

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова

Н.В. Оншин

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПЛАНИРОВАНИЯ ИНЖЕНЕРНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Утверждено Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия

Магнитогорск
2009

УДК 519.242

Рецензенты:

*Заведующий кафедрой общетехнических дисциплин
ГОУ ВПО «Магнитогорский государственный университет»,
профессор, кандидат технических наук
В.С. Славин*

*Ведущий специалист управления инвестиций ОАО «ММК»,
доцент, кандидат технических наук
А.Г. Медведев*

Оншин Н.В.

Основы теории планирования инженерного эксперимента:
учеб. пособие. – Магнитогорск: ГОУ ВПО «МГТУ», 2009. – 146 с.
ISBN 978-5-9967-0084-4

Приведены основы теории планирования и проведения активного эксперимента, рассматриваются вопросы выбора факторов и способы определения точности измерений. Подробно рассмотрены этапы выполнения статистической обработки результатов эксперимента и способы получения адекватной математической модели. Все теоретические материалы сопровождаются примерами решения конкретных задач.

Пособие предназначено для студентов университета, изучающих дисциплины «Исследование машин и оборудования металлургического производства» и «Основы научных исследований», обучающихся по специальности 150404 «Металлургические машины и оборудование» (направление подготовки 150400 «Технологические машины и оборудование»).

Пособие также может использоваться при выполнении исследовательских курсовых и дипломных работ по дисциплинам «Механическое оборудование металлургических заводов» и «Надежность, эксплуатация и ремонт металлургического оборудования». Учебное пособие может быть полезно студентам других специальностей, изучающим методы научных исследований, а также инженерно-техническим работникам, связанным с проведением исследовательских работ.

УДК 519.242

ISBN 978-5-9967-0084-4

© ГОУ ВПО «МГТУ», 2009

© Оншин Н.В., 2009

ВВЕДЕНИЕ

Разработка и проектирование нового технологического оборудования непосредственно связано с созданием новых и совершенствованием существующих технологических процессов. Основой этих разработок являются эксперименты. Заметное повышение эффективности экспериментальных исследований и инженерных разработок достигается применением математических методов планирования экспериментов. Их использование при постановке задач, в процессе экспериментирования и при обработке полученных данных существенно сокращает сроки решения, снижает затраты на исследования и повышает качество полученных результатов. Таким образом, математическая модель становится неотъемлемым элементом испытаний.

В настоящее время доступны многие аналитические методы, но в данном учебном пособии приведены простые численные способы получения математических моделей первого и второго порядка, не требующие применения вычислительной техники, что имеет большое прикладное значение для инженеров-механиков.

Материал данного пособия располагается в таком же порядке, в котором он используется при проведении типичного эксперимента. Первая глава знакомит читателя с инженерным экспериментом и основной терминологией, применяемой в теории планирования эксперимента. Особое внимание уделено роли факторов, их выбору и способу снижения их количества в эксперименте с использованием анализа размерности.

Во второй главе описываются возможные ошибки эксперимента, способы определения погрешностей измерения и методы исключения грубых ошибок.

Планирование и статистическая обработка результатов эксперимента сопряжена с выдвижением и проверкой различных статистических гипотез, поэтому в третьей главе приведены теоретические основы использования наиболее часто применяющихся для этого критериев.

Теория построения наиболее простых и часто используемых в практике планов эксперимента для получения математических моделей первого и второго порядка приведена в четвертой главе.

Пятая глава посвящена непосредственно организации, проведению и обработке результатов эксперимента. В ней подробно изложены: порядок проведения эксперимента, метод наименьших квадратов и основные элементы регрессионного анализа.

Использование представленных теоретических материалов наглядно продемонстрировано на конкретных сквозных примерах в шестой главе. На них можно проследить все операции подряд от начала и до конца. Они подробно описывают основные этапы проведения планированных экспериментов: составление анкеты и кодирование факторов, разработка матрицы планирования, определение дисперсии опыта, проверка значимости коэффициентов регрессии и адекватности полученной математической модели.

Данные приложения позволяют в большинстве случаев решать задачи по статистике, не прибегая к специальной справочной литературе.

В данном пособии все теоретические методы проиллюстрированы конкретными примерами оригинальных задач. Каждая задача решается до конца, и читатель может лучше уяснить идею метода, его особенности и возможности, достоинства и недостатки.

Пособие предназначено для студентов, обучающихся по специальностям 150404 «Металлургические машины и оборудование» (направление подготовки 150400 «Технологические машины и оборудование») и соответствует разделам ГОС по дисциплинам «Исследование машин и оборудования металлургического производства» и «Основы научных исследований». Учебное пособие может быть полезно студентам других специальностей, изучающим методы научных исследований, а также инженерно-техническим работникам, связанным с проведением исследовательских работ.

1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

1.1. Инженерный эксперимент

Общей чертой, объединяющей ученых из различных областей, является то, что они проводят эксперименты. Биологи проверяют на животных новые лекарственные препараты, физики с помощью огромных сооружений изучают микрочастицы, инженеры сравнивают различные методы производства, и хотя каждый из них идет своим путем, все они проводят эксперименты. Их методы имеют много общего. Они стараются контролировать свой эксперимент или исключить влияние внешних переменных. Всех их интересует точность измерительных приборов и точность получаемых данных. Каждый исследователь стремится уменьшить число переменных в любом эксперименте, поскольку это ускоряет его работу и делает ее экономичней. Каким бы простым ни был эксперимент, в начале необходимо составить план его проведения. В процессе проведения эксперимента важную роль играет обнаружение «неполадок». С этой задачей непосредственно связана проверка приемлемости получаемых результатов. Наконец, в процессе любого эксперимента необходимо анализировать получаемые результаты и давать их интерпретацию.

Эксперименты и экспериментаторы могут отличаться друг от друга, но фактически планирование, проведение и анализ всех экспериментов осуществляется в одинаковой последовательности. Многие современные эксперименты, особенно в таких областях, как ядерная и ракетная техника, являются исключительно дорогостоящими и на первый взгляд очень сложными. В действительности они представляют собой не что иное, как большое число отдельных экспериментов, проводимых с помощью дорогостоящего комплекта испытательного оборудования. Каким бы сложным ни был тот или иной эксперимент, представляемые результаты по форме мало отличаются от обычных отчетов по лабораторным работам.

Любой эксперимент, каким бы трудным он не казался, заканчивается представлением результатов и, возможно, выдачей рекомендаций другим лицам. Эта информация может представляться в виде графиков или кривых, математических формул или номограмм, таблиц, статистических данных или словесных описаний. Из графиков получается зависимость от одной переменной, в случае двух переменных используются параметрические кривые. Для получения зависимостей от трех переменных необходимо несколь-

ко графиков или использовать изометрические координаты. Графическое изображение более сложных функций невозможно, так как человек не в состоянии наглядно представить более сложные соотношения. Представляя результаты в виде формул, можно выразить зависимость от большего числа переменных, однако лишь в немногих экспериментах одновременно исследуется более трех независимых переменных.

Статистические показатели могут быть изящными или громоздкими. Однако выраженный в них смысл может быть выражен всего в нескольких словах. Статистический показатель может давать информацию о всей совокупности данных и об изменчивости отдельных элементов. Он может давать информацию о значимости причинного соотношения либо указывать вероятность появления определенного события в будущем на основании прошлого опыта. Математическая статистика используется при описании ошибок приборов и измерительных систем и для проверки статистической значимости результатов экспериментов.

Представление результатов в словесной форме всегда было проблемой при проведении научных исследований. Это самый неэффективный способ, однако его нельзя игнорировать. Безусловно, результаты определенных экспериментов, проводимых в современных физических лабораториях, просто невозможно представить в словесной форме. В технике подобные эксперименты встречаются крайне редко, и значительная часть технического отчета обычно включает словесные описания и объяснения.

Можно знать о существовании множества сложных взаимосвязей между данными, однако если эти взаимосвязи не выражены в виде графиков, уравнений или словесных описаний, понятных коллегам, то будет лишь напрасно потеряно время. Большинство инженерных экспериментов ведет к определенному действию – принятию решения, продолжению испытания или признанию неудачи. Эти действия возможны только в том случае, если мы показываем другим то, что делаем сами.

Нередко инженеры выполняют дорогостоящие и плохо контролируемые эксперименты вследствие того, что допускают одну принципиальную ошибку. У них полностью отсутствует самопроверка логики и рассуждений после каждого этапа работы. Когда инженер-испытатель просто гадает, какой должна быть требуемая точность каждой группы приборов, совсем не думает о скорости выборки данных и интенсивности измерения внешних условий, разбивает свой эксперимент на этапы «на ощупь» или по интуиции, игнорирует возможность появления систематических ошибок,

вносимой регулярной последовательностью измерений, и когда повторные эксперименты проводятся как своего рода запоздалая попытка «зафиксировать» данные, имеющие разброс, то с большой вероятностью эксперимент будет продолжительным, дорогостоящим и неточным. Вполне возможно, что такой эксперимент вообще не принесет никакой пользы. Настоящий исследователь методически и полностью обдумывает все возможные внешние воздействия и методы контроля. Он способен отличить действительно уникальный и необычный эффект от множества побочных воздействий и внешних причин ошибок. Случайные открытия происходят тогда, когда все предвидимые возможности заранее рассчитаны, предсказаны либо исключены и могут появиться лишь совершенно новые, неизвестные ранее возможности.

1.2. Определения и термины

Большинство научных исследований связано с экспериментом. Он проводится в лабораториях, на производстве, в клиниках и т.д. **Эксперимент** – это научно поставленный опыт, наблюдение исследуемого явления в специально создаваемых и точно учитываемых условиях, позволяющих следить за ходом явления и воссоздавать его каждый раз при повторении этих условий.

Эксперимент может непосредственно проводиться на объекте или на его модели. Модель обычно отличается от объекта масштабом, а иногда и природой. В последнее время наряду с физическими моделями все большее распространение получают абстрактные математические модели. Для повышения эффективности исследований применяется математическая теория планирования эксперимента.

Планирование эксперимента – это процедура выбора числа и условий проведения опытов, необходимых и достаточных для решения поставленной задачи с требуемой точностью. При этом существенно следующее:

- стремление к минимизации общего числа опытов;
- одновременное варьирование всеми переменными, определяющими процесс, по специальным правилам – алгоритмам;
- использование математического аппарата, формализующего многие действия экспериментатора;
- выбор четкой стратегии, позволяющей принимать обоснованные решения после каждой серии экспериментов.

Под **математической моделью** часто понимается уравнение, связывающий некоторый изучаемый параметр Y с факторами X . В общем виде оно выглядит так:

$$Y = F(X_1, X_2, \dots, X_n). \quad (1.1)$$

Величина Y часто называется **функцией цели**, независимо от того, какой признак исследуемого объекта она представляет, всегда должна быть определена количественно, т.е. характеризуется числом. В случае, если интересующий исследователя признак качественный, а критерий оценки сложный, то можно применить ранговый подход, разработанный в теории эксперимента. Желательно, чтобы функция цели обладала ясным физическим смыслом и была легко вычислена.

Целью эксперимента является определение влияния факторов на функцию цели, т.е. в процессе эксперимента определяется реакция, **отклик** изучаемой величины Y на изменение значений факторов X . Поэтому функция цели также называется **функцией отклика**.

Задачи, решаемые с помощью эксперимента, могут быть двоякого рода. Если задачей эксперимента является установление связей между Y и X , т.е. получение уравнения (1.1), то такая задача называется **интерполяционной**. Полученное интерполяционное уравнение является **математической моделью** изучаемого явления.

Если задачей эксперимента является поиск оптимального сочетания факторов X_{opt} , при котором значение функции отклика достигает экстремума Y_{ext} , то такие задачи называются **оптимизационными** или **экстремальными**, а эксперимент - экстремальным. При проведении экстремальных экспериментов всегда возникает необходимость (на промежуточных этапах) в получении интерполяционных формул. Поэтому следует считать, что интерполяционные задачи являются составной частью экстремальных задач. При этом необходимо учитывать, что в интерполяционных задачах функций цели может быть сколько угодно, а в оптимизационных - только одна.

В общем случае схема эксперимента может быть представлена в виде кибернетической системы (рис. 1.1).

Под «черным ящиком» подразумевается объект исследования, на выходе из которого получают численные характеристики целей исследования, т.е. параметры оптимизации, целевые функции и т.д. Для проведения эксперимента необходимо иметь воз-

возможность воздействовать на поведение «черного ящика». Все способы такого воздействия называются факторами или входами. **Фактором** называется измеряемая переменная величина, принимающая в некоторый момент времени определенное значение. Факторы бывают варьируемые X , случайные W и неизменные Z .

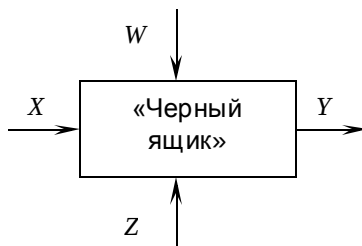


Рис.1.1. Схема «черного ящика»

Варьируемые факторы — это контролируемые, изменяемые в процессе эксперимента величины с целью установления их влияния на интересующие характеристики объекта.

Случайные факторы — неконтролируемые воздействия на объект в процессе эксперимента.

Неизменные факторы — совокупность специально контролируемых и намеренно неизменяемых переменных величин в ходе всего эксперимента.

Самое важное свойство факторов состоит в том, что исследователь может изменять их по своему усмотрению. В этом случае эксперимент называется **активным**. В случае, если исследователь не может управлять факторами, а может лишь регистрировать их изменения, происходящие не по его воле, такая ситуация называется **пассивным экспериментом**. Примером этого может служить наблюдения астрономов за движением небесных тел.

Полученная информация в ходе эксперимента в любой форме называется **данными**. Обработанные данные и подвергнутые анализу составляют **результат эксперимента**. Значение функции цели при фиксированных значениях факторов X называют **наблюдением**. При проведении эксперимента получают некоторое конечное количество наблюдений, называемое **выборкой** из **бесконечной совокупности** или **генеральной совокупности**. Если имеется N наблюдений, то обычно говорят «выборка объемом N ». Чем больше выборка, тем лучше ее распределение приближается к распределению генеральной совокупности.

1.3. Факторы в эксперименте

Для проведения качественного эксперимента необходимо включить в рассмотрение все существенные факторы, которые могут влиять на процесс. Если какой-либо неучтенный существенный фактор будет произвольно менять свои значения, которые экспериментатор не контролирует, это значительно увеличит ошибку и может привести к неприятным последствиям.

Каждый фактор имеет область определения. Под **областью определения** понимается совокупность всех значений, которые, в принципе, может принимать данный фактор. Данная область может быть непрерывной и дискретной. В задачах планирования экспериментов всегда рассматриваются дискретные области определения. Таким образом, каждый фактор может принимать в опыте одно или несколько значений, которые называются **уровнями**. Всякий фактор имеет определенное число дискретных уровней, что облегчает построение эксперимента и упрощает оценку их сложности.

Комбинация факторов эксперимента с зафиксированным значением на определенном уровне определит одно из возможных состояний объекта исследования, т.е. одного из опытов. Полное количество всех возможных комбинаций можно определить, возведя число уровней e в степень числа факторов k , т.е. e^k . Так, например, система с пятью факторами, варьируемыми на пяти уровнях, имеет 3125 комбинаций, а для десяти факторов на четырех уровнях их уже более миллиона. Число опытов растет по показательной функции.

Для сокращения числа факторов, а следовательно, и уменьшения числа опытов используют следующие способы:

- введение относительных величин;
- учет влияния природы факторов. Сокращение числа факторов проводится интуитивно на основании наблюдений;
- введение комплексных факторов;
- на основании анализа размерностей;
- методы отсеивания несущественных факторов, такие как метод случайного баланса, планы Плакетта-Бермана и др.

Факторы разделяются на количественные и качественные. **Количественные** факторы всегда можно охарактеризовать числом, например время, температура, скорость, масса, концентрация и т.п. **Качественные факторы** – это разные вещества, технологические способы, аппараты, исполнители и т.д. Для их описания в виде числа проводится их кодирование. Строится условная поряд-

ковая шкала, которая ставит в соответствие уровням качественно-го фактора числа натурального ряда. Порядок уровней может быть произвольным, но после кодирования он фиксируется.

При планировании эксперимента к факторам предъявляются следующие требования.

Факторы должны быть **управляемыми**. Планировать эксперимент можно только в случае, если уровни факторов подчиняются воле экспериментатора.

Факторы должны быть **операциональными**. Должна быть возможность точно указать последовательность действий (операций), с помощью которых устанавливается конкретное значение (уровень) фактора. С этим связаны выбор размерностей и точность его фиксирования.

Точность замера фактора должна быть по возможности более высокой. Степень точности определяется диапазоном измерения факторов. Например, при изучении процесса, который длится сутками, нет необходимости учитывать секунды, а в быстрых процессах, быть может, необходимо учитывать и доли секунды.

Факторы должны быть **однозначными**, т.е. непосредственно воздействовать на объект. Трудно управлять фактором, если он является функцией других переменных. Однако в планировании эксперимента могут участвовать сложные факторы, такие как логарифмы, соотношения и т.п.

Факторы должны быть **совместимыми**. Это означает, что все их комбинации осуществимы и безопасны. Чаще всего несовместимость факторов может наблюдаться на границах областей их определения и устраняется уменьшением этих областей.

Факторы должны быть **независимыми**, т.е. устанавливаться на любом уровне независимо от уровней других факторов. В противном случае невозможно планировать эксперимент. Однако требование некоррелированности не означает, что между значениями факторов нет никакой связи, достаточно, чтобы связь не была линейной.

Всегда при подготовке планирования эксперимента следует помнить, что выбор факторов – очень ответственный этап, от которого зависит успешное решение поставленных задач.

1.4. Уменьшение набора переменных. Анализ размерностей

Решающим аспектом планирования экспериментов является изучение неопределенностей отдельных измерений и их комбинаций. Целью такого планирования является получение максималь-

ного объема полезных данных при наилучшем контроле и минимальных затратах времени на их обработку и вычисления. Самым известным и наиболее эффективным способом добиться компактности плана эксперимента без потери общности и контроля является анализ размерностей. **Анализ размерностей** – математический метод определения вида критериальных соотношений между физическими величинами в изучаемых явлениях, основанный на рассмотрении размерностей этих величин. Это простой и быстрый способ вывода функциональных соотношений без применения сложной теории.

В основе данного метода лежат два постулата:

1. Любое явление должно иметь математическое описание, инвариантное (независящее) к системе единиц, в которых выражены переменные и параметры.
2. Любая физическая величина измеряема, т.е. имеет числовую характеристику.

Все физические величины можно разделить на первичные x и вторичные y в зависимости от того, как осуществляется измерение. Первичные величины x измеряются путем прямого сопоставления их с эталонными значениями (длины, массы, времени и т.д.). Их численные значения существенно зависят от эталона и являются весьма относительными. Например, размер листа форма А4 составляет $21 \times 14,8$ при эталоне 1 см или 210×148 при эталоне 1 мм, если за эталон принять 1 дюйм, то численные значения размера составят $8,2 \times 5,8$. Однако при использовании любых единиц измерения существует абсолютный признак, характеризующий суть объекта (листа), а именно соотношение длин сторон, который не зависит от выбора эталонных единиц. В анализе размерностей это важное свойство называется **абсолютностью отношений**.

Вторичные величины y выражаются через первичные посредством известного определительного уравнения (скорость, ускорение, напряжение, сопротивление и т.п.). Пусть определительное уравнение имеет вид:

$$y = f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_m). \quad (1.2)$$

В случае, когда вторичная величина зависит от m первичных и r вторичных:

$$y = f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_m; y_1, \dots, y_j, \dots, y_r). \quad (1.3)$$

При произвольном выборе единиц измерения величин, входящих в определительное уравнение вторичной величины, условие абсолютности отношений будет выполняться автоматически,

если определительное уравнение представляет из себя степенной комплекс, имеющий вид:

$$y = A \cdot x_1^{a1} x_2^{a2} \dots x_m^{am}. \quad (1.4)$$

Для преобразования выражения (1.4) к безразмерному виду, т.е. к переходу к безразмерным комплексам, используют формулу размерности:

$$K = k_1^{a1} \dots k_m^{am} k_1^{b1} \dots k_r^{br}, \quad (1.5)$$

где a и b - показатели размерности k .

Например, для вторичной величины скорости $y = V$, выражаемой через первичные величины $x_1 = S$ – путь и $x_2 = t$ – время, определительное уравнение будет иметь вид:

$$y = A \cdot x_1^{a1} x_2^{a2}.$$

Из физики известно, что $V = S / t$, отсюда имеем:

$$A=1; \quad a1=1; \quad a2=-1.$$

Размерность первичных величин принимаем:

$$[S] = L; \quad [t] = \Theta.$$

Формула размерности запишется в виде:

$$[V] = L \Theta^{-1}.$$

Размерность первичной величины (формула размерности) совпадает с ее символом. В механике, например, часто за первичные принимают массу, длину и время и соответственно обозначают M, L, Θ . Но возможно и другое сочетание, например: сила, длина, время - F, L, Θ . В табл.П1 приложения приведены формулы размерностей нескольких физических величин.

Полученные формулы размерности позволяют сгруппировать физические величины таким образом, чтобы получить комплексы, имеющие нулевую размерность. Такие безразмерные комплексы инвариантны к метрическим преобразованиям, т.е. их значение не меняется при переходе к другим единицам измерения. Для этого используется теорема Букингема, первая часть которой гласит: *«Если какое либо уравнение однородно относительно размерностей, то его можно преобразовать к соотношению, содержащему набор безразмерных комбинаций величин».*

Однородным относительно размерностей является уравнение, форма которого не зависит от выбора основных единиц, т.е. входящие в него величины могут выражаться в футах и секундах, метрах и часах или в любых других соразмерных единицах. Пред-

ставляется сомнительным, чтобы какое-либо естественное явление можно было описать с помощью неоднородного уравнения. Такое описание может быть лишь приближенным.

Безразмерные комбинации представляют собой произведения или отношения, составленные таким образом, что в каждой комбинации размерности сокращаются. Можно не знать всех переменных, влияющих на эксперимент, но необходимо представлять себе, что эти переменные и связывающее их безразмерное уравнение существует независимо от того, известны они или нет. Если не удастся получить систему безразмерных комбинаций, то это явный признак того, что было что-то пропущено.

Вторая часть теоремы Букингема, π -теорема: «Число безразмерных комплексов (критериев подобия) равно числу существенных величин (переменных параметров, констант) для данного процесса за вычетом числа независимых первичных величин, через которые выражены существенные величины».

Пример 1.1. При исследовании потерь на трение потока жидкости в трубе представляет интерес величина ΔP . Известно, что эта величина является функцией семи переменных и констант:

$$\Delta P = f(L, D, V, \mu, \rho, Ra, g).$$

Выразим размерность переменных, описывающих систему с потерями на трение, по отношению к трем основным единицам: массы M , времени Θ и длины L (табл. 1.1).

Таблица 1.1

Размерности переменных, описывающих систему
с потерями на трение

Название переменной	Обозначение	Формула размерности
Потери давления в трубе	ΔP	L
Длина трубы	L	L
Диаметр трубы	D	L
Скорость потока жидкости	V	$L\Theta^{-1}$
Вязкость жидкости	μ	$M\Theta^{-1}L^{-1}$
Плотность жидкости	ρ	ML^{-3}
Высота неровностей поверхности	Ra	L
Ускорение силы тяжести	g	$L\Theta^{-2}$

Составляем уравнение размерности:

$$\Delta P = AL^a D^b V^c \mu^d \rho^e Ra^f g^g.$$

Представим вместо символов их формулы размерности:

$$L = L^a L^b (L\Theta^{-1})^c (M\Theta^{-1}L^{-1})^d (ML^{-3})^e L^f (L\Theta^{-2})^g.$$

Для того чтобы полученное уравнение было однородным относительно размерностей, должны выполняться следующие соотношения между показателями степени:

$$\text{для } M \quad 0 = d + e;$$

$$\text{для } L \quad 1 = a + b + c - d - 3e + f + g;$$

$$\text{для } \Theta \quad 0 = -c - d - 2g.$$

Имеем три уравнения с семью неизвестными. Упростим их, исключив e , c и b . Тогда $e = -d$, $c = -d - 2g$ и $b = 1 - a - d + g - f$.

После соответствующей подстановки в определительное уравнение получим:

$$\Delta P = AL^a D^{(1-a-d-f)} V^{(-d-2g)} \mu^d \rho^{-d} Ra^f g^g.$$

Объединяя члены с одинаковыми показателями степени, легко составить безразмерные комбинации:

$$\frac{\Delta P}{D} = A \left(\frac{L}{D} \right)^a \left(\frac{VD\rho}{\mu} \right)^{-d} \left(\frac{Ra}{D} \right)^f \left(\frac{Dg}{V^2} \right)^g.$$

Восемь первоначальных переменных задачи и использование трех независимых величин в результате дают пять безразмерных комплексов, что и соответствует π -теореме.

Проведенные действия приводят к сведению semifакторной задачи к четырехфакторной. Это обстоятельство существенно упрощает эксперимент и позволяет представить в графической форме и проанализировать полученные данные гораздо быстрее и с большей точностью.

Контрольные вопросы

1. Что такое математическая модель?
2. Перечислите основные типы факторов.
3. Требования, предъявляемые к факторам при планировании эксперимента.
4. В чем состоит суть метода анализа размерностей?
5. Сформулируйте теорему Букингема.
6. Что понимают под безразмерным комплексом?

2. ОШИБКИ ЭКСПЕРИМЕНТА

Численные методы часто применяют при математическом моделировании физических и других процессов. Результаты расчетов в этом случае сравнивают с экспериментальными данными и по степени их согласованности судят о качестве выбранной математической модели. Чтобы обоснованно сделать заключение о соответствии или несоответствии, исследователь должен знать, что такое погрешность эксперимента и как с ней обращаются, а также уметь в случае необходимости провести статистическую обработку первичных данных эксперимента.

Задача статистической обработки эксперимента очень важна в тех приложениях, когда или требуется особенно высокая точность, или разброс отдельных измерений превосходит исследуемый эффект. Обычно, чем точнее эксперимент, тем более сложной аппаратуры он требует и дороже обходится. Однако хорошо продуманная математическая обработка результатов в ряде случаев позволяет выявить и частично исключить ошибки измерений, это может оказаться не менее эффективным, чем использование более дорогой и точной аппаратуры.

Известно, что при достаточно точных измерениях одной и той же величины результаты отдельных измерений отличаются друг от друга и, следовательно, содержат ошибки. Ошибкой измерения z называют разность между результатом измерения y и истинным значением измеряемой величины $y_{ист}$.

$$z = y - y_{ист} . \quad (2.1)$$

Одной из основных задач математической обработки результатов эксперимента как раз и является оценка истинного значения измеряемой величины по полученным результатам. Для этого необходимо знать основные свойства ошибок измерения и уметь ими воспользоваться.

Ошибки эксперимента условно разбивают на систематические, случайные и грубые.

Систематические ошибки – это те, которые не меняются при многократном повторении данного эксперимента. Примерами таких ошибок является пренебрежение выталкивающим действием воздуха при точном взвешивании, или измерение тока гальванометром, нуль которого неправильно установлен.

Различают три вида систематических ошибок:

1. Ошибки известной природы, величину которых можно определить, называют поправками. Так, при точном взвешивании

рассчитывают поправку на выталкивающее действие воздуха и прибавляют ее к измеренной величине. Внесение поправок позволяет существенно уменьшить (или даже практически исключить) ошибки такого рода. Заметим, что иногда расчет поправок бывает самостоятельной сложной математической задачей.

2. Ошибки известного происхождения, но неизвестной величины. К ним относится погрешность измерительных приборов, определяемая их классом точности. Для таких ошибок обычно известна только верхняя граница, а как поправки их учесть нельзя.

3. Ошибки, о существовании которых мы не знаем; например, используется прибор со скрытым дефектом или изношенный, фактическая точность которого существенно хуже, чем обозначено в техническом паспорте.

Для выявления систематических ошибок всех видов обычно заранее отлаживают аппаратуру на эталонных объектах с хорошо известными свойствами.

Грубые ошибки – это результат невнимательности наблюдателя, который может записать одну цифру вместо другой. При единичном измерении грубую ошибку не всегда можно опознать. Но если измерение повторено несколько раз, то при статистической обработке выясняют вероятные пределы случайной ошибки. Измерение, существенно выходящее за полученные пределы, считается грубо ошибочным и не учитывается при окончательной обработке результатов.

Случайные ошибки вызываются большим числом факторов, которые при повторении одного и того же эксперимента могут действовать по-разному, причем учесть их влияние практически невозможно. Например, при измерении длины предмета линейка может быть неточно приложена, взгляд наблюдателя может падать не перпендикулярно шкале и т.д. При многократном повторении эксперимента результат вследствие случайной ошибки будет различным. Однако такое повторение и соответствующая статистическая обработка позволяют, во-первых, определить величину случайной ошибки и, во-вторых, уменьшить ее. Повторяя измерение достаточное число раз, можно уменьшить случайную ошибку до требуемой величины (целесообразно уменьшать ее до величины 50—100% от систематической ошибки).

Таким образом, если измерение повторено достаточно много раз, то можно практически исключить грубые и случайные ошибки, так что точность ответа будет определяться только систематической ошибкой. Однако во многих приложениях это требуемое число раз оказывается неприемлемо большим, а при реально осуще-

ствимом числе повторений случайная ошибка может быть определяющей. Учет влияния случайных ошибок основан на знании законов их распределения. Для этого необходимо знать некоторые разделы математической статистики и теории вероятности.

2.1. Распределение случайных ошибок измерения

Случайные ошибки измерения характеризуются определенным законом их распределения. Существование такого закона можно обнаружить, повторяя много раз в неизменных условиях измерение некоторой величины и подсчитывая число m тех результатов измерения, которые попадают в заданный интервал: отношение этого числа к общему числу n измерений (относительная частота попадания в отмеченный интервал) при достаточно большом числе измерений оказывается близким к постоянному числу. Причем каждому интервалу $(z_1; z_2)$ соответствует вполне определенное число, называемое **вероятностью** попадания случайной величины z в этот интервал:

$$P(z_1 < z < z_2) \approx \frac{m}{n}. \quad (2.2)$$

Законом распределения случайной величины называется правило, позволяющее находить вероятности для любых интервалов, и записывается в виде:

$$P(z_1 < z < z_2) = \int_{z_1}^{z_2} f(z) dz, \quad (2.3)$$

где $f(z)$ – плотность распределения, некоторая неотрицательная функция, нормированная условием:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z) dz = 1. \quad (2.4)$$

В теоретических работах по математической статистике изучается большое число различных распределений, но чаще всего в практике используется нормальный закон распределения (закон Гаусса). Формула для этого закона выводится на основании следующих допущений:

1. Окончательная ошибка любого измерения представляет собой результат большого числа очень малых ошибок, распределенных случайным образом.

2. Положительные и отрицательные отклонения относительно истинного значения равновероятны.

Плотность нормального распределения равна

$$f(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-z/(2\sigma^2)}, \quad (2.5)$$

где σ – характеризует точность измерений.

График плотности распределения вероятностей называется кривой нормального распределения. Из рис. 2.1,а видно, что при уменьшении σ кривая сжимается вдоль оси Oz и вытягивается вдоль оси $f(z)$, тем самым быстрее убывает плотность распределения с увеличением $|z|$, т.е. меньше разброс ошибок около нуля.

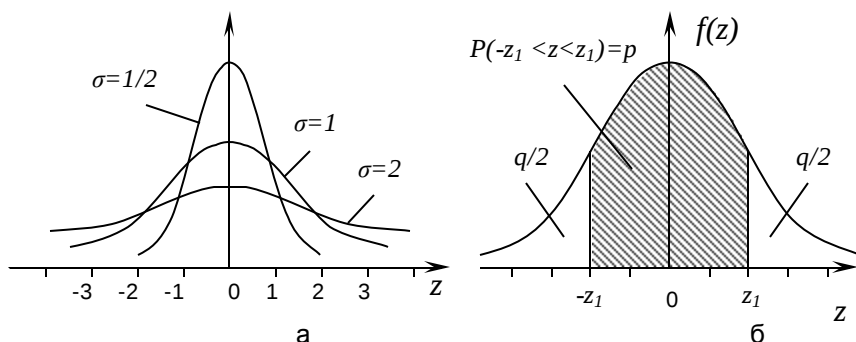


Рис. 2.1. Кривая плотности нормального распределения

Вероятность попадания случайной ошибки в определенный симметричный интервал $(-z_1, z_1)$ графически изображается площадью заштрихованной фигуры (рис. 2.1,б) и может быть вычислена по формуле

$$P(-z_1 < z < z_1) = P(|z| < z_1) = 2\Phi(z_1 / \sigma), \quad (2.6)$$

где
$$\Phi(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-t^2/2} dt = \frac{1}{2} P(|z| < t\sigma).$$

Здесь $t = \frac{z}{\sigma} = \frac{y - y_{ум}}{\sigma}$ – квантиль нормального распределения;

z – ошибка измерения;

x – измеренная величина;

$y_{ист}$ – истинное значение измеряемой величины;

$\Phi(t)$ – интеграл вероятности, или функция Лапласа, значения которого приведены в табл. П2 приложения.

Вероятность попадания случайной ошибки в любой интервал (z_1, z_2) вычисляется по формуле

$$P(z_1 < z < z_2) = \Phi(z_2 / \sigma) - \Phi(z_1 / \sigma) = p_2 - p_1, \quad (2.7)$$

где p – доверительная вероятность, т.е. вероятность того, что значение случайной величины не превысит граничного.

Вероятность того, что случайная ошибка выйдет за границы интервала $(-z_1, z_1)$, равна

$$P(|z| > z_1) = 1 - P(|z| < z_1) = 1 - p = q, \quad (2.8)$$

где q – уровень значимости.

Графически q – это незаштрихованная площадь на рис 2.1,б.

2.2. Оценка истинного значения измеряемой величины

Оценить истинное значение $y_{ист}$ измеряемой величины – это значит:

а) точечная оценка - указать такую функцию $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ от результатов измерений, которая дает достаточно хорошее приближение к значению $y_{ист}$;

б) доверительная оценка - указать границы интервала $(g - \beta_1, g + \beta_2)$, который с заданной вероятностью p покрывает истинное значение $y_{ист}$.

Следует отметить, что в любой задаче, связанной с выполнением измерений, возможны два способа получения точного значения. При использовании первого способа снимается последовательность показаний прибора y и путем сравнения полученных результатов с известным (или калибровочным) значением измеряемой величины $y_{ист}$ находится последовательность отклонений z . Далее определяется точность данной измерительной системы, которая выражается показателем точности, а именно **дисперсией** $Dy = \sigma^2$, а величину σ называют **средним квад-**

ратическим отклонением или **стандартом**. Эта величина определяется по формуле

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{n=1}^{\infty} z^2}{n}}, \quad (2.9)$$

где n – общее число отклонений.

