $a_{rl}$ , стоящий на пересечении ведущей строки и ведущего столбца, называется **ведущим, или разрешающим элементом**. Нахождением ведущего элемента заканчивается работа с каждой очередной симплекс-таблицей.

**3-й шаг.** Рассчитывается новая симплекс-таблица, элементы которой пересчитываются из элементов симплекс-таблицы предыдущего шага и помечаются штрихом, т.е.  $b'_j$ ,  $a'_{ji}$ ,  $c'_i$ ,  $F'_0$ . Пересчет элементов производится по следующим формулам:

$$a'_{rl} = \frac{1}{a_{rl}}; a'_{ri} = \frac{a_{ri}}{a_{rl}}; a'_{jl} = -\frac{a_{jl}}{a_{rl}}, (j \neq r); \quad (5)$$

$$a'_{ji} = a_{ji} - a_{ri} \frac{a_{jl}}{a_{rl}}, (i \neq l, j \neq r); \quad (6)$$

$$b'_r = \frac{b_r}{a_{rl}}, b'_j = b_j - b_r \frac{a_{jl}}{a_{rl}}, (j \neq r); \quad (7)$$

$$c'_l = -\frac{c_l}{a_{rl}}; c'_i = c_i - c_l \frac{a_{ri}}{a_{rl}}, (i \neq l); \quad (8)$$

$$F'_0 = F_0 - b_r \frac{c_l}{a_{rl}}. \quad (9)$$

Сначала в новой симплекс-таблице заполняются строка и столбец, которые в предыдущей симплекс-таблице были ведущими. Выражение (5) означает, что элемент  $a'_{rl}$  на месте ведущего равен обратной величине элемента предыдущей симплекс-таблицы. Элементы строки  $a_{ri}$  делятся на ведущий элемент, а элементы столбца  $a_{jl}$  также делятся на ведущий элемент, но берутся с противоположным знаком. Элементы  $b'_r$  и  $c'_l$  рассчитываются по тому же принципу.

Остальные формулы легко записать с помощью [правила прямоугольника](#).

Прямоугольник строится по старой симплекс-таблице таким образом, что одну из его диагоналей образует пересчитываемый ( $a_{ji}$ ) и ведущий ( $a_{rl}$ ) элементы (рис. 1). Вторая диагональ определяется однозначно. Для нахождения нового элемента  $a'_{ji}$  из элемента  $a_{ji}$  вычитается (на это указывает знак «-» у клетки) произведение элементов противоположной диагонали, деленное на ведущий элемент. Аналогично пересчитываются элементы  $b'_j$ , ( $j \neq r$ ) и  $c'_i$ , ( $i \neq l$ ).

**4-й шаг.** Анализ новой симплекс-таблицы начинается с 1-го шага алгоритма. Действие продолжается, пока не будет найдено допустимое базисное решение, т.е. все элементы столбца свободных членов должны быть положительными.

**5-й шаг.** Считаем, что допустимое базисное решение найдено. Просматриваем коэффициенты строки функции цели  $F(x)$ . Признаком оптимальности симплекс-таблицы является неотрицательность коэффициентов при небазисных переменных в F-строке.

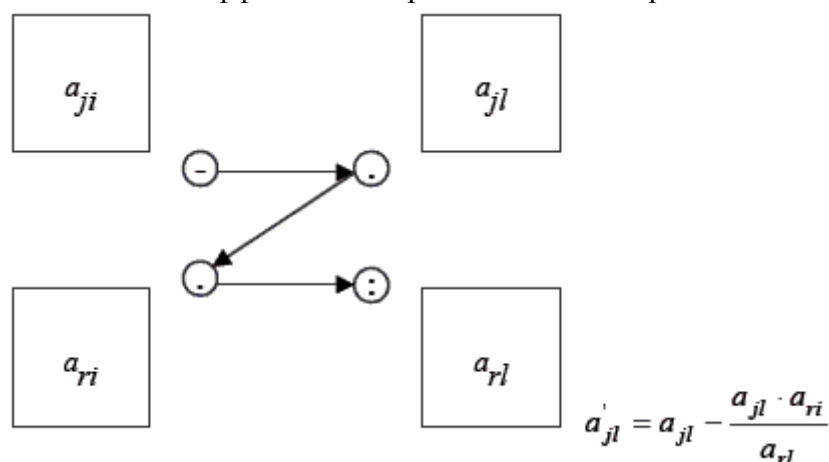


Рис. 1. Правило прямоугольника

Если среди коэффициентов F-строки имеются отрицательные (за исключением свободного члена), то нужно переходить к другому базисному решению. При максимизации функции цели в базис включается та из небазисных переменных (например  $x_1$ ), столбцу

