



Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова»

Кафедра теплотехнических и энергетических систем

Т.П. Семенова
Ю.И. Тартаковский

ГИДРОГАЗОДИНАМИКА

Конспект лекций

Магнитогорск
ФГБОУ ВПО «МГТУ»
2011

УДК (532)

Рецензенты

Заведующий кафедрой физики и методики обучения физики,
кандидат технических наук, доцент,
ГОУ ВПО «Магнитогорский государственный университет»
Н.И. Платонов

Главный энергетик ОАО «Магнитогорский молочный комбинат»,
кандидат технических наук
О.А Харченко

Семенова Т.П., Тартаковский Ю.И.

Гидрогазодинамика [Электронный ресурс]: Конспект лекций / Татьяна Петровна Семенова; Юрий Иосифович Тартаковский, ФГБОУ ВПО «МГТУ». – Электрон. текстовые дан. (1,0 Мб). – Магнитогорск: ФГБОУ ВПО «МГТУ», 2011. – 1 электрон. опт. диск (CD-R). – Систем. требования: IBM PC, любой, более 1 GHz; 512 Мб RAM; 10 Мб HDD; MS Windows XP и выше; Adobe Reader 7.0 и выше; CD/DVD-ROM дисковод; мышь. – Загл. с контейнера.

Рассматриваются основные физические свойства жидкостей и газов, общие законы и уравнения статики, кинематики и динамики жидкостей и газов, Основное внимание обращено на вопросы, связанные с потерей энергии при движении жидкостей и газов по трубопроводам и технологическим каналам.

Конспект лекций предназначен для студентов всех форм обучения по направлению подготовки 140100 «Теплоэнергетика».

УДК (532)

© Семенова Т.П., Тартаковский Ю.И., 2011
© ФГБОУ ВПО «МГТУ», 2011

Содержание

Предисловие	5
Введение	6
Обозначение физических величин	8
1. Основные модели жидкости	11
2. Основные свойства жидкостей и газов	12
2.1 Плотность жидкости и газов	12
2.2 Сжимаемость жидкости и газов	12
2.3 Тепловое расширение жидкостей и газов	13
2.4 Вязкость жидкостей и газов	14
2.5 Поверхностное натяжение	15
3. Гидростатика	17
3.1 Основные понятия гидростатики	17
3.2 Силы, действующие в жидкости	17
3.3 Основное дифференциальное уравнение покоящейся жидкости	20
3.4 Дифференциальное уравнение покоящейся жидкости относительно Земли	22
3.5 Поверхности равного давления	24
3.6 Приборы для измерения давления	25
3.7 Давление газов	27
3.8 Относительное равновесие несжимаемой жидкости	29
3.9 Гидростатический парадокс	31
3.10 Сила давления на наклонную плоскую стенку	32
4. Кинематика жидкости	35
4.1 Методы описания движения жидкости	35
4.2 Анализ движения жидкой частицы	38
4.3 Струйная гидравлическая модель потока	41
4.4 Линия тока	41
4.5 Трубка тока	42
4.6 Уравнение неразрывности или сплошности	44
4.7 Уравнение импульсов	47
5. Основные уравнения динамики жидкости и газа	50
5.1 Дифференциальное движение невязкой жидкости	50
5.2 Уравнение Бернулли	52
5.3 Уравнение Бернулли в форме напоров	53
5.4 Физический смысл коэффициента Кориолиса	54
6. Гидродинамика вязкой жидкости	56
6.1 Дифференциальные уравнения движения вязкой жидкости Навье -Стокса	56
7. Основы теории гидродинамического моделирования	59
8. Режимы движения жидкости	63

9. Основы теории гидродинамических сопротивлений	65
9.1 Потери напора (давления) на трение	66
9.2 Потери напора на местные сопротивления	69
10. Истечение жидкости через отверстия и насадки	74
10.1 Истечение жидкости при постоянном напоре	74
10.2 Виды насадок и их применение	76
10.3 Гидравлический удар	78
11. Одномерные течения сжимаемого газа	81
11.1 Параметры заторможенного газа, критическая скорость	83
11.2 Движение газа по каналам переменного сечения.	84
11.3 Гипотеза Сен-Венана	86
11.4 Сопло Лавала и его режимы работы	87
11.5 Скачки уплотнения	88
12. Основы теории пограничного слоя	92
12.1 Пограничный слой при обтекании тела безграничным потом	92
12.2. Пограничный слой на начальном участке канала	94
12.3. Толщина пограничного слоя	95
12.4. Явление отрыва пограничного слоя	98

ПРЕДИСЛОВИЕ

Целью дисциплины «Гидрогазодинамика» является изучение теоретических методов расчета жидкостей и газов в элементах энергетического и теплотехнического оборудования.

Задачи изучения дисциплины заключаются в приобретении навыков использования основных уравнений гидрогазодинамики для расчета течений жидкостей и газов по каналам и трубопроводам, прогнозирования надежности эксплуатации оборудования сетей.

В результате изучения дисциплины студент должен знать:

- основные физические свойства жидкостей и газов, общие законы и уравнения статики, кинематики и динамики жидкостей и газов, особенности физического и математического моделирования одномерных и трехмерных, дозвуковых и сверхзвуковых, ламинарных и турбулентных течений идеальной и реальной несжимаемой и сжимаемой жидкостей.

Студент должен уметь:

- рассчитывать гидродинамические параметры потока жидкости (газа) при внешнем обтекании тел и течении в каналах (трубах).

Студент должен владеть:

- методиками проведения типовых гидродинамических расчетов гидромеханического оборудования и трубопроводов.

Дисциплина базируется на материалах следующих дисциплин: «Математика», «Физика», «Введение в специальность».

ВВЕДЕНИЕ

Гидрогазодинамикой называется наука, изучающая закономерности равновесия и движения сплошных жидких сред, а также законы силового взаимодействия этих сред с поверхностями твердых тел, контактирующих с ними.

Для обеспечения технологического процесса и эксплуатации оборудования на современных промышленных предприятиях необходима бесперебойная подача энергоносителей в виде пара, воды, газа и топлива, которая осуществляется по трубопроводам и технологическим каналам. Системы энергообеспечения предприятий включают в себя транспортировку газообразных, парообразных и жидких сред в широком диапазоне температур и давлений, что требует от студента знание физических свойств жидкостей и газов, а также основных законов и уравнений статики, кинематики и динамики жидкостей и газов. Все это определяет важность изучения дисциплины «Гидрогазодинамика». Данный электронный образовательный ресурс разработан на основе ФГОС для студентов по направлению подготовки 140100 «Теплоэнергетика и теплотехника». Успешное решение сложных научно-технических задач, связанных с гидравлическими расчетами, возможно лишь при комплексном сочетании экспериментальных и теоретических методов изучения движения жидкости, поэтому данный курс включает в себя:

- лекционные занятия - 36 часов;
- практические занятия – 18 часов;
- лабораторные занятия – 18 часов;
- самостоятельная работа студентов -72 часа.

Дисциплина читается в 3 семестре. В качестве промежуточной аттестации предусмотрен экзамен.

Гидрогазодинамика рассматривается как часть механики сплошной среды и охватывает широкий круг технических задач. К внутренним задачам относятся вопросы, связанные с движением жидкостей и газов в трубах и каналах, когда сжимаемостью последних можно пренебречь. Данный раздел гидрогазодинамики называется гидравликой. Развитие воздухоплавания и авиации, высокопроизводительных воздушных и газодутьевых устройств обусловило появление аэродинамики - раздела механики жидкости, в котором рассматриваются законы движения газов с учетом их сжимаемости. При этом предполагается, что движение газа происходит со скоростями, значительно меньшими, чем скорость звука в газовой среде, а изменения давления и температуры незначительны. В аэродинамике преимущественно рассматривается так называемая внешняя задача - обтекание газовым потоком твердых тел.

Появление высокоскоростных транспортных и энергетических газовых турбин, переход авиации к около- и сверхзвуковым скоростям повлекли за собой формирование газовой гидродинамики - раздела механики жидкости, в котором изучаются законы движения газа со скоростями близкими или превышающими скорость звука при существенных изменениях давления, плотности и температуры в газовой среде.

Многообразие сфер применения гидрогазодинамики сделало эту науку одной из важнейших в числе прикладных наук, составляющих фундамент инженерных знаний.

ОБОЗНАЧЕНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

Символ	Физическая величина, параметр	Единицы измерения
a	Ускорение	m/c^2
a	Скорость распространения звука в среде	m/c
C_p	Удельная массовая теплоемкость при постоянном давлении	$Дж / кгK$
C_g	Удельная массовая теплоемкость при постоянном объеме	$Дж / кгK$
d	Диаметр	m
$d_{экв}$	Эквивалентный диаметр	m
$E_{жс}$	Модуль упругости жидкости	H / m^2
Eu	Число подобия Эйлера	Безразмерное
F	Сила, действующая в жидкости	H
F_x, F_y, F_z	Компоненты единичной массовой силы	m/c^2
f	Площадь, площадь сечения	m^2
Fr	Число подобия Фруда	Безразмерное
G	Массовый расход	$кг / c$
g	Ускорение свободного падения	m/c^2
H	Полный напор жидкости	m
h	Потери напора, высота столба жидкости	m
h_l	Потери напора жидкости по длине	m
h_m	Потери напора жидкости на местные сопротивления	m
J_0	Момент инерции	m^4
k	Показатель адиабаты Пуассона	Безразмерный
l	Длина	m

M	Число Маха	Безразмерное
m	Масса	$кг$
Ne	Число Ньютона	Безразмерное
P	Гидростатическое давление	$H / м^2, Па$
P_x, P_y, P_z	Компоненты гидростатического давления	$H / м^2, Па$
Q	Объемный расход жидкости	$м^3 / с$
q	Удельная теплота	$Дж / кг$
$R_{y\partial}$	Удельная газовая постоянная	$Дж / кгК$
R, r	Радиус	$м$
Re	Число Рейнольдса	Безразмерное
s	Энтропия	$Дж / кгК$
T	Абсолютная температура	$К$
t	Температура	$^{\circ}C$
t	Время	$с$
v	Скорость	$м / с$
v_x, v_y, v_z	Компоненты скорости	$м / с$
U	Скорость на внешней границе пограничного слоя	$м / с$
V	Объем	$м^3$
X, Y, Z x, y, z	Декартовы координаты	$м$
β_c	Коэффициент сжимаемости	$Па^{-1}$
β_t	Коэффициент теплового расширения	$К^{-1}$
δ	Толщина пограничного слоя	$м$

Символ	Физическая величина, параметр	Единицы измерения
ρ	Плотность	$кг / м^3$
ε	Коэффициент сжатия потока струи	Безразмерный
ξ	Коэффициент местного сопротивления	Безразмерный
λ	Коэффициент гидравлического трения	Безразмерный
μ	Динамический коэффициент вязкости	$Пас$
μ	Коэффициент расхода отверстия	Безразмерный
ν	Коэффициент кинематической вязкости	$м^2 / с$
σ	Коэффициент поверхностного натяжения	$Н / м$
τ	Касательное напряжение	$Па$
ω	Угловая скорость вращения тела, жидкой частицы	$1 / с$
χ	Число кавитации	Безразмерное
Δ	Высота выступов шероховатости	$м$

1. ОСНОВНЫЕ МОДЕЛИ ЖИДКОСТИ

Модель жидкости, принимаемая в гидрогазодинамике, не учитывает внутреннюю молекулярную структуру реальных жидкостей. Предполагается, что жидкость занимает свой объем без каких-либо пустот или разрывов, т.е. является сплошной средой, а также каждая частица жидкости обладает одинаковыми физическими свойствами в любой своей точке и в любом направлении.

Под термином *жидкость* в широком смысле понимаем как капельную, так и газовую среду, подчиняющуюся одним и тем же законам равновесия и механического движения. Молекулярное строение в принятой модели жидкости отражается через учет сил внутреннего трения. В этом случае все механические характеристики жидкой среды можно рассматривать как непрерывные математические функции координат точки и времени, причем в большинстве случаев эти функции имеют непрерывные частные производные по всем своим аргументам. Данная модель жидкости описывается дифференциальными уравнениями. Основной особенностью дифференциальной формы уравнений динамики жидкости и газа является то, что входящие в них величины представляют плотности распределения объемных и поверхностных сил, а не сами величины, относящиеся к элементарному или конечному объему.

Если в рассматриваемых процессах силы трения играют несущественную роль, а изменения физических параметров жидкости невелики, успешно применяется модель идеальной жидкости.

Под *идеальной жидкостью* понимают жидкость не обладающую вязкостью, абсолютно несжимаемую, имеющую постоянные физические свойства и не оказывающую никакого сопротивления разрыву.

Поскольку влияние вязкости сказывается только при движении жидкости, то модель идеальной жидкости очень точно отражает законы равновесия реальной жидкости.

Для ряда задач гидрогазодинамики дифференциальная форма уравнений не может быть использована во всем пространстве, заполненном жидкой средой, если входящие в уравнение величины претерпевают внутри среды разрывы непрерывности. В этом случае применяются интегральные уравнения, выражающие связь между величинами в некоторых конечных объемах и на ограничивающих их поверхностях.

Принято условно разделять жидкие среды на два класса: капельные и газообразные.

К капельным жидкостям относятся такие жидкости, которые не изменяют своего объема под действием приложенных сил.

К газам или упругим жидкостям относят сплошные среды, которые изменяют свой объем под действием приложенных к ним сил, и которые всегда занимают все предоставленное им пространство.

2. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ

2.1. Плотность жидкостей и газов

Плотностью называется количество массы вещества, заключенное в единице объема, плотность отражает инерционные свойства жидкости.

Представление о жидкости как о сплошной материальной среде, позволяет дать определение плотности жидкости ρ в данной точке через предельное отношение элементарной массы жидкости Δm к ее элементарному объему ΔV , когда он стремится к нулю, т.е.

$$\rho_{(\cdot)} = \lim_{\Delta V \rightarrow (\cdot)} \frac{\Delta m}{\Delta V}; \text{кг} / \text{м}^3 \quad (2.1)$$

В общем случае плотность жидкости может изменяться от точки к точке в объеме, занятом жидкостью, и изменяется в каждой точке объема с течением времени. Это означает, что в механике жидких сред плотность можно рассматривать, как непрерывную функцию координат и времени

$$\rho = \rho(x, y, z, t).$$

Во многих случаях в гидрогазодинамике рассматриваются задачи, связанные с однородной жидкостью, т.е. жидкостью, физические свойства которой неизменны во всем объеме. Плотность во всех точках однородной жидкости одинакова и равна отношению общей массы жидкости m к величине объема V , занимаемого жидкостью:

$$\rho = \frac{m}{V}; \text{кг} / \text{м}^3 \quad (2.2)$$

Сжимаемость и тепловое расширение. Плотность жидкости меняется с изменением давления и температуры. Эта зависимость различна для капельных жидкостей и для газов. Взаимосвязь между давлением, температурой и плотностью отражает проявление жидкостями таких свойств, как сжимаемость и температурное расширение.

2.2 Сжимаемость жидкостей и газов

Сжимаемость - свойство жидкостей изменять объем при изменении давления.

Физическим параметром, характеризующим это свойство, является коэффициент объемного сжатия β_c , который равен относительному изменению объема фиксированной массы жидкости V при изменении давления P на единицу при постоянной температуре:

$$\beta_c = -\frac{1}{V} \frac{dV}{dP} \quad (2.3)$$

где β_c - коэффициент объемного сжатия, Па^{-1} .

Знак минус отражает тот факт, что увеличение давления приводит к уменьшению объема жидкости.

Сжимаемость реальных капельных жидкостей незначительна и в подавляющем большинстве случаев этим свойством пренебрегают.

В отличие от капельных жидкостей, газы (упругие жидкости) обладают большой степенью сжимаемости. Под действием внешнего давления объем газов значительно уменьшается и соответственно возрастает плотность. Связь между плотностью газов ρ , их давлением P и температурой T обычно описывается термодинамическими уравнениями состояния в виде функции $\rho = \rho(P, T)$ или специальными таблицами.

В качестве такого уравнения состояния при рассмотрении большинства задач механики жидкости широко используют уравнение состояния идеального газа Менделеева - Клапейрона:

$$\rho = \frac{P}{RT} \quad (2.4)$$

где P - абсолютное давление в газе, Па ; R - удельная газовая постоянная, $\text{Дж} / \text{кг} \cdot \text{К}$; T - абсолютная температура, К .

Данное уравнение достаточно точно описывает поведение реальных газов в широких пределах изменения параметров, но при этом предполагается, что газы находятся в состоянии далеко от условий сжижения.

2.3. Тепловое расширение жидкостей и газов

Температурным или тепловым расширением называют свойство жидкости изменять свой объем при изменении температуры.

Физическим параметром, характеризующим это свойство, принято считать температурный коэффициент объемного расширения β_t , который численно равен относительному изменению объема фиксированной массы жидкости V при изменении ее температуры T на единицу градуса (К) при постоянном давлении:

$$\beta_t = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dT} \quad (2.5)$$

Температурный коэффициент объемного расширения в системе СИ изменяется как К^{-1} .

Для газов объем будет увеличиваться при повышении температуры и может быть найден по формуле

$$V_t = V_0 \frac{T_0 + t}{T_0}; \text{м}^3 \quad (2.6)$$

Необходимо отметить, что для реальных капельных жидкостей температурный коэффициент объемного расширения незначителен. Так, для воды при 20°C и нормальном атмосферном давлении $\beta_t = 0,00015 \text{ K}^{-1}$.

Для подавляющего большинства жидкостей, применяемых в инженерной практике, этот коэффициент имеет такой же порядок, что и для воды.

2.4. Вязкость жидкостей и газов

Вязкость жидкостей. Вязкость является одним из важнейших свойств, характерных только для жидкостей, и которое во многом определяет поведение реальных жидкостей при их движении.

Вязкость - свойство жидкости оказывать сопротивление сдвигу ее частиц или слоев друг относительно друга, проявляющееся в давлении внутреннего трения.

Влияние вязкости на характер течения отражается двумя постулатами, основанными на всесторонних экспериментальных исследованиях - гипотезе “прилипания” и законе внутреннего трения Ньютона.

Гипотеза “прилипания” заключается в том, что частицы жидкости, непосредственно прилегающие к твердому телу, абсорбируются им, как бы прилипают к его поверхности, т.е. их скорость равна скорости твердого тела. В соответствии с этой гипотезой скорость жидкости на неподвижной твердой поверхности всегда равна нулю (рис. 2.1.)

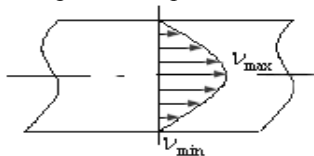


Рис 2.1 Распределение скорости движущейся жидкости по сечению

Между соприкасающимися частицами или слоями жидкости, движущимися с различными скоростями, всегда возникают силы внутреннего трения, направленные по касательной к поверхности соприкосновения и противодействующие смещению этих частиц друг относительно друга.

В математической формулировке закон Ньютона имеет вид:

$$\tau = \pm \mu \frac{dv}{dn} \quad (2.7)$$

где τ - удельная сила трения, приходящаяся на единицу поверхности соприкасающихся слоев, называемая касательным напряжением, $Па$,

μ - динамическая вязкость, $Пас$;

dn - изменение расстояния вдоль нормали между двумя бесконечно близкими слоями.

В механике жидкости наряду с динамическим коэффициентом вязкости широко используется другой физический параметр, характеризующий вязкость жидкости - кинематический коэффициент вязкости.

Кинематический коэффициент вязкости ν определяется как величина, равная отношению коэффициента динамической вязкости μ к плотности жидкости ρ :

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (2.8)$$

где ν - вязкость жидкости, $м^2 / с$

Вязкость жидкостей зависит от температуры и давления. В специальной литературе широко приводятся экспериментальные, аналитические формулы, графики и таблицы, отражающие зависимость коэффициентов вязкости от температуры и давления.

Зависимости коэффициентов вязкости от давления и температуры различны для капельных жидкостей и газов:

1. У капельных жидкостей вязкость практически не зависит от давления, но значительно уменьшается при повышении температуры, так как часть энергии идет на разрыв молекулярных связей жидкости.