Однако во многих экспериментах нецелесообразно или невозможно установить точное значение. В этом случае прибегают ко второму способу, который состоит в определении точечной оценки истинного значения. Если все измерения проведены с одинаковой точностью, то для этого применяют среднее арифметическое значение по всем отсчетам.

$$y_{uct} \approx \bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n}. \quad (2.10)$$

Полученная оценка будет отличаться от истинного значения на некоторую величину, значительную при малых n . Поэтому более хорошее приближение дает несмещенная оценка дисперсии:

$$Dy \approx S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{n-1}, \quad (2.11)$$

где S – эмпирический стандарт выборки;
 $(n-1)$ – число степеней свободы, равное количеству опытов (измерений) минус единица.

Если заранее известна точность измерения, то симметричная доверительная оценка имеет вид

$$|y_{uct} - \bar{y}| < \beta = t_p \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad (2.12)$$

где n – число измерений;
 t_p – определяется по табл. П2 приложения в соответствии с заданной доверительной вероятностью p (обычно принимают $p=0,95$; $0,99$ или $0,999$) из условия $2\Phi(t)=p$.

Если средняя квадратическая ошибка σ заранее не известна, то вместо нее используют эмпирический стандарт выборки S . При этом доверительная оценка принимает вид

$$|y_{uctm} - \bar{y}| < \beta = t_{p;f} \frac{S}{\sqrt{n}}. \quad (2.13)$$

В данной формуле $t_{p;f}$ - критерий Стьюдента, зависит уже не только от доверительной вероятности p , но и от числа измерений (числа степеней свободы $f=n-1$). Значение этого множителя можно найти в табл. П5 приложения.

Важно заметить, что при неизвестной точности измерения доверительный интервал получается значительно шире, чем при известной точности измерения. Поэтому нельзя использовать эмпирический стандарт выборки S вместо истинного стандарта σ , т.е. множитель $t_{p;f}$ нельзя заменять на t_p , поскольку его значения стремятся к значениям t_p только при неограниченном увеличении числа повторных опытов (измерений) $f \rightarrow \infty$.

Так как выбор оценки доверительной вероятности остается за исследователем, в практике обработки результатов эксперимента широкое распространение получило **правило трех сигм**: *«Отклонение истинного значения измеряемой величины от среднего арифметического значения результатов измерений не превосходит утроенной средней квадратической ошибки этого среднего значения»*.

Таким образом, правило трех сигм представляет собой доверительную оценку:

$$|y_{uctm} - \bar{y}| < \beta = 3 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad \text{или} \quad |y_{uctm} - \bar{y}| < \beta = 3 \frac{S}{\sqrt{n}}.$$

В случае, когда стандарт σ известен, выполнение этого правила наблюдается с доверительной вероятностью $p=0,997$, т.е. в 997 случаях из 1000. Если используется эмпирический стандарт выборки S , то вероятность выполнения этого правила будет зависеть от количества измерений. Например, для $n=5$ невыполнение этого правила будет наблюдаться в 4 случаях из 100.

2.3. Проверка нормальности распределения

Все приведенные выше доверительные оценки как средних значений, так и дисперсий основаны на гипотезе нормальности закона распределения случайных ошибок измерения и поэтому могут применяться лишь до тех пор, пока результаты эксперимента не противоречат этой гипотезе.

Если результаты эксперимента вызывают сомнение в нормальности закона распределения случайных ошибок, то для решения вопроса о пригодности или непригодности нормального закона распределения надо произвести достаточно большое число измерений и применить один из описанных ниже способов.

Критерий соответствия χ^2 («хи-квадрат»). Результаты измерений (разумеется, свободные от систематических ошибок) группируют по интервалам таким образом, чтобы эти интервалы покрывали всю ось $(-\infty, +\infty)$ и чтобы количество данных в каждом интервале было достаточно большим (во всяком случае, не менее пяти, лучше десяти). Для каждого интервала (y_{i-1}, y_i) подсчитывают число m_i результатов измерения, попавших в этот интервал. Затем вычисляют вероятность p_i попадания в этот интервал при нормальном законе распределения вероятностей:

$$p_i = \Phi\left(\frac{y_i - \bar{y}}{S}\right) - \Phi\left(\frac{y_{i-1} - \bar{y}}{S}\right), \quad (2.14)$$

где $\bar{y}$ – среднее арифметическое значение результатов измерения;

S – эмпирический стандарт (средняя квадратическая ошибка);

$\Phi(t)$ – интеграл вероятностей, представленный табл. П2 и 3 приложения.

Наконец, вычисляют сумму:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^l \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i}, \quad (2.15)$$

где l – число всех интервалов $(-\infty, y_1), (y_1, y_2), \dots, (y_{l-1}, +\infty)$;

n – число всех результатов измерений $(n = m_1 + m_2 + \dots + m_l)$;

m_i – число результатов измерений в i -м интервале;

p_i – вероятность попадания в i -й интервал.

Если полученное значение окажется больше критического значения $\chi^2_{p;f}$, указанного в табл. П6 приложения, при некоторой доверительной вероятности p и числе степеней свободы $f=l-3$, то с надежностью p можно считать, что распределение вероятностей случайных ошибок в рассматриваемой серии измерений отличается от нормального. В противном случае для такого вывода нет достаточных оснований.

Однако следует иметь в виду, что даже малая величина расчетного значения χ^2 не может служить доказательством нормальности закона распределения.

Если при произведенном числе измерений критерий χ^2 дал малую надежность, но сомнение в нормальности распределения осталось, то следует увеличить число измерений (в несколько раз!).

Указанное выше число степеней свободы $f=l-3$ относится только к тому случаю, когда оба параметра нормального закона распределения определяются по результатам измерений, т.е. когда вместо точных значений y_{uct} и σ применяются их эмпирические значения $\bar{y}$ и S . Если значение y_{uct} точно известно (например, при измерении эталона), то число степеней свободы равно $f=l-2$, если известны оба параметра y_{uct} и σ , то число степеней свободы равно $f=l-1$. На практике такая ситуация встречается редко, и поэтому для получения числа степеней свободы не менее пяти надо брать число интервалов не менее восьми.

В заключение заметим, что эффективность критерия χ^2 повышается, если в каждый из выделенных интервалов попадает примерно одинаковое количество данных. Это следует учитывать при группировке первичного материала.

Пример 2.1. Приведем пример расчета вероятностей для применения критерия χ^2 . Возьмем интервальный ряд данных, указанных в первом столбце табл. 2.1. Значения параметров нормального распределения для него составляют $\bar{y}=8,63$, $S=0,127$. Для применения критерия χ^2 объединим крайние интервалы, чтобы число данных в каждом интервале стало не менее пяти. Полученные данные представлены в первых двух столбцах табл. 2.1. Крайние интервалы взяты бесконечными.

В третьем столбце подсчитаны отношения:

$$t_i = \frac{y_i - \bar{y}}{S} = \frac{y_i - 8,63}{0,127}.$$

В четвертом столбце приведены соответствующие значения интеграла вероятностей $\Phi(t_i)$. По значениям $\Phi(t_i)$ в пятом столбце вычислены вероятности p_i как разности соответствующих значений:

$$p_i = \Phi(t_i) - \Phi(t_{i-1}).$$

Таблица 2.1

Результаты расчета примера 2.1

Интервалы (t_{i-1}, t_i)	m_i	t_i	$\Phi(t_i)$	p_i	$m_i - np_i$	$\frac{(m_i - np_i)^2}{np_i}$
$(-\infty; 8,425)$	7	-1,614	-0,4467	0,0533	1,67	0,523
$(8,425; 8,475)$	5	-1,220	-0,3888	0,0579	-0,79	0,108
$(8,475; 8,525)$	8	-0,827	-0,2959	0,0929	-1,29	0,179
$(8,525; 8,575)$	10	-0,433	-0,1676	0,1283	-2,83	0,624
$(8,575; 8,625)$	18	-0,039	-0,0156	0,1520	2,80	0,516
$(8,625; 8,675)$	17	0,354	0,1383	0,1539	1,61	0,168
$(8,675; 8,725)$	12	0,748	0,2728	0,1345	-1,45	0,157
$(8,725; 8,775)$	9	1,142	0,3733	0,1005	-1,05	0,110
$(8,775; 8,825)$	7	1,536	0,4377	0,0644	0,56	0,048
$(8,825; +\infty)$	7	$+\infty$	0,5000	0,0623	0,77	0,095
Суммы	$100=n$	—	—	1,0000	—	$2,528 = \chi^2$

При вычислении вероятности p_∞ учтено, что $\Phi(-\infty) = -0,5$. Последние столбцы таблицы не нуждаются в пояснении. Сумма чисел последнего столбца дает нужное значение $\chi^2 = 2,528$. Сравнение этого значения с критическим значением $\chi_{0,9;7}^2 = 12,0$ (при числе степеней свободы $f = 10 - 3 = 7$ и доверительной вероятности $p = 0,9$) показывает, что нет оснований сомневаться в нормальности распределения.

Существует множество сложных и изящных математических методов, с помощью которых можно получить ответ на вопрос: следуют ли отклонения приближенно нормальному или хотя бы симметричному закону распределения? Однако большинство инженеров не имеет ни времени, ни вычислительных средств, ни терпения для их применения.

Нанесение отклонений на вероятностную бумагу является быстрым и простым способом проверки на нормальность. Это графическая бумага, на которой нормально распределенная совокупность отсчетов образует прямую линию. Вероятностную бумагу можно легко изготовить самому с помощью стандартной графической бумаги (с линейными шкалами) следующим образом.

По оси X откладываются отклонения, при этом нуль помещается в середине листа и шкала выбирается таким образом, чтобы охватить весь интервал значений имеющихся данных. В сере-

дине шкалы по оси Y наносится точка, соответствующая 50 %. Вниз от нее откладываются восемь равных интервалов в убывающем порядке: 38,8; 27,6; 19,8; 13,6; 7,9; 4,5; 2,4 и 1,2%. Выше точки, соответствующей 50 %, откладываются еще восемь одинаковых интервалов в возрастающем порядке: 61,2; 72,4; 80,2; 87,4; 92,1; 95,5; 97,6 и 98,8 %. Шкала по оси Y представляет процент отсчетов, имеющих отклонение, меньшее данного значения X .

Пример 2.2. Определяется твердость по Бринелю на образце, твердость которого известна. Получены следующие отклонения от точного значения диаметра углубления от индентора: одно отклонение - 0,20 мм; одно отклонение - 0,10 мм; четыре отклонения - 0,05 мм; тринадцать нулевых отклонений; семь отклонений +0,05 мм; четыре отклонения +0,10 мм и одно отклонение +0,20 мм. Все результаты округлены до 0,05 мм. Распределены ли данные этой выборки по нормальному закону?

Решение. Всего произведено 31 измерение. По этим данным составим табл. 2.2, которая позволила бы наносить их непосредственно на вероятностную бумагу.

Таблица 2.2

Результаты расчета для нанесения на вероятностную бумагу

Отклонение	Число отклонений, не превышающих заданного	Процент отклонений, не превышающих заданного
-0,20	1	3,2
-0,15	1	3,2
-0,10	2	6,4
-0,05	6	19,4
0	19	61,2
+0,05	26	84
+ 0,10	30	97
+ 0,15	30	97
-0,20	31	100

Данные из первого и третьего столбцов этой таблицы нанесены на график, изображенный на рис 2.2.

Хотя полученная кривая имеет неправильную форму, она проходит вблизи точки ($X=0$, $Y=50\%$), которую должно пересекать любое симметричное распределение, включая нормальное. Заме-

тим, что на концах кривой важную роль играет наличие или отсутствие одной - двух точек. Если пренебречь четырьмя внешними точками, то пять внутренних точек образуют линию, довольно близкую к прямой. Это свидетельствует о том, что рассматриваемая выборка данных является частью бесконечной генеральной совокупности, имеющей нормальное (или близкое к нему) распределение.

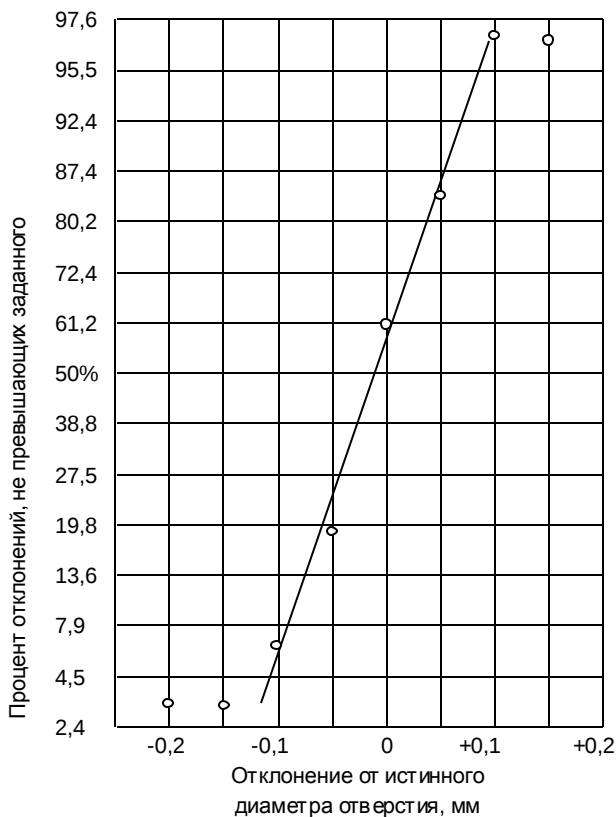


Рис. 2.2. Построение прямой по пяти внутренним точкам по данным примера 2.2 (внешние точки игнорируются)

Для правильной проверки на нормальность необходимо определенное мастерство и навык. Нас может интересовать, насколько «прямой» должна быть линия и насколько близко от цен-

тральной точки ($X=0$, $Y=50\%$) она должна проходить. Ответ на эти вопросы зависит от прибора, характера эксперимента и числа данных, имеющихся для построения графика. Единственное, что можно здесь сделать, - это указать два очевидных признака отклонения от нормальности, обнаруживаемые с помощью графика, построенного на вероятностной бумаге.

В зависимости от того, имеет кривая очень острую или очень пологую вершину, она будет *островершинной* или *плосковершинной*. При этих условиях графики на вероятностной бумаге будут выглядеть, как показано на рис. 2.3. Известны также многие другие отклонения от нормальности.

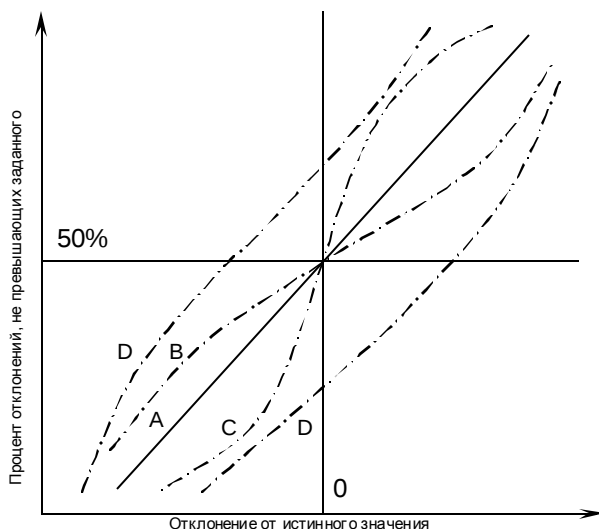


Рис. 2.3. Графики, построенные на вероятностной бумаге для следующих распределений: *A* – нормальное; *B* – симметричное распределение, более плосковершинное, чем нормальное; *C* – симметричное распределение, более островершинное, чем нормальное; *D* – два асимметричных распределения

Асимметрия распределения имеет место, когда кривая обладает более крутым наклоном в одну сторону относительно максимума, чем в другую. В случае асимметричного распределения на вероятностной бумаге можно получить почти прямую линию, но она никогда не пройдет через центральную точку ($X=0$, $Y=50\%$).

Существует множество сложных проверок распределения на нормальность, асимметрию, плосковершинность и т.д. Все они довольно утомительны, требуют большого числа данных (до 250 точек для отдельных проверок) и для подавляющего большинства инженерных экспериментов их применение нецелесообразно.

2.4. Методы исключения грубых ошибок

При получении результата измерения, резко отличающегося от всех других результатов, естественно возникает подозрение, что допущена грубая ошибка. В этом случае необходимо сразу же проверить, не нарушены ли основные условия измерения.

Если же такая проверка не была сделана вовремя, то для исключения «выскакивающего» значения необходимо провести сравнение его с остальными результатами измерений. Для этого применяются различные критерии, в зависимости от того, известна или нет средняя квадратическая ошибка σ измерений (предполагается, что все измерения проводятся с одной и той же точностью и независимо друг от друга).

Метод исключения при известной σ . Сравнение проводят по следующему критерию:

$$t = \frac{|y_* - \bar{y}|}{\sigma \sqrt{(n+1)/n}}, \quad (2.16)$$

где y_* – проверяемое «выскакивающее» значение;

$\bar{y}$ – среднее арифметическое значение;

n – количество «правильных» измерений.

Далее определяется вероятность того, что значение y_* не содержит грубой ошибки (что ошибка результата y_* только случайная):

$$q_{расч} = 1 - 2\Phi(t). \quad (2.17)$$

Если подсчитанная вероятность окажется очень малой, то проверяемое значение содержит грубую ошибку и его следует исключить из дальнейшей обработки результатов измерений. На практике обычно применяют один из трех уровней значимости: $q=5\%$, 1% и $0,1\%$ – исключаются ошибки, вероятность появления которых меньше $0,05$, $0,01$ и $0,001$ соответственно.

При выбранном уровне значимости q «выскакивающее» значение считается ошибочным, если $q_{расч} < q$. В этом случае гово-

рят, что значение y_* содержит грубую ошибку с вероятностью $p = 1 - q$.

Пример 2.3. Пусть среди 41 результата независимых измерений, произведенных со средней квадратической ошибкой $\sigma = 0,133$, обнаружено одно «выскакивающее» значение $y_* = 6,866$. Среднее из остальных 40 результатов составляет $\bar{y} = 6,500$. Можно ли считать, что «выскакивающее» значение содержит грубую ошибку и исключить его из дальнейшей обработки?

Решение. Разность между «выскакивающим» значением и средним составляет

$$y_* - \bar{y} = 0,366.$$

Вычислим критерий t :

$$t = \frac{0,366}{0,133\sqrt{41/40}} = 2,72.$$

По табл. ПЗ приложения для $t = 2,72$ оцениваем вероятность:

$$q_{расч} = 0,0066 < 0,007.$$

Следовательно, с вероятностью $p = 1 - q = 0,993$ (т.е. 99,3%) можно считать, что значение y_* содержит грубую ошибку, и исключить это значение из дальнейшей обработки результатов измерения.

Подчеркнем, что указанный прием применяется только тогда, когда величина средней квадратической ошибки σ точно известна заранее.

Метод исключения при неизвестной σ . Если величина σ заранее не известна, то она оценивается приближенно по результатам измерений, т.е. вместо нее применяют эмпирический стандарт:

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}. \quad (2.18)$$

Для определения брака в данном случае используют критерий $t_{n;p}$:

$$t = \frac{|y_* - \bar{y}|}{S} \geq t_{n;p}. \quad (2.19)$$

Значения $t_{n;p}$ берутся из табл. П4 приложения, если табличное значение окажется больше расчетного, то результат можно считать бракованным с вероятностью p .

Следует заметить, что если вероятность окажется недостаточной, то это свидетельствует не об отсутствии грубой ошибки, а лишь об отсутствии достаточных оснований для исключения «выскакивающего» значения.

Пример 2.4. Пусть для n результатов независимых равноточных измерений некоторой величины среднее значение равно $\bar{y} = 6,500$, а эмпирический стандарт $S = 0,133$, и пусть $(n+1)$ -е измерение дало результат $y_* = 6,866$. Можно ли исключить этот результат из дальнейшей обработки?

Решение. Здесь отношение равно $t = 0,366/0,133 = 2,75$.

Если число приемлемых результатов $n = 40$, то полученное отношение превосходит критическое значение $t_{40;0,99} = 2,742$ при надежности $p = 0,99$ и значение y_* можно исключить с надежностью вывода, большей $0,99$.

Если же число приемлемых результатов $n = 6$, то полученное отношение меньше критического значения $t_{6;0,95} = 2,78$ даже при надежности $p = 0,95$ и значение y_* исключать не следует.

Контрольные вопросы

1. Назовите основные виды ошибок.
2. Что понимается под законом распределения?
3. Что значит оценить истинное значение измеряемой величины?
4. Чем характеризуется точность измерительной системы?
5. Сформулируйте «правило трех сигм».
6. Какими способами можно проверить «нормальность» распределения?
7. Назовите и объясните методы исключения грубых ошибок измерения.

3. ПРОВЕРКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ

3.1. Сравнение средних значений. Критерий Стьюдента - t_p

Целью эксперимента нередко бывает выявление различий между значениями определенного параметра в разных объектах исследования. Например, в разных условиях (например, на разном оборудовании или при разной технологии) изготавливаются изделия с одними и теми же заданными номинальными значениями какого-либо параметра, а проверка обнаруживает расхождение между средними значениями этих параметров; здесь важно выяснить, имеем ли мы дело с различным качеством изделий или со случайными отклонениями.

Для выяснения вопроса о случайном или неслучайном расхождении значений некоторого параметра у проводят две серии экспериментов (измерений) и для каждой из них подсчитывают среднее значение параметра $\bar{y}_1$ и $\bar{y}_2$. Вопрос сводится к тому, когда считать разность между этими средними достаточно большой для того, чтобы иметь практическую уверенность в неслучайном происхождении обнаруженных различий.

Сравнение средних при известных дисперсиях

Пусть произведено n_1 независимых равнооточных измерений в первой серии и n_2 – во второй, причем заранее известны дисперсии ошибок в первой и во второй сериях (σ_1^2 и σ_2^2 соответственно). Средние значения результатов измерений в первой и во второй сериях соответственно $\bar{y}_1$ и $\bar{y}_2$. Измерения предполагаются независимыми и, по крайней мере в пределах каждой серии, равнооточными. Распределение ошибок измерения предполагается нормальным.

Для решения вопроса о случайном или неслучайном расхождении этих средних значений подсчитываем отношение:

$$|t| = \left| \frac{\bar{y}_1 - \bar{y}_2}{\sqrt{\sigma_1^2 / n_1 + \sigma_2^2 / n_2}} \right| > t_p. \quad (3.1)$$

Далее задаем желаемую вероятность вывода p и по ней находим в табл. ПЗ приложения соответствующее значение критерия Стьюдента t_p (например, $t_{0,99} = 2,576$).

Если представленное условие выполняется, то расхождение средних значений можно считать неслучайным (значимым) с надежностью вывода p . В противном случае оно может быть объяснено случайными отклонениями.

Пример 3.1. Пусть две серии в 25 и 50 измерений, произведенных со средней квадратической ошибкой $\sigma=1,20$, дали средние значения $\bar{y}_1=23,56$ и $\bar{y}_2=22,80$. Требуется сравнить эти средние и решить вопрос о значимости их расхождения.

Решение. Подсчитываем критерий t и сравниваем с табличным значением t_p :

$$|t| = \left| \frac{23,56 - 22,80}{1,20 \sqrt{1/25 + 1/50}} \right| = 2,59 > t_{0,99} = 2,576.$$

Вывод: расхождение средних можно считать значимым с надежностью вывода $p=0,99$, т.е. 99%.

Сравнение средних при неизвестной дисперсии

Если дисперсии ошибок заранее не известны, то сравнение средних производится только при добавочном предположении, что дисперсии ошибок в обеих сериях измерений одинаковы (это предположение либо принимается без проверки, например, когда две серии измерений производятся одним и тем же прибором, либо проверяется по специальным критериям). В этом случае для оценки неизвестной дисперсии σ^2 используется эмпирический стандарт S^2 .

Пусть с одной и той же точностью произведены две серии независимых измерений, причем n_1 измерений в первой серии дали среднее значение $\bar{y}_1$ и S_1^2 , а n_2 измерений во второй серии дали соответственно $\bar{y}_2$ и S_2^2 . Для решения вопроса о случайном или неслучайном расхождении средних значений подсчитываем отношение:

$$|t| = \left| \frac{\bar{y}_1 - \bar{y}_2}{S \sqrt{1/n_1 + 1/n_2}} \right| > t_{p; f}; \quad (3.2)$$

$$S = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{(n_1 - 1) + (n_2 - 1)}}. \quad (3.3)$$

Далее задаем желаемую вероятность вывода p и по табл. П5 приложения находим значение $t_{p;f}$, соответствующее заданной вероятности p и числу степеней свободы $f = n_1 + n_2 - 2$.

Если абсолютная величина отношения t превосходит найденное значение критерия Стьюдента – $t_{p;f}$, то расхождение средних значений можно считать неслучайным (значимым) с надежностью вывода p . В противном случае нет оснований считать расхождение значимым.

Заметим, что если различие между расчетным и табличным значениями мало, то целесообразно увеличить число измерений для получения более надежного вывода (тем более, что значения $t_{p;f}$ уменьшаются с увеличением f).

Пример 3.2. Пусть две серии в 25 и 50 равноточных измерений дали средние значения соответственно $\bar{y}_1 = 23,56$ и $\bar{y}_2 = 22,80$ и средние квадратические отклонения от них $S_1 = 1,10$ и $S_2 = 1,25$. Требуется сравнить средние значения и решить вопрос о значимости их расхождения с надежностью $p = 0,99$.

Решение. Подсчитываем величину t :

$$S \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} = \sqrt{\frac{1}{73} (24 \cdot 1,1^2 + 49 \cdot 1,25^2)} \sqrt{\frac{1}{25} + \frac{1}{50}} = 0,298;$$

$$t = \frac{23,56 - 22,80}{0,298} = 2,55.$$

Затем, по табл. П5 приложения, при заданной надежности $p = 0,99$ и числе степеней свободы $f = 25 + 50 - 2 = 73$ находим значение $t_{0,99;73}$. Поскольку в таблице не приведены значения для $f = 73$, то оно вычислено с помощью линейной интерполяции. Для этого в таблице находим два значения при $p = 0,99$:

для $f = 70$ имеем $t_{0,99;70} = 2,648$,

для $f = 80$ имеем $t_{0,99;80} = 2,639$.

С помощью этих значений вычисляем значение для $f = 73$:

$$t_{0,99;73} = 2,648 - 3 \cdot \frac{(2,648 - 2,639)}{10} = 2,645.$$

Так как вычисленное значение t оказалось меньше этого числа, то мы не можем считать расхождение средних значимым.

С другой стороны, по той же табл. П5 приложения, но при надежности $0,95$ мы находим значение $t_{0,95;73} = 2,18$, которое уже меньше вычисленного отношения t . Если бы нас могла удовлетворить надежность вывода $0,95$, то мы могли бы считать расхождение средних значимым. Если же нас такая надежность не удовлетворяет, то можно увеличить число измерений для более точного определения значимости расхождения.

3.2. Сравнение двух дисперсий. Критерий Фишера (F – критерий)

При выполнении измерений в различных условиях возникает задача сравнения точности измерений. В частности, возникает задача сравнения точности различных измерительных приборов. Отметим также, что и в задачах сравнения средних иногда приходится сначала проверять гипотезу о равенстве дисперсий.

Пусть по результатам двух рядов измерений получены эмпирические дисперсии: S_1^2 при числе степеней свободы f_1 и S_2^2 при числе степеней свободы f_2 . Условимся, что индекс 2 относится к большей эмпирической дисперсии: $S_2 > S_1$.

Для решения вопроса о случайном или неслучайном расхождении дисперсий рассматривают отношение большей эмпирической дисперсии к меньшей:

$$\frac{S_2^2}{S_1^2} = F > 1. \quad (3.4)$$

Затем задают желаемую надежность вывода $p=0,95$ или $p=0,99$ и по табл. П7 приложения находят критическое значение критерия Фишера – $F_{f_2;f_1}$, соответствующее данным числам степеней свободы f_1 и f_2 .

Если расчетное значение, подсчитанное по результатам измерений, оказывается больше критического значения, то расхождение дисперсий считают неслучайным (*значимым*) с надежностью p и предположение о равенстве дисперсий отвергают. Другими словами, точность измерений для двух сравниваемых рядов измерений существенно отличается. В противном случае для такого утверждения нет достаточных оснований.

Пример 3.3. Пусть старый измерительный прибор, на котором произведено 200 измерений, имеет точность, определяемую

эмпирической дисперсией $S_2^2 = 3,82$ (кв. единиц). Новый измерительный прибор при первых пятнадцати измерениях дал эмпирическую дисперсию $S_1^2 = 2,00$ (кв. единиц). Можно ли считать, что новый прибор дает существенно лучшую точность, чем старый?

Решение. Сравнение дисперсий по критерию Фишера дает $F = S_2^2 / S_1^2 = 1,91$, причем числа степеней свободы соответственно равны $f_2 = 200 - 1 = 199$ и $f_1 = 15 - 1 = 14$.

Так как полученное здесь отношение меньше критического даже при надежности 0,95 (что по табл. П7 приложения составляет более $F_{199;14} = 2,13$), то приведенные данные не дают оснований считать точность нового прибора лучшей, чем точность старого.

Для окончательного решения вопроса надо произвести большее число измерений новым прибором. Если, например, при трех сериях по пятнадцати измерений среднее значение дисперсии останется тем же $S_1^2 = 2,00$, то, учитывая увеличение числа степеней свободы до $f_1 = 3 \times 14 = 42$, мы найдем, что с надежностью 0,99 дисперсия нового прибора существенно меньше дисперсии старого, т.е. точность нового прибора выше.

3.3. Выделение большей дисперсии из многих. Критерий Кохрена (G – критерий)

Пусть среди нескольких приборов (нескольких серий измерений) обнаружен прибор (серия измерений), эмпирическая дисперсия которого S^2 заметно больше остальных. Задача заключается в том, чтобы выяснить, можно ли считать отличие выделенной дисперсии S^2 от остальных случайным или это отличие следует считать существенным (значимым). Для решения задачи поступают следующим образом. Производят каждым из N испытуемых приборов одинаковое число n измерений, подсчитывают эмпирические дисперсии $S_1^2, S_2^2, \dots, S_N^2$ ($S_1^2 > S_i^2$ при $i > 1$) и сравнивают наибольшую дисперсию S_1^2 с суммой всех дисперсий по формуле

$$G = \frac{S_1^2}{S_1^2 + S_2^2 + \dots + S_N^2} = \frac{S_1^2}{\sum_{i=1}^N S_i^2}. \quad (3.5)$$

Если отношение (3.5) оказывается больше критического значения критерия Кохрена - G , приведенного в табл. П8 приложения, то отличие первой дисперсии от остальных считается существен-

ным, т.е. считают первый прибор (первую серию измерений) менее точным, чем остальные. В противном случае для такого утверждения нет достаточных оснований.

В табл. П8 приложения критические значения отношения $G_{p;N;f}$ приведены для двух доверительных вероятностей $p=0,95$ и $p=0,99$ и для различных сочетаний чисел N (числа приборов, серий измерений) и $f=n-1$ (числа степеней свободы).

Пример 3.4. Пусть на шести приборах произведено по семь измерений, которые дали эмпирические дисперсии:

$$3,82; 1,70; 1,30; 0,92; 0,78 \text{ и } 0,81.$$

Сравнивая первую дисперсию с суммой всех дисперсий, вычисляем:

$$G = \frac{3,82}{3,82 + 1,70 + 1,30 + 0,92 + 0,78 + 0,81} = 0,41.$$

Это отношение оказывается меньше критического значения при $N=6$ и $f=7-1=6$ даже для доверительной вероятности $p=0,95$ (табличное значение критического параметра $G_{p;N;f} = 0,418$). Поэтому нет оснований считать дисперсию $S_1^2 = 3,82$ существенно больше остальных. Заметим, что если бы такие же данные встретились при $n=11$ измерениях, то с надежностью, большей $0,99$, можно было бы считать первую дисперсию существенно больше остальных (соответствующее критическое значение при $f=10$ и $p=0,99$ составляет $0,408$).

Описанный выше критерий применяется также и для проверки *однородности* ряда дисперсий, т.е. для проверки того, что все эмпирические дисперсии $S_1^2, S_2^2, \dots, S_N^2$ относятся к выборкам из совокупностей с одной и той же теоретической дисперсией σ^2 . Если расчетное значение G - критерия оказывается больше критического значения, то надо считать, что гипотеза об однородности ряда дисперсий не согласуется с эмпирическими данными.

Контрольные вопросы

1. Опишите процедуру сравнения средних значений измерений при известной дисперсии.
2. Опишите процедуру сравнения средних значений, если дисперсия измерения неизвестна.
3. Как проверить однородность ряда дисперсий?
4. Как оценить значимость расхождения двух дисперсий?

4. ОСНОВЫ ПЛАНИРОВАНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА

4.1. Полный факторный эксперимент

Условимся, что мы проводим активный эксперимент и можем распоряжаться факторами. Факторов может быть сколько угодно, но использовать в качестве факторов можно только независимые переменные, т.е. такие, каждую из которых можно менять в некоторых пределах, не затрагивая другие. Независимость переменных должна быть установлена совершенно определенно до начала решения задачи.

Следующее условие –, факторы должны быть измеряемыми, причем результаты измерений должны иметь численное выражение. При этом можно использовать качественные факторы, но в этом случае надо обязательно приписать каждому различимому уровню качественного фактора какое-либо число (например, в качестве фактора могут фигурировать станки, оборудованные электроприводами различных типов; в этом случае мы припишем каждому станку определенный номер). Итак, мы должны иметь возможность изменять каждый из факторов в нужном нам диапазоне, фиксировать их на требуемых уровнях и, зафиксировав, знать точно значение фактора, выраженное в принятых для измерения единицах.

Диапазоны изменения всех факторов, в которых мы интересуемся их влиянием на функцию Y , задают область определения функции Y . Эти диапазоны могут быть широкими, ограниченными лишь физическими соображениями или узкими. Так или иначе, для каждого из факторов X_i мы знаем граничные значения $X_{i \max}$ и $X_{i \min}$.

Если принять, что каждому фактору соответствует координатная ось (это можно сделать, так как факторы независимы), а образованное таким образом пространство назвать факторным пространством, то из сказанного ранее следует, что, назначив диапазоны изменения факторов, мы задали область определения функции Y в факторном пространстве. На рис. 4.1 показана область (прямоугольник) для случая двух факторов X_1 и X_2 . Можно изобразить аналогичную область в трехмерном факторном пространстве или представить в многомерном (изобразить его невозможно).