которой соответствует максимальное абсолютное значение отрицательного коэффициента  $c_l$  в нижней строке симплекс-таблицы. Это позволяет выбрать ту переменную, увеличение которой приводит к улучшению функции цели. Столбец, соответствующий переменной  $x_l$ , называется ведущим. Одновременно из базиса исключается та переменная  $x_{n+r}$ , индекс  $r$  которой определяется минимальным симплексным отношением:

$$\frac{b_r}{a_{rl}} = \min \left\{ \frac{b_j}{a_{jl}} \text{ при } a_{jl} > 0 \right\}, \quad j = \overline{1, m}.$$

Строка, соответствующая  $x_{n+r}$ , называется **ведущей**, а элемент симплекс-таблицы  $a_{rl}$ , стоящий на пересечении ведущей строки и ведущего столбца, называется **ведущим элементом**.

**6-й шаг.** Рассчитываем новую симплекс-таблицу по правилам, изложенным на 3-м шаге. Процедура продолжается до тех пор, пока не будет найдено оптимальное решение или сделан вывод, что оно не существует.

Если в процессе оптимизации решения в ведущем столбце все элементы неположительные, то ведущую строку выбрать невозможно. В этом случае функция в области допустимых решений задачи не ограничена сверху и  $F_{\max} \rightarrow \infty$ .

Если же на очередном шаге поиска экстремума одна из базисных переменных становится равной нулю, то соответствующее базисное решение называется вырожденным. При этом возникает так называемое заикливание, характеризующееся тем, что с определенной частотой начинает повторяться одинаковая комбинация БП (значение функции  $F$  при этом сохраняется) и невозможно перейти к новому допустимому базисному решению. Заикливание является одним из основных недостатков симплекс-метода, но встречается сравнительно редко. На практике в таких случаях обычно отказываются от ввода в базис той переменной, столбцу которой соответствует максимальное абсолютное значение отрицательного коэффициента в функции цели, и производят случайный выбор нового базисного решения.

**Пример 1.** Решить задачу

$$\max \{F(x) = -2x_1 + 5x_2 \mid 2x_1 + x_2 \leq 7; x_1 + 4x_2 \geq 8; x_2 \leq 4; x_{1,2} \geq 0\}$$

симплексным методом и дать геометрическую интерпретацию процесса решения.

Графическая интерпретация решения задачи представлена на рис. 2. Максимальное значение функции цели достигается в вершине ОДЗП с координатами  $[0,4]$ . Решим задачу с помощью симплекс-таблиц. Умножим второе ограничение на  $(-1)$  и введём дополнительные переменные, чтобы неравенства привести к виду равенств, тогда

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 7; \\ -x_1 - 4x_2 + x_4 = -8; \\ x_2 + x_5 = 4. \end{cases}$$

Исходные переменные  $x_1$  и  $x_2$  принимаем в качестве небазисных, а дополнительные  $x_3$ ,  $x_4$  и  $x_5$  считаем базисными и составляем симплекс-таблицу (симплекс-табл. 2). Решение, соответствующее симплекс-табл. 2, не является допустимым; ведущий элемент обведен контуром и выбран в соответствии с шагом 2 приведенного ранее алгоритма. Следующая симплекс-табл. 3 определяет допустимое базисное решение, ему соответствует вершина ОДЗП  $[0,2]$  на рис. 2. Ведущий элемент обведен контуром и выбран в соответствии с 5-м шагом алгоритма решения задачи. Табл. 4 соответствует оптимальному решению задачи, следовательно:

$$x_1 = x_5 = 0; x_2 = 4; x_3 = 3; x_4 = 8; F_{\max} = 20.$$

Таблица 2

БП	Св.чл.	НП	
		$x_1$	$x_2$
$x_3$	7	2	1
$x_4$	-8	-1	-4
$x_5$	4	0	1
$F$	0	2	-5

Таблица 3

БП	Св.чл.	НП	
		$x_1$	$x_4$
$x_3$	5	7/4	1/4
$x_2$	2	1/4	-1/4
$x_5$	2	-1/4	1/4
$F$	10	13/4	-5/4