2. Вязкость газов, в отличие от капельных жидкостей, существенно возрастает с увеличением температуры, так как увеличивается кинетическая энергия молекул газа.

2.5. Поверхностное натяжение

В слое жидкости, расположенной над поверхностью раздела жидкости и газа возникает *поверхностное натяжение*. Силы поверхностного натяжения стремятся придать объему жидкости сферическую форму и вызывают дополнительное давление в жидкости, которое существенны лишь при малых количествах жидкости. Для сферических объемов капель

$$P = 2\sigma / r \quad (2.9)$$

где σ - коэффициент поверхностного натяжения жидкости, H/m ; r - радиус сферы, m .

Величина коэффициент поверхностного натяжения жидкости σ зависит от природы соприкасающихся сред и от температуры, с увеличением температуры, значение σ уменьшается. При $20^{\circ}C$ и контакте с воздухом σ для воды равно $0,073 H/m$, а для нефти $0,025 H/m$. При добавке поверхностно- активных веществ ПАВ поверхностное натяжение заметно уменьшается.

В трубах малого диаметра (капиллярах), наблюдается искривление свободной поверхности, граничащей с воздухом или парами этой жидкости. Если поверхность в трубке смачивается, то свободная поверхность в капилляре вогнутая, если не смачивается, то выпуклая. Поднятие воды в капиллярах почвы является важным фактором в распространении воды. Силы поверхностного натяжения учитываются при использовании стеклянных трубок в приборах для измерения давления. В обычных гидравлических расчетах влиянием этих сил пренебрегают.

Контрольные вопросы

- Что понимается под плотностью жидкостей и газов?
- Что такое температурное расширение жидкостей и газов?
- Что такое объемное сжатие жидкостей и газов?
- Что понимается под вязкостью жидкостей и газов?
- Какие виды вязкости Вам известны?
- Как изменяется вязкость жидкостей и газов от температуры
- Что понимается под поверхностным натяжением жидкости?
- В каких единицах измеряется коэффициент поверхностного натяжения?

3. ГИДРОСТАТИКА

3.1. Основные понятия гидростатики

Гидростатикой называется раздел гидрогазодинамики, в котором рассматриваются условия равновесия жидкостей и законы силового взаимодействия этих жидкостей с поверхностями твердых тел.

Общей задачей гидростатики является изучение состояния равновесия (покоя) жидкостей под действием приложенных к ним сил.

Из определения равновесного состояния следует, что существует два вида равновесия жидкости - абсолютное и относительное.

Если жидкость находится в состоянии равновесия по отношению к абсолютной (неподвижной) системе координат, то такое равновесие называют абсолютным.

При решении практических задач в качестве абсолютной системы координат выбирают системы, жестко связанные с поверхностью земли. Примерами абсолютного равновесия являются жидкости, находящиеся в неподвижных сосудах и резервуарах.

Если жидкость перемещается вместе с подвижной системой координат и находится в состоянии равновесия по отношению к этой системе, то такое равновесие называют относительным.

В качестве примеров относительного равновесия можно привести жидкости, находящиеся в движущихся автомобильных или железнодорожных цистернах, жидкости во вращающихся сосудах.

3.2. Силы, действующие в жидкости

Равновесное состояние устанавливается и сохраняется под действием системы сил, приложенных по всем частицам жидкой среды. Силы, действующие на жидкость, имеют самую разнообразную физическую природу. Это могут быть силы гравитации, инерции, силы поверхностного натяжения и т.д. Для механики жидкости важно, что все многообразие сил можно свести по типу их действия к двум классам - силы массовые и силы поверхностные.

3.2.1. Массовые силы

Массовыми (объемными) называются силы, непрерывно распределенные по всему объему вещества, величина которых прямо пропорциональна массе вещества, содержащегося в этом объеме.

Распределение массовых сил по объему сплошной среды характеризуется плотностью распределения массовых сил.

Плотность распределения массовых сил представляет собой силу, отнесенную к единице массы:

$$\vec{F} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\rho \cdot \Delta V} \quad (3.1)$$

Проекции вектора $\vec{F}$ на оси декартовых координат обозначаются F_x, F_y, F_z .

Плотность распределения массовых сил имеет размерность ускорения m/c^2 . В частности, если массовой силой является сила тяжести, то плотность распределения этой силы есть ускорение свободного падения.

3.2.2. Поверхностные силы

Поверхностными силами называются непрерывно распределенные по поверхности силы, суммарная величина которых пропорциональна площади поверхности рассматриваемого объема жидкости.

К поверхностным силам можно отнести: силы вязкости или внутреннего трения и силы давления.

При равновесии жидкости силы, приложенные к любой точке поверхности, должны быть направлены по нормали к этой поверхности, причем действие этих сил таково, что они всегда стремятся сжать объем жидкости, ограничиваемый рассматриваемой поверхностью.

Выделим на поверхности жидкого объема элементарную площадку Δf , на которую действует равнодействующая всех сил $\Delta \vec{F}$ приложенных к данной площадке. Предположим, что данная сила направлена под углом к выделенной площадке. Вектор силы раскладывается на два направления: нормальное $\vec{P}_n$ к площадке и $\vec{P}_\tau$ касательное к площадке. Сила касательного напряжения $\vec{P}_\tau$ привела бы к движению жидкости, т.е. к нарушению равновесия. Следовательно, сила $\Delta \vec{F}$ ориентированна к выбранной площадке Δf по нормали (рис. 3.1.). Предел отношения $\Delta \vec{F} / \Delta f$ выразит вектор напряжения поверхностных сил в точке, к которой стягивается площадка Δf .

$$\vec{P}_n = \lim_{\Delta f \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta f}; H / m^2, Pa \quad (3.2)$$

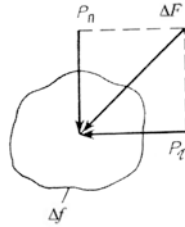


Рис. 3.1 К определению поверхностных сил

Величина вектора напряжения $\vec{P}_n$ в данной точке зависит от ориентации площадки, выделенной внутри объема жидкости, так как через каждую точку покоящейся жидкости можно провести бесчисленное множество поверхностей, по-разному направленных в пространстве.

Наличие нормальных напряжений приводит к тому, что любая частица жидкости находится в напряженном состоянии, т. е. окружающая жидкость стремится сжать эту частицу со всех сторон.

Гидростатическим давлением P называется скалярная величина, характеризующая напряженное состояние жидкости, численно равная значению нормального напряжения в рассматриваемой точке.

Среднее гидростатическое давление выражает силу, приходящуюся в среднем на единицу площади.

$$P_{cp} = \frac{\Delta F}{\Delta f} \quad (3.3)$$

В общем случае гидростатическое давление P в различных точках жидкости может быть различным, поэтому его величина является непрерывной функцией координат $P = P(x, y, z)$.

Необходимым условием считается то, что при равновесии жидкости гидростатическое давление направлено по нормали внутрь рассматриваемого объема, и в любой точке по всем направлениям одинаково.

Сила гидростатического давления, или просто сила давления, определяется, как результирующее воздействие гидростатического давления на рассматриваемую поверхность и определяется интегралом по поверхности Δf , на которую действует распределенное по поверхности давление.

$$F = \int_f P df$$

В том случае, когда рассматривается бесконечно малый участок поверхности Δf , считая, гидростатическое давление P постоянным в пределах этого участка силу давления ΔF , можно найти как:

$$\Delta F = P \Delta f, \quad H \quad (3.4)$$

3.3. Основное дифференциальное уравнение равновесия жидкости

Жидкость будет находиться в состоянии равновесия, если каждый бесконечно малый ее элемент находится в равновесии под действием всей совокупности приложенных к этому элементу сил.

В неподвижной жидкости выбираем систему координат x, y, z , в которой рассмотрим элементарный объем жидкости в виде параллелепипеда, грани которого параллельны координатным осям (рис.3.2)

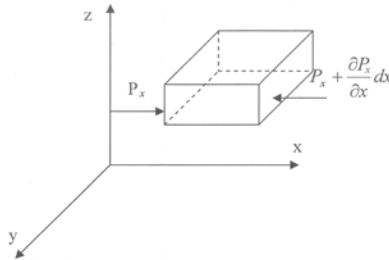


Рис. 3.2 Схема к выводу уравнения Эйлера

По принципу Даламбера тело находится в состоянии равновесия, если сумма проекций всех сил на координатные оси равнялась нулю:

$$\left. \begin{aligned} \sum F_x &= 0 \\ \sum F_y &= 0 \\ \sum F_z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

В общем случае рассматриваемый элемент жидкости находится в равновесии под действием массовых и поверхностных сил. Величина массовых сил F пропорциональна массе жидкости dm , заключенной в

рассматриваемом объеме dV . Масса жидкости с учетом ее плотности ρ определяется в виде:

$$dm = \rho dV = \rho dx dy dz \quad (3.6)$$

где dx, dy, dz - значения длин ребер прямоугольного параллелепипеда.

Поверхностные силы всегда направлены по нормальям к соответствующим граням рассматриваемого параллелепипеда. Давления, действующие вдоль оси X :

$$P_x \text{ и } P_x + \frac{\partial P_x}{\partial x} dx$$

Составим уравнение равновесия сил вдоль оси X :

$$P_x \cdot dy \cdot dz - (P_x + \frac{\partial P_x}{\partial x} dx) dy dz + F_x \rho \cdot dx dy dz = 0 \quad (3.7)$$

Раскроем скобки и преобразуем.

Разделим все на ρ , получаем выражение:

$$F_x - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P_x}{\partial x} = 0$$

Аналогично на остальные оси.

$$\left. \begin{aligned} F_x - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P_x}{\partial x} &= 0 \\ F_y - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P_y}{\partial y} &= 0 \\ F_z - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P_z}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

Уравнение (3.8) называют дифференциальным уравнением идеальной, покоящейся жидкости в форме Эйлера.

Данное уравнение можно преобразовать, для чего умножим первое на dx , второе на dy , третье на dz .

Данные уравнения сложим и сгруппируем:

$$\rho(F_x dx + F_y dy + F_z dz) - (\frac{\partial P_x}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial P_y}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial P_z}{\partial z} \cdot dz) = 0 \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial P_x}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial P_y}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial P_z}{\partial z} \cdot dz \Rightarrow dP$$

$$dP - \rho(F_x dx + F_y dy + F_z dz) = 0 \quad (3.10)$$

Уравнение (3.10) называют *основным уравнением гидростатики в дифференциальной форме*. В левой части его - полный дифференциал, поэтому и правая часть также должна быть полным дифференциалом. Другими словами, если жидкость находится в состоянии равновесия, то правая часть является полным дифференциалом какой-то функции $\Phi(x, y, z)$. Поэтому, можем записать:

$$dP = \rho d\Phi \quad (3.11)$$

Функция $\Phi(x, y, z)$ выражает потенциальную энергию массовых сил.

3.4. Дифференциальное уравнение покоящейся жидкости относительно Земли

Рассмотрим идеальную жидкость, покоящуюся в выделенном элементарном объеме, неподвижном относительно Земли.

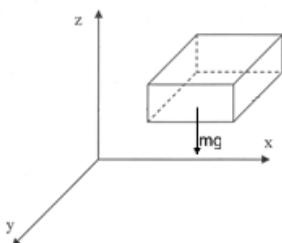


Рис 3.3 К выводу уравнения равновесия покоящейся жидкости относительно Земли.

Пусть из массовых сил на данный объем жидкости в форме параллелепипеда действует только сила тяжести. Запишем уравнение Эйлера (3.10)

$$dP - \rho(F_x dx + F_y dy + F_z dz) = 0;$$

Сила тяжести направлена по нормали к осям x, y и в обратную сторону оси z .

Получим основное уравнение статики

$$dP + \rho g dz = 0 \quad (3.12)$$

После интегрирования

$$P + \rho g z = C, \text{ Па} \quad (3.13)$$

где C - постоянная интегрирования.

$$P_{\text{пбз}} + P_{\text{зеоМ}} = \text{const} \quad (3.14)$$

где $P_{\text{пбз}}$ - потенциальная энергия единицы объема жидкости;

$P_{\text{зеоМ}} = \rho g z$ - потенциальная энергия положения единицы объема жидкости.

Формула (3.14) выражает гидростатический закон распределения давления, состоящий в том, если на несжимаемой жидкость действует сила тяжести, то давление линейно зависит от вертикальной координаты.

Пусть, например, жидкость покоится в резервуаре рис. (3.4) причем на ее свободной поверхности давление равно P_0 .

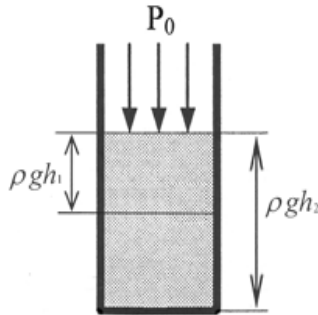


Рис. 3.4 Жидкость, покоящаяся в резервуаре

Для заглубления h_1 под свободной поверхностью жидкости, получим основную формулу гидростатики:

$$P = P_0 + \rho g h_1 \quad (3.14)$$

Аналогично для заглубления h_2 , уравнение гидростатики запишется:

$$P = P_0 + \rho g h_2$$

Из этих формул ясно, что всякое изменение внешнего давления P_0 вызывает изменение давления во всех точках покоящейся жидкости на ту же величину. Этот результат известен как закон Паскаля.

Основное уравнение гидростатики может быть записано и в другой форме, придающей ему наглядную геометрическую интерпретацию. Разделим уравнение статики (3.13) на ρg :

$$\frac{P_{\text{н\`ез}}}{\rho g} + Z = H_{cm} = \text{const}; m \quad (3.15)$$

Данное уравнение статики записано в форме напоров. Физический смысл основного уравнения гидростатики состоит в том, что оно представляет собой формулировку закона сохранения энергии для любой из частиц жидкости, находящейся в состоянии равновесия в поле силы тяжести Земли.

3.5. Поверхности равного давления

Запишем дифференциальное уравнение Эйлера (3.10):

$$dP - \rho(F_x dx + F_y dy + F_z dz) = 0$$

$$dP = \rho d\Phi$$

Поверхности, в каждой точке которых $\Phi = \text{const}$, называют эквипотенциальными. Частным случаем эквипотенциальной поверхности является поверхность равного давления, т.е. поверхность, в каждой точке которой $P = \text{const}$. В этом случае $dP = 0$ и уравнение Эйлера принимает вид:

$$\rho(F_x dx + F_y dy + F_z dz) = 0 \quad (3.16)$$

Уравнение называют уравнением поверхности равного давления. Если из массовых сил на жидкость действует только сила тяжести, то в покоящейся жидкости любая горизонтальная плоскость есть поверхность равного давления. В соответствии с уравнением статики (3.14) давление в произвольной точке сосуда будет:

$$P = P_0 + \rho g h$$

Если все члены формулы (3.14) разделить на величину ρg , то они приобретут линейную размерность:

$$\frac{P}{\rho g} = \frac{P_0}{\rho g} + h \quad (3.17)$$

где h - пьезометрическая высота, $м$.

Отсюда следует, что каждому давлению P можно поставить в соответствие линейную величину $P/\rho g$, которая представляет собой величину столба жидкости, создающего в своем основании данное давление.

3.6. Приборы для измерения давления

При измерении атмосферного давления в нормальных физических условиях с помощью закрытого ртутного пьезометра (барометра) высота поднятия столбика ртути в пьезометрической трубке составляет 760 мм. Если в качестве рабочей жидкости использовать воду, то высота поднятия водяного столба при тех же условиях возрастает до 10,333 метра. Таким образом, необходимая длина пьезометрической трубки может быть уменьшена в 13,6 раза, при использовании в качестве рабочей жидкости ртути вместо воды, т.е. пропорционально отношению плотностей.

$$\rho_{Hg} = 13600 \text{ кг} / \text{м}^3$$

$$\rho_{H_2O} = 1000 \text{ кг} / \text{м}^3$$

Давление может измеряться как в барометрических единицах, так и в физических атмосферах
Барометрическое давление:

а) $B = 760 \text{ мм}$ ртутного столба = $10,2 \text{ м}$ водяного столба = $1,013 \cdot 10^5 \text{ Па}$
Физическая атмосфера:

б) $1 \text{ кгс/см}^2 = 740 \text{ мм}$ ртутного столба = 10 м водяного столба = $9,8 \cdot 10^4 \text{ Па}$

Измерение гидростатического давления в жидкостях и газах осуществляется с помощью специальных приборов, различающихся между собой по назначению и принципу действия.

В зависимости от назначения и пределов измерения различают:

- манометры - приборы для измерения избыточных давлений;
- вакуумметры - приборы для измерения вакуума или разрежения;
- барометры - приборы для измерения абсолютного атмосферного давления воздуха;
- микроманометры - приборы для измерения малых избыточных давлений и небольших разрежений;
- дифференциальные манометры - приборы для измерения разности давлений в двух точках.

По принципу действия приборы для измерения давлений можно разделить на жидкостные, механические, электрические и комбиниро-

ванные. В технике наибольшее распространение получили жидкостные и механические приборы для измерения давления.

3.6.1. Жидкостные приборы для измерения давлений

Основу конструкций жидкостных приборов составляют сообщающиеся сосуды, условия равновесия в которых были рассмотрены в предыдущем параграфе.

Простейшими приборами, для непосредственного определения избыточного давления $p_{изб}$ в резервуарах с жидкостью являются пьезометры.

Пьезометр представляет собой открытую сверху прозрачную (стеклянную) трубку небольшого диаметра, нижний конец которой присоединен к резервуару, давление в котором измеряется (рис.3.6).

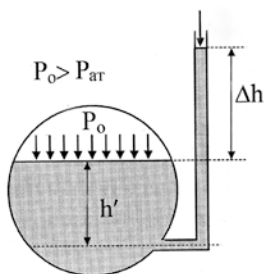


Рис.3.6 Измерение давления в сосуде с жидкостью

Возможности пьезометров значительно расширяются, если в них использовать другую рабочую жидкость, не смешивающуюся с той, которая находится в основном резервуаре.

Такие пьезометры, измеряющие давление жидкости (газа) с помощью другой несмешивающейся жидкости, называют жидкостными манометрами.

Как правило, в них в качестве рабочей жидкости применяют более плотные жидкости, например, ртуть.

Основу принципа действия жидкостных микроманометров составляет тот же закон сообщающихся сосудов, что и для обычных пьезометров. Конструктивное отличие состоит лишь в том, в микроманометре пьезометрическая трубка может быть расположена не вертикально, а под некоторым углом α к плоскости горизонта, расстояние Δl , между уровнями, измеряемое вдоль длины наклонной трубки можно найти как:

$$\Delta l = \frac{\Delta h}{\sin \alpha} \quad (3.18)$$

В силу своих конструктивных особенностей, жидкостные пьезометры и манометры используют для измерения небольших давлений, не превышающих 8 - 10 кПа.

Если давление на свободной поверхности жидкости P_0 оказывается меньше атмосферного, (рис.3.7.) то плоскость пьезометрического напора будет расположена ниже уровня свободной поверхности жидкости на величину $\Delta h = h_{\text{вак}}$, в данном случае имеет место разрежение или вакуум, который определяется как разница между атмосферным и абсолютным давлением.

Для измерения разрежения, помимо жидкостных, применяются механические вакуумметры (рис 3.7). Принцип их действия и конструкция такие же, как и механических манометров.

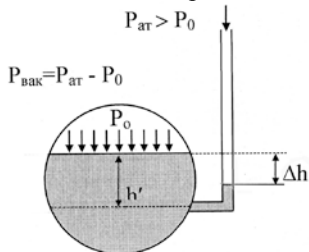


Рис.3.7 Измерение вакуума в закрытом сосуде

Для измерения давлений, свыше 4 - 5 кПа, обычно применяются механические манометры различных типов.

Принцип действия этих манометров основан на деформации упругих элементов под действием измеряемого давления и передаче этой деформации с помощью специальных механизмов на указатель (стрелку), перемещающийся вдоль проградуированной шкалы давлений.

Механические манометры измеряют только избыточное давление, поэтому при определении абсолютного давления к их показаниям надо прибавлять давление окружающей среды.