Еще одно условие, которое должно неукоснительно выполняться при постановке задачи, – совместимость факторов. Диапазоны изменения факторов нужно выбирать так, чтобы любое соче-

тание факторов в этих диапазонах было реализуемо и не приводило к абсурду.

Факторы $X_1, X_2, \dots, X_n$ в общем случае размерные и имеют самые различные размерности и порядки. Это может привести к серьезным неудобствам в поиске коэффициентов математической модели. Поэтому обычно не работают с истинными значениями факторов, а производят предварительно операцию кодирования факторов, представляющую собой линейное преобразование факторного пространства.

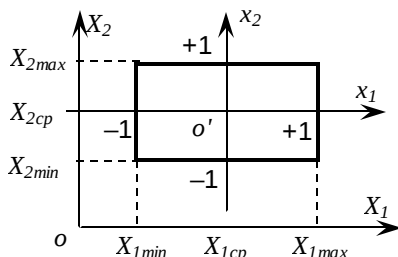


Рис. 4.1. Область определения (область экспериментирования) функции двух переменных в истинных и кодированных значениях

Для осуществления **операции кодирования** необходимо прежде всего выбрать исходную область экспериментирования, т.е. задать верхние и нижние пределы изменения каждого фактора в ходе эксперимента X_{imax} и X_{imin} . Тогда операция кодирования сводится к переносу начала координат факторного пространства в точку с координатами $X_{1cp}, X_{2cp}, \dots, X_{ncp}$ (см. т. o' на рис. 4.1), где

$$X_{icp} = \frac{X_{imin} + X_{imax}}{2}. \quad (4.1)$$

Значение каждого фактора нового масштаба будет соответствовать «-1» для X_{imin} и «+1» для X_{imax} . Факторы в новом масштабе x_i (в дальнейшем **кодированные значения** факторов) связаны с факторами в исходном натуральном масштабе (с **истинными значениями** факторов) очевидными соотношениями:

$$x_i = \frac{X_i - X_{icp}}{X_{icp} - X_{imin}} = \frac{X_i - X_{icp}}{X_{imax} - X_{icp}} = \frac{2X_i - X_{imax} - X_{imin}}{X_{imax} - X_{imin}}. \quad (4.2)$$

Значения $X_{imax} - X_{icp} = X_{icp} - X_{imin}$ часто называют **интервалами варьирования факторов**.

Если какой-либо из факторов изменяется дискретно, то операция кодирования сводится просто к приписыванию каждому возможному уровню фактора чисел, лежащих в диапазоне от -1 до $+1$. Например, при двух уровнях это будут числа -1 и $+1$, при трех $-1, 0, +1$ и т.п.

В ряде случаев экспериментальные точки могут находиться и вне исходной области экспериментирования, т.е. возможны ситуации, когда $|x_i| > 1$, но при этом такие точки не должны выходить за границы области определения функции Y . Произведя операцию кодирования факторов с учетом выбранных пределов их изменения в эксперименте, мы избегаем возможных трудностей, связанных с различиями в их размерностях.

Рассмотрим прежде всего простейший случай, когда в задаче варьируются только два фактора: x_1 и x_2 , причем каждый на двух уровнях $+1$ и -1 . Все возможные комбинации факторов будут исчерпаны в следующих четырех опытах, указанных в табл. 4.1. В 1-м опыте оба фактора находятся на верхнем уровне; во 2-м фактор x_1 – на нижнем, а фактор x_2 – на верхнем и т.д. Такие таблицы обычно называют **матрицами планирования экспериментов**. В общем случае эксперимент, в котором реализуются все возможные сочетания уровней факторов, называют **полным факторным экспериментом** (ПФЭ). Если число уровней каждого фактора равно двум, то число опытов полного факторного эксперимента составляет $N = 2^k$, где k – число факторов, 2 – число уровней.

Таблица 4.1

Матрица полного факторного эксперимента 2^2

Номер опыта	x_1	x_2	y
1	$+1$	$+1$	y_1
2	-1	$+1$	y_2
3	$+1$	-1	y_3
4	-1	-1	y_4

Существует несколько способов построения матриц полного факторного эксперимента. Один из наиболее простых заключается в следующем: при любом k необходимо повторить дважды матрицу планирования для случая $(k - 1)$ сначала при значении k -го фактора на верхнем уровне, а затем на нижнем. Последовательное достраивание матриц полного факторного эксперимента при увеличении k от 2 до 5 показано в табл. 4.2.

Таблица 4.2

Достраивание матриц полного факторного эксперимента

План				Номер опыта	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2 ⁵	2 ⁴	2 ³	2 ²	1	+	+	+	+	+
				2	-	+	+	+	+
				3	+	-	+	+	+
				4	-	-	+	+	+
				5	+	+	-	+	+
				6	-	+	-	+	+
				7	+	-	-	+	+
				8	-	-	-	+	+
				9	+	+	+	-	+
				10	-	+	+	-	+
				11	+	-	+	-	+
				12	-	-	+	-	+
				13	+	+	-	-	+
				14	-	+	-	-	+
				15	+	-	-	-	+
				16	-	-	-	-	+
				17	+	+	+	+	-
				18	-	+	+	+	-
				19	+	-	+	+	-
				20	-	-	+	+	-
				21	+	+	-	+	-
				22	-	+	-	+	-
				23	+	-	-	+	-
				24	-	-	-	+	-
				25	+	+	+	-	-
				26	-	+	+	-	-
				27	+	-	+	-	-
				28	-	-	+	-	-
				29	+	+	-	-	-
				30	-	+	-	-	-
				31	+	-	-	-	-
				32	-	-	-	-	-

Для простоты записи единицы здесь опущены, оставлены только знаки. Первые отчеркнутые четыре опыта представляют собой матрицу 2^2 . Далее они еще раз повторены, и в столбце x_3 для первой матрицы 2^2 проставлены четыре знака «+», для второй - четыре знака «-».

Таким образом, отчеркнутые восемь опытов представляют собой уже матрицу планирования 2^3 . Затем процедура повторяется до построения матрицы 2^5 .

Отметим следующие важные свойства рассмотренных планов. Во-первых, они **симметричны** относительно центра эксперимента:

$$\sum_{u=1}^N x_{iu} = 0; \quad i = 1, 2, 3, \dots, k, \quad (4.3)$$

где i – номер фактора;

u – номер опыта;

N – число опытов,

т.е. сумма элементов любого столбца матрицы планирования равна нулю.

Во-вторых, эти планы **нормированы**:

$$\sum_{u=1}^N x_{iu}^2 = N; \quad i = 1, 2, 3, \dots, k, \quad (4.4)$$

т.е. сумма квадратов элементов любого столбца равна числу опытов.

В-третьих, они **ортогональны**:

$$\sum_{u=1}^N x_{iu} x_{ju} = 0; \quad i \neq j; \quad i, j = 1, 2, 3, \dots, k, \quad (4.5)$$

т.е. сумма почленных произведений любых столбцов матрицы равна нулю.

Четвертое свойство называется **рототабельностью**, т.е. точки в матрице планирования подбираются так, что точность предсказания значения искомой функции одинакова на равных расстояниях от центра эксперимента и не зависит от направления.

Рассмотрим теперь вид математической модели, которую можно построить после реализации опытов полного факторного эксперимента.

Запишем еще раз матрицу полного факторного эксперимента 2^2 (табл. 4.3).

Таблица 4.3

Расширенная матрица полного факторного эксперимента 2^2

Номер опыта	x_0	x_1	x_2	$x_1 x_2$	y
1	2	3	4	5	6
1	+1	+1	+1	+1	y_1
2	+1	-1	+1	-1	y_2
3	+1	+1	-1	-1	y_3
4	+1	-1	-1	+1	y_4

Здесь планом эксперимента являются, по сути дела, лишь столбцы 3 и 4. Столбец 6 содержит результаты опытов. Остальные столбцы - вспомогательные.

Начнем строить линейную модель:

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^k b_i \cdot x_i, \quad (4.6)$$

или для случая двух факторов:

$$y = b_0 + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2. \quad (4.7)$$

Отметим, что, вообще говоря, любую модель из рассматриваемых можно считать линейной. Запишем, например, общий вид полинома второй степени от k факторов:

$$y = b_0 + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + \dots + b_k \cdot x_k + b_{12} \cdot x_1 \cdot x_2 + \dots + b_{(k-1)k} \cdot x_{k-1} \cdot x_k + b_{11} \cdot x_1^2 + \dots + b_{kk} \cdot x_k^2. \quad (4.8)$$

Если ввести фиктивную переменную $x_0 = 1$ и провести замену нелинейных членов следующим образом:

$$\begin{aligned} x_1 \cdot x_2 &= x_{k+1}; & x_1^2 &= x_{k+c_k^2+1}; \\ x_1 \cdot x_3 &= x_{k+2}; & x_2^2 &= x_{k+c_k^2+2}; \\ \dots & & \dots & \\ x_{k-1} \cdot x_k &= x_{k+c_k^2}; & x_k^2 &= x_{k+c_k^2+k}, \end{aligned}$$

(c_k^2 – число сочетаний из k по 2), то получим однородное линейное уравнение

$$y = \frac{k + c_k^2 + k}{\sum_{i=0}^{k+c_k^2+k}} b_i \cdot x_i. \quad (4.9)$$

Таким образом, будем рассматривать модели, может быть и нелинейные по факторам, но всегда линейные по неизвестным коэффициентам.

Для вычисления коэффициентов модели (4.6) обычно используют **метод наименьших квадратов**. Полученные с его помощью оценки коэффициентов обладают некоторыми оптимальными в статистическом смысле свойствами: состоятельностью, несмещенностью, эффективностью и достаточностью. Оценка коэффициента **состоятельна**, если при увеличении объема выборки она приближается к истинному значению коэффициента; **не смещена**, если математическое ожидание ее равно оцениваемому значению коэффициента; **эффективна**, если оценка характеризуется минимальной дисперсией; **достаточна**, если включает максимум информации о коэффициенте.

Вывод формул для подсчета коэффициентов модели приведен далее в п. 5.4. В данном случае их можно вычислить по простой формуле

$$b_i = \frac{\sum_{u=1}^N x_{iu} y_u}{N}; \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots, k. \quad (4.10)$$

Таким образом, способ расчета коэффициентов в данном случае очень прост: для подсчета любого b_i столбцу y следует приписать знаки соответствующего столбца x_i , сложить значения отклика с этими знаками и результат разделить на число опытов матрицы планирования.

Рассчитанные коэффициенты в данном случае указывают на силу влияния факторов. Чем больше численная величина коэффициента, тем большее влияние оказывает фактор. С увеличением фактора величина отклика увеличивается, если коэффициент имеет знак плюс, и уменьшается, если коэффициент имеет знак минус. Величина коэффициента соответствует вкладу данного фактора в величину отклика при переходе фактора с основного уровня на верхний или нижний. Коэффициенты b_i называют **линейными** (главными или основными) **эффектами** фактора.

Поскольку коэффициенты оценены независимо друг от друга, величина любого эффекта не зависит от того, какие величины имеют другие эффекты.

Теперь мы можем построить линейную модель, однако после реализации опытов полного факторного эксперимента можно оценить некоторые члены и более сложной модели.

В частности, в рассматриваемом примере с двумя факторами полная квадратичная модель имеет вид

$$y = b_0 + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + b_{12} \cdot x_1 \cdot x_2 + b_{11} \cdot x_1^2 + b_{22} \cdot x_2^2.$$

Уже получены оценки трех коэффициентов (b_0, b_1 и b_2), но опытов сделано четыре (см. табл. 4.3). Какой же из квадратичных эффектов (b_{12}, b_{11} и b_{22}) можно оценить, пользуясь планом 2^2 , указанным в табл. 4.3?

Для расчета коэффициента b_{12} составлен (перемножением элементов соответствующих столбцов) и записан в табл. 4.3 столбец $x_1 \cdot x_2$. Этот столбец не похож ни на какой другой столбец матрицы, а потому по формуле (4.10) можно рассчитать коэффициент b_{12} :

$$b_{12} = \frac{+y_1 - y_2 - y_3 + y_4}{4}.$$

Составим по данным табл. 4.3 столбцы x_1^2 и x_2^2 . Легко видеть, что эти столбцы включают только $+1$ и полностью совпадают со столбцом x_0 . Таким образом, коэффициенты b_0, b_{11} и b_{22} раздельно оценить нельзя. Этот факт еще будет обсужден и использован далее.

Теперь модель выглядит следующим образом:

$$y = b_0 + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + b_{12} \cdot x_1 \cdot x_2.$$

Здесь b_{12} – эффект взаимодействия двух факторов или, как говорят, **эффект парного взаимодействия**. Он показывает силу влияния одного из факторов в зависимости от уровня, на котором находится другой.

В общем случае, из полного факторного эксперимента для двухуровневых факторов можно оценить все линейные эффекты и эффекты взаимодействия факторов (двойные, тройные, четверные и т.д.), причем, подчеркнем еще раз, независимо друг от друга.

Общее число всех эффектов, включая b_0 , равно числу опытов полного факторного эксперимента, т.е. 2^k .

Число взаимодействий порядка m определяют по формуле

$$G_k^m = \frac{k!}{m!(k-m)!}. \quad (4.11)$$

Например, в задаче с четырьмя факторами ($k = 4$) общее число эффектов $2^4 = 16$, из них четыре линейных эффекта, $G_4^2 = 6$ парных взаимодействий, $G_4^3 = 4$ тройных взаимодействия и одно четверное.

Таким образом, реализовав 16 опытов полного факторного эксперимента 2^4 , можно независимо оценить:

линейные эффекты факторов

X_1, X_2, X_3 и X_4 ;

эффекты парных взаимодействий факторов

$X_1X_2, X_1X_3, X_1X_4, X_2X_3, X_2X_4$ и X_3X_4 ;

эффекты тройных взаимодействий факторов

$X_1X_2X_3, X_1X_2X_4, X_1X_3X_4$ и $X_2X_3X_4$;

эффект четверного взаимодействия всех факторов

$X_1X_2X_3X_4$.

4.2. Дробный факторный эксперимент

Существенной особенностью ПФЭ 2^k является то, что по данным этих опытов можно рассчитать не только коэффициенты линейного полинома, но и коэффициенты при всех взаимодействиях.

Однако далеко не всегда изучаемые объекты столь сложны, а требования к точности модели столь высоки, что необходимо оценивать все взаимодействия. Как правило, чем сложнее взаимодействие (тройное, четверное и т.д.), тем скорее можно ожидать, что его влияние окажется незначимым.

Легко понять, что если на основании априорной информации и преднамеренно определяется линейное уравнение регрессии, то реализация ПФЭ 2^k приводит к неоправданно большому количеству опытов. В основном это относится к экспериментам с числом факторов три и более. Например, если при реализации ПФЭ 2^2 мы

заведомо пренебрегаем взаимодействием факторов, то нам предстоит определить всего три коэффициента (b_0 , b_1 и b_2) по данным четырех опытов. В данном случае появившийся «лишний» опыт является необходимым для проверки адекватности модели, т.е. план эксперимента становится ненасыщенным. При постановке ПФЭ 2^3 появляются четыре лишних опыта (оцениваются b_0 , b_1 , b_2 и b_3). Постановка ПФЭ 2^5 обуславливает появление уже $32-6=26$ опытов и т.д.

Разумеется, что при большом числе факторов экспериментатор может не пренебрегать некоторыми взаимодействиями (как правило, низших порядков). Тем не менее, все равно остается (особенно при $k > 5$) большое количество «лишних» опытов.

Таким образом, в ряде случаев возникает необходимость в сокращении числа опытов. Поставленной цели можно добиться путем реализации **дробного факторного эксперимента** (ДФЭ) типа 2^{k-r} , в котором варьируется только часть факторов ($k-r$), а значения остальных (r) принимаются как произведения каких-либо из ($k-r$) факторов. В результате такой процедуры появляется возможность сократить число необходимых опытов в 2^{k-r} раз.

Построение матрицы планирования ДФЭ 2^{k-r} рассмотрим на примере трехфакторного эксперимента. Очевидно, что число опытов ПФЭ 2^3 может быть сокращено только в два раза, т.е. для реализации предлагается ДФЭ 2^{3-1} .

Варьируемых факторов будет два ($3-1=2$), x_1 и x_2 как в ПФЭ 2^2 , а фактор x_3 варьируется как произведение x_1x_2 . Матрица планирования будет иметь вид

i	x_0	x_1	x_2	x_3		x_1x_2	x_1x_3	x_2x_3	$x_1x_2x_3$
1	+	-	-	+		+	-	-	+
2	+	+	-	-		-	-	+	+
3	+	-	+	-		-	+	-	+
4	+	+	+	+		+	+	+	+

Часть матрицы планирования, справа от пунктирной линии, приведена только для того, чтобы показать, какие значения могли принимать взаимодействия факторов. Следует обратить внимание, что уровни взаимодействий являются зеркальным отражением уровней основных факторов, т.е. столбцы x_0 и $x_1x_2x_3$, x_1 и x_2x_3 и т.д. неразличимы.

Это очень важное обстоятельство свидетельствует о том, что оценки коэффициентов при линейных членах в ДФЭ смешаны с оценками взаимодействий, т.е.:

$$b_0 \rightarrow \beta_0 + \beta_{123}; b_1 \rightarrow \beta_1 + \beta_{23}; b_2 \rightarrow \beta_2 + \beta_{13}; b_3 \rightarrow \beta_3 + \beta_{12},$$

где β_i - истинные значения коэффициентов.

Это та плата, которую приходится платить за сокращение числа опытов. Но коль скоро взаимодействия являются несущественными, то оценки b_0 , b_1 , b_2 и b_3 можно считать вполне приемлемыми.

Отметим также, что соотношения, задающие способ варьирования r факторов, называются **генерирующими соотношениями**. В нашем примере таким соотношением является $x_3 = x_1 x_2$. В общем случае для быстрого определения составляющих смешанных оценок в ДФЭ 2^{k-r} используют так называемые определяющие контрасты.

Определяющим контрастом является взаимодействие, вектор-столбец которого содержит только положительные или только отрицательные уровни. В рассматриваемом примере определяющим контрастом будет соотношение $1 = x_1 x_2 x_3$.

Чтобы определить состав смешанных оценок, необходимо определяющий контраст умножить слева и справа на фактор при интересующем коэффициенте. Например, для b_0 и b_1 получим

$$x_0 = x_0 x_1 x_2 x_3 = x_1 x_2 x_3 \quad (x_0 = 1),$$

следовательно, $b_0 \rightarrow \beta_0 + \beta_{123};$

$$x_1 = x_1^2 x_2 x_3 = x_2 x_3 \quad (x_1^2 = 1),$$

следовательно, $b_1 \rightarrow \beta_1 + \beta_{23}.$

Отметим, что матрица ДФЭ 2^{3-1} является насыщенной, т.е. число опытов равно количеству коэффициентов, поэтому для проверки адекватности необходимо провести серию опытов в нулевой точке. Заметим еще, что матрица ДФЭ 2^{3-1} содержит в два раза меньше опытов, чем ПФЭ 2^3 , поэтому она называется полурепликой ПФЭ 2^3 . В общем случае при $k > 5$ могут быть образованы $1/4$, $1/8$, $1/16$ реплики и т.д. от соответствующих ПФЭ 2^k . Важным является и то, что ДФЭ, так же как и ПФЭ, является ортогональным и рототабельным.

Далее рассмотрим случаи, когда полученные с помощью ПФЭ или ДФЭ линейная математическая модель неадекватна, т.е.

имеются точки в факторном пространстве (часто это нулевая точка $x_i = 0$; $i = 1, 2, \dots, n$), где расхождение между опытным значением y и значением $\hat{y}$, предсказанным аппроксимирующим выражением, с точки зрения исследователя больше допустимого Δy_{don} :

$$|y - \hat{y}| > \Delta y_{don}.$$

В такой ситуации можно предложить несколько возможных путей получения адекватной аппроксимации.

Путь первый – сужение интервалов варьирования факторов и повторение опытов. Этот очевидный прием может привести к цели, если решается задача оптимизации и уравнение (4.6) должно лишь определить направление градиента, по которому далее будет происходить движение к экстремальной точке [5]. Если же необходимо получить аналитическое описание поверхности отклика в заданной области определения, то путь, связанный с дроблением области определения, будет громоздким и неэффективным.

Путь второй – выделение (если это возможно) фактора, порождающего неадекватность, и реализация для оставшихся $n-1$ факторов k планов, в каждом из которых выделенная переменная зафиксирована на некотором уровне. На основе полученных k полиномов (если они адекватны) можно получить один полином, коэффициенты которого будут функциями выделенного фактора. Этот путь также весьма трудоемок и может использоваться лишь в некоторых благоприятных случаях.

Путь третий – переход к плану ПФЭ при большем числе уровней варьирования факторов, например, к плану 3^k . Один из недостатков этого пути очевиден – число опытов становится очень большим даже при сравнительно невысоком n . Так, при $n = 5$ для проведения ПФЭ 2^5 нужно сделать $2^5 = 32$ опыта, а для проведения ПФЭ 3^5 потребуется $3^5 = 243$ опыта, т.е. почти в 8 раз больше. Чаще всего такие планы неэффективны.

Путь четвертый – достраивание плана ПФЭ 2^k до плана более высокого порядка (обычно второго) и определение коэффициентов при квадратах факторов, т.е. получение квадратичного полинома.

Путь пятый – преобразование метрики факторного пространства, т.е. переход к новым факторам, функционально связанным со старыми.

Из названных возможностей перспективны лишь две последние, поэтому рассмотрим их более подробно.

4.3. Ортогональный план второго порядка

Рассмотрим лишь ортогональный центрально композиционный план второго порядка (ОЦКП). Этот план далеко не всегда оптимален при решении задач, однако он позволяет очень просто найти коэффициенты.

В ортогональном плане второго порядка (ОЦКП) к ядру, представляющему собой план ПФЭ 2^k , добавляются: центральная точка ($x_i = 0, i=1, 2, \dots, n$) и по две «звездные» точки для каждого фактора ($x_i = \pm a; x_j = 0; j \neq i$). При этом в каждой плоскости, проходящей через центр и содержащей ось Y и координатную ось i -го фактора, оказываются три значения фактора x_i ($-a, 0, +a$) и три соответствующих значения y . Общее число i опытов в ортогональном плане второго порядка составит: $N=2^k+2k+1$, т.е. будет существенно меньше, чем, например, в плане ПФЭ 3^k при $k>2$.

Чтобы матрица планирования второго порядка была ортогональной, необходимо выполнение условия

$$\sum_{u=1}^N x_{0u} x_{ju} = \sum_{u=1}^N x_{ju} = 0, \quad (4.12)$$

для любых $j \neq 0$, в частности для значений j , соответствующих квадратам факторов (см. выражение (4.6)). Очевидно, что выполнить это условие можно лишь в том случае, если указанные члены (квадраты факторов) подвергнуты некоторому преобразованию, так как в противном случае сумма положительных чисел не может быть равной нулю. Обозначив преобразованные факторы через x'_{ju} , можно записать:

$$x'_{ju} = x_{ju}^2 - a,$$

где a – постоянная, не зависящая от u .

Подставив последнее выражение в (4.12), получим:

$$\sum_{u=1}^N x'_{ju} = \sum_{u=1}^N x_{ju}^2 - Na = 0,$$

откуда

$$a = \frac{\sum_{u=1}^N x_{ju}^2}{N} = \overline{x_j^2}.$$

Окончательно для преобразованных квадратичных членов будем иметь

$$x'_{ju} = x_{ju}^2 - \overline{x_j^2}. \quad (4.13)$$

Другим условием диагональности матрицы планирования будет равенство нулю элементов, расположенных не на главной диагонали, и, в частности, элементов, соответствующих преобразованным квадратичным членам:

$$\sum x'_{iu} x'_{ju} = 0. \quad (4.14)$$

Это условие будет выполнено при величинах звездного плеча a , приведенных в табл. 4.4. Для облегчения расчетов в табл. 4.4, также приведены заранее посчитанные константы $a_1 - a_8$.

Матрица планирования, построенная с соблюдением указанных условий, будет ортогональной. В табл. 4.5 в качестве примера приведен ортогональный план второго порядка для трех факторов.

Таблица 4.4

Характеристики симметричных ортогональных композиционных планов и вспомогательные константы

Число факторов	k	2	3	4	5
Ядро плана		2^2	2^3	2^4	2^{5-1} Полуреплика ($1 \equiv x_1 x_2 x_3 x_4 x_5$)
Число опытов в ядре	N_1	4	8	16	16
Звездное плечо	a	1,000	1,215	1,414	1,547
Число звездных точек	$2k$	4	6	8	10
Число опытов в центре	n_0	1	1	1	1
Общее число опытов	N	9	15	25	27
Константы	a_1	0,11111	0,06667	0,04000	0,03704
	a_2	0,16667	0,09141	0,05000	0,04811
	a_3	0,25000	0,12500	0,06250	0,06250
	a_4	0,50000	0,23041	0,12500	0,07220
	a_5	0,33333	0,25820	0,20000	0,19245
	a_6	0,40825	0,30234	0,22361	0,21934
	a_7	0,50000	0,35355	0,25000	0,25000
	a_8	0,70711	0,48001	0,35355	0,26870

Таблица 4.5

Матрица планирования ортогонального плана второго порядка для $k=3$

	u	x_i									
		x_0	x_1	x_2	x_3	$x'_4 = x_1^2 - 0,73$	$x'_5 = x_2^2 - 0,73$	$x'_6 = x_3^2 - 0,73$	$x_7 = x_1 x_2$	$x_8 = x_1 x_3$	$x_9 = x_2 x_3$
План ПФЭ 2^3	1	+1	-1	-1	-1	0,27	0,27	0,27	+1	+1	+1
	2	+1	+1	-1	-1	0,27	0,27	0,27	-1	-1	+1
	3	+1	-1	+1	-1	0,27	0,27	0,27	-1	+1	-1
	4	+1	+1	+1	-1	0,27	0,27	0,27	+1	-1	-1
	5	+1	-1	-1	+1	0,27	0,27	0,27	+1	-1	-1
	6	+1	+1	-1	+1	0,27	0,27	0,27	-1	+1	-1
	7	+1	-1	+1	+1	0,27	0,27	0,27	-1	-1	+1
	8	+1	+1	+1	+1	0,27	0,27	0,27	+1	+1	+1
"Звездные" точки	9	+1	-1,215	0	0	0,75	-0,73	-0,73	0	0	0
	10	+1	+1,215	0	0	0,75	-0,73	-0,73	0	0	0
	11	+1	0	-1,215	0	-0,73	0,75	-0,73	0	0	0
	12	+1	0	+1,215	0	-0,73	0,75	-0,73	0	0	0
	13	+1	0	0	-1,215	-0,73	-0,73	0,75	0	0	0
	14	+1	0	0	+1,215	-0,73	-0,73	0,75	0	0	0
Нулевая точка	15	+1	0	0	0	-0,73	-0,73	-0,73	0	0	0

Коэффициенты полинома (4.6) и их среднеквадратичные отклонения будут определяться по формулам:

$$\begin{aligned}
 b'_0 &= \frac{\sum_{u=1}^N y_u}{N} = a_1 \sum_{u=1}^N y_u ; & b_i &= \frac{\sum_{u=1}^N x_{iu} y_u}{\sum_{u=1}^N x_{iu}^2} = a_2 \sum_{u=1}^N x_{iu} y_u ; \\
 b_{ij} &= \frac{\sum_{u=1}^N (x_i x_j)_u y_u}{\sum_{u=1}^N (x_i x_j)_u^2} = a_3 \sum_{u=1}^N (x_i x_j)_u y_u ; \\
 b_{ii} &= \frac{\sum_{u=1}^N x'_{iu} y_u}{\sum_{u=1}^N x'^2_{iu}} = a_4 \sum_{u=1}^N x'_{iu} y_u ;
 \end{aligned}
 \tag{4.15}$$

$$\begin{aligned}
 S_{b'_0}^2 &= \frac{S_y^2}{N} = a_1^2 S_y^2 ; & S_{b_i}^2 &= \frac{S_y^2}{\sum_{u=1}^N x_{iu}^2} = a_2^2 S_y^2 ; \\
 S_{b_{ij}}^2 &= \frac{S_y^2}{\sum_{u=1}^N (x_i x_j)_u^2} = a_3^2 S_y^2 ; & S_{b_{ii}}^2 &= \frac{S_y^2}{\sum_{u=1}^N x'^2_{iu}} = a_4^2 S_y^2 ;
 \end{aligned}
 \tag{4.16}$$

$$\begin{aligned}
 S_{b'_0} &= a_5 S_y ; & S_{b_i} &= a_6 S_y ; \\
 S_{b_{ij}} &= a_7 S_y ; & S_{b_{ii}} &= a_8 S_y .
 \end{aligned}
 \tag{4.17}$$

С учетом преобразованных квадратичных членов полином приобретает вид

$$y = b'_0 + b_1 x_1 + \dots + b_n x_n + b_{11} (x_1^2 - \overline{x_1^2}) + \dots \quad (4.18)$$

$$\dots + b_{nn} (x_n^2 - \overline{x_n^2}) + b_{12} x_1 x_2 + \dots$$

Для перехода к обычному виду нужно раскрыть скобки и определить b_0 и $S_{b_0}^2$:

$$\left. \begin{aligned} b_0 &= b'_0 - b_{11} \overline{x_1^2} - \dots - b_{nn} \overline{x_n^2} = b'_0 - \frac{a_1}{a_2} \sum_{i=1}^N b_{ii}; \\ S_{b_0}^2 &= S_{b'_0}^2 + \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^2 k S_{b_{ii}}^2. \end{aligned} \right\} \quad (4.19)$$

Рассмотрим теперь очень простой пример, иллюстрирующий применение изложенного аппарата.

Пример 4.1. Пусть поверхность, уравнение которой нас интересует, имеет вид, показанный на рис. 4.2. Исходные данные приведены в табл. 4.6.

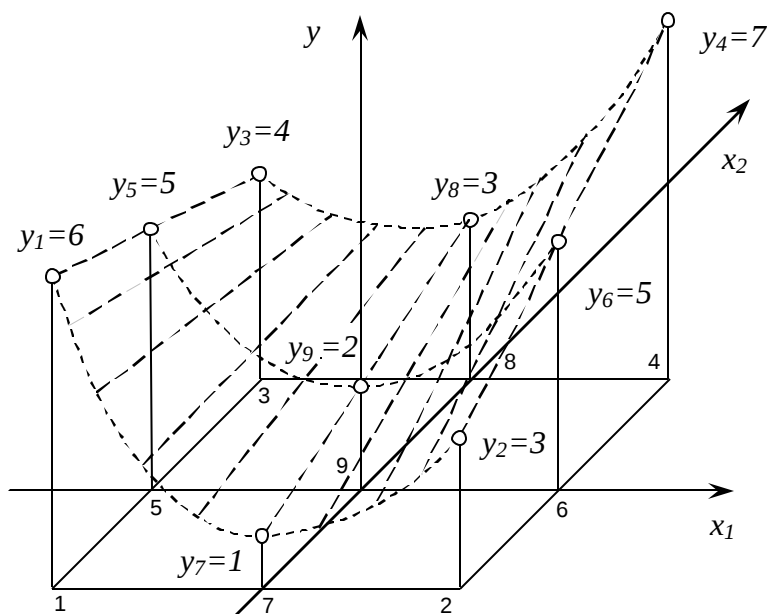


Рис. 4.2. К использованию ортогонального плана второго порядка

Таблица 4.6

К использованию ортогонального плана второго порядка

u	x_i					
	x_0	x_1	x_2	x_1x_2	y	$\hat{y}$
1	+	-	-	+	6	6
2	+	+	-	-	3	3
3	+	-	+	-	4	4
4	+	+	+	+	7	7
5	+	0	0	0	2	5

Найдём коэффициенты b_i по формуле (4.10), полученной с использованием метода наименьших квадратов:

$$b_0 = \frac{6+3+4+7}{4} = 5; \quad b_1 = \frac{-6+3-4+7}{4} = 0;$$

$$b_2 = \frac{-6-3+4+7}{4} = 0,5; \quad b_{12} = \frac{6-3-4+7}{4} = 1,5,$$

т.е. получим полином:

$$y = 5 + 0,5x_2 + 1,5x_1x_2.$$

Очевидно, что поверхность, соответствующая этому полиному, проходит через четыре точки (y_1-y_4), по которым определены коэффициенты, однако, поставив опыт в нулевой точке (см. пятую строку табл. 4.6), убеждаемся, что полученная аппроксимация не очень хороша: $|y - \hat{y}| = 3$.

Достраиваем план до ортогонального плана второго порядка. К четырем опытам ПФЭ 2^2 добавляем четыре опыта в "звездных" точках при $\alpha = 1$ (см. табл. 4.4) и уже сделанный опыт в нулевой точке. Квадратичные члены преобразуем по формуле (4.13), для чего находим

$$\overline{x_j^2} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

Теперь у нас есть возможность построить таблицу, аналогичную табл. 4.5, но содержащую лишь девять строк (табл. 4.7).

Таблица 4.7

Ортогональный план второго порядка для $k=2$

u	x_i						y	$\hat{y}$
	x_0	x_1	x_2	$x'_3 = x_1^2 - \frac{2}{3}$	$x'_4 = x_2^2 - \frac{2}{3}$	$x_5 = x_1 x_2$		
1	+1	-1	-1	1/3	1/3	+1	6,00	5,83
2	+1	+1	-1	1/3	1/3	-1	3,00	2,83
3	+1	-1	+1	1/3	1/3	-1	4,00	4,17
4	+1	+1	+1	1/3	1/3	+1	7,00	7,17
5	+1	-1	0	1/3	-2/3	0	5,00	5,00
6	+1	+1	0	1/3	-2/3	0	5,00	5,00
7	+1	0	-1	-2/3	1/3	0	1,00	1,33
8	+1	0	+1	-2/3	1/3	0	3,00	2,67
9	+1	0	0	-2/3	-2/3	0	2,00	2,00

В столбец y табл. 4.7 мы вписали все значения, полученные в опытах (см. рис. 4.2). Коэффициенты регрессионного уравнения в данном случае следует считать по формулам (4.15):

$$b'_0 = \frac{6+3+4+7+5+5+1+3+2}{9} = \frac{36}{9} = 4;$$

$$b_2 = \frac{-6-3+4+7-1+3}{6} = \frac{4}{6} = 0,67;$$

$$b_{11} = \frac{\frac{1}{3}(6+3+4+7+5+5) - \frac{2}{3}(1+3+2)}{6\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 3\left(-\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{10-4}{2} = 3;$$

$$b_{22} = \frac{\frac{1}{3}(6+3+4+7+1+3) - \frac{2}{3}(5+5+2)}{2} = 0;$$

$$b_{12} = \frac{6-3-4+7}{4} = 1,5.$$

Полученный полином имеет вид

$$y = 4 + 0,67x_2 + 3\left(x_1^2 - \frac{2}{3}\right) + 1,5x_1x_2,$$

или после раскрытия скобок

$$y = 2 + 0,67x_2 + 3x_1^2 + 1,5x_1x_2.$$

Значения функции, вычисленные по полученному полиному, приведены в столбце $\hat{y}$ (см. табл. 4.7). Здесь мы имеем возможность констатировать, что они близки к значениям, которые дал опыт; во всяком случае, расхождения здесь существенно меньше, чем для полинома, полученного ранее с помощью ПФЭ. Однако степень этой близости, а точнее допустимость или недопустимость имеющихся отличий, мы сможем оценить, лишь проведя регрессионный анализ.