Таблица 4

БП	Св.чл.	НП	
		$x_1$	$x_5$
$x_3$	3	2	-1
$x_2$	4	0	1
$x_4$	8	-1	4
$F$	20	2	5

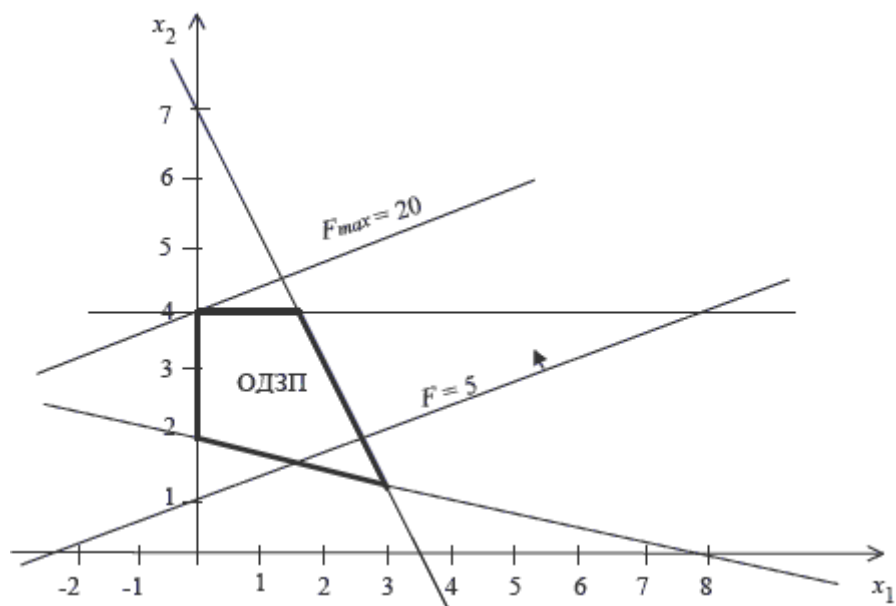


Рис. 2. Графическое решение задачи

## ЭКОНОМЕТРИКА

Эконометрика — наука, изучающая количественные и качественные экономические взаимосвязи с помощью математических и статистических методов и моделей. Современное определение предмета эконометрики было выработано в уставе Эконометрического общества, которое главными целями назвало использование статистики и математики для развития экономической теории. Теоретическая эконометрика рассматривает статистические свойства оценок и испытаний, в то время как прикладная эконометрика занимается применением эконометрических методов для оценки экономических теорий. Эконометрика даёт инструментарий для экономических измерений, а также методологию оценки параметров моделей микро- и макроэкономики. Кроме того, эконометрика активно используется для прогнозирования экономических процессов как в масштабах экономики в целом, так и на уровне отдельных предприятий. При этом эконометрика является частью экономической теории, наряду с макро- и микроэкономикой.

Термин «эконометрика» состоит из двух частей: «эконо» — от «экономика» и «метрика» — от «измерение». Эконометрика входит в обширное семейство дисциплин, посвящённых измерениям и применению статистических методов в различных областях науки и практики. К этому семейству относятся, в частности, биометрия, технометрика, наукометрия, психометрия, хеометрия, квалиметрия. Особняком стоит социометрия — этот термин закрепился за статистическими методами анализа взаимоотношений в малых группах, то есть за небольшой частью такой дисциплины, как статистический анализ в социологии и психологии[4].

## РАСЧЕТ И ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОЦЕССОВ ВОЛОЧЕНИЯ

На кафедре МиТ ОД разрабатывалось оборудование и инструмент для волоочильного производства. Рассматривались процессы волочения в монолитной волоке, роликовой волоке, а также бесфильтренное волочение [1-25]. Для процессов волочения проводились физическое моделирование, при этом использовались встроенные функции статистической обработки данных. Также, проводилось моделирование с использованием программных продуктов на компьютере.

### ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1) По данным, приведенным в таблице справа, составте матрицу парных корреляций.

Y	2	2	0	0
X <sub>1</sub>	2	0	2	4
X <sub>2</sub>	0	0	8	0

Для y и x<sub>1</sub>

Средние значения

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{2+2+0+0}{4} = 1$$

$$\bar{x}_1 = \frac{\sum x_{1i}}{n} = \frac{2+0+2+4}{4} = 2$$

$$\overline{y \cdot x_1} = \frac{\sum y_i x_{1i}}{n} = \frac{2 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 4}{4} = 1$$

Дисперсия

$$D(y) = \frac{\sum y^2}{n} - \bar{y}^2 = \frac{2^2 + 2^2 + 0^2 + 0^2}{4} - 1^2 = 2 - 1 = 1$$

$$D(x_1) = \frac{\sum x_{1i}^2}{n} - \bar{x}_1^2 = \frac{2^2 + 0^2 + 2^2 + 4^2}{4} - 2^2 = 6 - 4 = 2$$

Среднеквадратическое отклонение

$$\sigma(y) = \sqrt{D(y)} = \sqrt{1} = 1$$

$$\sigma(x_1) = \sqrt{D(x_1)} = \sqrt{2} = 1,4142$$

Коэффициент корреляции

$$r_{yx1} = \frac{\overline{y \cdot x_1} - \bar{y} \cdot \bar{x}_1}{\sigma(y) \cdot \sigma(x_1)} = \frac{1 - 1 \cdot 2}{1 \cdot 1,4142} = -0,7071$$

Для y и x<sub>2</sub>

Средние значения

$$\bar{y} = 1$$

$$\bar{x}_2 = \frac{\sum x_{2i}}{n} = \frac{0+0+8+0}{4} = 2$$

$$\overline{y \cdot x_2} = \frac{\sum y_i x_{2i}}{n} = \frac{2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 0 \cdot 8 + 0 \cdot 0}{4} = 0$$

Дисперсия

$$D(y) = 1$$

$$D(x_2) = \frac{\sum x_{2i}^2}{n} - \bar{x}_2^2 = \frac{0^2 + 0^2 + 8^2 + 0^2}{4} - 2^2 = 16 - 4 = 12$$

Среднеквадратическое отклонение

$$\sigma(y) = 1$$

$$\sigma(x_2) = \sqrt{D(x_2)} = \sqrt{12} = 3.4641$$

Коэффициент корреляции

$$r_{yx2} = \frac{\overline{y \cdot x_2} - \bar{y} \cdot \bar{x}_2}{\sigma(y) \cdot \sigma(x_2)} = \frac{0 - 1 \cdot 2}{1 \cdot 3.4641} = -0.5774$$

Для  $x_1$  и  $x_2$

Средние значения

$$\bar{x}_1 = 2$$

$$\bar{x}_2 = 2$$

$$\overline{x_1 \cdot x_2} = \frac{\sum x_{1i} \cdot x_{2i}}{n} = \frac{2 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 8 + 4 \cdot 0}{4} = 4$$

Дисперсия

$$D(x_1) = 2$$

$$D(x_2) = 12$$

Среднеквадратическое отклонение

$$\sigma(x_1) = 1.4142$$

$$\sigma(x_2) = 3.4641$$

Коэффициент корреляции

$$r_{x1x2} = \frac{\overline{x_1 \cdot x_2} - \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2}{\sigma(x_1) \cdot \sigma(x_2)} = \frac{4 - 2 \cdot 2}{1.4142 \cdot 3.4641} = 0$$

Матрица парных корреляций

	Y	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>			Y	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	
	Y	1	$r_{yx1}$	$r_{yx2}$		Y	1	-0,7071	-0,5774
	X <sub>1</sub>	$r_{yx1}$	1	$r_{x1x2}$		X <sub>1</sub>	-0,7071	1	0
R=	X <sub>2</sub>	$r_{yx2}$	$r_{x1x2}$	1	=	X <sub>2</sub>	-0,5774	0	1

2) Фатима по этой выборке смогла построить уравнение регрессии.

$$y = 2.33 - 0.5x_1 - 0.17x_2$$

Помогите теперь ей вычислить коэффициент детерминации  $R^2$ .