3.7 Давление газов

Как было показано выше, с глубиной жидкости, давление растёт по линейному закону.

$$P_{\text{пъез}} + \rho g z = \text{const}, \text{ Па}$$

Условия равновесия газа в поле земного тяготения можно записать следующим образом:

$$dP = -\rho g dz \quad (3.19)$$

Форму поверхностей равного давления получим из условия, что на этой поверхности давление должно быть постоянным, т.е. $P = \text{const}$ или

$$dP = 0. \quad \text{Тогда из (3.19) следует, что } dz = 0, \quad \text{откуда } z = c = \text{const}.$$

Это означает, что поверхности равного давления при равновесии газов в поле земного тяготения представляют собой семейство горизонтальных плоскостей.

Таким образом, в газах гидростатическое давление одинаково в любой горизонтальной плоскости и изменяется только с высотой расположения точки, т.е. $P = P(z)$. Аналогичный результат был получен и для капельных жидкостей. Это позволяет сделать общий вывод:

При абсолютном равновесии капельных жидкостей и газов в поле земного тяготения гидростатическое давление изменяется только в вертикальном направлении.

Изменение давления по высоте определяется не только условием механического равновесия газа, но и условиями изменения термодинамического состояния газа.

3.7.1. Распределение гидростатического давления при изотермическом процессе.

Если температура газа постоянна, то с учетом (3.19) условия равновесия:

$$dP = -\rho g dz$$

$$\rho = \frac{P}{RT} \quad (3.20)$$

В этом случае, подставляя (3.20) в (3.19) и разделяя переменные P и z , имеем:

$$\frac{dP}{P} = -\frac{g}{RT} dz \quad (3.21)$$

Полагая, что давление P_0 в начале координаты ($z_0 = 0$) известно, и проводя интегрирование с учетом того, что $T = \text{const}$, получим:

$$\ln \frac{P}{P_0} = -\frac{gz}{RT} \quad (3.22)$$

Определяем окончательно закон распределения в виде:

$$P = P_0 e^{-gz/RT} \quad (3.23)$$

Отрицательный показатель степени говорит о том, что гидростатическое давление в газах убывает по высоте.

При абсолютном равновесии газа, находящегося в изотермических условиях в гравитационном поле Земли, давление воздуха вблизи земли поддерживается за счет силы тяжести и теплового движения молекул и изменяется только по вертикали. Закон изменения носит экспоненциальный характер.

Около поверхности земли, можно считать, что давление убывает по линейному закону т.е.

$$P_h = P_{атм} - \rho gh \quad (3.24)$$

В металлургических печах нагретые дымовые газы обладают меньшей плотностью, чем воздух снаружи печи, на одной и той же высоте.

$$1) P_{печи} = P_{ат} - \rho_{газа} gh$$

$$2) P_{возд} = \rho_{атм} - gh$$

Так как плотность нагретого газа меньше, чем плотность воздуха, то давление газов в печи превышает давление воздуха снаружи на величину:

$$\Delta P = P_1 - P_2 = gh(\rho_{возд} - \rho_{газа}) \quad (3.25)$$

Загрузочные окна в печах выполняют на поду (у основания), чтобы не было выбросов дымовых газов из печи. Эта же формула может быть применена для приблизительного нахождения высоты дымовой трубы.

$$h_{трубы} = \frac{\Delta P}{g(\rho_{\epsilon}^t - \rho_{\epsilon}^t)} \quad (3.26)$$

3.8. Относительное равновесие несжимаемой жидкости

В технике широко распространены случаи, когда жидкость находится в состоянии относительного равновесия внутри сосудов, вращающихся вокруг вертикальной оси. Это происходит, например, при центробежной отливке металла, в центробежных сепараторах для разделения жидкости и многих других случаях.

Рассмотрим цилиндрический сосуд радиусом Z , заполненной капельной жидкостью плотностью ρ и приведенный во вращение с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси, совпадающей с осью симметрии (рис.3.8).

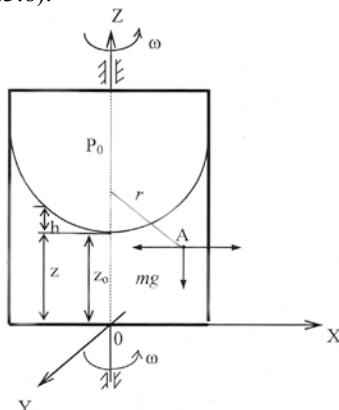


Рис. 3.8 Вращение жидкости в сосуде вокруг вертикальной оси

Жидкость, под действием силы трения приходит в движение и по истечении некоторого времени устанавливается состояние относительно равновесия.

При этом вся жидкость вращается вокруг оси с практически постоянной угловой скоростью, близкой к угловой скорости вращения резервуара.

Определим форму поверхностей равного давления и закон распределения гидростатического давления в системе отсчета, жестко связанной с вращающимся сосудом. Вертикальную координатную ось OZ направим вдоль оси вращения. Рассмотрим точку A , лежащую в жидкости на некотором расстоянии r от оси. На данную точку будут действовать две силы: сила тяжести mg перпендикулярная оси X, Y и направлена в противоположную сторону оси Z , и центробежная сила $m\omega^2 r$ перпендикулярная оси Z . Во время вращения жидкость ведет себя как монолит, т.е. как твердое тело. При этом визуально видно, что свободная линия равного давления вращающейся жидкости представляет собой воронку (параболу). Запишем уравнение статики в форме Эйлера (3.10):

$$dP - \rho(F_x dx + F_y dy + F_z dz) = 0$$

Давление на поверхность жидкости $const$, тогда уравнение запишется:

$$\rho(F_x dx + F_y dy + F_z dz) = 0$$

Подставим значение плотности распределения массовых сил, получим

$$\omega^2 x dx + \omega^2 y dy - g dz = 0$$

$$\frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) = gz \quad (3.27)$$

Уравнение (3.27) является уравнением параболы.

При относительном равновесии жидкости во вращающемся сосуде поле давлений изображается в виде семейства парабол. При этом расстояние по вертикали между соседними изобарами одинаково, как это следует из линейного закона распределения гидростатического давления по вертикали.

Свободная поверхность также является поверхностью равного давления, во всех точках которой давление равно внешнему давлению P_0 .

3.9. Гидростатический парадокс

Определим силу давления, действующую на участок плоской горизонтальной поверхности, площадью f , находящейся на заданной глубине h под свободной поверхностью однородной жидкости.

Так как все горизонтальные плоскости являются поверхностями равного давления, то на каждую точку рассматриваемого участка действует одинаковое гидростатическое давление, направленное по нормали к этой плоскости. Величина абсолютного давления $P_{абс.}$ при заданном внешнем давлении P_0 определится в соответствии с основным уравнением гидростатики по формуле (3.13)

$$P_0 + \rho gh = const$$

Сила давления F , при этих условиях будет равна:

$$F = (P_0 + \rho gh) f, H$$

Если свободная поверхность жидкости открыта в атмосферу, ($P_{ат} = P_0$), то сила избыточного давления на площадку f запишется в виде:

$$F_{изб.} = \rho gh f, H$$

Из этого следует, что сила избыточного гидростатического давления на плоское горизонтальное дно сосуда зависит только от плотности

жидкости, площади дна f , высоты заполнения сосуда жидкостью h и не зависит от формы сосуда.

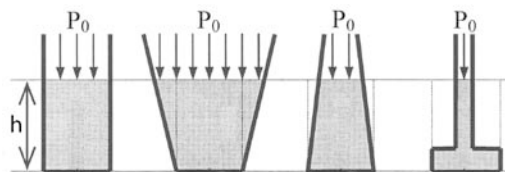


Рис.3.9 Определение давления на дно сосудов различной формы

На (рис. 3.9) приведено несколько примеров сосудов различной формы с одинаковым плоским горизонтальным дном площадью f , заполненных жидкостью до одинаковой высоты h . Во всех сосудах полная сила избыточного давления на дно будет одинаковой.

Независимость силы давления на горизонтальное дно от формы сосуда носит название гидростатического парадокса.

3.10. Сила давления на наклонную плоскую стенку

Определим силу гидростатического давления F , действующую в жидкости на участок f плоской поверхности, наклоненной под углом α к горизонту (рис.3.10).

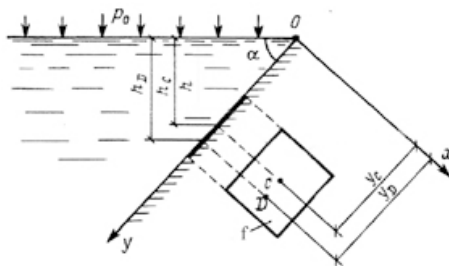


Рис.3.10 Сила давления на наклонную плоскость

Систему координат выберем таким образом, чтобы ось Oy совпала с линией пересечения свободной поверхности с наклонной плоскостью, на которой расположен рассматриваемый участок. Сила гидроста-

тического давления, действующего на произвольный участок наклонной плоскости, равна произведению площади поверхности смоченного участка на величину гидростатического давления в центре тяжести этого участка.

$$F = (P_0 + \rho g h_c) f_{cm}, \quad H \quad (3.27)$$

Глубина погружения h может быть заменена расстоянием l , отсчитываемым от линии пересечения наклонной плоскости со свободной поверхностью ($h_c = l \sin \alpha$).

Произведение $l \sin \alpha$ можно рассматривать как глубину погружения центра тяжести плоской фигуры f , т.е. $h_c = l \sin \alpha$.

Эффект действия силы давления зависит не только от величины, но и от линии действия этой силы. Сила F гидростатического давления складывается из двух составляющих сил.

Первая составляющая сила $P_0 f$ обусловлена действием на каждую точку поверхности одинакового внешнего давления P_0 и в соответствии с правилами сложения системы равномерно распределенных параллельных сил, будет приложена к центру тяжести участка поверхности.

Линия действия второй составляющей $\rho g h_c f$, определяющей силу избыточного давления, пересекает рассматриваемый участок в точке D (рис.3.10), как правило, не совпадающий с центром тяжести C .

Формулы для определения положения центра тяжести (l_c) и моментов инерции относительно оси, проходящей через центр тяжести (J_0), приводятся в специальной и справочной литературе.

$$l_D = l_c + \frac{J_0}{l_c f_c} \quad (3.28)$$

где J_0 - момент инерции плоской фигуры относительно оси, параллельной оси ou и проходящей через центр тяжести.

Данная зависимость для определения одной из координат l_D центра давления позволяет сделать следующий вывод:

В общем случае, центр давления (точка D) расположен ниже центра тяжести (точка C) на величину $\frac{J_0}{l_c f_c}$, отсчитываемую вдоль наклонной плоскости.

Контрольные вопросы

- Какие силы действуют в жидкостях?
- Что понимаем под идеальной (невязкой) жидкостью?
- Как изменяется давление жидкости при возрастании ее глубины?
- По какому закону происходит изменение давления газов с увеличением высоты при изотермическом процессе?
- Что понимаем под поверхностью уровня?
- В чем заключается физический смысл пьезометрического и геометрического давления?
- Что понимается под гидростатическим напором?
- Что понимается под абсолютным и относительным покоем (равновесием) жидких сред?
- Что представляет собой линия равного давления при вращении жидкости в сосуде относительно своей оси?
- Как определить давление в жидкости при вращении ее в сосуде относительно своей оси?
- От чего зависит давление на плоские поверхности?

4. КИНЕМАТИКА ЖИДКОСТИ

4.1. Методы описания движения жидкости

Кинематика жидкости - раздел механики жидкости, в котором изучаются движение жидкости и его характеристики, но не рассматриваются силы, под действием которых осуществляется это движение.

В кинематике устанавливаются закономерности между координатами жидких частиц, их скоростями, ускорениями и другими параметрами, и изменениями этих параметров во времени.

Механическое состояние движущейся жидкости в любой точке внутри ее характеризуется двумя величинами: скоростью движения частиц жидкости и гидродинамическим давлением.

Представление о жидкости как о сплошной среде позволяет считать эти параметры непрерывными и дифференцируемыми функциями координат и времени. Существуют два способа описания движения жидкости:

1.Способ Лагранжа, который заключается в задании текущих значений координат каждой рассматриваемой материальной точки как функции времени. Способ Лагранжа теоретически применим к описанию движения жидкости, если рассматривать это движение, как непрерывный поток частиц жидкости, составляющих сплошную среду. Движение жидкости определено, если для каждой частицы жидкости можно указать координаты x, y, z , как функции начального положения x_0, y_0, z_0 и времени t . Кинематические уравнения движения записываются при этом в виде функциональной зависимости:

$$\begin{aligned}x &= f(x_0, y_0, z_0, t) \\y &= f(x_0, y_0, z_0, t) \\z &= f(x_0, y_0, z_0, t)\end{aligned}\tag{4.1}$$

Переменные (x_0, y_0, z_0, t) называют переменными Лагранжа

Несмотря на полную информацию о движении массы жидкости, которую дает метод Лагранжа, он не получил широкого применения в механике жидкости. Это связано с тем, что уравнения движения, составляемые на основе метода Лагранжа сложны и трудноразрешимы. По этой причине наиболее широкое применение в механике жидкостей находит метод Эйлера.

2. Способ Эйлера основан на том, что совокупность мгновенных местных скоростей во всей области пространства, занятого движущейся жидкостью представляет собой векторное поле, называемое полем скоростей. В поле скоростей выбирают фиксированную точку, в которой отслеживают изменения скоростей с течением времени. Переменные (x, y, z, t) называют переменными Эйлера

Векторное поле скоростей может быть выражено и через проекции скоростей на соответствующие координатные оси в виде:

$$\begin{aligned}v_x &= f(x, y, z, t) \\v_y &= f(x, y, z, t) \\v_z &= f(x, y, z, t)\end{aligned}\tag{4.2}$$

Так как состояние движущейся жидкости в каждой точке пространства определяется мгновенной локальной скоростью и значением гидродинамического давления, то описание движения жидкости сводится к определению поля скоростей и поля давлений во всем объеме, занимаемом движущейся жидкостью.

Полный дифференциал скорости будет равен:

$$dv = \frac{\partial v}{\partial t} dt + \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz$$

Разделим данное уравнение на dt

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

Запишем уравнение на три координатные плоскости:

$$\begin{aligned}\frac{dv_x}{dt} &= \frac{\partial v_x}{\partial t} + \underbrace{v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}}_{\text{конвективные производные}} \\ \frac{dv_y}{dt} &= \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{dv_z}{dt} &= \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}\end{aligned}\tag{4.3}$$

где левые части – полные производные ускорения в данных точках; первые слагаемые правых частей – частные производные по времени - представляют собой проекции локального (местного) ускорения в точке; выделенные фигурной скобкой – конвективные производные;

выделенные по диагонали – прямые конвективные производные.

Важнейшей кинематической характеристикой, необходимой для составления динамических уравнений движения жидкости является ускорение.

В соответствии с физическим смыслом ускорение материальной точки или отдельной частицы жидкости определяется *полной производной* вектора скорости по времени:

Местная производная указывает на стационарность (нестационарность) процесса. Или на установившееся и неуставившееся движения жидкости.

Установившимся (стационарным) называют движение, при котором основные параметры потока (скорость, давление, плотность) в данной точке пространства не изменяются с течением времени. Например,

если скорость остается постоянной во времени, то $0 = \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial t}$

или $v = const$.

Конвективная производная показывает *однородность (равномерность)* поля скоростей.

Равномерным называется такое установившееся движение, при котором живые сечения вдоль потока не изменяются: в этом случае $f = const$; средние скорости по длине потока также не изменяются, т.е. $v = const$. Примером равномерного движения является: движение жидкости в цилиндрической трубе, в канале постоянного сечения при одинаковых глубинах.

Установившееся движение называется *неравномерным*, когда распределение скоростей в различных поперечных сечениях неодинаково; при этом средняя скорость и площадь поперечного сечения потока могут быть и постоянными вдоль потока. Примером неравномерного движения может быть движение жидкости в конической трубе или в речном русле переменной ширины.

Напорным называется движение жидкости, при котором поток полностью заключен в твердые стенки и не имеет свободной поверхности. Напорное движение происходит вследствие разности давлений и под действием силы тяжести. Примером напорного движения является движение жидкости в замкнутых трубопроводах (например, в водопроводных трубах).

Безнапорным называется движение жидкости, при котором поток имеет свободную поверхность. Примером безнапорного движения может быть: движение жидкости в реках, каналах, канализационных и дренажных трубах. Безнапорное движение происходит под действием силы тяжести и за счет

начальной скорости. Обычно на поверхности безнапорного потока давление атмосферное.

Если уровень жидкости в резервуаре поддерживать все время постоянным $H = const$, путем непрерывного подвода жидкости в сосуд из крана, то форма струи, дальность ее полета и расход жидкости через отверстие будут постоянными. Этот случай является иллюстрацией установившегося движения жидкости.

Примером неустановившегося движения является истечение жидкости из отверстия в резервуаре. По мере понижения уровня жидкости в сосуде с течением времени (моменты времени $t_2 > t_1$) уменьшается дальность полета струи и расход вытекающей жидкости.

4.2. Анализ движения жидкой частицы

Движение жидкости в механике сплошных сред рассматривается как одновременное непрерывное движение всей совокупности бесконечно малых жидких частиц, образующих сплошную среду. Описание кинематики движения жидкости не будет полным, если не будут определены особенности движения отдельных частиц, как единого целого.

Из механики известно, что движение твердого тела можно рассматривать, как сумму двух видов движения: поступательного перемещения вместе с некоторой точкой M_0 - полюсом и вращением вокруг мгновенной оси, проходящей через эту точку.

При таком представлении движения твердого тела, скорость зависит от выбора местоположения полюса в этом теле, а вектор мгновенной угловой скорости $\vec{\omega}$ от выбора полюса не зависит и является общей характеристикой вращательного движения всех точек твердого тела.

В процессе движения жидкая частица деформируется и расстояния между ее точками изменяются.

По теореме Коши-Гельмгольца, в общем случае движение любой частицы в жидкости можно разложить на поступательное перемещение вместе с некоторым полюсом (рис. 4.1), вращательное перемещение, определяемое поворотом частицы вокруг мгновенной оси, проходящей через полюс (рис. 4.2), и из деформационного изменения формы и размеров частицы (рис. 4.3).

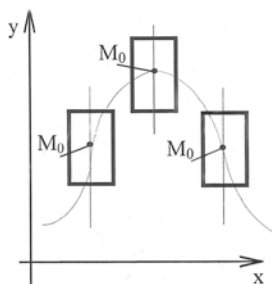


Рис.4.1 Поступательное движение частицы жидкости

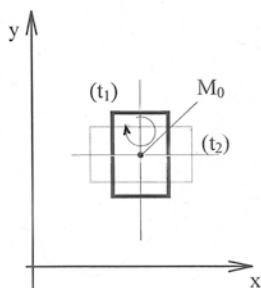


Рис 4.2 Вращательное движение частицы жидкости

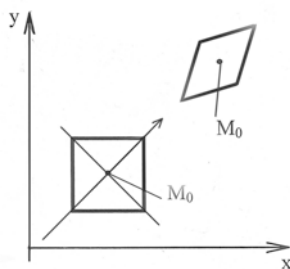


Рис.4.3 Деформационное движение частицы жидкости

В соответствии с теоремой Коши-Гельмгольца, скорость любой точки в движущейся частице жидкости может быть представлена как векторная сумма скоростей поступательного, вращательного и деформационного движений

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_{\text{деф.}} + \vec{v}_{\text{вращ.}} \quad (4.4)$$

Здесь $\vec{V}_0$ - скорость полюса движущейся частицы, $\vec{V}_{\text{деф.}}$ - скорость деформационного движения, $\vec{V}_{\text{вращ.}} = [\vec{\omega} \cdot \vec{r}]$ - линейная скорость во вращательном движении рассматриваемой точки вокруг полюса, $\vec{\omega}$ - мгновенная угловая скорость вращения частицы, r - расстояние от рассматриваемой точки до полюса частицы.

Деформационная составляющая скорости $\vec{V}_{\text{деф.}}$ не будет рассматриваться подробно, так как многие основные закономерности механики жидкости могут быть объяснены и сформулированы без учета деформационного движения. Соответствующие компоненты скорости деформационного движения играют роль только при рассмотрении вопросов динамики вязких жидкостей.