4.4. Преобразование независимых переменных

Рассмотрим теперь последний – пятый путь, т.е. замену факторов X_i на новые независимые переменные $\xi_i = p(X_i)$. Здесь речь идет об истинных значениях факторов, которые мы обозначаем заглавными буквами X .

Идея преобразования факторов очень проста и может быть проиллюстрирована на простейшем примере. Пусть искомая функция (1.1) имеет вид $Y = X^3$ и определена на отрезке $1 \leq X \leq 3$. Очевидно, что попытка аппроксимировать эту функцию полиномом первой степени относительно X обречена на неудачу. Прямая, проходящая через крайние точки, $Y = -12 + 13X$ плохо аппроксимирует исходную зависимость, что легко устанавливается вычислением разности $|Y - \hat{Y}| = 6$ при $X = 2$. Введя новую переменную

$\xi = X^3$, обнаруживаем, что зависимость $Y = \xi$ линейна и, следовательно, точно описывается полиномом первой степени относительно ξ .

Итак, задача состоит в нахождении новых переменных ξ , функционально связанных с факторами X . В общем виде решение этой задачи весьма сложно и может быть выполнено различными способами, однако для ряда практически важных случаев она может быть решена при использовании преобразования вида:

$$\left. \begin{aligned} \xi_i &= X_i^{\alpha_i} \quad (\alpha_i \neq 0); \\ \xi_i &= \ln X_i \quad (\alpha_i = 0). \end{aligned} \right\} \quad (4.20)$$

Применение в качестве преобразованной переменной степенной функции исходного фактора целесообразно в связи с тем, что степенная функция при надлежащем выборе α весьма близко аппроксимирует нелинейные зависимости параболического и гиперболического вида. Параметры преобразования могут быть найдены на основе итерационной процедуры, предложенной Боксом и Тайдузлом, однако этот путь весьма трудоемок и вряд ли получит распространение в инженерных приложениях. Для случая, когда величины Y в опытах определяются без погрешности, можно использовать простой способ, позволяющий найти константы α , из условия, что кривая $Y = f(X_i)$ (некоторое сечение исследуемой гиперповерхности) проходит через три известные точки.

Будем полагать, что функция $Y = f(X_i)$ монотонна и определена на отрезке $[X_{i \min}; X_{i \max}]$, причем $X_{i \min} > 0$ (рис. 4.3).

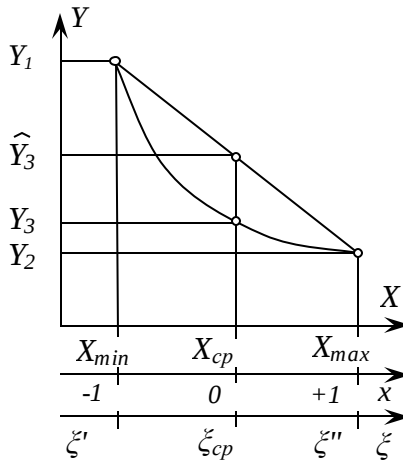


Рис. 4.3. К преобразованию факторов

Введя кодированную переменную x_i (индекс i далее в этом разделе опущен) в соответствии с (4.2), получим уравнение прямой, проходящей через крайние точки ($x_{\min} = -1$ и $x_{\max} = +1$):

$$Y = b_0 + b_1 x, \quad (4.21)$$

где $b_0 = \frac{Y_1 + Y_2}{2}$; $b_1 = \frac{-Y_1 + Y_2}{2}$.

Для проверки адекватности находим значение Y_3 для $X = X_{cp}$ ($x=0$) и определяем $Y_3 - \hat{Y}_3 = Y_3 - b_0$. Если выражение (4.21) неадекватно ($Y_3 - b_0 \neq 0$) и Y_3 лежит между Y_1 и Y_2 (функция согласно имеющейся информации монотонна), то поставим задачу найти такое значение α , чтобы функция

$$Y = C_0 - C_1 X^\alpha, \quad (4.22)$$

проходила через все три известные точки.

Отметим, что выражение (4.21) не изменится при замене фактора – станет другим лишь выражение для кодированной переменной, которое можно переписать с учетом (4.20) в следующем виде:

$$x = \frac{2\xi - \xi'' - \xi'}{\xi'' - \xi'} = \frac{2X^\alpha - X_{max}^\alpha - X_{min}^\alpha}{X_{max}^\alpha - X_{min}^\alpha}. \quad (4.23)$$

Тогда при подстановке в (4.21) координат средней точки (X_{cp}, Y_3) с учетом (4.23) получим

$$Y_3 = b_0 + b_1 \left(\frac{2X_{cp}^\alpha - X_{max}^\alpha - X_{min}^\alpha}{X_{max}^\alpha - X_{min}^\alpha} \right), \quad (4.24)$$

или после преобразований с учетом (4.1)

$$C = \frac{2^{1-\alpha}(A+1)^\alpha - A^\alpha - 1}{A^\alpha - 1}, \quad (4.25)$$

где

$$C = \frac{Y_3 - b_0}{b_1}; \quad (4.26)$$

$$A = \frac{X_{max}}{X_{min}}. \quad (4.27)$$

Уравнение (4.25) позволяет находить α в каждом конкретном случае. Для удобства на рис. 4.4 приведены зависимости $\alpha = f(C)$ при $A = const$, позволяющие определить α при известных A и C .

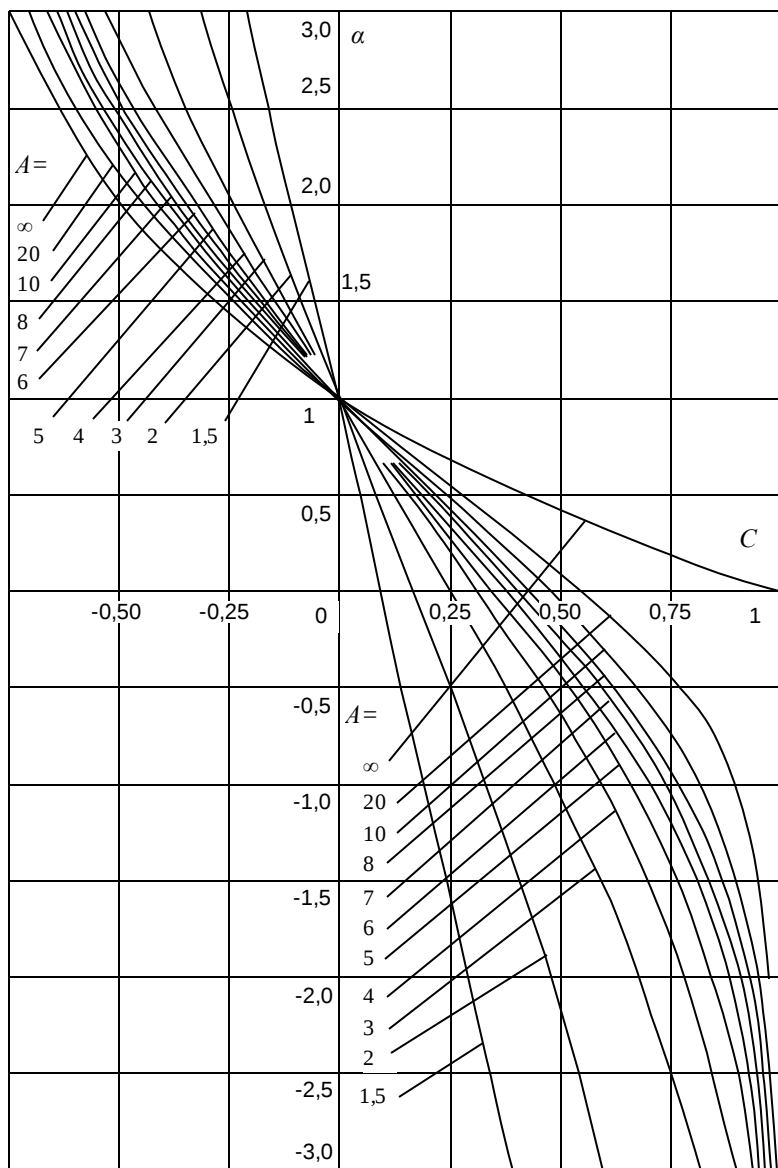


Рис. 4.4. Зависимости $\alpha = \varphi(C)$ при $A = const$ для определения параметров преобразования факторов

Применение рассмотренного способа покажем на простом примере.

Пример 4.2. Пусть искомая функция имеет вид

$$Y = 1 + \frac{1}{X_1} + 2X_2^2 + \frac{X_2^2}{X_1} \quad (4.28)$$

и ее область определения задана неравенствами $1 \leq X_1 \leq 5, 1 \leq X_2 \leq 3$. Введя кодированные переменные:

$$x_1 = \frac{X_1 - 3}{2}; \quad x_2 = \frac{X_2 - 2}{1}$$

и реализовав ПФЭ 2^2 (строки 1-4 табл. 4.8), получим неполный квадратный полином:

$$Y = 14,6 - 2,4x_1 + 10,4x_2 - 1,6x_1x_2.$$

Опыт в центральной точке, $(x_1=x_2=0)$ дает $Y_5 = 10,667$ (см. табл. 4.8, строка 5), и расхождение $|Y_5 - \hat{Y}_5| \approx 3,9$ весьма велико.

Для нахождения констант преобразования A_1 и C_1 получим два сечения поверхности, проходящие через центр (см. строки 6-9 табл. 4.8), показанные на рис. 4.5. Отметим, что эта операция в точности соответствует проведению дополнительных опытов в "звездных" точках при планировании эксперимента второго порядка.

Таблица 4.8

Исходные данные к примеру 4.2

u	x _i			u	x _i		
	x ₁	x ₂	Y		x ₁	x ₂	Y
1	—	—	5,0	6	—	0	14,0
2	+	—	3,4	7	+	0	10,0
3	—	+	29,0	8	0	—	3,667
4	+	+	21,0	9	0	+	22,33
5	0	0	10,667				

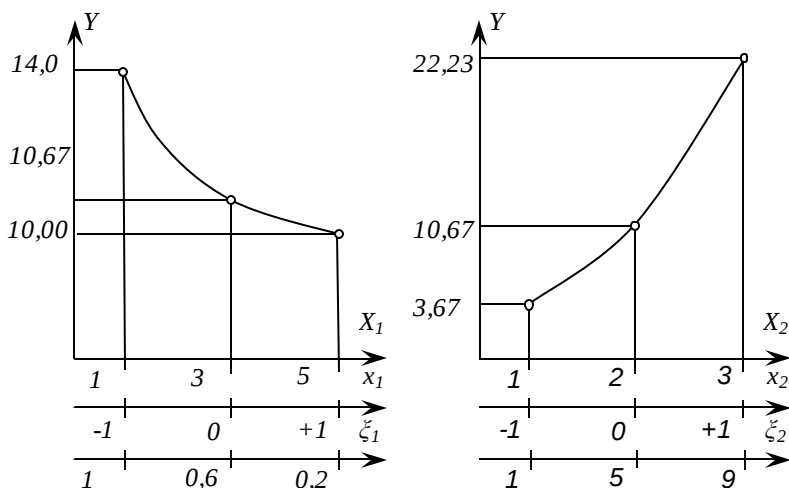


Рис. 4.5. Сечения поверхности $Y=f(X)$ в примере преобразования факторов

Применив к полученным сечениям описанную выше процедуру, будем иметь:

$$b_{0(1)} = \frac{14 + 10}{2} = 12; \quad b_{1(1)} = \frac{-14 + 10}{2} = -2;$$

$$C_{(1)} = \frac{10,667 - 12}{-2} = 0,667; \quad A_{(1)} = \frac{5}{1} = 5$$

$$b_{0(2)} = \frac{3,667 + 22,330}{2} = 12,998; \quad b_{1(2)} = \frac{-3,667 + 22,330}{2} = 9,331$$

$$C_{(2)} = \frac{10,667 - 12,998}{9,331} = -0,25; \quad A_{(2)} = \frac{3}{1} = 3.$$

По кривым (см. рис. 4.4) находим $\alpha_1 = -1$ и $\alpha_2 = 2$, т.е. $\xi_1 = X_1^{-1}$ и $\xi_2 = X_2^2$. Для получения полинома с новыми независимыми переменными находим их значения в крайних точках, а также ξ_{icp} (см. рис.4.5), записываем новые выражения для x_i :

$$x_1 = \frac{\xi_1 - 0,6}{-0,4}; \quad x_2 = \frac{\xi_2 - 5}{4}.$$

Подставив полученные величины в (4.29), после элементарных преобразований имеем:

$$Y = 1 + \xi_1 + 2\xi_2 + \xi_1\xi_2. \quad (4.30)$$

Выражение (4.30) точно соответствует исходной функции (4.28).

Изложенный способ прост, нагляден, реализуется при использовании обычных клавишных машин и дает удовлетворительные результаты, если функция не имеет экстремумов, а опыты не содержат значительных погрешностей. Для проверки адекватности найденного полинома можно реализовать дополнительные опыты, например, в точках с координатами $x_i = \pm 0,5$.

Изложенная процедура замены факторов может рассматриваться как прием, позволяющий компенсировать недостаточность информации о функции (1.1) перед началом работы с ней. Действительно, если бы, начиная решать последний пример, знать, что фактор X_1 входит в уравнение (1.1) в виде X_1^{-1} , а фактор X_2 в виде X_2^2 , то была бы возможность уже на стадии выбора факторов учесть эту информацию и выбрать в качестве факторов не X_1 и X_2 , а $\xi_1 = X_1^{-1}$ и $\xi_2 = X_2^2$. Однако на практике такая информация доступна далеко не всегда и изложенная процедура преобразования факторов позволяет в какой-то мере восполнить этот пробел. Разумеется, вполне возможна ситуация, когда преобразование факторов не дает полезного эффекта. Например, если поверхность столь сложна, что величины α заметно меняются при переходе от одного сечения к другому, мы не сможем обойтись одним значением α , найденным по среднему сечению. Здесь нам придется использовать другие, более трудоемкие пути получения адекватной модели.

4.5. Метод крутого восхождения

Для того чтобы лучше себе представить, как реализуются идеи активного эксперимента, рассмотрим схему одного из наибо-

лее широко используемых в настоящее время методов планирования – метода крутого восхождения, предназначенного для решения экстремальных задач [5,9].

В этом методе, как и во многих других методах планирования эксперимента, задача решается поэтапно. На первом этапе, варьируя в каждом опыте сразу всеми факторами, исследователь ищет лишь направление движения к области экстремума. Для этого поверхность отклика изучают только на небольшом участке и строят для этого участка линейную модель:

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_kx_k.$$

Анализ уравнения позволяет наметить направление движения из исходной точки, наиболее быстро приводящее к оптимизации выбранного параметра. В дальнейшем на каждом этапе в соответствии с результатами, полученными на предыдущих, ставят небольшую серию опытов, результаты которых вместе с интуитивными решениями определяют следующий шаг. Эта процедура заканчивается в области экстремума. Здесь ставят несколько большую серию опытов и поверхность отклика описывают нелинейными функциями.

Анализ нелинейного уравнения позволяет точно определить координаты экстремума или сделать вывод, что экстремума не существует, а также наметить последующий путь оптимизации.

Сравним классический металлургический подход и метод крутого восхождения на следующем искусственном примере. Предположим, требуется найти состав наиболее прочного сплава на основе никеля, варьируя в нем содержание алюминия (X_1) и тантала (X_2). Предположим далее, что зависимость прочности (Y) от состава для данных сплавов имеет вид, показанный на рис. 4.6, чего исследователь, приступая к решению задачи, естественно, не знает.

По каким-то соображениям эксперимент начинают со сплава, отвечающего составу точки s_1 . При традиционном экспериментировании исследователь начинает менять в этом сплаве содержание одной из добавок при постоянном количестве другой, затем содержание другой – при постоянном количестве первой. Из рис. 4.6 видно, что при таком подходе, начиная с точки s_1 , вообще можно не найти оптимальный состав (точка s_6), поскольку движение по прямой от точки s_1 в любую сторону не приводит к существенному упрочнению сплава.

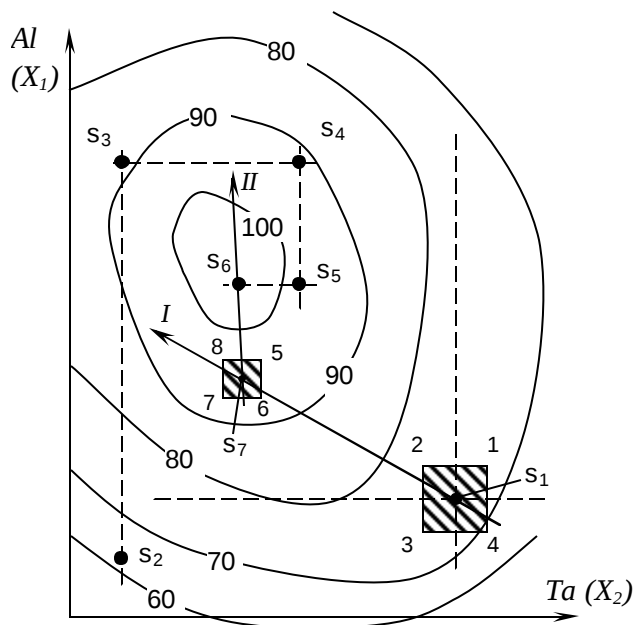


Рис. 4.6. Схема метода крутого восхождения:

$$I - y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2;$$

$$II - y = b'_0 + b'_1 x_1 + b'_2 x_2$$

Если далее экспериментатор сумеет перейти к другой исходной точке s_2 , то, последовательно изменяя содержание алюминия и тантала, он найдет наиболее прочный сплав, однако этот путь будет достаточно длинным (s_2 - s_3 - s_4 - s_5 - s_6).

Таким образом, традиционное экспериментирование, предполагающее поочередное изменение переменных, ведет к нерациональному расходованию времени и средств, тем более, что большая часть информации, полученная после подобной работы, часто вообще не представляет практического интереса, поскольку относится к области, далекой от оптимальных условий.

Та же задача методом крутого восхождения решается следующим образом. Вблизи точки s_1 (начиная от которой при обычном экспериментировании успех вообще мог быть не достигнут) ставят небольшую серию из четырех опытов. Цель этих опытов – еще не поиск состава наиболее прочного сплава. Определение

прочности первых четырех сплавов позволяет исследователю неизвестную поверхность отклика на небольшом участке вблизи точки s_1 приблизить плоскостью, т.е. рассчитать коэффициенты регрессии уравнения:

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2.$$

Найденные по результатам опытов коэффициенты b_1 и b_2 определяют направление градиента для данной аппроксимирующей плоскости, т.е. направление изменения содержания алюминия и тантала в сплаве, приводящее к возможно более быстрому повышению прочности сплава. Сделав несколько опытов в этом направлении, т.е. осуществив крутое восхождение по поверхности отклика в направлении градиента линейного приближения (отсюда название метода), исследователь выбирает новую исходную точку s_7 , возле которой вновь проводит аналогичную серию из четырех опытов, рассчитывает коэффициенты нового линейного приближения теперь уже вблизи точки s_7 :

$$y = b'_0 + b'_1 x_1 + b'_2 x_2,$$

и осуществляет движение по градиенту этого уравнения. Движение по градиенту производят до попадания в область оптимума, после чего строят и анализируют нелинейную модель этой области. На рис. 4.6 градиент совпадает с прямой, перпендикулярной изолиниям, т.е. с самым крутым склоном, ведущим от данной точки к вершине. Для поверхности отклика, показанной на рис. 4.6, оказалось достаточно двух серий опытов, чтобы при крутом восхождении найти состав наиболее прочного сплава.

Контрольные вопросы

1. Объясните порядок составления матрицы планирования ПФЭ.
2. Опишите процедуру кодирования факторов.
3. Перечислите основные свойства рассмотренных планов.
4. Как строится матрица планирования ДФЭ?
5. Для чего применяются ортогональные планы второго порядка и объясните принципы их построения?
6. Перечислите основные пути получения адекватной модели.
7. В чем состоит суть метода «крутого восхождения»?
8. Опишите процедуру преобразования независимых факторов.

5. ПРОВЕДЕНИЕ И СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТА

5.1. Проведение эксперимента

Анкета для сбора априорной информации

Перед началом эксперимента необходимо формализовать сведения, имеющиеся об объекте. Для этого можно воспользоваться анкетой, которая должна отражать следующие разделы.

Постановка задачи, выбор параметров:

1. Краткое описание процесса или объекта.
2. Формулировка цели исследования (если задач несколько, про-ранжировать их по степени важности).
3. Выбор параметров оптимизации (откликов).

Номер отклика	Название	Размерность	Область определения	Точность	Примечание

4. Желаемый результат. Число и точность.
5. Какой результат будет считаться отличным, хорошим, удовлетворительным, неудовлетворительным?

Выбор факторов:

1. Список всех «подозреваемых» факторов, которые могут влиять на процесс.
2. Список факторов, включаемых в реальный эксперимент.

Номер фактора	Название	Размерность	Область определения	Область интереса	Точность	Примечание

3. Существуют ли возможности установления значения фактора на любом заданном уровне?
4. Сохраняются ли заданные значения уровней в течение опыта?

5. Могут ли некоторые комбинации уровней факторов привести к остановке процесса (например, взрыв, нетехнологичность и т.д.)?

Число опытов:

1. Желаемое число опытов, ограничения на число опытов.
2. Желаемый срок проведения исследования.
3. Примерная длительность одного опыта.
4. Стоимость и затраты труда при проведении одного опыта серии.
5. Желаемое число уровней для одного фактора.
6. Возможность выполнения параллельных опытов и их желаемое число.
7. Возможность проведения параллельных измерений.
8. Желаемая стратегия проведения опытов (например, по одному в день и т.д.).

Учет априорной информации:

1. Условия и результаты, достигнутые при изучении аналогичных процессов.
2. Результаты предварительного эксперимента и данные (литературные и собственные) о величине ошибки эксперимента.
3. Взаимодействия факторов.

Реализация плана эксперимента

К проведению опытов необходимо тщательно подготовиться, собрать опытную установку, проверить и прокалибровать приборы, подготовить исходное сырье, составить специальный журнал.

Журнал заранее оформляют в соответствии с методикой и планом опытов так, чтобы была ясна последовательность действий. Первую страницу можно посвятить выбору цели исследования и параметрам оптимизации, с указанием их размерностей. На второй странице перечислить факторы и поместить таблицу уровней факторов и интервалов варьирования.

Для матрицы планирования удобно отвести разворот журнала, чтобы имела возможность дополнить ее до расчетной матрицы, записать повторные опыты и примечания. Чтобы облегчить работу лаборанта и исключить ошибки при выборе условий опыта, в рабочей матрице планирования целесообразно проставлять не только кодовые значения факторов, но и натуральные. При составлении рабочей матрицы планирования необходимо оставить место для столбцов, в которых отмечаются даты постановки опы-

тов и фамилии лаборантов, если опыты проводят несколько человек. Имея перед собой план опытов, необходимо подсчитать количество исходного сырья и заранее его подготовить.

Тщательная подготовка к опыту будет способствовать уменьшению ошибки опыта. Для того чтобы компенсировать влияние систематических ошибок, опыты нужно рандомизировать во времени. Если экспериментатору заранее известны источники систематических ошибок, например, известно количество различных партий сырья, следует разбивать матрицу планирования на блоки. При этом межблоковый эффект заведомо смешивается с взаимодействиями, которыми экспериментатор может пренебречь.

Особое внимание следует уделять проверке однородности дисперсий, так как это – одна из предпосылок, лежащих в основе регрессионного анализа. Для проверки однородности дисперсий можно использовать критерии Фишера, Кохрена или Бартлетта. Очень важно отбросить грубые наблюдения – брак при постановке повторных опытов. Воспроизводимость эксперимента является одним из важнейших требований планирования эксперимента.

Рандомизация

Чтобы исключить влияние систематических ошибок, вызванных внешними условиями (переменной температуры, сырья, лаборанта и т.д.), рекомендуется случайная последовательность при постановке опытов, запланированных матрицей. Опыты необходимо рандомизировать во времени. Термин «рандомизация» происходит от английского слова *random* – случайный.

Приведем простой пример рандомизации условия эксперимента. В полном факторном эксперименте 2^3 предполагается каждое значение параметра оптимизации определять по двум параллельным опытам. Нужно случайно расположить всего 16 опытов. Присвоим параллельным опытам номера с 9 по 16, и тогда опыт №9 будет повторным по отношению к первому опыту, десятый – ко второму и т.д. Следующий этап рандомизации – использование таблицы случайных чисел. Фрагмент ее представлен в табл. 5.1. В случайном месте таблицы выписываются числа с 1 по 16 с отбрасыванием чисел больше 16 и уже выписанных. В нашем случае, начиная с четвертого столбца, можно получить такую последовательность: 2, 15, 9, 5, 12, 14, 8, 13, 16, 1, 3, 7, 4, 6, 11, 10. Это значит, что первым реализуется опыт №2, вторым – опыт №7 и т.д. Выбранную случайным образом последовательность опытов на рушать не рекомендуется.

Таблица 5.1

Фрагмент таблицы случайных чисел

56	66	25	32	38	64	70	26	27	67	77	40	04	34	63	98	99	89	31	16	12	90	50	28	96
88	40	52	02	20	82	69	34	50	21	74	00	91	27	52	98	72	03	45	65	30	89	71	45	91
87	63	88	23	62	51	07	69	59	02	89	49	14	98	53	41	92	36	07	76	85	37	84	37	47
32	25	21	15	08	82	34	57	57	35	22	03	33	48	84	37	37	29	38	37	89	76	25	09	69
44	61	88	23	13	01	59	47	64	04	99	59	96	20	30	87	31	33	69	45	58	48	00	83	48
94	44	08	67	79	41	61	41	15	60	11	88	83	24	82	24	07	78	61	89	42	58	88	22	16
13	24	40	09	00	65	46	38	61	12	90	62	41	11	59	85	18	42	61	29	88	76	04	21	80
78	27	84	05	99	85	75	67	80	05	57	05	71	70	31	31	99	99	06	96	53	99	25	13	63
42	39	30	02	34	99	46	68	45	15	19	74	15	50	17	44	80	13	86	38	40	45	82	13	44
04	52	43	96	38	13	83	80	72	34	20	84	56	19	49	59	14	85	42	99	71	16	34	33	79
82	85	77	30	16	69	32	46	46	30	84	20	68	72	98	94	62	63	59	44	00	89	06	15	87
38	48	84	88	24	55	46	48	60	06	90	08	83	83	98	40	90	88	25	26	85	74	55	80	85
91	19	05	68	22	58	04	63	21	16	23	38	25	43	32	98	94	65	35	35	16	91	07	12	43
54	81	87	21	31	40	46	17	62	63	99	71	14	12	64	51	68	50	60	78	22	69	51	98	37
65	43	75	12	91	20	36	25	57	92	33	65	95	48	75	00	06	65	25	90	16	29	34	14	43
49	98	71	31	80	59	57	32	43	07	85	06	64	75	27	29	17	06	11	30	68	70	97	87	21
03	98	68	89	39	71	87	32	14	99	42	10	25	37	30	08	27	75	43	97	54	20	69	93	50
56	04	21	34	92	89	81	52	15	12	84	11	12	66	87	48	21	06	86	08	35	39	52	28	09
48	09	36	95	36	20	82	53	32	89	92	68	50	88	17	37	92	02	23	43	63	24	69	80	91
23	97	40	96	57	74	07	95	26	44	93	08	43	30	41	86	45	74	33	78	84	33	38	76	73
43	97	55	45	98	35	69	45	96	80	46	26	39	96	33	60	20	73	30	79	17	19	03	47	28
40	05	08	50	79	89	58	19	86	48	27	98	99	24	08	94	19	15	81	29	82	14	35	88	03
66	97	10	69	02	25	36	43	71	76	00	67	56	12	69	07	89	55	63	31	50	72	20	33	36
15	62	38	72	92	03	76	09	30	75	77	80	04	24	54	67	60	10	79	26	21	60	03	48	14
77	81	15	14	67	55	24	22	20	55	36	93	67	69	37	72	22	43	46	32	56	15	75	25	12
18	87	05	09	96	45	14	72	41	46	12	67	46	72	02	59	06	17	49	12	73	28	23	52	48
08	58	53	63	66	13	07	04	48	71	39	07	46	96	40	20	86	79	11	81	74	11	15	23	17
16	07	79	57	61	42	19	68	15	12	60	21	59	12	07	04	99	88	22	39	75	16	69	13	84

Разбиение матрицы типа 2^k на блоки

Если экспериментатор располагает сведениями о предстоящих изменениях внешней среды, сырья, аппаратуры и т.п., то целесообразно планировать эксперимент таким образом, чтобы эффект влияния внешних условий был смешан с определенным взаимодействием, которое не жалко потерять.

Можно разбить на два блока любой эксперимент типа 2^k . Главное – правильно выбрать взаимодействие, которым можно безболезненно пожертвовать. При отсутствии априорных сведений выбирают взаимодействие самого высокого порядка: $x_1x_2x_3$ для 2^3 , $x_1x_2x_3x_4$ для 2^4 , $x_1x_2x_3x_4x_5$ для 2^5 и т.д. Но если экспериментатору известно, что одно из парных взаимодействий лишено, например, физико-химического смысла, то можно пожертвовать парным взаимодействием. Когда взаимодействие выбрано, в первый блок группируются все опыты, в которых это взаимодействие равно $+1$, а во второй, где оно равно -1 .

Так, при наличии двух партий сырья матрицу 2^3 можно разбить на два блока таким образом, чтобы эффект сырья сказался на величине трехфакторного взаимодействия. Тогда все линейные коэффициенты и парные взаимодействия будут освобождены от влияния неоднородности сырья (табл. 5.2).

Таблица 5.2

Разбиение матрицы 2^3 на два блока

Блок	x_0	x_1	x_2	x_3	x_1x_2	x_1x_3	x_2x_3	$x_1x_2x_3$	y
1	+	–	–	+	+	–	–	+	$y_1 + \varepsilon$
	+	+	–	–	–	–	+	+	$y_2 + \varepsilon$
	+	–	+	–	–	+	–	+	$y_3 + \varepsilon$
	+	+	+	+	+	+	+	+	$y_4 + \varepsilon$
2	+	–	–	–	+	+	+	–	y_5
	+	+	–	+	–	+	–	–	y_6
	+	–	+	+	–	–	+	–	y_7
	+	+	+	–	+	–	–	–	y_8

В этой матрице при составлении блока 1 отобраны все строки, для которых $x_1x_2x_3 = +1$, а при составлении блока 2 – все строки, для которых $x_1x_2x_3 = -1$. Различие в сырье можно рассматривать как новый фактор $x_4 = x_1x_2x_3$. Тогда матрица 2^3 , разбитая на

два блока, представляет собой полуреплику 2^{4-1} с определяющим контрастом $1=x_1x_2x_3x_4$.

В этом случае эффект сырья (ε) отразится на подсчете свободного члена b_0 и эффекта взаимодействия третьего порядка b_{123} .

После проведения эксперимента и получения всех необходимых данных переходят к статистической обработке. Во-первых, необходимо произвести оценку точности полученных результатов.

5.2. Определение дисперсии опыта

При организации эксперимента необходимо иметь оценку дисперсии опыта S_y^2 . Эта дисперсия может быть известна и до начала опытов, но обычно ее оценивают в процессе эксперимента. Единственная возможность это сделать – повторять (дублировать) опыты.

В зависимости от характера дублирования возможно несколько способов оценки дисперсии.

При **дублировании одного опыта** из плана, например в центре плана:

$$S_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_{0i} - \bar{y}_0)^2}{n-1}, \quad (5.1)$$

где n – число дублирующих опытов;

y_{0i} – результат i -го дубля опыта;

$\bar{y}_0$ – среднее арифметическое значение всех дублей опыта.

В данном случае для определения S_y^2 требуется определить одну константу $\bar{y}_0$. Поэтому число степеней свободы в данном случае:

$$f_1 = n - 1.$$

При **неравномерном дублировании опытов**.

Вначале определяются построчные дисперсии (для каждого опыта):

$$S_{y_u}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_u} (y_{ui} - \bar{y}_u)^2}{n_u - 1} \quad (5.2)$$

с числом степеней свободы $f_u = n_u - 1$,

где n_u – число дублирующих опытов;

y_{ui} – результат i -го дубля u -го опыта;

$\bar{y}_u$ – среднее арифметическое значение всех дублей опыта.

Затем определяют среднюю дисперсию опыта из выражения

$$S_y^2 = \frac{\sum_{u=1}^N f_u S_{y_u}^2}{\sum_{u=1}^N f_u} = \frac{\sum_{u=1}^N \sum_{i=1}^{n_u} (y_{ui} - \bar{y}_u)^2}{\sum_{u=1}^N (n_u - 1)} \quad (5.3)$$

с числом степеней свободы $f_1 = \sum_{u=1}^N f_u = \sum_{u=1}^N (n_u - 1)$.

Перед дальнейшим использованием полученной дисперсии необходимо проверить однородность ряда дисперсий, т.е. выяснить, определяются ли результаты различных опытов с одинаковой точностью. В случае неравномерного дублирования это выполняют по критерию Барлетта – B :

$$B = 2,3026 \left(\lg S_y^2 \sum_{u=1}^N f_u - \sum_{u=1}^N f_u \lg S_{y_u}^2 \right). \quad (5.4)$$

Ряд дисперсий считается однородным, если выполняется условие

$$B \leq \chi_{p; N'-1}^2, \quad (5.5)$$

где $\chi_{p; N'-1}^2$ – критерий соответствия "хи-квадрат", который определяется по табл. П6 приложения в зависимости от уровня значимости $q=1-p$ и числа степеней свободы

$$f = N' - 1,$$

где N' – число дублируемых опытов.

При **равномерном дублировании опытов** число повторений каждого опыта одинаково, т.е. $n_u = n$, поэтому формула (5.3) после преобразования

$$S_y^2 = \frac{\sum_{u=1}^N \sum_{i=1}^n (y_{ui} - \bar{y}_u)^2}{N(n-1)} = \frac{\sum_{u=1}^N S_{y_u}^2}{N} \quad (5.6)$$

с числом степеней свободы $f_1 = N(n-1)$.