Промежуточные вычисления для расчета коэффициента детерминации

	Y	2	2	0	0
-0,5	X <sub>1</sub>	2	0	2	4
-0,17	X <sub>2</sub>	0	0	8	0
2,33					
	$\hat{Y} = 2.33 - 0.5 * X_1 - 0.17 * X_2$	1,33	2,33	-0,03	0,33
	$e_i = Y_i - \hat{Y}_i$	0,67	-0,33	0,03	-0,33
	$e_i^2$	0,4489	0,1089	0,0009	0,1089
	$\sum e_i^2$	0,6676			
	$\bar{Y} = \frac{\sum Y_i}{n}$	1			
	$Y_i - \bar{Y}$	1	1	-1	-1
	$(Y_i - \bar{Y})^2$	1	1	1	1
	$\sum (Y_i - \bar{Y})^2$	4			

Где  $e_i = Y_i - \hat{Y}_i$  – остатки.

Коэффициент детерминации определяется по формуле:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum e_i^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2} = 1 - \frac{0.6676}{4} = 1 - 0.1669 = 0.8331$$

3) Вычислите коэффициент автокорреляции  $r(2)$ .

Год	1	2	3	4	5	6
Кол-во	14	9	12	12	11	10

Коэффициент автокорреляции второго порядка характеризует тесноту связи между уровнями  $Y_t$  и  $Y_{t-2}$  определяется по формуле:

$$r_2 = \frac{\sum_{t=3}^n (y_t - \bar{y}_3)(y_{t-2} - \bar{y}_4)}{\sqrt{\sum_{t=3}^n (y_t - \bar{y}_3)^2 \sum_{t=3}^n (y_{t-2} - \bar{y}_4)^2}}$$

где  $\bar{y}_3 = \frac{1}{n-2} \sum_{t=3}^n y_t$ ,  $\bar{y}_4 = \frac{1}{n-2} \sum_{t=3}^n y_{t-2}$ .

$$\bar{y}_3 = \frac{1}{n-2} \sum_{t=3}^n y_t = \frac{1}{6-2} (12+12+11+10) = 11.25$$

$$\bar{y}_4 = \frac{1}{n-2} \sum_{t=3}^n y_{t-2} = \frac{1}{6-2} (14+9+12+12) = 11.75$$

$$\begin{aligned} \sum_{t=3}^n (y_t - \bar{y}_3)(y_{t-2} - \bar{y}_4) = & \\ (12 - 11.25)(14 - 11.75) + & \\ (12 - 11.25)(9 - 11.75) + & \\ (11 - 11.25)(12 - 11.75) + & \\ (10 - 11.25)(12 - 11.75) = & \\ 0.75 \cdot 2.25 + & \\ 0.75 \cdot (-2.75) + & \\ (-0.25) \cdot 0.25 + & \\ (-1.25) \cdot 0.25 = & \\ 1.6875 - 2.0625 - 0.0625 - 0.3125 = -0.75 & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{t=3}^n (y_t - \bar{y}_3)^2 = & \\ 0.75^2 + 0.75^2 + (-0.25)^2 + (-1.25)^2 = & \\ 0.5625 + 0.5625 + 0.0625 + 1.5625 = 2.75 & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{t=3}^n (y_{t-2} - \bar{y}_4)^2 = & \\ 2.25^2 + (-2.75)^2 + 0.25^2 + 0.25^2 = & \\ 5.0625 + 7.5625 + 0.0625 + 0.0625 = 12.75 & \end{aligned}$$

$$r_2 = \frac{\sum_{t=3}^n (y_t - \bar{y}_3)(y_{t-2} - \bar{y}_4)}{\sqrt{\sum_{t=3}^n (y_t - \bar{y}_3)^2 \sum_{t=3}^n (y_{t-2} - \bar{y}_4)^2}} = \frac{-0.75}{\sqrt{2.75 \cdot 12.75}} = -0.12666$$

4) Проверить гипотезу о наличии тренда для временного ряда 5,3,3,3,4,3,3,2,3,1 по критерию Кокса-Стюарта.