Будем считать, что скорость любой частицы жидкости складывается из ее поступательного движения с линейной скоростью $\vec{V}$, определяемой заданным полем скоростей, и мгновенной угловой скоростью $\vec{\omega}$.

Следовательно, можно считать, что состояние движущейся жидкости можно описывать двумя полями - полем скоростей и полем угловых скоростей. Первое из полей определяет общую картину движения частиц жидкости в потоке, а второе поле описывает вращение этих отдельных частиц (элементарных объемов) жидкости.

Теоретические расчеты устанавливают связь между полями, и позволяют, в явном виде выразить вектор мгновенной угловой скорости и его проекции через частные производные от соответствующих функций, описывающих поле скоростей.

$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right), \\ \omega_y &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right), \\ \omega_z &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right). \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

Вихревое движение широко распространено как в природе, так и в технических устройствах. Поэтому изучение его закономерностей представляет практический интерес. Вращательное движение жидких частиц характеризуется вихрем скорости

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{v} \quad (4.6)$$

Это означает, что в каждой точке пространства вращение жидких частиц может быть охарактеризовано этим вектором. Его модуль

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} \quad (4.7)$$

Движение, при котором величина вихря скорости не равна нулю, т.е. $\text{rot } \vec{v} \neq 0$, называют вихревым. При условии $\text{rot } \vec{v} = 0$ движение безвихревое либо потенциальное.

4.3. Струйная гидравлическая модель потока

Задание поля скорости и поля вихрей теоретически позволяет определить мгновенные значения скорости и угловой скорости $\vec{\omega}$ в каждой точке пространства, занятого жидкостью. К числу таких параметров, отражающих кинематику движения конечных масс жидкости, относятся, в первую очередь, расход жидкости, средняя скорость течения жидкости и интенсивность вихревого движения.

Струйная модель потока жидкости. В соответствии с этой моделью весь поток жидкости представляется как совокупность отдельных элементарных струек жидкости, не перемешивающихся между собой, с бесконечно малым поперечным сечением, в пределах которого локальную скорость жидкости можно считать постоянной. Струйная модель потока жидкости введена Эйлером. Основу этой модели составляет понятие струйки, под которой понимают жидкость, протекающую внутри трубки тока, сформированной из линий тока.

4.4. Линия тока

В движущейся жидкости *условно* выберем линию таким образом, чтобы в каждой точке ее скорость была направлена по касательной. Линией тока называется кривая, обладающая тем свойством, что в данный момент времени векторы скоростей в любой ее точке совпадают по направлению с касательными (рис. 4.4)

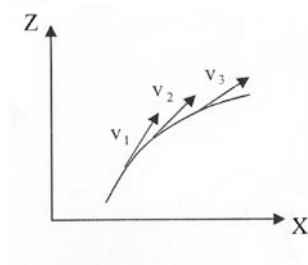


Рис. 4.4 Определение линии тока

$$v_x = \frac{dx}{dt}; v_y = \frac{dy}{dt}; v_z = \frac{dz}{dt}$$

При одном и том же промежутке времени дифференциальное уравнение линии тока запишется:

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z} \quad (4.8)$$

Линии тока не могут пересекаться в одной точке. В противном случае это бы означало, что частица, проходящая через данную точку должна иметь одновременно несколько векторов мгновенной локальной скорости, что противоречит физическому смыслу.

Под траекторией понимается след, оставленный конкретной, движущейся частицей в пространстве.

Линия тока отличается от траектории, т.к. она связывает различные, лежащие на ней частицы и характеризует направление их движения в данный момент времени, она может совпадать с траекторией только при стационарном режиме.

Свойства линии тока:

- линии тока некогда не пересекаются;
- зависят от характера движения;
- совпадает с траекторией при стационарном режиме.

4.5. Трубка тока (поверхность тока)

Выделим в движущейся жидкости замкнутый контур, через каждую точку которого проведем линии тока (рис.4.5).

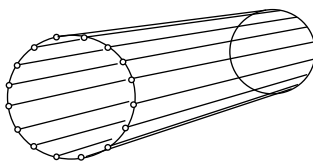


Рис. 4.5. Трубка тока

Образованная таким образом цилиндрическая поверхность носит название трубки тока. Данный контур намечался в пространстве, занятом движущейся жидкостью, поэтому часть ее должна находиться и внутри трубки тока. Количество жидкости внутри поверхности тока или трубки тока будет оставаться постоянным с течением времени, так как по определению она образована линиями тока, касательными к поверхности трубки тока и жидкость не может втекать и вытекать из нее. Данное свойство трубки тока является необходимым при определении объемного и массового расхода жидкости.

Объемным расходом Q принято называть объемное количество жидкости, проходящей через данное живое сечение в единицу времени, в системе СИ объемный расход измеряется в $\text{м}^3/\text{с}$.

Внутри трубки тока объемный расход остается постоянный.

$$dQ = vdf \quad (4.9)$$

Объемный расход жидкости через поверхность f реального потока будет равен

$$Q = \int_f v_n df \quad (4.10)$$

где V_n - проекция скорости на нормаль к площадке.

Массовым расходом называют массу жидкости, проходящей через рассматриваемое сечение в единицу времени. Массовый расход в системе СИ измеряется в $\text{кг}/\text{с}$

Массовый расход жидкости через поверхность f равен абсолютному значению

$$G = \int_f \rho v_n df \quad (4.11)$$

Важной характеристикой потока или конечной струйки является *средняя скорость* потока в данном сечении.

Это понятие вводится для упрощения решений многих технических расчетов и практических задач, так как в реальных потоках вязкой жидкости локальные скорости по живому сечению распределяются неравномерно.

Средней скоростью называется одинаковая для всех точек сечения фиктивная скорость, при которой данное живое сечение пропускает тот же расход, что и при действительных неравномерно-распределенных локальных скоростях.

4.6 Уравнение неразрывности или сплошности течения (уравнение расхода)

Уравнение неразрывности – это частный случай уравнения сохранения массы жидкости во времени для изолированной системы

$$\frac{dm}{dt} = 0 \quad (4.12)$$

Рассмотрим уравнение неразрывности в интегральной форме. Интегральная форма имеет преимущество, если входящие в уравнение величины претерпевают внутри среды разрывы непрерывности.

При условии постоянства объема системы V изменение массы этого объема в единицу времени, происходит только за счет неравенства втекающей и вытекающей из него жидкости, что означает изменение плотности жидкости.

$$\frac{dm}{dt} = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \quad (4.13)$$

За счет неравенства количества втекающей и вытекающей жидкости

$$\frac{dm}{dt} = - \int_f \rho v_n df \quad (4.14)$$

Где v_n - проекция вектора скорости на нормаль к площадке df поверхности f , ограничивающей объем V .

Из равенства уравнений (4.12) и (4.13) получим

$$-\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = \int_f \rho v_n df \quad (4.15)$$

Переход от интегрального вида уравнения к дифференциальному совершается Сведением всех интегралов к одному объемному и приравниванием подынтегрального выражения нулю вследствие произвольности объема. Для проведения интеграла по поверхности к интегралу по объему пользуются теоремой Остроградского –Гаусса

Преобразуя поверхностный интеграл по формуле Остроградского-Гаусса в объемный, получим

$$\int_f \rho v_n df = \int_V \operatorname{div}(\rho \vec{v}) dV \quad (4.16)$$

$$\operatorname{div}(\rho \vec{v}) = \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} \quad (4.17)$$

$$\int_V \rho v_n dV = \int_V \left(\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} \right) dV \quad (4.18)$$

Выражение (4.15) принимает вид:

$$-\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = \int_V \operatorname{div}(\rho \vec{v}) dV \quad (4.19)$$

Перенесем все выражение в одну часть

$$\int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) \right) dV = 0$$

Все выражение (4.19) равно нулю, следовательно, и подынтегральная функция равна нулю.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) &= 0 \\ \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div}(\vec{v}) &= 0 \end{aligned} \quad (4.20)$$

Уравнение (4.20) называют уравнением неразрывности или сплошности.

Основной особенностью дифференциальной формы уравнений гидрогазодинамики является то, что входящие в них величины представляют *плотности* распределения массы, объемных и поверхностных сил, а не сами величины, относящиеся к элементарному или конечному объему. Дифференциальная форма уравнения неразрывности может быть выведена из предположения, что внутри жидкости не возникают пустоты и разрывы, т.е. она является сплошной жидкостью.

Условимся считать что жидкость, втекающая в выделенный объем в виде параллелепипеда через первую грань вдоль оси X будет положительна, а вытекающая через вторую грань будет отрицательна.

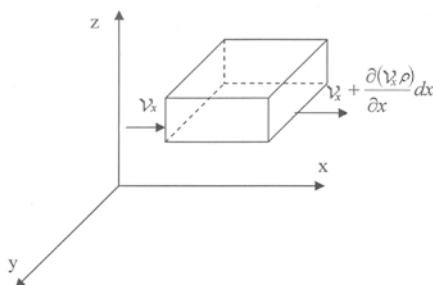


Рис. 4.6 К выводу дифференциального уравнения сплошности

Изменение массы жидкости вытекающей из второй грани вдоль оси X за время dt из параллелепипеда составит:

$$-\frac{\partial(v_x \cdot \rho)}{\partial x} \cdot dx dy dz dt \quad (4.21)$$

Аналогично на все координатные оси

$$\left. \begin{aligned} & -\frac{\partial(v_x \cdot \rho)}{\partial x} \cdot dx dy dz dt \\ & -\frac{\partial(v_y \cdot \rho)}{\partial y} \cdot dx dy dz dt \\ & -\frac{\partial(v_z \cdot \rho)}{\partial z} \cdot dx dy dz dt \end{aligned} \right\} \quad (4.22)$$

Суммарное изменение массы внутри элементарного параллелепипеда за счет разности приносимой потоком в параллелепипед и уносимой из него массы по трем координатам $dx dy dz$ и за время dt составит

$$-\left[\frac{\partial(v_x \rho)}{\partial x} + \frac{\partial(v_y \rho)}{\partial y} + \frac{\partial(v_z \rho)}{\partial z} \right] \quad (4.23)$$

Из математики известно, что:

$$\frac{\partial(v_x \rho)}{\partial x} = \rho \frac{\partial(v_x)}{\partial x} + v_x \frac{\partial \rho}{\partial x}$$

Изменение массы в неизменном объеме возможно только тогда, когда меняется плотность жидкости.

Изменение плотности по координатам с течением времени будет:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Откуда

$$\frac{\partial(v_x \rho)}{\partial x} + \frac{\partial(v_y \rho)}{\partial y} + \frac{\partial(v_z \rho)}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (4.24)$$

Сгруппировав слагаемые, получим уравнение неразрывности или сплошности:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = 0 \quad (4.25)$$

Уравнение (4.25) аналогично уравнению (4.21)

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div}(\vec{v}) = 0$$

Для несжимаемой жидкости $\rho = \text{const}$, тогда расход по длине струйки тока не меняется в данный момент времени и имеет одно и то же значение.

$$Q = \text{const} = v_1 f_1 = v_2 f_2 = v_3 f_3 \quad (4.26)$$

Уравнения (4.26) называются уравнениями неразрывности (расхода) в гидравлической форме для несжимаемой жидкости.

4.7. Уравнение импульса

В механике материальной точки теорему импульсов формулируется следующим образом: изменение проекции количества движения на какую либо ось, равно проекции импульса действующей силы на ту же ось.

$$d(mv_x) = F_x dt \quad (4.27)$$

Применяя эту теорему к элементарной струйке установившегося потока жидкости, движущегося без трения (рис.4.7)

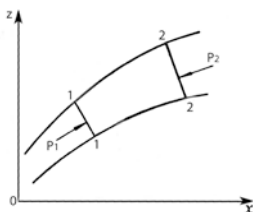


Рис.4.7 Замкнутый контур в струйке тока

Рассмотрим проекции сил и количества движения на ось x . Проекции силы тяжести будут равны нулю, поэтому на выделенный участок элементарной струйки тока действуют только сжимающие силы давления. Изменение количества движения при переходе жидкости из сечения 1 к сечению 2 составит

$$d(mv_x) = v_{x2}dm_2 - v_{x1}dm_1 \quad (4.28)$$

На основании закона сохранения массы

$$dm_1 = dm_2 = G_1 dt = G_2 dt,$$

можно записать

$$d(mv_x) = (v_2 m_2 - v_1 m_1) dt \quad (4.29)$$

На рассмотренный элемент струйки проекция импульса силы давления на ось x составит

$$F_x dt = (P_1 f_1 - P_2 f_2) dt \quad (4.30)$$

Подставляя равенства (4.29) и (4.30) в уравнение (4.27) получим

$$(v_2 G_2 - v_1 G_1)_x = (P_1 f_1 - P_2 f_2)_x \quad (4.31)$$

Данное уравнение называют уравнением импульсов, это уравнение справедливо для любого замкнутого контура, выделенного в потоке газа, для идеальной жидкости массовый расход струйки тока будет величиной постоянной и уравнение (4.31) запишется

$$G(v_2 - v_1)_x = (P_1 f_1 - P_2 f_2)_x \quad (4.32)$$

Разность количества движения жидкости вытекающей из замкнутого контура и втекающего в него, спроектированная на какую-нибудь ось, равна сумме сил, действующих на данный контур, спроектированный на эту же ось.

Контрольные вопросы

- В чем отличие описания движения жидкости методом Лагранжа и Эйлера?
- Какие модели движения жидкости вам известны?
- Что понимаем под линией тока?
- Что понимаем под струйкой тока?
- Какое основное свойство линии тока?
- Какое основное свойство трубки тока?
- Что означает стационарный режим движения жидкости?
- Что понимаем под одномерным и двумерным движением идеальной жидкости?
- Что понимается под потенциальным движением жидкости?
- Как записывается уравнение сплошности в дифференциальной и интегральной форме?
- Что понимается под объемным и массовым расходом жидкости?
- Как записать уравнение расхода в инженерной трактовке?
- Как записать уравнение импульсов?

5. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ ЖИДКОСТИ И ГАЗА

5.1. Дифференциальное уравнение движения невязкой жидкости

В движущейся жидкости выберем элементарный объем жидкости в виде параллелепипеда, грани которого параллельны координатным осям (x,z,y). На данный выделенный объем жидкости действуют массовые силы, пропорциональные массе, поверхностные силы давления окружающей жидкости, направленные по нормальям к граням параллелепипеда, а так же сила инерции вызывающая движение жидкости. Рассмотрим действие данных сил в проекции на ось x.

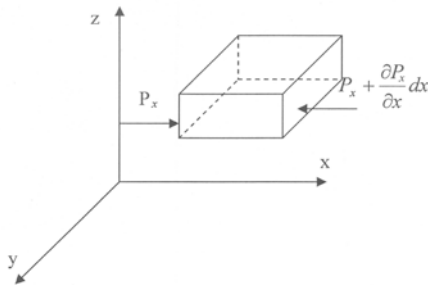


Рис 5.1. К выводу уравнения движущейся жидкости в форме Эйлера

$$P_x \cdot dydz - \left(P_x + \frac{\partial P_x}{\partial x} dx\right) dydz + F_x \cdot \rho dx dy dz = \frac{dv_x}{dt} \rho dx dy dz$$

Проведем преобразования, получим

$$-\frac{\partial P}{\partial x} + F_x \rho - \frac{dv_x}{dt} \rho = 0$$

Поделим все на ρ и поменяем знаки

$$F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_x}{\partial x} = \frac{dv_x}{dt}$$

Система дифференциальных уравнений Л. Эйлера для идеальной движущейся жидкости на координатные оси

$$\left. \begin{aligned} F_x - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P_x}{\partial x} &= \frac{dv_x}{dt} \\ F_y - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P_y}{\partial y} &= \frac{dv_y}{dt} \\ F_z - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P_z}{\partial z} &= \frac{dv_z}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

Если дифференциальная форма уравнений не может быть и пользована во всем пространстве, заполненном жидкой средой, то используется ее интегральная форма.

Для случая движения жидкости уравнение имеет вид:

$$\int_V \rho \vec{F} dV + \int_f \vec{P}_n df = \frac{d}{dt} \int_V \vec{v} \rho dV \quad (5.2)$$

где $\int_V \rho \vec{F} dV$ - главный вектор массовых сил; $\int_f \vec{P}_n df$ - главный вектор

поверхностных сил; $\frac{d}{dt} \int_V \vec{v} \rho dV$ - изменение количества движения массы

в объеме V ; $\vec{P}_n$ - вектор поверхностных сил на площадке df по нормали $\vec{n}$.

Предполагая, что масса $m = \int_V \rho dV$ выделенного объема V постоянна,

дифференцируя правую часть уравнения (5.2) по времени, получим интегральную форму уравнения движения:

$$\int_V \rho \vec{F} dV + \int_f \vec{P}_n df = \int_V \rho \frac{d\vec{v}}{dt} dV \quad (5.3)$$

Преобразуем поверхностный интеграл по формуле Остроградского-Гаусса в объемный

$$\int_f \vec{P}_n df = \int_V \text{div} \vec{P}_n dV \quad (5.4)$$

$$\operatorname{div} \vec{P}_n = \frac{\partial \vec{P}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{P}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{P}_z}{\partial z}$$

Подставив (5.4) в (5.3) получим:

$$\int_V \left(\rho \vec{F} + \operatorname{div} \vec{P}_n - \rho \frac{d\vec{v}}{dt} \right) dV = 0$$

Так как объем V остается произвольным, то $dV \neq 0$, тогда

$$\rho \vec{F} + \frac{\partial \vec{P}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{P}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{P}_z}{\partial z} = \rho \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (5.5)$$

Данное уравнение (5.5) представляет собой векторную форму уравнения движения сплошной среды, и называется дифференциальным уравнением движения в напряжениях.

Для идеальной жидкости при отсутствии поверхностных касательных сил $\operatorname{div} \vec{P}_n = -\operatorname{grad} P$, дифференциальное уравнение (5.5) упрощается и записывается:

$$\vec{F} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} P = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (5.6)$$

При движении идеальной жидкости или газа, нормальное напряжение в произвольной точке потока не зависит от направления площадки, к которой оно приложено. Дифференциальное уравнение (5.6) записывается как уравнение (5.1).

5.2. Уравнение Бернулли

Профессор Казанского университета И.С. Громека преобразовал уравнения Эйлера в иную форму, соответствующую идеальной, несжимаемой, однородной жидкости. Массовые силы для большинства практических задач соответствовали силе тяжести. Режим движения данной жидкости был стационарным, т.е.

$$\frac{\partial v}{\partial t} = 0 \text{ и безвихревой}$$

Умножим каждое из уравнений Эйлера (5.1) последовательно на dx , dy , и dz .

Раскроем скобки и сгруппируем, получим:

$$dP + \rho g dz + \frac{\rho}{2} \cdot dv^2 = 0 \quad (5.7)$$

Это выражение называют уравнением Бернулли в дифференциальной форме. При условии $\rho = const$ (для несжимаемой жидкости) интегрирование его дает:

$$\frac{P}{\rho} + gz + \frac{v^2}{2} = const, \frac{Дж}{кг} \quad (5.8)$$

Этот интеграл называют интегралом Бернулли, из уравнения (5.8.) следует, что сумма удельной кинетической $\frac{v^2}{2}$, удельной потенциальной gz энергии и удельной работы сил давления $\frac{P}{\rho}$ - есть величина постоянная.

Для того, чтобы записать интеграл Бернулли в размерностях давления, умножим обе части (5.8) на плотность ρ и получим

$$P + \rho gz + \frac{\rho v^2}{2} = const \quad (5.9)$$

$$P_{пвез} + P_{geom} + P_{ск} = const \quad (5.10)$$

где:

$P_{пвез}$ - удельная потенциальная энергия единицы объема жидкости, Па.

$\rho gz - P_{geom}$ геометрическое давление - удельная энергия положения единицы объема жидкости, Па.

$\frac{\rho v^2}{2} - P_{скор}$ скоростное давление - удельная кинематическая энергия единицы объема жидкости, Па.

Таким образом, уравнение Бернулли - это частный случай закона сохранения энергии.