Перед дальнейшим использованием полученной дисперсии вновь необходимо проверить однородность ряда дисперсий. В случае равномерного дублирования это выполняют по критерию Кохрена – G (см. п. 3.3):

$$G = \frac{S_{y_{u \max}}^2}{\sum_{u=1}^N S_{y_u}^2}, \quad (5.7)$$

где $S_{y_{u \max}}^2$ – наибольшая в ряду дисперсия.

Ряд дисперсий считается однородным, если выполняется условие

$$G \leq G_{p,N,f}, \quad (5.8)$$

где $G_{p,N,f}$ – критерий, который определяется по табл. П8 приложения в зависимости от уровня значимости q , числа степеней свободы $f=n-1$ и числа опытов N .

После определения дисперсии опыта переходят к определению коэффициентов регрессии математической модели. Для представленных выше планов наиболее просто это сделать, применив метод наименьших квадратов.

5.3. Определение коэффициентов регрессии математической модели

5.3.1. Классический метод наименьших квадратов

Метод наименьших квадратов является самым точным и наиболее строгим способом построения на плоскости XU наилучшей прямой, или **прямой корреляции**, по некоторой группе точек. Допустим, что мы варьируем независимую переменную X в некотором интервале значений и с измерительного прибора считываем значения зависимой переменной Y . Задавая все возможные значения X и многократно считывая значения Y , мы бы получили бесконечную совокупность экспериментальных точек, заполняющих область значений (X, Y) .

Можно сказать, что **наилучшая линия**, проходящая через множество точек, рассеянных на плоскости XU , *должна занимать положение, при котором сумма квадратов отклонений точек от этой линии минимальна*. Именно это правило и объясняет происхождение термина **«метод наименьших квадратов»**.

Рассмотрим так называемую классическую задачу наименьших квадратов, когда известно, что:

- 1) бесконечная совокупность точек на плоскости XU дает прямую;
- 2) все случайные ошибки сконцентрированы в переменной Y ;
- 3) распределение случайных ошибок одинаково при любых значениях Y .

Запишем общее уравнение прямой:

$$Y_c = b_0 + b_1 X. \quad (5.9)$$

Нужно получить такие выражения для b_0 и b_1 , чтобы сумма квадратов отклонений переменной Y от этой прямой была минимальной. Пусть Y_c – точное значение Y при любом значении X и, следовательно, $(Y - Y_c)$ – отклонение при любом значении X . Необходимо минимизировать $\sum (Y - Y_c)^2$, или, что то же самое, $\sum (Y - b_1 X - b_0)^2$. В этом случае должны выполняться следующие соотношения:

$$\frac{d \sum (Y - b_1 X - b_0)^2}{db_0} = 0; \quad (5.10)$$

$$\frac{d \sum (Y - b_1 X - b_0)^2}{db_1} = 0. \quad (5.11)$$

Если имеется n отсчетов, то уравнение (5.10) принимает вид

$$nb_0 + b_1 \sum X = \sum Y \quad (5.12)$$

(здесь $\sum b_0 = nb_0$), а уравнение (5.11) запишется как

$$b_0 \sum X + b_1 \sum X^2 = \sum XY. \quad (5.13)$$

Решая эти два уравнения как систему, находим b_0 и b_1 :

$$b_0 = \frac{\sum X^2 \sum Y - \sum X \sum XY}{n \sum X^2 - (\sum X)^2}; \quad (5.14)$$

$$b_1 = \frac{n \sum XY - \sum X \sum Y}{n \sum X^2 - (\sum X)^2}. \quad (5.15)$$

Если известно, что функция XY проходит через начало координат, то в этом случае в формуле (5.9) $b_0 = 0$ и мы получаем более простое выражение для b_1 :

$$b_1 = \frac{\sum XY}{\sum X^2}. \quad (5.16)$$

Подстановка в формулы (5.14) и (5.15) обычных экспериментальных данных часто приводит к утомительным вычислениям и в результате получаются большие числа. Некоторого упрощения вычислений можно добиться с помощью следующих двух несложных приемов. Один из них состоит в том, что находятся средние значения X_{cp} и Y_{cp} и выбираются преобразованные переменные X' и Y' с помощью соотношений $X' = X - X_{cp}$ и $Y' = Y - Y_{cp}$. При этом начало координат системы XY временно переносится в центральную точку распределения, в этом случае XY и X^2 сокращаются. Другой прием состоит в том, что на глаз проводится приближенная прямая и с помощью этой прямой оцениваются приближенные значения двух постоянных B_0 и B_1 . Пусть известно приближенное уравнение

$$U' = B_0 + B_1 X, \quad (5.17)$$

с помощью которого получим уравнение для разности $(Y'-U')$. Из формул (5.9) и (5.17) находим

$$U'-Y'=(B_1-b_1)X'+(B_0-b_0). \quad (5.18)$$

Подставим теперь в формулы (5.14) и (5.15) $(Y'-U')$ вместо Y , а X оставим без изменения. Вместо b_0 и b_1 получим (B_1-b_1) и (B_0-b_0) , это небольшие числа, позволяющие быстро выполнять вычисления. Рассмотрим применение данного метода на примере.

Пример 5.1. Проверяется зависимость снижения температуры в трубе парового отопления от ее длины. Для данного типа трубы при неизменных окружающих условиях получены следующие данные:

Изменение температуры ΔT , °C	5	7	15	20	22
Длина L , м	4	8	12	16	20

Какого рода график можно построить на основе этих данных методом наименьших квадратов и что можно сказать об этих данных в целом?

Решение. На рис. 5.1 показаны графики, построенные по этим данным в линейных координатах. Допустим, что график функции имеет вид прямой, эту прямую можно провести на глаз и найти приближенные значения постоянных B_0 и B_1 для подстановки в уравнение (5.18). Определение значений температуры для всей трубы может привести к неудовлетворительной точности в оценке ΔT вследствие наличия градиентов в любом заданном поперечном сечении, в то же время мы считаем, что значение L определено точно. Мы хотим провести приближенную прямую через начало координат, так как известно, что истинная прямая должна пройти именно через эту точку. Однако мы не воспользуемся формулой (5.16), так как нас интересует вычисленное значение b_0 (которое должно быть равно нулю, если все вычисления правильны) как частичный показатель приемлемости полученных данных. Приближенная прямая, изображенная на рис. 5.1, имеет несколько меньший угловой коэффициент, но она проведена на глаз для облегчения вычислений (с угловым коэффициентом, равным единице). Приближенное уравнение (5.17) принимает вид:

$$U = 1 \cdot L + 0,$$

где U – температура в градусах Цельсия;
 L – длина трубы в метрах.
 Уравнение (5.18) преобразуется к виду:

$$\Delta U - \Delta T = (1 - b_1)L + (0 - b_0),$$

так как для приближенной прямой $B_1 = 1$ и $B_0 = 0$. Для дальнейшего облегчения вычислений перенесем оси координат, как показано на рис. 5.1, при этом $\Delta T' = \Delta T - 12$. Результаты вычислений сведены в табл. 5.3.

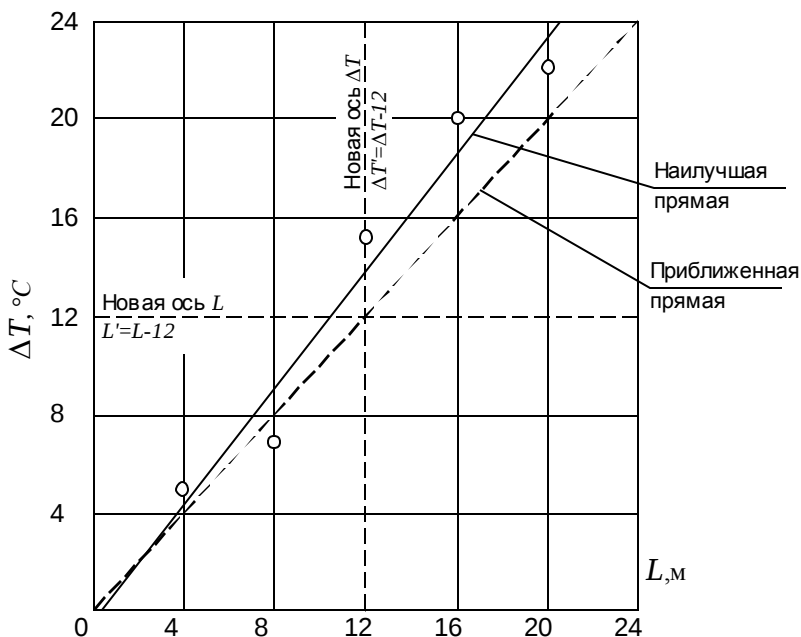


Рис. 5.1. Графическое изображение данных из примера 5.1

На графике показаны: перенос осей координат, приближенная прямая и наилучшая прямая, построенная методом наименьших квадратов.

$$\Delta U' = \Delta U - 12 \text{ и } L' = L - 12.$$

Таблица 5.3

Полная таблица вычислений примера 5.1

ΔT	L	$\Delta U=1 \times L$	$\Delta T-12=\Delta T'$	$\Delta U-12=\Delta U'$	$L-12=L'$	$\Delta U'-\Delta T'$	$(L')^2$	$L'(\Delta U'-\Delta T')$
					(X)	(Y)	(X ²)	(XY)
5	4	4	-7	-8	-8	-1	64	8
7	8	8	-5	-4	-4	1	16	-4
15	12	12	3	0	0	-3	0	0
20	16	16	8	4	4	-4	16	-16
22	20	20	10	8	8	-2	64	-16
$n=5$		$\Sigma X=0$	$\Sigma Y=-9$	$\Sigma X^2=160$	$\Sigma XY=-28$			

В этом простом случае перенос координатных осей и использование приближенной функции по существу не оправданы, однако данный пример позволяет достаточно наглядно проиллюстрировать эти методы. С помощью формул (5.14) и (5.15) получаем следующие результаты:

$$0 - b_0 = \frac{160 \cdot (-9) - 0 \cdot (-28)}{5 \cdot 160 - 0} = -\frac{9}{5} = -1,8;$$

$$b_0 = 1,8;$$

$$1 - b_1 = \frac{5 \cdot (-28) - 0 \cdot (-9)}{5 \cdot 160 - 0} = -\frac{28}{160}$$

$$b_1 = 1,18.$$

Однако необходимо иметь в виду, что эти числа были получены для преобразованной системы координат. Теперь запишем $\Delta T - 12 = 1,18(L - 12) + 1,8$, или $\Delta T = 1,18(L - 12) + 12 - 14,18 + 1,8$, т.е.

$$\Delta T = 1,18L - 0,4.$$

Это уравнение прямой, построенной по полученным данным способом наименьших квадратов, а сама прямая изображена на рис. 5.1. Хотя известно, что значение b_0 должно быть равно нулю, а не $-0,4$, эта небольшая величина отрезка, отсекаемого на координатной оси, не должна смущать. Полученные данные показывают, что мы не можем определить изменение температуры с ошибкой менее 1°C , поэтому при $b_0 = 0,4^\circ\text{C}$ эти данные можно считать удовлетворительными.

Поскольку принятая нами модель не что иное, как бесконечная последовательность идентичных кривых нормального распределения, эмпирический стандарт S можно найти по формуле

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - Y_c)^2}{n-1}, \quad (5.19)$$

где $(Y_i - Y_c)$ – отклонение произвольного отсчета относительно наилучшего значения Y_c , определяемого наилучшей прямой.

Можно легко вычислить или измерить отклонение любой точки от прямой, полученной способом наименьших квадратов, и таким путем найти среднее квадратическое отклонение для Y во всем интервале значений. Однако не следует забывать, что эта методика эффективна только в том случае, если прямая, построенная классическим методом наименьших квадратов, будет соответствовать действительной картине явления.

Пример 5.2. Вычислите среднее квадратическое отклонение для данных об изменении температуры в примере 5.1.

Решение. Составим табл. 5.4 данных для каждой из пяти точек, куда запишем истинное значение (т.е. полученное методом наименьших квадратов), а также измеренное значение, и по формуле (5.19) вычислим среднее квадратическое отклонение.

Таблица 5.4
Таблица вычислений примера 5.2

L	$1,18L$	$T_{расч}=1,18L-0,4$	$T_{изм}$	$(T_{расч}-T_{изм})^2$
4	4,75	4,35	5	0,42
8	9,5	9,1	7	4,42
12	14,2	13,8	15	1,45
16	19,0	18,6	20	1,97
20	23,7	23,3	22	1,7
				$\Sigma(T_{расч}-T_{изм})^2=9,96$

Откуда
$$S = \sqrt{\frac{9,96}{5-1}} = 1,56 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

Поскольку среднее квадратическое отклонение примерно в 1,5 раза больше вероятной ошибки, то можно сказать, что вероятная ошибка для температуры составляет $\sim 1 \text{ } ^\circ\text{C}$ и что половина данных имеет ошибку, не превышающую $\pm 1 \text{ } ^\circ\text{C}$, разумеется, при условии, что ошибки в измерении температуры распределены по нормальному закону.

5.3.2. Матричный подход к методу наименьших квадратов

Первая трудность для более сложных случаев – это громоздкость записи расчетных соотношений и связанная с ней сложность их анализа. В подобных случаях приходит на помощь матричная алгебра, она позволяет, в частности, упорядочить и в известной степени формализовать запись формул для коэффициентов при большом числе переменных и параметров. Кроме этого, она позволит сделать и существенно большее – подскажет, как можно целесообразно выбрать расположение экспериментальных точек, по которым ищутся коэффициенты b .

Прежде чем воспользоваться критерием метода наименьших квадратов:

$$\sum_{u=1}^N (y_u - \bar{y}_u)^2 = \min, \quad (5.20)$$

еще раз перепишем общее уравнение в кодированном виде:

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^n b_i x_i + \sum_{i=1; j \neq 1}^n b_{i,j} x_i x_j + \sum_{i=1}^n b_{ii} x_i^2 + \dots \quad (5.21)$$

Введем в него более удобные обозначения. Во-первых, введем еще один фиктивный фактор x_0 , тождественно равный единице. Тогда вместо двух первых членов в правой части уравнения можно написать один.

Во-вторых, обозначим все двойные, тройные и т.д. взаимодействия факторов, а также квадраты факторов символом x_i , а соответствующие коэффициенты – символом b_i (здесь индекс i принимает значения от $n+1$ до m , где m – полное принятое к рассмотрению число членов степенного ряда (5.21)). Тогда уравнение запишется в совсем простом виде:

$$y = \sum_{i=0}^m b_i x_i. \quad (5.22)$$

В выражении (5.22) индекс i относится теперь не только к номеру собственно фактора, но также и к номеру взаимодействия или квадратичного члена. Поясним сказанное простым примером, которым будем пользоваться и дальше. Пусть имеем два фактора x_1 и x_2 . Уравнение (5.21) для двух факторов имеет вид

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_{12} x_1 x_2 + b_{11} x_1^2 + b_{22} x_2^2. \quad (5.23)$$

Уравнение (5.23), пользуясь принятыми обозначениями, запишем в виде

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_4 + b_5 x_5, \quad (5.24)$$

где $x_0 = 1$;
 $x_3 = x_1 x_2$; $b_3 = b_{12}$;
 $x_4 = x_1^2$; $b_4 = b_{11}$;
 $x_5 = x_2^2$; $b_5 = b_{22}$.

Очевидно, что подобную операцию можно сделать при любом n и при любом числе членов ряда. Теперь перейдем к матричной записи уравнений, необходимых для определения коэффициентов b . Если было проведено N опытов, в каждом из которых задавалось определенное сочетание факторов (например, в u -м опыте $x_{0u}, x_{1u}, x_{2u}, \dots, x_{mu}$), и получились соответствующие значения y (в u -м опыте y_u), то все сочетания факторов можно представить матрицей X , все результаты – матрицей Y , а все искомые коэффициенты – матрицей B :

$$X = \begin{pmatrix} x_{01} & x_{11} & x_{21} \dots & x_{i1} \dots & x_{m1} \\ x_{02} & x_{12} & x_{22} \dots & x_{i2} \dots & x_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{0u} & x_{1u} & x_{2u} \dots & x_{iu} \dots & x_{mu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{0N} & x_{1N} & x_{2N} \dots & x_{iN} \dots & x_{mN} \end{pmatrix};$$

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_u \\ \dots \\ y_N \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_u \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Матрица X – прямоугольная, имеет $1+m$ столбцов и N строк; матрица-столбец Y имеет N элементов; матрица-столбец B имеет

$1+m$ элементов. Приведенные матрицы можно использовать для записи системы нормальных уравнений в матричной форме:

$$\mathbf{X}_t \mathbf{X} \mathbf{B} = \mathbf{X}_t \mathbf{Y}, \quad (5.25)$$

или

$$\mathbf{C} \mathbf{B} = \mathbf{X}_t \mathbf{Y}, \quad (5.26)$$

где $\mathbf{X}_t$ – транспонированная матрица $\mathbf{X}$, т.е. такая, в которой все строки, содержащиеся в матрице $\mathbf{X}$, заменены столбцами:

$$\mathbf{X}_t = \begin{pmatrix} x_{01} & x_{02} & x_{03} \dots & x_{0u} \dots & x_{0N} \\ x_{11} & x_{12} & x_{13} \dots & x_{1u} \dots & x_{1N} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \dots & x_{2u} \dots & x_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{i1} & x_{i2} & x_{i3} \dots & x_{iu} \dots & x_{iN} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} & x_{m2} & x_{m3} \dots & x_{mu} \dots & x_{mN} \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{X}_t \mathbf{X}.$$

В матрице $\mathbf{X}_t$, очевидно, N столбцов и $1+m$ строк; матрица $\mathbf{C}$ – квадратная и имеет $1+m$ строк и столбцов.

Для того чтобы получить матрицу $\mathbf{B}$, нужно умножить слева обе части уравнения (5.26) на матрицу $\mathbf{C}^{-1}$, обратную по отношению к $\mathbf{C}$. Тогда $\mathbf{C}^{-1} \mathbf{C} = \mathbf{E}$ (единичная матрица) и, следовательно,

$$\mathbf{B} = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{X}_t \mathbf{Y}. \quad (5.27)$$

Мы обнаружили, что матрица $\mathbf{C} = \mathbf{X}_t \mathbf{X}$, связанная непосредственно с матрицей $\mathbf{X}$, играет исключительно важную роль в определении коэффициентов, и поэтому переходим к ее анализу.

В соответствии с правилами умножения матриц каждый элемент матрицы $\mathbf{C}$, расположенный на главной диагонали, имеет

вид: $\sum_{u=1}^N x_{iu}^2$, где $i = 0, 1, 2, \dots, m$; элементы матрицы $\mathbf{C}$, симметрично

расположенные сверху и снизу от главной диагонали, равны между собой:

$$\sum_{u=1}^N x_{iu} \cdot x_{ju} = \sum_{u=1}^N x_{ju} \cdot x_{iu},$$

где $i = 0, 1, 2, \dots, m; j \neq i$,

т.е. матрица $\mathbf{C}$ симметрична. Для того чтобы существовала матрица $\mathbf{C}^{-1}$, матрица $\mathbf{C}$ порядка $(1+m \times 1+m)$ должна быть невырожденной, это условие выполняется, если все $1+m$ столбцов матрицы $\mathbf{X}$ линейно независимы. Кроме того, необходимо, чтобы число различных сочетаний переменных X (число опытов N) было не меньше, чем $1+m$: $N \geq 1+m$.

Последнее требование очевидно и с физической точки зрения. Если мы хотим найти $1+m$ коэффициентов b , то для этого необходимо провести по крайней мере не меньшее число опытов в неповторяющихся ситуациях.

Мы выяснили условия, при выполнении которых существует возможность нахождения обратной матрицы $\mathbf{C}^{-1}$. Пусть мы получили для своей задачи $\mathbf{C}^{-1}$ и в соответствии с (5.27) нашли коэффициенты b . Далее, если мы обнаружим, что точность аппроксимации нас не устраивает, т.е. число членов полинома мало, все нужно начинать сначала. Добавление или изъятие хотя бы одного нового члена в уравнение (5.21), т.е. любое изменение m хотя бы на единицу, приведет к изменению всех коэффициентов b . Снова надо обращать матрицу $\mathbf{C}$ и т.д. Иными словами, при изложенной процедуре все коэффициенты оказываются зависимыми друг от друга. Именно эти обстоятельства – сложность расчетов и необходимость их повторения в каждой задаче по нескольку раз – делают эксперимент весьма громоздким и мало удобным при применении на практике методом. Но мы можем использовать возможность назначать сочетания факторов по своему усмотрению, т.е. именно то, что отличает активный эксперимент от пассивного.

Попытаемся теперь обнаружить, какие же нужно использовать сочетания факторов в каждом опыте, чтобы избежать отмеченных трудностей. Здесь нам опять поможет матричная форма записи. Вопрос, который мы только что поставили, можно сформулировать иначе: как нужно строить матрицу $\mathbf{X}$, чтобы матрица $\mathbf{C}$ легко обращалась и чтобы коэффициенты b определялись с помощью этой матрицы независимо друг от друга?

Оба требования будут выполнены, если матрица $\mathbf{C}$ будет *диагональной*, т.е. если все элементы, кроме расположенных на главной диагонали, будут равны нулю:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{00} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & c_{11} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & c_{ii} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & c_{mm} \end{pmatrix}.$$

Действительно, при этом обратная матрица найдется элементарно просто:

$$\mathbf{C}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c_{00}} & & & & \\ & \frac{1}{c_{11}} & & & \\ & & \frac{1}{c_{ii}} & & \\ & & & \frac{1}{c_{mm}} & \\ & & & & \end{pmatrix},$$

и, что не менее важно, система уравнений (5.27) распадается на $1+m$ независимых уравнений вида:

$$b_i = \frac{1}{c_{ii}} \sum_{u=1}^N x_{iu} y_u \quad (i=0, 1, 2, \dots, m), \quad (5.28)$$

или если учесть, что $c_{ii} = \sum_{u=1}^N x_{iu}^2$, то:

$$b_i = \frac{\sum_{u=1}^N x_{iu} y_u}{\sum_{u=1}^N x_{iu}^2}. \quad (5.29)$$

Итак, мы должны так строить матрицу $\mathbf{X}$ (так планировать эксперимент), чтобы матрица $\mathbf{C}$ удовлетворяла условию

$$c_{ij} = c_{ji} = \sum_{u=1}^N x_{iu} x_{ju} = \sum_{u=1}^N x_{ju} x_{iu} = 0. \quad (5.30)$$

В последнем условии i и j – номера различных столбцов в матрице X . Следовательно, условие (5.30) эквивалентно следующему: любое произведение двух различных столбцов в матрице X должно быть равно нулю. Это условие называют условием **ортогональности** матрицы X , а соответствующее планирование (определение сочетаний факторов) – **ортогональным планированием**.

Конечно такой подход не единственный в теории планирования эксперимента, однако в рамках данного пособия рассматривается главным образом ортогональное планирование.

Для ПФЭ 2^k характерно соотношение

$$\sum_{u=1}^N x_{iu}^2 = N, \quad (5.31)$$

и поэтому формула (5.29) для определения коэффициентов упрощается и приобретает вид

$$b_i = \frac{\sum_{u=1}^N x_{iu} y_u}{N}. \quad (5.32)$$

5.3.3. Быстрые и приближенные методы построения наилучшей прямой

При большом числе точек метод наименьших квадратов даже при специально подобранных простых числах связан с утомительными вычислениями, отнимающими много времени.

В некоторых случаях можно применить чисто графический способ построения кривых методом наименьших квадратов, разработанный Асковицем. Его применение наиболее удобно в одном частном случае, а именно когда интервалы S_x между значениями переменной X одинаковы. Следовательно, если предполагается применять метод Асковица, то необходимо спланировать эксперимент таким образом, чтобы контролируемая переменная X изменялась каждый раз на одинаковую величину либо так, чтобы на прямой были получены равные интервалы (рис. 5.2).

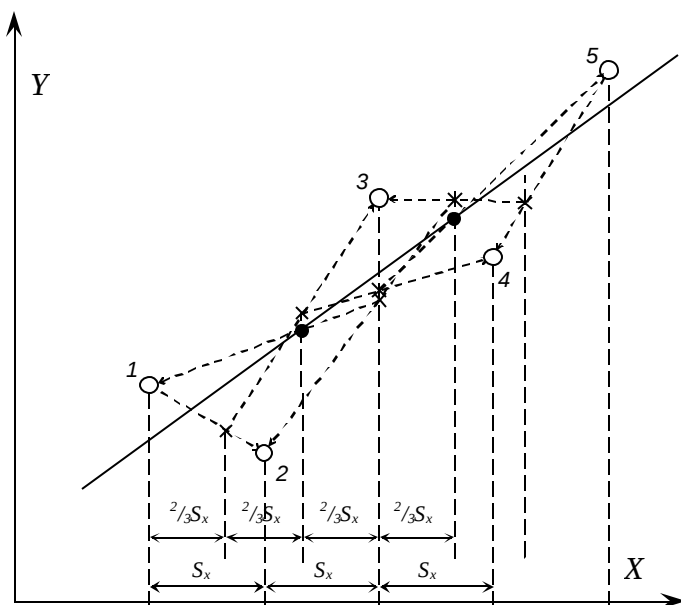


Рис. 5.2. Пример построения прямой графическим методом наименьших квадратов (методом Асковица):

- – экспериментальные точки; × – точки, соответствующие $\frac{2}{3}S_x$;
- – точки на прямой, построенной методом наименьших квадратов

Если данное условие выполняется, то провести прямую не составляет большого труда. Соединяем точки 1 и 2 отрезком прямой. Двигаясь в сторону точки 2, проходим вдоль этого отрезка расстояние, соответствующее $\frac{2}{3}S_x$, и делаем отметку. Соединяем полученную точку с точкой 3, двигаясь в сторону точки 3, снова проходим расстояние, соответствующее $\frac{2}{3}S_x$, и делаем новую отметку. Повторяем эту процедуру до тех пор, пока не будет получена последняя точка. Эта последняя точка лежит на наилучшей прямой, т.е. прямой наименьших квадратов. Теперь начинаем построение с другого конца и повторяем весь процесс, двигаясь в противоположном направлении. Находим вторую точку, лежащую на прямой. (Полностью построение прямой по пяти точкам см. на рис. 5.2.) Хотя на первый взгляд этот метод и кажется сложным, он все же довольно прост, и с помощью линейки и циркуля (для деления отрезков в отношении 2:3) за несколько минут можно обрабо-

тать 20–30 точек. Для проверки построение прямой можно произвести с другого конца, откладывая отрезки, соответствующие $\frac{2}{3}S_x$.

Третья точка также будет лежать на прямой (на рис. 5.2 это построение не показано).

Метод Асковица не является приближенным, если по оси X откладываются совершенно одинаковые отрезки, но он имеет те же недостатки, что и классический метод, а именно: только переменная Y может иметь ошибку, график должен быть линейным и все данные должны иметь одинаковую точность. Этот важный метод построения прямой позволяет лишь найти прямую и не дает какого-либо количественного показателя точности. Применяя простой метод, описанный в предыдущем примере, легко найти величину отклонения точек от прямой и вычислить среднюю квадратическую ошибку.

Пример 5.3. Используя данные из примера 5.1, с помощью графического метода Асковица найдите прямую наименьших квадратов.

Решение. Построение прямой показано на рис. 5.3.

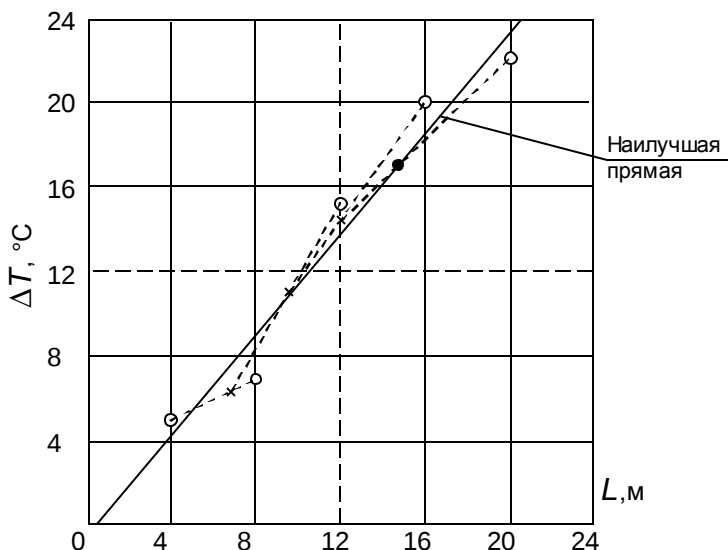


Рис. 5.3. Построение наилучшей прямой методом Асковица по данным из примера 5.3

Применение этого способа для построения прямой возможно благодаря тому, что каждый раз увеличение переменной L проис-

ходит на одинаковую величину. Получаем в точности такую же прямую, что и при использовании численного метода, в пределах ошибок графического построения.

Применение метода возможно, поскольку эти данные имеют равные приращения по оси X . Чтобы не усложнять чертеж, здесь показано нахождение только одной из двух точек.

5.4. Проверка статистической значимости коэффициентов регрессии

Проверить значимость коэффициентов регрессии – значит установить, достаточна ли величина коэффициента для статистически обоснованного вывода о том, что коэффициент регрессии отличен от нуля.

При ортогональном планировании это можно осуществить двумя равноценными способами. В одном случае можно сравнить абсолютную величину коэффициента с его доверительным интервалом. Коэффициент считается значимым, когда его абсолютная величина больше доверительного интервала или равна ему:

$$|b_i| \geq \Delta b_i = t_{p; f_1} \cdot S_{b_i}. \quad (5.33)$$

В другом случае для проверки гипотезы о равенстве нулю коэффициента регрессии пользуются критерием Стьюдента – t . Коэффициент значим, если расчетное значение t – критерия больше или равно табличному $t_{p; f_1}$ (см. табл. П5 приложения) на уровне значимости q и при числе степеней свободы f_1 , с которым определена дисперсия S_y^2 и, следовательно, S_b^2 , т.е:

$$t = \frac{|b_i|}{S_{b_i}} \geq t_{p; f_1}, \quad (5.34)$$

где b_i – величина коэффициента регрессии;

S_{b_i} – среднее квадратическое отклонение коэффициента регрессии.

В случае **однофакторной модели** первого порядка $\hat{y} = b_0 + b_1 x$ дисперсии S_b^2 коэффициентов b_0 и b_1 можно рассчитать из уравнений:

$$S_{b_0}^2 = \frac{\sum_{i=1}^N x_i^2}{N \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} S_y^2 = S_y^2 \left(\frac{1}{N} + \frac{\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \right); \quad (5.35)$$

$$S_{b_1}^2 = \frac{S_y^2}{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}, \quad (5.36)$$

где N – число опытов;

S_y^2 – дисперсия воспроизводимости;

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} \quad \text{– среднее значение фактора } x.$$

При **многофакторных моделях** значения дисперсии коэффициентов в уравнениях регрессии можно определить только с помощью матричной алгебры.

Все статистические свойства коэффициентов, а следовательно, и уравнения регрессии, определяет обратная матрица, умноженная на оценку дисперсии опыта S_y^2 .

$$DB = (X_t X)^{-1} S_y^2, \quad (5.37)$$

где X – матрица факторов;

X_t – транспонированная матрица;

DB – дисперсия коэффициентов регрессии.

Эту матрицу часто называют **матрицей дисперсий – ковариаций** или **ковариационной**. Элементами главной диагонали этой матрицы являются дисперсии коэффициентов регрессии. В случае ортогонального планирования она выглядит следующим образом:

$$DB = (X_t X)^{-1} S_y^2 = \begin{vmatrix} c_{00} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_{11} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & c_{kk} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} S_{b_0}^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & S_{b_1}^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & S_{b_k}^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \left\| \begin{array}{cccc} \frac{S_y^2}{\sum_{u=1}^N x_{0u}^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{S_y^2}{\sum_{u=1}^N x_{1u}^2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{S_y^2}{\sum_{u=1}^N x_{ku}^2} \end{array} \right\|. \quad (5.38)$$

Таким образом, **при ортогональном планировании** дисперсии оценок коэффициентов регрессии в общем случае рассчитываются по формуле

$$S_{bi}^2 = \frac{S_y^2}{\sum_{u=1}^N x_{iu}^2} = \frac{S_y^2}{N}. \quad (5.39)$$

В случае **дублирования опытов** ковариационная матрица ортогональных планов имеет вид

$$\begin{aligned} & (\mathbf{X}_t \mathbf{P} \mathbf{X})^{-1} S_y^2 = \\ & = \left\| \begin{array}{cccc} S_{b0}^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & S_{b1}^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & S_{bk}^2 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cccc} \frac{S_y^2}{n_1 \sum_{u=1}^N x_{0u}^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{S_y^2}{n_2 \sum_{u=1}^N x_{1u}^2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{S_y^2}{n_N \sum_{u=1}^N x_{ku}^2} \end{array} \right\|, \quad (5.40) \end{aligned}$$

где $\mathbf{P}$ – диагональная матрица дублирования опытов.

При дублировании n_1 раз в первом опыте:

$$P = \begin{pmatrix} n_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.41)$$

При равномерном дублировании n раз на каждом уровне фактора x :

$$P = \begin{pmatrix} n & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & n & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & n \end{pmatrix}. \quad (5.42)$$

При неравномерном дублировании опытов:

$$P = \begin{pmatrix} n_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & n_2 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & n_N \end{pmatrix}. \quad (5.43)$$

Отсюда, в случае **равномерного дублирования**, если число дублей равно n , дисперсию оценок коэффициентов рассчитывают по формуле

$$S_{bi}^2 = \frac{S_y^2}{n \sum_{u=1}^N x_{iu}^2} = \frac{S_y^2}{nN}. \quad (5.44)$$

5.5. Проверка адекватности математической модели

Следующим этапом обработки данных является проверка гипотезы об адекватности модели, т.е. поиск ответа на вопрос, можно ли использовать полученное уравнение или необходима более сложная модель.

Гипотезу об адекватности чаще всего проверяют с помощью критерия Фишера – F . Для этого находят его расчетное значение по формуле

$$F = \frac{S_{ad}^2}{S_y^2}, \quad (5.45)$$

где S_y^2 – дисперсия опыта, определенная с числом степеней свободы f_1 ;

S_{ad}^2 – дисперсия адекватности, определенная с числом степеней свободы f_2 .