**Критерий Кокса-Стюарта** предназначен для проверки тренда средних и дисперсий в последовательности наблюдений.

Нулевая гипотеза  $H_0$  - существование тренда.

Для критерия среднего в выборке объема  $n$  предложена статистика

$$S_1 = \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (n-2i+1)h_{i,n-i+1}, \text{ где}$$

$$h_{i,j} = \begin{cases} 0, & x_i > x_j; \\ 1, & x_i \leq x_j. \end{cases} \quad (i < j)$$

Таблица. Определение  $h_{ij}$

индексы	$j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$i$	$x$	5	3	3	3	4	3	3	2	3	1
1	5										0
2	3									1	
3	3								0		
4	3							1			

индексы	$j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$i$	$x$	5	3	3	3	4	3	3	2	3	1
5	4						0				
6	3										
7	3										
8	2										
9	3										
10	1										

$$S_1 = \sum_{i=1}^{10/2} (10 - 2 \cdot i + 1) \cdot h_{i,n-i+1} =$$

$$(10 - 2 \cdot 1 + 1) \cdot 0 +$$

$$(10 - 2 \cdot 2 + 1) \cdot 1 +$$

$$(10 - 2 \cdot 3 + 1) \cdot 0 +$$

$$(10 - 2 \cdot 4 + 1) \cdot 1 +$$

$$(10 - 2 \cdot 4 + 1) \cdot 0 =$$

$$= 0 + 7 + 0 + 3 + 0 = 10$$

Критерий, основанный на статистике  $S_1$ , имеет эффективность  $\approx 0.86$  по отношению к [наилучшему параметрическому критерию](#).

Таблица. Определение  $h_{ij}$

$$h_{i,j} = \begin{cases} 0, & x_i > x_j; \\ 1, & x_i \leq x_j. \end{cases} \quad (i < j)$$

индексы	$j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$i$	$x$	1	3	2	3	3	4	3	3	3	5
1	1										1
2	3									1	
3	2							1			
4	3							1			
5	3						1				
6	4										
7	3										
8	3										
9	3										
10	5										

$$S_1 = \sum_{i=1}^{10/2} (10 - 2 \cdot i + 1) \cdot h_{i,n-i+1} =$$

$$(10 - 2 \cdot 1 + 1) \cdot 1 +$$

$$(10 - 2 \cdot 2 + 1) \cdot 1 +$$

$$(10 - 2 \cdot 3 + 1) \cdot 1 +$$

$$(10 - 2 \cdot 4 + 1) \cdot 1 +$$

$$(10 - 2 \cdot 4 + 1) \cdot 1 =$$

$$= 9 + 7 + 5 + 3 + 1 = 25$$

Критерий, основанный на статистике  $S_1$ , имеет эффективность  $\approx 0.86$  по отношению к наилучшему параметрическому критерию.

Для проверки гипотезы тренда применяется нормализованная статистика

$$S_1^* = \frac{S_1 - M(S_1)}{\sqrt{D(S_1)}}, \text{ где}$$

$$M(S_1) = \frac{n^2}{8} \text{ и}$$

$$D(S_1) = \frac{n(n^2 - 1)}{24}.$$

$$M(S_1) = \frac{10^2}{8} = 12.5.$$

$$D(S_1) = \frac{10 \cdot (10^2 - 1)}{24} = 41.25.$$

$$S_1^* = \frac{25 - 12.5}{\sqrt{41.25}} = 1.946$$

При  $|S_1^*| < u_{\frac{1+\alpha}{2}}$  нулевая гипотеза  $H_0$  существования тренда среднего отклоняется, в противном случае гипотеза  $H_0$  принимается ( $u_\gamma$  -  $\gamma$  квантиль нормального распределения,  $\alpha = 0,95$ , что при вероятности 0,05, то есть для 5%-ного уровня значимости).