5.3. Уравнение Бернулли в форме напоров

В практических приложениях широко используется другая форма уравнения Бернулли - форма напоров. Разделив обе части уравнения (5.9) на ρg , получаем уравнение, каждый член которого имеет размерность, M

$$z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} \quad (5.11)$$

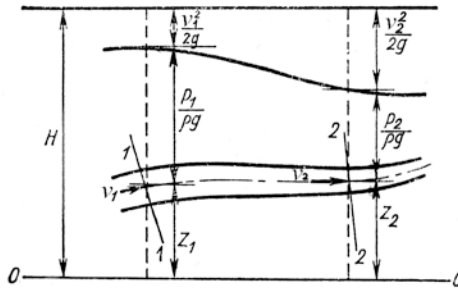


Рис. 5.2 Геометрическая трактовка уравнения Бернулли

Каждый член уравнения (5.11) имеет линейную размерность и выражает напор, под которым в общем случае понимают высоту столба жидкости, уравнивающую давление в данной точке, где z - геометрический напор, характеризующий положение жидкой частицы над какой-то произвольной плоскостью, называемой плоскостью отсчета; $\frac{P}{\rho g}$ - пьезометрический напор; $\frac{v^2}{2g}$ - скоростной напор.

Полный либо гидродинамический напор при движении вдоль струйки остается неизменным. Сказанное иллюстрируется на (рис. 5.2), который иногда называют диаграммой уравнения Бернулли.

5.4. Физический смысл коэффициента Кориолиса

Для газовых потоков (без учета сжимаемости) обычно используют уравнение Бернулли в форме давлений, записанного для двух сечений

$$\rho g z_1 + P_1 + \frac{\rho \alpha_1 v_1^2}{2} = \rho g z_2 + P_2 + \frac{\rho \alpha_2 v_2^2}{2} \quad (5.12)$$

Обычно в упомянутых системах член $\rho g z$ оказывается пренебрежимо малым по сравнению с остальными. В этих случаях (5.12) принимает вид:

$$P_1 + \frac{\rho\alpha_1 v_1^2}{2} = P_2 + \frac{\rho\alpha_2 v_2^2}{2} \quad (5.13)$$

где коэффициент α - коэффициент Кориолиса или корректив скорости.

Коэффициент Кориолиса представляет собой отношение кинетической энергии потока, вычисленной по истинному распределению скоростей, к кинетической энергии, определенной по средней скорости.

Коэффициент Кориолиса α корректирует ошибку, возникающую при вычислении кинетической энергии при замене истинного распределения скоростей условным равномерным. Для идеальной несжимаемой жидкости коэффициент Кориолиса можно считать близким единицы.

Контрольные вопросы

- Как записывается дифференциальное уравнение движения жидкости?
- Какие основные составляющие уравнения Бернулли?
- Физический смысл составляющих уравнения Бернулли?
- Что понимаем под геометрической трактовкой уравнения Бернулли?
- Что называется коэффициентом Кориолиса?

6. ГИДРОДИНАМИКА ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

6.1. Дифференциальные уравнения движения вязкой жидкости Навье-Стокса

В 1822 году Клод Луи Навье получил уравнения движения вязкой жидкости путем преобразований уравнений движения, которые существенно усложняются. При движении вязкой жидкости в ней возникают не только нормальные, но и касательные напряжения, так как жидкость обладает способностью оказывать сопротивление относительно сдвигу своих слоев и частиц. Нормальные и касательные напряжения зависят не только от координат точек жидкости, но и от ориентации в пространстве площадки, на которую они действуют.

Представим движение жидкости в 2-х мерных координатах X, Z (рис.6.1)

Для вязкой жидкости справедлив закон трения Ньютона (2.7)

$$\tau = \mu \frac{dv}{dn} \quad (6.1)$$

где τ - касательное напряжение, Па ; μ - динамическая вязкость жидкости, Пас .

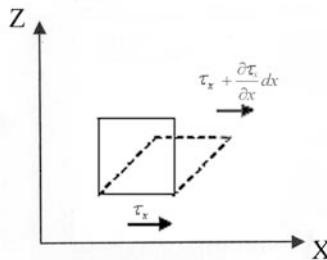


Рис. 6.1 К выводу уравнения Навье-Стокса

Изменение касательных напряжений вдоль оси X составит:

$$\tau_x - \left(\tau_x + \frac{\partial \tau_x}{\partial x} \cdot dx \right) = - \frac{\partial \tau_x}{\partial x} \cdot dx \quad (6.2)$$

Подставляя в (6.2) значение τ , получим значение вязкостных напряжений вдоль оси X :

$$\mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \quad (6.3)$$

Отнеся это изменение к единице объема жидкости, запишем:

$$\frac{\mu}{\rho} = \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \quad (6.4)$$

где $\frac{\mu}{\rho} = \nu$ - кинематическая вязкость жидкости, m^2 / c

Дифференциальное уравнение движения вязкой несжимаемой жидкости вдоль оси x :

$$Fx - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_x}{\partial x} + \nu \left(\frac{d^2 v_x}{dx^2} + \frac{d^2 v_x}{dy^2} + \frac{d^2 v_x}{dz^2} \right) = \frac{dv_x}{dt} \quad (6.5)$$

Аналогично на другие оси:

$$\begin{aligned} Fx - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_x}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) &= \frac{dv_x}{dt} \\ Fy - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_y}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) &= \frac{dv_y}{dt} \\ Fz - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_z}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) &= \frac{dv_z}{dt} \end{aligned} \quad (6.6)$$

Полученная система уравнений движения вязкой жидкости и носит название системы уравнений Навье - Стокса.

Три уравнения Навье - Стокса (6.6) плюс уравнение неразрывности

$$\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = 0$$

образуют замкнутую систему. Плотность и вязкость, входящие в них, считаются известными, а проекции массовых сил задаются условиями конкретной задачи.

С чисто математических позиций уравнения Навье - Стокса относятся к классу нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, и до настоящего времени, вследствие математических трудностей, не получено ни одного общего решения уравнений Навье - Стокса в их полном виде.

Контрольные вопросы

- Как записывается дифференциальное уравнение Навье - Стокса?
- Уравнение Навье - Стокса применимо для идеальной или для вязкой жидкости?
- В чем отличие записи дифференциального уравнения жидкости для идеального и реального варианта?
- Замкнута ли система уравнений Навье - Стокса?

7. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ГИДРАВЛИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Как было показано выше, уравнения Навье - Стокса не могут быть проинтегрированы для большинства важных для практики случаев. Единственным в этих условиях способом решения задачи является эксперимент на физической модели, под которой понимается уменьшенный (либо увеличенный) реальный объект исследования

Теория подобия, являющаяся основой современного физического эксперимента отвечает на вопросы как спроектировать и построить модель, какие величины необходимо измерять при проведении опытов, и как перенести результаты опытов, полученных на модели на натурный объект. В основе гидрогазодинамического моделирования лежит представление о подобии сравниваемых течений. Два течения будут подобны, если по характеристикам одного можно получить характеристики другого умножением на некоторые постоянные коэффициенты, называемые коэффициентами подобия.

В общем случае различают три вида подобия: геометрическое, кинематическое и динамическое.

Геометрическое подобие требует, чтобы линейные размеры натур и модели находились в постоянном соотношении, другими словами, модель повторяет натуру в каком-то масштабе.

Это требование можно записать в виде

$$\frac{l_n}{l_m} = k_l \quad (7.1)$$

где k_l - масштабный множитель.

Для площадей f и объемов V

$$\frac{f_n}{f_m} = k_l^2; \quad \frac{V_n}{V_m} = k_l^3 \quad (7.2)$$

Кинематическое подобие сводится к подобию полей скоростей в потоках, движущихся в геометрически подобных каналах.

Динамическое подобие требует, чтобы в соответствующих точках натур и модели силы находились в постоянном соотношении.

Рассмотрим простейший пример. Известно, что движение любой механической системы подчиняется закону Ньютона

$$F = m \frac{dv}{dt}, \quad F = ma$$

Для двух подобных систем можно записать

$$F_1 = m_1 a_1 \text{ и } F_2 = m_2 a_2$$

Разделив второе уравнение, на первое получим:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{m_2 a_2}{m_1 a_1}$$

По смыслу l/t есть скорость, поэтому, $a = v^2 / l$

$$\frac{F_1 l_2}{m_2 v_1^2} = \frac{F_2 l_1}{m_1 v_1^2} \quad (7.3)$$

Полученные комплексы безразмерны.

Таким образом, для двух подобных систем сохраняется числовое равенство безразмерных комплексов $\frac{Fl}{m v^2}$. В честь Ньютона это число

подобия обозначается двумя первыми буквами латинского написания его фамилии, т.е.

$$Ne = \frac{Fl}{m v^2} \quad (7.4)$$

Таким образом, чтобы спроектировать и построить модель необходимо, чтобы она была геометрически подобна натуре, и в ней сохранялось равенство безразмерных комплексов, составленных из этих величин для натуры и модели, называемых *числами подобия*.

Если в числе подобия Ньютона заменим F на силу тяжести, получим *число Фруда* - отношение сил инерции к силам тяжести.

$$Fr = \frac{mgl}{mv^2} = \frac{gl}{v^2} \quad (7.7)$$

Заменим в критерии Ньютона силу, на силу давления $F = Pf$, получим *число Эйлера*, для несжимаемой жидкости данное число подобия характеризует отношение изменения сил давления к удвоенному скоростному давлению.

$$\frac{Pfl}{\rho V v^2} = \frac{P}{\rho v^2}$$

$$Eu = \frac{\Delta P}{\rho v^2} \quad (7.8)$$

В число Эйлера входит величина ΔP - перепад давления (потеря давления), которая, как правило, является искомой.

Число Рейнольдса - отношение сил инерции к силам вязкого трения, получится, если в числе подобия Ньютона заменить F на силу внутреннего трения.

$$\frac{v l}{\nu} = Re \quad (7.9)$$

По результатам измерений можно вычислить числа подобия модели, исходя из равенства их числам подобия натуры, произвести пересчет. Из выше изложенного можно сформулировать:

- *первая теорема подобия*;

Подобным между собой явления имеют одинаковые критерии подобия;

- *вторая теорема подобия*;

Решение системы дифференциальных уравнений можно представить как функцию от критерия подобия, т.е. зависимость между переменными величинами может быть выражена критериальным уравнением.

Примером такого критериального уравнения может быть уравнение вида

$$Eu = f(Re, Fr) \quad (7.10)$$

При этом устанавливается, какие из сил (тяжести, трения, инерции) играют определяющую роль в исследуемом процессе и моделируют только их. При установившемся движении зависимость (7.10) распадается на две:

$$Eu = f(Re) \text{ и } Eu = f(Fr) \quad (7.11)$$

При исследовании свойств свободной затопленной струи, истекающей из сопла, определяющими являются силы вязкого трения, поэтому критериальное уравнение имеет вид:

$$Eu = f(Re)$$

Из опытов известно, при некотором конкретном для каждого случая числе Re происходит «вырождение», т.е. число Eu перестает зависеть от числа Re . Все процессы такого типа автоматически подобны между собой. Этот случай называется *автомодельностью*. Если при изменении

числа подобия Рейнольдса $Re = \frac{v d}{\nu}$, критерий Эйлера остается

постоянным, $Eu = f(Re)$, то в свободной затопленной струе возникает режим автомодельности, т.е. струя создает подобные эпюры скоростей в любом поперечном сечении.

Иногда, для получения новых критериев известные критерии перемножаются, так при перемножении критерия Фруда на квадрат критерия Рейнольдса, получим критерий *Галилея*, который используется для описания свободного движения газа в среде другого газа.

$$Ga = \frac{gl^3}{\nu^2} \quad (7.12)$$

Для одного и того же газа имеющего разные температуры, используют критерий *Грасгофа*

$$Gr = \frac{gl^3}{\nu^2} \frac{T - T_{окр}}{T} \quad (7.13)$$

Конечной целью теории подобия и анализа размерностей является определение структуры безразмерного комплекса, характеризующего данный процесс.

Контрольные вопросы

- Что понимается под теорией подобия гидродинамических процессов?
- Назовите две теоремы подобия
- Какие основные критерии (числа) подобия вам известны?
- Каков физический смысл критериев Re, Fr, Eu?
- Что понимается под критериальным уравнением?

8. РЕЖИМЫ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ

В потоках жидкостей и газов принято различать режимы движения. Движение, при котором линии тока прямолинейны и устойчивы, называются *ламинарными*, в таких потоках не происходит пульсации местных скоростей. Потоки, в которых происходит перенос вещества, как в продольном, так и в поперечном сечениях, называют *турбулентными*, такие потоки сопровождаются вихреобразованиями.

Пределы существования ламинарного и турбулентного движения были подтверждены О. Рейнольдсом на экспериментальной установке (рис 8.1). К напорному баку была присоединена стеклянная труба, к которой подводилась окрашенная жидкость из отдельного сосуда.

Скорость движения жидкости регулировалась краном.

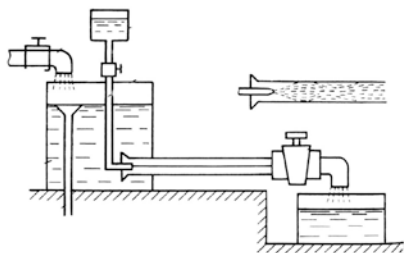


Рис 8.1 Экспериментальная установка Рейнольдса

В зависимости от скорости движения жидкости Рейнольдс наблюдал несколько видов движения:

- ламинарное (или слоистое), при котором струйки газа перемещаются параллельно одна другой, не пересекаясь. Характерной особенностью ламинарного движения является параболическое распределение скоростей по сечению потока, обусловленное трением о поверхность прилегающего к ней слоя газа и последующих слоев друг о друга;
- переходное (неустановившееся) движения газов, при котором наряду с ламинарным движением возникали первые вихревые пульсации потока, которые потом пропадали;
- турбулентное (или вихреобразное), при турбулентном режиме в потоке возникает множество вихрей, что приводит к интенсивному перемешиванию газа. Распределение скоростей при этом более равномерно и имеет вид усеченной параболы.

Характер движения зависит от соотношения сил инерции и сил внутреннего трения или вязкости.

Это соотношение характеризуется безразмерным комплексом, названным впоследствии критерием Рейнольдса: $Re = \nu d_{\text{экв}} / \nu$,

где $d_{\text{экв}}$ – эквивалентный диаметр канала, м.

Для каналов произвольной формы $d_{\text{экв}} = 4f / \Pi$,

где f – площадь сечения; Π – периметр).

Характер движения зависит от соотношения сил инерции и сил внутреннего трения.

Ламинарное течение наблюдается при малых значениях критерия Рейнольдса, а турбулентное при более высоких.

Так, для случая течения жидкости в круглых трубах при $Re < 2300$ поток ламинарный, при $Re > 10000$ поток турбулентный. Интервал $2300 < Re < 10000$ соответствует неустановившемуся или переходному движению.

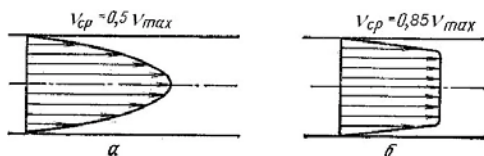


Рис.8.2 Распределение скоростей при ламинарном: (а) и турбулентном; (б) движении газа (жидкости)

Если обратить внимание на эпюру распределения скоростей при ламинарном (рис.8.2.а) и турбулентном движении (рис.8. 2.б), то видно, эпюра скоростей для ламинарного потока приближается к правильной параболе, а для турбулентного потока – к усеченной параболе.

Неравномерность распределения скоростей в потоке жидкости оценивается коэффициентом Кориолиса:

- при ламинарном движении жидкости $\nu_{cp} = 0,5\nu_{max}$;

- при турбулентном потоке движения жидкости $\nu_{cp} = 0,85\nu_{max}$

Контрольные вопросы

- Какие виды движения жидкости известны?
- Каков физический смысл числа подобия Рейнольдса?
- Что понимается под критическим числом Рейнольдса?
- Каково значение критерия Рейнольдса для различных режимов движения жидкости в круглой цилиндрической трубе?

9. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ СОПРОТИВЛЕНИЙ

Движение реальных жидкостей внутри каналов и труб сопровождается уменьшением механической энергии потока из-за действия сил сопротивления различной природы и характеризуется величиной потери давления на рассматриваемом участке потока.

При течении жидкости (газа) в трубах и каналах может возникать неравномерное распределение скоростей в толще потока, которое приводит к появлению вязкостных напряжений между частицами жидкости или слоями, движущимися с различными скоростями. Наличие этих напряжений является одной из причин потери части кинетической энергии. Такой механизм рассеяния энергии присущ как ламинарному, так и турбулентному движению жидкости.

Другой механизм потерь энергии возникает при турбулентном перемешивании слоев жидкости или при отрывах потока от стенок с образованием стационарных вихревых зон. Эти явления существенно влияют на перераспределение скоростей и напряжений в потоке, и, следовательно, на потери энергии.

В механике жидкости потери давления или напора принято называть *гидравлическими потерями*, а устройства или внешние воздействия, которые обуславливают эти потери, называют *гидравлическими сопротивлениями*. К ним относятся измерительные диафрагмы, различные задвижки, элементы трубопроводов, меняющие направление движения жидкости и сечения, слияние и разделение потоков и т.д.

Все многообразие гидравлических сопротивлений можно разделить на три основных класса, отличающихся друг от друга механизмом их воздействия на поток:

- к первому классу относят гидравлические сопротивления, обуславливающие потери напора за счет сил вязкостного трения между потоком и стенкой канала;

В этом случае гидравлические потери принято называть потерями напора h_l или давления P_l на трение, или просто *потерями по длине*;

- ко второму классу относят гидравлические сопротивления, обуславливающие потери за счет образования вихревых зон, которые образуются при изменении конфигурации потока на относительно коротком участке, при слиянии и разделении потоков жидкости, при входе и выходе жидкости в резервуары, а также при прохождении запорной арматуры. В этом случае гидравлические потери называются *местными потерями* и их величина обозначается, соответственно, как h_m , или P_m ;

- к третьему классу можно отнести геометрические потери напора или давления, возникающие при движении нагретых газовых потоков по опускным и подъемным участкам газовых трактов.

9.1. Потери напора (давления) на трение

В качестве наиболее характерного примера, иллюстрирующего понятие потери на трение по длине, можно рассмотреть установившийся равномерный поток жидкости в горизонтальной круглой трубе (Рис 9.1)

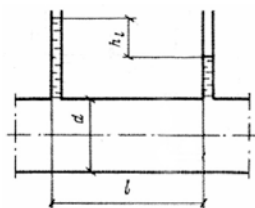


Рис 9.1 Потери напора на трение в горизонтальной трубе

Многочисленные эксперименты показывают, что, несмотря на отсутствие каких-либо препятствий, в потоке происходят потери напора на рассматриваемом участке трубы. Поскольку все поперечные сечения участка находятся в равных условиях, то потери равномерно распределены по длине, что подтверждается линейным характером снижения напорной линии, получаемым опытным путем.

Запишем уравнение Бернулли в форме напоров, выразим потери напора h_l , которые в данном случае равны потерям напора на трение по длине участка, расположенного между сечениями 1-1 и 2-2.

$$h_l = \left(z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} \right) - \left(z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} \right)$$

Так как рассматривается равномерное движение жидкости в трубе постоянного сечения, то эпюры распределения скоростей в каждом сечении тождественны друг другу, следовательно, равны между собой значения средних скоростей ($v_1 = v_2$) и коэффициенты Кориолиса $\alpha_1 = \alpha_2$, учитывающие форму профиля скоростей. С учетом того, что труба предполагается горизонтально расположенной ($z_1 = z_2$), следует

$$h_l = \frac{P_1 - P_2}{\rho g} \quad (9.1)$$

В таком виде потери на трение по длине могут существовать только в потоке с постоянной на всей протяженности средней скоростью, т.е. в равномерном потоке внутри прямой цилиндрической трубы или призматического канала с постоянным поперечным сечением. Гидравлическое сопротивление в этом случае обусловлено тормозящим действием стенок трубы.