Гипотезу об адекватности уравнения принимают в том случае, когда расчетное значение F – критерия не превышает табличного (см. табл. П7 приложения), для выбранного уровня значимости q , т.е.:

$$F \leq F_{f_2; f_1}. \quad (5.46)$$

Дисперсия адекватности оценивает разброс опытных значений y относительно значений, предсказываемых уравнением регрессии $\hat{y}$. В общем виде (при отсутствии дублирования опытов в плане) S_{ad}^2 рассчитывается по формуле

$$S_{ad}^2 = \frac{\sum_{u=1}^N (y_u - \hat{y}_u)^2}{N - k'} = \frac{SS_{ad}}{f_2}; \quad (5.47)$$

$$f_2 = N - k', \quad (5.48)$$

где y_u – опытные значения функции цели в u -м опыте;

$\hat{y}_u$ – значения, предсказываемые уравнением регрессии в u -м опыте;

N – число опытов плана;

k' – число оставленных коэффициентов уравнения (включая b_0).

Если для определения S_y^2 дублируются опыты плана, то числитель формулы (5.47) рассчитывают по-разному, в зависимости от способа дублирования.

При **неравномерном дублировании** опытов:

$$SS_{a\partial} = \sum_{u=1}^N n_u (\bar{y}_u - \hat{y}_u)^2, \quad (5.49)$$

где $\bar{y}_u$ – среднее значения из n_u дублей в u -м опыте.

При **равномерном дублировании** опытов:

$$SS_{a\partial} = n \sum_{u=1}^N (\bar{y}_u - \hat{y}_u)^2. \quad (5.50)$$

Если **дублируется только один** опыт, например первый:

$$SS_{a\partial} = n_1 (\bar{y}_1 - \hat{y}_1)^2 + \sum_{u=2}^N (\bar{y}_u - \hat{y}_u)^2. \quad (5.51)$$

Пример 5.4. Проверить адекватность уравнения регрессии, рассчитанного по опытными данным табл.5.5:

$$\hat{y} = 113,25 - 0,76x_1 - 0,331x_2,$$

Решение. С целью определения дисперсии воспроизводимости S_y^2 на уровне $x_1=41$ и $x_2=22$ проведено шестикратное дублирование опыта.

$$y_{\partial} = \{69,8; 76,2; 72,8; 70,2; 67,7; 70,5\}.$$

По (5.1) рассчитываем дисперсию воспроизводимости:

$$\bar{y}_{\partial} = 71,2; \quad S_y^2 = 8,65; \quad f_1 = 5.$$

Рассчитаем дисперсию адекватности по уравнениям (5.47) и (5.51). Промежуточные результаты расчета сведены в табл. 5.6.

$$n_{\partial} = 6;$$

$$\sum_{u=1}^N (y_u - \hat{y}_u)^2 + n_o (\bar{y}_o - \hat{y}_o)^2 = 4137 + 6 \cdot 13,01 = 491,76 ;$$

$$S_{ao}^2 = \frac{491,76}{18} = 27,32 ; \quad f_2 = 21 - 3 = 18 .$$

Таблица 5.5

Опытные данные примера 5.4

y	x_1	x_2	yx_1	yx_2	x_1x_2	x_1^2	x_2^2
85,5	25,5	17,3	2180,25	1479,15	441,15	650,25	229,29
81,7	34,1	19,8	2785,97	1617,66	665,18	1162,81	392,04
71,7	37,3	30,1	2674,41	2158,17	1122,73	1391,28	306,01
62,7	44,7	31,9	2802,69	2000,13	1425,93	1998,09	1017,61
66,4	44,6	38,3	2961,44	2543,12	1708,18	1989,16	1066,89
70,6	41,0	26,5	2894,60	1870,90	1086,5	1681,0	702,25
65,0	49,5	36,2	3217,50	2353,0	1791,9	2450,25	1310,44
72,8	45,1	21,0	3283,28	1528,8	947,1	2034,01	441,0
67,6	56,5	29,5	3819,40	1994,2	1666,75	3192,25	870,25
90,0	35,4	29,4	3186,0	2241,0	881,46	1253,16	620,01
60,2	54,9	25,0	3304,98	1505,0	1372,5	3014,01	625,0
74,8	32,8	28,0	2453,44	2094,4	918,4	1075,84	789,0
63,4	55,5	33,9	3519,70	2149,26	1881,45	3080,25	1149,21
74,2	41,5	16,1	3079,30	1194,62	668,15	1722,25	259,21
71,6	41,5	21,0	2971,40	1503,6	871,5	1722,25	441,0
60,6	52,7	28,7	3162,0	1722,0	1512,49	2777,49	823,69
81,1	37,9	20,3	3073,69	1646,33	769,33	1436,41	412,09
71,5	43,9	19,9	3138,85	1422,85	873,61	1927,21	396,01
77,2	35,0	22,6	2702,0	1744,72	791,0	1225,00	510,76
91,2	27,8	20,1	2535,36	1833,12	558,78	772,84	404,01
Σ 1459,2	837,2	511,1	59745,26	36602	21964,1	36555,6	13830,7

Таблица 5.6

Результаты расчета примера 5.4

y_u	$\hat{y}_u$	$(\bar{y}_u - \hat{y}_u)^2$	y_u	$\hat{y}_u$	$(\bar{y}_u - \hat{y}_u)^2$
85,5	88,14	6,97	60,2	63,25	9,3
81,7	80,78	0,85	74,8	79,05	18,06
71,7	74,9	10,24	63,4	59,85	12,6
62,7	68,7	36,0	74,2	76,38	4,75
66,4	66,7	0,09	71,6	74,76	9,98
70,6	73,3	7,29	60,0	63,7	13,69
65,0	63,65	1,87	81,1	77,73	11,36
72,8	72,0	0,64	71,5	73,3	3,24
67,6	60,5	50,4	77,2	79,17	3,88
90,0	76,6	179,66	91,2	85,47	32,83
Для $x_1=41$; $x_2=22$			$\bar{y}_o = 71,2$; $\hat{y}_o = 74,8$		$(\bar{y}_o - \hat{y}_o)^2 =$ $= 13,01$

Рассчитаем соотношение

$$F = \frac{S_{ad}^2}{S_y^2} = \frac{27,32}{8,65} = 3,16.$$

Из табл.7 приложения для $f_1=18$ и $f_2=5$ найдем $F_{5;18} = 4,6$.

Выполняется соотношение $F < F_{5;18}$, следовательно, дисперсии однородны и, следовательно, модель адекватна опытным данным.

Пример 5.5. По данным табл. 5.7 рассчитаны математические модели I и II порядка:

$$\hat{y}_I = -1,43 + 10,39x;$$

$$\hat{y}_{II} = 1,13 + 3,02x + 2,05x^2.$$

Для адекватных моделей оценить значимость коэффициентов регрессии.

Решение. Проверим адекватность моделей.

Для расчета дисперсии воспроизводимости по (5.5) и адекватности по (5.47) и (5.50) сначала определим математические ожидания $\bar{y}_i$ и дисперсии S_i^2 на каждом уровне фактора x :

$$\bar{y}_1 = 1,27; \bar{y}_2 = 5,9; \bar{y}_3 = 15,77; \bar{y}_4 = 28,5;$$

$$S_1^2 = 0,037; S_2^2 = 0,21; S_3^2 = 0,3; S_4^2 = 0,16.$$

Таблица 5.7

Исходные данные примера 5.5

Номера опытов	Уровни фактора x			
	0	1	2	3
1	1,06	5,44	15,2	28,9
2	1,44	6,39	16,3	28,1
3	1,3	5,9	15,8	28,5

Определим дисперсию воспроизводимости

$$S_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^4 S_i^2}{4} = 0,176$$

с числом степеней свободы $f_1 = 4(3-1) = 8$.

Для модели первого порядка дисперсия адекватности составит

$$S_{адI}^2 = \frac{3 \cdot \sum_{i=1}^4 (\bar{y}_i - \hat{y}_{II})^2}{4-2} = 35,61$$

с числом степеней свободы $f_{2I} = 4-2 = 2$.

Для модели второго порядка соответственно:

$$S_{адII}^2 = \frac{3 \cdot \sum_{i=1}^4 (\bar{y}_i - \hat{y}_{III})^2}{4-3} = 0,868;$$

$$f_{2II} = 4-3 = 1.$$

Расчетные значения F -критерия составили:

$$F_I = \frac{S_{a\partial I}^2}{S_y^2} = 202,3; \quad F_{II} = \frac{S_{a\partial II}^2}{S_y^2} = 4,9.$$

Из табл.7 приложения $f_1 = 4$ и $f_{2I} = 2$ на уровне значимости $q = 0,05$ находим $F_{2;4} = 6,9$.

$$F_I >> F_{f_2; f_1},$$

следовательно, модель I порядка явно неадекватна.

Для модели второго порядка при $f_1 = 4$ и $f_{2II} = 1$ из табл. 7 приложения находим: $F_{1;4} = 7,7$.

$$F_{II} < F_{f_2; f_1},$$

следовательно, модель II порядка адекватна опытным данным.

Оценим значимость коэффициентов регрессии модели II порядка. Матрица $\mathbf{X}$ имеет вид:

$$\mathbf{X} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix}.$$

На каждом уровне фактора x было проведено по 3 параллельных опыта, следовательно:

$$\mathbf{P} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

Для расчета $\mathbf{DB}$ по уравнению (5.38) необходимо определить транспонированную матрицу:

$$X_t = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 9 \end{vmatrix}.$$

Обозначим:

$$X_t P X = C = \begin{vmatrix} 12 & 18 & 42 \\ 18 & 42 & 108 \\ 42 & 108 & 294 \end{vmatrix}.$$

Обратная матрица C^{-1} равна:

$$C^{-1} = \begin{vmatrix} 0,32 & -0,35 & 0,08 \\ -0,35 & 0,82 & -0,25 \\ 0,08 & -0,25 & 0,08 \end{vmatrix}.$$

Тогда по (5.38):

$$S_b^2 = C^{-1} S_y^2 = \begin{vmatrix} 0,056 & -0,061 & 0,014 \\ -0,061 & 0,14 & 0,044 \\ 0,014 & 0,044 & 0,014 \end{vmatrix},$$

следовательно, $S_{b_0}^2 = 0,056$; $S_{b_1}^2 = 0,14$; $S_{b_2}^2 = 0,014$;

$$S_{b_0} = 0,24; \quad S_{b_1} = 0,37; \quad S_{b_2} = 0,118$$

с числом степеней свободы $f_1 = 8$.

Для $f_1 = 8$ и $q = 0,05$ (см. табл. П5 приложения)

$$t_{0,95;8} = 2,306.$$

$$t_{b_0} = \frac{1,13}{0,24} = 4,7 > 2,306, \quad b_0 - \text{значим};$$

$$t_{b_1} = \frac{3,02}{0,37} = 8,16 > 2,306, \quad b_1 - \text{значим};$$

$$t_{b_2} = \frac{2,05}{0,118} = 17,3 > 2,306, \quad b_2 - \text{значим.}$$

Доверительные интервалы для «истинных» значений коэффициентов регрессии β_i определяются из условия

$$b_i - t_{p;f} \cdot S_{b_i} < \beta_i < b_i + t_{p;f} \cdot S_{b_i}. \quad (5.52)$$

Так, для коэффициентов регрессии II порядка примера 5.5 доверительные интервалы составят:

$$0,57 < \beta_0 < 1,68;$$

$$2,16 < \beta_1 < 3,87;$$

$$1,78 < \beta_2 < 2,32.$$

То, что ни в один из доверительных интервалов не попадает нуль, подтверждает вывод о значимости коэффициентов b_0 , b_1 и b_2 .

Контрольные вопросы

1. Перечислите основные этапы проведения эксперимента.
2. Какие основные задачи необходимо решить при подготовке к выполнению эксперимента?
3. Как выбирается очередность проведения опытов?
4. Перечислите основные этапы статистической обработки результатов эксперимента.
5. Объясните порядок определения дисперсии опыта.
6. Как определить коэффициенты математической модели?
7. В чем состоит суть метода наименьших квадратов?
8. Как оценивается значимость коэффициентов математической модели?
9. Как проверить гипотезу об адекватности полученного регрессионного уравнения?

6. ПРИМЕНЕНИЕ ФАКТОРНЫХ ПЛАНОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ КОНКРЕТНЫХ ЗАДАЧ

6.1. Использование полного факторного эксперимента 2^4 с равномерным дублированием опытов

Использование планов полного факторного эксперимента типа 2^4 проиллюстрируем следующим примером.

Изучали зависимость некоторых литейных и механических свойств синтетического чугуна, предназначенного для литья в кокиль, от состава сплава по основным компонентам, условий перегрева и модифицирования [9].

В качестве независимых переменных были выбраны: содержание в чугуне кремния (X_1), углерода (X_2), температура перегрева (X_3) и модифицирования, она же заливки (X_4). Зависимыми переменными являлись различные литейные и механические свойства чугунов, но рассмотрено построение модели только для их жидкотекучести, определявшейся по спиральной пробе (y).

Локальную область определения факторов установили из априорных соображений. Было решено варьировать каждый из факторов на двух уровнях. Интервалы варьирования факторов и их значения в натуральном масштабе на основном, верхнем и нижнем уровнях указаны в табл. 6.1.

Таблица 6.1

Уровни факторов

Факторы	X_1 (Si,%)	X_2 (C,%)	X_3 ($t_{пер}, ^\circ C$)	X_4 ($t_{мод}, ^\circ C$)
Основной уровень ($x_i=0$)	0,75	3,0	1575	1450
Интервал варьирования (ΔX_i)	0,25	0,5	25	50
Верхний уровень ($x_i=1$)	1,0	3,5	1600	1500
Нижний уровень ($x_i=-1$)	0,5	2,5	1550	1400

Кодированные значения факторов (x_i) связаны с натуральными (X_i) соотношениями:

$$x_1 = \frac{X_1 - 0,75}{0,25} ; \quad x_2 = \frac{X_2 - 3}{0,5} ;$$

$$x_3 = \frac{X_3 - 1575}{25}; \quad x_4 = \frac{X_4 - 1450}{50}.$$

Для получения возможно более полной информации об изучаемых зависимостях решили воспользоваться полным факторным экспериментом 2^4 . План эксперимента в кодовом и натуральном масштабах записан в табл. 6.2.

В соответствии с выбранным планом было выполнено и рандомизированно во времени 16 опытов, порядок реализации указан в табл. 6.2. Каждый опыт повторяли 3 раза.

Шихтой для приготовления чугунов служили отходы углеродистых сталей. Плавки вели в набивных тиглях с кислой футеровкой в высокочастотной индукционной печи МГП-50; продолжительность каждой плавки примерно 1,5 ч; время перегрева не превышало 10 мин. Во всех случаях шихту науглероживали электродным порошком, загружавшимся вместе с шихтой в холодную печь. Чугуны модифицировали в ковше силикокальцием (0,5 % Si). Результаты экспериментов (средние из трех опытов) приведены в последних столбцах табл. 6.2.

Рассмотрим последовательность обработки результатов эксперимента, в данном случае равномерного дублирования опытов.

1. Расчет дисперсии опыта. В табл. 6.2 приведены результаты определения жидкотекучести во всех трижды повторенных 16 опытах. Для каждого опыта по формуле (5.2) рассчитана построчная дисперсия $S_{y_u}^2$.

Проверили однородность ряда построчных дисперсий, для чего по формуле (5.6) рассчитали величину критерия Кохрена:

$$\sum_{u=1}^N S_{y_u}^2 = 2950; \quad S_{y_u \max}^2 = 475;$$

$$G^{расч} = \frac{475}{2950} = 0,16.$$

При $q = 0,05$, числе степеней свободы $f_1 = n - 1 = 2$ и числе опытов $N=16$ табличное значение G -критерия: $G_{0,95;2;16}^{табл} = 0,322$ (взято из табл. П8 приложения линейной интерполяцией). Поскольку выполняется условие

$$G^{расч} = 0,16 < 0,322 = G_{0,95;2;16}^{табл},$$

Таблица 6.2

План 2⁴ и результат опытов

Но- мер опыта	Порядок реали- зации	Кодовый масштаб				Натуральный масштаб				у жидкоте- кучесть, мм
		x_1	x_2	x_3	x_4	X_i (Si,%)	X_2 (C,%)	X_3 ($t_{неp, 0}C$)	X_4 ($t_{нод, 0}C$)	
1	9	+	+	+	+	1	3,5	1600	1500	970
2	2	-	+	+	+	0,5	3,5	1600	1500	800
3	7	+	-	+	+	1	2,5	1600	1500	640
4	1	-	-	+	+	0,5	2,5	1600	1500	550
5	13	+	+	-	+	1	3,5	1550	1500	890
6	14	-	+	-	+	0,5	3,5	1550	1500	750
7	3	+	-	-	+	1	2,5	1550	1500	600
8	6	-	-	-	+	0,5	2,5	1550	1500	500
9	11	+	+	+	-	1	3,5	1600	1400	420
10	16	-	+	+	-	0,5	3,5	1600	1400	680
11	10	+	-	+	-	1	2,5	1600	1400	380
12	12	-	-	+	-	0,5	2,5	1600	1400	340
13	8	+	+	-	-	1	3,5	1550	1400	390
14	4	-	+	-	-	0,5	3,5	1550	1400	620
15	5	+	-	-	-	1	2,5	1550	1400	300
16	15	-	-	-	-	0,5	2,5	1550	1400	320

ряд дисперсий можно считать однородным. Поэтому по формуле (5.5) рассчитали дисперсию опыта $S_y^2 = 2950/16 = 184,4$, где число степеней свободы $f_1 = 16(3 - 1) = 32$ (табл. 6.3).

Таблица 6.3

Расчет дисперсии опыта

Номер опыта u	Номер дубля i	y (жидко- текучесть, мм)	$\bar{y}$	S_y^2	Но- мер опыта u	Но- мер дубля i	y (жидко- текучесть, мм)	$\bar{y}$	S_y^2
1	1	990	970	300	9	1	410	420	100
	2	960				2	420		
	3	960				3	430		
2	1	785	800	175	10	1	655	680	475
	2	810				2	695		
	3	805				3	690		
3	1	640	640	100	11	1	385	380	175
	2	650				2	390		
	3	630				3	365		
4	1	565	550	175	12	1	350	340	100
	2	545				2	340		
	3	540				3	330		
5	1	895	890	175	13	1	405	390	225
	2	875				2	375		
	3	880				3	390		
6	1	765	750	175	14	1	635	620	175
	2	745				2	615		
	3	740				3	610		
7	1	610	600	100	15	1	290	300	175
	2	590				2	315		
	3	600				3	295		
8	1	500	500	225	16	1	330	320	100
	2	515				2	320		
	3	485				3	310		

2. Расчет коэффициентов регрессии. В данном случае можно построить модель:

$$y = b_0 + \sum_{1 \leq i \leq 4} b_i x_i + \sum_{1 \leq i < j \leq 4} b_{ij} x_i x_j + \sum_{1 \leq i \leq j \leq l \leq 4} b_{ijl} x_i x_j x_l + b_{1234} x_1 x_2 x_3 x_4.$$

Для расчета коэффициентов этой модели в табл. 6.4 приведена расширенная матрица планирования и результаты опытов (средние из трех). Коэффициенты подсчитали по формуле (5.32). Их значения оказались следующими:

$$\begin{aligned} b_0 &= 571,9; & b_1 &= 1,9; & b_2 &= 118,1; & b_3 &= 25,6; \\ b_4 &= 140,6; & b_{12} &= -24,4; & b_{13} &= 3,1; & b_{14} &= 60,6; \\ b_{23} &= 1,9; & b_{24} &= 21,9; & b_{34} &= 1,9; & b_{123} &= 3,1; \\ b_{124} &= 39,4; & b_{134} &= -0,6; & b_{234} &= 3,1; & b_{1234} &= 8,1. \end{aligned}$$

3. Проверка статистической значимости коэффициентов.

Поскольку в данном случае использовали равномерное дублирование опытов, дисперсию оценок коэффициентов рассчитали по формуле (5.45): $S_{b_i}^2 = \frac{184,4}{3 \cdot 16} = 3,84$. Соответственно средне-квадратичная ошибка $S_{b_i} = 1,96$.

Далее, выбрали доверительную вероятность $p = 0,95$ и, взяв при числе степеней свободы $f_1 = 32$ из табл. П5 приложения значение t -критерия $t_{0,95;32} = 2,04$, по формуле (5.33) подсчитали доверительный интервал коэффициентов регрессии:

$$\Delta b_i = 2,04 \cdot 1,96 = 4,0.$$

Коэффициенты, абсолютная величина которых равна доверительному интервалу или больше его, следует признать статистически значимыми. В данном случае это $b_0, b_2, b_3, b_4, b_{12}, b_{14}, b_{24}, b_{124}$ и b_{1234} . Статистически незначимые коэффициенты (в данном случае $b_1, b_{13}, b_{23}, b_{34}, b_{123}, b_{134}$ и b_{234}) из модели можно исключить.

Итак, после реализации полного факторного эксперимента 2^4 получено следующее уравнение регрессии:

$$y = 571,9 + 118,1 x_2 + 25,6 x_3 + 140,6 x_4 - 24,4 x_1 x_2 + 60,6 x_1 x_4 + 21,9 x_2 x_4 + 39,4 x_1 x_2 x_4 + 81 x_1 x_2 x_3 x_4. \quad (6.1)$$

Таблица 6.4

Расширенная матрица плана 2^4

Номер опыта	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	$x_1 x_2$	$x_1 x_3$	$x_1 x_4$	$x_2 x_3$	$x_2 x_4$	$x_3 x_4$	$x_1 x_2 x_3$	$x_1 x_2 x_4$	$x_1 x_3 x_4$	$x_2 x_3 x_4$	$x_1 x_2 x_3 x_4$	y жидко- текучесть, мм
1	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	970
2	+	-	+	+	+	-	-	-	+	+	+	-	-	-	+	-	800
3	+	+	-	+	+	-	+	+	-	-	+	-	-	+	-	-	640
4	+	-	-	+	+	+	-	-	-	-	+	+	+	-	-	+	550
5	+	+	+	-	+	+	-	+	-	+	-	-	+	-	-	-	890
6	+	-	+	-	+	-	+	-	-	+	-	+	-	+	-	+	750
7	+	+	-	-	+	-	-	+	+	-	-	+	-	-	+	+	600
8	+	-	-	-	+	+	+	-	+	-	-	-	+	+	+	-	500
9	+	+	+	+	-	+	+	-	+	-	-	+	-	-	-	+	420
10	+	-	+	+	-	-	-	+	+	-	-	-	+	+	-	-	680
11	+	+	-	+	-	-	+	-	-	+	-	-	+	-	+	-	380
12	+	-	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	+	+	340
13	+	+	+	-	-	+	-	-	-	-	+	-	-	+	+	-	390
14	+	-	+	-	-	-	+	+	-	-	+	+	+	-	+	+	620
15	+	+	-	-	-	-	-	-	+	+	+	+	+	+	-	+	300
16	+	-	-	-	-	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-	-	320

4. Проверка адекватности модели. Прежде всего определили с помощью построенного уравнения (6.1) расчетные значения отклика. Напомним, что все x_i в данное уравнение входят в кодовом масштабе. Поэтому, если, например, условия 4-го опыта (см. табл. 6.4):

$$x_1 = -1, x_2 = -1, x_3 = +1, x_4 = +1,$$

то расчетное значение жидкотекучести в этом опыте:

$$\begin{aligned} \hat{y}_4 &= 571,9 - 118,1 + 25,6 + 140,6 - 24,4 - 60,6 - \\ &\quad - 21,9 + 39,4 + 8,1 = 561 \text{ мм.} \end{aligned}$$

Подсчитанные таким образом значения жидкотекучести приведены в табл. 6.5. Данные этой же таблицы использовали для определения дисперсии адекватности. Поскольку дублирование опытов было равномерным, использовали формулы (5.50) и (5.47):

$$S_{ao}^2 = \frac{3 \cdot 664}{7} = 284,6.$$

Таблица 6.5

Сопоставление экспериментальных и рассчитанных данных

Номер опыта	y_u	$\hat{y}_u$	$ y_u - \hat{y}_u $	$(y_u - \hat{y}_u)^2$
1	970	962	8	64
2	800	795	5	25
3	640	636	4	16
4	550	561	11	121
5	890	895	5	25
6	750	759	9	81
7	600	601	1	1
8	500	493	7	49
9	420	421	1	1
10	680	686	6	36
11	380	372	8	64
12	340	350	10	100
13	390	386	4	16
14	620	618	2	4
15	300	305	5	25
16	320	314	6	36
Σ				664

Построенная модель (6.1) включает девять коэффициентов, поэтому по формуле (5.48) число степеней свободы

$$f_2 = 16 - 9 = 7.$$

Гипотезу об адекватности модели (6.1) проверим по F - критерию. Его расчетное значение по формуле (5.45)

$$F = \frac{284,6}{184,4} = 1,54.$$

При уровне значимости $q = 0,05$ табличное значение F -критерия (см. табл. П7 приложения) $F_{7;32} = 2,34$.

Поскольку $F < F_{7;32}$, гипотеза об адекватности модели (6.1) при 5%-ном уровне значимости не отвергается.

5. Анализ модели. Прежде всего отметим, что все соображения о направлении и силе влияния изученных факторов на жидкотекучесть чугуна можно высказать только для выбранных в работе интервалов их изменения. В этих интервалах оказалось заметно слабым влияние на жидкотекучесть содержания кремния самого по себе, соотношений между температурой перегрева и содержанием углерода, кремния и температурой модифицирования, а также всех тройных эффектов, в которые входила температура перегрева. В целом, из всех изученных факторов эту температуру можно считать, пожалуй, самой слабо влияющей. Относительную силу влияния остальных эффектов легче всего представить себе на диаграмме, где величина каждого коэффициента обозначена столбиком соответствующей высоты (рис. 6.1).

Из анализа рис. 6.1 видно, что наиболее сильно жидкотекучесть изученных чугунов зависит от температуры модифицирования (x_4) и содержания в чугуне углерода (x_2).

Заметно влияют соотношения между количеством кремния и температурой модифицирования (x_1x_4) и тройное взаимодействие между содержанием кремния, углерода и той же температурой ($x_1x_2x_4$). Остальные эффекты слабы.

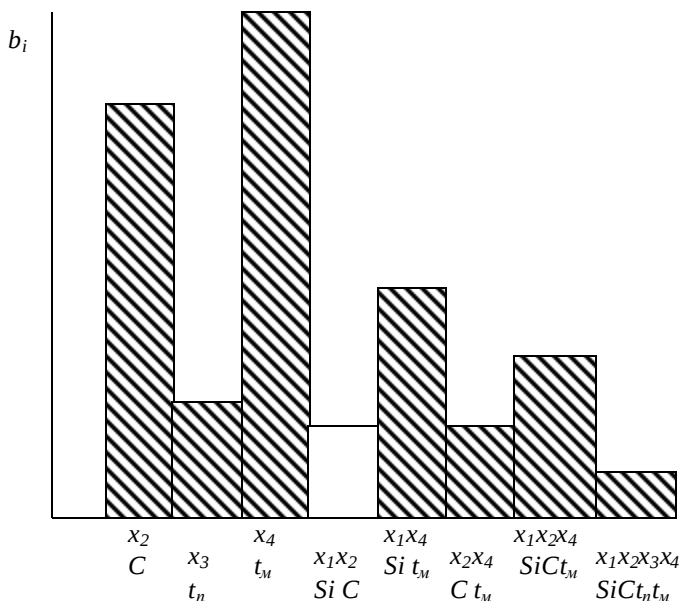


Рис. 6.1. Относительная влияния факторов и их взаимодействий (заштриховано для положительных коэффициентов, не заштриховано – для отрицательных)

Если бы теперь, например, требовалось выбрать уровни факторов, обеспечивающие в изученной области их изменения возможно более высокую жидкотекучесть чугуна, то проще всего это было бы сделать с помощью того же рис. 6.1. Действительно, как следует из этого рисунка, наиболее высокая жидкотекучесть будет в том случае, когда все факторы окажутся на уровне $+1$. Такой опыт был уже реализован в матрице планирования (см. табл. 6.2, опыт 1). Синтетический чугун с $1,5\% Si$ ($0,5\% Si$ введено при модифицировании) и $3,5\% C$, перегретый до температуры $1600\ ^\circ C$, а затем модифицированный и разлитый с температуры $1500\ ^\circ C$, имел жидкотекучесть $970\ mm$.

6.2. Использование ортогонального плана эксперимента второго порядка

Использование симметричных ортогональных композиционных планов второго порядка проиллюстрируем следующим примером.

Изучали механические свойства одного из алюминиевых деформируемых сплавов в зависимости от содержания в нем лития (X_1), температуры (X_2) и времени старения (X_3). В качестве отклика выбрали предел прочности сплавов, определявшийся при испытании на растяжение (y). По результатам параллельных измерений, проведенных ранее, было установлено, что дисперсия опыта $S_y^2 = 4,0$ при числе степеней свободы $f_1 = 10$.

Выбранные факторы, их интервалы варьирования и установленные уровни указаны в табл. 6.6.

Таблица 6.6
Уровни варьирования факторов

Факторы	Содержание Li , %	Температура старения, $^{\circ}C$	Время старения, τ
Основной уровень (X_{i0})	1,0	175	4
Интервал варьирования (ΔX_i)	0,5	25	2
Верхний уровень ($x_i = +1$)	1,5	200	6
Нижний уровень ($x_i = -1$)	0,5	150	2
Звездная точка $+a$ ($x_i = 1,215$)	1,6	205	6,4
Звездная точка $-a$ ($x_i = -1,215$)	0,4	145	1,6

Прежде всего был реализован полный факторный эксперимент 2^3 , состоящий из восьми опытов. Матрица планирования для этого случая указана в табл. 6.7 (опыты 1 – 8), здесь же приведены и результаты опытов (опыты не дублировали).

По формуле (5.32) были получены следующие оценки коэффициентов регрессии:

$$b_0 = 31,0; \quad b_1 = 2,25; \quad b_2 = -2,0; \quad b_3 = 0; \\ b_{12} = 3,75; \quad b_{13} = -1,75; \quad b_{23} = -6,50; \quad b_{123} = -1,75.$$

Таблица 6.7

Матрица планирования симметричного композиционного ортогонального плана второго порядка

	u	x_i										y_u
		x_0	x_1	x_2	x_3	$x'_4 = x_1^2 - 0,73$	$x'_5 = x_2^2 - 0,73$	$x'_6 = x_3^2 - 0,73$	$x_7 = x_1 x_2$	$x_8 = x_1 x_3$	$x_9 = x_2 x_3$	$\sigma_u, \text{ кгс/мм}^2$
План ПФЭ 2^3	1.	+1	-1	-1	-1	0,27	0,27	0,27	+1	+1	+1	25
	2.	+1	+1	-1	-1	0,27	0,27	0,27	-1	-1	+1	20
	3.	+1	-1	+1	-1	0,27	0,27	0,27	-1	+1	-1	38
	4.	+1	+1	+1	-1	0,27	0,27	0,27	+1	-1	-1	41
	5.	+1	-1	-1	+1	0,27	0,27	0,27	+1	-1	-1	45
	6.	+1	+1	-1	+1	0,27	0,27	0,27	-1	+1	-1	26
	7.	+1	-1	+1	+1	0,27	0,27	0,27	-1	-1	+1	25
	8.	+1	+1	+1	+1	0,27	0,27	0,27	+1	+1	+1	28
"Звездные" точки	9.	+1	-1,215	0	0	0,75	-0,73	-0,73	0	0	0	30
	10.	+1	+1,215	0	0	0,75	-0,73	-0,73	0	0	0	36
	11.	+1	0	-1,215	0	-0,73	0,75	-0,73	0	0	0	26
	12.	+1	0	+1,215	0	-0,73	0,75	-0,73	0	0	0	30
	13.	+1	0	0	-1,215	-0,73	-0,73	0,75	0	0	0	24
	14.	+1	0	0	+1,215	-0,73	-0,73	0,75	0	0	0	32
Нулевая точка	15.	+1	0	0	0	-0,73	-0,73	-0,73	0	0	0	28

Дисперсия в определении этих коэффициентов

$$S_{b_i}^2 = \frac{S_y^2}{N} = \frac{4,0}{8} = 0,5;$$

$$S_{b_i} = 0,71.$$

При $p = 0,95$ и $f_i = 10$ табличное значение t -критерия $t_{0,95;10} = 2,23$, поэтому по формуле (5.33)

$$\Delta_{b_i} = 2,23 \cdot 0,71 = 1,583.$$

Поскольку все оценки коэффициентов по абсолютной величине больше Δ_{b_i} (за исключением, разумеется, $b_3 = 0$), их следует признать статистически значимыми.

Была проверена гипотеза об адекватности линейной части полученной модели

$$y = 31,0 + 2,25x_1 - 2,0x_2. \quad (6.2)$$

Дисперсия неадекватности, рассчитанная по формуле (5.47), в этом случае оказалась $S_{ad}^2 = 90,9$ при числе степеней свободы $f_2 = 8 - 3 = 5$. Таким образом, рассчитанное по формуле (5.45) значение F -критерия $F = 99,9/4 = 24,975$, что больше табличного как при 5%-ном ($F_{5;10} = 3,33$), так и при 1%-ном ($F_{5;10} = 5,64$) уровнях значимости. Гипотезу об адекватности линейной части модели (6.2) следует отвергнуть.

С целью получения адекватной модели было решено дополнить реализованную матрицу планирования 2^3 звездными точками и выполнить опыт в центре плана, совершив, таким образом, композиционный переход к плану второго порядка. Выбрали симметричный ортогональный композиционный план второго порядка с одним опытом в центре. В этом случае $a = \pm 1,215$ (см. табл. 4.4). Уровни факторов в звездных точках указаны в табл. 6.6. Окончательно матрица такого плана (см. табл. 6.7) содержит $N = 2^k + 2k + n_0 = 2^3 + 2 \cdot 3 + 1 = 15$ опытов.

Для того чтобы сделать эту матрицу ортогональной, в соответствии с (4.3) вместо столбцов x_i^2 введены столбцы новых переменных $x'_i = x_i^2 - \overline{x_i^2}$. Величина $\overline{x_i^2}$ в данном случае составляет

$$\overline{x_i^2} = \frac{\sum_{u=1}^N x_{i_u}^2}{N} = \frac{8 + 2 \cdot 1,215^2}{15} = 0,73. \quad (6.3)$$

Следовательно, $x'_i = x_i^2 - 0,73$.

В этом случае итоговая регрессионная модель преобразовывается к виду

$$y = (b_0 + \sum_{i=1}^k b_{ii} \overline{x_i^2}) + \sum_{i=1}^k b_i x_i + \sum_{i < j}^k b_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^k b_{ii} (x_i^2 - \overline{x_i^2}).$$

Результаты опытов в звездных точках (опыты 9–14, см. табл. 6.7) и в центре плана (опыт 15) также указаны в табл. 6.7.