$|S_1^*| = 0.3892 < u_{0,975} = 1.96$ , поэтому нулевая гипотеза  $H_0$  существования тренда **не принимается**.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Кальченко А.А., Рузанов В.В. Волочение проволоки. Часть 1: учеб. Пособие. – Магнитогорск: Изд-во Магнитогорск. гос.техн. ун-та им. Г.И.Носова, 2011. 55с.
2. Кальченко А.А. Инструмент и системы смазки для волочения проволоки: учеб.пособие / А.А. Кальченко, В.В. Рузанов. Изд-во Магнитогорск. гос.техн. ун-та им. Г.И.Носова, 2014. 55с.
3. Коковихин Ю.И., Поляков Г.М., Кальченко А.А. Волочение высокопрочной сталеалюминиевой проволоки. Биллетень НТИ. Черная металлургия. 1973, №7.
4. Кальченко А.А. Волочение биметаллической сталеалюминиевой проволоки. В сб. теория и практика производства метизов. Свердловск, 1977.
5. Кальченко А.А., Коковихин Ю.И. Инструмент для волочения проволоки в режиме гидродинамического трения. Патент СССР №618154.
6. Кальченко А.А., Рузанов В.В. Устройство для волочения изделий в режиме гидродинамического трения. Патент СССР №1470385
7. Кальченко А.А., Рузанов В.В. Подготовка поверхности металла к волочению. Учебное пособие. Магнитогорск ГОУ ВПО МГТУ, 2011г.
8. Костогрызов И.Д., Коковихин Ю.И., Кальченко А.А. Устройство для очистки перемещаемой проволоки. Патент СССР №787115.
9. Кальченко А.А., Рузанов В.В. Оборудование волочильных цехов. Учебное пособие. Магнитогорск. Изд-во Магнитогорск гос.техн.ун-т им. Г.И. Носова, 2014г.
10. Пащенко К.Г. и др. Геометрические характеристики проволоки после совмещенного процесса бесфильтрного волочения и очистки поверхности // К.Г. Пащенко, Ю.Ф. Бахматов, А.А. Кальченко, В.В. Рузанов, С.В. Михайлицин, А.В. Ярославцев, К.К. Ярославцева, Д.В. Терентьев, М.А. Шекшеев, Н.Ш. Тютяряков, Д.А. Шашкин // Успехи современного естествознания. 2014. № 12-4. С. 421-424.
11. Пащенко К.Г. и др. Сравнительные свойства проволоки в совмещенном процессе бесфильтрного волочения и очистки поверхности / К.Г. Пащенко, Ю.Ф. Бахматов, А.А. Кальченко, В.В. Рузанов, С.В. Михайлицин, А.В. Ярославцев, К.К. Ярославцева, Д.В. Терентьев, М.А. Шекшеев, Н.Ш. Тютяряков, Д.А. Шашкин // Современные наукоемкие технологии. 2015. № 2. С. 107-111.
12. Пащенко К.Г. и др. Совмещенный процесс бесфильтрного волочения и очистки поверхности катанки / Пащенко К.Г., Бахматов Ю.Ф., Кальченко А.А., Рузанов В.В. // Инновации в материаловедении и металлургии: Материалы IV Международной интерактивной научно-практической конференции: Издательство Уральского университета. - Екатеринбург, 2015. С. 203-206.
13. Пащенко К.Г. и др. Сравнительные свойства металла проволоки, полученного традиционным волочением и бесфильтрным / Пащенко К.Г., Бахматов Ю.Ф., Кальченко А.А., Рузанов В.В. // Инновации в материаловедении и металлургии: Материалы IV Международной интерактивной научно-практической конференции: Издательство Уральского университета. - Екатеринбург, 2015. С. 203-206.
14. Пащенко К.Г. и др. Кинематика проволоки в процессе бесфильтрного волочения растяжением-изгибом на конических роликах / Пащенко К.Г., Бахматов Ю.Ф., Кальченко А.А., Рузанов В.В. // Инновации в материаловедении и металлургии: Материалы IV Международной интерактивной научно-практической конференции: Издательство Уральского университета. - Екатеринбург, 2015. С. 211-214.
15. Бахматов Ю.Ф. и др. Совмещенный процесс бесфильтрного волочения и очистки поверхности катанки / Ю.Ф. Бахматов, К.Г. Пащенко, А.А. Кальченко, А.С. Белов, Н.Ш. Тютяряков // Металлург, 2014. № 4. С. 88-91.