Потери по длине h_l , с учетом формулы Дарси-Вейсбаха можно выразить:

$$h_l = \lambda \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g}, \text{ м} \quad (9.2)$$

$$P_l = \lambda \frac{l}{d} \frac{\rho v^2}{2}, \text{ Па} \quad (9.3)$$

где $\lambda = \lambda(Re, \Delta / d)$ - безразмерный параметр, характеризующий потери на трение по длине и по этой причине в специальной литературе его принято называть коэффициентом *гидравлического трения*. Этот коэффициент зависит от числа Рейнольдса и безразмерного параметра Δ / d , называемого относительной шероховатостью. Абсолютная шероховатость Δ , м находится по справочной литературе и зависит от вида материала стенок каналов и трубопроводов, а также от срока эксплуатации. Как правило, функциональную зависимость λ от числа Рейнольдса и относительной шероховатости определяют эмпирическим или полуэмпирическим путем, но в некоторых простых случаях, например, при установившемся ламинарном течении в гладких трубах коэффициент λ может быть получен аналитическим методом. Из формулы (9.3) следует, что потери на трение возрастают со средней скоростью движения жидкости и длиной участка, и обратно пропорциональны диаметру трубопровода.

Формула Дарси-Вейсбаха справедлива для любых режимов течения как ламинарного, так и турбулентного. В этом смысле она является универсальной. Различие состоит лишь в форме функциональной зависимости $\lambda = \lambda(Re, \Delta / d)$, которая соответственно отличается для ламинарного и турбулентного режимов:

- если режим движения жидкости ламинарный, то коэффициентом гидравлического трения λ можно найти по формуле Пуазейля:

$$\lambda = \frac{64}{Re} \quad (9.4)$$

- коэффициент λ , вычисленный для турбулентного течения в гладких круглых трубах по формуле Блазиуса

$$\lambda = 0,3164 / Re^{0,25} \quad (9.5)$$

- большая область гидродинамических течений укладываются в формулу Альтшуля, которая распространяется на область переходного и части турбулентного режима.

$$\lambda = 0,11 \left(\frac{68}{Re} + \frac{\Delta}{d_{эКВ}} \right)^{0,25} \quad (9.6)$$

- при ярко выраженном турбулентном режиме при $Re > 10^5$:

$$\lambda = 0,11 \left(\frac{\Delta}{d_{эКВ}} \right)^{0,25} \quad (9.7)$$

Важные экспериментальные исследования, посвященные изучению

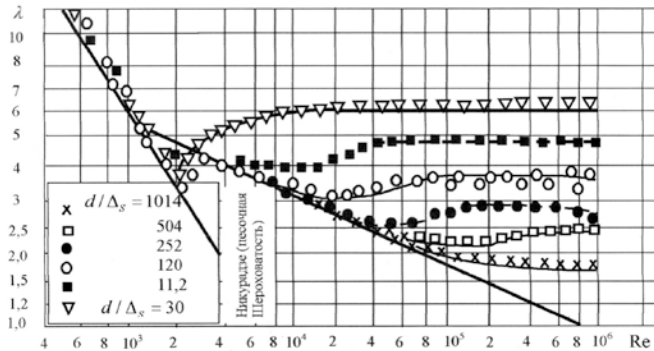


Рис.9.2 Диаграмма Никурадзе

зависимости коэффициента λ от числа Рейнольдса и относительной шероховатости, были проведены Никурадзе (рис.9.2).

Данный график наглядно свидетельствует о наличии различных областей сопротивления при напорном движении в трубах:

- первая зона ламинарного режима представлена прямой (1-2), здесь коэффициент гидравлического трения λ зависит только от числа Рейнольдса и определяется по формуле Пуазейля (9.4);

- вторая зона, расположена между двух наклонных прямых, это область неустойчивого, переходного режима от ламинарного течения жидкости к турбулентному и наоборот, числа Рейнольдса лежат в пределах 2300-4000. Определение потерь напора и, следовательно, величин λ для области неустойчивого режима затруднено тем, что коэффициент λ (учитывающий неравномерность действительных скоростей потока по живому сечению) имеет различное значение для турбулентного и ламинарного режима течения;

- третья зона - зона турбулентного режима течения жидкости отвечает значениям Рейнольдса 4000 – 40000, в этой зоне лежит область между прямой (2) и линией АВ, где λ зависит как от числа Рейнольдса, так и от относительной шероховатости. В этой области потери напора h_f прямо пропорциональны скорости в степени от 1,75 до 2. Для переходной зоны с хорошей степенью точности распространяется формула Альтшуля (9.6);

- четвертая зона располагается правее линии АВ. Потери напора прямо пропорциональны квадрату скорости. Коэффициент λ не зависит от числа Рейнольдса, а является только функцией шероховатости.

Данная область называется квадратичной, для нее коэффициент гидравлического трения подсчитывается по формуле (9.7).

9.2. Потери напора на местные сопротивления

Как отмечалось выше, потери напора возникают при турбулентном перемешивании слоев жидкости или при отрывах потока от стенок с образованием стационарных вихревых зон. Эти явления существенно влияют на перераспределение скоростей и напряжений в потоке, и, следовательно, на потери энергии, данный вид потерь носит название потерь на местные сопротивления. Данный вид потерь напора включает в себя обширный класс конкретных случаев, которые образуются при изменении конфигурации потока на относительно коротком участке, при слиянии и разделении потоков жидкости, при входе и выходе жидкости в резервуары, а также при прохождении запорной арматуры.

В некоторых случаях из общих формул удастся получить теоретические формулы для конкретных видов гидравлических сопротивлений. Вместе с тем, как правило, приходится, пользуясь опытными данными, конкретизировать эти формулы эмпирическими коэффициентами. Таким образом, полумэмпирический подход, на настоящий момент, является преобладающим методом установления и описания явлений, связанных с гидравлическими потерями.

Местные потери практически не зависят от длины участка трубы, на котором имеется местное гидравлическое сопротивление, и от диаметра трубы и определяются по формуле:

$$h_m = \zeta_m \frac{v^2}{2g}, \text{ м} \quad (9.8)$$

где ζ_m - коэффициент гидравлического сопротивления, входящий в данную формулу, характеризует в каждом случае величину местных потерь напора в конкретном гидравлическом сопротивлении и называется коэффициентом местных потерь.

Величина местных гидравлических потерь, так же как и потерь на трение определяется не только конфигурацией граничных поверхностей потока, но и существенно зависит от режимов течения, в турбулентных потоках величина потерь на местные сопротивления больше, чем при ламинарном течении.

Рассмотрим некоторые значения коэффициентов местных потерь. Местные потери напора возникают при резких изменениях формы граничных поверхностей потока на коротком участке.

При внезапном расширении потока жидкости рис (9.3) ζ_m можно рассчитать по формуле Борда.

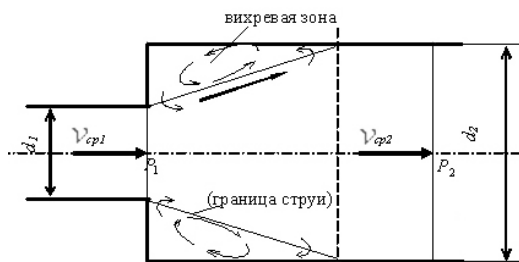


Рис.9.3 Внезапное расширение потока

$$\zeta_m = \left(1 - \frac{f_1}{f_2}\right)^2 \quad (9.9)$$

При резком изменении направления потока с острым или незакругленным коленом под разными углами, возникают местные потери, которые возрастают с увеличением угла поворота рис.(9.6. а), если угол поворота плавный рис.(9.6 б), то вихреобразование уменьшается, в зависимости от радиуса кривизны отвода.

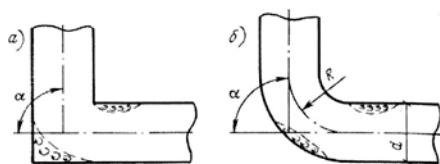


Рис.9.4 Резкий поворот трубы под 90^0 градусов – а); плавный поворот трубы под 90^0 -б)

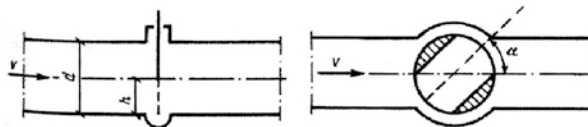


Рис. 9.5 Запорная арматура на участке трубопровода

В запорной арматуре трубопровода (задвижки, вентили) происходит вначале сужение, а затем расширение и поворот потока (рис.9.7)

Коэффициент местного сопротивления зависит от типа арматуры и степени ее открытия.

В реальных конструкциях участки равномерного движения жидкости обычно чередуются с местными сопротивлениями, количество и многообразие которых может быть достаточно велико. По этой причине для расчета полных потерь напора по всей длине канала широко применяется принцип сложения. Суть этого принципа состоит в том, что полные потери напора на всем протяжении канала или трубы равны сумме потерь на трение по длине и сумме всех местных потерь напора всех отдельных участках с равномерным движением.

$$h = \sum_{i=1}^{i=m} h_{l_i} + \sum_{j=1}^{j=n} h_{m_j} \quad (9.9)$$

где h_{l_i} - потери по длине на i -том участке равномерного движения, а m - число таких участков; h_{m_j} - местные потери на j - том местном гидравлическом сопротивлении, n - число таких сопротивлений. Принцип сложения (9.9) можно применять лишь в том случае, если местные сопротивления не влияют одно на другое, т.е. разделены достаточно протяженными участками со стабилизированным распределением скорости (распределение скоростей не изменяется по длине этого участка). В противном случае два или несколько взаимовлияющих местных гидравличе-

ских сопротивлений рассматривают как одно сложное и для него необходимо установление специальных расчетных зависимостей.

9.3.1. Кавитация

Если при движении реальной жидкости по горизонтальному трубопроводу на нем имеются гидравлические сопротивления в виде внезапного сужения с последующим расширением, то в узком месте по уравнению Бернулли, скорость будет максимальной, а давление в этом сечении может быть меньше атмосферного. При пониженном давлении происходит закипание жидкости и образование в ее потоке полостей, заполненным паром и газом. Это явление называется *кавитацией*.

Кавитация всегда сопровождается потерей энергии движущегося потока жидкости и сопровождается специфическим гулом. Кавитация приводит не только к разрушению стенок трубопровода, но и к эрозии лопастей насосов, гребных винтов кораблей и лопаток турбин.

Для предотвращения появления кавитации указывается максимально допустимая скорость движения жидкости.

$$v < \sqrt{\frac{2(P - P_{\kappa})}{\rho \chi}} \quad (9.10)$$

где χ - число кавитации; P_{κ} - давление парообразования.

Контрольные вопросы

-Как определить коэффициент гидравлического сопротивления в различных областях движущегося потока жидкости?

- От каких параметров зависят потери на трение при движении жидкости по трубопроводам и каналам?

- Почему гидравлические потери на трение при турбулентном режиме движения больше, чем при ламинарном режиме?

-Какие эмпирические формулы известны, для нахождения коэффициента гидравлического трения?

-Что понимается под абсолютной и относительной шероховатостью стенок трубопроводов?

- Как записывается общая формула для определения потерь напора на местные сопротивления?

- Объясните причину возникновения потерь напора при внезапном расширении и сжатии потока жидкости стенками трубопроводов и каналов.

- Чем отличаются потери напора при резком и плавном повороте потока жидкости?

- От чего зависит величина потерь напора при прохождении потоком жидкости запорной арматуры?

-Что понимается под кавитацией? Каковы причины и последствия кавитации?

10. ИСТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ ЧЕРЕЗ ОТВЕРСТИЯ И НАСАДКИ

Вопрос истечения жидкости через отверстия является важным при наполнении и опорожнении резервуаров, бассейнов, водохранилищ, шлюзовых камер и других емкостей. При решении этих задач определяют скорости и расходы жидкостей.

Экспериментально установлено, что при истечении жидкости из отверстий происходит сжатие струи, т. е. уменьшение ее поперечного сечения. Форма сжатой струи зависит от формы и размеров отверстия, толщины стенок, а также от расположения отверстия относительно свободной поверхности, стенок и дна сосуда, из которого вытекает жидкость. Сжатие струи происходит вследствие того, что частицы жидкости подходят к отверстию с разных сторон и по инерции движутся в отверстии по сходящимся траекториям. Минимальное сечение струи называется *сжатым сечением*. Отношение сжатого сечения к сечению отверстия называется коэффициентом сжатия ε

$$\varepsilon = \frac{f_{сж}}{f_1} \quad (10.1)$$

Из экспериментальных исследований коэффициентом сжатия $\varepsilon \approx 0,6$

10.1. Истечение жидкости через отверстие при постоянном напоре

Выведем формулы скорости и расхода жидкости при истечении через малое отверстие с острыми кромками (рис. 10.1).

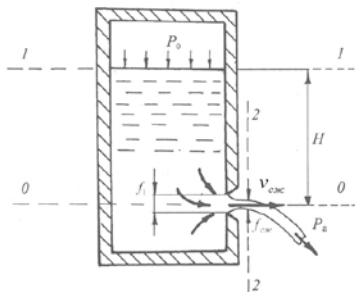


Рис.10.1 Истечение жидкости через малое отверстие в атмосферу

Опытами установлено, что сжатое сечение струи находится от внутренней поверхности резервуара на расстоянии около половины диаметра отверстия.

Высоту уровня жидкости в резервуаре H над центром отверстия

называют *геометрическим напором*.

Проведем плоскость сравнения 2-2 через центр сжатого сечения струи. Напишем уравнение Д. Бернулли для сечений 1-1 и 2-2

$$H + \frac{P_0}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_{сж}^2}{2g} + \zeta_{отв} \frac{v_{сж}^2}{2g} \quad (10.2)$$

где v_1 – скорость подхода жидкости к отверстию в резервуаре; $v_{сж}$ – средняя скорость течения в сжатом сечении; $\zeta_{отв}$ – коэффициент местного сопротивления при истечении через отверстие.

Коэффициент Кориолиса $\alpha_2 \approx 1$, $P_2 = P_{ат}$ на уровне 0 – 0.

Из уравнения расхода известно, что $v_1 f_1 = v_{сж} f_{сж}$

Решая систему уравнений (10.2) и уравнения расхода относительно скорости в сжатом сечении получим:

$$v_{сж} = \frac{1}{\sqrt{1 + \zeta - \varepsilon^2}} \sqrt{2g \left(H + \frac{P_0 - P_2}{\rho g} \right)} \quad (10.3)$$

Обозначим величину

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \zeta_{отв} - \varepsilon^2}} = \varphi \quad (10.4)$$

Величину φ называют *коэффициентом скорости*.

С учетом введенного обозначения

$$v_{сж} = \varphi \sqrt{2g \left(H + \frac{P_0 - P_2}{\rho g} \right)} \quad (10.5)$$

По опытным данным $\varphi = 0,97 - 0,98$, $\zeta_{отв} = 0,06$

Для идеальной жидкости $\zeta_{отв} = 0$ и $\varphi = 1$. Для открытого бака, $P_0 = P_2$, отсюда можно получить:

$$v_{сж} = \sqrt{2gH_0} \quad (10.6)$$

Это уравнение называется *формулой Торичелли*. Оно показывает, что скорость в начале вытекающей струи равна скорости свободного падения тела, упавшего с высоты H_0 .

Расход жидкости определится как произведение скорости истечения на площадь сжатого сечения струи

$$Q = v_2 f_{сж} = \varphi \varepsilon f_1 \sqrt{2gH_0} \quad (10.7)$$

Величину $\varphi \varepsilon$ обозначают через μ и называют коэффициентом расхода.

Таким образом, расход жидкости, вытекающей через отверстие, определяют по формуле

$$Q = \mu f_1 \sqrt{2gH_0} \quad (10.8)$$

При точных измерениях размеров сжатого сечения струи установлено, что при совершенном сжатии струи $\varepsilon = 0,62 - 0,64$. В этом случае $\mu = 0,60 - 0,62$. В общем же случае коэффициент расхода $\mu = \varphi \varepsilon$ зависит от условий сжатия.

10.2. Виды насадков и их применение

Насадком называется отрезок трубы, длина которого в несколько раз больше внутреннего диаметра. Рассмотрим случай, когда к отверстию в стенке резервуара присоединен насадок диаметром d , равным внутреннему диаметру отверстия.

На рис. (10.2) показаны наиболее распространенные виды насадков, применяемые на практике:

a - цилиндрический внешний; *б* - конический расходящийся; *в* - конический сходящийся; *г* - цилиндрический внутренний; *д* - коноидальный; *е* - комбинированный.

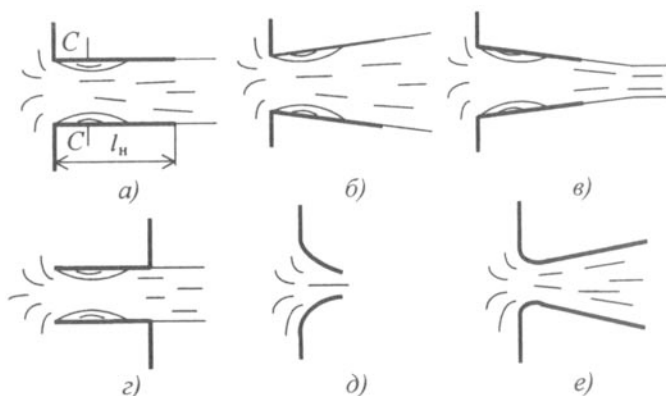


Рис 10.2 Виды насадков

Цилиндрические насадки встречаются в виде деталей гидравличе-

ских систем машин и сооружений. Конические сходящиеся и коноидальные насадки применяют для увеличения скорости и дальности полета струи воды (пожарные брандспойты, стволы гидромониторов, форсунки, сопла и др.).

Конические расходящиеся насадки применяют для уменьшения скорости и увеличения расхода жидкости и давления на выходе во всасывающих трубах турбин и др. В эжекторах и инжекторах также имеются конические насадки, как основной рабочий орган.

Рассмотрим действие внешнего цилиндрического насадка (рис.10.3).

Струя жидкости при входе в насадок сжимается, а потом расширяется и заполняет все сечение. Вследствие разрежения в сжатом сечении насадка жидкость может подсасываться из резервуара, скорость протекания жидкости во входном отверстии возрастает. Из насадка струя вытекает полным сечением, поэтому коэффициент сжатия, отнесенный к выходному сечению, $\varepsilon = 1$, а коэффициент расхода. Из насадка струя вытекает полным сечением, поэтому коэффициент сжатия, отнесенный к выходному сечению, $\varepsilon = 1$, а коэффициент расхода насадка μ_n будет возрастать, в сравнении с истечением жидкости через отверстие в тонкой стенке. Однако при использовании насадка, появляются дополнительные потери из-за трения жидкости о внутренние стенки насадка и расширения струи в нем. Коэффициент цилиндрического насадка зависит от числа Re и относительной длины l/d , в среднем, его значение может быть принято $\mu_n = \varphi \varepsilon \approx 0,8$.

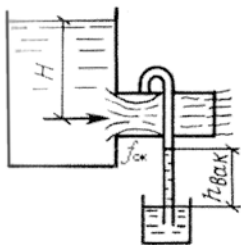


Рис.10.3 Внешний цилиндрический насадок

$$\mu_n = \varepsilon \varphi = \varphi$$

Таким образом, уравнения для определения скорости и расхода жидкости через насадок имеют тот же вид, что и для отверстия, но другие значения коэффициентов

Сравнивая коэффициенты расхода и скорости для насадка и отвер-

ствия в тонкой стенке, устанавливаем, что насадок увеличивает расход и уменьшает скорость истечения.

Во внутренних цилиндрических насадках сжатие струи на входе больше, чем у внешних, и поэтому значения коэффициентов расхода и скорости меньше. Опытами найдены коэффициенты для воды $\mu_n = \varphi = 0,71$.

В наружных конических сходящихся насадках сжатие и расширение струи на входе меньше, чем в наружных цилиндрических, но появляется внешнее сжатие на выходе из насадки. Поэтому коэффициенты ζ , φ и μ_n зависят от угла конусности. С увеличением угла конусности до 13° коэффициент расхода насадка μ_n растет, а с дальнейшим увеличением угла уменьшается.

Конические сходящиеся насадки применяют в тех случаях, когда нужно получить большую выходную скорость струи, дальность полета и силу удара струи (гидромониторы, пожарные стволы и т. п.).

В конических расходящихся насадках внутреннее расширение струи после сжатия больше, чем в иных, поэтому потери напора здесь возрастают и коэффициент скорости φ уменьшается. Внешнего сжатия при выходе нет.