Далее, по результатам всех пятнадцати опытов матрицы планирования (см. табл. 6.7) с помощью формул (4.15)–(4.17), пользуясь константами a_i , (см. табл. 4.4), рассчитали все коэффициенты регрессии, их дисперсии и среднеквадратичные ошибки, а затем по формуле (5.33) доверительные интервалы для каждой группы коэффициентов:

$$\begin{aligned} b'_0 &= 0,06667 \cdot 454 = 30,27; & b_1 &= 0,09141 \cdot 10,71 = 0,98; \\ b_2 &= 0,09141 \cdot (-20,86) = -1,91; & b_3 &= 0,09141 \cdot (-9,72) = -0,89 \\ b_{12} &= 0,125 \cdot 30 = 3,75; & b_{13} &= 0,125 \cdot (-14) = -1,75; \\ b_{23} &= 0,125 \cdot (-52) = -6,50; & b_{11} &= 0,23041 \cdot 13,93 = 3,21; \\ b_{22} &= 0,23041 \cdot (-0,82) = -0,19; & b_{33} &= 0,23041 \cdot (-0,82) = -0,19; \end{aligned}$$

$$S_{b'_0}^2 = 0,06667 \cdot 4 = 0,267; \quad S_{b'_0} = 0,2582 \cdot 2 = 0,516;$$

$$S_{b_i}^2 = 0,09141 \cdot 4 = 0,366; \quad S_{b_i} = 0,30234 \cdot 2 = 0,605;$$

$$S_{b_{ij}}^2 = 0,125 \cdot 4 = 0,50; \quad S_{b_{ij}} = 0,35355 \cdot 2 = 0,707;$$

$$S_{b_{ii}}^2 = 0,23041 \cdot 4 = 0,922; \quad S_{b_{ii}} = 0,48001 \cdot 2 = 0,960;$$

$$\Delta_{b'_0} = t_{0,95;10} \cdot S_{b'_0} = 2,23 \cdot 0,516 = 1,151;$$

$$\Delta_{b_i} = t_{0,95;10} \cdot S_{b_i} = 2,23 \cdot 0,605 = 1,349;$$

$$\Delta_{b_{ij}} = t_{0,95;10} \cdot S_{b_{ij}} = 2,23 \cdot 0,707 = 1,577;$$

$$\Delta_{b_{ii}} = t_{0,95;10} \cdot S_{b_{ii}} = 2,23 \cdot 960 = 2,141.$$

Сравнение абсолютных значений рассчитанных коэффициентов с их доверительными интервалами показывает, что статистически значимыми можно признать b'_0 , b_2 , b_{12} , b_{13} , b_{23} , и b_{11} . Остальные коэффициенты из модели можно исключить.

Затем подсчитали b_0 и дисперсию $S_{b_0}^2$:

$$b_0 = b'_0 - \frac{a_1}{a_2} \sum_{i=1}^N b_{ii} = 30,27 - \frac{0,06667}{0,09141} \cdot 3,21 = 27,93;$$

$$S_{b_0}^2 = S_{b'_0}^2 + \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^2 k S_{b_i}^2 = 0,267 + \left(\frac{0,06667}{0,09141} \right)^2 \cdot 3 \cdot 0,922 = 1,738.$$

Здесь учтен только статистически значимый коэффициент $b_{11} = 3,21$.

Итак, уравнение регрессии имеет вид

$$y = 27,93 - 1,91x_2 + 3,75x_1x_2 - 1,75x_1x_3 - 6,50x_2x_3 + 3,21x_1^2, \quad (6.4)$$

где в соответствии с условиями данного эксперимента (см. табл. 6.6), кодированные (x_i) и натуральные (X_i) значения факторов связаны соотношениями:

$$x_1 = \frac{X_1 - 10}{0,5}; \quad x_2 = \frac{X_2 - 175}{25}; \quad x_3 = \frac{X_3 - 4}{2}.$$

Представление результатов экспериментов полиномом второй степени оказалось оправданным – значительная часть нелинейных членов здесь значимо отличается от нуля. При проверке адекватности модели (6.4) оказалось, что рассчитанная по формуле (5.47) дисперсия адекватности $S_{ad}^2 = 12,85$ при числе степеней свободы, определенном по формуле (5.48), $f_2 = 15 - 6 = 9$. Расчетное значение F -критерия по формуле (5.45) $F = 12,85/4 = 3,21$, что меньше табличного при 1%-ном уровне значимости ($F_{9;10} = 4,95$). Гипотеза об адекватности полученного уравнения регрессии не отвергается.

6.3. Использование несимметричных почти или полностью насыщенных планов Хартли

В данном разделе рассмотрен план экспериментов для построения моделей второго порядка, имеющей вид:

$$y = b_0 + \sum_{1 \leq i \leq k} b_i x_i + \sum_{1 \leq i < j \leq k} b_{ij} x_i x_j + \sum_{1 \leq i \leq k} b_{ii} x_i^2. \quad (6.5)$$

До сих пор были рассмотрены симметричные планы. Это обстоятельство приводило к ряду полезных свойств, описанных выше. Вместе с тем отказ от симметричности позволяет строить планы в некоторых отношениях более эффективные.

Одним из критериев оптимальности планов можно считать число опытов в них. В подавляющем большинстве случаев экспериментатор стремится к тому, чтобы опытов было как можно меньше. Оказалось, что можно построить планы, число опытов в которых либо равно числу коэффициентов строящейся модели, либо не намного больше.

Одними из наиболее экономных по числу опытов являются планы, предложенные Хартли [9]. Их достоинством является и композиционный принцип построения.

Как и все композиционные планы, они состоят из ядра, звездных точек и опытов в центре. Цель выполнения опытов ядра – определить независимо друг от друга все коэффициенты при линейных членах и парных взаимодействиях. Сделать это можно только, если используется полный факторный эксперимент или главные полуреплики, начиная с размерности $k = 5$. Так составлены описанные выше симметричные ортогональные и ротатабельные планы. Но эти планы содержат слишком большое число опытов. Оказалось, что на ядро плана можно наложить значительно менее жесткие условия. Действительно, если использовать в качестве ядра такую реплику, что коэффициенты при линейных членах можно оценить только совместно, то добавление затем звездных точек делает столбцы x_i линейно независимыми. Кроме того, если использованная реплика дает смешанные оценки линейных эффектов и парных взаимодействий, то добавление звездных точек вновь позволяет разделить эти эффекты. Однако, если парные взаимодействия смешаны между собой, то звездные точки не меняют ситуации, и в полном плане второго порядка эти эффекты оказываются все равно смешанными. Отсюда остается только одно требование к плану ядра – это должна быть реплика, дающая возможность оценить коэффициенты при парных взаимодействиях независимо друг от друга.

Такому требованию отвечают реплики, обладающие тем свойством, что в определяющем контрасте для них отсутствуют одно-, двух- и четырехбуквенные взаимодействия. Так, в задачах с $k = 3$ в качестве ядра можно использовать дробную реплику 2^{3-1} с определяющим контрастом $1 \equiv \pm x_1 x_2 x_3$, в задачах с $k = 4$ – реплики 2^{4-1} с $1 \equiv \pm x_1 x_2 x_4$, $1 \equiv \pm x_1 x_3 x_4$, $1 \equiv \pm x_2 x_3 x_4$, $1 \equiv \pm x_1 x_2 x_3$, но не реплику 2^{4-1} с $1 \equiv \pm x_1 x_2 x_3 x_4$ и т.д. В табл. 6.8 приведены значения числа коэффициентов полной квадратичной модели (6.5) и числа опытов в планах Хартли в зависимости от размерности факторного пространства.

Очевидно, что наиболее удовлетворительными в смысле числа опытов можно считать планы Хартли для задач с числом факторов 2–6.

Таблица 6.8

Число коэффициентов полной квадратичной модели
и число опытов в планах Хартли

Число факторов k	2	3	4	5	6	7	8	9
Число коэффициентов модели (6.5)	6	10	15	21	28	36	45	55
Число опытов в плане Хартли	7	11	17	27	29	47	80	82

Планы Хартли не обладают многими удобными свойствами. В частности, их нельзя сделать ортогональными или ротатабельными (за исключением плана для $k = 5$) путем подбора звездного плана α . Поэтому величины звездных плеч и число опытов в центре определяют из других соображений. В качестве критериев оптимальности планов выбрали максимизацию величины определителя информационной матрицы (критерий D – оптимальности), минимизацию максимальной (критерий G – оптимальности) и средней (критерий Q – оптимальности) дисперсии предсказания значений отклика в заданной области. Различали планы для области эксперимента, представляющей собой многомерный куб или многомерную сферу.

Характеристики некоторых, лучших с точки зрения указанных критериев, планов Хартли на кубе и сфере приведены в табл. 6.9. План на кубе для $k = 4$ – ниже в примере.

В том случае, когда планы Хартли образованы на основе дробной реплики с определяющим контрастом, не содержащим

трехбуквенного взаимодействия, план становится симметричным (все моменты третьего порядка оказываются равными нулю). Тогда все коэффициенты регрессии, их дисперсии и ковариации можно рассчитывать по формулам симметричного планирования.

С целью облегчения расчетов для указанных в табл. 6.9 планов заранее подсчитаны вспомогательные константы, приведенные в табл. 6.10. В этом случае коэффициенты модели (6.5) считают по следующим формулам:

$$\left. \begin{aligned} b_0 &= d_1 \sum_{u=1}^N y_u - d_2 \sum_{i=1}^k \sum_{u=1}^N x_{i u}^2 y_u; \\ b_{ii} &= d_3 \sum_{u=1}^N x_{i u}^2 y_u + d_4 \sum_{i=1}^k \sum_{u=1}^N x_{i u}^2 y_u - d_2 \sum_{u=1}^N y_u; \end{aligned} \right\} \quad (6.6)$$

$$\left. \begin{aligned} b_i &= d_5 \sum_{u=1}^N x_{i u} y_u; \\ b_{ij} &= d_6 \sum_{u=1}^N (x_i x_j)_u y_u; \end{aligned} \right\} \quad (6.7)$$

$$\left. \begin{aligned} b_i^* &= d_7 \left[\sum_{u=1}^N x_{i u} y_u - \sum_{u=1}^N (x_j x_l)_u y_u \right]; \\ b_{jl}^* &= d_8 \sum_{u=1}^N (x_j x_l)_u y_u - d_7 \sum_{u=1}^N x_{i u} y_u. \end{aligned} \right\} \quad (6.8)$$

Коэффициенты b_0 и b_{ii} оценивают по формулам (6.6) во всех случаях. Коэффициенты b_i и b_{ij} для факторов, не входящих в трехбуквенное соотношение определяющего контраста, считают по формулам (6.7). Оценки коэффициентов b_i и b_{ij} для факторов, входящих в трехбуквенное соотношение определяющего контраста $1 = x_i x_j x_l$, вычисляют по формулам (6.8). Например, после реализации плана Хартли для $k = 4$ (см. табл. 6.9) коэффициенты b_0 и b_{ii} ($i=1-4$) следует рассчитать по формулам (6.6); коэффициенты b_4 , b_{14} , b_{24} и b_{34} – по формулам (6.7); коэффициенты b_1 , b_2 , b_3 , b_{12} , b_{13} и

Таблица 6.9

Характеристики планов Хартли

Номер плана	Число факторов k	Область эксперимента	Ядро плана	Число опытов в ядре N_1	Звездное плечо	Число звездных точек $2k$	Число опытов в центре n_0	Общее число опытов N
1/2	3	Сфера	$2^{3-1} \quad x \equiv x_1 x_2 x_3$	4	$\sqrt{3} = 1,73205$	6	1/4	11/14
3/4 5/6	4	Сфера куб	$2^{4-1} \quad x \equiv x_1 x_2 x_3$ $2^{4-1} \quad x \equiv x_1 x_2 x_3$	8 8	2 1	8 8	1/4 1/4	17/20 17/20
7/8 9/10	5	Сфера куб	$2^{5-1} \quad x \equiv x_1 x_2 x_3 x_4 x_5$ $2^{4-1} \quad x \equiv x_1 x_2 x_3 x_4 x_5$	16 16	$\sqrt{5} = 2,23607$ 1	10 10	1/4 1/4	27/30 27/30
11/12	6	Сфера	$2^{6-2} \quad x \equiv x_1 x_2 x_3 \equiv x_4 x_5 x_6$	16	$\sqrt{6} = 2,37841$	12	1/4	29/32
13/14	7	Сфера	$2^{7-2} \quad x \equiv x_1 x_2 x_3 \equiv x_4 x_5 x_6$	32	$\sqrt{7} = 2,64575$	14	1/4	47/50
15/16	8	Сфера	$2^{8-2} \quad x \equiv x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 \equiv x_4 x_5 x_6 x_7 x_8$	64	$2\sqrt{2} = 2,82843$	16	2/4	82/84

Таблица 6.10

Вспомогательные константы для планов Хартли

Номер плана	k	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7	d_8
1 2	3	1,00000 0,25000	0,33333 0,08333	0,05556 0,05556	0,10370 0,02037	0,10000 0,10000	0,25000 0,25000	0,16667 0,16667	0,41667 0,41667
3 4 5 6	4	1,00000 0,25000 0,19101 0,12143	0,25000 0,06250 0,05618 0,03571	0,03125 0,03125 0,50000 0,50000	0,05859 0,01172 -0,10112 -0,10714	0,06250 0,06250 0,10000 0,10000	0,12500 0,12500 0,12500 0,12500	0,12500 0,12500 0,50000 0,50000	0,25000 0,25000 0,62500 0,62500
7 8 9 10	5	1,00000 0,25000 0,13805 0,09762	0,20000 0,05000 0,03030 0,02143	0,02000 0,02000 0,50000 0,50000	0,03754 0,00754 -0,09091 -0,09286	0,03846 0,03846 0,05556 0,05556	0,06250 0,06250 0,06250 0,06250	0,10000 0,10000 0,50000 0,50000	0,16250 0,16250 0,56250 0,56250
11 12	6	1,00000 0,25000	0,16667 0,04167	0,01388 0,01388	0,02646 0,00562	0,03571 0,03571	0,06250 0,06250	0,08333 0,08333	0,14583 0,14583
13 14	7	1,00000 0,25000	0,14286 0,03571	0,01021 0,01021	0,01939 0,00409	0,02174 0,02174	0,03125 0,03125	0,07143 0,07143	0,10268 0,10268
15 16	8	0,50000 0,25000	0,06250 0,03125	0,07813 0,07813	0,00703 0,00312	0,01250 0,01250	0,01563 0,01563	0,06250 0,06250	0,07813 0,07813

b_{23} – по формулам (6.8). После реализации плана Хартли для $k = 5$ все коэффициенты b_i и b_{ij} считают по формулам (6.7) и т.д.

Дисперсии и ковариации коэффициентов с помощью вспомогательных констант оценивают по формулам:

$$\left. \begin{aligned} S_{b_0}^2 &= d_1 S_y^2; \quad S_{b_{ii}}^2 = (d_3 + d_4) S_y^2; \quad S_{b_i}^2 = d_5 S_y^2; \quad S_{b_{ij}}^2 = d_6 S_y^2; \\ \text{cov } b_0 b_{ii} &= -d_2 S_y^2; \quad \text{cov } b_{ii} b_{jj} = d_4 S_y^2; \\ S_{b_i^*}^2 &= d_7 S_y^2; \quad S_{b_{ji}^*}^2 = d_8 S_y^2; \quad \text{cov } b_i^* b_{jl}^* = -d_7 S_y^2, \end{aligned} \right\} \quad (6.9)$$

Неортогональность планов Хартли требует осторожности при проверке статистической значимости коэффициентов регрессии. После расчета их доверительных интервалов и проверки по (5.33) или (5.34) гипотезы о равенстве коэффициентов нулю из модели нельзя исключать без пересчета остальных уже не только статистически незначимые b_0 и b_{ii} , как в случае других описанных выше неортогональных планов второго порядка, но и незначимые коэффициенты b_0^* и b_{ji}^* .

В такой ситуации полезным может оказаться прием упрощения найденной модели последовательным исключением коэффициентов регрессии, объединенных в группы [10]. Проверка адекватности модели осуществляется по общей методике, описанной в п. 5.5 данного пособия. Рассмотрим применение плана Хартли на следующем примере.

Пример 6.1. Изучали влияние режимов термомагнитной обработки на магнитные свойства магнитомягкого никельмолибденового сплава 68НМП. Особенностью сплава является наличие у него прямоугольной петли гистерезиса. Прямоугольность петли связана с кристаллографической текстурой и обеспечивается специальной технологией прокатки и термической обработки ленты. После прокатки, проведенной во всех случаях по одинаковому режиму, ленту толщиной 0,10 мм подвергали термической обработке, включающей два отжига. Первый отжиг проводили в атмосфере водорода, второй – в магнитном поле. Факторами являлись температура первого отжига (X_1), напряженность магнитного поля во время второго отжига (X_2), температура (X_3) и время (X_4) второго отжига.

От сплава требовался комплекс магнитных свойств. Поэтому после каждого режима обработки измеряли разнообразные магнитные свойства, а затем составляли комплексный показатель качества – обобщенную функцию желательности, включающую коэффициент прямоугольности петли гистерезиса, магнитную прони-

цаемость и индукцию насыщения. Эта функция желательности D и служила в данном случае зависимой переменной y . Напомним, комплекс свойств тем выше, чем больше D . Выбранные факторы и уровни их варьирования указаны в табл. 6.11.

Таблица. 6.11
Уровни варьирования факторов

Факторы	Температура первого отжига °C (X_1)	Напряженность магнитного поля А/м (Э) (X_2)	Температура второго отжига °C (X_3)	Время второго отжига ч (X_3)
Основной уровень ($x_i=0$)	1200	1591,5 (20)	625	1
Интервал варьирования (ΔX_i)	50	397,9 (5)	25	0,5
Верхний уровень ($x_i=1$)	1250	1989,4 (25)	650	1,5
Нижний уровень ($x_i=-1$)	1150	1193,6(15)	600	0,5

Было решено провести эксперимент вблизи известного режима термической обработки сплава 68НМП. Именно этот режим, по данным, и выбрали в качестве основного уровня (см. табл. 6.11). В связи с этим следовало ожидать нелинейного характера функции отклика в изучаемой области факторного пространства. Поэтому решили строить сразу квадратичную модель (6.5) и воспользоваться для этого почти насыщенным планом Хартли. Выбрали план Хартли на кубе (см. план 5, табл. 6.9) со звездным плечом $a=\pm 1$. В этом случае требовалось варьировать факторы на трех уровнях ($0; \pm 1$). План Хартли на сфере (см., например, план 3, табл. 6.9) имеет $a = \pm 2$, а следовательно, требует пяти уровней варьирования факторов ($0; =\pm 1; \pm 2$). В данной задаче иметь много уровней факторов с технологической точки зрения было неудобно. Этим, собственно, и объяснялся выбор плана на кубе.

Ядром выбранного плана Хартли является полуреплика 2^{4-1} с определяющим контрастом $1 = x_1x_2x_3$. Поэтому оценки коэффициентов $b_1, b_2, b_3, b_{12}, b_{13}$ и b_{23} модели (6.5) будут закоррелированы

между собой. Оценки коэффициентов b_4 , b_{14} , b_{24} и b_{34} будут оцениваться независимо не только друг от друга, но и от остальных коэффициентов. Коэффициенты b_0 и b_{ii} также коррелируют между собой. Матрица выбранного плана приведена в табл. 6.12.

Заданные планом опыты были выполнены. Кроме варьируемых факторов, все остальные поддерживали на постоянных уровнях. В частности, скорость охлаждения образцов после первого отжига всегда выдерживали 100–200°С/ч до температуры 600°С, а затем 400°С/ч; после второго отжига – до температуры 200°С охлаждали не быстрее 80°С/ч.

Опыты не дублировали. В качестве оценки дисперсии опыта использовали известную ранее дисперсию $S_y^2 = 1 \cdot 10^{-4}$ при числе степеней свободы $f_1 = 8$. Результаты опытов приведены в табл. 6.12.

По результатам опытов коэффициенты регрессии считали следующим образом. Оценки коэффициентов b_0 и b_{ii} получили по формулам (6.6):

$b_0 = -0,294$; $b_{11} = -0,005$; $b_{22} = -0,010$; $b_{33} = 0,025$; $b_{44} = -0,010$, оценки коэффициентов для фактора x_4 , не входящего в трехбуквенный определяющий контраст, по формулам (6.7):

$b_4 = -0,041$; $b_{14} = -0,004$; $b_{24} = 0,024$; $b_{34} = 0,011$, оценки коэффициентов для факторов x_1 , x_2 , x_3 , образующих трехбуквенный определяющий контраст, по формулам (6.8):

$$b_1 = -0,040; \quad b_2 = -0,055; \quad b_3 = 0; \\ b_{12} = -0,014; \quad b_{13} = -0,009; \quad b_{23} = -0,004.$$

Дисперсии, среднеквадратичные ошибки и ковариации определяли также для разных групп коэффициентов по формулам (6.9):

$$S_{b_0}^2 = 1,91 \cdot 10^{-5}; \quad S_{b_0} = 4,37 \cdot 10^{-3}; \\ S_{b_{ii}}^2 = 3,99 \cdot 10^{-5}; \quad S_{b_{ii}} = 6,32 \cdot 10^{-3}; \\ S_{b_4}^2 = 1 \cdot 10^{-5}; \quad S_{b_4} = 3,16 \cdot 10^{-3}; \\ S_{b_{4j}}^2 = 1,25 \cdot 10^{-5}; \quad S_{b_{4j}} = 3,54 \cdot 10^{-3},$$

для $i=1, 2, 3$:

$$S_{b_i^*}^2 = 5 \cdot 10^{-5}; \quad S_{b_i^*} = 7,07 \cdot 10^{-3}; \\ S_{b_{ji}^*}^2 = 6,25 \cdot 10^{-5}; \quad S_{b_{ji}^*} = 7,91 \cdot 10^{-3};$$

Таблица 6.12

План Хартли для $k=4$

Но- мер	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	$x_1 x_2$	$x_1 x_3$	$x_1 x_4$	$x_2 x_3$	$x_2 x_4$	$x_3 x_4$	x_1^2	x_2^2	x_3^2	x_4^2	y
1	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	0,17
2	+	-	+	-	+	-	+	-	-	+	-	+	+	+	+	0,27
3	+	+	-	-	+	-	-	+	+	-	-	+	+	+	+	0,22
4	+	-	-	+	+	+	-	-	-	-	+	+	+	+	+	0,31
5	+	+	+	+	-	+	+	-	+	-	-	+	+	+	+	0,21
6	+	-	+	-	-	-	+	+	-	-	+	+	+	+	+	0,34
7	+	+	-	-	-	-	-	-	+	+	+	+	+	+	+	0,40
8	+	-	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	+	+	+	0,43
9	+	+	0	0	0	0	0	0	0	0	0	+	0	0	0	0,25
10	+	-	0	0	0	0	0	0	0	0	0	+	0	0	0	0,33
11	+	0	+	0	0	0	0	0	0	0	0	0	+	0	0	0,23
12	+	0	-	0	0	0	0	0	0	0	0	0	+	0	0	0,34
13	+	0	0	+	0	0	0	0	0	0	0	0	0	+	0	0,31
14	+	0	0	-	0	0	0	0	0	0	0	0	0	+	0	0,33
15	+	0	0	0	+	0	0	0	0	0	0	0	0	0	+	0,23
16	+	0	0	0	-	0	0	0	0	0	0	0	0	0	+	0,34
17	+	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,29
Кэф- фици- ент	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_{12}	b_{13}	b_{14}	b_{23}	b_{24}	b_{34}	b_{11}	b_{22}	b_{33}	b_{44}	

$$\begin{aligned} \text{cov } b_0 b_{ii} &= -5,62 \cdot 10^{-6}; \text{ cov } b_{ii} b_{jj} = -1 \cdot 10^{-5}; \\ \text{cov } b_i^* b_{jl}^* &= -5 \cdot 10^{-5}. \end{aligned}$$

Рассчитанные затем по формуле (5.33) доверительные интервалы оценок коэффициентов при 5%-ном уровне значимости ($p = 0,95$; $f_1 = 8$; $t_{0,95,8} = 2,3$) оказались:

$$\begin{aligned} \Delta b_0 &= 0,0101; \Delta b_{ii} = 0,0146; \Delta b_4 = 0,0073; \\ \Delta b_{4j} &= 0,0082; \Delta b_{ii}^* = 0,0163; \Delta b_{jl}^* = 0,0183. \end{aligned}$$

Сравнение доверительных интервалов с абсолютными значениями коэффициентов регрессии показало, что многие из коэффициентов статистически незначимы. Однако исключить из модели в данном случае можно только коэффициенты, связанные с фактором x_4 (кроме b_{44}). Только он не входит в определяющий контраст. Исключение остальных коэффициентов требует пересчета оставшихся. Поэтому из модели исключили только статистически незначимый коэффициент b_{14} и, разумеется, $b_3 = 0$. В результате было получено следующее уравнение регрессии:

$$\begin{aligned} y &= 0,294 - 0,040x_1 - 0,055x_2 - 0,041x_4 - 0,014x_1x_2 + \\ &+ 0,009x_1x_3 - 0,004x_2x_3 + 0,024x_2x_4 + 0,011x_3x_4 - \\ &- 0,005x_1^2 - 0,010x_2^2 + 0,025x_3^2 - 0,010x_4^2, \end{aligned} \quad (6.10)$$

где x_i – в кодированном масштабе, связанные со значениями факторов в натуральном масштабе (X_i) соотношениями:

$$x_1 = \frac{X_1 - 1200}{50}; \quad x_2 = \frac{X_2 - 20}{5}; \quad x_3 = \frac{X_3 - 625}{25}; \quad x_4 = \frac{X_4 - 1}{0,5}.$$

Для проверки адекватности модели (6.10) по формуле (5.47) определили дисперсию адекватности $S_{ad}^2 = 3,44 \cdot 10^{-4}$; по формуле (5.48) – число степеней свободы $f_2 = 17 - 13 = 4$; по формуле

$$(5.45) \text{ – расчетное значение } F\text{-критерия} \quad F = \frac{3,44 \cdot 10^{-4}}{1 \cdot 10^{-4}} = 3,44.$$

Оно оказалось меньше табличного при 5%-ном уровне значимости $F_{4,8} = 3,84$. Таким образом, гипотеза об адекватности модели (6.10) не отвергается.

6.4. Использование факторных планов для отсеивающих экспериментов. Планы Плакетта – Бермана

Планы, число опытов которых в точности равно числу оцениваемых эффектов, называют насыщенными. Если строится линейная модель:

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^k b_i \cdot x_i ,$$

то число опытов полностью насыщенного плана N в точности равно числу коэффициентов этой модели, т.е. $N = k + 1$.

Существуют возможности построения насыщенных планов первого порядка при условии минимизации наибольшей дисперсии среди всех дисперсий оценок коэффициентов. Одним из оптимальных с точки зрения этого критерия являются насыщенные планы дробного факторного эксперимента и так называемые планы Плакетта – Бермана [9].

Число опытов в этих планах кратно четырем. Каждый фактор варьируется на двух уровнях $+1$ (+) и -1 (–). Насыщенные дробные реплики можно применять в задачах с числом факторов k : 3 (2^{3-1} , $N = 4$); 7 (2^{7-4} , $N = 8$); 15 (2^{15-11} , $N = 16$); 31 (2^{31-26} , $N = 32$) и т.д. Плакетт и Берман предложили ряд ортогональных насыщенных планов для k : 11 ($N = 12$); 19 ($N = 20$); 23 ($N = 24$); 27 ($N = 28$); 35 ($N = 36$) и некоторые другие.

Составлять такие планы удобно с помощью вспомогательной табл. 6.13, в которой указаны первые строки (условия первого опыта) каждого из соответствующих планов. Правило составления планов следующее: вторую и последующие строки плана получают сдвигом всех элементов предыдущей строки на одну позицию вправо (или влево) и перестановкой последнего (или первого) элемента предыдущей строки на первое (или последнее) место в данной. Всего эту операцию повторяют $(k-1)$ раз, в результате чего получается матрица $k \times k$. К этой матрице добавляют последнюю $(k + 1)$ – строку, элементами которой являются знаки минус. Наконец, вводят $(k + 1)$ – столбец фиктивной переменной x_0 , состоящий из одних знаков плюс и необходимый для оценки величины свободного члена модели.

Таблица 6.13

Комбинации знаков, используемые для построения насыщенных
дробных реплик и планов Плакетта – Бермана

Число факторов	Число опытов	Комбинация знаков																												
3	4	+	-	+																										
7	8	+	+	+	-	+	-	-																						
11	12	+	+	-	+	+	+	-	-	-	+	-																		
15	16	+	+	+	+	-	+	-	+	+	-	+	-	-	-															
19	20	+	+	-	-	+	+	+	+	-	+	-	+	-	-	-	+	+	-											
23	24	+	+	+	+	+	-	+	-	+	+	-	-	+	+	-	-	+	-	+	-	-	-	-	-					
27	28	А									В									С										
		+	-	+	+	+	+	-	-		-	-	+	-	-	-	+	-		+	+	-	+							
		+	+	-	+	+	+	-	-		-	-	-	+	-	-	-	-		+	+	-	-							
		-	+	+	+	+	+	-	-		-	+	-	-	+	-	+	+		-	+	+								
		-	-	-	+	-	+	+	+		+	-	+	-	-	-	+	-		+	-	+								
		-	-	-	+	+	-	+	+		+	+	-	+	+	-	-	-		+	+	-								
		-	-	-	-	+	+	+	+		+	+	-	+	-	-	-	-		+	+	+								
		+	+	+	-	-	-	-	+		-	+	-	-	-	-	+	-		+	+	-								
		+	+	+	-	-	-	-	+		+	-	+	-	-	-	-	+		-	+	+								
31	32	-	-	-	-	+	-	+	-					+	+	+	-	+	+	-	-	-	+	+						
		-	+	-	-	+																								
35	36	-	+	-	+	+	+	-	-	-					+	+	+	+	+	-	+	+	+	+	-	-	-	-	-	+
		-	+	-	+	+	-	-	+	-																				

Составленный таким образом план Плакетта – Бермана для $k = 11$ в качестве примера показан в табл. 6.14. Этот план содержит $N=12$ опытов. Здесь элементами первой строки являются знаки, взятые из табл. 6.13. Во второй строке они сдвинуты вправо, при этом последний знак первой строки (–) во второй поставлен на первое место. Аналогично составлены 11 строк этой таблицы. Двенадцатая строка включает только знаки минус. Столбец для x_0 не указан.

Рассматриваемые насыщенные планы первой группы являются ортогональными и нормированными, поэтому расчет коэффициентов ведут по формуле (5.32), дисперсии оценок коэффициентов считают по формуле (5.39).

Особенностью насыщенных планов является отсутствие степеней свободы для проверки адекватности модели. Разумеется, если некоторые из b_i окажутся статистически незначимыми, их можно исключить из модели, и тогда появляется возможность проверки ее адекватности по F -критерию. Если же все коэффициенты модели окажутся статистически значимыми, то $N = k$, и по формуле (5.48) $f_2 = 0$.

Важным в данном случае является способ оценки дисперсии опыта S_y^2 . Чтобы получить ее, необходимо дублировать опыты. Но дублировать все опыты плана здесь явно нецелесообразно, поскольку речь идет об эксперименте для выбора наиболее существенных факторов, и число опытов такого эксперимента должно быть минимальным. Поэтому весьма разумной представляется рекомендация включать в план эксперимента несколько фиктивных факторов, переходя, таким образом, к другому насыщенному плану. Эффекты фиктивных факторов будут равны нулю только в том случае, если опыты проводятся абсолютно точно. Поскольку этого быть не может, дисперсию адекватности S_{ao}^2 , рассчитанную по формуле (5.47), можно использовать в качестве оценки дисперсии опыта S_y^2 с числом степеней свободы $f_1 = N - k - 1$. В данном случае формулу для расчета S_y^2 можно упростить:

$$S_y^2 = \frac{N \sum_{i=1}^{N-k-1} b_i^2}{N - k - 1}, \quad (6.11)$$

где b_i – коэффициент регрессии при i -м фиктивном факторе;

План Плакетта – Бермана для $k=11$

Таблица 6.14

[illegible]

$N - k - 1 = f_1$ – число фиктивных факторов.

Применение планов Плакетта – Бермана проиллюстрируем следующим примером.

Изучали отбеливаемость отливок одного типа из серого синтетического модифицированного чугуна в зависимости от содержания в нем основных компонентов и примесей, а также условий выплавки и модифицирования, всего $k = 15$ факторов (табл. 6.15). Требовалось выяснить, какие из рассматривавшихся факторов наиболее сильно влияют на отбеливаемость. В план эксперимента было решено включить еще четыре фиктивных фактора для оценки дисперсии опыта, поэтому использовали план Плакетта – Бермана для $k = 19$. Этот план, включающий $N = 20$ опытов, был составлен указанным выше способом и приведен в табл. 6.15. Там же приведены результаты определения отбеливаемости (в %) по клиновой пробе как отношение полностью отбеленной части клина ко всей его высоте. Опыты не дублировали.

Коэффициенты линейной модели считали по формуле (5.32). Их значения указаны также в табл. 6.15.

Дисперсию S_y^2 подсчитали по формуле (6.11):

$$S_y^2 = \frac{20(0,95^2 + 0,05^2 + 0,55^2 + 1,25^2)}{20 - 15 - 1} = 13,58 ;$$

$$S_y = 3,722 .$$

Проверили статистическую значимость коэффициентов, для чего, рассчитав по (5.39) дисперсии оценок коэффициентов, построили по (5.33) их доверительные интервалы:

$$S_{b_i}^2 = \frac{13,58}{20} = 0,6925 ; \quad S_{b_i} = 0,832 ;$$

$$f_1 = 20 - 15 - 1 = 4 ; \quad t_{0,95;4} = 2,78 ;$$

$$\Delta b_i = 2,78 \cdot 0,832 = 2,313 .$$

Статистически значимые коэффициенты, т.е. те, для которых выполняется условие (5.34), отмечены в табл. 6.15 звездочками.