16. Бахматов Ю.Ф. и др. Установка для совмещенного процесса бесфильтрного волочения и очистки поверхности катанки / Ю.Ф. Бахматов, К.Г. Пащенко, А.А. Кальченко, В.В. Рузанов, С.В. Михайлицын, А.В. Ярославцев, К.К. Ярославцева, Д.В. Терентьев, Д.А. Шашкин // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. 2014. № 12-1. С. 8-11.

17. Пащенко К.Г. и др. Совмещенный процесс бесфильтрного волочения с протяжкой в роликовых волокнах / К.Г. Пащенко, Ю.Ф. Бахматов, А.А. Кальченко, Бочкарев А.В. // Реконструкция промышленных предприятий - прорывные технологии в металлургии и машиностроении: VI Международный промышленный форум. - Челябинск, 2014. С. 110.

18. Бахматов Ю.Ф. и др. Технологические основы пластической обработки катанки в совмещенном процессе с воздействием ультразвуком / Ю.Ф. Бахматов, К.Г. Пащенко, Э.М. Абдулин, О.В. Ежов, Н.В. Смирнов // Обработка сплошных и слоистых материалов. 2013. № 1 (39). С. 89-92.

19. Бахматов Ю.Ф., Пащенко К.Г. Влияние геометрических размеров отражательных элементов при бесфильтрном волочении с локализацией очага деформации ультразвуковой энергией // Процессы и оборудование металлургического производства: Сборник научных трудов. Магнитогорск: ГОУ ВПО «МГТУ», 2006. С. 320-323.

20. Бахматов Ю.Ф., Пащенко К.Г. Устройство для волочения проволоки с ультразвуком через калибр сформированный бойками резонансных размеров, с динамическим замыканием изделием (проволокой) зазора между ними // Патент на полезную модель РФ № 122920, 12.07.2012.

21. Пащенко К.Г. и др. Влияние технологических параметров на обрывность проволоки при бесфильтрном волочении / К.Г. Пащенко, Ю.Ф. Бахматов, К.А. Фролушкина, Б.Б. Зарицкий // Материалы 67-й науч.-техн. конф.: сб. докл. Магнитогорск: Изд-во МГТУ, 2009. Т. 1.

22. Каюков А.С. и др. Устройство для пластического растяжения проволоки и ленты. Патент СССР №884808 / А.С. Каюков, Ю.Ф.Бахматов, Б.А.Никифоров, Кальченко А.А.

23. Пащенко К. Г., Бахматов Ю. Ф., Голубчик Э. М. Влияние пластического растяжения -изгиба в совмещенном процессе удаления окалины -волочения на свойства проволоки//Сталь. -2011. -№ 3.

24. Pashchenko K.G., Bakhmatov Y.F., Golubchik E.M. INFLUENCE OF PLASTIC TENSION-FLEXURE ON THE WIRE PROPERTIES IN SCALE REMOVAL AND DRAWING / Steel in Translation. 2011. T. 41. № 3. С. 246-249.

25. Bakhmatov Yu.F., Pashchenko K.G. PLASTIC MACHINING OF WIRE ROD IN DIE-FREE DRAWING, IN THE PRESENCE OF ULTRASOUND/ Steel in Translation. 2014. T. 44. № 8. С. 607.

Учебное текстовое электронное издание

**Кальченко Александр Андреевич  
Пащенко Константин Георгиевич**

## **МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ИНЖЕНЕРИИ**

Учебное пособие

1,52 Мб

1 электрон. опт. диск

г. Магнитогорск, 2017 год  
ФГБОУ ВО «МГТУ им. Г.И. Носова»  
Адрес: 455000, Россия, Челябинская область, г. Магнитогорск,  
пр. Ленина 38

ФГБОУ ВО «Магнитогорский государственный  
технический университет им. Г.И. Носова»  
Кафедра машин и технологий обработки давлением  
Центр электронных образовательных ресурсов и  
дистанционных образовательных технологий  
e-mail: ceor\_dot@mail.ru