Коническая насадка имеет очертания формы струи, вытекающей через отверстие в тонкой стенке. Для этих насадок значение коэффициентов составляет: $\varphi = \mu_n = 0,97 - 0,995$.

Их применяют в пожарных брандспойтах, хотя, изготовление их очень сложное.

10.3. Гидравлический удар

Гидравлический удар представляет собой колебательный процесс, возникающий в трубопроводе с капельной жидкостью при внезапном изменении скорости ее движения. Этот процесс характеризуется чередованием резких повышений и понижений давления, происходящих за достаточно малый промежуток времени.

Гидравлический удар возникает вследствие быстрого закрытия или открытия задвижки, внезапной остановки насосов или турбин, аварии на трубопроводе (разрыв, нарушение стыка) и других причин.

Повышение или понижение давления в трубопроводе при гидравлическом ударе объясняется инерцией массы жидкости, движущейся в нем.

Этот вид неустановившегося движения жидкости в трубах часто встречается в практике эксплуатации трубопроводов и весьма важен для специалистов, работающих в области монтажа и эксплуатации санитарно-технических устройств.

Впервые гидравлический удар в трубах был изучен Н.Е. Жуковым, который в 1898 г. дал теоретическое обоснование этого явления и предложил метод его расчета.

Рассмотрим упрощенную модель гидравлического удара. Пусть жидкость вытекает из резервуара, размеры которого велики и уровень воды в нем остается постоянным. Режим движения жидкости стационарный, характеристики движения зависят только от продольной координаты. В момент времени t_0 затвор мгновенно закрылся, частицы жидкости, соприкасающиеся с затвором, мгновенно остановятся, их скорость движения будет погашена, кинетическая энергия потока пойдет на сжатие жидкости и расширение стенок трубы. Вследствие сжатия жидкости давление в ней увеличивается. Таким образом, непосредственно у крана возникнет ударная волна. На остановившиеся частицы жидкости у крана набегает другая, соседние с ними частицы и тоже теряют свою скорость, в результате чего сечение передвигается по трубопроводу от крана к резервуару. Когда ударная волна достигнет резервуара, вся жидкость в трубе от резервуара до крана будет остановлена и сжата, т.е. во всей трубе скорость равна нулю, а давление максимально.

Как только ударная волна дойдет до резервуара, давление жидкости во всей трубе будет больше давления в резервуаре, поэтому в следующий момент времени жидкость станет поступать из трубы в резервуар. После прихода ударной волны к резервуару вновь начнется движение жидкости к крану, так будет продолжаться до тех пор, пока колебания не затухнут вследствие потерь энергии на трение и деформацию стенки трубы.

Максимальное давление, возникающее в результате гидравлического удара, рассчитывается по формуле

$$P_{\max} = \rho \cdot a \cdot v, \quad (10.9)$$

где a - скорость распространения звука в воде, $м/с$, зависящая от модуля упругости жидкости и стенок трубопровода.

Если стенки трубы упругие, а модуль упругости жидкости составит $E_{жс} = 20,310^8 \text{ Па}$, то при температуре воды 10°C скорость звука в жидкости принимается $a = 1425 - 1435 \text{ м/с}$. Наблюдаемые скорости ударной волны могут быть значительно ниже, что связано с наличием нерастворенного воздуха, и твердых частиц, которые изменяют модуль упругости жидкости.

Процесс гидравлического удара зависит от того, как быстро закрывается или открывается запорное устройство, при медленном закрытии задвижки, давление можно значительно снизить.

Контрольные вопросы

- Что понимается под коэффициентом сжатия струи?
- Какие особенности сжатого сечения струи известны?
- Что понимаем под коэффициент скорости и расхода?
- Как рассчитать расход жидкости, истекающей через насадок?
- Какие виды насадок вам известны, в чем их различие?

11. ОДНОМЕРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ СЖИМАЕМОГО ГАЗА

При движении газовых потоков с высокими скоростями необходимо учитывать изменение плотности газа, которое сопровождается изменением температуры.

Первое начало термодинамики для движущегося потока газа учитывает изменение внутренней и внешней энергии потока. Запас внутренней энергии зависит от состояния термодинамической системы. Движущийся поток газа обладает кинетической энергией направленного движения частиц газа и их потенциальной энергией. Запишем уравнение первого начала термодинамики.

$$dq = du + d \frac{P}{\rho} + \frac{dv^2}{2} + dl, \text{ Дж / кг} \quad (11.1)$$

где dq - подведенная к единицы массы газа теплота; du - удельная внут-

ренняя энергия системы; $d \frac{P}{\rho}$ - удельная потенциальная энергия частиц

движущегося газа; $d \frac{v^2}{2}$ - удельная кинетическая энергия газа; dl -

работа, совершаемая единицей массы газа.

При движении газа потенциальную энергию массовых сил, как правило не учитывают.

При адиабатическом движении газа (без подвода и отвода теплоты) $dq = 0$ и уравнение (11.1) запишется:

$$0 = du + \frac{dv^2}{2} + dl \quad (11.2)$$

где $dl = d(P \vartheta)$; ϑ - удельный объем системы.

Из определения энтальпии h известно, что $dh = du + d(P \vartheta)$, Дж / кг, тогда уравнение (11.1) запишется:

$$dh + \frac{dv^2}{2} = 0; \quad h + \frac{v^2}{2} = \text{const} \quad (11.3)$$

Уравнение (11.3) справедливо для реального и идеального газа, при адиабатном течении газа, его скорость может определяться формулой

$$v = \sqrt{2(h_1 - h_2)}$$

Для изобарного процесса $h = C_p \Delta t$, уравнение (11.3) запишем для двух сечений

$$\frac{v_1^2}{2} + C_p T_1 = \frac{v_2^2}{2} + C_p T_2 = const \quad (11.4)$$

Из уравнения (11.4) следует, что если газ разгоняется во втором сечении потока, тогда его температура падает.

$$\frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2} = C_p (T_1 - T_2)$$

Из уравнения Менделеева – Клапейрона известно:

$$\frac{P}{\rho} = R_{y0} T$$

где R_{y0} - удельная газовая постоянная, Дж / кгК

Уравнение Майера связывает изобарную и изохорную теплоемкости:

$$C_p - C_g = R_{y0}$$

$$\frac{C_p}{C_g} = k,$$

где k - показатель адиабаты

$$\frac{C_p}{R} = \frac{k}{k-1}$$

Уравнение (11.4) можно записать:

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{P_1}{\rho_1} \frac{k}{k-1} = \frac{v_2^2}{2} + \frac{P_2}{\rho_2} \frac{k}{k-1} = const \quad (11.5)$$

Из физики известно, что при движении газа возникают упругие колебания среды, представляющие собой малые механические возмущения в виде сжатий и разрежений. Скорость распространения этих возмущений называют скоростью распространения звука.

$$a^2 = \frac{dP}{d\rho}; \quad a = \sqrt{\frac{dP}{d\rho}}; \quad a = \sqrt{k R_{y0} T}$$

где a - местная скорость распространения звука, м / с .

Скорость распространения звука в идеальном газе зависит от абсолютной температуры и физических свойств газа и не зависит от условий движения, приняв процесс распространения звука изотермическим, получим:

$$a_T = \sqrt{\frac{P}{\rho}} \quad (11.6)$$

Так как, $a^2 = kR_{yo}T = \frac{P}{\rho}$ или $a^2 = k \frac{P}{\rho}$, то уравнение (11.5) запишем:

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{a_1^2}{k-1} = \frac{v_2^2}{2} + \frac{a_2^2}{k-1} = const \quad (11.6)$$

Уравнение (10.15) является еще одной формой записи уравнения Бернулли, из которого следует, что при возрастании скорости потока адиабатического газа, местная скорость звука в нем убывает, а при торможении возрастает.

11.1. Параметры заторможенного газа, критическая скорость

Параметры идеального газа в состоянии покоя при адиабатном процессе называются параметрами торможения, параметры торможения обозначаются индексом "0".

Если, в сечении 2 газового потока произошло его торможение, то $v_2 = 0$ и уравнение (11.6) запишется как:

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{a_1^2}{k-1} = \frac{a_0^2}{k-1} = const \quad (11.7)$$

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{kRT_1}{k-1} = \frac{kRT_0}{k-1} = const \quad (11.8)$$

Параметры торможения a_0, T_0, P_0, ρ_0 служат константами данного газового потока, T_0 - постоянно для всего потока, а для адиабатного процесса постоянны P_0, ρ_0 .

Если в потоке газа скорость V_1 станет равной местной скорости звука a , то такая скорость называется *критической*, и обозначается a_* , запишем уравнение (11.7) через критические параметры

$$\frac{a_*^2}{2} + \frac{a_*^2}{k-1} = \frac{a_0^2}{k-1} = const \quad (11.9)$$

Откуда

$$a_* = a_0 \sqrt{\frac{2}{k-1}} \quad (11.10)$$

Коэффициент Пуассона $k > 1$ и $a_0 > a_*$, значит критическая скорость всегда меньше скорости звука в полностью заторможенном газе. Критическая скорость является постоянной данного газового потока.

11.2 Движение газов по каналам переменного сечения

Рассмотрим идеальный газ, движущийся прямолинейно по каналу (трубопроводу) переменного сечения без отвода и подвода теплоты $dq = 0$.

Запишем дифференциальное уравнение Эйлера вдоль оси x , учитывая, незначительность массовых сил, и считая движение стационарным

$$-\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} = v \frac{dv}{dx} \quad (11.11)$$

Массовый расход жидкости по каналу или уравнение сплошности составит:

$$G = \rho \cdot v \cdot f = const$$

Логарифмируя уравнение сплошности

$$\ln \rho + \ln v + \ln f = \ln C$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dv}{v} - \frac{df}{f}$$

преобразуем (11.11) к виду

$$v dv = - \left(\frac{dP}{d\rho} \frac{d\rho}{\rho} \right) = -a^2 \frac{d\rho}{\rho}$$

получим:

$$(v^2 - a^2) \frac{dv}{v} = a^2 \frac{df}{f}, \quad (11.12)$$

Разделим обе части (11.12) на a^2 , получим уравнение Гюгонио

$$\frac{dv}{v} \left(\frac{v^2}{a^2} - 1 \right) = \frac{df}{f} \quad (11.13)$$

Отношение $\frac{v}{a}$ представляет собой основной параметр движения газа и называется числом Маха (Маиевского) - M

$$\frac{v}{a} = M \quad (\text{число Маха}) \quad (11.14)$$

Критерий Маха указывает на сверхзвуковые и дозвуковые течения.

Если число Маха $M > 1$, то течение газа сверхзвуковое, если $M < 1$, то течение газа дозвуковое
Перепишем уравнение Гюгонио в виде:

$$\frac{dv}{v} (M^2 - 1) = \frac{df}{f} \quad (11.15)$$

Проведен анализ уравнения (1.15) для случаев истечения газа из сопла (плавно сужающегося насадка) и диффузора (плавно расширяющегося насадка)

- *Дозвуковое течение* $M < 1$

а) истечение газа из сопла т.е. $\frac{df}{f} < 0$; $M < 1$, тогда $\frac{dv}{v} > 0$ т.е сужающееся сопло при дозвуковом режиме течения приводит к увеличению скорости;

б) истечение газа из диффузора т.е. $\frac{df}{f} > 0$; $M < 1$, тогда $\frac{dv}{v} < 0$ т.е при дозвуковом режиме течения, расширяющийся диффузор приводит к уменьшению скорости.

- *Сверхзвуковое течение* $M > 1$;

а) жидкость истекает из сопла, т.е. $\frac{df}{f} < 0$; $M > 1$, тогда $\frac{dv}{v} < 0$

При сверхзвуковых истечениях сужающееся сопло ведет к падению скорости.

б) жидкость истекает из диффузора, т.е. $\frac{df}{f} > 0$; $M < 1$,

тогда $\frac{dv}{v} < 0$

При сверхзвуковых истечениях диффузор ведет к увеличению скорости. Таким образом, в зависимости от числа Маха, сопло и диффузор могут либо увеличивать, либо уменьшать скорость истечения газа из них.

11.3. Гипотеза Сен-Венана.

Рассмотрим истечение газа из большого резервуара через сужающееся сопло в пространство (рис. 11.1). Будем считать, что газ в резервуаре неподвижен, т.е. его параметры равны параметрам торможения. Давление в среде, куда происходит истечение - P_1 , соответственно все параметры среды будут обозначаться с тем же индексом. Запишем уравнение Бернулли.

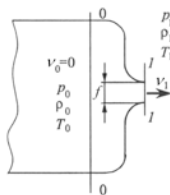


Рис. 11.1 Истечение жидкости из резервуара

$$\frac{v_0^2}{2} + \frac{K}{K-1} \cdot \frac{P_0}{\rho_0} = \frac{K}{K-1} \cdot \frac{P_1}{\rho_1} \quad (11.16)$$

Из уравнения (11.16) выразим скорость истечения

$$v_1 = \sqrt{\frac{2k}{k-1} \left(\frac{P_0}{\rho_0} - \frac{P_1}{\rho_1} \right)} \quad (11.17)$$

Учитывая, что $\frac{\rho_0}{\rho_1} = \left(\frac{P_0}{P_1} \right)^{\frac{1}{k}}$, получим формулу истечения Сен-Венана.

$$v_1 = \sqrt{\frac{2k}{k-1} \frac{P_0}{\rho_0} \left[1 - \left(\frac{P_0}{P_1} \right)^{\frac{k}{k-1}} \right]} \quad (11.18)$$

Для того, чтобы происходило истечение жидкости из сопла в камеру, необходимо, чтобы существовало разность давлений газа в камере

и в резервуаре. Начнем понижать давление P_1 , газ приходит в движение, его скорость не превышает скорости звука a . При дальнейшем снижении давления в камере, может наступить момент, когда скорость истечения в сопле достигнет скорости звука a . В этом случае, упругие колебания среды начнут распространяться в противоположном направлении движущегося газа, т.е. происходит так называемое, *запирание движения*. Скорость истечения при этом будет постоянной и равной скорости звука a . Таким образом, при изменении внешнего давления не возможно получить скорость больше скорости звука, эта гипотеза носит название гипотезы Сен-Венана.

Рост скорости газа сверх звуковых значений возможно только в комбинированном сопле Лавала состоящего из двух частей: сужающегося и расширяющегося.

11.4. Сопло Лавала и его режимы работы

В ряде устройств (форсунках, фурмах, эжекторах, реактивных двигателях) желательно иметь сверхзвуковые скорости течения. Для создания таких скоростей применяют сопла Лавала.

В соответствии с уравнением Гюгонио в сужающейся части скорость газа может возрасти до критического значения, которое достигается в самом узком сечении, в расширяющейся части должно происходить дальнейшее ускорение газа до сверхзвуковых скоростей.

Существует несколько режимов работы сопла Лавала, зависящих (при постоянной температуре торможения) от соотношения давлений перед соплом P_0 и в атмосфере за ним P_{am} . Рассмотрим эти режимы (рис. 11.2) для случая, когда изменяется P_0 , а P_{am} остается постоянным при $T_0 = const$:

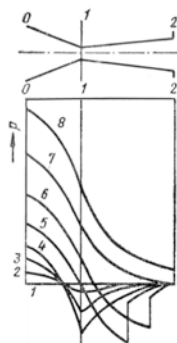


Рис.11.2 Изменение давления в сверхзвуковом сопле при различных режимах.

- при $P_0 = P_{ат}$ движения газа нет (прямая 1);
- с ростом P_0 расход газа через сопло возрастает. При небольших значениях P_0 вдоль всего сопла устанавливаются дозвуковые скорости (кривые 2,3). Давление вдоль оси сопла меняется в соответствии с уравнением Бернулли;

- при некотором значении P_0 в горловине почти достигается скорости звука a , при этом значении ускорения движения газа в расширяющейся части сопла не происходит, скорость падает, (кривая 4) соответствует характеру распределения давления по кривой 2 и 3;

- дальнейшее повышение давления перед соплом (кривые 5 и 6) приводит к тому, что за горловиной скорость газа становится больше скорости звука a , и по уравнению Гюгонио его давление падает, однако данные режимы течения не стабильны и сопровождаются так называемым *скачком уплотнения*. В скачке уплотнения плотность резко увеличивается, а скорость падает, течение переходит в дозвуковой режим;

- дальнейшее повышение давления (кривая 7) соответствует расчетному режиму, в котором наряду с плавным падением давления, растет скорость. Для данного сопла существует единственное значение отношения $P_{ат} / P_0$, при котором оно работает в *расчетном режиме*;

- при значениях давления P_0 (кривая 8) больших, чем давление в расчетном режиме (кривой 7), поток также приобретает сверхзвуковую скорость, однако этот режим требует большего значения давления P_0 , чем в случае расчетного, и поэтому является не экономичным.

Таким образом, расчет сопла Лаваля проводят только при работе в расчетном режиме. С целью упрощения изготовления сопла Лаваля его делают конусообразным, чтобы избежать отрыва потока от стенок, центральный угол раскрытия сопла выбирают 6- 8 градусов.

11.5. Скачки уплотнения

Как было показано выше, при движении газовых потоков со сверхзвуковыми скоростями возникают сильные разрывы потока, называемыми ударными волнами или скачками уплотнения. При пересечении потока поверхности разрыва давление, плотность и температура возрастают, скорость потока падает. Поверхность разрыва, перемещающаяся в пространстве, называют *ударной волной*, а неподвижную ударную волну - *скачком уплотнения*. Поверхности разрыва могут быть плоскими или криволинейными. Если поверхность разрыва нормальна к скорости потока, то скачок уплотнения называется прямым, если же нет, то косым (рис. 10.6). Скачки уплотнения могут возникать при движении как внутри канала (сопло Лаваля, инжекторы), так и при внешнем обтекании.

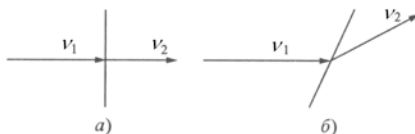


Рис11.3 Скачки уплотнения: а) – прямой; б) – косой

При внешнем обтекании скачки уплотнения увеличивают лобовое сопротивление тела. Наибольшее сопротивление возникает при этом от прямых скачков уплотнения, которые дают наибольшую потерю скорости.

Перед скачком давление на поверхности тела повышается, а за скачком – понижается. Результирующая сила давления направлена по скорости набегающего потока и, представляет собой лобовое сопротивление. Для идеальной жидкости энергия потока (внешняя энергия газа) в скачке расходуется на неадиабатическое сжатие, а для реальной жидкости – еще и на работу сил трения и переходит в тепловую.

Рассмотрим прямой скачок уплотнения, возникший в сверхзвуковом потоке. Параметры газа перед скачком P_1, T_1, ρ_1, v_1 а за скачком P_2, T_2, ρ_2, v_2 . Запишем основные уравнения для установившегося движения сжимаемой жидкости, действием массовых сил пренебрегаем:

- уравнение неразрывности

$$\rho_1 v_1 f = \rho_2 v_2 f ;$$

- уравнение импульса

$$(P_1 - P_2) f = (\rho_2 v_2^2 - \rho_1 v_1^2) f$$

Или
$$v_2^2 - v_1^2 = (P_1 - P_2) \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right); \quad (11.19)$$

- уравнение Бернулли для сжимаемой жидкости (10.13)

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{P_1}{\rho_1} \frac{k}{k-1} = \frac{v_2^2}{2} + \frac{P_2}{\rho_2} \frac{k}{k-1} = const$$

Данное уравнение перепишем

$$v_1^2 - v_2^2 = \frac{2k}{k-1} \left(\frac{P_1}{\rho_1} - \frac{P_2}{\rho_2} \right) \quad (11.20)$$

Приравняв (11.19) к (11.20) получим

$$(P_1 - P_2) \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) = \frac{2k}{k-1} \left(\frac{P_1}{\rho_1} - \frac{P_2}{\rho_2} \right) \quad (11.21)$$

Данное уравнение называют ударной адиабатой, указывающей связь между давлением и плотностью в адиабатическом движении сжимаемой жидкости до и за прямым скачком уплотнения. Последнее уравнение можно представить как

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{(k+1)\rho_2 / [\rho_1 - (k-1)]}{(k+1) - (k-1)\rho_2 / \rho_1} \quad (11.22)$$

Уравнение (11.22) ударной адиабаты отличается от идеальной адиабаты Пуассона, как бы не было велико сжатие P_2 / P_1 в ударной волне, созданное уплотнение газа ρ_2 / ρ_1 не превысит значения $(k+1)/(k-1)$.