Таким образом, зависимость отбеливаемости чугуна от изученных факторов можно в данном случае описать следующим уравнением:

$$y = 29,65 + 2,95x_2 + 2,85x_3 + 2,65x_5 - 5,25x_8 - 2,85x_{11} + 5,35x_{13} + 3,65x_{14} + 5,95x_{15} . \quad (6.12)$$

Таблица 6.15

Планирование отсеивающего эксперимента по выбору факторов,
влияющих на отбеливаемость чугуна

Факторы	Содержание в чугуне, %					Тип шихты	Способ науглероживания	Время расплавления, ч	Температура конца расплавления, °C	Температура макс. нагрева, °C	Время выдержки, мин	Тип модификатора	Температура модифицирования, °C	Время модифицирования, мин.	Кол-во модификатора, %	Фиктивные факторы				Отбеливаемость, %
	Mn	Si	C	S	P															
Основной уровень	0,4	2,5	3	0,03	0,03	-	-	2	1400	1550	10	-	1400	10	0.4	-	-	-	-	
Интервал в арьи- рования	0,2	0,5	0,5	0,02	0,02	-	-	0,5	50	50	10	-	50	5	0.2	-	-	-	-	
Верхний уровень(+1)	0,6	3	3,5	0,05	0,05	Углеродистая сталь	куски	2,5	1450	1600	20	SiCa	1450	15	0.6	-	-	-	-	
Нижний уровень(-1)	0,2	2	2,5	0,01	0,01	Транс- форматорная сталь	порошок	1,5	1350	1500	0	FeSi	1350	5	0.2	-	-	-	-	
Код	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}	x_{17}	x_{18}	x_{19}	y

Окончание табл. 6.15

Код	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}	x_{17}	x_{18}	x_{19}	y
Опыт 1	+	+	-	-	+	+	+	+	-	+	-	+	-	-	-	-	+	+	-	30
2	-	+	+	-	-	+	+	+	+	-	+	-	+	-	-	-	-	+	+	10
3	+	-	+	+	-	-	-	+	+	+	-	+	-	+	-	-	-	-	+	30
4	+	+	-	+	+	-	-	+	+	+	+	-	+	-	+	-	-	-	-	13
5	-	+	+	-	+	+	+	-	+	+	+	+	-	+	-	+	-	-	-	40
6	-	-	+	+	-	+	+	-	-	+	+	+	+	-	+	-	+	-	-	40
7	-	-	-	+	+	-	-	+	-	-	+	+	+	+	-	+	-	+	-	22
8	-	-	-	-	+	+	+	+	+	-		+	+	+	+	-	+	-	+	36
9	+	-	-	-	-	+	+	-	+	+	-	-	+	+	+	+	-	+	-	31
10	-	+	-	-	-	-	-	+	-	+	-	-	-	+	+	+	+	-	+	30
11	+	-	+	-	-	-	-	+	+	-	+	+	-	-	+	+	+	+	-	21
12	-	+		+	-	-	-	-	+	+	+	+	+	-	-	+	+	+	+	31
13	+	-	-	-	+	-	-	-	-	+	-	-	+	+	-	-	+	+	+	32
14	+	+	+	+	-	+	+	-	-	-	+	+	-	+	+	-	-	+	+	45
15	+	+	-	-	+	-	-	-	-	-	+	+	+	-	+	+	-	-	+	55
16	+	+	+	+	-	+	+	+	-	-	-	-	+	+	-	+	+	-	-	17
17	-	+	+	+	+	-	+	+	+	-	-	-	-	+	+	-	+	+	-	50
18	-	-	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-	+	-	-	+	+	30
19	-	-	-	+	+	+	+	-	+	-	+	-	-	-	-	-	+	-	+	10
20	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	15
b_i	-0,75	2,95 *	2,85 *	-0,35	2,65 *	-0,75	1,15	-5,25 *	-1,95	1,55	-2,85 *	5,15 *	-0,45	3,65 *	5,95 *	-0,95	0,05	0,55	1,25	

Анализ абсолютных значений и знаков коэффициентов этого уравнения позволяет выделить факторы, наиболее сильно влияющие на отбеливаемость. Среди них в первую очередь следует отметить x_{15} (количество модификатора), x_{12} (тип модификатора) и x_8 (время расплавления).

Уравнение (6.12) включает 9 членов и было получено по 20 опытам, поэтому можно проверить его адекватность. Для этого подсчитаем по (5.47) дисперсию адекватности. Оказалось, что

$$S_{ad}^2 = \frac{231,4}{20 - 9} = 21,04; \quad f_2 = 8.$$

Расчетное значение F -критерия по (5.45)

$$F = 21,04/13,85 = 1,52,$$

что меньше $F_{11;4} = 5,93$ при $q = 0,05$, $f_2 = 11$ и $f_1 = 4$. Следовательно, при 5%-ном уровне значимости модель (6.12) можно признать адекватной. Теперь при необходимости этой моделью можно воспользоваться для снижения отбеливаемости изучаемого чугуна.

Контрольные вопросы

1. Назовите основные достоинства планов Хартли, рассматриваемых в данном пособии.
2. Как строится матрица планирования планов Хартли?
3. Как проводится оценка значимости коэффициентов регрессионного уравнения, полученного с использованием планов Хартли?
4. Назовите основные достоинства планов Плакетта – Бермана, рассматриваемых в данном пособии.
5. Как строится матрица планирования планов Плакетта – Бермана?
6. Как проводится оценка значимости коэффициентов регрессионного уравнения, полученного с использованием планов Плакетта – Бермана?
7. Как оценивается адекватность математических моделей, полученных с использованием планов Хартли и Плакетта – Бермана?

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Лукьянов С.И., Панов А.Н., Васильев А.Е. Основы инженерного эксперимента: учеб. пособие. – Магнитогорск: ГОУ ВПО «МГТУ им. Г.И. Носова», 2006. – 94 с.
2. Пригода В.П. Введение в теорию эксперимента: учеб. пособие. – Магнитогорск: ГОУ ВПО «МГТУ», 2005. – 130 с.
3. Шенк Х. Теория инженерного эксперимента: пер. с англ. / под ред. Н.П. Бусленко. – М.: Мир, 1972. – 381 с.
4. Румшиский Л.З. Математическая обработка результатов эксперимента. – М.: Наука, 1971. – 192 с.
5. Адлер Ю.П., Маркова Е.В., Грановский Ю.В. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий. – М.: Высш. шк., 1976. – 279 с.
6. Ивоботенко Б.А., Ильинский Н.Ф., Копылов И.П. Планирование эксперимента в электромеханике. – М.: Энергия, 1975. – 184 с.
7. Математическая статистика /В.М. Иванова, В.Н. Калинина, Л.А. Нешумова и др. – М.: Высш. шк., 1981. – 371 с.
8. Налимов В.В. Теория эксперимента. – М.: Наука, 1971. – 208 с.
9. Новик Ф.С., Арсов Я.Б. Оптимизация процессов технологии металлов методами планирования экспериментов. – М.: Машиностроение; София: Техника, 1980. – 304 с.
10. Горский В.Г., Адлер Ю.П. Планирование промышленных экспериментов. – М.: Металлургия, 1974. – 264 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица П1

Формулы размерности механических величин

Величина	Размерность
Объем	L^3
Кривизна	L^{-1}
Скорость	$L\theta^{-1}$
Ускорение	$L\theta^{-2}$
Угловая скорость	θ^{-1}
Угловое ускорение	θ^{-2}
Плотность	ML^{-3}
Количество движения	$ML\theta^{-1}$
Момент количества движения	$ML^2\theta^{-1}$
Сила	$ML\theta^{-2}$
Работа, энергия	$ML^2\theta^{-2}$
Мощность	$ML^2\theta^{-3}$
Вязкость	$ML^{-1}\theta^{-1}$
Кинематическая вязкость	$L^2\theta^{-1}$
Поверхностное натяжение	$M\theta^{-2}$
Давление	$ML^{-1}\theta^{-2}$
Момент силы	$ML^2\theta^{-2}$

Формулы размерности тепловых величин

Величина	Размерность	
	Тепловая формула	Динамическая формула
Количество тепла	H	$ML^2\theta^{-2}$
Удельная теплоемкость	$HM^{-1}T^{-1}$	$L^2\theta^{-2}T^{-1}$
Теплопроводность	$HL^{-1}\theta^{-1}T^{-1}$	$LM\theta^{-3}T^{-1}$

Величина	Размерность	
	Тепловая формула	Динамическая формула
Коэффициент теплопередачи	$HL^2\theta^{-1}T^{-1}$	$M\theta^{-3}T^{-1}$
Энтропия	HT^{-1}	$ML^2\theta^{-2}T^{-1}$
Коэффициент теплового расширения	T^{-1}	T^{-1}

Формулы размерности электрических и магнитных величин

Величина	Размерность	
	Электромагнитная	Электростатическая
Напряженность магнитного поля	$M^{1/2}L^{-1/2}\theta^{-1}\mu^{-1/2}$	$M^{1/2}L^{1/2}\theta^{-2}K^{1/2}$
Магнитный заряд полюса	$M^{1/2}L^{3/2}\theta^{-1}\mu^{1/2}$	$M^{1/2}L^{1/2}K^{-1/2}$
Электрический ток	$M^{1/2}L^{1/2}\theta^{-1}\mu^{-1/2}$	$M^{1/2}L^{3/2}\theta^{-2}K^{1/2}$
Электрический заряд	$M^{1/2}L^{1/2}\mu^{-1/2}$	$M^{1/2}L^{3/2}\theta^{-1}K^{1/2}$
Разность потенциалов	$M^{1/2}L^{3/2}\theta^{-2}\mu^{1/2}$	$M^{1/2}L^{1/2}\theta^{-1}K^{-1/2}$
Сопротивление	$L\theta^{-1}\mu$	$L^{-1}\theta K^{-1}$
Емкость	$L^{-1}\theta^2\mu^{-1}$	LK
Индуктивность	$L\mu$	$L^{-1}\theta^2K^{-1}$
Магнитная проницаемость	μ	$L^{-2}\theta^2K^{-1}$
Диэлектрическая проницаемость	$L^{-1}\theta^2\mu^{-1}$	K

Базовые величины: M – масса; L – длина; θ – время; T – температура; H – тепловая энергия; K – диэлектрическая проницаемость; μ – постоянная магнитного поля.

Таблица П2

Значение нормированной функции Лапласа $\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{t^2}{2}} dt$; $\Phi(-t) = -\Phi(t)$

t	Сотые доли t									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,00000	0,00399	0,00798	0,0119	0,01595	0,01994	0,0239	0,0279	0,0318	0,03586
0,1	0,03983	0,04380	0,04776	0,05172	0,05567	0,05962	0,06356	0,06749	0,07142	0,07535
0,2	0,07926	0,08317	0,08706	0,09095	0,09483	0,09871	0,10257	0,10642	0,11026	0,11409
0,3	0,11791	0,12172	0,12552	0,12930	0,13307	0,13683	0,14058	0,14431	0,14803	0,15173
0,4	0,15542	0,15910	0,16276	0,16640	0,17003	0,17364	0,17724	0,18082	0,18439	0,18793
0,5	0,19146	0,19497	0,19847	0,20194	0,20540	0,20884	0,21226	0,21566	0,21904	0,22240
0,6	0,22575	0,22907	0,23237	0,23565	0,23891	0,24215	0,24537	0,24857	0,25175	0,25490
0,7	0,25804	0,26115	0,26424	0,26730	0,27035	0,27337	0,27637	0,27935	0,28230	0,28524
0,8	0,28814	0,29103	0,29389	0,29673	0,29955	0,30234	0,30511	0,30785	0,31057	0,31327
0,9	0,31594	0,31859	0,32121	0,32381	0,32639	0,32894	0,33147	0,33398	0,33646	0,33891
1,0	0,34134	0,34375	0,34614	0,34850	0,35083	0,35314	0,35543	0,35769	0,35993	0,36214
1,1	0,36433	0,36650	0,36864	0,37076	0,37286	0,37493	0,37698	0,37900	0,38100	0,38298
1,2	0,38493	0,38686	0,38877	0,39065	0,39251	0,39435	0,39617	0,39796	0,39973	0,40147
1,3	0,40320	0,40490	0,40658	0,40824	0,40988	0,41149	0,41309	0,41466	0,41621	0,41774
1,4	0,41924	0,42073	0,42220	0,42364	0,42507	0,42647	0,42786	0,42922	0,43056	0,43189
1,5	0,43319	0,43448	0,43574	0,43699	0,43822	0,43943	0,44062	0,44179	0,44295	0,44408
1,6	0,44520	0,44630	0,44738	0,44845	0,44950	0,45053	0,45154	0,45254	0,45352	0,45449
1,7	0,45543	0,45637	0,45728	0,45818	0,45907	0,45994	0,46080	0,46164	0,46246	0,46327
1,8	0,46407	0,46485	0,46562	0,46638	0,46712	0,46784	0,46856	0,46926	0,46995	0,47062
1,9	0,47128	0,47193	0,47257	0,47320	0,47381	0,47441	0,47500	0,47558	0,47615	0,47670
2,0	0,47725	0,47778	0,47831	0,47882	0,47932	0,47982	0,48030	0,48077	0,48124	0,48169
2,1	0,48214	0,48257	0,48300	0,48341	0,48382	0,48422	0,48461	0,48500	0,48537	0,48574
2,2	0,48610	0,48645	0,48679	0,48713	0,48745	0,48778	0,48809	0,48840	0,48870	0,48899
2,3	0,48928	0,48956	0,48983	0,49010	0,49036	0,49061	0,49086	0,49111	0,49134	0,49158
2,4	0,49180	0,49202	0,49224	0,49245	0,49266	0,49286	0,49305	0,49324	0,49343	0,49361
2,5	0,49379	0,49439	0,49413	0,49430	0,49446	0,49461	0,49477	0,49492	0,49506	0,49520

Таблица ПЗ

Величины, связанные с интегралом вероятности $\Phi(t)$;
 функция t_p является обратной для $p=2\Phi(t)$

t	$\Phi(t)$	$1-2\Phi(t)$	q	t_p	$p=1-q$
2,5	0,49379	0,01242	0,05	1,960	0,95
2,6	0,49534	0,00932	0,04	2,054	0,96
2,7	0,49653	0,00693	0,03	2,170	0,97
2,8	0,49744	0,00511	0,02	2,326	0,98
2,9	0,49813	0,00373	0,01	2,576	0,99
3,0	0,49865	0,00270	0,009	2,612	0,991
3,1	0,49903	0,00194	0,008	2,652	0,992
3,2	0,49931	0,00137	0,007	2,697	0,993
3,3	0,49952	0,00097	0,006	2,748	0,994
3,4	0,49966	0,00067	0,005	2,807	0,995
3,5	0,499767	0,000465	0,004	2,878	0,996
3,6	0,499841	0,000318	0,003	2,968	0,997
3,7	0,499892	0,000216	0,002	3,090	0,998
3,8	0,499927	0,000145	0,001	3,291	0,999
3,9	0,499952	0,000096	0,0009	3,320	0,9991
4,0	0,499968	0,000063	0,0008	3,353	0,9992
4,1	0,499979	0,000041	0,0007	3,390	0,9993
4,2	0,499987	0,000027	0,0006	3,432	0,9994
4,3	0,499991	0,000017	0,0005	3,481	0,9995
4,4	0,499995	0,000011	0,0004	3,540	0,9996
4,5	0,4999966	0,0000068	0,0003	3,615	0,9997
4,6	0,4999979	0,0000041	0,0002	3,720	0,9998
4,7	0,4999987	0,0000025	0,0001	3,891	0,9999
4,8	0,4999992	0,0000016	10^{-5}	4,417	$1 - 10^{-5}$
4,9	0,4999995	0,0000009	10^{-6}	4,892	$1 - 10^{-6}$
5,0	0,4999997	0,0000006	10^{-7}	5,327	$1 - 10^{-7}$

В таблице значений $\Phi(t)$ ошибка линейной интерполяции убывает с увеличением значений t ; она не превосходит:
 10^{-4} – в интервале (2,5 – 3,2); 10^{-5} – в интервале (3,2 – 3,9);
 10^{-6} – в интервале (3,9 – 4,5); 10^{-7} – в интервале (4,5 – 5,0).

В таблице значений t_p интерполяцию не производят.

Таблица П4

Критические значения $t_{n;p}$ для отбраковки«выскакивающих» значений y^* $(n$ – число приемлемых результатов, p – надежность вывода)

n	p				n	p			
	0,95	0,98	0,99	0,999		0,95	0,98	0,99	0,999
5	3,04	4,11	5,04	9,43	20	2,145	2,602	2,932	3,979
6	2,78	3,64	4,36	7,41	25	2,105	2,541	2,852	3,819
7	2,62	3,36	3,96	6,37	30	2,079	2,503	2,802	3,719
8	2,51	3,18	3,71	5,73	35	2,061	2,476	2,768	3,652
9	2,43	3,05	3,54	5,31	40	2,048	2,456	2,742	3,602
10	2,37	2,96	3,41	5,01	45	2,038	2,441	2,722	3,565
11	2,33	2,89	3,31	4,79	50	2,030	2,429	2,707	3,532
12	2,29	2,83	3,23	4,62	60	2,018	2,411	2,683	3,492
13	2,26	2,78	3,17	4,48	70	2,009	2,399	2,667	3,462
14	2,24	2,74	3,12	4,37	80	2,003	2,389	2,655	3,439
15	2,22	2,71	3,08	4,28	90	1,998	2,382	2,646	3,423
16	2,20	2,68	3,04	4,20	100	1,994	2,377	2,639	3,409
17	2,18	2,66	3,01	4,13	∞	1,960	2,326	2,576	3,291
18	2,17	2,64	2,98	4,07					

Линейная интерполяция по аргументу n может дать ошибку до 10^{-2} при $20 < n < 60$ и ошибку до 10^{-3} при $60 < n < 100$.

При $n > 100$ критические значения $t_{n;p}$ с точностью до 10^{-3} можно вычислить по формуле

$$t_{n;p} = t_{\infty;p} + \frac{t_{100;p} - t_{\infty;p}}{n} \cdot 100,$$

например, при $p = 0,99$ и $n = 200$ имеем:

$$t_{0,99;200} = 2,576 + \frac{2,639 - 2,576}{200} \cdot 100 = 2,576 + 0,031 = 2,607.$$

Таблица П5

Распределение Стьюдента. Значения $t_{p; f}$

f	p			f	p		
	0,90	0,95	0,99		0,90	0,95	0,99
1	6,306	12,70	63,59	17	1,740	2,110	2,901
2	2,918	4,301	9,928	18	1,734	2,103	2,878
3	2,349	3,179	5,839	19	1,729	2,094	2,861
4	2,132	2,776	4,604	20	1,725	2,086	2,845
5	2,015	2,571	4,032	25	1,708	2,060	2,787
6	1,943	2,447	3,707	30	1,697	2,042	2,750
7	1,895	2,365	3,499	35	1,689	2,030	2,724
8	1,860	2,306	3,355	40	1,684	2,021	2,704
9	1,833	2,262	3,250	45	1,679	2,014	2,689
10	1,812	2,228	3,169	50	1,676	2,008	2,677
11	1,796	2,201	3,106	60	1,671	2,000	2,660
12	1,782	2,179	3,055	70	1,667	1,995	2,648
13	1,771	2,160	3,012	80	1,664	1,990	2,639
14	1,761	2,145	2,977	90	1,662	1,987	2,632
15	1,753	2,131	2,947	100	1,660	1,984	2,626
16	1,746	2,120	2,921	∞	1,645	1,960	2,576

Интерполяция значений $t_{p; f}$ допустима только по аргументу f . При $16 < f < 60$ ошибка линейной интерполяции не превосходит $4 \cdot 10^{-3}$ для $p = 0,99$. При $60 < f < 100$ ошибка линейной интерполяции не превосходит 10^{-3} . При $f > 100$ с точностью до 10^{-3} имеет место формула

$$t_{p; f} = t_{p; \infty} + \frac{t_{p; 100} - t_{p; \infty}}{f} \cdot 100.$$

Таблица П6

Критические значения $\chi^2_{p;f}$ при доверительной вероятности p
и числе степеней свободы f

f	p				f	p			
	0,50	0,90	0,95	0,99		0,50	0,90	0,95	0,99
1	0,45	2,71	3,84	6,64	14	13,3	21,1	23,7	29,1
2	1,39	4,61	5,99	9,21	15	14,3	22,3	25,0	30,6
3	2,37	6,25	7,81	11,3	16	15,3	23,5	26,3	32,0
4	3,36	7,78	9,49	13,3	17	16,3	24,8	27,6	33,4
5	4,35	9,24	11,1	15,1	18	17,3	26,0	28,9	34,8
6	5,35	10,6	12,6	16,8	19	18,3	27,2	30,1	36,2
7	6,35	12,0	14,1	18,5	20	19,3	28,4	31,4	37,6
8	7,34	13,4	15,5	20,1	21	20,3	29,6	32,7	38,9
9	8,34	14,7	16,9	21,7	22	21,3	30,8	33,9	40,3
10	9,34	16,0	18,3	23,2	23	22,3	32,0	35,2	41,6
11	10,3	17,3	19,7	24,7	24	23,3	33,2	36,4	43,0
12	11,3	18,5	21,0	26,2	25	24,3	34,4	37,7	44,3
13	12,3	19,8	22,4	27,7					

При $f > 30$ для критического значения $\chi^2_{p;f}$ можно пользоваться приближенным значением:

$$\chi^2_{p;f} \approx f \left(1 - \frac{2}{9f} + t_p \sqrt{\frac{2}{9f}} \right)^3,$$

где t_p — берется из табл. П3 приложения.

Например, при $f=100$ и $t_{0,99} = 2,576$ при $p = 0,99$:

$$\chi^2_{0,99;100} \approx 100 \left(1 - \frac{2}{900} + 2,576 \sqrt{\frac{2}{900}} \right)^3 = 100 \cdot 1,119^3 \approx 140.$$

Таблица П7

Критические значения критерия Фишера – $F_{f_2; f_1}$
 при доверительной вероятности $p = 0,95$ (верхняя строка) и $p = 0,99$ (нижняя строка)

f_1	f_2 – число степеней свободы в числителе																		
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	14	16	20	24	30	50	100	∞
1	161 4052	200 4999	216 5403	225 5625	230 5764	234 5859	237 5928	239 5981	241 6022	242 6056	244 6106	245 6142	246 6169	248 6208	249 6234	250 6258	252 6303	253 6334	254 6366
2	18,51 98,49	19,00 99,01	19,16 99,17	19,25 99,25	19,30 99,30	19,33 99,33	19,36 99,94	19,37 99,36	19,38 99,38	19,39 99,40	19,41 99,42	19,42 99,43	19,43 99,44	19,44 99,55	19,45 99,46	19,46 99,48	19,47 99,48	19,49 99,48	19,50 99,50
3	10,13 34,12	9,55 30,81	9,28 29,46	9,12 28,71	9,01 28,24	8,94 27,91	8,88 27,67	8,84 27,29	8,81 27,34	8,87 27,23	8,74 27,05	8,71 26,92	8,69 26,83	8,66 26,69	8,64 26,60	8,62 26,50	8,58 26,27	8,56 26,23	8,53 26,12
4	7,71 21,20	6,59 18,00	6,59 16,69	6,39 15,98	6,26 15,52	6,16 15,51	6,09 14,98	6,04 14,80	6,00 14,66	5,96 14,54	5,91 14,37	5,87 14,24	5,84 14,15	5,80 14,02	5,77 13,93	5,74 13,83	5,70 13,69	5,66 13,57	5,63 13,46
5	6,61 16,26	5,79 13,27	5,41 12,06	5,19 11,39	5,05 10,97	4,95 10,67	4,88 10,45	4,82 10,27	4,78 10,15	4,74 10,05	4,68 9,89	4,64 9,70	4,60 9,68	4,56 9,55	4,53 9,47	4,50 9,38	4,46 9,24	4,40 9,13	4,36 9,02
6	5,99 13,74	5,14 10,92	4,76 9,98	4,53 9,15	4,39 8,75	4,28 8,47	4,21 8,26	4,15 8,10	4,10 7,98	4,06 7,87	4,00 7,72	3,96 7,60	3,92 7,52	3,87 7,39	3,84 7,31	3,81 7,23	3,75 7,09	3,71 6,99	3,67 6,88
7	5,59 12,25	4,74 9,55	4,35 8,45	4,12 7,85	3,98 7,46	3,87 7,19	3,79 7,00	3,73 6,84	3,68 6,71	3,63 6,62	3,57 6,47	3,52 6,35	3,49 6,27	3,44 6,15	3,41 6,07	3,38 5,98	3,32 5,85	3,28 5,75	3,23 5,65
8	5,32 11,26	4,46 8,65	4,07 7,59	3,84 7,01	3,69 6,63	3,58 6,37	3,50 6,19	3,44 6,03	3,39 5,91	3,34 5,82	3,28 5,67	3,23 6,65	3,20 5,48	3,15 5,36	3,12 5,28	3,08 5,20	3,03 5,06	2,98 4,96	2,93 4,86
9	5,12 10,56	4,26 8,02	3,86 6,99	3,63 6,42	3,48 6,06	3,37 5,80	3,29 5,62	3,23 5,47	3,18 5,35	3,13 5,26	3,07 5,11	3,02 5,00	2,98 4,98	2,93 4,80	2,90 4,73	2,86 4,64	2,80 4,51	2,76 4,41	2,71 4,31
10	4,96 10,04	4,10 7,56	3,71 6,55	3,48 5,99	3,33 5,64	3,22 5,39	3,14 5,21	3,07 5,06	3,02 4,95	2,97 4,85	2,91 4,71	2,86 4,60	2,82 4,52	2,77 4,41	2,74 4,33	2,70 4,25	2,64 4,12	2,59 4,01	2,54 3,91

Окончание табл. П7

f_1	f_2 – число степеней свободы в числителе																		
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	14	16	20	24	30	50	100	∞
15	4,54 8,68	3,68 6,36	3,29 5,42	3,06 4,89	2,90 4,56	2,79 4,32	2,70 4,14	2,64 4,00	2,59 3,89	2,55 3,80	2,48 3,67	2,43 3,56	2,39 3,48	2,33 3,36	2,29 3,29	2,25 3,20	2,18 3,07	2,12 2,97	2,07 2,87
20	4,35 8,10	3,49 5,85	3,10 4,94	2,87 4,43	2,71 4,10	2,60 3,87	2,52 3,71	2,45 3,56	2,40 3,45	2,35 3,37	2,29 3,23	2,23 3,13	2,18 3,05	2,12 2,94	2,08 2,86	2,04 2,77	1,96 2,63	1,90 2,53	1,84 2,42
30	4,16 7,56	3,32 5,39	2,92 4,51	2,69 4,02	2,53 3,70	2,42 3,47	2,34 3,30	2,27 3,17	2,21 3,06	2,16 2,98	2,09 2,84	2,04 2,74	1,99 2,66	1,93 2,55	1,89 2,47	1,84 2,38	1,76 2,24	1,69 2,13	1,62 2,01
50	4,03 7,17	3,18 5,06	2,79 4,20	2,56 3,72	2,40 3,41	2,29 3,18	2,20 3,02	2,13 2,88	2,07 2,78	2,02 2,70	1,95 2,56	1,90 2,46	1,85 2,39	1,78 2,26	1,74 2,18	1,69 2,10	1,60 1,94	1,52 1,82	1,44 1,68
100	3,94 6,90	3,09 4,82	2,70 3,98	2,46 3,51	2,30 3,20	2,19 2,99	2,10 2,82	2,08 2,69	1,97 2,59	1,92 2,51	1,85 2,36	1,79 2,26	1,75 2,19	1,68 2,06	1,63 1,98	1,57 1,89	1,48 1,73	1,39 1,59	1,29 1,43
∞	3,84 6,64	2,99 4,60	2,60 3,78	2,37 3,32	2,21 3,02	2,09 2,80	2,01 2,64	1,94 2,51	1,88 2,41	1,83 2,32	1,75 2,18	1,69 2,07	1,64 1,99	1,57 1,87	1,52 1,79	1,46 1,79	1,35 1,52	1,24 1,36	1,00 1,00

Таблица допускает линейную интерполяцию по аргументу f_2 и квадратичную интерполяцию по аргументу f_1 с ошибкой до 0,01.

Таблица П8

Критические значения отношения $G_{p;N;f}$ при доверительной
вероятности $p=0,95$ (верхняя строка) и $p=0,99$ (нижняя)

N	f – число степеней свободы											
	1	2	3	4	5	6	8	10	16	36	144	∞
2	0,999 —	0,975 —	0,939 —	0,906 —	0,858 —	0,853 —	0,816 —	0,788 —	0,734 —	0,660 —	0,581 —	0,500 —
3	0,967 —	0,871 —	0,798 —	0,707 —	0,677 —	0,653 —	0,633 —	0,603 —	0,547 —	0,475 —	0,403 —	0,333 —
4	0,907 —	0,768 —	0,684 —	0,629 —	0,590 —	0,560 —	0,518 —	0,488 —	0,437 —	0,372 —	0,309 —	0,250 —
5	0,841 —	0,684 —	0,598 —	0,544 0,633	0,507 0,588	0,478 0,553	0,439 0,504	0,412 0,470	0,365 0,409	0,307 0,335	0,251 0,264	0,200 0,200
6	0,781 —	0,616 —	0,532 —	0,480 0,564	0,445 0,520	0,418 0,487	0,382 0,440	0,357 0,408	0,314 0,353	0,261 0,286	0,212 0,223	0,167 0,167
7	0,727 —	0,561 —	0,480 —	0,431 0,508	0,397 0,466	0,373 0,435	0,338 0,391	0,315 0,362	0,276 0,311	0,228 0,249	0,183 0,193	0,143 0,143
8	0,680 —	0,516 —	0,438 —	0,391 0,463	0,360 0,427	0,336 0,393	0,304 0,352	0,283 0,325	0,246 0,278	0,202 0,221	0,162 0,170	0,125 0,125
9	0,640 —	0,478 —	0,403 —	0,358 0,425	0,329 0,387	0,307 0,359	0,277 0,321	0,257 0,295	0,223 0,251	0,182 0,199	0,145 0,152	0,111 0,111
10	0,602 —	0,445 —	0,373 —	0,331 0,393	0,303 0,357	0,282 0,331	0,254 0,295	0,235 0,270	0,203 0,230	0,166 0,181	0,131 0,138	0,100 0,100

N	f – число степеней свободы											
	1	2	3	4	5	6	8	10	16	36	144	∞
15	0,471 –	0,335 –	0,276 –	0,242 0,288	0,220 0,259	0,203 0,239	0,182 0,210	0,167 0,192	0,143 0,161	0,114 0,125	0,089 0,093	0,067 0,067
20	0,389 –	0,271 –	0,221 –	0,192 0,229	0,174 0,205	0,160 0,188	0,142 0,165	0,130 0,150	0,111 0,125	0,088 0,096	0,068 0,071	0,050 0,050
30	0,293 –	0,198 –	0,159 –	0,138 0,164	0,124 0,145	0,114 0,133	0,100 0,116	0,092 0,105	0,077 0,087	0,060 0,066	0,046 0,048	0,033 0,033
40	0,237 –	0,158 –	0,126 –	0,108 0,128	0,097 0,114	0,089 0,103	0,078 0,090	0,071 0,082	0,060 0,067	0,046 0,050	0,035 0,036	0,025 0,025
60	0,174 –	0,113 –	0,090 –	0,077 0,090	0,068 0,080	0,062 0,072	0,055 0,063	0,050 0,057	0,041 0,046	0,032 0,034	0,023 0,025	0,017 0,017
120	0,100 –	0,063 –	0,050 –	0,042 0,049	0,037 0,043	0,034 0,039	0,029 0,033	0,027 0,030	0,022 0,024	0,017 0,018	0,012 0,013	0,008 0,008

Интерполяция по аргументу N с точностью до 10^{-3} допустима по формуле

$$G_N = G_{N_0} + [G_{N_1} - G_{N_0}] \frac{N - N_0}{N_1 - N_0} \cdot \frac{N_1}{N}; \quad (N_0 < N < N_1).$$

Например, при $f = 4$, $p = 0,99$ и $N = 50$ критическое значение $G_{0,99;50;4}$ находится по значениям $G_{0,99;40;4} = 0,128$ и $G_{0,99;60;4} = 0,090$ так:

$$G_{0,99;50;4} = 0,128 - 0,038 \cdot \frac{10}{20} \cdot \frac{60}{50} = 0,105.$$

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ	5
1.1. Инженерный эксперимент	5
1.2. Определения и термины	7
1.3. Факторы в эксперименте	10
1.4. Уменьшение набора переменных. Анализ размерностей	11
Контрольные вопросы	15
2. ОШИБКИ ЭКСПЕРИМЕНТА	16
2.1. Распределение случайных ошибок измерения	18
2.2. Оценка истинного значения измеряемой величины	20
2.3. Проверка нормальности распределения	22
2.4. Методы исключения грубых ошибок	29
Контрольные вопросы	31
3. ПРОВЕРКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ	32
3.1. Сравнение средних значений. Критерий Стьюдента – t_p	32
3.2. Сравнение двух дисперсий. Критерий Фишера (F -критерий)	35
3.3. Выделение большей дисперсии из многих. Критерий Кохрена (G -критерий)	36
Контрольные вопросы	37
4. ОСНОВЫ ПЛАНИРОВАНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА	38
4.1. Полный факторный эксперимент	38
4.2. Дробный факторный эксперимент	46
4.3. Ортогональный план второго порядка	50
4.4. Преобразование независимых переменных	57
4.5. Метод крутого восхождения	63
Контрольные вопросы	66
5. ПРОВЕДЕНИЕ И СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТА	67
5.1. Проведение эксперимента	67
5.2. Определение дисперсии опыта	72
5.3. Определение коэффициентов регрессии математической модели	75
5.3.1. Классический метод наименьших квадратов	75
5.3.2. Матричный подход к методу наименьших квадратов	81
5.3.3. Быстрые и приближенные методы построения наилучшей прямой	86
5.4. Проверка статистической значимости коэффициентов регрессии	89

5.5. Проверка адекватности математической модели.....	93
Контрольные вопросы	100
6. ПРИМЕНЕНИЕ ФАКТОРНЫХ ПЛАНОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ	
КОНКРЕТНЫХ ЗАДАЧ	101
6.1. Использование полного факторного эксперимента 2^4 с равномерным дублированием опытов	101
6.2. Использование ортогонального плана эксперимента второго порядка.....	110
6.3. Использование несимметричных почти или полностью насыщенных планов Хартли	115
6.4. Использование факторных планов для отсеивающих экспериментов. Планы Плакетта – Бермана.....	125
Контрольные вопросы	132
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	133
ПРИЛОЖЕНИЕ	134

Св. темплан 2009, поз. 27

Заявки на книгу присылать по адресу:
455000, Магнитогорск, пр. Ленина, 38,
ГОУ ВПО «МГТУ», кафедра МОМЗ
Тел.: (3519) 29-85-07; факс: 29-84-26

ISBN 978-5-9967-0084-4



ОНШИН Николай Викторович

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПЛАНИРОВАНИЯ ИНЖЕНЕРНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Учебное пособие

Редактор Н.В. Кутекина

Оператор компьютерной верстки Е.А.Назарова

Подписано в печать 30.10.09 Формат 60х84 1/16.

Плоская печать. Усл.печ.л. 9,25.

Заказ 783.

Бумага тип.№ 1.

Уч.-изд.л. 9,71.

Тираж 100 экз.



Издательский центр ГОУ ВПО «МГТУ»
455000, Магнитогорск, пр. Ленина, 38
Полиграфический участок ГОУ ВПО «МГТУ»