Прямой скачок является частным случаем косога скачка. Прямой скачок является наиболее интенсивным, вызывающим максимальное повышение давления и соответственно снижение скорости.

Движение газа через скачок сопровождается необратимыми изменениями, сопровождающимися переходом механической энергии в тепловую.

В инженерной практике рассматриваются задачи, когда выделение теплоты происходит концентрировано, например, при горении газового топлива, или явлениях детонации. Запишем основные уравнения:

- уравнение неразрывности

$$\rho_1 v_1 f = \rho_2 v_2 f ;$$

- уравнение количества движения

$$\frac{P_1}{\rho_1} + \frac{v_1^2}{2} = \frac{P_2}{\rho_2} + \frac{v_2^2}{2} ;$$

- уравнение сохранения энергии;

$$h_1 + \frac{v_1^2}{2} + q = h_2 + \frac{v_2^2}{2}$$

$$\text{где } h_1 = C_{p1} = \frac{P_1}{\rho_1} \frac{k}{k-1} ; \quad h_2 = C_{p2} = \frac{P_2}{\rho_2} \frac{k}{k-1} ;$$

- уравнение состояния идеального газа для потока перед скачком и за ним $P_1 = \rho_1 R_1 T_1$; $P_2 = \rho_2 R_2 T_2$.

Решим систему уравнений неразрывности и уравнения сохранения энергии совместно. Из уравнения количества движения получим

$$\frac{P_1}{\rho_1} + v_1^2 = \frac{\rho_2}{\rho_1} \left(\frac{P_2}{\rho_2} + v_2^2 \right) = \frac{v_1}{v_2} \left(\frac{P_2}{\rho_2} + v_2^2 \right) \quad (11.23)$$

С помощью уравнений состояния найдем

$$R_1 T_1 + v_1^2 = (v_1 / v_2) (R_2 T_2 + v_2^2) \quad (11.24)$$

Уравнение (11.24) связывает параметры температуры и скорости до и после теплового скачка.

Кроме скачков уплотнения, в сверхзвуковом сопле может возникать скачок конденсации. Ускоренное движение газа по уравнению (11.4) сопровождается снижением его температуры и соответствующим увеличением относительной влажности. В некотором сечении сопла относительная влажность может достигать 100% , что приведет к охлаждению и конденсации. Конденсация влаги происходит в сечениях сопла, где число Маха $M = 1,2—1,4$. Современные сверхзвуковые аэродинамические трубы оборудуются специальными установками для осушения воздуха.

Контрольные вопросы

- В чем заключаются особенности сверхзвуковых течений?
- Что определяет число Маха?
- Какая связь между скоростью и давлением при сверхзвуковых течениях?
- В чем заключается гипотеза Сен-Венана?
- Для чего применяется сопло Лаваля?
- Что понимаем под скачком уплотнений?

12. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Рассмотрим движения вязких жидкостей и газов в тонком пристенном слое, вблизи твердых поверхностей или на границе раздела течений и потоков. Эта важная область гидрогазодинамики, называется теорией пограничного слоя, так как явления, происходящие вблизи и на граничных поверхностях, определяют общую картину обтекания тел и движения потоков.

Пограничным слоем называют область течения, соприкасающуюся с поверхностью твердых тел или прилегающую к границе взаимодействия двух смешивающих потоков, в котором происходит изменение физических параметров до значений близких к значениям основного потока.

Пограничные слои различают, по виду физических параметров (скорости, температуры, плотности), и по режимам течения в них, которые могут быть ламинарными или турбулентными. Модель течения жидкости в теории пограничного слоя состоит в том, что действие вязкости считается полностью сосредоточенным в очень узкой зоне потока. За пределами этой зоны, называемой внешним потоком, влиянием вязкости пренебрегается, считая, что течение подчиняется законам движения идеальной жидкости.

12.1. Пограничный слой при обтекании тела безграничным потоком

Если в безграничный поток вязкой жидкости с равномерным распределением скоростей поместить неподвижное твердое тело, то это приведет к искривлению линий тока, и к изменению профиля скоростей вблизи твердой поверхности. Твердая поверхность оказывает на жидкость тормозящее воздействие, вследствие «прилипания» к этой поверхности жидких частиц, соприкасающихся с ней. В результате, в области около пластины из-за действия сил вязкости образуется тонкий слой заторможенной жидкости, в котором скорость изменяется от нуля на поверхности тела, до скорости невозмущенного потока.

По мере возрастания числа Рейнольдса происходит все более отчетливое разделение структуры потока на две области: пограничный слой, в котором происходит интенсивное изменение скорости и сосредоточенное действие сил вязкости и внешний поток, в котором осуществляется безвихревое движение и влияние вязкости практически не проявляются.

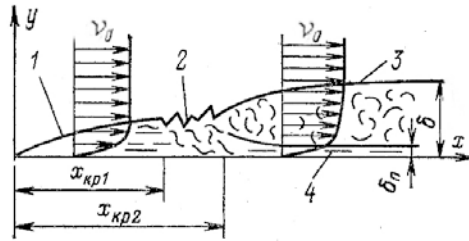


Рис12.1Схема пограничного слой:

- 1- ламинарный пограничный слой; 2- переходная область;
- 3 – турбулентный пограничный слой;
- 4- вязкий (ламинарный подслой)

На рис 12.1 приведена схема образования пограничного слоя при набегании равномерного безграничного потока на поверхность твердого тела. Граница пограничного определяет его толщины δ , под которой понимают такое расстояние по нормали от поверхности тела до потока, где скорость будет отличаться от скорости вдали границы на малую величину, порядка 1%.

При внешнем обтекании поверхности твердого тела, образующийся пограничный слой можно разделить на два типа, отличающихся друг от друга характером распределения скоростей. Переход ламинарного слоя в турбулентный происходит на некотором участке Δx , равном $\Delta x = x_{кр1} - x_{кр2}$. Область переходного течения сложно определить, поэтому считается, что переход ламинарного течения в турбулентное происходит при вполне определенном $x_{кр}$, соответствующее критическому значению $Re_{кр} \approx (3.5 - 5)10^5$. Точка перехода ламинарного режима в турбулентный в пограничном слое может быть найдена

$$x_{кр} = \frac{Re_{кр} \nu}{v_0} \quad (12.1)$$

Пограничный слой вблизи стенки обычно называют *пристенный пограничный слой*. Пристенный пограничный слой образуется непосредственно у поверхности твердого тела, и существует по всей длине обтекаемого тела. Течение в самом пограничном слое могут быть как ламинарными, переходными, так и турбулентными. Для предотвращения или «затягивания» перехода ламинарного режима в турбулентный в погра-

ничном слое разработаны различные технические решения этой проблемы. К их числу можно отнести:

- придание телу удобообтекаемой формы;
- снижение шероховатости обтекаемой поверхности;
- управление пограничным слоем путем его сдува;
- впрыскивание специальных жидкостей, поддерживающих ламинарный слой,

Вместе с тем, существует ряд технических задач, в которых возникает необходимость быстрее разрушения ламинарного пограничного слоя и перевода его в турбулентный режим течения. В этих случаях, разрушение ламинарного пограничного слоя способствует более интенсивному перемешиванию слоев жидкости в пристенных слоях и, следовательно, повышается эффективность тепло- и массообмена.

12.2. Пограничный слой на начальном участке канала

При движении жидкости по трубопроводам и каналам, все сечение потока может быть разделено на две неравные части: очень тонкий, пристеночный пограничный слой и основная часть потока. Как рассматривалось выше, к основному потоку может быть применима модель идеальной жидкости, в которой отсутствуют силы вязкости.

При течении жидкости в канале или в трубе пограничный слой образуется на начальном участке, где формируется эпюра скорости. Так, например, если жидкость поступает в трубу из большого объема и стенки трубы на входе имеют закругление, то распределение скоростей в начальном сечении 1-1 считают равномерным (рис. 12.2).

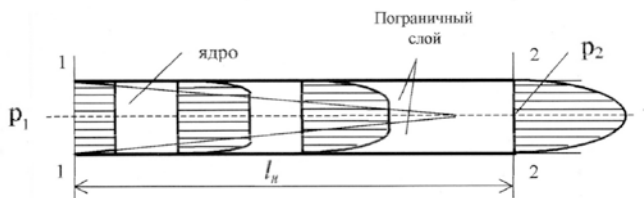


Рис. 11.2 Пограничный слой на участке гидродинамической стабилизации

При движении жидкости у стенок за счет их тормозящего воздействия образуется пристенный гидродинамический пограничный слой, толщина которого постепенно нарастает. По мере движения жидкости вниз по потоку тормозящее влияние стенок распространяется на все

большую толщину потока. На некотором участке, начиная от входа, называемом *участком гидродинамической стабилизации или начальным участком*, поток имеет ядро, где сохраняется равномерное распределение скоростей. В пристенном пограничном слое скорости распределяются неравномерно. В достаточно длинных трубах на некотором расстоянии от входа пограничный слой заполняет все поперечное сечение. При постоянных физических свойствах жидкости после того, как пограничные слои сомкнутся во всех поперечных сечениях ниже по течению устанавливается постоянное распределение скорости, характерное для данного режима течения.

Расстояние l_H , отсчитываемой от входа до сечения, соответствующего слиянию пограничного слоя, называется длиной участка гидродинамической стабилизации, который наблюдается как при ламинарном, так и при турбулентном режимах течения жидкости.

При больших числах Рейнольдса $Re > 5 \cdot 10^5$ пограничный слой практически с самого начала развивается как турбулентный.

Ориентировочно длину начального участка рекомендуется оценивать по формуле

$$l_H = 0,04 Re \cdot d \quad (12.2)$$

Следует подчеркнуть, что результаты гидродинамических расчетов стационарных течений внутри каналов и труб, справедливы только для участков, находящихся за пределами участка гидродинамической стабилизации.

12. 3. Толщина пограничного слоя

Одним из важнейших параметров, характеризующих пограничный слой, является его толщина δ . Она во многом определяет характер обтекания поверхностей твердых тел, поскольку именно по толщине пограничного слоя происходит наиболее интенсивное изменение основных параметров потока. Понятие конечной толщины пограничного слоя, в значительной мере является условным. Условность состоит в том, что приближение значений скорости в пограничном слое к скорости внешнего потока имеет асимптотический характер, поэтому конечная толщина пограничного слоя не может быть указана однозначно.

Основу классической теории ламинарного пограничного слоя составляют уравнения движения Прандтля. Эти уравнения получены путем соответствующего упрощения общих уравнений движения Навье-Стокса, примененных для ламинарного течения в пограничном слое. Основная идея указанных упрощений состоит в оценке порядков всех слагаемых,

входящих в уравнения Навье-Стокса и последующем «отбрасывании» тех составляющих, которые имеют меньший порядок.

Рассмотрим предложенный способ вывода уравнений движения для ламинарного пограничного слоя. При выборе системы координат, в которых рассматривается постановка задачи, следует учесть относительную малость значений толщин пограничного слоя по сравнению с размерами обтекаемого тела (рис.12.3)

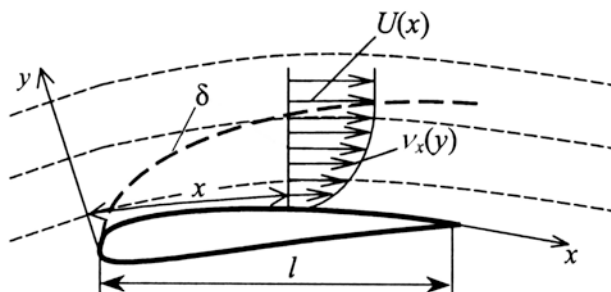


Рис. 12.3 К выводу толщины пограничного слоя

При описании стационарного плоского течения несжимаемой вязкой жидкости с помощью уравнений Навье -Стокса следует учесть, что все производные по времени, а также слагаемые, в которые входят проекции компонентов векторов скорости на ось Z и частные производные по этой координате будут равны нулю. Принимая во внимание, что теория пограничного слоя применима к случаю обтекания тел с большими скоростями можно пренебречь влиянием массовых сил. Уравнения Навье-Стокса на две координаты примут вид

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right) \quad (12.3)$$

$$v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right) \quad (12.4)$$

Ранее отмечалось, что для формулировки краевой задачи уравнение Навье-Стокса дополняются уравнением неразрывности. Для случая плоского стационарного движения несжимаемой жидкости уравнение неразрывности можно записать, как

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (12.5)$$

Дальнейшие упрощения уравнений движения (12.3 и 12.4) проведем, определив предварительно порядок каждого из слагаемых. Оценку порядка осуществим, принимая во внимание, что относительная толщина пограничного слоя δ / X является малой величиной и, следовательно, поперечная составляющая скорости v_y должна быть значительно меньше продольной составляющей скорости потока v_x , т.е. $v_x \gg v_y$.

В качестве масштабов, характеризующих основные величины, выберем следующие параметры:

δ - толщина пограничного слоя $\delta \sim y$; l - характерный продольный размер (например, хорда обтекаемого профиля) $l \sim x$; $U = v_x$ - продольная составляющая скорости на границе пограничного слоя

Рассуждая аналогичным образом, с учетом выбранных масштабов основных величин, запишем

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} \sim \frac{U}{l}; \quad \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \sim \frac{U}{l^2}; \quad \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \sim \frac{U}{\delta^2} \quad (12.6)$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} \sim \frac{U\delta}{l^2}; \quad \frac{\partial v_y}{\partial y} \sim \frac{U}{l}; \quad \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} \sim \frac{U\delta}{l^3}; \quad \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \sim \frac{U}{l} \quad (12.7)$$

Инерционными членами уравнения (12.7) можно пренебречь из-за их малости, а давление внутри слоя не меняется вдоль нормали, тогда уравнения (12.3) упрощаются и имеют вид

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \quad (12.8)$$

Предполагая, что внутри пограничного слоя силы вязкости $\nu \frac{U}{\delta^2}$ и

силы инерции $\frac{U^2}{l}$ имеют одинаковый порядок

$$\nu \frac{U}{\delta^2} \sim \frac{U}{l},$$

получим

$$\delta = C \sqrt{\frac{\nu l}{U}} = \frac{C}{\sqrt{\text{Re}}} \quad (12.9)$$

Где C - постоянная; Re - местное число Рейнольдса

Формула (12.9) показывает, что относительная толщина ламинарного пограничного слоя обратно пропорциональна корню квадратному из числа Рейнольдса. Таким образом, условие малости относительной толщины пограничного слоя, которое являлось одной из основных предпосылок при выводе уравнений пограничного слоя, соблюдается только при достаточно больших числах Рейнольдса.

12.4. Явление отрыва пограничного слоя

Уравнения Прандтля, полученные выше, справедливы лишь для участка ламинарного пограничного слоя.

Однако многочисленные экспериментальные наблюдения за течением жидкости в ламинарном пограничном слое показывают, что ламинарный характер движения пристенной области пограничного слоя часто нарушается без каких-либо видимых причин, даже при обтекании поверхностей плавной формы. В этих случаях, начиная с некоторого расстояния от передней кромки обтекаемого тела, слои жидкости, движущиеся ламинарно в пограничном слое, как бы «отрываются» непосредственно от твердой поверхности тела, наблюдается возвратное течение жидкости и образование вихрей. Такое явление получило название отрыва пограничного слоя. Для выяснения сущности явления отрыва напомним, что давление поперек слоя (вдоль оси y) практически не изменяется и, следовательно, изменение давления пограничного слоя (вдоль оси x) будет таким же, как и во внешнем потоке. При этом изменение давления может быть как убывающим по течению, так и возрастающим. В качестве иллюстрации такого характера изменения давления рассмотрим обтекание круглого цилиндра (рис.12.6).

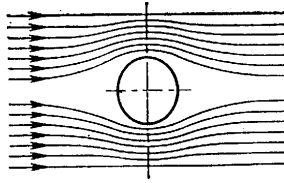


Рис.12.6 Обтекание цилиндра потоком идеальной жидкости

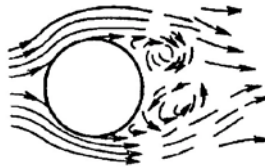


Рис.12.7 Обтекание цилиндра потоком реальной жидкости

При обтекании цилиндра равномерным потоком идеальной жидкости, наблюдается безотрывное обтекание цилиндра ламинарным потоком, т.е. реализует потенциальное безвихревое обтекание. Там где линии тока максимально сужаются, скорость увеличивается, а давление из закона Бернулли, снижается от некоторого значения P_1 перед передней кромкой обтекаемого тела до минимального значения P_2 – в сечении, где поток максимально суживается. В идеальной жидкости ускоренному движению ничто не препятствует, но в реальной происходит подтормаживание жидкости с образованием пограничного слоя (рис 12.7). При омывании кормовой части цилиндра сечение потока увеличивается, а скорость движения уменьшается, и, соответственно, возрастает статическое давление у поверхности. В этом случае движение жидкости происходит в направлении возрастания давления. Часть жидкости, расположенная ниже по течению получает возвратное движение под действием положительного градиента давления, возникает закрутка этих частиц, т.е. образование вихрей. Так возникает отрыв ламинарного потока от поверхности твердого тела.

В реальных условиях точка отрыва, обычно не сохраняет своего постоянного положения.. В теоретических расчетах положение точки отрыва принимается, как правило, постоянным.

Отрыв пограничного слоя обычно относят к числу технически вредных явлений, вызывающих резкое повышение сопротивления обтекаемых жидкостью тел, опасные вибрации этих тел. В случае внутренних течений по трубам и каналам отрыв приводит к уменьшению полезного расхода жидкости, возрастанию потерь энергии и уменьшению коэффициента полезного действия.

устойчивость и переходит в турбулентное. При этом наблюдается резкое изменение закона распределения скоростей и других характеристик пограничного слоя. Общую схему развития течения в пограничном слое при переходе ламинарного режима движения в турбулентный

Контрольные вопросы

- Что понимается под гидродинамическим пограничным слоем?
- Что понимается под участком гидродинамической стабилизации?
- В чем заключается методика определения толщины гидродинамического пограничного слоя методом Прандтля?
- Каково значение критического числа Рейнольдса для пластины при ламинарном и турбулентном обтекании?
- Что понимается под удобообтекаемым и неудобообтекаемым телом?

Список рекомендованной литературы

1. Кудинов А.А. Техническая гидромеханика: Учебное пособие для вузов. М.: Машиностроение, 2008. 368 с.
2. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Дрофа, 2003. 840 с.
3. Емцев Б.Т. Техническая гидромеханика. М.: Машиностроение, 1978. 463 с
4. Повх И.Л. Техническая гидромеханика. Л.: Машиностроение; Ленингр. отд-ние, 1976. 502 с.
5. Дейч М.Е., Зарянкин А.Е. Гидрогазодинамика: Учебное пособие для вузов. М.: Энергоатомиздат, 1984. 384 с.
6. Альтшуль А.Д., Киселев П.Г. Гидравлика и аэродинамика. М.: Стройиздат. 1975. 326 С.
7. Штеренлихт Д.В. Гидравлика: Учебник для вузов М.: Энергоатомиздат, 1984. 640 с.
8. Исаченко В.П. Теплопередача: Учебник для вузов М.: Энергоиздат, 1981. 416 с.

Авторы: Семёнова Татьяна Петровна
Тартаковский Юрий Иосифович

ГИДРОГАЗОДИНАМИКА

Конспект лекций

Издается полностью в авторской редакции

Дизайн обложки и этикетки диска: Д.С. Ялмурзина

г. Магнитогорск, 2011 год

ФГБОУ ВПО «МГТУ»

Адрес: 455000 Челябинская область, г. Магнитогорск,
пр. Ленина 38

ФГБОУ ВПО «Магнитогорский государственный
технический университет им. Г.И. Носова»

Кафедра теплотехнических и энергетических систем

Центр электронных образовательных ресурсов и
дистанционных образовательных технологий

e-mail: ceor_dot@mail.ru